离散数学 II
Discrete Mathematics II

封筠

fengjun@stdu.edu.cn

20-10

课程回顾

集合的概念和表示法：集合相等、包含、真包含、幂集、有限集、无限集

集合的运算及其性质：交集、并集、补集、绝对补、对称差、集合运算定律、集合相等证明

第三章 集合与关系第2讲

3—4 序偶与笛卡尔积

3—5 关系及其表示

3-4 序偶与笛卡尔积

集合中的元素是无序的，但在日常生活中，有许多事物是成对出现的，且这种成对出现的事物，具有一定的顺序，如平面上的点坐标，上、下，左、右等，若用数学的方法表示它们，可用序偶、n元组。

要求：

掌握序偶、有序n元组、笛卡尔积的定义及性质。

一、有序n元组

1、序偶(有序2元组)：两个具有固定次序的客体组成一个序偶(有序2元组)，记作<x，y>，其中x是它的第一元素，y是它的第二元素。

例：平面直角坐标系中的一个点的坐标就构成为一个有序序偶，我们可用<x，y>表示。

注：序偶是讲究次序的，例<1，3>和<3，1>是表示平面上两个不同的点，这与集合不同，{1，3}和{3，1}是两个相等的集合；序偶< x，y >中的两个元素可以代表不同类型的事物。

2、序偶的性质

（1）**定义3-4.1**：两个序偶相等，

<x，y>=<u，v>，当且仅当x=u且y=v。

即<x, y>=<u,v> ⇔ x= u ∧ y=v

（2）当x≠y时， <x,y> ≠ <y,x>

例：已知<3, y-2>=< y-x, 5>，求x和y。

解：3=y-x

y-2=5　可得 x=4，　y=7　。

3、有序3元组：是一个序偶，其第一元素本身也是一个序偶，表示为<<x，y>，z>或<x，y，z>。

4、有序n元组：有序n元组也是一个序偶，其第一元素是一个n-1元组。

$< <x_1，x_2，…，x_{n-1}>，x_n>$，通常简记为：

$<x_1，x_2，…，x_{n-1}，x_n>$，其中x_i称作它的第i坐标，i=1，2，…，n。

$<x_1，x_2，…，x_{n-1}，x_n>=<y_1，y_2，…，y_{n-1}，y_n>$的充要条件是$x_i=y_i$，i=1，2，…，n。

序偶<x,y>其元素可以分别属于不同的集合，因此任给两个集合A和B，可以定义一种序偶的集合。

二、笛卡尔积（直积）

1、定义3-4.2：设A和B是任意两个集合，由A中元素作第一元素，B中元素作第二元素构成序偶，所有这样序偶的集合称集合A和B的**笛卡尔积**或**直积**。记作A×B。即

$$A\times B=\{\langle x, y\rangle \mid x\in A\wedge y\in B\}$$

例：设集合 $A=\{a,b,c\}, B=\{1,2\}$，求 $A\times B, B\times A, B\times B$。

解：$A\times B=\{\langle a,1\rangle,\langle a,2\rangle,\langle b,1\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,1\rangle,\langle c,2\rangle\}$

$B\times A=\{\langle 1,a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 1,c\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 2,c\rangle\}$，显然 $A\times B\neq B\times A$

$B\times B=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$

若A、B均是有限集，|A|=m，|B|=n，则 |A×B| = |B×A|= m×n。

例：设$A=\{1,2\}, B=\{a,b\}, C=\{\alpha\}$，求：$(A\times B)\times C, A\times(B\times C)$。

解：

$(A\times B)\times C=\{\langle x,y,z\rangle \mid x\in A, y\in B, z\in C\}=\{\langle 1,a,\alpha\rangle,\langle 1,b,\alpha\rangle,\langle 2,a,\alpha\rangle,\langle 2,b,\alpha\rangle\}$

$A\times(B\times C)=\{\langle x,\langle y,z\rangle\rangle \mid x\in A, y\in B, z\in C\}=\{\langle 1,\langle a,\alpha\rangle\rangle,\langle 1,\langle b,\alpha\rangle\rangle,\langle 2,\langle a,\alpha\rangle\rangle,\langle 2,\langle b,\alpha\rangle\rangle\}$

显然$(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$。

例题1 若$A=\{\alpha，\beta\}$，$B=\{1，2，3\}$，

求$A\times B$， $B\times A$， $A\times A$， $B\times B$以及$(A\times B)\cap(B\times A)$。

解：$A\times B=\{<\alpha，1>，<\alpha，2>，<\alpha，3>，<\beta，1>，<\beta，2>，<\beta，3>\}$

$B\times A=\{<1，\alpha>，<1，\beta>，<2，\alpha>，<2，\beta>，<3，\alpha>，<3，\beta>\}$

$A\times A=\{<\alpha，\alpha>，<\alpha，\beta>，<\beta，\alpha>，<\beta，\beta>\}$

$B\times B=\{<1，1>，<1，2>，<1，3>，<2，1>，<2，2>，<2，3>，<3，1>，<3，2>，<3，3>\}$

显然：

$$(A\times B)\cap(B\times A)=\varnothing$$

$$(A\times B)\neq(B\times A)$$

练习1：设A={1,2}, 求$A\times \wp(A)$.

