2012 级本科班概率统计期末试卷参考答案

一、选择题和填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1~5 $CDDAB$　6．$\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$　7．$B(n,p)$　8．$f_Z(z)=\begin{cases} ze^{-\frac{z^2}{2}} & z>0 \\ 0 & z\le 0 \end{cases}$　9．$\bar{X}\pm 0.49\sigma$　10．0.015

二、解答下列各题（每小题 10 分，共 40 分）

1．解：由已知得

$$P(A_1)=25\%,\quad P(A_2)=35\%,\quad P(A_3)=40\%,$$
$$P(B|A_1)=5\%,\ P(B|A_2)=4\%,\ P(B|A_3)=2\%$$

所以 $P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=3.45\%$

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{25}{69}=0.3623$$

2．解：

	1	2	3	4
1	1/4	0	0	0
2	1/8	1/8	0	0
3	1/12	1/12	1/12	0
4	1/16	1/16	1/16	1/16

X+Y	2	3	4	5	6	7	8
P	1/4	1/8	5/24	7/48	7/48	1/16	1/16

E*X*=2.5

3．解：（1）由归一性，$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-1}^{1}\frac{A}{\sqrt{1-x^2}}dx=A\pi\Rightarrow A=\frac{1}{\pi}$

（2）$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases} 0 & x\le -1 \\ \int_{-1}^{x}\frac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}}dt & |x|<1 \\ 1 & x\ge 1 \end{cases}=\begin{cases} 0 & x\le -1 \\ \frac{1}{2}+\frac{\arcsin x}{\pi} & |x|<1 \\ 1 & x\ge 1 \end{cases}$

（3）$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-1}^{1}\frac{x}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx=0$

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{2}\qquad DX=EX^2-(EX)^2=\frac{1}{2}$$

4．解：电流 I 的分布密度函数为 $f_I(x)=\begin{cases}0.5, & 9\le x\le 11\\ 0, & 其它\end{cases}$

功率 W 的分布函数 $F_W(y)=P\{W\le y\}=P\{I^2\le \frac{y}{2}\}$； 当 $y\le 0$ 时，$F_W(y)=0$；

当 $y>0$ 时，$F_W(y)=F_I(\sqrt{\frac{y}{2}})-F_I(-\sqrt{\frac{y}{2}})$

故分布密度 $f_W(y)=F_W'(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{2y}}f_I(\sqrt{\frac{y}{2}}) & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{4\sqrt{2y}}, & 162<y<242\\ 0, & 其它\end{cases}$

三、解答下列各题（第小题 10 分，共 30 分）

1．解： $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-x}^{x}1dy, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{|y|}^{1}1dx, & |y|\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}=\begin{cases}1-|y|, & |y|\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

因为 $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，所以 X 与 Y 不独立

2．解：因为 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}\lambda^2x^2e^{-\lambda x}dx=\frac{2}{\lambda}$，所以参数 λ 的矩估计为 $\hat{\lambda}=\frac{2}{\overline{X}}$

似然函数 $L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\lambda^2x_ie^{-\lambda x_i}=\lambda^{2n}e^{-n\lambda\bar{x}}\prod_{i=1}^{n}x_i$

两边取对数得 $\ln L(\lambda)=2n\ln\lambda-n\lambda\bar{x}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

似然方程 $\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=\frac{2n}{\lambda}-n\bar{x}=0,$ 所以参数 λ 的极大似然估计量为 $\hat{\lambda}=\frac{2}{\overline{X}}$

3． $H_0:\sigma^2=0.04,\quad H_1:\sigma^2\ne 0.04$，检验统计量为 $\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{0.04}$

拒绝域为 $\left\{\chi^2>\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)或\chi^2<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}$，

由已知 $s^2=0.097, n=6, \alpha=0.05$，经计算和附表得

$\chi^2=12.125,\quad \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.025}(5)=12.833,\ \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.975}(5)=0.831$，

由于 $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\chi^2<\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，故不拒绝原假设。

故接受原假设，即认为这批元件的电阻的方差是 0.04.