



Тема 13. Ірраціональні рівняння, нерівності і системи ірраціональних рівнянь

1. Ірраціональні рівняння

Означення. Ірраціональні рівняння, нерівності, та системи ірраціональних рівнянь включають в себе вирази під коренем.

Означення. Ірраціональне рівняння містить змінну під коренем. Основний метод розв'язування - зведення рівняння до алгебраїчного шляхом піднесення обох частин до степеня, який відповідає степеню кореня.

Приклади:

1. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+3} = 3$.

1. Піднесемо обидві частини до квадрату: $(\sqrt{x+3})^2 = 3^2$.
2. Обчислимо: $x + 3 = 9$.
3. Розв'язок рівняння: $x = 6$.

Розв'язуючи ірраціональне рівняння, обов'язково потрібно робити перевірку. Перевіримо розв'язок, підставивши x у вихідне рівняння: $\sqrt{6+3} = 3$, отже, розв'язок правильний.

2. Розв'язати рівняння $\sqrt{x} + \sqrt{x-4} = 4$.

1. Ізолюємо один з коренів, наприклад: $\sqrt{x} = 4 - \sqrt{x-4}$.
2. Підніmemo обидві частини в квадрат: $(\sqrt{x})^2 = (4 - \sqrt{x-4})^2$
3. Спростимо: $x = 16 - 8\sqrt{x-4} + (x-4)$.
4. Спростимо та перенесемо все на одну сторону: $8\sqrt{x-4} = 12$.
5. Знову підніmemo в квадрат: $64(x-4) = 144$.
6. Розв'язуємо отримане рівняння: $x - 4 = \frac{144}{64}$, отже, $x = 4 + \frac{144}{64} = 6,25 = \frac{625}{100}$.
7. Перевірка: $\sqrt{\frac{625}{100}} + \sqrt{6,25 - 4} = 4$. Отже, розв'язок підходить.

2. Ірраціональні нерівності

Означення. Ірраціональні нерівності розв'язують, переводячи їх у систему нерівностей або використовуючи метод інтервалів.

Приклади:

1. Розв'язати нерівність $\sqrt{x+3} > 2$.

1. Піднесемо обидві частини до квадрату: $x+3 > 4$.
2. Спростимо: $x > 1$. $x \in (1; +\infty)$.

2. Розв'язати нерівність $\sqrt{x^2-4} \geq 3$.

1. Піднесемо до квадрату: $x^2-4 \geq 9$.
2. Спростимо: $x^2 \geq 13$.
3. Розв'язок цієї нерівності: $x \leq -\sqrt{13}$ або $x \geq \sqrt{13}$. $x \in (-\infty; -\sqrt{13}] \cup [\sqrt{13}; +\infty)$.

3. Системи ірраціональних рівнянь

Означення. Системи ірраціональних рівнянь розв'язують, розв'язуючи кожне рівняння окремо, а потім знаходячи їх спільні розв'язки.

Приклади:

1. Розв'язати систему:
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \\ x - 2y + 1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \\ x - 2y + 1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \\ x = 2y - 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{2y-1} + \sqrt{y} = 2 \\ x = 2y - 1 \end{cases}$$

$$\sqrt{2y-1} + \sqrt{y} = 2$$

$$\sqrt{y} = 2 - \sqrt{2y-1}$$

$$(\sqrt{y})^2 = (2 - \sqrt{2y-1})^2$$

$$y = 4 - 2 \cdot 2\sqrt{2y-1} + 2y - 1$$

$$4\sqrt{2y-1} = -3 - y$$

$$(\sqrt{2y-1})^2 = (-3-y)^2$$

$$4(2y-1) = 9 + 6y + y^2$$

$$8y - 4 = 9 + 6y + y^2$$

$$y^2 - 2y + 25 = 0$$

$$y_1 = 25, \quad y_2 = 1$$

$$\begin{cases} y = 25 \\ x = 2y - 1 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} y = 1 \\ x = 2y - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 25 \\ x = 49 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Відповідь: (49; 25), (1; 1).