练习2：设A={φ}, 求$A\times \wp(A)$.

解：

（1） $\wp(A)=\{\varphi,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$

$A\times \wp(A)=\{<1,\varphi>, <1,\{1\}>, <1,\{2\}>, <1,\{1,2\}>,$
$<2,\varphi>, <2,\{1\}>,<2,\{2\}>,<2,\{1,2\}>\}$

（2） $\wp(A)=\{\varphi,\{\varphi\}\}$

$A\times \wp(A)=\{<\varphi, \varphi>, <\varphi,\{\varphi\}>\}$

2、n个集合的笛卡尔积：集合A_1，A_2，…，A_n，则

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{< a_1, a_2, \ldots, a_n > | a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

特别地，

当$A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$时，记$\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n\text{个}} = A^n$

若 A_1，A_2，…，A_n都是有限集，则

$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|$ 。

约定：若$A=\varnothing$或$B=\varnothing$，则$A \times B=\varnothing$ ，$B \times A=\varnothing$

例：设A，B，C，D是任意集合，判断下列命题是否正确？

(1)$A\times B=A\times C\Rightarrow B=C$

不正确，当$A=\varnothing$，$B\neq C$时，$A\times B=A\times C=\varnothing$。

(2)$A-(B\times C)=(A-B)\times(A-C)$

不正确，当$A=B=\{1\}$，$C=\{2\}$时，$A-(B\times C)=\{1\}-\{<1,2>\}=\{1\}$，而$(A-B)\times(A-C)=\varnothing\times\{1\}=\varnothing$。

(3)$A=C$，$B=D\Rightarrow A\times B=C\times D$

正确，由定义可以证明，在非空前提下是充要条件。

(4)存在集合A使得$A\subseteq A\times A$

正确，当$A=\varnothing$时，$A\subseteq A\times A$。

三、笛卡尔积的性质

1、对于任意集合A，$A\times\varnothing=\varnothing$， $\varnothing\times A=\varnothing$ 。

2、笛卡尔积运算不满足交换律，当$A\neq\varnothing$，$B\neq\varnothing$，$A\neq B$时$A\times B\neq B\times A$。

3、笛卡尔积运算不满足结合律，即当A，B，C均非空时$(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$。

4、定理3-4.1：对任意三个集合A、B、C，有

(1) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

(2) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

(3) $(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$

(4) $(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$

即笛卡儿积运算对并和交运算满足分配律。

证明：(2) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

证明两个集合相等，可以证明它们互相包含。

$\forall\langle a, b\rangle\in A\times(B\cap C)$，

则$a\in A$，$b\in B\cap C$，即$a\in A$，$b\in B$，且$b\in C$，

即$\langle a, b\rangle\in A\times B$且$\langle a, b\rangle\in A\times C$，有

$\langle a, b\rangle\in(A\times B)\cap(A\times C)$，得$A\times(B\cap C)\subseteq(A\times B)\cap(A\times C)$

$\forall\langle a, b\rangle\in(A\times B)\cap(A\times C)$，

则$\langle a, b\rangle\in A\times B$且$\langle a, b\rangle\in A\times C$，

则$a\in A$，$b\in B$，且$a\in A$，$b\in C$，则$b\in B\cap C$。

所以$\langle a, b\rangle\in A\times(B\cap C)$，所以$(A\times B)\cap(A\times C)\subseteq A\times(B\cap C)$

由以上两条有：$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

证明：（4） $(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$

对于$\forall\langle x,y\rangle$

若 $\langle x,y\rangle\in(B\cap C)\times A$

$\Leftrightarrow x\in(B\cap C)\wedge y\in A$

$\Leftrightarrow (x\in B\wedge x\in C)\wedge y\in A$

$\Leftrightarrow x\in B\wedge x\in C\wedge y\in A\wedge y\in A$

$\Leftrightarrow (x\in B\wedge y\in A)\wedge(x\in C\wedge y\in A)$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in B\times A\wedge\langle x,y\rangle\in C\times A$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in(B\times A)\cap(C\times A)$

