Bài 1:

a. $X^2 - 5x + 36 = 8\sqrt{3x+4}$

Điều kiện: $x \geq \frac{-4}{3}$

Phương trình tương đương:

$(x^2 - 8x + 16) + (3x + 4 - 2\sqrt{3x+4}.4 + 16) = 0$

$(x - 4)^2 + (\sqrt{3x+4} - 4)^2 = 0$

$\begin{cases} x-4=0 \\ \sqrt{3x+4}-4=0 \end{cases}$ x = 4 (Thoả mãn)

Vậy: phương trình có nghiệm duy nhất x = 4

b. $\sqrt[3]{x-9} = (x-3)^2 + 6$

Đặt $u = \sqrt[3]{x-9}$, $v = x - 3$

Ta được: $\begin{cases} u=v^3+6 \\ v=u^3+6 \end{cases}$ u = v = -2 x = 1

Vậy: phương trình có nghiệm duy nhất x = 1

Bài 2:

1/ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \Rightarrow \frac{ab+bc+ca}{abc} = 0$ ab + bc + ca = 0

Ta có: $a^2 + 2bc = a^2 + bc - (ab + ca) = a(a-b) - c(a-b) = (a-b)(a-c)$

Tương tự: $b^2 + 2ca = (b-a)(b-c)$; $c^2 + 2ab = (c-a)(c-b)$

Do đó: $A = \ldots = \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{(a-b)(a-c)} - \frac{1}{(b-c)(a-b)} + \frac{1}{(a-c)(b-c)} = 0$

2/ Điều kiện: $a, b, c \neq 0$

Ta có: $\frac{a^3+1}{a} = \frac{b^3+1}{b}$ $\Leftrightarrow$ b(a^3+1) = a(b^3+1) => a^3b - ab^3 – a + b=0

$\Leftrightarrow$ ab(a^2-b^2) – (a-b) = 0 $\Leftrightarrow$ (a-b)(ab(a+b) – 1) = 0 (*)

Mà a,b phân biệt và khác 0 nên a-b $\neq 0$ => (*) tương đương: ab(a+b)=1

Tương tự: bc(b+c) = 1

Do đó: ab(a+b) = bc(b+c) $\Leftrightarrow$ a(a+b) = c(b+c) $\Leftrightarrow$ (a-c)(a+b+c) = 0 $\Leftrightarrow$ a+b+c = 0 (vì a,c phân biệt và khác 0)

$\Rightarrow$ a + b = -c

Mà ab(a+b) = 1 nên ab.(-c) = 1 => abc = -1 $\Leftrightarrow$ abc + 1 = 0 (đpcm)

Bài 3:

1/ Với a,b,c không âm Ta có:

$\sqrt{ab+2a+b+2} = \sqrt{(a+1)(b+2)} \le \frac{a+b+3}{2}$

$\sqrt{bc+3b+2c+6} = \sqrt{(b+2)(c+3)} \le \frac{b+c+5}{2}$

$\sqrt{ac+3a+c+3} = \sqrt{(c+3)(a+1)} \le \frac{c+a+4}{2}$

Cộng vế với vế các bđt ta được C $\le \frac{2(a+b+c)+12}{2}$ = 21

Dấu “=” khi $\begin{cases} a+1=b+2=c+3 \\ a+b+c=15 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ a=6; b=5; c=4

Vậy: max C = 21 khi a=6; b=5; c=4

2/ a + b + ab = 3

$\Leftrightarrow$ (a+1)(b+1) = 4 $\le \frac{(a+b+2)^2}{4}$

$\Rightarrow$ a + b ≥ 2 *hoặc* $a+b \le -6$

Do đó: a^2 + b^2 $\ge \frac{(a+b)^2}{2} \ge 2$ (*đpcm*)

Bài 4: 1/ Phương trình đã cho tương đương:

$2x^2 + 4y^2 + 4xy + 4x + 8y – 6 = 0$

$(x + 2y + 2)^2 + x^2 = 10 = 1^2 + 3^2 = 3^2 + 1^2$

+) Với $x^2 = 1$ => $\begin{cases} x=\pm 1 \\ x+2y+2=\pm 3 \end{cases}$

Giải được (x; y) $\in \{(1;0),(1;-3)$,(-1; 1), (-1; -2)}

+) Với $x^2 = 9$ => $\begin{cases} x=\pm 3 \\ x+2y+2=\pm 1 \end{cases}$

Giải được (x; y) $\in \{(3;-2),(3;-3)$,(-3; 1), (-3; 0)}

Vậy: phương trình đã cho có nghiệm nguyên (x; y) $\in \{(1;0),(1;-3)$,(-1; 1), (-1; -2), $(1;0),(1;-3)$,(-1; 1), (-1; -2)}

2/ Ta có: a1, a2, a3 là số nguyên tố (chọn số nguyên tố lẻ)

$\begin{cases} a1-a2 \vdots 2 \\ a3-a1 \vdots 2 \\ a2-a3 \vdots 2 \end{cases}$ => (a1-a2)(a3-a1)(a2-a1) $\vdots 8$ => P $\vdots 8$ (1)

