

离散数学 II

Discrete Mathematics II

封筠

fengjun@stdu.edu.cn

20-11



代数系统

由集合上定义若干个运算而组成的系统我们通常称它为代数系统。它是近世代数研究对象，是研究各种数学分支与许多实际问题的重要理论基础。它在计算机科学中有着广泛的应用。



代数系统

代数系统通常包括半群、群、环、域、格和布尔代数等不同代数结构的内容。起源与发展（两位怀才不遇的天才数学家）：

- 法国的伽罗瓦（Evariste Galois）
- 挪威的阿贝尔（Abel）



第五章 代数结构

- 代数结构是一类特殊的数学结构，它由集合上定义若干个运算而组成系统。本章主要讲授运算的性质及一些具有特殊性质的代数系统。
- 在计算机科学中，如程序理论与数据结构以及编码理论等都有着广泛的应用。



第五章 代数结构

- 本章主要讨论群、环和域等代数系统。
- 重点是群、同态与同构。要求能够掌握各种代数系统的特性，能够证明一个代数系统是群，并能够证明两个代数系统是同态或同构的。

学习《代数结构》这一章的要求

一、学习目的与要求

本章从一般代数系统的引入出发，研究一些特殊的代数系统中运算的性质。通过本章的学习使学生了解代数系统的结构与性质。

二、知识点

1. 代数系统的引入，运算的性质：封闭性、结合性、分配性、交换性；
2. 主要的代数系统：广群、半群、独异点、群、子群；代数系统之间的关系；
3. 交换群和循环群；
4. 陪集、拉格朗日定理；
5. 同态映射、同构映射；
6. 环、同态象、域。

三、要求

1. 识记

运算的封闭性、交换性、结合性，幺元、零元、逆元、等幂元的识别。

2. 领会

广群、半群、独异点、群、子群；代数系统之间的关系，主要的性质定理及其证明。

本章将从一般代数系统的引入出发，研究一些特殊的代数系统，而这些代数系统中的运算具有某些性质，从而确定了这些代数系统的数学结构。

第五章 学时安排（14学时，共7讲）

学时	教学内容
2	5-1代数系统的引入 5-2 运算及其性质
2	5-3 半群
2	5-4 群与子群
2	5-5 阿贝尔群和循环群
2	5-7 陪集与拉格朗日定理
2	5-8 同态与同构 (上)
2	5-8 同态与同构 (下) 5-9 环与域

5-1 代数系统的引入

本节要熟悉下列概念（**3个**）：

集合**A**上的**n**元运算、

n元运算在集合**A**上封闭、

代数系统（代数结构）

一、集合上的运算及封闭性

一元运算: $f_1: a \rightarrow \frac{1}{a}, a \in R, a \neq 0$

$$f_2: x \rightarrow [x], x \in R$$

$$f_3: a \rightarrow -a, a \in R$$

以上运算都是集合**R**上的一元运算。



将 \mathbf{R} 上的每两个数映射成 \mathbf{R} 中的一个数。

二元运算: $f_4: a, b \rightarrow a + b, \quad a, b \in \mathbf{R}$

可看作: $f_4: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$

$f_5: a, b \rightarrow a \cdot b, \quad a, b \in \mathbf{R}$

三元运算： f_6 ：三种颜色 \rightarrow 三种颜色混合色

$A \rightarrow A$ A 是各种颜色的集合。

这些例子的共同特征就是运算结果还在原来的集合中。称具有这种特征的运算是封闭的，简称闭运算。

不封闭运算举例： 自动售货机

*	一角硬币	二角伍分硬币
一角硬币	桔子水	可口可乐
二角伍分硬币	可口可乐	冰淇淋

运算结果不在集合
{一角硬币, 二角伍分硬币}中

设 $A=\{\text{红色}, \text{黄色}, \text{蓝色}\}$

f_7 : 三种颜色 \rightarrow 三种颜色混合色

f_7 是不封闭的。

f_8 是 I 上的除法运算, f_8 是不封闭的。

定义5-1.1 如果 $*$ 为 A^n 到 B 的一个函数, 则称 $*$ 为集合 A 上的 n 元运算 (*operator*)。如果 $B \subseteq A$, 则称 该 n 元运算在 A 上封闭。

