Тема 12. Корінь n-го степеня. Степені з раціональними показником

1. *Корінь n-го степеня*

Означення. Корінь n-го степеня з числа a це таке число b, що $b^n = a$, де n — натуральне число. Корінь n-го степеня позначається як $\sqrt[n]{a}$.

Області допустимих значень і визначень:

1. Корінь парного степеня:

   Якщо n є парним, то a має бути невід'ємним, і b також буде невід'ємним.

2. Корінь непарного степеня:

   Якщо n є непарним, a може бути будь-яким числом, і b також може бути будь-яким числом.

Формули та правила для коренів n-го степеня:

1. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

2. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

3. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

4. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

5. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

6. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a^{m+n}}$

Приклади:

1. $\left(\sqrt[4]{16}\right)^4 = 16$
2. $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{216} = 6$
3. $\frac{\sqrt[2]{16}}{\sqrt[2]{4}} = \sqrt[2]{4} = 2$
4. $\frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{25} = 5^{\frac{2}{3}}$
5. $\left(\sqrt[2]{4}\right)^3 = \sqrt[2]{64} = 8$
6. $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$
7. $\sqrt[2]{5} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5^5}$

2. Степені з раціональним показником

Означення. Степінь з раціональним показником це вираз у формі $a^{\frac{m}{n}}$, де a — дійсне число, m та n — цілі числа, і $n \neq 0$. Цей вираз визначається як $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ або як $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$.

Усі формули, які допустимі в темі степені з натуральним показником, виконуються і в даній темі. Тому розглянемо додаткові формули для степенів з раціональними показниками.

Властивості та правила для степенів з раціональним показником:

1. $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
2. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$
3. $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$
4. $1^{\frac{m}{n}} = 1$ і $0^{\frac{m}{n}} = 0$ для $\frac{m}{n} > 0,\ n \neq 0.$

Приклади:

1. $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^1 = 2$

2. $\left(3x^{\frac{1}{3}} + 4y^{\frac{1}{3}}\right) \cdot \left(3x^{\frac{1}{3}} - 2y^{\frac{1}{3}}\right) = 9x^{\frac{2}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + 12x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} - 8y^{\frac{2}{3}}$

3. $\left(x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)^2 = x^{\frac{4}{3}} - 2x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{4}{3}}$

4. $2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

5. $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

6. $\frac{3}{1+\sqrt{5}} = \frac{3}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{3(1-\sqrt{5})}{1-5} = \frac{3(1-\sqrt{5})}{-4}$

7. $\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{2} = \sqrt{3} + 1$

8. $\frac{4}{2-\sqrt{3}} = \frac{4}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{4(2+\sqrt{3})}{2^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{4(2+\sqrt{3})}{4-3} = 4\left(2 + \sqrt{3}\right)$