



Тема 7. Властивості квадратних арифметичних коренів. Ірраціональні вирази

1. Властивості квадратних арифметичних коренів

Означення. Арифметичний квадратний корінь з невід'ємного числа a є таким невід'ємним числом b , квадрат якого дорівнює a . Позначається це $b = \sqrt{a}$, і відповідно $b^2 = a$.

Основні властивості:

1. Невід'ємність: $\sqrt{a} \geq 0$ для будь-якого $a \geq 0$.
2. Квадратний корінь з нуля: $\sqrt{0} = 0$.
3. Множення коренів: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$, за умови, що $a \geq 0$, $b \geq 0$.
4. Ділення коренів: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, за умови, що $a \geq 0$, $b > 0$.
5. Степінь кореня: $(\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}$, де n - натуральне число.
6. Парність і непарність степенів: $\sqrt{a^2} = a$, якщо $a \geq 0$; $\sqrt{a^2} = -a$, якщо $a < 0$.

Основні формули квадратних арифметичних коренів:

1. $\sqrt{a^2} = |a|$
2. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$
3. $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
4. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
5. $(a + \sqrt{b}) \cdot (a - \sqrt{b}) = a^2 - b$
6. $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$ (раціоналізація знаменника)
7. $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ — вирази не спрощуються, якщо тільки a і b не є повними квадратами.

Приклади

1. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6.$
2. $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{50}{2}} = \sqrt{25} = 5.$
3. $(\sqrt{5})^2 = \sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5.$
4. $\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{5}.$
5. $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$
6. $\frac{1}{3+\sqrt{8}} = \frac{1 \cdot (3-\sqrt{8})}{(3+\sqrt{8})(3-\sqrt{8})} = \frac{3-\sqrt{8}}{9-8} = \frac{3-\sqrt{8}}{1} = 3 - \sqrt{8}.$
7. $\sqrt{(-7)^2} = |-7| = 7.$

2. Ірраціональні вирази

Означення. Ірраціональним виразом називають вираз, який містить квадратний корінь з числа, що не є повним квадратом. Ірраціональні вирази не можуть бути точно виражені як скінченний або періодичний дріб.

Дії з ірраціональними виразами:

1. Спрощення ірраціональних виразів:

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}.$$

2. Раціоналізація ірраціональних знаменників:

- Щоб раціоналізувати знаменник з ірраціональним виразом, множимо чисельник і знаменник на такий самий ірраціональний вираз:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

- Щоб раціоналізувати вирази з ірраціональністю в знаменнику, можна помножити чисельник та знаменник на спряжений вираз. Спряжений до $(a + \sqrt{b})$ є $(a - \sqrt{b})$:

$$\frac{1}{1 + \sqrt{5}} \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} = \frac{1 - \sqrt{5}}{1 - 5} = \frac{1 - \sqrt{5}}{-4}.$$

3. Додавання та віднімання ірраціональних виразів:

Для додавання чи віднімання ірраціональних виразів, спочатку потрібно переконатися, що вирази мають однаковий ірраціональний компонент:

$$2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}.$$

4. Множення та ділення ірраціональних виразів:

При множенні чи діленні виразів з ірраціональними числами, користуємося властивостями коренів:

$$1. \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$$

$$2. (\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3}) = 2 - 3 = -1$$

$$3. \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$$

$$4. \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{9} = 3$$