$\therefore (B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$

5、**定理3-4.2**：对于任意集合A、B、C，若C≠∅，则$A \subseteq B \Leftrightarrow A \times C \subseteq B \times C$

$$\Leftrightarrow C \times A \subseteq C \times B$$

证明：对于$\forall \langle x,y \rangle$

$\langle x,y \rangle \in C \times A$

$\Leftrightarrow x \in C \wedge y \in A$

$\Rightarrow x \in C \wedge y \in B \quad (\because A \subseteq B)$

$\Leftrightarrow \langle x,y \rangle \in C \times B$

$\therefore C \times A \subseteq C \times B$

其余可类似证明

6、**定理3-4.3**：对任意四个非空集合，

$$A\times B\subseteq C\times D \Leftrightarrow A\subseteq C \wedge B\subseteq D。$$

证明：充分性。设$A\subseteq C$，$B\subseteq D$。

由定理3-4.2，因$B\subseteq D$，$A\neq\emptyset$，所以$A\times B\subseteq A\times D$。又$A\subseteq C$，D非空，所以$A\times D\subseteq C\times D$，所以$A\times B\subseteq C\times D$。

必要性。设 $A\times B\subseteq C\times D$。 $\forall x\in A$，$y\in B$，所以$<x, y>\in A\times B$，又因$A\times B\subseteq C\times D$，所以$<x, y>\in C\times D$，所以$x\in C$，$y\in D$，所以$A\subseteq C$，$B\subseteq D$

证明定理3-4.3用到集合包含的传递性：

$(A\subseteq B)\wedge(B\subseteq C) \Rightarrow (A\subseteq C)$

习题讲解

105页(2)、(3)、(4)

（2）设A={a，b}，构成集合$\wp(A)\times A$。

解

$\wp(A)=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

$$\wp(A)\times A=\{<\varnothing, a>, <\varnothing, b>,$$
$$<\{a\}, a>, <\{a\}, b>,$$
$$<\{b\}, a>, <\{b\}, b>,$$
$$<\{a,b\}, a>, <\{a,b\}, b>\}$$

（3）下列各式中哪些成立？哪些不成立？为什么？

a) $(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(B\times D)$

b) $(A-B)\times(C-D)=(A\times C)-(B\times D)$

c) $(A\oplus B)\times(C\oplus D)=(A\times C)\oplus(B\times D)$

d) $(A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C)$

e) $(A\oplus B)\times C=(A\times C)\oplus(B\times C)$

a) $(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(B\times D)$不成立。

设$A=\{a\}$，$B=\{b\}$，$C=\{c\}$，$D=\{d\}$，

则

$A\cup B=\{a，b\}$，　$C\cup D=\{c，d\}$，

$(A\cup B)\times(C\cup D)=\{<a,c>,<a,d>,<b,c>,<b,d>\}$，

$A\times C=\{<a,c>\}$，　$B\times D=\{<b,d>\}$，

$(A\times C)\cup(B\times D)=\{<a,c>,<b,d>\}$

故$(A\cup B)\times(C\cup D)\neq(A\times C)\cup(B\times D)$

b)$(A-B)\times(C-D)=(A\times C)-(B\times D)$不成立。

设$A=\{a,e\}$，$B=\{a,b\}$，$C=\{c,f\}$，$D=\{d\}$,

则

$A-B=\{e\}$， $C-D=\{c，f\}$,

$(A-B)\times(C-D)=\{\langle e,c\rangle,\langle e,f\rangle\}$,

$A\times C=\{\langle a,c\rangle,\langle a,f\rangle,\langle e,c\rangle,\langle e,f\rangle\}$,

$B\times D=\{\langle a,d\rangle,\langle b,d\rangle\}$,

$(A\times C)-(B\times D)==\{\langle a,c\rangle,\langle a,f\rangle,\langle e,c\rangle,\langle e,f\rangle\}$,

故$(A-B)\times(C-D)\neq(A\times C)-(B\times D)$

c)$(A\oplus B)\times(C\oplus D)=(A\times C)\oplus(B\times D)$不成立。

设$A=\{a\}$，$B=\{b\}$，$C=\{c\}$，$D=\{d\}$，

则

$A\oplus B=\{a, b\}$，$C\oplus D=\{c, d\}$，

$(A\oplus B)\times(C\oplus D)=\{\langle a,c\rangle,\langle a,d\rangle,\langle b,c\rangle,\langle b,d\rangle\}$，

$A\times C=\{\langle a,c\rangle\}$，$B\times D=\{\langle b,d\rangle\}$，

$(A\times C)\oplus(B\times D)=\{\langle a,c\rangle,\langle b,d\rangle\}$

故$(A\oplus B)\times(C\oplus D)\neq(A\times C)\oplus(B\times D)$

d) $(A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C)$成立.