例题 设 $A=\{1, 2, 3, 4\}$ ，定义 A 上的二元运算如下：

$$x \circ y = (x \cdot y) \bmod 5, \forall x, y \in A$$

求 \circ 的运算表。

解 运算表如下所示，可知该运算是封闭的。

\circ	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

练习：178页（1）

二、代数系统

定义5-1.2 一个非空集合 A 连同若干个定义在该集合上的运算 f_1, f_2, \dots, f_k 所组成的系统称为一个代数系统（代数结构），记为 $\langle A, f_1, f_2, \dots, f_k \rangle$ 。

定义5-1.2' 代数结构是由以下三个部分组成的数学结构：

- (1) 非空集合 A ，称为代数结构的载体。
- (2) 载体 A 上的若干运算。
- (3) 一组刻画载体上各运算所满足性质的公理。

代数结构常用一个多元序组 $\langle A, *, \Delta, \dots \rangle$ 来表示, 其中 A 是载体, $*, \Delta, \dots$ 为各种运算。有时为了强调 A 有某些地位特殊的元素,也可将它们列入这种多元序组的末尾。

代数系统举例： $\langle I_+, + \rangle$

$\langle \wp(S), \cup, \cap, \sim \rangle$

虽然一些代数系统具有不同的形式，但是它们之间可能存在一些共同的运算规律。

例如：代数系统 $\langle I_+, + \rangle$ 具有以下三个运算规律（对于任意的 $x, y, z \in I_+$ ）：

(1) $x + y \in I_+$ (封闭性)

(2) $x + y = y + x$ (交换律)

(3) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (结合律)

与 $\langle I_+, + \rangle$ 具有相同运算规律的代数系统如P177 表5-1.2。

表 5-1.2

	$\langle I, \cdot \rangle$	$\langle R, + \rangle$	$\langle \mathcal{P}(S), \cup \rangle$	$\langle \mathcal{P}(S), \cap \rangle$
集合	I 为整数集合	R 为实数集合	$\mathcal{P}(S)$ 是 S 的幂集	$\mathcal{P}(S)$ 是 S 的幂集
运算	\cdot 为普通乘法	$+$ 为普通加法	\cup 为集合的“并”	\cap 为集合的“交”
封闭性	$x \cdot y \in I$	$x + y \in R$	$A \cup B \in \mathcal{P}(S)$	$A \cap B \in \mathcal{P}(S)$
交换律	$x \cdot y = y \cdot x$	$x + y = y + x$	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
结合律	$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$	$(x + y) + z = x + (y + z)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

虽然集合不同，运算不同，但是它们是一些具有共同运算规律的运算，研究 $\langle \mathbf{I}_+, + \rangle$ 就相当于研究 $\langle \mathbf{I}, *$
 \rangle , $\langle \mathbf{R}, + \rangle$, $\langle \wp(\mathbf{S}), \cup \rangle$, $\langle \wp(\mathbf{S}), \cap \rangle$ 。

5-2 运算及其性质

在前面考察几个具体的代数系统时，已经涉及到我们所熟知的运算的某些性质（如封闭性、交换律、结合律）。本节将着重讨论一般二元运算的一些性质。

●学习本节要熟悉如下术语（15个）：

封闭的、 可交换的、 可结合的、 可分配的、
吸收律、 等幂的、 左幺元、 右幺元、
幺元、 左零元、 右零元、 零元、 左逆元、
右逆元、 逆元

●要求：

掌握4个定理

一、二元运算的性质

1、封闭性

定义5-2.1 设 $*$ 是定义在集合 A 上的二元运算，如果对于任意的 $x, y \in A$ ，都有 $x * y \in A$ ，则称二元运算 $*$ 在 A 上是**封闭的**。

例题1 设 $A = \{x | x = 2^n, n \in \mathbb{N}\}$ ，问乘法运算是否封闭？对加法运算呢？

解 对于任意的 $2^r, 2^s \in A$ ， $r, s \in \mathbb{N}$ ，因为 $2^r \cdot 2^s = 2^{r+s} \in A$ 所以乘法运算是封闭的。而对于加法运算是不封闭的，因为至少有 $2 + 2^2 = 6 \notin A$ 。

2、交换律

定义5-2.2 设 $*$ 是定义在集合 A 上的二元运算，如果对于任意的 $x, y \in A$ ，都有 $x*y=y*x$ ，则称二元运算 $*$ 在 A 上是可交换的。

例题2 设 Q 是有理数集合， Δ 是 Q 上的二元运算，对任意的 $a, b \in Q$ ， $a \Delta b = a + b - a \cdot b$ ，问运算 Δ 是否可交换。

