



## Тема 14. Вирази, рівняння та нерівності з модулями

### 1. Рівняння з модулями

*Означення.* Модуль (абсолютна величина) числа  $x$  позначається як  $|x|$  і визначається як відстань числа  $x$  від нуля на числовій прямій. Модуль має наступні властивості:

1.  $|x| = x$ , якщо  $x \geq 0$
2.  $|x| = -x$ , якщо  $x < 0$
3.  $|x| \geq 0$  для будь-якого  $x$

Рівняння з модулем має форму  $|P(x)| = a$ , де  $P(x)$  — поліном, а  $a$  — невід'ємне число. Розв'язок такого рівняння зводиться до розв'язання двох рівнянь:  $P(x) = a$  і  $P(x) = -a$ .

*Приклад:*

$$|x - 3| = 5$$

$$\begin{aligned} x - 3 &= 5 \text{ або } x - 3 = -5 \\ x &= 8 \text{ або } x = -2 \end{aligned}$$

### 2. Нерівності з модулями

*Означення.* Нерівності з модулем можуть мати кілька форм, наприклад,  $|P(x)| < a$ ,  $|P(x)| > a$ , де  $P(x)$  — поліном, а  $a$  — додатне число.

*Приклад:*

1.

$$\begin{aligned} |x + 2| &< 3 \\ -3 &< x + 2 < 3 \\ -5 &< x < 1 \end{aligned}$$

2.

$$|2x - 4| > 6$$

$$2x - 4 > 6 \text{ або } 2x - 4 < -6$$

$$2x > 10 \text{ або } 2x < -2$$

$$x > 5 \text{ або } x < -1$$

### 3. Системи рівнянь і нерівностей з модулями

#### Приклади

1.

$$\begin{cases} |x + 1| < 4 \\ |x - 2| > 1 \end{cases}$$

1.  $|x + 1| < 4$  розбиваємо на  $x + 1 < 4$  і  $x + 1 > -4$ , отже,  $-5 < x < 3$ .

2.  $|x - 2| > 1$  розбиваємо на  $x - 2 > 1$  і  $x - 2 < -1$ , отже,  $x > 3$  або  $x < 1$ .

Об'єднуючи ці умови, отримуємо  $x < 1$ , оскільки це єдина частина, яка задовольняє обидві умови системи.

2.

$$\begin{cases} |x - 3| + |x + 2| = 8 \\ |x + 1| - |x - 4| = 3 \end{cases}$$

Хід розв'язку системи рівнянь з модулями вимагає розглядати різні випадки залежно від значення  $x$ . Для кожного модуля в рівнянні ми визначаємо інтервали, де вираз всередині модуля є позитивним або негативним. Розглянемо кожен випадок окремо.

Розглянемо перше рівняння системи:  $|x - 3| + |x + 2| = 8$ . Розбиваємо числову пряму на інтервали за критичними точками модулів, тобто:  $x < -2$ ,  $-2 \leq x < 3$ , і  $x \geq 3$ .

1. Для  $x < -2$ :

$$-(x - 3) - (x + 2) = 8$$

Розв'язуємо отримане лінійне рівняння.

$x = -3,5$  – корінь задовільняє умову

2. Для  $-2 \leq x < 3$ :

$$(x - 3) + (x + 2) = 8$$

Розв'язуємо отримане лінійне рівняння.

$x = 4,5$  – корінь виходить за межі допустимої множини

3. Для  $x \geq 3$ :

$$(x - 3) + (x + 2) = 8$$

Розв'язуємо отримане лінійне рівняння.

$x = 4,5$  –корінь задовільняє умову

4. Розглянемо друге рівняння системи:  $|x + 1| - |x - 4| = 3$ . Аналогічно розбиваємо числову пряму на інтервали:  $x < 1$ ,  $1 \leq x < 4$  і  $x \geq 4$ .

5. Для  $x < 1$ :

$$-(x + 1) - (x - 4) = 3$$

Розв'язуємо отримане лінійне рівняння.

$x = 0$  –корінь задовільняє умову

6. Для  $1 \leq x < 4$ :

$$(x + 1) - (x - 4) = 3$$

Розв'язуємо отримане лінійне рівняння.

Дане рівняння не має розв'язку

7. Для  $x \geq 4$ :

$$(x + 1) - (x - 4) = 3$$

Розв'язуємо отримане лінійне рівняння.

Дане рівняння не має розв'язку

8. Після розв'язання лінійних рівнянь для кожного інтервалу, перевіряємо, чи розв'язок лежить у відповідному інтервалі та задовольняє обидва рівняння системи: серед усіх розв'язків лише  $x = -3,5$  лежить у інтервалі допустимих значень. Тепер перевіримо, чи задовольняє воно умову обох рівнянь:

$$\begin{cases} |-3,5 - 3| + |-3,5 + 2| = 8 \\ |-3,5 + 1| - |-3,5 - 4| = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 6,5 + 1,5 = 8 \\ 2,5 - 7,5 \neq 3 \end{cases}$$

Отже, система немає розв'язку.