证明 因为$(A-B)\times C=\{\langle x,y\rangle \mid (x\in A-B)\wedge y\in C\}$

所以

$$
\begin{aligned}
&\langle x,y\rangle\in(A-B)\times C\\
\Leftrightarrow\ & x\in(A-B)\wedge y\in C\\
\Leftrightarrow\ & x\in A\wedge x\notin B\wedge y\in C\\
\Leftrightarrow\ & (x\in A\wedge y\in C\wedge x\notin B)\vee(x\in A\wedge y\in C\wedge y\notin C))\\
\Leftrightarrow\ & (x\in A\wedge y\in C)\wedge(x\notin B\vee y\notin C)\\
\Leftrightarrow\ & (x\in A\wedge y\in C)\wedge\neg(x\in B\wedge y\in C)\\
\Leftrightarrow\ & \langle x,y\rangle\in A\times C\wedge\langle x,y\rangle\notin B\times C\\
\Leftrightarrow\ & \langle x,y\rangle\in[(A\times C)-(B\times C)]
\end{aligned}
$$

e)$(A\oplus B)\times C=(A\times C)\oplus(B\times C)$成立。

证明

$(A\oplus B)\times C$

$=[(A-B)\cup(B-A)]\times C$

$=[(A-B)\times C]\cup[(B-A)]\times C]$

$=[(A\times C)-(B\times C)]\cup[(B\times C)-(A\times C)]$

$=(A\times C)\oplus(B\times C)$

（定理3-4.1c)）

d)$(A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C)$

（4）证明：若$X \times X = Y \times Y$，则$X = Y$。

提示：证明$X \subseteq Y$且$Y \subseteq X$

证明：设任意$x \in X$，则$\langle x,x \rangle \in X \times X$，

即$\langle x,x \rangle \in Y \times Y$，$x \in Y$，所以$X \subseteq Y$。

同理可证$Y \subseteq X$。

故$X = Y$

3-5 关系及其表示

要求：

理解关系的两种定义及常用关系；熟练掌握关系表达式、关系矩阵与关系图三种表示方法。

一、关系（Relation）基本概念

1、关系

定义3-5.1：任一序偶的集合确定了一个二元关系R，<a，b>∈R记作aRb，称a与b有关系R，<a，b>∉R记作$a \not R b$，称a与b没有关系R。这种记法称为中缀记法。

例如，>={<x，y>|x，y是实数且x>y}

说明：(1)把关系R这种无形的联系用集合这种“有形”的实体来描述，为今后的描述和论证带来方便。

(2)序偶是讲究次序的，如果有<a，b>∈R未必有<b，a>∈R ，即a与b有关系R，未必b与a有关系R。

例：3与1有“>”关系，但1与3没有“>” 关系。

2、前域、值域

定义3-5.2：二元关系R中，所有序偶的第一元素的集合dom R称为R的前域，第二元素的集合ran R称为R的值域。R的前域和值域一起称作R的域，记作FLD R。即

$\mathrm{dom}\ R = \{x | (\exists y)(\langle x, y\rangle \in R)\}$，

$\mathrm{ran}\ R = \{y | (\exists x)(\langle x, y\rangle \in R)\}$，

$\mathrm{FLD}\ R = \mathrm{dom}\ R \cup \mathrm{ran}\ R$

例题1 设A={1，2，3，5}，B={1，2，4}，

H={<1，2>，<1，4>，<2，4>，<3，4>}，

求dom H，ran H， FLD H。

解： dom H={1，2，3}，ran H={2，4}，

FLD H={1，2，3，4}

关系的第二个等价定义

3、X到Y的二元关系

定义3-5.3：令X和Y是任意两个集合，直积X×Y的子集R称作**X到Y的二元关系**。

特别当X = Y时则称作X上的二元关系。

如果R是X到Y的关系，则

$$\mathrm{dom}\ R \subseteq X，\mathrm{ran}\ R \subseteq Y。$$

例题2 设X={1，2，3，4}，

求X上的关系>及dom >，ran >。

解：

>={<2，1>，<3，1>，<4，1>，

<3，2>，<4，2>，<4，3>}

dom >={2，3，4}，ran >={1，2，3}

练习109页（1）（2）

思考：若集合|A|=n,|B|=m，则从A到B的二元关系有多少个？

答曰：|A|=n，|B|=m则$|A\times B|=m\times n$, $A\times B$的任一个子集都是A到B的二元关系，即 $2^{m\times n}$个。

