Тема 1. Дійсні числа та дії з ними. Числові множини

1.1 Поняття множини. Числові множини

Означення. Множина - це сукупність об’єктів, які називають її елементами.

Прикладом множин є: множина міст країни, множина продукції у магазині, множина значень аргументу функції, множина чисел.

Означення. Множиною чисел називають множину, елементами якої є числа. Основні математичні числові множини включають в себе: множину натуральних чисел ($\boldsymbol{N}$), цілих чисел ($\boldsymbol{Z}$), раціональних чисел ($\boldsymbol{Q}$), ірраціональних чисел ($\boldsymbol{I}$), дійсних чисел ($\boldsymbol{R}$).

1. ***Натуральні числа (N)***

- Означення: Натуральні числа - це множина чисел, які використовуються для лічби. Вони починаються з 1 і йдуть вгору нескінченно.
- Приклади: 1, 2, 3, 4, 5, ...
- Зауваження: У деяких математичних традиціях натуральні числа включають нуль (0, 1, 2, 3, ...), але в більшості випадків нуль не включається.

2. ***Цілі числа (Z)***

- Означення: Цілі числа розширюють натуральні числа за рахунок додавання протилежних значень (негативних) і нуля.
- Приклади: ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...
- Зауваження: Ця множина включає усі натуральні числа, їх негативні еквіваленти та нуль.

3. ***Раціональні числа (Q)***

- Означення: Раціональні числа - це числа, які можна виразити у вигляді дробу $\frac{a}{b}$, де a і b - цілі числа, a і b не дорівнюють 0.
- Приклади: 1221, −34−43, 5 (так як 5 можна виразити як 5115), 0.75 (так як 0.75 = 3443).
- Зауваження: Раціональні числа включають у себе цілі числа (так як кожне ціле число можна виразити у вигляді дробу з одиницею в знаменнику).

4. ***Ірраціональні числа (I)***

- Означення: Ірраціональні числа - це числа, які не можна точно виразити у вигляді простого дробу. Їх десяткові розширення нескінченні і не періодичні.
- Приклади: π, $\sqrt{2}$, e (число Ейлера, $e \approx 2.71828...$).
- Зауваження: Ірраціональні числа разом з раціональними числами утворюють множину дійсних чисел.

5. ***Дійсні числа (R)***

- Означення: Дійсні числа включають у себе всі раціональні та ірраціональні числа. Вони можуть бути представлені на числовій прямій.
- Приклади: Всі приклади раціональних і ірраціональних чисел
- Зауваження: Дійсні числа включають усі числа, які можна зустріти в повсякденних розрахунках і математичному аналізі.

  1) Множина парних чисел: $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots\}$
  2) Множина непарних чисел: $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots\}$
  3) Множина цифр = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
  4) Множина простих чисел = $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots\}$ – числа, які мають лише два дільники: 1 і самі себе. Протилежними до простих чисел є складені числа, які мають строго більше, ніж два дільники.

1.2 Модуль числа

Означення. Модуль дійсного числа x, (позначається як $|x|$), - це невід'ємне значення цього числа без урахування його знака. Також модулем називається відстань від початку числової осі до самої точки x. Для будь-якого дійсного числа x, модуль x:

- $|x| = x$, якщо $x > 0$ (тобто x – невід’ємне)
- $|x| = -x$, якщо $x < 0$ (тобто x – від’ємне)

Властивості модуля:

1. ***Невід’ємність.*** Модуль будь-якого числа завжди невід’ємний. Тобто $|x| > 0$ для будь-якого x.
2. ***Симетричність.*** Модуль від’ємного числа такий же, як у протилежного додатного числа. Тобто |-5| = |5| = 5.

3. ***Нерівність трикутника. .*** $|x + y| \le |x| + |y|$ - модуль суми двох чисел менший або дорівнює сумі модулів цих чисел.

Приклади:

1. Модуль додатного числа: $|3| = 3$; $|5{,}6| = 5{,}6$; $|\pi| = \pi$
2. Модуль від'ємного числа: $|-10| = 10$; $|-\frac{7}{8}| = \frac{7}{8}$; $|-\pi| = \pi$
3. Модуль нуля: $|0| = 0$
4. Застосування мультиплікативності: $|-3 \cdot 9| = |-27| = 27$, а також: $|-3| \cdot |9| = 3 \cdot 9 = 27$

1.3 Дії над цілими числами

1. Додавання з однаковими знаками

Щоб додати два числа з однаковими знаками, потрібно знайти суму їх модулів. Знак суми (мінус чи плюс) залежить від виду доданків. Якщо доданки додатні – знак суми буде плюс, якщо доданки від'ємні – знак суми мінус.

Наприклад, 3 + 10 = 13; -6,9 – 3,5 = - (6,9 + 3,5) = - 10,4.

2. Додавання з різними знаками

Щоб додати два числа з різними знаками, потрібно від більшого за модулем числа відняти менше за модулем число і знак суми буде такий, який належить числу з більшим модулем.

Наприклад, -7 + 10 = 10 – 7 = 3; 37 – 93 = - (93 – 37) = -54.

