I. Для заданных систем линейных алгебраических уравнений реализуйте методы поиска численных решений методами минимальных невязок и скорейшего списка. Разработайте приложение, которое для заданной точности ε_n найдет приближенное решение СЛАУ. Реализуйте метод расчета приближенного решения, который параметризуется точностью решения, методом вычисления и способом расчета нормы вектора. При демонстрации работы приложения для каждой системы выведете ее решение и число итераций для точности $\varepsilon_n = 10^{-n}$, где $n = 2, 3, 4, 5, 10, 12, 15$. Предусмотрите режим вывода текущего приближения для каждой итерации. Для вектора $X \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ в качестве норм используйте следующие:

$$\|X\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|, \qquad \|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad \|X\|_{2l} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{2l}\right)^{\frac{1}{2l}}.$$

1. $$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$$

3. $$\begin{pmatrix} 2{,}8 & 2{,}1 & -1{,}3 & 0{,}3 \\ -1{,}4 & 4{,}5 & -7{,}7 & 1{,}3 \\ 0{,}6 & 2{,}1 & -5{,}8 & 2{,}4 \\ 3{,}5 & -6{,}5 & 3{,}2 & -7{,}9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. $$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 - x_5 = 6 \\ x_2 - x_3 + 4x_4 = 6 \\ x_1 - x_3 + 4x_5 = 6 \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} 4x_1 - x_2 - x_4 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 - x_5 = 5 \\ -x_2 + 4x_3 - x_6 = 0 \\ -x_1 + 4x_4 - x_5 = 6 \\ -x_2 - x_4 + 4x_5 - x_6 = -2 \\ -x_3 - x_5 + 4x_6 = 6 \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = 5 \\ -x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_4 - x_5 = 6 \\ -x_4 + 4x_5 - x_6 = -2 \\ -x_5 + 4x_6 = 6 \end{cases}$$

II. С использованием метода скорейшего спуска найдите минимумы следующих функций:

1) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 + 5$
2) $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2$
3) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - x_1 + 2x_3$
4) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 + x_1 - 2x_3$
5) $f(y) = (Ay, y) - 2(f, y)$, где $y, f \in \mathbb{R}^6$,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 6 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

6) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 0.2x_1x_2 - 2.2x_1 + 2.2x_2 + 2.2$
7) $f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 4.075x_2^2 - 9x_1x_2 + x_1 + 2$
8) $f(X) = (x_1 + 10x_2)^2 + 5(x_3 - x_4 + 2k)^2 + (x_2 - 2x_3)^4 + 100(x_1 - x_4 + 11k)^4, X \in \mathbb{R}^4, k -$ фиксированный параметр.

При демонстрации работы вашего приложения для каждой минимизируемой функции предоставьте возможность вывода текущего приближения, значения функции в текущей точке и число итераций для заданной точности $\varepsilon_n = 10^{-n}$, где $n = 2, 3, 4, 5, 10, 12, 15$. Предусмотрите возможности демонстрации вашего решения для различных начальных значений. Для вектора $X \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ в качестве норм используйте следующие:

$$\|X\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|, \qquad \|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad \|X\|_{2l} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{2l} \right)^{\frac{1}{2l}}.$$