解 因为

$$a \Delta b = a + b - a \cdot b = b + a - b \cdot a = b \Delta a$$

所以运算 Δ 是可交换的。

3、结合律

定义5-2.3 设 $*$ 是定义在集合 A 上的二元运算，如果对于任意的 $x, y, z \in A$ ，都有 $(x*y)*z = x*(y*z)$ ，则称二元运算 $*$ 在 A 上是可结合的。

例如 \mathbf{R} 上的加法运算和乘法运算都是可结合运算， \mathbf{R} 上的减法运算和除法运算都是不可结合运算。

例题3 设 A 是一个非空集合, \star 是 A 上的二元运算, 对于任意 $a, b \in A$, 有 $a \star b = b$, 证明 \star 是可结合运算。

证明 因为对于任意的 $a, b, c \in A$

$$(a \star b) \star c = b \star c = c$$

而 $a \star (b \star c) = a \star c = c$

所以 $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$

4、分配律

定义5-2.4 设 $*$, Δ 是定义在集合 A 上的二元运算, 如果对于任意的 $x, y, z \in A$, 都有

$$x*(y\Delta z)=(x*y)\Delta(x*z)$$

$$(y\Delta z)*x=(y*x)\Delta(z*x)$$

则称运算 $*$ 在 A 上对运算 Δ 是**可分配的**。

例如幂集 $\wp(S)$ 上的 \cup 和 \cap 运算是互相可分配的。

例题4 设集合 $A=\{\alpha,\beta\}$ ，在 A 上定义两个二元运算 $*$ 和 \triangle 如下表所示。问运算 \triangle 对于运算 $*$ 可分配吗？运算 $*$ 对于运算 \triangle 可分配吗？

$*$	α	β
α	α	β
β	β	α

\triangle	α	β
α	α	α
β	α	β

解 验证运算 \triangle 对于运算 $*$ 是可分配的。
从 $*$ 和 \triangle 的运算表中可以看出 $*$ 和 \triangle 两种运算都是可交换的。

故只须验证

$$\alpha \triangle (\alpha * \alpha) = (\alpha \triangle \alpha) * (\alpha \triangle \alpha)$$

$$\alpha \triangle (\alpha * \beta) = (\alpha \triangle \alpha) * (\alpha \triangle \beta)$$

$$\alpha \triangle (\beta * \beta) = (\alpha \triangle \beta) * (\alpha \triangle \beta)$$

$$\beta \triangle (\alpha * \alpha) = (\beta \triangle \alpha) * (\beta \triangle \alpha)$$

$$\beta \triangle (\alpha * \beta) = (\beta \triangle \alpha) * (\beta \triangle \beta)$$

$$\beta \triangle (\beta * \beta) = (\beta \triangle \beta) * (\beta \triangle \beta)$$

$\alpha \triangle (\alpha * \alpha) = \alpha \triangle \alpha = \alpha$	$(\alpha \triangle \alpha) * (\alpha \triangle \alpha) = \alpha * \alpha = \alpha$
$\alpha \triangle (\alpha * \beta) = \alpha \triangle \beta = \alpha$	$(\alpha \triangle \alpha) * (\alpha \triangle \beta) = \alpha * \alpha = \alpha$
$\alpha \triangle (\beta * \beta) = \alpha \triangle \alpha = \alpha$	$(\alpha \triangle \beta) * (\alpha \triangle \beta) = \alpha * \alpha = \alpha$
$\beta \triangle (\alpha * \alpha) = \beta \triangle \alpha = \alpha$	$(\beta \triangle \alpha) * (\beta \triangle \alpha) = \alpha * \alpha = \alpha$
$\beta \triangle (\alpha * \beta) = \beta \triangle \beta = \beta$	$(\beta \triangle \alpha) * (\beta \triangle \beta) = \alpha * \beta = \beta$
$\beta \triangle (\beta * \beta) = \beta \triangle \alpha = \alpha$	$(\beta \triangle \beta) * (\beta \triangle \beta) = \beta * \beta = \alpha$

