(平成 20 年度前期日程)

# 数　　学

150　分

**注　意　事　項**

1. 試験開始の合図までこの冊子を開かないこと。
2. 本問題冊子は 8 ページ，答案用紙は 4 ページである。
3. 各答案用紙の上の枠内に**受験番号**を記入し，下の枠内には受験番号の**下 2 桁**の数字を忘れずに記入すること。
4. 解答はすべて各答案用紙の枠内に記入し，裏面は使用しないこと。
5. 問題番号のあとのカッコ内の点数は 250 点満点中の配点である。
6. 答案用紙の冊子は切りはなさないこと。
7. 答案用紙に記入する受験番号の数字の字体は，下記の例にならい，明瞭に記入すること。

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

**1** (60点)

正の実数 $a, b$ に対し，$x > 0$ で定義された2つの関数 $x^a$ と $\log bx$ のグラフが1点で接するとする．

(1) 接点の座標 $(s, t)$ を $a$ を用いて表せ．また，$b$ を $a$ の関数として表せ．

(2) $0 < h < s$ をみたす $h$ に対し，直線 $x = h$ および2つの曲線 $y = x^a$，$y = \log bx$ で囲まれる領域の面積を $A(h)$ とする．$\lim_{h \to 0} A(h)$ を $a$ で表せ．

$\boxed{2}$ (60 点)

実数 $x$ に対し，$x$ 以上の最小の整数を $f(x)$ とする．$a, b$ を正の実数とするとき，極限

$$\lim_{x \to \infty} x^c\left(\frac{1}{f(ax-7)} - \frac{1}{f(bx+3)}\right)$$

が収束するような実数 $c$ の最大値と，そのときの極限値を求めよ．

**3** (60 点)

いびつなサイコロがあり，1 から 6 までのそれぞれの目が出る確率が $\frac{1}{6}$ とは限らないとする．このサイコロを 2 回ふったとき同じ目が出る確率を $P$ とし，1 回目に奇数，2 回目に偶数の目が出る確率を $Q$ とする．

(1) $P \geqq \frac{1}{6}$ であることを示せ．また，等号が成立するための必要十分条件を求めよ．

(2) $\frac{1}{4} \geqq Q \geqq \frac{1}{2} - \frac{3}{2}P$ であることを示せ．

**4** (70 点)

平面の原点 $O$ を端点とし，$x$ 軸となす角がそれぞれ $-\alpha$，$\alpha$（ただし $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{3}$）である半直線を $L_1, L_2$ とする．$L_1$ 上に点 $P$，$L_2$ 上に点 $Q$ を線分 $PQ$ の長さが 1 となるようにとり，点 $R$ を，直線 $PQ$ に対し原点 $O$ の反対側に $\triangle PQR$ が正三角形になるようにとる．

(1) 線分 $PQ$ が $x$ 軸と直交するとき，点 $R$ の座標を求めよ．

(2) 2 点 $P, Q$ が，線分 $PQ$ の長さを 1 に保ったまま $L_1, L_2$ 上を動くとき，点 $R$ の軌跡はある楕円の一部であることを示せ．