

# **Polunhakualgoritmit ja -järjestelmät**

Rodion Efremov

Kandidaatintutkielma-aine  
HELSINGIN YLIOPISTO  
Tietojenkäsittelytieteen laitos

Helsinki, 16. lokakuuta 2014

Tiedekunta — Fakultet — Faculty		Laitos — Institution — Department	
Matemaattis-luonnontieteellinen		Tietojenkäsittelytieteen laitos	
Tekijä — Författare — Author			
Rodion Efremov			
Työn nimi — Arbetets titel — Title			
Polunhakualgoritmit ja -järjestelmät			
Oppiaine — Läroämne — Subject			
Tietojenkäsittelytiede			
Työn laji — Arbetets art — Level		Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Kandidaatintutkielma-aine		16. lokakuuta 2014	10
Tiivistelmä — Referat — Abstract			
Tiivistelmä.			
Avainsanat — Nyckelord — Keywords			
a, bb, ccc			
Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited			
Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information			

## Sisältö

<b>1</b>	<b>Johdanto</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Tavallisimmat algoritmit</b>	<b>1</b>
<b>3</b>	<b>Kaksisuuntainen haku</b>	<b>3</b>
3.1	Kaksisuuntainen Dijkstran algoritmi . . . . .	3
3.2	Kaksisuuntainen $A^*$ . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Prioriteettijonon valinta</b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>Kaikkien parien lyhimät polut</b>	<b>7</b>
<b>6</b>	<b>Ruudukkoverkko ja jump point -haku</b>	<b>7</b>
<b>7</b>	<b>Dijkstran algoritmi kaarivipuilla</b>	<b>8</b>
7.1	Ositustekniikat . . . . .	8
<b>8</b>	<b>Polunhaku ja Multiple Sequence Alignment -ongelma</b>	<b>9</b>
<b>9</b>	<b>Lyhimät polut ja rinnakkaisuus</b>	<b>9</b>
	<b>Lähteet</b>	<b>9</b>

## 1 Johdanto

Polunhaku painotetuissa tai painottamattomissa verkoissa on perustavanlaatuinen ongelma, joka ei ole mielenkiintoinen vain itsessään, vaan on toisinaan tarvittava alioperaatio muissa algoritmeissa. Esimerkiksi Edmond-Karpin algoritmi käyttää leveyssuuntaisen haun ratkaistaessaan maksimivuo-ongelmaa; multiple sequence alignment -ongelmaa on ruvettu viime vuosikymmeninä ratkomaan myös heuristisin polunhakualgoritmein.

Verkoista puhuttaessa verkko  $G$  on kaksikko  $(V, A)$ , jossa  $V$  on solmujen joukko, ja  $A \subset V \times V$  on (suunnattujen) kaarien joukko. Suuntaamaton verkko  $G' = (V, E)$  voidaan aina simuloida suunnatulla verkolla  $G = (V, A)$  siten, että jokaista suuntaamatonta kaarta  $\{u, v\} \in E$  kohti laitetaan  $A$ :han kaaret  $(u, v)$  ja  $(v, u)$ . (Suunnattu verkko on suuntaamattoman yleistys.) Polunhakua varten, verkosta erotellaan kaksi solmua: lähtösolmu  $s$  ja maalisolmu  $t$ . Jatkossa,  $n = |V|$  ja  $m = |E|$ ; näin esimerkiksi leveyssuuntaisen haun aikavaativuus on  $O(n + m)$ . Polku on  $\gamma_k = \langle u_0, u_1, \dots, u_k \rangle$ , missä mikään solmu ei esiinny yhtä kertaa enempää, ja verkossa on kaari  $(u_i, u_{i+1})$  jokaisella  $i = 0, 1, \dots, k - 1$ . Polkuun liittyvä kustannus on sen kaarien painojen summa, ja mitä tulee itse painoihin, ne oletetaan olevan ei-negatiivisia. Eipainotettujen verkkojen kohdalla, jokaisen kaaren paino oletetaan olevan 1.