思考：若集合|A|=n, 则集合A上的二元关系有多少个？

答曰：|A|=n，则$|A\times A|=n^2$, $A\times A$的任一个子集都是A上的二元关系，即 2^{n^2} 个。

4、特殊的关系

(1)全域关系：对于集合X和Y，称$X \times Y$为X到Y的全域关系。记作U。

特别地，定义

$E_X=\{<x,y>|x\in X \wedge y\in X\}= X\times X$为X上的全域关系。

(2) 空关系：$\varnothing$称为空关系。

(3) 恒等关系：$I_X =\{<x,x>|x\in X\}$为X上的恒等关系。

例题3 若H={f，m，s，d}表示一个家庭中父、母、子、女四个人集合，确定H上的全域关系和空关系，另外再确定H上的一个关系，指出该关系的值域和前域。

解：设H上的同一家庭成员的关系为H_1，H上的互不相识的关系为H_2，则H_1为全域关系，为H_2空关系，设H上的长幼关系为H_3，

$H_3=\{<f, s>, <f, d>, <m, s>, <m, d>\}$，

$\mathrm{dom}\ H_3=\{f, m\}$，$\mathrm{ran}\ H_3=\{s, d\}$

例题4 设X={1，2，3，4}，若H={<x，y>|(x-y)/2是整数}，S={<x，y>|(x-y)/3是正整数}，求H∪S，H∩S， ~H，S-H。

解：H={<1，1>，<1，3>，<2，2>，<2，4>，
<3，3>，<3，1>，<4，4>，<4，2>}

S={<4，1>}

H∪S={<1，1>，<1，3>，<2，2>，<2，4>，<3，3>，
<3，1>，<4，4>，<4，2>，<4，1>}

H∩S=∅

X×X={<1，1>，<1，2>，<1，3>，<1，4>，<2，1>，
<2，2>，<2，3>，<2，4>，<3，1>，<3，2>，
<3，3>，<3，4>，<4，1>，<4，2>，<4，3>，<4，4>}

~H={<1，2>，<1，4>，<2，1>，<2，3>，<3，2>，
<3，4>，<4，1>，<4，3>}

S-H={<4，1>}

除上述三类特殊的关系外，还有一些常用的关系，如：

$L_A = \{<x,y>|x,y \in A \wedge x \le y\}$ 为A上的小于等于关系

$D_A = \{<x,y>|x,y \in A \wedge x\text{整除}y\}$ 为A上的整除关系

$R_A = \{<x,y>|x,y \in A \wedge x \subseteq y\}$为集合A上的包含关系

$K_A = \{<x,y>|x,y \in A \wedge x \equiv y(\mathrm{mod}\ n)\}$为集合A上的同余关系

类似地还可以定义大于等于关系、大于关系、小于关系、真包含关系等。

例：设A={1,2,3,4}，请列出下列关系。

(1) $R=\{\langle x,y\rangle \mid x\neq y\}$

(2) $R=\{\langle x,y\rangle \mid x+y\neq 2 \wedge x,y \in A\}$

(3) 整除关系$\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A \wedge x$整除$y\}$

(4) 同余关系$\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A \wedge x\equiv y \pmod 2\}$

说明：整除是指整数a除以自然数b除得的商正好是整数而余数是零。我们就说a能被b整除（或说b能整除a），记作$b \mid a$。

5、定理3-5.1：若Z和S是从集合X到Y的两个关系，则Z和S的并、交、补、差仍是X到Y的关系。

证明 因为 $Z \subseteq X \times Y$， $S \subseteq X \times Y$

故 $Z \cup S \subseteq X \times Y$， $Z \cap S \subseteq X \times Y$，

$$\sim S = (X \times Y - S) \subseteq X \times Y$$

$$Z - S = Z \cap \sim S \subseteq X \times Y$$

二、关系的表示

1、偏序集合表示法（前已使用）

为直观地表示A到B的关系,采用如下的图示:用大圆圈表示集合A和B,里面的小圆圈表示集合中的元素;若$a \in A$,$b \in B$,且$\langle a,b \rangle \in \rho$,则在图示中将表示$a$和$b$的小圆圈用直线或弧线连接起来,并加上从结点$a$到结点$b$方向的箭头。

