Modelos de Optimización
Laboratorio 3

Osmany Pérez Rodríguez
Enrique Martínez González
Carmen Irene Cabrera Rodríguez
Grupo C412

Condiciones necesarias de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) para problemas con restricciones de igualdad y desigualdad.

Sea X un conjunto abierto no vacío en R^n y sean f, g_j y h_i con $i = 1 \dots m$ y $j = 1 \dots k$, funciones de R^n en R. Considere el problema $P : minf(x)|x \in X, g_j(x) \leqslant 0, h_i(x) = 0$. Sea x^* una solución factible del problema P. Suponga además que en el punto x^* las funciones f, $h_i,\ i = 1 \dots m$ y $g_j,\ j \in I(x^*)$ son continuamente diferenciables y la función $g_j,\ j \notin I(x^*)$ es continua.

Si x^* es un punto regular y un mínimo local del problema P, entonces existen escalares únicos $\lambda_i,\ i = 1 \dots m$ y $\mu_j,\ j \in I(x^*)$, tal que:

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla h_i(x^*) + \sum_{j \in I(x^*)} \mu_j \nabla g_j(x^*) = 0$$

$$\mu_j \geqslant 0,\ j \in I(x^*)$$

Para que x^* cumpla la condición de regularidad tiene que ocurrir que los vectores $\nabla g_j(x^*),\ j \in I(x^*)$ y $h_i(x^*),\ i = 1 \dots m$ sean linealmente independientes (li). Esta condición se conoce como LICQ (*Linear Independence Constraint Qualification*).

1 Algoritmo implementado

Dado un problema P y un punto x^* que es solución factible de P, se puede determinar si esta punto cumple las condiciones de KKT. Para ello se implementó el siguiente algoritmo (??):

El método recibe como parámetros:

- *v_size*: la dimensión en la que se está trabajando
- g_f, g_h, g_g: los gradientes de las funciones f, g, h respectivamente
- x: el punto que se desea evaluar
- *ineq_constraints*: las restricciones de las desigualdades

Se determinan las funciones g_j tal que que $j \in I(x^*)$ y se conforma la matriz que está compuesta por los gradientes de las funciones h_i y los g_j activados. Se declaran las variables λ_i y μ_j para conformar el sistema lineal a resolver.

Para solucionar dicho sistema se hizo uso de la biblioteca de Python **SymPy**, que tiene como propósito reunir todas las características de un sistema de álgebra computacional; es fácilmente extensible y permite la generación de código sencillo y legible.

Una vez procesado el sistema, de acuerdo al resultado arrojado por el algoritmo se determina si el sistema fue:

- compatible determinado, o sea, que tiene una única solución, con lo cual el método retorna **True**
- incompatible, sería que no tiene solución, por tanto retorna **False**
- compatible indeterminado, que tiene infinitas soluciones. En este caso, el método retorna la solución obtenida, donde habrán variables libres.

Código:

```
def kkt_condition(v_size, g_f, g_h, g_g, x, ineq_constraints):

    active_index_gradients = active_indexes(x, ineq_constraints, g_g)

    matrix = []
    for grad in [*g_h, *active_index_gradients]:
        row = [grad(x)[i] for i in range(len(x))]
        matrix.append(row)

    lambdas = sp.symbols("l0:%d" % len(g_h))
    mius = sp.symbols("m0:%d" % len(active_index_gradients))

    linear_system = equation_system(x, v_size, lambdas, mius, g_f, g_h,
                                    active_index_gradients)

    solutions = sp.solve(linear_system, [*lambdas, *mius])

    try:
        mius_sol = solutions[len(lambdas) :]
    except TypeError:
        return solutions

    return len(solutions) != 0 and all(i >= 0 for i in mius_sol)
```

Se puede acceder al código completo a través de este enlace

2 Resultados obtenidos

1. a)

$$min\ 3x_1^2 - x_0^2$$

$$2x_0 - x_1^2 \leqslant 0$$
$$x_0 \geqslant 0$$
$$x_1 \geqslant 0$$

Luego:

$$
\begin{aligned}
f(x) = 3x_1^2 - x_0^2 &\Rightarrow \nabla f(x) = (-2x_0, 6x_1) \\
g_1(x) = 2x_0 - x_1^2 \leqslant 0 &\Rightarrow \nabla g_1(x) = (2, -2x_1) \\
g_2(x) = -x_0 \leqslant 0 &\Rightarrow \nabla g_2(x) = (-1, 0) \\
g_3(x) = -x_1 \leqslant 0 &\Rightarrow \nabla g_3(x) = (0, -1)
\end{aligned}
$$

i. **Punto** $x^* = (1.5, 2, 5) = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$

El resultado obtenido en este punto fue **False**, lo que indica que no se cumple la KKT.