## 2 Tavallisimmat algoritmit

Edsger W. Dijkstra esitti vuonna 1959 kuuluisan polunhakualgoritminsa, joka käy polynomisessa ajassa [1]. Algoritmi voidaan pitää yhdistävän ”ahneuden” (engl. *greedy algorithm*), dynaamisen ohjelmoinnin ja inkrementaalisen lähestymistavan. Saatuaan lähtösolmun  $s$ , algoritmi laskee lyhimpien polkujen puun lähtien solmusta  $s$  kunnes  $t$  joutuu *avoimeen listaan* (engl. *open list; search frontier*), ja sitä kautta *suljettuun listaan* (engl. *closed list; settled node list*), jolloin lyhin  $s, t$ -polku on löytynyt. Hart et al. esittivät vuonna 1968 kuuluisan  $A^*$ -algoritminsa, joka – samoin kuten Dijkstran algoritmi – ylläpitää mm. kunkin saavutetun solmun  $u$   $g$ -arvon  $g(u)$ , joka on toistaiseksi pienin kustannus lähtösolmusta  $s$  solmuun  $u$ , ja joka on taattu olemaan pienin mahdollinen heti kun  $u$  poistuu avoimesta listasta [3]. Erona on kuitenkin se, että  $A^*$  käyttää kunkin solmun  $u$  prioriteettinä sen  $f$ -arvo, joka on siis  $f(u) = g(u) + h(u)$ , jossa  $h(u)$  on solmun  $u$  optimistinen (eli aliarvioitu) etäisyys maalisolmuun. Intuitio tämän järjestyksen takana on se, että  $A^*$  ”tietää” mihin suuntaan haku on suunnattava, jota pääsisi maalisolmuun, ainakin paremmin kuin Dijkstran algoritmi, jonka hakuavaruus kasvaa laajenevan pallon tavoin ”kaikkiin suuntiin”.

---

**Algoritmi 1:** DIJKSTRA-SHORTEST-PATH( $G, s, t, w$ )

---

Monikkosijoitus

```
1 OPEN, CLOSED,  $g, \pi = (\{s\}, \emptyset, \{(s, 0)\}, \{(s, \mathbf{nil})\})$ 
2 while  $|OPEN| > 0$  do
3    $u = \arg \min_{x \in OPEN} g(x)$ 
4   OPEN = OPEN -  $\{u\}$ 
5   if  $x$  is  $t$  then
6     return TRACEBACK-PATH( $t, \pi, \mathbf{nil}$ )
7   CLOSED = CLOSED  $\cup \{x\}$ 
   Jokaisella solmun  $x$  lapsisolmulla  $u$ , tee...
8   for  $(x, u) \in G.A$  do
9     if  $u \in CLOSED$  then
10      continue
11      $g' = g(x) + w(x, u)$ 
12     if  $u \notin OPEN$  then
13       OPEN = OPEN  $\cup \{u\}$ 
14        $g(u) = g'$ 
15        $\pi(u) = x$ 
16     else if  $g(u) > g'$  then
17        $g(u) = g'$ 
18        $\pi(u) = x$ 
   Ei  $s, t$  -polkua verkossa  $G$ .
19 return  $\langle \rangle$ 
```

---

$A^*$ :n pseudokoodi on tasan sama kuin Dijkstran algoritmin, paitsi että rivillä 3  $g(x)$ :n sijasta on  $f(x)$ , jolle siis  $f(x) = g(x) + h(x)$ . Molemmat kutsuvat TRACEBACK-PATH-rutiinia, joka siis muodostaa lyhimmän polun “edeltäjäpuusta” (engl. *predecessor tree*) ajassa  $\Theta(N)$ , missä  $N$  on lyhimmän polun sol-

---

**Algoritmi 2:** TRACEBACK-PATH( $x, \pi, \pi_{REV}$ )

---

```
1  $u = x$ 
2  $p = \langle \rangle$ 
3 while  $u$  is not nil do
4   lisää  $u$   $p$ :n alkuun
5    $u = \pi(u)$ 
6   Kaksisuuntainen haku?
7   if  $\pi_{REV}$  is not nil then
8     while  $u$  is not nil do
9       lisää  $u$   $p$ :n loppuun
10       $u = \pi_{REV}(u)$ 
11 return  $p$ 
```

---

mujen määrä.

