



## Тема 11. Системи раціональних рівнянь

**Означення.** Раціональне рівняння - це рівняння, що містить одну або декілька раціональних виразів, які є відношенням двох поліномів. Наприклад:  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ .

**Означення.** Система раціональних рівнянь - це набір двох або більше раціональних рівнянь, які мають бути розв'язані одночасно.

*Для розв'язування систем раціональних рівнянь існує кілька методів:*

1. Метод підстановки: одне рівняння розв'язується відносно однієї змінної, і результат підставляється у інше рівняння.
2. Метод додавання або віднімання: рівняння додаються або віднімаються, щоб усунути одну змінну.
3. Метод зведення до спільного знаменника: зведення всіх виразів рівнянь до спільного знаменника, що дозволяє працювати з поліноміальними рівняннями.

**Приклади:**

1.

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1 \end{cases}$$

1) Зведемо обидва рівняння до спільного знаменника:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{xy} = 3 \\ \frac{x-y}{xy} = 1 \end{cases}$$

2) Знайдемо  $x + y$  та  $x - y$  (будемо використовувати метод множення за пропорцією):

$$\begin{cases} x + y = 3xy \\ x - y = xy \end{cases}$$

3) Додаємо обидва рівняння, щоб знайти  $x$ :

$$\begin{aligned} 2x &= 4xy \\ 2x - 4xy &= 0 \\ x(1 - 2y) &= 0 \\ x = 0 \text{ або } y &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

4) Використовуємо значення  $y$  для знаходження  $x$ :

$$\begin{aligned}x &= 2y \\x &= 1\end{aligned}$$

Отже, розв'язок системи:  $x = 1, y = \frac{1}{2}$ .

2.

$$\begin{cases} \frac{2x+3}{y-1} = 4 \\ \frac{3y+2}{x-1} = -1 \end{cases}$$

Для розв'язання цієї системи використовуємо метод заміни.

Крок 1: виразимо  $x$  з першого рівняння

$$\begin{aligned}2x + 3 &= 4(y - 1) \\2x &= 4y - 4 - 3 \\2x &= 4y - 7 \\x &= 2y - \frac{7}{2}\end{aligned}$$

Крок 2: виразимо  $y$  з другого рівняння

$$\begin{aligned}3y + 2 &= -(x - 1) \\3y &= -x + 1 - 2 \\3y &= -x - 1 \\y &= -\frac{x}{3} - \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Крок 3: підставимо вираз для  $y$  з Кроку 2 у вираз для  $x$  з Кроку 1

$$x = 2\left(-\frac{x}{3} - \frac{1}{3}\right) - \frac{7}{2}$$

Крок 4: розв'язуємо отримане рівняння для  $x$

$$\begin{aligned}x &= -\frac{2x}{3} - \frac{2}{3} - \frac{7}{2} \\ \frac{5x}{3} &= -\frac{2}{3} - \frac{7}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5x &= -2 - \frac{7 \cdot 3}{2} \\
 5x &= -2 - \frac{21}{2} \\
 5x &= -2 - 10.5 \\
 5x &= -12.5 \\
 x &= -\frac{12.5}{5} \\
 x &= -2.5
 \end{aligned}$$

Крок 5: підставимо знайдене значення  $x$  у вираз для  $y$

$$\begin{aligned}
 y &= -\frac{-2.5}{3} - \frac{1}{3} \\
 y &= \frac{2.5}{3} - \frac{1}{3} \\
 y &= \frac{2.5 - 1}{3} \\
 y &= \frac{1.5}{3} \\
 y &= 0.5
 \end{aligned}$$

Отже, розв'язок цієї системи рівнянь:

$$\begin{aligned}
 x &= -2.5 \\
 y &= 0.5
 \end{aligned}$$