

数 学

150 分

注 意 事 項

1. 試験開始の合図までこの冊子を開かないこと。
2. 本問題冊子は 8 ページ，答案用紙は 4 ページである。
3. 各答案用紙の上の枠内に受験番号を記入し，下の枠内には受験番号の下 2 桁の数字を忘れずに記入すること。
4. 解答はすべて各答案用紙の枠内に記入し，裏面は使用しないこと。
5. 問題番号のあとのカッコ内の点数は 250 点満点中の配点である。
6. 答案用紙の冊子は切りはなさないこと。
7. 答案用紙に記入する受験番号の数字の字体は，下記の例にならい，明瞭に記入すること。

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

1

(60 点)

以下の問に答えよ。

(1) 自然数 n に対し $I(n) = \int_0^{n\pi/2} |\sin x| dx$ を求めよ。

(2) 次の不等式を示せ。

$$0 \leq \int_0^{s\pi/2} \cos x dx - s \leq \left(-\frac{\pi}{2} - 1\right)s \quad (0 \leq s \leq 1)$$

(3) a を正の数とし, a を超えない最大の整数を $[a]$ で表す。 $[a]$ が奇数のとき次の不等式が成り立つことを示せ。

$$0 \leq \int_0^{\pi/2} |\sin at| dt - 1 \leq \left(-\frac{\pi}{2} - 1\right) \left(1 - \frac{[a]}{a}\right)$$

(下書き用紙)

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100

1. 目的

1. 目的
2. 概要
3. 内容
4. 結果
5. 結論

1. 目的
2. 概要
3. 内容
4. 結果
5. 結論

1. 目的

2

(70 点)

以下の問に答えよ。

(1) a, b を正の定数とし, $g(t) = \frac{1}{b}t^a - \log t$ とおく。 $t > 0$ における関数 $g(t)$ の増減を調べ極値を求めよ。

(2) m を正の定数とし, xy 座標平面において条件

(a) $y > x > 0$; (b) すべての $t > 0$ に対し $\frac{1}{y}t^x - \log t \geq m$
を満たす点 (x, y) からなる領域を D とする。 D の概形を図示せよ。

(3) (2)の領域 D の面積を求めよ。

(下書き用紙)



この用紙は、下書きに用いるための紙である。記入内容は、
最終的な書類に転記される。記入の際は、
必要事項を正確に記入すること。記入内容は、
最終的な書類に転記される。記入の際は、
必要事項を正確に記入すること。

3

(60 点)

平面上を半径 1 の 3 個の円板が下記の条件 (a) と (b) を満たしながら動くとき、これら 3 個の円板の和集合の面積 S の最大値を求めよ。

- (a) 3 個の円板の中心はいずれも定点 P を中心とする半径 1 の円周上にある。
- (b) 3 個の円板すべてが共有する点は P のみである。

(下書き用紙)

昭和 年 月 日

（ここに下書きの内容を記入する）

4 (60 点)

空間内の四面体 $ABCD$ を考える。辺 AB , BC , CD , DA の中点を、それぞれ K , L , M , N とする。

(1) $4 \overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{LN} = |\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{BD}|^2$ を示せ。ここに $|\overrightarrow{AC}|$ はベクトル \overrightarrow{AC} の長さを表す。

(2) 四面体 $ABCD$ のすべての面が互いに合同であるとする。このとき $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$, $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AD}|$, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ を示せ。

(3) 辺 AC の中点を P とし, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3}$, $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{5}$, $|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{6}$ とする。(2)の仮定のもとで, 四面体 $PKLN$ の体積を求めよ。

(下 書 き 用 紙)