离散数学 II
Discrete Mathematics II

封筠

fengjun@stdu.edu.cn

20-10

课程回顾

关系的闭包：关系闭包定义、关系闭包的三种求解方法、Warshall算法、关系闭包的性质

集合的划分和覆盖：覆盖、划分、最小划分、最大划分、交叉划分、加细

第三章 集合与关系第5讲

3—10 等价关系与等价类

3-10 等价关系与等价类

要求：掌握等价关系的定义

会证明等价关系

难点：等价类、商集

一、等价关系

定义3-10.1：设R为集合A上的二元关系，若R是自反的、对称的和传递的，则称R为等价关系。

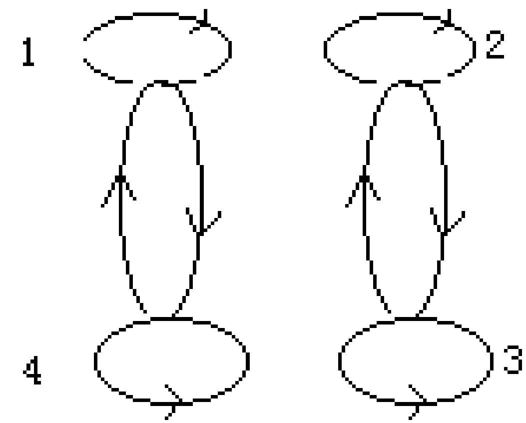
aRb，称为a等价于b。由于R是对称的，a等价b即b 等价a，反之亦然，a与b彼此等价。可记作“~”。

例如，平面上三角形集合中，三角形的相似关系是等价关系。朋友关系是否等价关系？

鉴于空集合中的二元关系是等价关系，是一种平凡情形，因此，一般讨论非空集合上的等价关系。

例题1：设集合T={1，2，3，4}，R={<1，1>，<1，4>，<4，1>，<4，4>，<2，2>，<2，3>，<3，2>，<3，3>}。验证R是T上的等价关系。

解：画出R的关系图



每个结点都有自回路，说明R是自反的。任意两个结点间或没有弧线连接，或有成对弧出现，故R是对称的。从序偶表示式中，可以看出，R是传递的。故R是T上的等价关系。

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可以看出，t(R)=R，所以R是传递的。

模k相等是I（整数集合）或其子集上的等价关系，并且是一类重要的等价关系。

定义：设k为一正整数而a，b∈I。若存在m，使a-b=mk，则称a与b是模k相等，记为$a \equiv b \pmod{k}$。

如1与4是模3相等，1与7是模3相等，4与7是模3相等，
4与1是模3相等，7与1是模3相等，1与1是模3相等，……

定理：模k相等是任何集合$A \subseteq I$上的等价关系。

例题2：设I是整数集，$R=\{\langle a, b\rangle \mid a\equiv b(\mathrm{mod}\,k), a, b\in I\}$，证明R是等价关系。

证明：设任意a，b，$c\in I$

(1)因为$a-a=k\bullet 0$，所以$\langle a, a\rangle\in R$，R是自反的。

(2)若$\langle a, b\rangle\in R$，$a\equiv b(\mathrm{mod}\,k)$，$a-b=tk$ (t为整数)，则$b-a=-tk$，所以$b\equiv a(\mathrm{mod}\,k)$，$\langle b, a\rangle\in R$，R是对称的。

(3)若$\langle a, b\rangle\in R$，$\langle b, c\rangle\in R$，$a\equiv b(\mathrm{mod}\,k)$，$b\equiv c(\mathrm{mod}\,k)$，则$a-b=tk$，$b-c=sk$ (t，s为整数)，$a-c=(t+s)k$，所以$a\equiv c(\mathrm{mod}\,k)$，$\langle a, c\rangle\in R$，R是传递的。因此R是等价关系。

练习: 设A={0,1,2,3,4,5,6,7,8}, R为A上的关系

$$R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y \in A \wedge x \equiv y \pmod 3\}$$

请验证R为A上的等价关系。

课后习题：P113 (4)

（若R和S是等价的，则R ∩ S是等价的）

证明 设 R 和 S 是 X 上的自反关系。

1) 对任意 $x\in X$，有 $\langle x, x\rangle\in R$ 和 $\langle x, x\rangle\in S$，所以 $\langle x, x\rangle\in R\cap S$，即 $R\cap S$ 在 X 上是自反的。

2) 对任意 $\langle x, y\rangle\in R\cap S$，有 $\langle x, y\rangle\in R\wedge\langle x, y\rangle\in S$，因为 R 和 S 是对称的，故必有 $\langle y, x\rangle\in R\wedge\langle y, x\rangle\in S$。即 $\langle y, x\rangle\in R\cap S$，所以 $R\cap S$ 在 X 上是对称的。