但是运算 $*$ 对于运算 \triangle 是不可分配的。
因为：

$$\beta * (\alpha \triangle \beta) = \beta * \alpha = \beta$$

而

$$(\beta * \alpha) \triangle (\beta * \beta) = \beta \triangle \alpha = \alpha$$

5、吸收律

定义5-2.5 设 $*$, Δ 是定义在集合 A 上的两个可交换二元运算, 如果对于任意的 $x, y \in A$, 都有

$$x*(x\Delta y)=x$$

$$x\Delta(x*y)=x$$

则称运算 $*$ 和运算 Δ 满足**吸收律**。

例如幂集 $\wp(S)$ 上的 \cup 和 \cap 运算满足吸收律。

例题5 设集合 N 为自然数全体，在 N 上定义两个二元运算 $*$ 和 \star ，对于任意 $x, y \in N$ ，有

$$x * y = \max(x, y)$$

$$x \star y = \min(x, y)$$

验证运算 $*$ 和 \star 的吸收律。

解 对于任意 $a, b \in N$

$$a * (a \star b) = \max(a, \min(a, b)) = a$$

$$a \star (a * b) = \min(a, \max(a, b)) = a$$

因此， $*$ 和 \star 满足吸收律。

6、等幂律

定义5-2.6 设 $*$ 是定义在集合 A 上的一个二元运算，如果对于任意的 $x \in A$ ，都有 $x * x = x$ ，则称二元运算 $*$ 在 A 上是等幂的。

例题6 设 $\wp(S)$ 是集合 S 的幂集，在 $\wp(S)$ 上定义的两个二元运算，集合的“并”运算 \cup 和集合的“交”运算 \cap ，验证是 \cup 、 \cap 等幂的。

解

对于任意的 $A \in \wp(S)$ ，有 $A \cup A = A$ 和 $A \cap A = A$ ，因此运算 \cup 和 \cap 都满足等幂律。

但 \oplus 不符合等幂律。

因为 若 $A \neq \phi$ ，则 $A \oplus A \neq A$

运算律小结

定义5-2.1~6 设 $*$ 和 Δ 为集合 A 上的二元运算：

若 $\forall x \forall y (x, y \in A \rightarrow x * y \in A)$ ，则称 $*$ 在 A 上封闭。

若 $\forall x \forall y (x, y \in A \rightarrow x * y = y * x)$ ，则称 $*$ 满足交换律。

若 $\forall x \forall y \forall z (x, y, z \in A \rightarrow x * (y * z) = (x * y) * z)$ ，则称 $*$ 满足结合律。

若 $\forall x \forall y \forall z (x, y, z \in A \rightarrow x * (y \Delta z) = (x * y) \Delta (x * z), (y \Delta z) * x = (y * x) \Delta (z * x))$ ，则称 $*$ 对 Δ 满足分配律。

若 $\forall x \forall y (x, y \in A \rightarrow x * (x \Delta y) = x, x \Delta (x * y) = x)$ ，则称 $*$ 和 Δ 满足吸收律。

若 $\forall x (x \in A \rightarrow x * x = x)$ ，则称 $*$ 满足等幂律。

二、二元运算的特异元素

1、幺元

定义5-2.7 设 $*$ 为集合 A 上的二元运算：

若 $\exists e_l \forall x (e_l, x \in A \rightarrow e_l * x = x)$,则称 e_l 为 A 中的左幺元。

若 $\exists e_r \forall x (e_r, x \in A \rightarrow x * e_r = x)$,则称 e_r 为 A 中的右幺元。

若 $\exists e \forall x (e, x \in A \rightarrow e * x = x * e = x)$,则称 e 为 A 中的幺元。

例题7 设集合 $S=\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ ，在 S 上定义的两个二元运算 $*$ 和 \star 如下表所示。试指出左幺元或右幺元。

$*$	α	β	γ	δ
α	δ	α	β	γ
β	α	β	γ	δ
γ	α	β	γ	γ
δ	α	β	γ	δ

\star	α	β	γ	δ
α	α	β	δ	γ
β	β	α	γ	δ
γ	γ	δ	α	β
δ	δ	δ	β	γ

解 由上表可知 β, δ 都是 S 中关于运算 $*$ 的左幺元，而 α 是 S 中关于运算 \star 的右幺元。

例如，在幂集 $\wp(S)$ 上， \cup 运算的幺元是 \emptyset ， \cap 运算的幺元是 S 。

对于给定的集合和运算有的存在幺元，有的不存在幺元。

例如， R^* 是非零实数集， Δ 是 R^* 上的二元运算， $\forall a, b \in R^*$ ，有 $a \Delta b = a$ ，则不存在 e_l 使得对所有的 $b \in R^*$ 都有 $e_l \Delta b = b$ ，所以，运算 Δ 没有左幺元。但对 $\forall a \in R^*$ ，对所有 $b \in R^*$ 都有 $b \Delta a = b$ ，所以任意 R^* 的元素 a 都是运算 Δ 的右幺元。 R^* 有无数个右幺元，但没有左幺元及幺元。

