Тема 8. Лінійні та квадратні рівняння

1. *Лінійні рівняння*

Означення. Лінійні рівняння - це рівняння першого ступеня, які можна записати у формі $ax + b = 0$, де a та b - константи, а x - змінна.

Щоб розв'язати лінійне рівняння, можна використовувати алгебраїчне спрощення або графічний метод. Зараз ми зосередимось на алгебраїчному спрощенні. Отже, щоб розв'язати лінійне рівняння, потрібно знайти значення змінної x. Для цього метою розв'язку буде поступова «ізоляція» x.

Приклади

1. Розв'яжіть рівняння $3x - 6 = 0$.

   $3x - 6 = 0,$
   $3x = 0 - 6,$
   $3x = -6,$
   $x = -6 : 3,$
   $x = 2.$

Пам'ятаємо! При переносі числа чи змінної через знак «дорівнює», знак числа чи змінної змінюється на протилежний.

2. Знайдіть значення x, якщо $3(2x - 5) + 4 = 2(x - 3) + 3(1 - x)$.

   $3(2x - 5) + 4 = 2(x - 3) + 3(1 - x),$

   $6x - 15 + 4 = 2x - 6 + 3 - 3x,$

   $6x - 11 = -x - 3,$

   $7x = 8,$

   $x = \frac{8}{7} = 1\frac{1}{7}.$

2. *Квадратні рівняння*

Означення. Квадратні рівняння - це рівняння другого ступеня, які можна записати у формі $ax^2 + bx + c = 0$, де $a, b,$ і c - константи, а x - змінна. Квадратні рівняння можуть мати один, два корені, або ж зовсім їх не мати.

2.1 Неповні квадратні рівняння

Означення. Неповні квадратні рівняння - це спеціальний тип квадратних рівнянь, де один або декілька членів (константа (c) або коефіцієнт b перед x) відсутні. Існують два основних типи неповних квадратних рівнянь:

1. Рівняння вигляду $ax^2 + bx = 0$. Такі рівняння можна розв'язати, винісши x за дужки: $x(ax + b) = 0$, звідки $x = 0$ або $ax + b = 0$, $x = -\frac{b}{a}$.
2. Рівняння вигляду $ax^2 + c = 0$. Тут $x^2 = -\frac{c}{a}$. Якщо $-\frac{c}{a}$ позитивне, то $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$. Якщо $-\frac{c}{a}$ негативне, рівняння не має дійсних коренів.

Приклади

1. Розв'яжіть рівняння $2x^2 - 8x = 0$.

$$2x^2 - 8x = 0,$$

$$2x(x - 4) = 0,$$

$$2x = 0 \text{ або } x - 4 = 0,$$
$$x = 0 \text{ або } x = 4.$$

2. Розв'яжіть рівняння $3x^2 - 12 = 0$.

$$3x^2 - 12 = 0,$$

$$3x^2 = 12,$$

$$x^2 = 12 : 3,$$
$$x^2 = 4,$$
$$x = \pm\sqrt{4},$$
$$x = \pm 2.$$

2.2 Повні квадратні рівняння

У повному квадратному рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ усі коефіцієнти існують, тобто не дорівнюють нулю.

Властивості та методи розв'язування

Щоб розв’язати квадратне рівняння, потрібно виконати низку процедур:

1. Визначення дискримінанту:

$$D = b^2 - 4ac.$$

2. Знаходження коренів рівняння:

- Якщо $D > 0$, рівняння має два різні дійсні корені: $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.
- Якщо $D = 0$, рівняння має один дійсний корінь (два співпадаючі корені): $x = \frac{-b}{2a}$.
- Якщо $D < 0$, рівняння не має дійсних коренів.

Варто пам’ятати, що графіком квадратного рівняння (квадратичної функції) - це парабола.

Приклади

1. Розв'яжіть рівняння $x^2 - 5x + 6 = 0$.

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

$$a = 1,\ b = -5,\ c = 6,$$

$$D = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1,$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{1}}{2a} = \frac{-(-5)-1}{2\cdot1} = \frac{4}{2} = 2,$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{1}}{2a} = \frac{-(-5)+1}{2\cdot1} = \frac{6}{2} = 3.$$

2. Визначте корені рівняння $x^2 + 6x + 9 = 0$.

$$x^2 + 6x + 9 = 0,$$

$$a = 1,\ b = 6,\ c = 9,$$

$$D = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0,$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2\cdot1} = -3.$$

2.3 Теорема Вієта

Теорема Вієта формує відношення між коренями квадратного рівняння і його коефіцієнтами. Іноді її зручно використовувати замість знаходження коренів через дискримінант, але це не завжди можливо зробити швидко і легко при «незручних» коефіцієнтах.

***Формулювання теореми Вієта для рівняння $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$*:**

Якщо x_1 та x_2 є коренями квадратного рівняння, тоді:

1. Сума коренів $x_1 + x_2$ дорівнює коефіцієнту b , взятому з протилежним знаком, поділеному на коефіцієнт a:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}.$$

2. Добуток коренів $x_1 \cdot x_2$ дорівнює вільному члену c, поділеному на коефіцієнт a:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Застосування теореми Вієта:

Теорему Вієта можна використовувати для знаходження коренів рівняння, якщо вони є раціональними числами, а також для перевірки правильності знайдених коренів.

Приклад:

Нехай маємо квадратне рівняння $x^2 - 5x + 6 = 0$. За теоремою Вієта:

- Сума коренів дорівнює 5 (оскільки коефіцієнт при x є -5 і беремо його з протилежним знаком)
- Добуток коренів дорівнює 6.

Методом підбору знаходимо корені рівняння x_1 та x_2 дорівнюють 2 та 3 відповідно, оскільки $2 + 3 = 5$ і $2 \cdot 3 = 6$.

Варто бути обережним з теоремою Вієта! Теорема Вієта застосовується лише до квадратних рівнянь із дійсними коренями.

2.4 Розкладання квадратних тричленів на множники

Розкладання на множники - це метод, який використовується для перетворення квадратного тричлена в добуток двох двочленів. Це можливо, якщо відповідне квадратне рівняння має дійсні корені. Отже, квадратний тричлен може розкластись на множники за такою формулою: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Приклад

Розкладіть на множники рівняння $x^2 + 5x + 6 = 0$.

За теоремою Вієта (або іншими методами) знайдемо розв'язки квадратного рівняння: $x_1 = -3, x_2 = -2$. Тоді за формулою $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ маємо: $x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$.