



Тема 5. Формули скороченого множення. Розклад многочленів на множники

1. Формули скороченого множення

Означення. Формули скороченого множення - це спеціальні алгебраїчні формули, які полегшують множення та інші операції з многочленами.

Основні формули:

1. Квадрат суми:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2. Квадрат різниці:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

3. Різниця квадратів:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

4. Куб суми:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

5. Куб різниці:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

6. Сума кубів:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

7. Різниця кубів:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Приклади застосування формул скороченого множення

1. Спростіть вираз $(x + 3)^2$.

Розв'язок: $(x + 3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$.

2. Розкладіть на множники вираз $(x^2 - 16)$.

Розв'язок: $x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$.

3. Спростіть вираз: $x^4 - 16$.

Розв'язок: $x^4 - 16 = (x^2)^2 - 4^2 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x^2 - 2^2)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$.

4. Спростіть вираз: $(-2x + 3y)^2$.

Розв'язок: $(-2x + 3y)^2 = (3y - 2x)^2 = (3y)^2 - 2 \cdot 3y \cdot 2x + (2x)^2 = 9y^2 - 12xy + 4x^2$.

5. Спростіть вираз: $(-x^2 - 5y)^2$.

Розв'язок: $(-x^2 - 5y)^2 = (x^2 + 5y)^2 = (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 5y + (5y)^2 = x^4 + 10x^2y + 25y^2$.

2. Розклад многочленів на множники

Розклад многочленів на множники - це процес знаходження добутку простіших многочленів, який дорівнює вихідному многочлену.

Методи Розкладання на Множники:

1. Виділення спільного множника

Теорія: якщо всі члени многочлена мають спільний множник, його можна винести за дужки.

Приклад: $6x^3 + 9x^2 = 3x^2(2x + 3)$.

2. Метод групування

Теорія: якщо многочлен містить чотири або більше членів, його можна спробувати розділити на групи, в кожній з яких можна виділити спільний множник.

Приклад: $x^3 + x^2 - x - 1 = (x^3 + x^2) - (x + 1) = x^2(x + 1) - 1(x + 1) = (x^2 - 1)(x + 1) = (x - 1)(x + 1)(x + 1)$.

4. Розкладання квадратного тричлена

Теорія: квадратний тричлен у формі $ax^2 + bx + c$ можна розкласти на множники, знаючи його корені, за формулою: $a(x - x_1)(x - x_2)$.

Приклад: $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.

5. Розкладання за допомогою формул скороченого множення

Теорія: використання ФСМ у зворотному порядку для розкладання многочленів на множники.

Приклади:

- Різниця кубів: $x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$.

- Сума кубів: $x^3 + 27 = x^3 + 3^3 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$.

Приклади розкладання на множники

Приклад 1: розкладіть на множники вираз $x^2 - 9$.

Розв'язок: використовуємо формулу різниці квадратів: $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$.

Приклад 2: розкладіть на множники многочлен $12x^3 - 8x^2 + 4x$.

Розв'язок: $12x^3 - 8x^2 + 4x = 4x(3x^2 - 2x + 1)$.

Приклад 3: розкладіть на множники многочлен $x^3 + 2x^2 + x + 2$.

Розв'язок: $x^3 + 2x^2 + x + 2 = (x^3 + 2x^2) + (x + 2) = x^2(x + 2) + 1(x + 2) = (x^2 + 1)(x + 2)$.