### 3 Kaksisuuntainen haku

Vaikka  $A^*$  on tyypillisesti tehokkaampi kuin Dijkstran algoritmi, käyttämällä *kaksisuuntaista* hakua, voidaan päästää verrattavissa olevaan suorituskyykyyn. Ajatus kaksisuuntaisuuden takana on se, että algoritmi kasvattaa kaksi hakupuuta, yksi normaaliin tapaan ja toinen maalisolmusta ihan kuin kaaret olisivat “käännetty” päinvastaiseen suuntaan, kunnes kaksi hakuavaruutta “kohtaavat” keskellä. Nyt jos lyhin polku koostuu  $N$  kaaresta, ja verkon solmujen keskiarvoinen aste on  $d$ , tavallinen, eli yksisuuntainen haku tekee työn

$$\sum_{i=0}^N d^i,$$

kun kaksisuuntainen olisi tehnyt vain

$$2 \sum_{i=0}^{\lceil N/2 \rceil} d^i.$$

Ylläoleva pätee leveyssuuntaiseen hakuun sellaisenaan, ja painotetun haun kohdalla voidaan saada yläraja kertomalla kunkin summan termin tekijällä  $O(\log n)$ .

#### 3.1 Kaksisuuntainen Dijkstran algoritmi

Ylläolevan analyysin nojalla, on selvä, että Dijkstran algoritmi hyötyy kaksisuuntaisuudesta, eikä edellytä minkäänlaista verkon esiprosessointia. Lisäksi, algoritmin vahvuutena suhteessa  $A^*$ :iin ei ole pelkästään verrattavissa oleva tehokkuus, vaan myös heuristiikkafunktion tarpeettomuus. Alla  $\mu$  on toistaiseksi lyhimmän polun kustannus, joka suorituksen alussa on  $\infty$ . Kun algoritmi

löytää toistaiseksi lyhimmän polun hakuavaruuksien kohdatessa, “välisolmu”  $m$  ja sen implikoiva kustannus  $\mu$  päivitetään. Haku jatkuu siihen asti, kunnes molempien avointen listojen minimialkioiden kustannusten summa on vähin-

---

**Algoritmi 3:** EXPAND( $OPEN, CLOSED, CLOSED_2, g, g_2, \pi, \mu, m, e, w$ )

---

```

1  $u = \arg \min_{x \in OPEN} g(x)$ 
2  $OPEN = OPEN - \{u\}$ 
3  $CLOSED = CLOSED \cup \{u\}$ 
4 for  $x \in e(u)$  do
5   if  $x \in CLOSED$  then
6     continue
7    $g' = g(u)$ 
8   if  $e(u)$  gives child nodes of  $u$  then
9     “Normaali” haku.
9      $g' = g' + w(u, x)$ 
tään  $\mu$ . 10 else
11   Käännetty haku.
11    $g' = g' + w(x, u)$ 
12 if  $x \in OPEN$  then
13    $OPEN = OPEN \cup \{x\}$ 
14    $g(x) = g'$ 
15    $\pi = x$ 
16   UPDATE( $x, CLOSED_2, g', g_2, \mu, m$ )
17 else if  $g(x) > g'$  then
18    $g(x) = g'$ 
19    $\pi = x$ 
20   UPDATE( $x, CLOSED_2, g', g_2, \mu, m$ )

```

---



---

**Algoritmi 4:** UPDATE( $x, CLOSED, g', g, \mu, m$ )

---

```

1 if  $x \in CLOSED$  then
2    $p = g' + g(x)$ 
3   if  $\mu > p$  then
4      $\mu = p$ 
5      $m = x$ 

```

---

Rutiini UPDATE tarkistaa, että yhden hakusuunnan solmu on toisen sulje-

tussa listassa, ja jos asia on niin, yrittää päivittää välisolmun.