例 设$A=\{1,2,3,4,5\}$,$B=\{a,b,c\}$，

则$\rho_1=\{<1,a>,<1,b>,<2,b>,<3,a>\}$是$A$到$B$的关系,

而$\rho_2=\{<a,2>,<c,4>,<c,5>\}$是$B$到$A$的关系。

其集合表示法如下：

此例中的ρ_1和ρ_2的图示如图1所示。

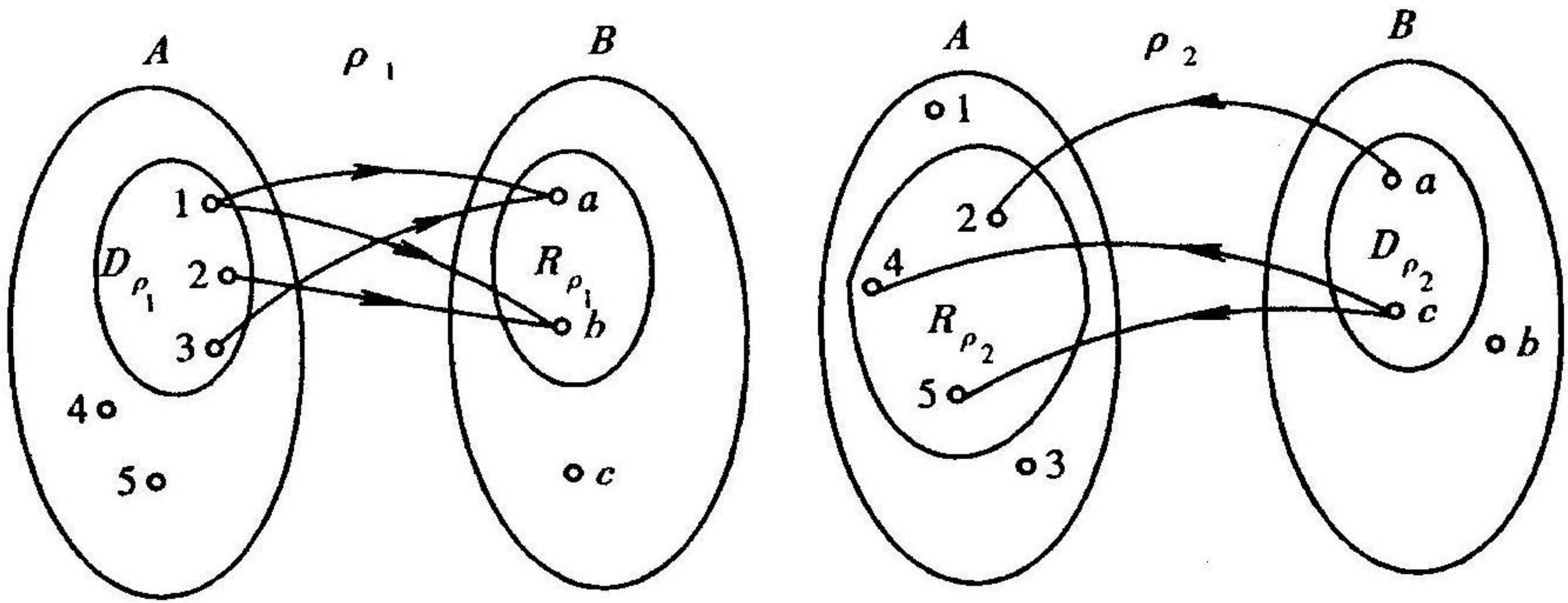


图1 上例用图

2、关系矩阵：设给定两个有限集合

$X=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$，$Y=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$，

R是X到Y的关系，则R的关系矩阵$M_{R}=[r_{ij}]_{m\times n}$，

$r_{ij}=1$，当$\langle x_i, y_j\rangle\in R$，

$r_{ij}=0$，当$\langle x_i, y_j\rangle\notin R$ 。

如果R是X上的二元关系时，则其关系矩阵是一个方阵。

上例的关系矩阵表示为：

$$M_{\rho_1} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_{\rho_2} = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

关系矩阵的写法也可以简化，当约定了元素的次序后，可以不写最左列和最上行的元素。如

$$M_{\rho_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

说明：

(1)空关系的关系矩阵的所有元素为0。

(2)全关系的关系矩阵的所有元素为1。

(3)恒等关系的关系矩阵的所有对角元为1，非对角元为0，此矩阵为单位矩阵。

例题5 设$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$,$Y=\{y_1,y_2,y_3\}$,
$R=\{<x_1,y_1>, <x_1,y_3>, <x_2,y_2>, <x_2,y_3>, <x_3,y_1>, <x_4,y_1>, <x_4,y_2>\}$，写出关系矩阵$M_R$。

例题6 设$A=\{1,2,3,4\}$，写出集合A上大于关系>的关系矩阵。

3、关系图：设有限集合

$X=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$，

$Y=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$，X到Y的一个关系为R，则R的关系图：做出m个结点分别记作x_1，x_2，…，x_m，n个结点分别记作y_1，y_2，…，y_n，如果$\langle x_i, y_j\rangle \in R$，则可自结点$x_i$至$y_j$作一有向弧；如果$\langle x_i, y_j\rangle \notin R$，则$x_i$至$y_j$没有线段联结。

令图$G=\langle V,E\rangle$,其中顶点集合$V=A\cup B$,边集为E。对于$\forall\, x_i,x_j$,满足

$$\langle x_i,x_j\rangle \in E \Leftrightarrow x_iRx_j$$

称G为R的关系图

例 设$A=\{-2, -1, 0, 1\}$，
写出A上的＜关系、≤关系、＞关系、U_A和I_A,
并分别写出这些关系的定义域和值域（这里＜、≤、＞分别表示通常的小于、小于等于和大于）。
并画出关系图。

