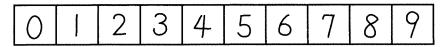
数 学

180 分

注 意 事 項

- 1. 試験開始の合図までこの冊子を開かないこと。
- 2. 本問題冊子は10ページ、答案用紙の冊子は5ページである。
- 3. 各答案用紙の上の枠内に**受験番号**を記入し、下の枠内には受験番号の**下2桁**の数字を忘れずに記入すること。
- 4. 解答はすべて答案用紙の枠内に記入すること。裏面は採点の対象としない。
- 5. 問題番号のあとのカッコ内の点数は300点満点中の配点である。
- 6. 問題冊子および答案用紙の冊子は切りはなさないこと。
- 7. 答案用紙に記入する受験番号の数字の字体は、下記の例にならい、明瞭に記入すること。



試験問題は、つぎのページより始まります。

1 (60 点)

a を正の定数とし、放物線 $y = \frac{x^2}{4}$ を C_1 とする.

- (1) 点 P が C_1 上を動くとき、P と点 Q $\left(2a, \frac{a^2}{4} 2\right)$ の距離の最小値を求めよ.
- (2) Qを中心とする円 $(x-2a)^2+\left(y-\frac{a^2}{4}+2\right)^2=2a^2$ を C_2 とする. Pが C_1 上を動き、点 R が C_2 上を動くとき、P と R の距離の最小値を求めよ.

2 (60点)

 \triangle ABC を一辺の長さ 6 の正三角形とする。サイコロを 3 回振り、出た目を順に X, Y, Zとする。出た目に応じて、点 P, Q, R をそれぞれ線分 BC, CA, AB 上に

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}} = \frac{X}{6} \overrightarrow{\mathrm{BC}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{CQ}} = \frac{Y}{6} \overrightarrow{\mathrm{CA}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AR}} = \frac{Z}{6} \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$
 をみたすように取る.

- (1) △PQR が正三角形になる確率を求めよ.
- (2) 点 B、P、R を互いに線分で結んでできる図形を T_1 、点 C、Q、P を互いに線分で結んでできる図形を T_2 、点 A、R、Q を互いに線分で結んでできる図形を T_3 とする。 T_1 、 T_2 、 T_3 のうち、ちょうど 2 つが正三角形になる確率を求めよ。
- (3) $\triangle PQR$ の面積をSとし、Sのとりうる値の最小値をmとする。mの値 およびS=mとなる確率を求めよ。

3 (60点)

水平な平面 α の上に半径 r_1 の球 S_1 と半径 r_2 の球 S_2 が乗っており、 S_1 と S_2 は外接している.

- (1) S_1 , S_2 が α と接する点をそれぞれ P_1 , P_2 とする. 線分 P_1P_2 の長さを求め よ.
- (2) α の上に乗っており、 S_1 と S_2 の両方に外接している球すべてを考える。それらの球と α の接点は、1 つの円の上または1 つの直線の上にあることを示せ.

4 (60 点)

nを2以上の自然数とする.

- (1) n が素数または4 のとき、(n-1)! はn で割り切れないことを示せ.
- (2) n が素数でなくかつ 4 でもないとき、(n-1)! は n で割り切れることを示せ.

5 (60点)

次のように媒介変数表示されたxy 平面上の曲線をCとする:

$$\begin{cases} x = 3\cos t - \cos 3t \\ y = 3\sin t - \sin 3t \end{cases}$$

ただし $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ である.

- (1) $\frac{dx}{dt}$ および $\frac{dy}{dt}$ を計算し、Cの概形を図示せよ.
- (2) $C \ge x$ 軸 $\ge y$ 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.