+) Nếu trong 7 snt có 3 => 6 số còn lại không chia hết cho 3 => chọn đc ít nhất 3 số trong 6 số cùng dư khi chia 3 => hiệu đôi một chia hết cho 3 => P $\vdots 27$ (2)

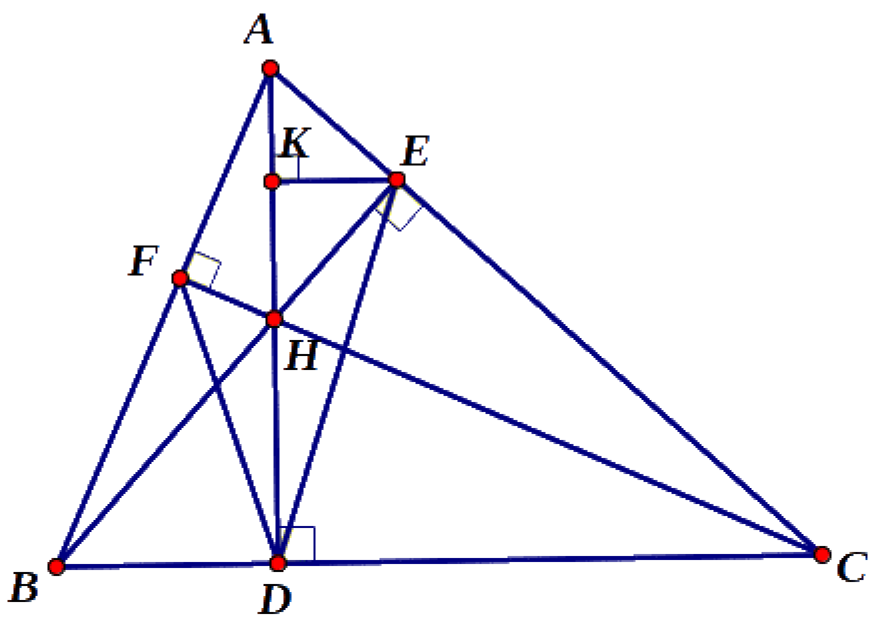
+) Nếu trong 7 snt không có 3 => tồn tại ít nhất 4 số cùng dư khi chia 3 => hiệu đôi một chia hết cho 3 => P $\vdots 27$ (3)

Từ (2),(3) => Luôn chọn đc 3 trong 7 snt thoả mãn P= (a1-a2)(a3-a1)(a2-a1) $\vdots 27$ (4)

Từ (1), (4) => P $\vdots 216 (vì\, 27\, và\, 8\, nguyên\, tố\, cùng\, nhau)$

Vậy: đpcm

Bài 5:



a/ ΔBDF ΔBAC (cgc) => $gócBDF = gócBAC$

TT: $gócCDE = gócCAB$

Do đó: $gócBDF = gócCDE$

Mà : gócFDH + gócBDF = 90 = gócEDH + gócCDE

=>gócFDH = gócEDH

Vậy; đpcm

b/ EK vuông góc AH nên EK // DC

Áp dụng định lý Talet trong ΔADC:

$\frac{AK}{AD} = \frac{AE}{AC}$ $\quad \frac{AC}{AD} = \frac{AE}{AK}$ $\quad \frac{AC^2}{AD^2} = \frac{AE^2}{AK^2} = \frac{AH.AK}{AK^2} = \frac{AH}{AK}$ (đpcm)

c/AD = $\frac{2dtABC}{BC}$; BE = $\frac{2dtABC}{AC}; CF = \frac{2dtABC}{AB}$

Theo đề bài: $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{BE^2} + \frac{1}{CF^2}$ $\quad \frac{BC^2}{4dtABC^2} = \frac{AC^2}{4dtABC^2} + \frac{AB^2}{4dtABC^2}$ $\quad BC^2 = AC^2 + AB^2$ $\quad \Delta ABC$ *vuông tại A*

Vậy; đpcm

d/ Gọi S, S1, S2, S3 lần lượt là diện tích tam giác ABC, AEF, BFD, CED

S = AB. AC. SinBAC

S1 = AF. AE . SinFAE

- $\frac{S1}{S} = \frac{AE.AF}{AB.AC}$
- Tương tự: $\frac{S2}{S} = \frac{BF.BD}{AB.BC}$; $\frac{S3}{S} = \frac{CE.CD}{BC.AC}$

Đặt $\frac{AF}{AB}$ = x ; $\frac{BD}{BC}$ = y ; $\frac{CE}{Ac}$ = z

Ta có: 0 < x,y,z <1 và $\frac{BF}{AB}$ = 1 – x ; $\frac{CD}{BC}$ = 1 – y ; $\frac{AE}{AC}$ = 1 – xz

Do đó: $\frac{S1.S2.S3}{S^3}$ = x(1-x)y(1-y)z(1-z)

Theo bất đẳng thức Cauchy: x(1-x) $\le \frac{1}{4}$; y(1-y) $\le \frac{1}{4}; z(1-z) \le \frac{1}{4}$

Nên $\frac{S1.S2.S3}{S^3} \le \frac{1}{4^3}$ hay S1.S2.S3 $\le \frac{S^3}{4^3}$

=> trong 3 số S1, S2, S3 phải tồn tại ít nhất 1 số không lớn hơn $\frac{1}{4}$ S

Vậy: đpcm