解

$<=\{<-2, -1>, <-2, 0>, <-2, 1>, <-1, 0>, <-1, 1>, <0, 1>\}$

$D_<=\{-2, -1, 0\}$ $R_<=\{-1, 0, 1\}$

$\leq=\{<-2, -2>, <-2, -1>, <-2, 0>, <-2, 1>, <-1, -1>, <-1, 0>, <-1, 1>, <0, 0>, <0, 1>, <1, 1>\}$

$D_\leq=A$ $R_\leq=A$

$>$ = {<-1, -2>, <0, -1>, <0, -2>, <1, -2>, <1, -1>, <1, 0>}

$D_{>}$ = {-1, 0, 1}　　$R_{>}$ = {-2, -1, 0}

U_A = {<-2, -2>, <-2, -1>, <-2,0>, <-2,1>, <-1,-2>, <-1,-1>, <-1, 0>, <-1, 1>, <0, -2>, <0, -1>, <0, 0>, <0, 1>, <1, -2>, <1, -1>, <1, 0>, <1, 1>}

$$D_{U_A} = A \qquad R_{U_A} = A$$

I_A = {<-2, -2>, <-1, -1>, <0, 0>, <1, 1>}

$$D_{I_A} = A \qquad R_{I_A} = A$$

其关系图表示为：

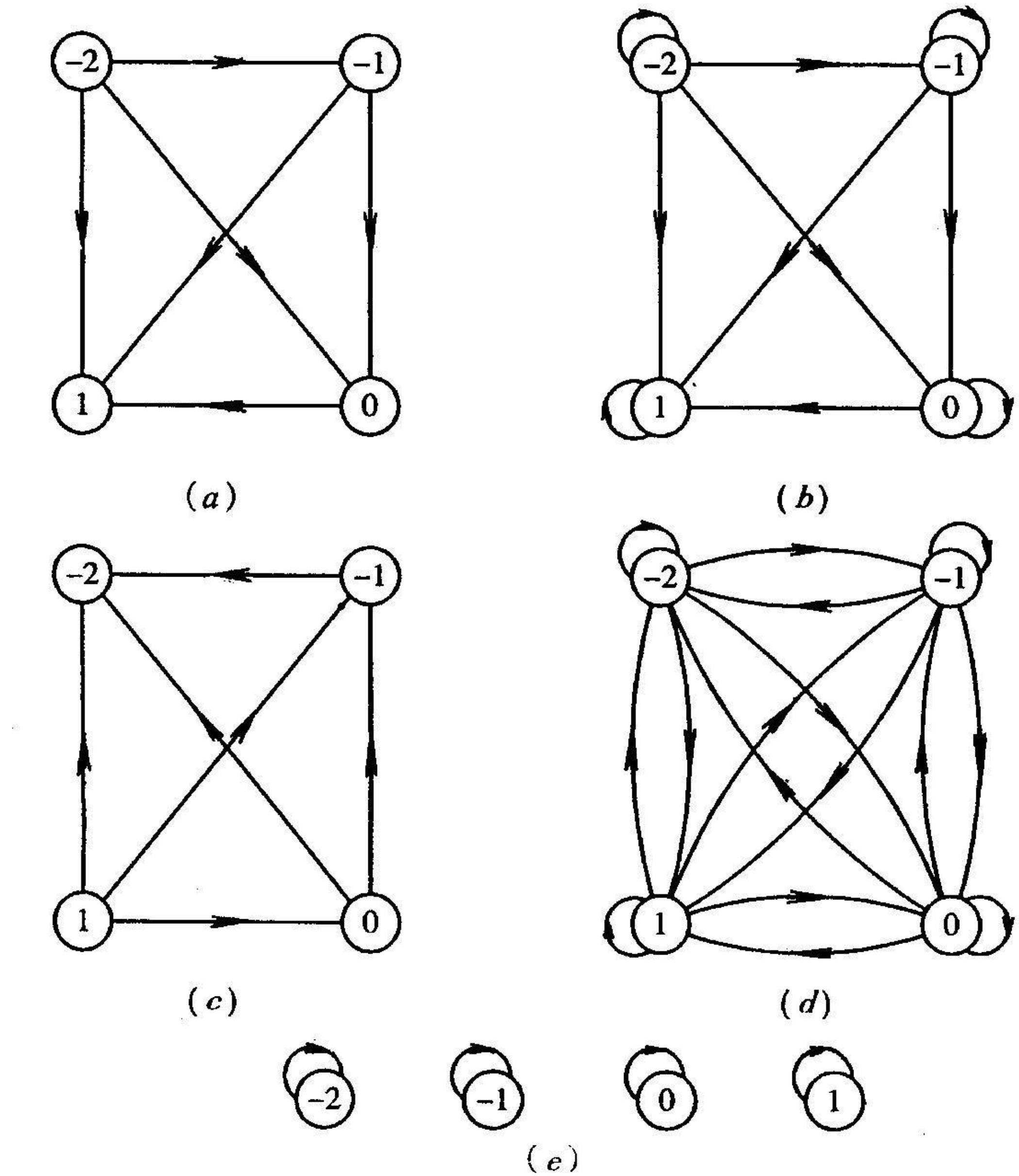
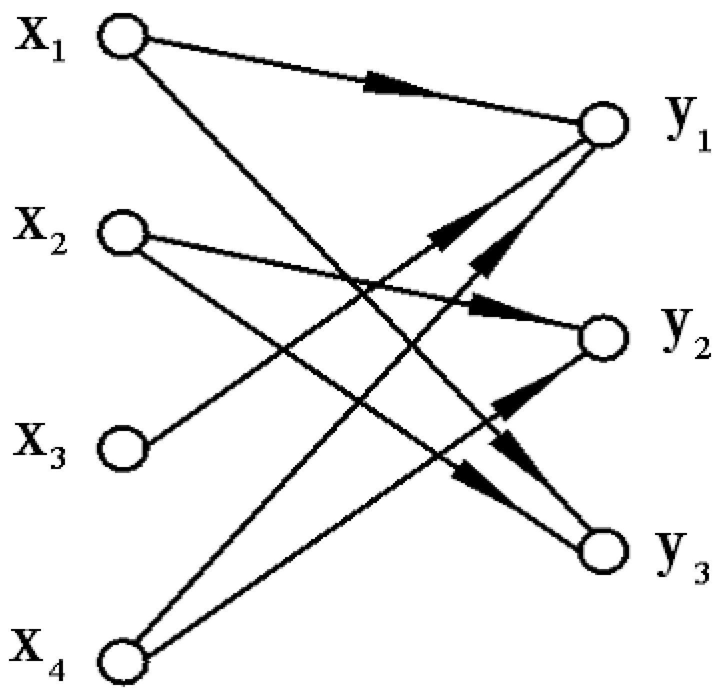