3) 对任意 $\langle x, y\rangle\in R\cap S\wedge\langle y, z\rangle\in R\cap S$，则有

$$\langle x, y\rangle\in R\wedge\langle x, y\rangle\in S\wedge\langle y, z\rangle\in R\wedge\langle y, z\rangle\in S$$

因为 R 和 S 是传递的，故得 $\langle x, z\rangle\in R$，$\langle x, z\rangle\in S$，即 $\langle x, z\rangle\in R\cap S$，所以 $R\cap S$ 在 X 上是传递的。

二、等价类

1、定义3-10.2： 设R为集合A上的等价关系，对任何$a \in A$，集合$[a]_R=\{x|x \in A，aRx\}$称为**元素a形成的R等价类**，简称“a的等价类”。

显然，等价类$[a]_R$非空，因为$a \in [a]_R$。

且$[a]_R \subseteq A$， $\bigcup_{a \in A} [a]_R = A$。

如上例题1中集合 $T=\{1，2，3，4\}$，

$R=\{<1,1>,<1,4>,<4,1>,<4,4>,<2,2>,<2,3>,$
$<3,2>,<3,3>\}$

求各元素形成的R等价类。

解：$[1]_R=\{1，4\}$，

$[2]_R=\{2，3\}$

$[3]_R=\{2，3\}$，

$[4]_R=\{1，4\}$，

元素1，4的等价类为：$[1]_R=[4]_R=\{1，4\}$

元素2，3的等价类为：$[2]_R=[3]_R=\{2，3\}$

例：A={52张扑克牌}，

R1={<a，b>｜a与b同花，a，b是扑克}，

R2={<a，b>｜a与b同点，a，b是扑克}，

即R1是同花关系， R2是同点关系，R1和R2都是等价关系。

R1把A分为四类同花类，

R2把A分为13类同点类。

例：A={0，1，2，3，4，5}，

R={<0，0>，<1，1>，<2，2>，<3，3>，<1，2>，<1，3>，<2，1>，<2，3>，<3，1>，<3，2>，<4，4>，<4，5>，<5，4>，<5，5>}，

R把A分成了三个等价类：

{0}，{1，2，3}，{4，5}。

例题3：设I是整数集，R是同余模3关系，

即R={<x，y> | $x \equiv y \pmod 3$，x，$y \in I$}，确定由I的元素所产生的等价类。

解：由I的元素所产生的等价类是

$[0]_R$={…，-6，-3，0，3，6，…}

$[1]_R$={…，-5，-2，1，4，7，…}

$[2]_R$={…，-4，-1，2，5，8，…}

推而广之，$R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y \in Z \wedge x \equiv y \pmod{k}\}$

则Z上的模k等价类为：

$[r]_R=\{qk+r \mid q,r \in Z \wedge r=0,1,2,\ldots, k-1\}$

由Z元素所产生的等价类为

$[0]_R=\{\ldots,-3k,-2k, -k, 0, k, 2k,3k,\ldots\}$

$[1]_R=\{\ldots,-2k+1,-k+1,1,k+1,2k+1,\ldots\}$

$[2]_R=\{\ldots,-2k+2,-k+2,2,k+2,2k+2,\ldots\}$

…

$[k-1]_R=\{\ldots,-k-1,-1, k-1,2k-1,3k-1,\ldots\}$

2、性质

设**R**是非空集合**A**上的等价关系，则

(1) $\forall a \in A$，$[a]_R$是**A**的非空子集。

(2) $\cup\{[a]_R \mid x \in A\} = A$。

(3) $\forall a$，$b \in A$，如果$a \not R b$，则$[a]_R$与$[b]_R$不交，

即$[a]_R \cap [b]_R = \varphi$。

(4) $\forall a$，$b \in A$，如果aRb，当且仅当$[a]_R = [b]_R$

(3) $\forall a$，$b \in A$，如果$a \not R b$,则$[a]_R$与$[b]_R$不交，

即$[a]_R \cap [b]_R = \varphi$。

证明： 假设$[a]_R \cap [b]_R \neq \varphi$， 则

$\exists c \in A$，$c \in [a]_R \cap [b]_R$

$\Rightarrow c \in [a]_R \wedge c \in [b]_R$

∵R是对称的

$\Rightarrow aRc \wedge bRc$

$\Rightarrow aRc \wedge cRb$

∵R是传递的

$\Rightarrow aRb$

与$a \not R b$矛盾。

(4) 定理3-10.1：设给定集合A上的等价关系R，对于a，b∈A有aRb iff $[a]_R=[b]_R$。

证明：假定$[a]_R=[b]_R$，因为$a\in[a]_R$，故$a\in[b]_R$，即aRb。

反之，若aRb，

设$c\in[a]_R \Rightarrow aRc \Rightarrow cRa \Rightarrow cRb \Rightarrow c\in[b]_R$