Para determinar cuáles son los índices activos de las funciones g_j, se evalúa $g_j(x^*) = 0$ y si la igualdad se cumple entonces $j \in I(x^*)$

$$
\begin{aligned}
g_1(x^*) &= 2x_0 - x_1^2 = 2 * \frac{3}{2} - (\frac{5}{2})^2 = 3 - \frac{25}{4} \neq 0 \\
g_2(x^*) &= -x_0 = -\frac{3}{2} \neq 0 \\
g_3(x^*) &= -x_1 = -\frac{5}{2} \neq 0
\end{aligned}
$$

Por tanto $I(x^*) = \varnothing$, lo cual implica que se cumple la condición de regularidad de x^*, o sea, que cumple con la LICQ.

El hecho de que no se cumpla la condición de KKT permite afirmar que o bien el punto no es un mínimo local del problema o que no se cumple la LICQ (que no se cumplan ninguna de las dos también podría es una opción); en este caso, sí se cumple la condición de regularidad, por tanto el punto x^* no es un mínimo local del problema.

ii. **Punto** $x^* = (0, 1)$

El resultado obtenido en este punto fue **False**, lo que indica que no se cumple la KKT.

Determinación del conjunto de índices activos:

$$
\begin{aligned}
g_1(x^*) &= 2x_0 - x_1^2 = 2 * 0 - 1^2 = -1 \neq 0 \\
g_2(x^*) &= -x_0 = 0 \\
g_3(x^*) &= -x_1 = -1 \neq 0
\end{aligned}
$$

En este caso $I(x^*) = 2$; como solo se tiene un vector se cumple la condición de regularidad de x^*, o sea, que cumple con la LICQ.

El hecho de que no se cumpla la condición de KKT permite afirmar que o bien el punto no es un mínimo local del problema o que no se cumple la LICQ (que no se cumplan ninguna de las dos también podría es una opción); en este caso, sí se cumple la condición de regularidad, por tanto el punto x^* no es un mínimo local del problema.

iii. **Punto** $x^* = (2.75, 3.25) = (\frac{11}{4}, \frac{13}{4})$

El resultado obtenido en este punto fue **False**, lo que indica que no se cumple la KKT.

Determinación del conjunto de índices activos:

$$\begin{aligned} g_1(x^*) &= 2x_0 - x_1^2 = 2 * \frac{11}{4} - (\frac{13}{4})^2 = \neq 0 \\ g_2(x^*) &= -x_0 = -\frac{11}{4} \neq 0 \\ g_3(x^*) &= -x_1 = -\frac{13}{4} \neq 0 \end{aligned}$$

En este caso $I(x^*) = \emptyset$, por tanto se cumple la condición de regularidad de x^*, o sea, que cumple con la LICQ.

El hecho de que no se cumpla la condición de KKT permite afirmar que o bien el punto no es un mínimo local del problema o que no se cumple la LICQ (que no se cumplan ninguna de las dos también podría es una opción); en este caso, sí se cumple la condición de regularidad, por tanto el punto x^* no es un mínimo local del problema.

b)

$$min\ 100(x_1 - x_0^2)^2 + (1 - x_0)^2$$

$$\begin{aligned} x_0^2 - 2x_1 &\leqslant 5 \\ x_0^2 - x_1 &\leqslant 100 \\ 5x_0^2 - 2x_1^2 &\leqslant 500 \\ x_0 &\geqslant 0 \\ x_1 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Luego:

$$f(x) = 100(x_1 - x_0^2)^2 + (1 - x_0)^2 \Rightarrow \nabla f(x) = (400x_0^3 - 400x_1x_0 + 2x_0 - 2, 200x_1 - 200x_0^2)$$
$$g_1(x) = x_0^2 - 2x_1 - 5 \leqslant 0 \Rightarrow \nabla g_1(x) = (2x_0, -2)$$
$$g_2(x) = x_0^2 - x_1 - 100 \leqslant 0 \Rightarrow \nabla g_2(x) = (2x_0, -1)$$
$$g_3(x) = 5x_0^2 - 2x_1^2 - 500 \leqslant 0 \Rightarrow \nabla g_3(x) = (10x_0, -4x_1)$$
$$g_4(x) = -x_0 \leqslant 0 \Rightarrow \nabla g_2(x) = (-1, 0)$$
$$g_5(x) = -x_1 \leqslant 0 \Rightarrow \nabla g_3(x) = (0, -1)$$

i. **Punto** $x^* = (0.7, 3.8) = (\frac{7}{10}, \frac{19}{5})$

   El resultado obtenido en este punto fue **False**, lo que indica que no se cumple la KKT.