---

**Algoritmi 5: BIDIRECTIONAL-DIJKS**

---

```

1 OPEN, CLOSED,  $g, \pi = \{s\}, \emptyset, \{(s, C$ 
2  $OPEN_{REV}, CLOSED_{REV}, g_{REV}, \pi_{REV}$ 
3  $\mu = \infty$ 
4  $m = \text{nil}$ 
5 while  $|OPEN| \cdot |OPEN_{REV}| > 0$  do
6   if  $m$  is not nil then
7      $p = \text{TERMINATE}(\text{OPEN}, \text{OPEN}_{REV},$ 
8        $g, g_{REV}, \pi, \pi_{REV}, \mu, m)$ 
9     if  $p$  is not nil then
10      return  $p$ 
11   Triviaali kuormantaus
12   if  $|OPEN| < |OPEN_{REV}|$  then
13      $\text{EXPAND}(\text{OPEN},$ 
14        $\text{CLOSED},$ 
15        $\text{CLOSED}_{REV},$ 
16        $g, g_{REV}, \pi, \mu, m, e_f,$ 
17     else
18        $\text{EXPAND}(\text{OPEN}_{REV},$ 
19          $\text{CLOSED}_{REV},$ 
20          $\text{CLOSED},$ 
21          $g_{REV}, g, \pi_{REV}, \mu, m,$ 
22       return  $\langle \rangle$ 
23
```

---

Yllä,  $e_f$  on kuvaus, jolle  $e_f(u) = \{v \in G.V : (u, v) \in G.A\}$  jokaisella  $u \in G.V$ , ja  $e_b(u) = \{v \in G.V : (v, u) \in G.A\}$ . Molemmat siis määrittelevät “laajentumisoperaattorit” (engl. *expansion operator*):  $e_f$  normaalissa haussa, ja  $e_b$

käännettyssä haussa.

---

**Algoritmi 6: TERMINATE(OPEN, OPEN<sub>REV</sub>,  $g, g_{REV}, \pi, \pi_{REV}, \mu, m$ )**

---

```

1 if  $\min_{x \in \text{OPEN}} g(x) + \min_{x \in \text{OPEN}_{REV}} g_{REV}(x) \geq \mu$  then
2   return  $\text{TRACEBACK-PATH}(m, \pi, \pi_{REV})$ 
3 return nil

```

---

### 3.2 Kaksisuuntainen $A^*$

Kaksisuuntaisen  $A^*$ :n saa aikaan muuttamalla algoritmin 3 rivi 1 seuraavalaiseksi:

$$u = \arg \min_{x \in \text{OPEN}} f(x),$$



ja korvaamalla rivin 7 kutsu kutsulla  $\text{TERMINATE} * (\dots)$ , jonka määritelmä on alla.

---

**Algoritmi 7:**  $\text{TERMINATE}^*(\text{OPEN}, \text{OPEN}_{REV}, f, f_{REV}, \pi, \pi_{REV}, \mu, m)$

---

```

1 if  $\mu \leq \max_{x \in \text{OPEN}} f(x), \max_{x \in \text{OPEN}_{REV}} f_{REV}(x)$  then
2   return  $\text{TRACEBACK-PATH}(m, \pi, \pi_{REV})$ 
3 return nil

```

---

## 4 Prioriteettijonon valinta

Polkua hakiessa painotetuissa verkoissa joudutaan käyttämään prioriteettijonoja, jotka ovat tarpeellisia pitääkseen haut optimaaleina, ja joiden oletetaan tarjoavan ainakin neljä operaatiota:

1.  $\text{INSERT}(H, x, k)$  tallettaakseen solmun  $x$  sen prioriteetin  $k$  kera,
2.  $\text{DECREASE-KEY}(H, x, k)$  päivittääkseen solmun  $x$  talletetun prioriteetin (pienemmäksi),
3.  $\text{EXTRACT-MINIMUM}(H)$  poistaakseen pienimmän prioriteetin omaava solmu, ja
4.  $\text{IS-EMPTY}(H)$  varmistaakseen, että jonossa on vielä alkioita.

