CoderFarm - Corso avanzato

Lezione 2

Lorenzo Ferrari, Davide Bartoli

7 dicembre 2022

Problemi

Removing Digits

Removing Digits

Dato un intero positivo $N \leq 10^6$, in una mossa puoi sottrarre una delle cifre di N ad N. Di quante mosse hai bisogno per rendere N zero?

Removing Digits

Dato un intero positivo $N \leq 10^6$, in una mossa puoi sottrarre una delle cifre di N ad N. Di quante mosse hai bisogno per rendere N zero?

https://cses.fi/problemset/task/1637

Problemi

Removing Digits

- non funzione sottrarre sempre la cifra maggiore

Problemi

Removing Digits

- non funzione sottrarre sempre la cifra maggiore
- ho un numero limitato di stati e per ogni stato ho un numero limitato di scelte

Problemi

Removing Digits

- non funzione sottrarre sempre la cifra maggiore
- ho un numero limitato di stati e per ogni stato ho un numero limitato di scelte

Programmazione dinamica!

Problemi

Removing Digits

- non funzione sottrarre sempre la cifra maggiore
- ho un numero limitato di stati e per ogni stato ho un numero limitato di scelte

Programmazione dinamica!

- sia $dp[i]$ la risposta per $N = i$.
- $dp[0] = 0$
- $dp[i] = 1 + \min\left(dp[i - c_1], \ldots, dp[i - c_k]\right)$ dove $c_1, \ldots, c_k$ sono le cifre di i.

Problemi

Removing Digits

- non funzione sottrarre sempre la cifra maggiore
- ho un numero limitato di stati e per ogni stato ho un numero limitato di scelte

Programmazione dinamica!

- sia $dp[i]$ la risposta per $N = i$.
- $dp[0] = 0$
- $dp[i] = 1 + \min\left(dp[i - c_1], \ldots, dp[i - c_k]\right)$ dove $c_1, \ldots, c_k$ sono le cifre di i.

Complessità di tempo

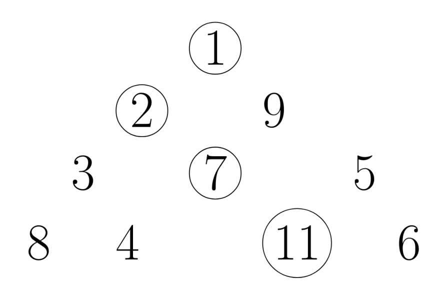
- $O(N)$ stati
- $O(\log N)$ per transizione
- $O(N \log N)$

Problemi

Discesa massima

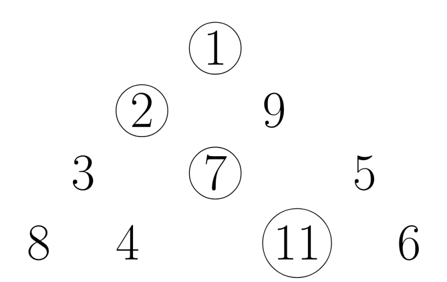
Discesa massima

Dati $\frac{N(N+1)}{2}$ numeri disposti su una piramide di $N \leq 10$ righe, trovare la somma massima di un percorso dalla cima alla base.



Discesa massima

Dati $\frac{N(N+1)}{2}$ numeri disposti su una piramide di $N \leq 10$ righe, trovare la somma massima di un percorso dalla cima alla base.



https://training.olinfo.it/#/task/discesa/statement

Problemi

Discesa massima

- idee?

Problemi

Discesa massima

- idee?
- quanti percorsi diversi esistono?