定理5-2.1 代数结构 $\langle A, * \rangle$ 同时有关于 $*$ 运算的左幺元 e_l 和右幺元 e_r ，则满足 $e_l = e_r = e$ ，且所含幺元 e 是唯一的。

□ **证明：**先证左幺元 $e_l =$ 右幺元 $e_r = e$

$$e_l = e_l * e_r = e_r = e$$

再证幺元 e 是唯一的

设还有一个幺元 $e' \in A$,则

$$e' = e' * e = e$$



2、零元

定义5-2.8 如果 $\theta_l \in A$ ，满足：对一切 $x \in A$ ，都有

$$\theta_l * x = \theta_l$$

则称元素 θ_l 为左零元。

如果 $\theta_r \in A$ ，满足：对一切 $x \in A$ ，都有

$$x * \theta_r = \theta_r$$

则称元素 θ_r 为右零元。

如果 $\theta \in A$ 且对任意 $x \in A$ ，都有

$$x * \theta = \theta * x = \theta$$

则称元素 θ 为代数结构 $\langle A, * \rangle$ (关于 $*$ 运算) 的零元(*zero*)。

例题8 设集合 $S=\{\text{浅色}, \text{深色}\}$, 定义在 S 上的一个二元运算 $*$ 如下表所示。试指出零元和幺元。

$*$	浅色	深色
浅色	浅色	深色
深色	深色	深色

解

深色是 S 中关于运算 $*$ 的零元, 浅色是 S 中关于运算 $*$ 的幺元。

例如，在幂集 $\wp(S)$ 上， \cup 运算的零元是 S ， \cap 运算的零元是 \emptyset 。

对于给定的集合和运算有的存在零元，有的不存在零元。

例如， R^* 是非零实数集， Δ 是 R^* 上的二元运算， $\forall a, b \in R^*$ ，满足 $a \Delta b = a$ ，则 R^* 的任何元素都是关于 Δ 的左零元， R^* 中没有右零元，也没有零元。

定理5-2.2 代数结构 $\langle A, * \rangle$ 同时有关于 $*$ 运算的左零元 θ_l 和右零元 θ_r ，则满足 $\theta_l = \theta_r = \theta$ ，且其所含零元是唯一的。

□ **证明：**先证左零元 $\theta_l =$ 右零元 $\theta_r = \theta$

$$\theta_l = \theta_l * \theta_r = \theta_r = \theta$$

再证零元 θ 是唯一的

设还有一个零元 $\theta' \in A$, 则

$$\theta' = \theta' * \theta = \theta$$

□

定理5-2.3 如果代数结构 $\langle A, * \rangle$ 有关于 $*$ 运算的零元 θ 和幺元 e ，且集合 A 中元素个数大于1，则 $\theta \neq e$ 。

□ **证明：用反证法：**

反设幺元 $e =$ 零元 θ ，则对于任意 $x \in A$ ，必有

$$x = e * x = \theta * x = \theta = e$$

于是，推出 A 中所有元素都是相同的，矛盾。

□

3、逆元

定义5-2.9 设代数结构 $\langle A, *, e \rangle$ 中 $*$ 为二元运算， e 为么元， a, b 为 A 中元素,若 $b*a=e$ ，那么称 b 为 a 的左逆元， a 为 b 的右逆元。若 $a*b=b*a=e$ ，那么称 $a(b)$ 为 $b(a)$ 的逆元 (*inverse elements*)。

x 的逆元通常记为 x^{-1} 。

例如，在整数集 \mathbb{Z} 中，加法幺元为 0 ，对任何整数 x ，它的加法逆元都存在，即它的相反数 $-x$ 。因为 $x+(-x)=0$ ， $(-x)+x=0$ ，而非负整数集关于加法运算只有 0 有逆元 0 ，其他正整数都无加法逆元。

对于给定的集合和二元运算来说，逆元和幺元、零元不同。如果幺元和零元存在，一定是唯一的，而逆元是与集合中的某个元素相关的，有的元素有逆元，有的元素没有逆元，不同的元素则对应着不同的逆元。