Helpoin tehokkaaksi kutsuttu prioriteettijonorakenne (jatkossa vain “keko”) on binäärikeko, jonka operaatiot (1) - (3) käyvät ajassa  $O(\log n)$ , jolloin tällaisella keolla Dijkstran ja  $A^*$ -algoritmit käyvät kumpikin ajassa  $O((m + n) \log n)$ . Teoriassa edelläoleva ylläraja voidaan parantaa käyttämällä Fibonacci-kekoa, jonka lisäysoperaatio (1) käy eksaktissa vakioajassa, päivitysoperaatio (2) tasoitettussa vakioajassa, ja poisto-operaatio (3) tasoitettussa ajassa  $O(\log n)$ , jolloin haut voidaan suorittaa ajassa  $O(m + n \log n)$ . Huomaa, että kaikki tähän asti mainitut keot perustuvat vertailuihin, ja teoriassa enintään yksi operaatiosta  $\text{INSERT}$  tai  $\text{EXTRACT-MINIMUM}$  voi käydä (eksaktissa tai tasoitettussa) vakioajassa, ja toisen on käytävä ajassa  $\Omega(\log n)$ , koska muuten algoritmi 8 tällaisella keolla rikkoisi lajittelemisen informaatio-teoreettisen rajan, joka on  $\Omega(n \log n)$ . Jos kuitenkin kaarien painot ovat kokonaislukuja,  $O(m + n \log n)$ -rajaa voidaan parantaa: Mikkel Thorup esitti vuonna 2003 keon, jonka poisto-operaatio käy ajassa  $O(\log \log \min n)$  ja muut operaatiot vakioajassa [6]. Jos kuitenkin kokonaislukupainot ovat väliltä  $[0, N]$ , poisto-operaatio voidaan suorittaa ajassa  $O(\log \log \min\{n, N\})$ . Nyt selvästi haun aikavaativuus tällaisella keolla on  $O(m + n \log \log \min\{n, N\})$ .

---

**Algoritmi 8:** GENERIC-HEAP-SORT( $S, H$ )

---

Tyhjennä keko

```
1  $H = \emptyset$ 
2 for  $i = 1$  to  $|S|$  do
     $S[i]$  on itsensä prioriteetti.
3   INSERT( $H, S[i], S[i]$ )
4 for  $i = 1$  to  $|S|$  do
5    $S[i] = \text{EXTRACT-MINIMUM}(H)$ 
```

---

## 5 Kaikkien parien lyhimät polut

Toisinaan on annettu  $n$  solmua ja halutaan löytää lyhimät polut kaikkien kahden eri solmun välillä. Yksi tehokkaimmista algoritmeista on Floyd-Warshallin algoritmi, joka käy ajassa  $\Theta(n^3)$ , eikä sen toiminta riipu kaarien määrästä  $m$ . Ellei kohdeverkko ole täysi ( $m = o(n^2)$ ), Johnsonin algoritmi saattaa olla parempi valinta, sillä Fibonacci-keolla edellämainittu käy ajassa  $O(n^2 \log n + nm)$ . Ajatus Johnsonin algoritmista on ensin tarkistaa, ettei verkossa ole negatiivisen kustannuksen omaava sykli, minkä jälkeen algoritmi ajaa  $n$  kertaa Dijkstran algoritmin jokaisesta solmusta, ja jokaisella kerralla hakee kokonaisen lyhimpien polkujen puun.

Ylläesitetystä aikavaativuudesta ilmenee, ettei asianomaiset algoritmit ole tarpeeksi tehokkaita jo  $n$ :n arvoilla yli 10000. Jos kuitenkin ongelman koko sallii kaikkien parien algoritmin ajon, algoritmi palauttaa “edeltäjämatriisin” (engl. *predecessor matrix*), josta  $N$ :n solmun lyhin polku voidaan rakentaa ajassa  $\Theta(N)$ , mitä ei pysty parantamaan tuon enempää, ei ainakaan ilman edistynempää algoritmiikkaa. (Ja vaikka voisikin, polun tulostaminen ja/tai piirtäminen on jo vähintään  $\Omega(N)$ .)

## 6 Ruudukkoverkko ja jump point -haku

Ruudukkoverkko (engl. *grid graph*) on suuntamattoman verkon erikoistapaus, ja sen rakenne voidaan määritellä siten, että kullakin solmulla on kahden kokonaisluvun koordinaatti, eli solmujoukko on  $\{(x, y) : 1 \leq x \leq w, 1 \leq y \leq h\}$ , missä  $w$  on ruudukkoverkon leveys ja  $h$  on sen korkeus. Nyt kun on annettu kaksi solmua  $(x_1, y_1)$  ja  $(x_2, y_2)$ , jos vain yksi koordinaateista eroavat yksikön verran, kyseessä on vaaka- tai pystysuuntainen kaari ja sen painoksi asetetaan 1. Toisaalta, kun molemmat koordinaatit eroavat yksikön verran, kyseessä on vino kaari, jonka painoksi asetetaan  $\sqrt{2}$ . On selvää, että jo leveyssuuntainen haku on optimaali tällaisella verkolla, sillä aina kun se etenee vinottain, esim. solmusta  $(x, y)$  solmuun  $(x + 1, y - 1)$ , se ohittaa kahden kaaren siirron solmun  $(x + 1, y)$  tai  $(x, y - 1)$  kautta, joka pidentäisi lyhimmän polun pituuden kahdella yksiköllä  $\sqrt{2}$  sijaan. Intuitiivisest ottaen, ruuduk-