即$[a]_R\subseteq[b]_R$

同理，若aRb，设

$c\in[b]_R \Rightarrow bRc \Rightarrow aRc \Rightarrow c\in[a]_R$

即$[b]_R\subseteq[a]_R$

由此证得若aRb，则$[a]_R=[b]_R$。

三、商集

1、定义3-10.3：集合A上的等价关系R，其等价类的集合$\{[a]_R \mid a \in A\}$称为**A关于R的商集**，记作A/R。

如例题1中商集$T/R=\{[1]_R，[2]_R\}$，例题3中商集$I/R=\{[0]_R，[1]_R，[2]_R\}$

等价关系R把A的元素分为若干类，各类之间没有公共元素。确定的R是对集合A进行的一个划分。

例：设A={0,1,2,3,4,5,6,7,8},R为A上的关系

$$R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y \in A \wedge x \equiv y \pmod 3\}$$

R的商集为：{{0,3,6}，{1,4,7}， {2,5,8}}

推而广之，整数集合I上的模k等价关系的商集为：

$$\{\ \{kn+i \mid n \in I\ \} \mid i=0,1,2,\ldots,k-1\}$$

2、商集特点：

(1) 商集中元素的并集为集合**A**。

如例题**3**中：$[0]_R \cup [1]_R \cup [2]_R = A$

(2) 商集中任意两个等价类的交集为**Φ**。

(3) 定理3-10.2：集合A上的等价关系R，决定了A的一个划分，该划分就是商集A/R。

证明：

R是等价关系，$\forall a \in A$，由R的自反性，$\langle a, a\rangle \in R$，即a与a属于同一等价类，也即$\exists i$使$a \in A_i$。若$i \neq j$，$A_i \neq A_j$，而$A_i \cap A_j \neq \varnothing$，则$\exists c \in A_i \cap A_j$，$c \in A_i$，且$c \in A_j$，对$\forall a \in A_i$，aRc，对$\forall b \in A_j$，bRc，由对称性cRb，由传递性aRb，由a、b的任意性，故$A_i = A_j$，与$A_i \neq A_j$矛盾。故$A_i \cap A_j = \varnothing$，所以，R完成了等价类的划分。

(4) 定理3-10.3：集合A的一个划分，确定A的元素间的一个等价关系。

证明：

若A已进行了划分，则构造二元关系R， aRb当且仅当a，b在同一分块内。

(1)$\forall$a$\in$A，使<a，a>$\in$R。

(2)分别对每一分块（等价类）内所有两个不同元素a，b，有<a，b>$\in$R，<b，a>$\in$R。

因为若<a，b>$\in$R，<b，c>$\in$R，则a、b、c均在同一分块（等价类）内，故<a，c>$\in$R。

显然，R是自反的，对称的，也是传递的。

思考：给出集合划分如何求对应的等价关系？

例题4：设A={a，b，c，d，e}，有一个划分S={{a，b}，{c}，{d，e}}，试由划分S确定A上的一个等价关系R。

解：$R_1=\{a, b\}\times\{a, b\}=\{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$

$R_2=\{c\}\times\{c\}=\{\langle c, c\rangle\}$

$R_3=\{d, e\}\times\{d, e\}=\{\langle d, d\rangle, \langle d, e\rangle, \langle e, d\rangle, \langle e, e\rangle\}$

$R=R_1\cup R_2\cup R_3=\{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle, \langle d, e\rangle, \langle e, d\rangle, \langle e, e\rangle\}$

A_1	A_2
1，4	2，3

$$\Rightarrow (A_1 \times A_1) \cup (A_2 \times A_2)$$

A_1	A_2	A_3
3	1，4	2

$$\Rightarrow (A_1 \times A_1) \cup (A_2 \times A_2) \cup (A_3 \times A_3)$$

等价关系与划分是一一对应关系

(5) **定理3-10.4**：设R_1和R_2为非空集合A上的等价关系，则$R_1=R_2$当且仅当$A/R_1=A/R_2$。

证明：$\Rightarrow$

因为　$A/R_1=\{[a]_{R1}|\ a\in A\}$，　　　$A/R_2 = \{[a]_{R2}|\ a\in A\}$

设$R_1=R_2$，　$[a]_{R1}=\{x|x\in A, aR_1x\}= \{x|x\in A, aR_2x\}= [a]_{R2}$

　　　则$A/R_1 = A/R_2$

反之，

由于$A/R_1=\{[a]_{R1}|\ a\in A\}= \{[a]_{R2}|\ a\in A\}=A/R_2$

任意$<a,b>\in R_1$，则　$a\in [a]_{R1}\wedge b\in [a]_{R1}$

又$A/R_1 = A/R_2$，所以$a\in [a]_{R2}\wedge b\in [a]_{R2}$

故$<a,b>\in R_2$　　$\therefore R_1\subseteq R_2$，

同理可证 $R_2\subseteq R_1$，因此$R_1=R_2$

习题讲解

134页(1)、(2)、(6) 、(7)

