离散数学 II
Discrete Mathematics Ⅱ

封筠

fengjun@stdu.edu.cn

20-12

课程回顾

同态映射、同态象、同态核、满同态、单一同态、自同态、同构映射、自同构、 2个定理

5-8 同态与同构（下）

- 学习本节要熟悉如下术语（2个）：

同余关系、同余类

- 要求：

掌握3个定理

4、同态核

定义5-8.4 如果f为代数结构$<G, ★>$到$<G',* >$的一个同态映射， G'中有幺元e'，那么称下列集合为f的**同态核**（***kernel of homomorphism***），记为$K(f)$。

$$K(f)=\{x \mid x\in G \wedge f(x)=e'\}$$

定理5-8.3 设f为群<G, ★>到群<G',* >的同态映射， 那么f的同态核K是G的子群。

- 证明思路:先证★运算在K上封闭

$e'=f(e)$,设$k_1,k_2\in K$,则

$$f(k_1★k_2)= f(k_1)*f(k_2)= e'* e'= e'$$

故$k_1★k_2\in K$，★运算在K上封闭。

再证K中的元素有逆元

而对任意的$k\in K$,

$$f(k^{-1})= [f(k)]^{-1}= e'^{-1} = e'$$

故$k^{-1}\in K$。结论得证。 □

练习 P221（5）

<R，+>是实数集上的加法群，设f: $x \rightarrow e^{2\pi ix}$， $x \in R$

f是同态否？如果是，请写出同态象和同态核。

解 任取x，y∈R， $f(x)=e^{2\pi ix}$， $f(y)=e^{2\pi iy}$，

$$f(x+y)=e^{2\pi i(x+y)} = e^{2\pi ix} \cdot e^{2\pi iy} = f(x) \cdot f(y)$$

所以f是<R，+>到<G，·>的同态。

f的同态象是

$<G，\cdot>=<\{\cos 2\pi x+i\sin 2\pi x \mid x\in R\}，\cdot>$，由定理5-8.2知是一个群。

$e^{2\pi ix}=\cos 2\pi x+i\sin 2\pi x$是复数，这里$<G，\cdot>$是复数集上的乘法群。

群$<G，\cdot>$的幺元是1，即$\cos 2\pi x=1$，$\sin 2\pi x=0$的情况，也就是$2\pi x=2k\pi$（k=……，-3，-2，-1，0，1，2，3，……）的情况，即x=……，-3，-2，-1，0，1，2，3，……

因此的f同态核为整数集**I**。

5、同态与同余关系的对应

定义5-8.5 设R为代数结构$<A, \bigstar>$的载体A上的等价关系，如果对A中任何元素 a_1, a_2 , b_1 , b_2 , $<a_1, a_2> \in R$, $<b_1,b_2> \in R$ 蕴涵 $<a_1 \bigstar b_1, a_2 \bigstar b_2 > \in R$
则称R为A上关于二元运算★的同余关系(*congruence relations*)。由这个同余关系将集合划分成的等价类就称为同余类。

练习 P221（8）

证明：一个集合上任意两个同余关系的交也是同余关系。

证明 设R_1和R_2是 $<A，*>$的任意两个同余关系，

即对于任意的$<a_1，b_1>$，$<a_2，b_2> \in R_1$

有$<a_1 * a_2，b_1 * b_2> \in R_1$

对于任意的$<c_1，d_1>$，$<c_2，d_2> \in R_2$

有$<c_1 * c_2，d_1 * d_2> \in R_2$。

于是，对于任意的

<a，b>，<c，d> $\in$ $\mathbf{R_1 \cap R_2}$，则

<a，b>，<c，d> $\in$ $\mathbf{R_1}$， **<a，b>，<c，d>** $\in$ $\mathbf{R_2}$

从而**<a*c，b*d>** $\in$ $\mathbf{R_1}$， **<a*c，b*d>** $\in$ $\mathbf{R_2}$，

即**<a*c，b*d>** $\in$ $\mathbf{R_1 \cap R_2}$。

因此，一个集合上任意两个同余关系的交也是同余关系。

例6 设A={a,b,c,d},对于由表1所确定的代数系统<A, ★>以及由表2所定义的在A上的等价关系R。

表 1

★	a	b	c	d
a	a	a	d	c
b	b	a	c	d
c	c	d	a	b
d	d	d	b	a

<A, ★>

表 2

	a	b	c	d
a	√	√		
b	√	√		
c			√	√
d			√	√

R

即R={<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,b>,<c,c>,<c,d>,<d,c>,<d,d>}

等价类$[a]_R=[b]_R=\{a，b\}$，$[c]_R=[d]_R=\{c，d\}$

$R=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,c\rangle,\langle d,d\rangle\}$

容易验证对于任意的$\langle a_1，b_1\rangle$，$\langle a_2，b_2\rangle\in R$有

$$\langle a_1 * a_2，b_1 * b_2\rangle\in R$$

如：

$\langle a*a，a*a\rangle=\langle a，a\rangle\in R$　　$\langle a*a，a*b\rangle=\langle a，a\rangle\in R$

$\langle a*b，a*a\rangle=\langle a，a\rangle\in R$　　$\langle a*b，a*b\rangle=\langle a，a\rangle\in R$

$\langle a*c，a*c\rangle=\langle d，d\rangle\in R$　　$\langle a*c，a*d\rangle=\langle d，c\rangle\in R$

$\langle a*d，a*c\rangle=\langle c，d\rangle\in R$　　$\langle a*d，a*d\rangle=\langle c，c\rangle\in R$

