I. Постройте интерполяционные многочлены Ньютона и Лагранжа для функции заданных таблично.

1.

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-1.0	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0
y_i	0.86603	1.0	0.86603	0.50	0.0	-0.50

2.

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-0.9	0.0	0.9	1.8	2.7	3.6
y_i	-0.36892	0.0	0.36892	0.85408	1.7856	6.3138

3.

i	0	1	2	3	4	5
x_i	1.0	1.9	2.8	3.7	4.6	5.5
y_i	2.4142	1.0818	0.50953	0.11836	-0.24008	-0.66818

II. На отрезке $[A; B]$ заданы функций:

1. $y = x^3 - 6.5x^2 + 11x - 4$;
2. $y = 3\cos\frac{\pi x}{8}$;
3. $y = e^{-\frac{x}{4}}\sin\left(\frac{x}{3}\right)$;
4. $y = 8xe^{-\frac{x^2}{12}}$.

1. На заданном отрезке задайте сетку из N узлов и для каждой функций сгенерируйте таблицу значений в этих узлах сетки. Для каждой сгенерированной табличной функции постройте интерполяционный полином. Постройте графики исходных функции и построенного интерполяционного полинома.
2. Для каждой табличной функции из предыдущего пункта реализуйте нахождение значения функции в точке, которая не является узлом сетки. Вычисления организуйте «на лету» без прямого вычисления финального интерполяционного полинома. Вычислите разницу между найденным значением и реальным значением функции в точке. Выполните вычисления для интерполяционных полиномов в форме Лагранжа и Ньютона.

Задайте $N = 3, 4, 8, 10, 16, 32, 64, 256$.

A	B
2	4
0.5	3
4	10
0	12

III. Для поиска приближенного решения в каждом задании используйте явную схему Эйлера и схему Рунге-Кутты 4-го порядка. Сравните полученные результаты.

1. А) Постройте график $x = x(t)$ приближенного решения задачи Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = 0.1 - \dfrac{3x(t)}{1000 + t} \\ x(0) = 50 \end{cases}$$

В) Для $T > 0$ с точностью $\varepsilon = 10^{-n}, n = 2, 3, 4$, методом прямоугольников вычислите определенный интеграл:

$$\int_0^T x(t)\,dt,$$

где $x(t) -$ решение задачи из пункта А. Для определения шага используйте правило Рунге. Сравните численное значение с точным значением интеграла при некотором T.

2. А) Постройте график $y = y(t)$ и $z(t) = m - y(t)$ для приближенного решения задачи Коши:

$$\begin{cases} y'(t) = k\big(m - y(t)\big)y(t) \\ y(0) = 1000 \end{cases}, \qquad m = 100000, \qquad k = 2 \times 10^{-6}.$$

В) Для $T > 0$ с точностью $\varepsilon = 10^{-n}, n = 2, 3, 4,$ методом трапеций вычислите определенный интеграл:

$$\int_0^T y(t)\,dt,$$

где $y(t) -$ решение задачи из пункта А. Для определения шага используйте правило Рунге. Сравните численное значение с точным значением интеграла при некотором T.

3. А) Постройте график $v = v(t)$ для $t \in [0; 1]$ приближенного решения задачи Коши:

$$\begin{cases} mv'(t) = -mg - kv(t)|v(t)| \\ v(0) = 8 \end{cases}, \qquad g = 9.8, \qquad k = 0.002.$$

В) Для $T > 0$ с точностью $\varepsilon = 10^{-n}, n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$ методами прямоугольников и трапеций вычислите определенный интеграл:

$$\int_0^T v(t)\,dt,$$

где $v(t) -$ решение задачи из пункта А. Для определения шага используйте правило Рунге.

4. Постройте график $x = x(t)$ для $t \in [0; 0.5]$ приближенного решения задачи Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k\left(n_1 - \dfrac{x}{2}\right)^2 \left(n_2 - \dfrac{x}{2}\right)^2 \left(n_3 - \dfrac{3x}{4}\right)^3 \\ x(0) = 0 \end{cases}, \qquad k = 6.22 \times 10^{-19}, \qquad n_1 = n_2 = 2 \times 10^3,$$
$$n_3 = 3 \times 10^3.$$

5. Найдите приближенное решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x_1'(t) = k_1x_1(t) - k_2x_1(t)x_2(t) \\ x_2'(t) = k_3x_1(t)x_2(t) - k_4x_2(t) \end{cases}, \qquad x_1(0) = x_2(0) = 500, \qquad k_1 = 3, \qquad k_2 = 0.002,$$
$$k_3 = 0.0006, \qquad k_4 = 0.5.$$

Постройте графики функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$, а также график на плоскости x_1Ox_2. Попробуйте подбирать параметры таким образом, чтобы получать качественно новые графики.

6. Сравните приближенные решения двух задач Коши с одинаковыми начальными условиями $\theta(0) = \frac{\pi}{6}, \theta'(0) = 0$:

   1. $\theta'' + \frac{g}{L}\sin\theta = 0,$
   2. $\theta'' + \frac{g}{L}\theta = 0,$

при $g = 32.17$. Постройте графики $\theta = \theta(t)$ и (θ, θ').