2011 级本科班概率统计期末试卷参考答案

一、解:

1. 两个串联元件能正常工作的概率为: r^2， 两个并联元件能正常工作的概率为: $1-(1-r)^2$

（1）第一个系统为先串联后并联,故可靠性为 $1-(1-r^2)^2 = 2r^2 - r^4$

（2）第二个系统为先并联,次串联,再并联, 故系统可靠性为

$$1-(1-r)(1-(r(1-(1-r)^2))) = r^4 - 3r^3 + 2r^2 + r$$

2.（1）由归一性,有: $a = 0.1$

（2）

X	1	2	3
P	0.3	0.45	0.25

Y	0	1	2
P	0.55	0.25	0.2

因为 $P_{11} \neq P_{1\cdot} \cdot P_{\cdot 1}$，故不独立.

（3）

2X+3Y	2	4	5	6	7	10	12
P	0.1	0.3	0.2	0.15	0.05	0.1	0.1

3. $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, -2 \le x \le 2 \\ 0, \quad 其他 \end{cases}$， $F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X^2 \le y\}$

当 $y \le 0$ 时，$F_Y(y) = 0$,所以 $f_Y(y) = 0$

当 $y > 0$ 时，$F_Y(y) = P\{-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}\} = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})]$$

当 $0 < y \le 4$ 时，$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}[\frac{1}{4} + \frac{1}{4}] = \frac{1}{4\sqrt{y}}$

当 $y > 4$ 时，$f_Y(y) = 0$

综上，$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{y}}, 0 < y \le 4 \\ 0, \quad 其它 \end{cases}$

二、解

（1）$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)\ dxdy = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} xe^{-x-y}\ dxdy = 1$，

$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)\ dxdy = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} ye^{-x-y}\ dxdy = 1$， （2） $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{+\infty} e^{-x-y}dy=e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^{+\infty} e^{-x-y}dx=e^{-y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$

因为 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$，所以独立.

（3） $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+2Y\le z\}$

当 $z\le 0$ 时， $F_Z(z)=0$,所以 $f_Z(z)=0$

当 $z>0$ 时， $F_Z(z)=\int_0^z dx\int_0^{\frac{z-x}{2}} e^{-x-y}\mathrm{d}y=1-e^{-z}-2e^{-\frac{z}{2}}$ ， $f_Z(z)=F_Z'(z)=e^{-\frac{z}{2}}-e^{-z}$

综上， $f_Z(z)=\begin{cases}e^{-\frac{z}{2}}-e^{-z}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$

三、解

1．似然函数为 $L(p)=\prod_{i=1}^{n} p^{x_i}=p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}$,

对数似然函数 $\ln L(p)=\sum_{i=1}^{n}x_i\ln p+(n-\sum_{i=1}^{n}x_i)\ln(1-p)$

令 $\frac{d}{dp}\ln L(p)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\Big/ p-\left(n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)/(1-p)=0,$

解得 p 的最大似然估计值 $\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}.$ p 的最大似然估计量 $\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{X}.$

2． $H_0:\mu=70;\quad H_1\ne 70$

取检验统计量 $t=\frac{\bar{X}-70}{s/\sqrt{n}}$ ，拒绝域 $|t|=\frac{\left|\bar{X}-70\right|}{s/\sqrt{n}}>t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(35)=2.0301$

由样本观测值算得 $|t|=\frac{\left|\bar{x}-70\right|}{s/\sqrt{n}}=1.4<2.0301$

故接受原假设 H_0 ，即可以认为这次考试考生平均成绩为 70 分.

四、1~5. CCBDA； 6. 0.6； 7. 16； 8. 4； 9. $t(n-1)$；10. $\Phi(0)$ 或 0.5