Тема 9. Лінійні та квадратні (квадратичні) нерівності та їх системи

1. *Лінійні нерівності*

Означення. Лінійна нерівність – це нерівність, яка включає лінійні вирази. Загальний вигляд лінійної нерівності: $ax + b < 0$, $ax + b > 0$, $ax + b \leq 0$, або $ax + b \geq 0$, де a і b – константи, а x – змінна.

Розв'язати нерівність – знайти усі значення змінної, що задовольняють цю нерівність. Щоб розв'язати нерівність, можна використовувати усі методи спрощення як і в лінійних рівняннях.

Приклади:

1. $2x - 3 > 5$

   $2x > 8$

   $x > 4.$

2. $-3x + 6 \leq 9$

   $-3x \leq 3$

   $x \geq -1.$

3. $4 - \frac{2x}{3} \geq 2$

   $-\frac{2x}{3} \geq -2$

   $2x \leq 6$

   $x \leq 3.$

4. $3(2x - 1) - 2(x + 4) < 0$

   $6x - 3 - 2x - 8 < 0$

$4x < 11$

$x < \frac{11}{4}.$

5. $\frac{1-3x}{4} + \frac{2x-3}{3} > 1$

$\frac{3(1-3x)+4(2x-3)}{12} > 1$

$3 - 9x + 8x - 12 > 12$

$-x > 21$

$x < -21.$

Зверніть увагу! Якщо ви розв'язали нерівність і знайшли від'ємне значення змінної, то щоб знайти додатнє значення, потрібно змінити усі знаки нерівності включно з головним знаком нерівності!!!

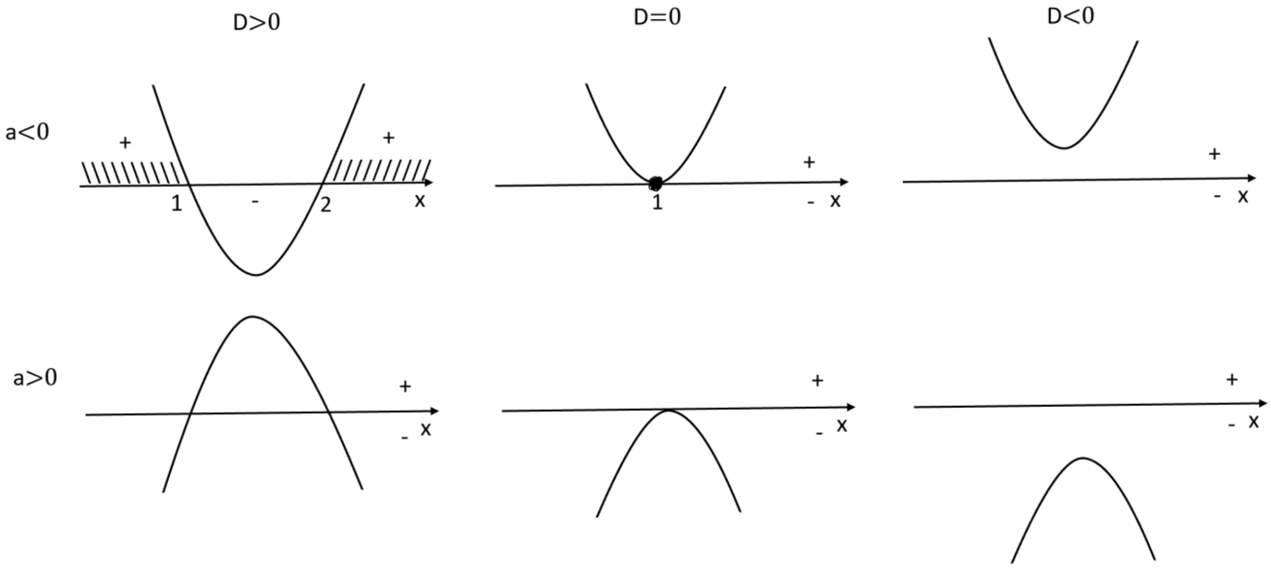
2. Квадратні (квадратичні) нерівності

Означення. Квадратна нерівність має вигляд $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c > 0, ax^2 + bx + c \leq 0$, або $ax^2 + bx + c \geq 0$.

Методи розв'язування:

1. Привести нерівність до стандартної форми квадратного рівняння.
2. Знайти корені відповідного квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.
3. Використовувати метод інтервалів, намалювати числову пряму та визначити інтервали, на яких нерівність виконується.