   Determinación del conjunto de índices activos:

$$g_1(x^*) = x_0^2 - 2x_1 - 5 = (\frac{7}{10})^2 - 2 * \frac{19}{5} - 5 \neq 0$$
$$g_2(x^*) = x_0^2 - x_1 - 100 = (\frac{7}{10})^2 - \frac{19}{5} - 100 \neq 0$$
$$g_3(x^*) = 5x_0^2 - 2x_1^2 - 500 = 5(\frac{7}{10})^2 - 2(\frac{19}{5})^2 - 500 \neq 0$$
$$g_4(x^*) = -x_0 = -\frac{7}{10} \neq 0$$
$$g_5(x^*) = -x_1 = -\frac{19}{5} \neq 0$$

   En este caso $I(x^*) = \varnothing$, por tanto se cumple la condición de regularidad de x^*, o sea, que cumple con la LICQ.

   El hecho de que no se cumpla la condición de KKT permite afirmar que o bien el punto no es un mínimo local del problema o que no se cumple la LICQ (que no se cumplan ninguna de las dos también podría es una opción); en este caso, sí se cumple la condición de regularidad, por tanto el punto x^* no es un mínimo local del problema.

ii. **Punto** $x^* = (2, 3.5) = (2, \frac{7}{2})$

   El resultado obtenido en este punto fue **False**, lo que indica que no se cumple la KKT.

Determinación del conjunto de índices activos:

$$g_1(x^*) = x_0^2 - 2x_1 - 5 = (2)^2 - 2 * \frac{7}{2} - 5 \neq 0$$
$$g_2(x^*) = x_0^2 - x_1 - 100 = 2^2 - \frac{7}{2} - 100 \neq 0$$
$$g_3(x^*) = 5x_0^2 - 2x_1^2 - 500 = 5 * 2^2 - 2(\frac{7}{2})^2 - 500 \neq 0$$
$$g_4(x^*) = -x_0 = -2 \neq 0$$
$$g_5(x^*) = -x_1 = -\frac{7}{2} \neq 0$$

En este caso $I(x^*) = \emptyset$, por tanto se cumple la condición de regularidad de x^*, o sea, que cumple con la LICQ.

El hecho de que no se cumpla la condición de KKT permite afirmar que o bien el punto no es un mínimo local del problema o que no se cumple la LICQ (que no se cumplan ninguna de las dos también podría es una opción); en este caso, sí se cumple la condición de regularidad, por tanto el punto x^* no es un mínimo local del problema.

iii. **Punto** $x^* = (1.25, 2.75) = (\frac{5}{4}, \frac{11}{4})$

El resultado obtenido en este punto fue **False**, lo que indica que no se cumple la KKT.

Determinación del conjunto de índices activos:

$$g_1(x^*) = x_0^2 - 2x_1 - 5 = (\frac{5}{4})^2 - 2 * \frac{11}{4} - 5 \neq 0$$
$$g_2(x^*) = x_0^2 - x_1 - 100 = (\frac{5}{4})^2 - \frac{11}{4} - 100 \neq 0$$
$$g_3(x^*) = 5x_0^2 - 2x_1^2 - 500 = 5(\frac{5}{4})^2 - 2(\frac{11}{4})^2 - 500 \neq 0$$
$$g_4(x^*) = -x_0 = -\frac{5}{4} \neq 0$$
$$g_5(x^*) = -x_1 = -\frac{11}{4} \neq 0$$

En este caso $I(x^*) = \emptyset$, por tanto se cumple la condición de regularidad de x^*, o sea, que cumple con la LICQ.

El hecho de que no se cumpla la condición de KKT permite afirmar que o bien el punto no es un mínimo local del problema o que no se cumple la LICQ (que no se cumplan ninguna de las dos también podría es una opción); en este caso, sí se cumple la condición de regularidad, por tanto el punto x^* no es un mínimo local del problema.

c)

$$min\ \ -x_1^3 - x_0^3$$

$$\begin{aligned} 2x_0 - x_1^2 &\leqslant 70 \\ x_0^2 + x_1^2 &\leqslant 1000 \\ x_0^2 - 2x_1^3 &\leqslant 280 \\ x_0 &\geqslant 0 \\ x_1 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} f(x) &= -x_1^3 - x_0^3 \Rightarrow \nabla f(x) = (-3x_0^2, -3x_1^2) \\ g_1(x) &= 2x_0 - x_1^2 - 70 \leqslant 0 \Rightarrow \nabla g_1(x) = (2, -2x_1) \\ g_2(x) &= x_0^2 + x_1^2 - 1000 \leqslant 0 \Rightarrow \nabla g_2(x) = (2x_0, 2x_1) \\ g_3(x) &= x_0^2 - 2x_1^3 - 280 \leqslant 0 \Rightarrow \nabla g_3(x) = (2x_0, -6x_1^2) \\ g_4(x) &= -x_0 \leqslant 0 \Rightarrow \nabla g_2(x) = (-1, 0) \\ g_5(x) &= -x_1 \leqslant 0 \Rightarrow \nabla g_3(x) = (0, -1) \end{aligned}$$

i. **Punto** $x^* = (0.8, 2.7) = (\frac{8}{10}, \frac{27}{10})$

   El resultado obtenido en este punto fue **False**, lo que indica que no se cumple la KKT.

