LỜI GIẢI THAM KHẢO ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN 10 TRƯỜNG THPT QO

— Coder QO - Nguyễn Nam Khánh Hải

— Wed, Feb 15, 2023 2:01 AM

Câu 1

Cho $a, b \in \mathbb{R}$ và $a > 0$. Xét 2 hàm số $f_x = 2x^2 - 4x + 5$ và $g(x) = x^2 + ax + b$. Tìm tất cả các giá trị của a và b biết giá trị nhỏ nhất của $g(x)$ nhỏ hơn giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là 8 đơn vị và đồ thị hai hàm số trên có đúng một điểm chung.

Lời giải

$$\begin{gathered}
\text{Min } f(x) = 3 \Rightarrow \text{Min } g(x) = -5 \\
\Rightarrow a^2 = 4b + 20. \qquad\qquad (1) \\
\text{Mặt khác theo đề bài có phương trình sau có 1 nghiệm:} \\
2x^2 - 4x + 5 = x^2 + ax + b \\
\Leftrightarrow x^2 - x(a+4) + 5 - b = 0 \text{ có một nghiệm} \\
\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow a^2 + 8a - 4 + 4b = 0. \qquad (2) \\
\text{Từ } (1) \text{ và } (2) \text{ kết hợp với } a > 0 \Rightarrow (a; b) = (2; -4)
\end{gathered}$$

Câu 2

Giải phương trình $2x^2 + 2x - 3 + 3\sqrt{x^2 + x + 1} = 0$

Lời giải

ĐKXĐ: $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{gathered}
\text{Ptbt} \Leftrightarrow 2a^2 + 3a - 5 = 0(\sqrt{x^2 + x + 1} = a > 0) \\
\Leftrightarrow a = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right.
\end{gathered}$$

Vậy S = {0; -1}

Câu 3

Cho bất phương trình $\sqrt{x^2-2x+2} \geq 2m+1-2x^2+4x$, m là tham số. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của $m \in [-5; 50]$ để bất phương trình trên nghiệm đúng với mọi x thuộc tập xác định của nó.

Lời giải:

$$\text{BPT} \Leftrightarrow 2a^2+a-5-2m \geq 0 (a=\sqrt{x^2-2x+2} \geq 1)$$
$$\text{Xét } \Delta \text{vế trái bất phương trình:}$$
$$\Delta = 41+16m$$
$$Nếu \Delta < 0 \Rightarrow m < \frac{-41}{16} \Rightarrow \text{bất phương trinh luôn có nghiệm}$$
$$Nếu \Delta \geq 0 \Rightarrow m \geq \frac{-41}{16} \Rightarrow \text{VT bpt có 2 nghiệm } a_1, a_2 (a_2 \geq a_1)$$
$$\text{và bpt có nghiệm thỏa mãn: } a \in (-\propto; a_1] \cup [a_2; +\propto).$$
$$\text{Để bpt có nghiệm đúng với a} \geq 1 \Leftrightarrow a_2 \leq 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{-1+\sqrt{41+16m}}{4} \leq 1$$
$$\Leftrightarrow m \leq -1$$
$$\text{Kết hợp với các điều kiện đã xét và đã cho } \Rightarrow m \in [-5; -1]$$
$$\Rightarrow \text{Tổng các giá trị nguyên của m là -15}$$

Câu 4

Cho tam giác ABC, M là điểm di động trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tìm vị trí điểm M để $MB^2+MC^2-2MA^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

$$Có: MB^2+MC^2-2MA^2$$
$$= 2(\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA})(OA=OB=OC=OM=R)$$
$$= 4\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OA})(I \text{ là trung điểm BC}).$$
$$= 4\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{AI} = 4.MO.AI.\cos(\overrightarrow{MO};\overrightarrow{AI}) \geq -4MO.AI = \text{const}$$

Dấu \`=\` xảy ra khi $\cos(\overrightarrow{MO};\overrightarrow{AI}) = -1 \Leftrightarrow M$ thuộc(O) sao cho $\overrightarrow{MO}$ và $\overrightarrow{AI}$ ngược hướng.

Câu 5:

Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$T = \frac{3(b+c)}{2a} + \frac{4a+3c}{3b} + \frac{12(b-c)}{2a+3c}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } T=\frac{3(b+c)}{2a}+\frac{4a+3c}{3b}+\frac{12(b-c)}{2a+3c}$$
$$=\frac{3(b+c)}{2a}+\frac{4a+3c}{3b}+\frac{4(2a+3b)}{2a+3c}-4$$
$$=\frac{3(b+c)}{2a}+2+\frac{4a+3c}{3b}+1+\frac{4(2a+3b)}{2a+3c}+4-11$$
$$=(4a+3b+3c)(\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}+\frac{4}{2a+3b})-11$$
$$\geq(4a+3b+3c).\frac{16}{(4a+3b+3c)}-11=5$$
$$\text{Dấu `=` xáy ra khi b = c} = \frac{2}{3}a$$
$$\text{Vậy Min T = 5 khi b = c} = \frac{2}{3}a.$$

Câu 6

Cho tam giác ABC có $BC=A, CA=b, AB=c$, độ dài ba đường trung tuyến kẻ từ A, B, C lần lượt là m_a, m_b, m_c. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{m_a}+\frac{b}{m_b}+\frac{c}{m_c}=2\sqrt{3}$$

Lời giải

$$\text{ĐPCM Tương đương: } \sum\frac{2a}{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}>=2\sqrt{3}$$
$$\text{Dễ thấy bất đẳng thức trên thuần nhất do 2 vế của bất đẳng thức đồng bậc}$$
$$\text{Do đó ta chuẩn hóa } \sum a^2=3\Rightarrow 2b^2+2c^2=6-2a^2$$
$$\text{Do đó ĐPCM tương đương: } \sum\frac{a}{\sqrt{6-3a^2}}\geq\sqrt{3}$$
$$\text{Có: } \frac{a}{\sqrt{6-3a^2}}=\frac{2\sqrt{3}a^2}{2\sqrt{3}a\sqrt{6-3a^2}}\geq\frac{\sqrt{3}a^2}{3}$$
$$\Rightarrow\sum\frac{a}{\sqrt{6-3a^2}}\geq\sum\frac{\sqrt{3}a^2}{3}=\sqrt{3}(\text{ĐPCM})$$
$$\text{Dấu `=` xảy ra khi a = b = c} \Leftrightarrow \text{Tam giác ABC đều.}$$