Рішення таких нерівностей залежить від коренів відповідного квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ та знаку коефіцієнта a. Графіком квадратного тричлена є парабола. Якщо $a > 0$, то парабола направлена вітками вгору, якщо $a < 0$, парабола направлена вітками вниз. Ось приклади різних ситуацій:



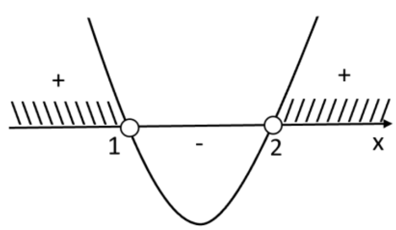
Приклади:

1. **Квадратична нерівність з двома різними коренями (дискримінант > 0):**

$$x^2 - 3x + 2 > 0.$$

1) Розв'язуємо $x^2 - 3x + 2 = 0$, знаходимо корені: $x_1 = 1, x_2 = 2$.

2) Оскільки коефіцієнт при x^2 позитивний, парабола вітками вгору:



3) Аналізуємо інтервали: $(-\infty, 1), (1,2), (2, +\infty)$.

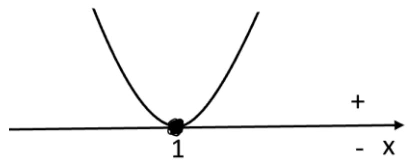
4) Оскільки умова рівняння вимагає знайти розв'язки більші за нуль, парабола показує, що її розв'язки більші за нуль на проміжку $(-\infty, 1), (2, +\infty)$.

2. **Квадратична нерівність з одним коренем (дискримінант = 0):**

$$x^2 - 2x + 1 \leq 0.$$

1) Розв'язуємо $x^2 - 2x + 1 = 0$, знаходимо корінь: $x = 1$.

2) Оскільки коефіцієнт при x^2 позитивний, парабола вітками вгору:



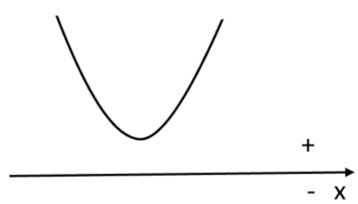
3) Нерівність вимагає розв'язки, які менші або дорівнюють нулю. Парабола показує, що таке можливо лише при x = 1.

3. **Квадратична нерівність без реальних коренів (дискримінант < 0):**

$$x^2 + x + 1 < 0.$$

1) Розв'язуємо $x^2 + x + 1 = 0$, дискримінант < 0, реальних коренів немає.

2) Оскільки коефіцієнт при x^2 позитивний, парабола вітками вгору але без точок перетину з прямою x:



3) Нерівність вимагає розв'язки, які менші за нуль. Парабола показує, що вона не існує у від'ємній півплощині. Отже, розв'язків немає.

3. *Системи лінійних і квадратних нерівностей з однією змінною*

Означення. Система нерівностей включає дві або більше нерівностей, які мають виконуватися одночасно.

1) Лінійні нерівності

У лінійній системі нерівностей усі нерівності є лінійними.

Щоб розв'язати лінійну систему, треба виконати такі кроки розв'язання:

1. Розв'язати кожну нерівність окремо.
2. Визначити область рішень для кожної нерівності.
3. Знайти перетин областей рішень.

Приклади:

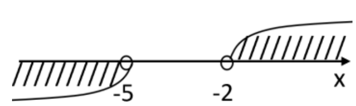
1.

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x + 1 < 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 2 \\ x < 4 \end{cases}$$

Розв'язком нерівності є видимий перетин двох множин розв'язків нерівностей: $x \in (2; 4)$.

2.

$$\begin{cases} 3x + 6 < -9 \\ -2x < 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x < -9 - 6 \\ x > -4 : 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < -5 \\ x > -2. \end{cases}$$



Нерівність не має розв'язків, оскільки множини розв'язків нерівності не перетинаються.

2) **Квадратичні нерівності**

У квадратичних системах нерівностей є квадратичні нерівності.

Щоб розв'язати лінійну систему, треба виконати такі кроки розв'язання:

1. Розв'язати кожну нерівність окремо.
2. Визначити область рішень для кожної нерівності.
3. Знайти перетин областей рішень.

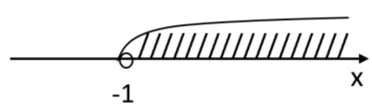
Приклади:

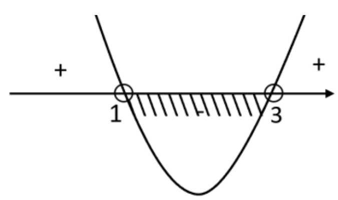
1**.**

$$\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x^2 - 4x + 3 < 0 \end{cases}$$

Розв'яжемо спочатку першу нерівність, яка є лінійною, а потім другу – квадратичну нерівність. Маємо:

$$\begin{cases} x > -1 \\ x_1 = 3, \quad x_2 = 1 \end{cases}$$





Розв'язком нерівності є видимий перетин двох множин розв'язків нерівностей: $x \in (1; 3)$.