图 2 例题 用图

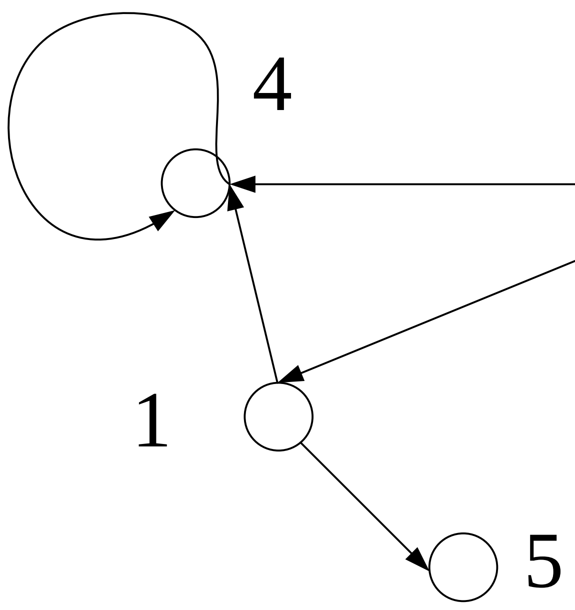
例题7 设$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$, $Y=\{y_1,y_2,y_3\}$, $R=\{\langle x_1,y_1\rangle, \langle x_1,y_3\rangle, \langle x_2,y_2\rangle, \langle x_2,y_3\rangle, \langle x_3,y_1\rangle, \langle x_4,y_1\rangle, \langle x_4,y_2\rangle\}$，画出R的关系图。



例题8 设A={1,2,3,4,5}，在A上的二元关系R给定为：

R={<1,5>,<1,4>,<2,3>,<3,1>,<3,4>,<4,4>}

画出R的关系图。



说明：关系图主要用于表达结点间的邻接关系，而与结点位置和线段长度无关。

说明：

因为从X到Y的关系R是X×Y的子集，即

$R \subseteq X \times Y$，且 $X \times Y \subseteq (X \cup Y) \times (X \cup Y)$

所以 $R \subseteq (X \cup Y) \times (X \cup Y)$。

令 $Z = X \cup Y$，则 $R \subseteq Z \times Z$，

故今后通常限于讨论同一集合上的关系。

作业

104页（1）

110页（4）、（5）b c d、（6）、（7）

The End