Problemi

Discesa massima

- idee?
- quanti percorsi diversi esistono?
  - per N volte devo scegliere se andare a dx o a sx
  - ogni percorso è univocamente determinato dalla sequenza di scelte, quindi 2^N percorsi diversi

Problemi

Discesa massima

- idee?
- quanti percorsi diversi esistono?
    - per N volte devo scegliere se andare a dx o a sx
    - ogni percorso è univocamente determinato dalla sequenza di scelte, quindi 2^N percorsi diversi
- i limiti su N sono abbastanza corti da permetterci di eseguire una ricerca completa

Discesa massima

```
int n;
int v[N][N];

// i: di quanti piani sono sceso
// j: sul piano i, dove mi trovo
int solve(int i, int j) {
    if (i == n) return 0;
    int sx = solve(i+1, j);
    int dx = solve(i+1, j+1);
    return v[i][j] + max(sx, dx);
}
```

Triangolo

Stesso problema di prima, ma $N \leq 100$.

Problemi

Triangolo

Triangolo

Stesso problema di prima, ma $N \leq 100$.

Come si risolve?

Problemi

Triangolo

Triangolo

Stesso problema di prima, ma $N \leq 100$.

Come si risolve?

- memorizziamo la risposta per ogni stato

Triangolo

Stesso problema di prima, ma $N \leq 100$.

Come si risolve?

- memorizziamo la risposta per ogni stato
  - due chiamate a `solve(i, j)` ritornano lo stesso risultato
  - possiamo calcolare ogni stato una sola volta
- numero di stati: $O(N^2)$
- costo per transizione $O(1)$
- complessità di tempo: $O(N^2 \cdot 1) = O(N^2)$

Problemi

Triangolo

Triangolo

Stesso problema di prima, ma $N \leq 100$.

Come si risolve?

- memorizziamo la risposta per ogni stato
  - due chiamate a `solve(i, j)` ritornano lo stesso risultato
  - possiamo calcolare ogni stato una sola volta
- numero di stati: $O(N^2)$
- costo per transizione $O(1)$
- complessità di tempo: $O(N^2 \cdot 1) = O(N^2)$

https://training.olinfo.it/#/task/triangolo/statement

Triangolo

```cpp
int dp[N][N];
bool vis[N][N];

int solve(int i, int j) {
    if (i == n) return 0;
    if (vis[i][j]) {
        return dp[i][j];
    }
    vis[i][j] = true;
    int sx = solve(i+1, j);
    int dx = solve(i+1, j+1);
    return dp[i][j] = v[i][j] + max(sx, dx);
}
```

Grid paths

Considera una griglia $N \times N$ con $N \leq 1000$ dove alcuni blocchi contengono delle trappole. Non è consentito camminare sulle trappole e puoi muoverti solo in basso o a destra. Calcola il numero di percorsi diversi dal quadratino in in alto a sinistra a quello in basso a destra. Stampa la risposta modulo $10^9 + 7$.

https://cses.fi/problemset/task/1638

Problemi

Grid Paths

- sia $dp[i][j]$ il numero di modi per andare da $(1;1)$ a $(i;j)$.
- per tutte le celle $(i;j)$ che non contengono trappole:

Problemi

Grid Paths

- sia $dp[i][j]$ il numero di modi per andare da $(1;1)$ a $(i;j)$.
- per tutte le celle $(i;j)$ che non contengono trappole:

$$dp[i][j] = \begin{cases} 1 & \text{se } (i;j) = (1;1) \\ dp[i-1][j] + dp[i][j-1] & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Knapsack

Knapsack (o problema dello zaino)

Vengono dati $N \leq 100$ oggetti, ognuno con un peso e un valore. Si vuole scegliere un sottoinsieme di oggetti di valore massimo che abbia peso totale non superiore a $W \leq 10^5$ (capacita dello zaino). $peso \leq W$ e $valore \leq 10^9$ per ogni oggetto.

Knapsack

Knapsack (o problema dello zaino)

Vengono dati $N \leq 100$ oggetti, ognuno con un peso e un valore. Si vuole scegliere un sottoinsieme di oggetti di valore massimo che abbia peso totale non superiore a $W \leq 10^5$ (capacita dello zaino). *peso* $\leq W$ e *valore* $\leq 10^9$ per ogni oggetto.

https://atcoder.jp/contests/dp/tasks/dp_d

Knapsack

Cerchiamo di approcciare il problema, anche con soluzioni non ottimali/errate.