(1) 设 R 和 R' 是集合 A 上的等价关系，用例子证明 $R \cup R'$ 不一定是等价关系。

证明　设 $A = \{a,b,c\}$　$R = \{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle\}$

$R' = \{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,a\rangle\}$

则　$R \cup R' = \{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,a\rangle\}$

$\langle b,a\rangle \in R \cup R'$，$\langle a,c\rangle \in R \cup R'$，但$\langle b,c\rangle \notin R \cup R'$，所以 $R \cup R'$ 不是传递的，即 $R \cup R'$ 不是 A 上的等价关系.

(2) 试问由 4 个元素组成的有限集上所有的等价关系的个数为多少?

解 因为集合 A 的等价关系与 A 的划分是一一对应的,所以 4 个元素有限集上的等价关系的数目,与 4 个元素集合进行划分的数目是相同的,即有 15 种等价关系.

(6) 设 R 是集合 A 上的对称和传递关系，证明如果对于 A 中的每一个元素 a，在 A 中同时也存在一个 b，使 $\langle a, b\rangle$ 在 R 之中，则 R 是一个等价关系。

证明　对任意 $a \in A$，必存在一个 $a \in A$，使得 $\langle a, b\rangle \in R$，由于 R 是对称的，所以 $\langle b, a\rangle \in R$，又由于 R 是传递的，所以 $\langle a, a\rangle \in R$，所以 R 是自反的，即 R 是 A 上的等价关系.

(7) 设 R_1 和 R_2 是非空集合 A 上的等价关系，确定下述各式，哪些是 A 上的等价关系，对不是的提供反例证明.

a) $(A \times A) - R_1$

b) $R_1 - R_2$

c) R_1^2

d) $r(R_1 - R_2)$ (即 $R_1 - R_2$ 的自反闭包).

解 a) 不是 A 上的等价关系.

例如：$A = \{1,2\}$，$R_1 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$，$A \times A = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\}$

$A \times A - R_1 = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\}$ 所以 $A \times A - R_1$ 不是 A 上的等价关系.

b) 不是 A 上的等价关系.

例如:$A=\{1,2,3\}$,$R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}$

$R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle\}$

$R_1-R_2=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}$

所以 R_1-R_2 不是 A 上的等价关系.

c) 是 A 上的等价关系.

证明 若 R_1 是 A 上的等价关系，则对任意 $a \in A$，$\langle a,a\rangle \in R_1$，所以 $\langle a,a\rangle \in R_1^2$，$R_1^2$ 是自反的.

若 $\langle a,b\rangle \in R_1^2$，则存在 c，使得 $\langle a,c\rangle \in R_1 \wedge \langle c,b\rangle \in R_1$，因为 R_1 是对称的，所以 $\langle b,c\rangle \in R_1 \wedge \langle c,a\rangle \in R_1$，所以 $\langle b,a\rangle \in R_1 \circ R_1 = R_1^2$ 即 R_1^2 是对称的.

若 $\langle a,b\rangle \in R_1^2$，$\langle b,c\rangle \in R_1^2$，则存在 e_1，e_2 使得 $\langle a,e_1\rangle \in R_1 \wedge \langle e_1,b\rangle \in R_1$，$\langle b,e_2\rangle \in R_1 \wedge \langle e_2,c\rangle \in R_1$，由 R_1 的传递性可知：$\langle a,b\rangle \in R_1$，$\langle a,c\rangle \in R_1$，所以 $\langle a,c\rangle \in R_1 \circ R_1 = R_1^2$ 即 R_1^2 是传递的.

综上可知 R_1^2 是 A 上的等价关系.

d) 不是 A 上的等价关系.

例如 b) 所设 $r(R_1-R_2)=(R_1-R_2)\cup I_A$

$$=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}$$

$\langle 2,1\rangle\in r(R_1-R_2)$,$\langle 1,3\rangle\in r(R_1-R_2)$,但$\langle 2,3\rangle\notin r(R_1-R_2)$ 所以 $r(R_1-R_2)$ 不是 A 上的等价关系.

作业

134页(3)、(4)、(5)、(8)

The End