一般地，一个元素的左逆元不一定等于它的右逆元。一个元素可以有左逆元不一定有右逆元。甚至一个元素的左（右）逆元不一定是唯一的。

例题9 设集合 $S=\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \zeta\}$, 定义在 S 上的一个二元运算 $*$ 如下表所示。试指出代数系统 $\langle S, * \rangle$ 中各个元素的左、右逆元情况。

$*$	α	β	γ	δ	ζ
α	α	β	γ	δ	ζ
β	β	δ	α	γ	δ
γ	γ	α	β	α	β
δ	δ	α	γ	δ	γ
ζ	ζ	δ	α	γ	ζ

解 先找出幺元，再根据幺元所在的行和列找出左、右逆元。 α 是幺元； β 的左逆元和右逆元都是 γ ；即 β 和 γ 互为逆元； δ 的左逆元是 γ 而右逆元是 β ； β 有两个左逆元 γ 和 δ ； ζ 的右逆元是 γ ，但 ζ 没有左逆元。

定理5-2.4 设 $\langle A, * \rangle$ 有么元 e , 且运算 $*$ 满足结合律, 若 A 中每个元素 x 有左逆元 l , 则任何元素 x 存在右逆元 r , $l = r$, 它们就是 x 的逆元, 并且每个元素的逆元都是唯一的。

□ 证明: 先证左逆元=右逆元

设 a, b, c , 且 b 是 a 的左逆元, c 是 b 的左逆元。

因为: $\underline{(b*a) * b} = e * b = b$

所以: $e = c * b = c * (\underline{(b*a) * b})$

$$= (\underline{c * (b*a)}) * b$$

$$= (\underline{(c * b) * a}) * b$$

$$= (\underline{(e) * a}) * b$$

$$= a * b \text{ (} b \text{也是} a \text{的右逆元)}$$

再证逆元是唯一的

设 a 有两个逆元 b_1 和 b_2 ，则有

$$\begin{aligned} b_1 &= b_1 * e = b_1 * \underline{\underline{(a * b_2)}} \\ &= \underline{\underline{(b_1 * a)}} * b_2 \\ &= e * b_2 = b_2 \end{aligned}$$

□

例题10 试构造一个代数系统，使得其中只有一个元素具有逆元。

解

设 $m, n \in I, T = \{x | x \in I, m \leq x \leq n\}$, 那么，代数系统 $\langle T, \max \rangle$ 中有一个么元是 m , 且只有 m 有逆元，因为 $m = \max(m, m)$ 。

例题11 对于代数系统 $\langle R, \cdot \rangle$ ，这里 R 是实数的全体， \cdot 是普通的乘法运算，是否每个元素都有逆元。

解

该代数系统中的幺元是1，除了零元素0外，所有的元素都有逆元。

例题12 对于代数系统 $\langle N_k, +_k \rangle$, 这里
 $N_k = \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$, $+_k$ 是定义在 N_k 上的模 k 加法运算, 定义如下:

对于任意 $x, y \in N_k$

$$x +_k y = \begin{cases} x+y & \text{若 } x+y < k \\ x+y-k & \text{若 } x+y \geq k \end{cases}$$

试问是否每个元素都有逆元。

解 可以验证, $+_k$ 是一个可结合的二元运算, N_k 中关于运算 $+_k$ 的幺元是0, N_k 中的每一个元素都有唯一的逆元, 即0的逆元是0, 每个非零元素 x 的逆元是 $k-x$ 。

4、从运算表中看运算具有的性质

1) 运算 $*$ 具有封闭性，当且仅当运算表中的每个元素都属于 A 。

2) 运算 $*$ 具有可交换性，当且仅当运算表关于主对角线是对称的。

3) 运算 $*$ 具有等幂性，当且仅当运算表的主对角线上的每一元素与它所在行（列）的表头元素相同。

4) \mathbf{A} 中关于运算 $*$ 具有零元, 当且仅当该元素所对应的行和列中的元素都与该元素相同。

5) \mathbf{A} 中关于运算 $*$ 具有幺元, 当且仅当该元素所对应的行和列依次与运算表的行和列相一致。

6) 设 \mathbf{A} 中关于运算 $*$ 具有幺元, \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 互逆, 当且仅当位于 \mathbf{a} 所在行和 \mathbf{b} 所在列的元素及 \mathbf{b} 所在行和 \mathbf{a} 所在列的元素都是幺元。



作业:

P178 (2)

P184 (1) 、 (2) 、 (5)

The End