   Determinación del conjunto de índices activos:

$$\begin{aligned} & g_1(x^*) = 2x_0 - x_1^2 - 70 = 2 * \frac{8}{10} - (\frac{27}{10})^2 - 70 = -75.69 \neq 0 \\ & g_2(x^*) = x_0^2 + x_1^2 - 1000 = (\frac{8}{10})^2 + (\frac{27}{10})^2 - 1000 = -992.07 \neq 0 \\ & g_3(x^*) = x_0^2 - 2x_1^3 - 280 = (\frac{8}{10})^2 - 2(\frac{27}{10})^3 - 280 = -318.726 \neq 0 \\ & g_4(x^*) = -x_0 = -\frac{8}{10} \neq 0 \\ & g_5(x^*) = -x_1 = -\frac{27}{10} \neq 0 \end{aligned}$$

   En este caso $I(x^*) = \varnothing$, por tanto se cumple la condición de regularidad de x^*, o sea, que cumple con la LICQ.

   El hecho de que no se cumpla la condición de KKT permite afirmar que o bien el punto no es un mínimo local del problema o que no se cumple la LICQ (que no se cumplan ninguna de las dos también podría es una opción); en este caso, sí se cumple la condición de regularidad, por tanto el punto x^* no es un mínimo local del problema.

ii. **Punto** $x^* = (5.6, 7.1)$

El resultado obtenido en este punto fue **False**, lo que indica que no se cumple la KKT.

Determinación del conjunto de índices activos:

$$g_1(x^*) = 2x_0 - x_1^2 - 70 = 2 * 5.6 - (7.1)^2 - 70 = -109.21 \neq 0$$
$$g_2(x^*) = x_0^2 + x_1^2 - 1000 = (5.6)^2 + (7.1)^2 - 1000 = -918.23 \neq 0$$
$$g_3(x^*) = x_0^2 - 2x_1^3 - 280 = (5.6)^2 - 2(7.1)^3 - 280 = -964.46 \neq 0$$
$$g_4(x^*) = -x_0 = -5.6 \neq 0$$
$$g_5(x^*) = -x_1 = -7.1 \neq 0$$

En este caso $I(x^*) = \varnothing$, por tanto se cumple la condición de regularidad de x^*, o sea, que cumple con la LICQ.

El hecho de que no se cumpla la condición de KKT permite afirmar que o bien el punto no es un mínimo local del problema o que no se cumple la LICQ (que no se cumplan ninguna de las dos también podría es una opción); en este caso, sí se cumple la condición de regularidad, por tanto el punto x^* no es un mínimo local del problema.

iii. **Punto** $x^* = (3.4, 4.9)$

El resultado obtenido en este punto fue **False**, lo que indica que no se cumple la KKT.

Determinación del conjunto de índices activos:

$$g_1(x^*) = 2x_0 - x_1^2 - 70 = 2 * 3.4 - (4.9)^2 - 70 = -87.21 \neq 0$$
$$g_2(x^*) = x_0^2 + x_1^2 - 1000 = (3.4)^2 + (4.9)^2 - 1000 = -964.43 \neq 0$$
$$g_3(x^*) = x_0^2 - 2x_1^3 - 280 = (3.4)^2 - 2(4.9)^3 - 280 = -33.14 \neq 0$$
$$g_4(x^*) = -x_0 = -3.4 \neq 0$$
$$g_5(x^*) = -x_1 = -4.9 \neq 0$$

En este caso $I(x^*) = \varnothing$, por tanto se cumple la condición de regularidad de x^*, o sea, que cumple con la LICQ.

El hecho de que no se cumpla la condición de KKT permite afirmar que o bien el punto no es un mínimo local del problema o que no se cumple la LICQ (que no se cumplan ninguna de las dos también podría es una opción); en este caso, sí se cumple la condición de regularidad, por tanto el punto x^* no es un mínimo local del problema.

Suponiendo que dado un punto, este cumpla las condiciones de KKT, esto no significa necesariamente que el sea un mínimo y por tanto, solución del problema. Si además de que cumpla la KKT se tiene que la función objetivo y las funciones de restricción g_j son convexas, y h_i son funciones afines; esto sí constituye condición suficiente para que el punto mencionado sea un mínimo global. En el caso de los problemas vistos anteriormente; no se tienen restricciones de igualdad, por tanto bastaría confirmar la convexidad de las funciones f y g_j.