Knapsack

Cerchiamo di approcciare il problema, anche con soluzioni non ottimali/errate.
Potremmo provare tutti i sottoinsiemi di oggetti, ma questo è decisamente troppo lento (sono 2^N).

Knapsack

Cerchiamo di approcciare il problema, anche con soluzioni non ottimali/errate.
Potremmo provare tutti i sottoinsiemi di oggetti, ma questo è decisamente troppo lento (sono 2^N).
Potremmo ordinare gli oggetti per valore/peso decrescente e prendere i migliori fino a quando non superiamo la capacita dello zaino.

Knapsack

Cerchiamo di approcciare il problema, anche con soluzioni non ottimali/errate.
Potremmo provare tutti i sottoinsiemi di oggetti, ma questo è decisamente troppo lento (sono 2^N).
Potremmo ordinare gli oggetti per valore/peso decrescente e prendere i migliori fino a quando non superiamo la capacita dello zaino.
Questo però non è sempre ottimale (es. $W = 4$, $N = 3$, $pesi = (1, 2, 2)$, $valori = (2, 3, 3)$).

Knapsack

Proviamo a semplificare il problema.

Knapsack

Proviamo a semplificare il problema. Supponiamo che gli oggetti ci arrivino uno alla volta, e che possiamo scegliere se prendere l'oggetto o no.

Knapsack

Proviamo a semplificare il problema. Supponiamo che gli oggetti ci arrivino uno alla volta, e che possiamo scegliere se prendere l'oggetto o no.
Possiamo scegliere se prendere l'oggetto o no (dobbiamo però controllare di non superare W), quindi abbiamo 2 opzioni.

Knapsack

Proviamo a semplificare il problema. Supponiamo che gli oggetti ci arrivino uno alla volta, e che possiamo scegliere se prendere l'oggetto o no.
Possiamo scegliere se prendere l'oggetto o no (dobbiamo però controllare di non superare W), quindi abbiamo 2 opzioni.
In questo modo possiamo rappresentare lo stato con 2 valori:

Knapsack

Proviamo a semplificare il problema. Supponiamo che gli oggetti ci arrivino uno alla volta, e che possiamo scegliere se prendere l'oggetto o no.
Possiamo scegliere se prendere l'oggetto o no (dobbiamo però controllare di non superare W), quindi abbiamo 2 opzioni.
In questo modo possiamo rappresentare lo stato con 2 valori:

- pos = l'indice dell'oggetto che stiamo considerando
- $peso$ = il peso totale che abbiamo preso fino ad ora

Knapsack

Proviamo a semplificare il problema. Supponiamo che gli oggetti ci arrivino uno alla volta, e che possiamo scegliere se prendere l'oggetto o no.
Possiamo scegliere se prendere l'oggetto o no (dobbiamo però controllare di non superare W), quindi abbiamo 2 opzioni.
In questo modo possiamo rappresentare lo stato con 2 valori:

- pos = l'indice dell'oggetto che stiamo considerando
- $peso$ = il peso totale che abbiamo preso fino ad ora

$dp[pos][peso]$ = valore massimo che possiamo ottenere conisderando gli oggetti da 0 a pos e avendo peso totale $peso$.

Knapsack

Proviamo a semplificare il problema. Supponiamo che gli oggetti ci arrivino uno alla volta, e che possiamo scegliere se prendere l'oggetto o no.
Possiamo scegliere se prendere l'oggetto o no (dobbiamo però controllare di non superare W), quindi abbiamo 2 opzioni.
In questo modo possiamo rappresentare lo stato con 2 valori:

- pos = l'indice dell'oggetto che stiamo considerando
- $peso$ = il peso totale che abbiamo preso fino ad ora

$dp[pos][peso]$ = valore massimo che possiamo ottenere conisderando gli oggetti da 0 a pos e avendo peso totale $peso$.
Abbiamo $O(N \cdot W)$ stati, e per ogni stato abbiamo 2 opzioni, quindi la complessità è $O(N \cdot W)$.