koverkoilla heuristinen haku on kannattavampaa kuin kaksisuuntaisuus, ja tavallinen  $A^*$  on hyvä valinta. Toisaalta, juuri tällaisella verkkotyypillä  $A^*$  kärsii polkujen ”symmetriasta”. Kuten yleensä erityistapauksiin rajoittuessa, polunhaku ruudukolla voidaan tehdä paljon tehokkaammin. Vuonna 2011 Harabor ja Grastien esittivät ”jump point search” -nimisen  $A^*$ :n muunnelman, joka karsii pois polkusymmetriat ja etenee ”hyppien” yli monen solmun siinä, missä muut algoritmit etenevät jokaisen välisolmun kautta [2].

## 7 Dijkstran algoritmi kaarivipuilla

Vuonna 2007 Möhring et al. esittivät mielenkiintoisen tavan nopeuttaa Dijkstran algoritmi [5]. Ajatuksena on osittaa suunnatun verkon  $G = (V, A)$  solmujoukko osioihin  $V_1, \dots, V_p$  siten, että

$$\bigcup_{i=1}^p V_i = V,$$

ja  $V_i \cap V_j = \emptyset$  jokaisella  $i \neq j$ . Ositus voidaan toteuttaa kuvauksella  $r: V \rightarrow \{1, \dots, p\}$ . Kustakin osiosta  $V_i$  puhuttaessa, sen ”rajasolmut” (engl. *boundary nodes*) määritellään joukkona

$$B_i = \{v \in V_i : \exists (u, v) \in A \text{ siten että } r(v) \neq r(u)\}.$$

Lisäksi, järjestelmä liittää jokaiseen verkon kaareen ”kaarivipuvektorin” (engl. *arc-flag vector*), jota voidaan toteuttaa  $p$ :n bitin bittivektorina. Nyt jokaisella osiolla  $V_i$  järjestelmän esiprosessointialgoritmi ajaa ”takaperin” tavallisen Dijkstran algoritmi kustakin rajasolmusta  $b \in B_i$ , ja asettaa tuloksena syntyvässä lyhimpien polkujen puussa jokaisen kaaren  $a$  kohdalla  $a$ :n vipuvektorin  $r(b)$ :s bitti päälle. Tuloksena syntyvässä järjestelmässä, hakiessa polkua solmuun  $t$ , nopeutettu Dijkstran algoritmi voi karsia kaikki ne kaaret, joiden vektorin  $r(t)$ :s bitti ei ole päällä, ainakin niin kauan kunnes haku pääsee samaan osioon solmun  $t$  kanssa.

### 7.1 Ositustekniikat

Kuten ylläolevasta kävi ilmi, ”kaarivipu”-Dijkstra vaatii verkon solmujen osituksen, minkä jälkeen joudutaan esiprosessoimaan koko verkko. Koska esiprosessoinnin aika riippuu lineaarisesti kaikkien osioiden kaikkien rajasolmujen yhteenlasketusta määrästä, jälkimmäisen minimointi on toivottavaa.

Mikäli on annettu kunkin solmun koordinaatit tasossa, helpoin tapa osioida verkko (”ruudukointi”) on jakaa pienin, kaikki solmut sisältävä suorakulmio  $w$  sarakkeeseen ja  $h$  riviin. Tämä ei kuitenkaan ole vailla ongelmia: esimerkiksi viidenkymmenen neliökilometrin osio pääkaupungiseudulla sisältäisi paljon enemmän infrastruktuuria kuin jokin samankokoinen alue

