2013 级本科班概率统计期末试卷参考答案

一、解答下列各题（共 30 分）

1．设 A 为事件“树还活着”，B 为事件“邻居记得给树浇水”，

则 $P(B)=0.9, P(A|B)=0.9, P(\bar{B})=0.1, P(A|\bar{B})=0.2$，

(1) $P(A)=P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})=0.9\times0.9+0.2\times0.1=0.83$；

(2) $P(B|A)=\dfrac{P(B)P(A|B)}{P(A)}=\dfrac{0.9\times0.9}{0.83}=\dfrac{81}{83}$.

2. (1) 由密度函数归一性：$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=C\int_0^1 x^3dx=\dfrac{C}{4}=1 \quad \Rightarrow C=4$；

所以 $f(x)=\begin{cases}4x^3 & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

(2)当 $x\le 0$ 时，$F(x)=0$；

当 $0<x<1$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\int_0^x 4x^3dx=x^4$；

当 $x\ge 1$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\int_0^1 4x^3dx+\int_1^x 0dx=1$；

分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x^4, & 0<x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$；

(3) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x\bullet 4x^3dx=\dfrac{4}{5}$；

3. $Y=X^2$ 即 $y=g(x)=x^2$

当 $x>0$ 时，$g(x)$ 严格单调增加，且有反函数 $x=h(y)=\sqrt{y}$

又有 $h'(y)=\dfrac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}$

$\therefore Y=X^2$ 的概率密度 $\quad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}}, & y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

二、解答下列各题（共 20 分）

1. (1)

X \ Y	0	1	$p_{i\cdot}$

(X,Y)的分布律为

0	5/8	1/8	3/4
1	1/8	1/8	1/4
$p_{.j}$	3/4	1/4	1

(2) X,Y 不独立，因为$P\{X=0,Y=0\}\neq P\{X=0\}P\{Y=0\}$.

(3) $E(X)=0\times\frac{3}{4}+1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$， $E(Y)=0\times\frac{3}{4}+1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$， $E(XY)=\frac{1}{8}$，

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{3}{16},$$

$$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{3}{16},$$

$$\rho_{XY}=\frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{3}{16}}=\frac{1}{3}$$

2. (1) (X,Y)的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in D\\ 0, & 其它.\end{cases}$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}2-2x, & 0\le x\le 1\\ 0\ , & 其它\end{cases}$$

(2) $P\{X<Y\}=2\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1-x}dy=\frac{1}{2}$.

(3) 利用公式 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ z-x)dx$

$$f(x,z-x)=\begin{cases}2, & 0\le x\le 1, 0\le z-x\le 1-x\\ 0, & 其它\end{cases}=\begin{cases}2, & 0\le x\le 1,\quad x\le z\le 1.\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

当$z<0$或$z>1$时 $f_z(z)=0$， $0\le z\le 1$时 $f_z(z)=2\int_0^z dx=2z$

故Z的概率密度为 $f_Z(z)=\begin{cases}2z\ , & 0\le z\le 1\\ 0\ , & 其它.\end{cases}$

三、解答下列各题（共 20 分）

1. 似然函数为 $L=(\theta+1)^n(\prod_{\mathrm{i}=1}^{n} x_i)^\theta$

取对数得 $\ln L = n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$,

$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$，令 $\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$，

解得 θ 的最大似然估计值是 $\hat{\theta}=-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$，

因而 θ 的最大似然估计量为： $\hat{\theta}=-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$

2. 检验假设 $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2=0.025$

$\sigma^2=0.025, n=16,, \mathrm{s}^2=0.036, \alpha=0.05, \frac{\alpha}{2}=0.025$

$\chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0{}^2}=\frac{15\times0.036}{0.025}=21.6$

$\chi^2_{0.975}(15)=6.262, \chi^2_{0.025}(15)=27.488$， 接受域 $[6.262,27.488]$，

$\chi^2=21.6\in[6.262,27.488]$，接受假设，无显著差异，符合标准

四、选择填空题（每空 3 分，共 30 分）

1、0.5　　2、0.25　　3、0.5　　4、-1　　5、0.5

6、 $F(a)-F(a-0); F(b)-F(a)$　　7、5　　8、A　　9、D