3. Множення та ділення з однаковими та різними знаками

Часто помилки при множенні/ділені бувають не від незнання таблички множення, а від незнання функції знаків при множенні/діленні. Основні правила знаків:

$$+ \cdot + = +$$

$$+ \cdot - = -$$

$$- \cdot + = -$$

$$- \cdot - = +$$

Наприклад, -6 · 7 = -42; 90 : (-5) = -18; -10 · (-0,5) = 5.

1.4 Правила розкриття дужок

1. Якщо перед дужками стоїть плюс, то знак на значення в дужках не впливає і вираз можна записати без дужок. Наприклад, 7 + (10 + 11) = 7 + 10 + 11 = 28.
2. Якщо перед дужками стоїть мінус, то знак на значення в дужках впливає і дужки потрібно розкрити змінюючи усі знаки на протилежні. Наприклад, 8,6 – (3,7 - 5) = 8,6 – 3,7 + 5 = 9,9.
3. Якщо перед дужками стоїть множник, то потрібно цей множник перемножити на усі члени виразу в дужках. Наприклад, 6(3,5 - 2x) = 6·3,5 - 6·2x = 21 - 12x.

1.5 Лінійні рівняння

Лінійне рівняння — це рівняння, яке має загальний вигляд $ax + b = c$, де x – довільна змінна (невідоме число), а a, b, c – константи (відомі числа).

Усі лінійні рівняння мають зводитись до вигляду:

$$ax + b = c$$

$$ax = c - b$$

$$x = \frac{c - b}{a}.$$

Спочатку зведіть всі подібні доданки. Це означає, що всі члени з змінно x повинні бути по одну сторону рівняння, а константи — по іншу. Це зазвичай роблять за допомогою додавання, віднімання, множення або ділення обох сторін рівняння на певне число. Слід звернути увагу, що при переносі доданків через знак «дорівнює», усі знаки змінюються на протилежні! Якщо рівняння містить вирази з дужками, спочатку необхідно максимально спростити рівняння, а потім зводити його.

Приклади:

1. $2x + 3 = 11$
   $2x = 11 - 3$
   $2x = 8$
   $x = 8 : 4$
   $x = 2$

2. $6 - 3x = 12$
   $-3x = 12 - 6$
   $-3x = 6$
   $x = 6 : (-3)$
   $x = -2$

3. $4(2x - 1) = -2(x + 4)$
   $8x - 4 = -2x - 8$
   $8x + 2x = -8 + 4$
   $10x = -4$
   $x = -\frac{4}{10} = -0{,}4$

1.6 Подільність цілих чисел

1. Подільність

Подільність у математиці - це властивість, яка визначає, коли одне ціле число може бути поділене на інше без залишку. Якщо ціле число a ділиться на ціле число b без залишку, то кажуть, що a кратне b, а b є дільником a.

2. Кратне

Число a називається кратним числа b, якщо a ділиться на b без залишку. Наприклад, 20 є кратним 5, оскільки 20 ділиться на 5 без залишку.

3. Дільник

Означення. Дільник - це число, на яке інше число ділиться без залишку. Наприклад, 3 є дільником 12, оскільки 12 ділиться на 3 без залишку.

4. Прості і Складені Числа

Означення. Прості числа - це цілі числа більші від 1, які мають лише два дільники: 1 і самі себе. Наприклад, 2, 3, 5, 7, 11 є простими числами.

Означення. Складені числа - це цілі числа, які мають більше двох дільників. Наприклад, 4, 6, 8, 9, 10 є складеними числами.

5. Ознаки Подільності

- На 2: Ціле число ділиться на 2, якщо його остання цифра - парна (0, 2, 4, 6, 8). Наприклад, 14 ділиться на 2, оскільки остання цифра 4.
- На 3: Число ділиться на 3, якщо сума його цифр ділиться на 3. Наприклад, 123 ділиться на 3, оскільки 1+2+3 = 6, і 6 ділиться на 3.
- На 5: Число ділиться на 5, якщо його остання цифра 0 або 5. Наприклад, 45 ділиться на 5.
- На 9: Число ділиться на 9, якщо сума його цифр поділяється на 9. Наприклад, 81 ділиться на 9, оскільки 8+1 = 9.
- На 10: Число ділиться на 10, якщо його остання цифра 0. Наприклад, 120 ділиться на 10.
- На 11: Число ділиться на 11, якщо різниця між сумою цифр на парних позиціях і сумою цифр на непарних позиціях ділиться на 11. Наприклад, для числа 121: (1+1) - 2 = 0, яке ділиться на 11.

1.7 Найбільший спільний дільник (НСД), найменше спільне кратне (НСК)

1. **Найбільший Спільний Дільник (НСД)**

Означення. Найбільший спільний дільник (НСД) двох або більше цілих чисел - це найбільше число, на яке кожне з цих чисел ділиться без залишку.

Методи знаходження НСД:

- Перелік дільників: Найпростіший метод - визначити всі дільники кожного числа, а потім знайти найбільший спільний дільник.
- Розкладання на прості множники: Розділіть кожне число на прості множники, а потім визначте спільні множники.

Приклад

Знайдемо НСД для 30 і 45. Розкладання на прості множники: $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$. Спільні множники: 3 і 5, НСД $= 3 \cdot 5 = 15$.

2. **Найменше Спільне Кратне (НСК)**

Означення. Найменше спільне кратне (НСК) двох або більше чисел - це найменше число, яке є кратним кожного з цих чисел.