Тема 10. Раціональні рівності і нерівності. Метод інтервалів

Означення. Раціональні нерівності — це нерівності, які включають раціональні вирази (ділення одного полінома на інший). Вони мають форму $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$, $\frac{\mathrm{P(x)}}{\mathrm{Q(x)}} < 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$, або $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$, де $P(x)$ і $Q(x)$ — поліноми.

Основні кроки розв'язання за допомогою методу інтервалів:

1. Знайдіть корені чисельника і знаменника. Розв'яжіть рівняння $P(x) = 0$ і $Q(x) = 0$ окремо. Корені чисельника дають точки, де вираз дорівнює 0. Корені знаменника вказують на точки, де вираз не існує – виколоті точки.
2. Розбийте числову пряму на інтервали. Використовуйте знайдені корені для поділу числової прямої на інтервали. Пам'ятайте! Точки, які є розв'язками знаменника – виколоті точки! Вони не будуть розв’язками нерівності!
3. Визначте знак виразу на кожному інтервалі. Виберіть тестову точку в кожному інтервалі та підставте її в раціональний вираз, щоб визначити знак виразу на цьому інтервалі.
4. Запишіть розв'язок. Виберіть інтервали, які задовольняють нерівність, і об'єднайте їх у відповідь.

Приклади:

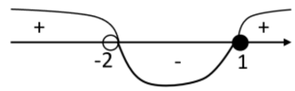
1.

$$\frac{x-1}{x+2} \geq 0$$

1. Корені чисельника: $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$.

2. Корені знаменника: $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$.

3. Інтервали: $(-\infty, -2), (-2; 1], [1; +\infty)$.



4. Виберіть тестові точки з кожного проміжку, наприклад, -3, 0, і 2, і підставте їх в вираз.

Відповідь: $x \in (-\infty, -2) \cup [1; +\infty)$.

2.

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1} \leq 0$$

1. Корені чисельника: $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$.
2. Корені знаменника: $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$.
3. Інтервали: $(-\infty; -2], [-2; -1), (-1,1), (1; 2], [2; +\infty)$.
4. Виберіть тестові точки, наприклад, -3, -1.5, 0, 1.5, і 3, і підставте їх у вираз.

Відповідь: $x \in [-2; -1) \cup (1; 2]$.

CODEMATICS