Kainuun maakunnassa. Asia voidaan parantaa käyttämällä ”nelipuita” (engl. *quad-tree*): koko suorakulmio jaetaan neljään, samankokoiseen suorakulmioon, minkä jälkeen jaetaan jälkimmäiset, ja niin edelleen pysäyttäen jaon niiden suorakulmioiden kohdalla, joissa on enintään  $\kappa$  solmua ( $\kappa$  annetaan nelipuu-algoritmillemme parametrina). Tämä ottaa solmujakauman jo paremmin kuin ruudukointi, mutta ei niin hyvin kuin *kd*-puu (engl. *kd-tree*), joka lajittelee kaikkien solmujen listan ensin esimerkiksi  $x$ -koordinaattien perusteella, poimii mediaanialkion  $x$ -koordinaatin  $x_{mid}$ , ja implisiittisesti jakaa koko listan kahteen osalistaan  $V_{\leq}$  ja  $V_{>}$ , missä  $V_* = \{x \in V : x * x_{mid}\}$ , minkä jälkeen lajitellaan  $V_{\leq}$  ja  $V_{>}$ , mutta jo  $y$ -koordinaattien perusteella, ja jako pysähtyy niiden solmujoukkojen kohdalla, joissa on enintään  $\kappa$  solmua (tässäkin  $\kappa$  on nelipuulle annettu parametri).

Neljäs tapa, jota Möhring et al. ovat tarkastelleet, on vuonna 1998 kehitetty METIS [4], joka ei edes tarvitse solmukoordinaatteja. Järjestelmä toimii siten, että syöteverkosta  $G_i$  muodostetaan verkko  $G_{i+1}$  siten, että  $G_i$ :ssä korvataan ”tiheästi” kytketyt solmut yhdellä solmulla verkossa  $G_{i+1}$ , ja niin jatkaen pääsee tarpeeksi pieneen verkkoon  $G_{min}$ , jonka osittaminen on tarpeeksi tehokasta. Kun  $G_{min}$  on ositettu, kuljetaan redusointiketjussa takaperin ja laajennetaan väliverkot  $G_{min-1}, \dots, G_1$ , kunnes päästään alkuperäiseen verkkoon  $G_0 = G$ .

## 8 Polunhaku ja Multiple Sequence Alignment -ongelma

## 9 Lyhimmät polut ja rinnakkaisuus

Toistaiseksi lyhimpien polkujen haku ei juuri antanut paljon aihetta rinnakkaistamiseen. Vuonna 1998 Meyer ja Sanders esittivät  $\Delta$ -stepping -nimisen algoritminsa, joka asettaa kunkin saavutetun solmun  $u$  omaan ”koriin” (engl. *bucket*) numero  $i$  aina, kun  $g(u) \in [(i-1)\Delta, i\Delta)$ .

## Lähteet

- [1] Dijkstra, Edsger W.: *A note on two problems in connexion with graphs*. Numerische Mathematik, 1:269–271, 1959.
- [2] Harabor, Daniel ja Grastien, Alban: *Online Graph Pruning for Pathfinding on Grid Maps*. Teoksessa *25th National Conference on Artificial Intelligence. AAAI*, 2011.
- [3] Hart, Peter E., Nilsson, Nils J. ja Raphael, Bertram: *A formal basis for the heuristic determination of minimum cost paths*. IEEE Transactions on Systems, Science, and Cybernetics, SSC-4(2):100–107, 1968.

- [4] Karypis, George ja Kumar, Vipin: *A Fast and High Quality Multilevel Scheme for Partitioning Irregular Graphs*. SIAM J. Sci. Comput., 20(1):359–392, joulukuu 1998, ISSN 1064-8275. <http://dx.doi.org/10.1137/S1064827595287997>.
- [5] Möhring, Rolf H., Schilling, Heiko, Schütz, Birk, Wagner, Dorothea ja Willhalm, Thomas: *Partitioning Graphs to Speedup Dijkstra’s Algorithm*. J. Exp. Algorithmics, 11, helmikuu 2007, ISSN 1084-6654. <http://doi.acm.org/10.1145/1187436.1216585>.
- [6] Thorup, Mikkel: *Integer Priority Queues with Decrease Key in Constant Time and the Single Source Shortest Paths Problem*. Teoksessa *Proceedings of the Thirty-fifth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC ’03, sivut 149–158, New York, NY, USA, 2003. ACM, ISBN 1-58113-674-9. <http://doi.acm.org/10.1145/780542.780566>.