

数 学

150 分

注 意 事 項

1. 試験開始の合図までこの冊子を開かないこと。
2. 本問題冊子は 8 ページ，答案用紙は 4 ページである。
3. 各答案用紙の上の枠内に受験番号を記入し，下の枠内には受験番号の下 2 桁の数字を忘れずに記入すること。
4. 解答はすべて各答案用紙の枠内に記入し，裏面は使用しないこと。
5. 問題番号のあとのカッコ内の点数は 250 点満点中の配点である。
6. 答案用紙の冊子は切りはなさないこと。
7. 答案用紙に記入する受験番号の数字の字体は，下記の例にならい，明瞭に記入すること。

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

1

(50 点)

p を素数, n を 0 以上の整数とする.

- (1) m は整数で $0 \leq m \leq n$ とする. 1 から p^{n+1} までの整数の中で, p^m で割り切れ p^{m+1} で割り切れないものの個数を求めよ.
- (2) 1 から p^{n+1} までの 2 つの整数 x, y に対し, その積 xy が p^{n+1} で割り切れるような組 (x, y) の個数を求めよ.

(下 書 き 用 紙)

2 (60 点)

正数 a に対して、放物線 $y = x^2$ 上の点 $A(a, a^2)$ における接線を、 A を中心に -30° 回転した直線を ℓ とする。 ℓ と $y = x^2$ との交点で A でない方を B とする。
さらに点 $(a, 0)$ を C 、原点を O とする。

(1) ℓ の式を求めよ。

(2) 線分 OC 、 CA と $y = x^2$ で囲まれる部分の面積を $S(a)$ 、線分 AB と $y = x^2$ で囲まれる部分の面積を $T(a)$ とする。このとき

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{T(a)}{S(a)}$$

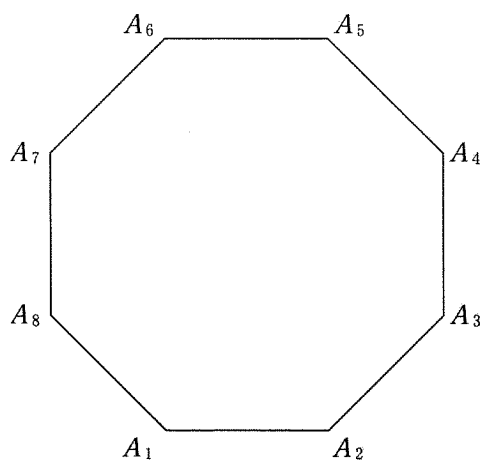
を求めよ。

(下 書 き 用 紙)

3 (70 点)

一辺の長さが 1 の正八角形 $A_1A_2 \cdots A_8$ の周上を 3 点 P, Q, R が動くとする.

- (1) $\triangle PQR$ の面積の最大値を求めよ.
- (2) Q が正八角形の頂点 A_1 に一致し, $\angle PQR = 90^\circ$ となるとき $\triangle PQR$ の面積の最大値を求めよ.



(下 書 き 用 紙)

4 (70 点)

- (1) 整数 $n = 0, 1, 2, \dots$ と正数 a_n に対して

$$f_n(x) = a_n(x - n)(n + 1 - x)$$

とおく. 2つの曲線 $y = f_n(x)$ と $y = e^{-x}$ が接するような a_n を求めよ.

- (2) $f_n(x)$ は (1) で定めたものとする. $y = f_0(x)$, $y = e^{-x}$ と y 軸で囲まれる図形の面積を S_0 , $n \geq 1$ に対し $y = f_{n-1}(x)$, $y = f_n(x)$ と $y = e^{-x}$ で囲まれる図形の面積を S_n とおく. このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_0 + S_1 + \dots + S_n)$$

を求めよ.

(下 書 き 用 紙)