Knapsack

Proviamo a semplificare il problema. Supponiamo che gli oggetti ci arrivino uno alla volta, e che possiamo scegliere se prendere l'oggetto o no.
Possiamo scegliere se prendere l'oggetto o no (dobbiamo però controllare di non superare W), quindi abbiamo 2 opzioni.
In questo modo possiamo rappresentare lo stato con 2 valori:

- pos = l'indice dell'oggetto che stiamo considerando
- $peso$ = il peso totale che abbiamo preso fino ad ora

$dp[pos][peso]$ = valore massimo che possiamo ottenere conisderando gli oggetti da 0 a pos e avendo peso totale $peso$.
Abbiamo $O(N \cdot W)$ stati, e per ogni stato abbiamo 2 opzioni, quindi la complessità è $O(N \cdot W)$.
La risposta è $max(dp[N-1][j])$ per $j <= W$.

Longest Common Subsequence

LCS

Dati due stringhe S e T di lunghezza $N, M \leq 3000$, calcola la lunghezza della sottosequenza piu lunga che sia presente sia in S che in T.

Longest Common Subsequence

LCS

Dati due stringhe S e T di lunghezza $N, M \leq 3000$, calcola la lunghezza della sottosequenza piu lunga che sia presente sia in S che in T.

https://atcoder.jp/contests/dp/tasks/dp_f

Longest Common Subsequence

Soluzione:
$dp[i][j]$ = lunghezza della LCS tra $S[i..N]$ e $T[j..M]$.

Longest Common Subsequence

Soluzione:
$dp[i][j]$ = lunghezza della LCS tra $S[i..N]$ e $T[j..M]$.
Abbiamo 2 possibili casi:

- $S[i] \neq T[j]$, allora $dp[i][j] = max(dp[i+1][j], dp[i][j+1])$.

Longest Common Subsequence

Soluzione:
$dp[i][j]$ = lunghezza della LCS tra $S[i..N]$ e $T[j..M]$.
Abbiamo 2 possibili casi:

- $S[i] \neq T[j]$, allora $dp[i][j] = max(dp[i+1][j], dp[i][j+1])$.
- $S[i] = T[j]$, allora $dp[i][j] = 1 + dp[i+1][j+1]$.

Longest Common Subsequence

Soluzione:
$dp[i][j]$ = lunghezza della LCS tra $S[i..N]$ e $T[j..M]$.
Abbiamo 2 possibili casi:

- $S[i] \neq T[j]$, allora $dp[i][j] = max(dp[i+1][j], dp[i][j+1])$.
- $S[i] = T[j]$, allora $dp[i][j] = 1 + dp[i+1][j+1]$.

Il numero di stati è $O(N \cdot M)$, e per ogni stato abbiamo 2 opzioni, quindi la complessità è $O(N \cdot M)$.

Longest Common Subsequence

Soluzione:
$dp[i][j]$ = lunghezza della LCS tra $S[i..N]$ e $T[j..M]$.
Abbiamo 2 possibili casi:

- $S[i] \neq T[j]$, allora $dp[i][j] = max(dp[i+1][j], dp[i][j+1])$.
- $S[i] = T[j]$, allora $dp[i][j] = 1 + dp[i+1][j+1]$.

Il numero di stati è $O(N \cdot M)$, e per ogni stato abbiamo 2 opzioni, quindi la complessità è $O(N \cdot M)$.
La risposta è $dp[0][0]$.

Problemi addizionali

https://training.olinfo.it/#/task/ois_nonna/statement
https://training.olinfo.it/#/task/ois_police3/statement
https://training.olinfo.it/#/task/ois_police4/statement
https://training.olinfo.it/#/task/lotteria/statement
https://cses.fi/problemset/
https://atcoder.jp/contests/dp/tasks