…………

所以R是A上的同余关系。

同余关系R将A划分为同余类$\{a，b\}$和$\{c，d\}$。

例7 设A={a,b,c,d},对于由表1所确定的代数系统<A, ★>以及由表2所定义的在A上的等价关系R。

表1

★	a	b	c	d
a	a	a	d	c
b	b	a	d	a
c	c	b	a	b
d	c	d	b	a

<A, ★>

表 2

	a	b	c	d
a	√	√		
b	√	√		
c			√	√
d			√	√

R

由于对$<a,b>,<c,d>\in R$有

$$<a \star c, b \star d>=<d,a> \notin R$$

因此由表2所定义的在A上的等价关系R不是一个同余关系。

由上述两例可知：在A上定义的等价关系R不一定是A上的同余关系，这是因为同余关系必须与定义在A上的二元运算密切相关。

定理5-8.4 设R为代数结构<A, ★>的载体A上的同余关系，$B=\{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$是由R诱导的A上的一个划分，那么，必定存在新的代数结构<B, ∗ >，它是<A, ★>的同态象。

□ 证明思路: 在B上定义二元运算*为：对于任意的A_i , $A_j \in B$，任取$a_1 \in A_i$,$a_2 \in A_j$,如果$a_1 ★ a_2 \in A_k$,则$A_i * A_j = A_k$ 。由于R是A上的同余关系,所以,以上定义的$A_i * A_j = A_k$是唯一的。

见222页（9）题 证明定理5-8.4中在B上所定义的二元运算*是唯一确定的。

作映射 $f(a)=A_i \quad a\in A_i$

显然，f是从A到B的满映射。

对于任意的$x,y\in A$，x,y必属于B中的某两个同余类，不妨设$x\in A_i, y\in A_j$，$1\leqslant i,j\leqslant r$，同时，$x★y$必属于$B$中某个同余类，不防设$x★y\in A_k$，于是就有

$$f(x★y)=A_k=A_i*A_j=f(x)*f(y)$$

因此f是由$\langle A,★\rangle$到$\langle B,*\rangle$的满同态，即$\langle B,*\rangle$是$\langle A,★\rangle$的同态象。□

定理5-8.4举例

例6 **设A={a,b,c,d}, 对于由下表所确定的代数系统<A, ★>**

★	a	b	c	d
a	a	a	d	c
b	b	a	c	d
c	c	d	a	b
d	d	d	b	a

定义在A上的等价关系R为:

{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,b>,<c,c>,<c,d>,<d,c>,<d,d>}

已知R是A上的同余关系。

B={ {a，b}，{c，d} }是A的一个划分。B上的二元运算*如下表：

*	{a，b}	{c，d}
{a，b}	{a，b}	{c，d}
{c，d}	{c，d}	{a，b}

A到B的映射*f*为：

f(a)={a，b}，*f*(c)={c，d}

f(b)={a，b}，*f*(d)={c，d}

<B，*>是<A，★>的同态象。

定理5-8.5 设f是由<A, ★>到<B, ∗ >的一个同态映射,如果在A上定义二元关系R为<a,b> ∈ R ,当且仅当

$$f(a)= f(b)$$

那么， R是A上的一个同余关系。

即象相同的元素属于一个同余类。

□证明思路:

因为$f(a)=f(a)$，所以$<a,a> \in R$。若$<a,b>\in R$，则$f(a)=f(b)$ 即$f(b)=f(a)$,所以$<b, a>\in R$。 若$<a,b>\in R$，$<b,c>\in R$则$f(a)=f(b) =f(c)$,所以$<a,c>\in R$。

最后，又因为若$<a,b>\in R$， $<c,d>\in R$，则有

$$f(a\star c)=f(a) * f(c)=f(b) * f(d) = f(b\star d)$$

所以，$<a\star c , b\star d>\in R$。

因此， R是A上的同余关系。 □

形象的说，一个代数系统的同态象可以看作是当抽去该系统中某些元素的次要特性的情况下，对该系统的一种粗糙描述。<u>如果我们把属于同一个同余类的元素看作是没有区别的，那么原系统的性态可以用同余类之间的相互关系来描述。</u>

现在用一个例子来说明：

例题8 所确定的两个代数系统<A, ★>和<B, ∗ >见下表：

<A, ★>

★	α	β	γ	δ	ε	ζ
α	α	β	α	α	γ	δ
β	β	α	γ	β	γ	ε
γ	α	γ	α	β	γ	ε
δ	α	β	β	δ	ε	ζ
ε	γ	γ	γ	ε	ε	ζ
ζ	δ	ε	ε	ζ	ζ	ζ

<B, *>

*	1	0	−1
1	1	1	0
0	1	0	−1
−1	0	−1	−1

映射 $f(\alpha)=1$ $f(\beta)=1$ $f(\gamma)=1$

$f(\delta)=0$ $f(\varepsilon)=0$ $f(\zeta)=-1$

明显的是由代数系统<**A**, ★> 到 <**B**, *>的一个同态映射。假如把代数系统<**A**, ★>看作是对六个带电粒子 α，β，γ，δ，ε，ζ 相互作用的详尽描述。如果 α，β，γ 是带正电荷的粒子， δ，ε 是中性粒子， ζ 是带负电荷的粒子，那么我们就可用1，0，−1分别表示这三类粒子，这就是映射f所具有的特性。若记 B={1, 0, −1}, 那么代数系统<**B**, *>描述了这三类粒子的相互作用，它正好是代数系统<**A**, ★> 的粗糙描述。

作业:

P221 （10）、（11）

The End