2016级本科班概率统计期末试卷参考答案

一、解答下列各题（第1, 2，3题每小题10分，第4题20分，共50分）

1. 解 令A={这批产品不准许放行}，

B_1={抽取到含有4个次品那一包}，B_2={抽取到含有1个次品那一包}，

则 $P(B_1)=0.3$, $P(B_2)=0.7$, $P(A|B_1)=1-\dfrac{C_6^3}{C_{10}^3}=\dfrac{5}{6}$, $P(A|B_2)=1-\dfrac{C_9^3}{C_{10}^3}=\dfrac{3}{10}$.

由全概率公式得 $P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)=0.3\times\dfrac{5}{6}+0.7\times\dfrac{3}{10}$=23/50

所以这批产品不准许放行的概率为0.46.

2. 解：(1) 由概率密度的归一性可知：

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=0+\int_0^{0.5}(cx^2+x)\mathrm{d}x+0=\frac{c}{24}+\frac{1}{8}\quad\Rightarrow\quad c=21$$

（2）$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}0, & x<0\\ \int_0^x(21t^2+t)\mathrm{d}t, & 0\le x\le 0.5,\\ 1, & x>0.5\end{cases}=\begin{cases}0, & x<0\\ 7x^3+0.5x^2, & 0\le x\le 0.5,\\ 1, & x>0.5\end{cases}$$

（3）$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=0+\int_0^{0.5}x(21x^2+x)\mathrm{d}x+0=\frac{505}{1344}\approx 0.3757$$

3. 解：（1）求E的分布函数：$F_E(y)=P\{Y\le y\}=P\{0.5mV^2\le y\}=P\{V^2\le\dfrac{2y}{m}\}$

当 $y\le 0$ 时，有 $F_E(y)=P\{V^2\le\dfrac{2y}{m}\}=0$

当 $y>0$ 时，有 $F_E(y)=P\{-\sqrt{\dfrac{2y}{m}}\le V\le\sqrt{\dfrac{2y}{m}}\}=F(\sqrt{\dfrac{2y}{m}})-F(-\sqrt{\dfrac{2y}{m}})$

（2）E 的概率密度为： $f_E(y)=F_E'(y)=\sqrt{\dfrac{1}{2my}}F'(\sqrt{\dfrac{2y}{m}})+\sqrt{\dfrac{1}{2my}}F'(-\sqrt{\dfrac{2y}{m}})$

$$=\sqrt{\frac{1}{2my}}\left(f(\sqrt{\frac{2y}{m}})+f(-\sqrt{\frac{2y}{m}})\right)=\begin{cases}\dfrac{4\sqrt{2y}}{a^3\sqrt{\pi m^3}}exp(-\dfrac{2y}{a^2m}), & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

注：由于函数$E=\dfrac{1}{2}mV^2$不单调，不能直接使用书上的公式!!!

4. 解：（1）因为服从均匀分布，故概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1, x-1\le y\le 1-x\\ 0, & elsewhere\end{cases}$$

（2） $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_{x-1}^{1-x}1\mathrm{d}y, & 0\le x\le 1\\ 0, & elsewhere\end{cases}=\begin{cases}2-2x, & 0\le x\le 1\\ 0, & elsewhere\end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_{0}^{1-y}1\mathrm{d}x, & 0\le y\le 1\\ \int_{0}^{1+y}1\mathrm{d}x, & -1\le y<0\\ 0, & elsewhere\end{cases}=\begin{cases}1-y, & 0\le y\le 1\\ 1+y, & -1\le y<0\\ 0, & elsewhere\end{cases}$$

（3）两个随机变量不独立，因为 $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$

（4） $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_{0}^{\frac{z+1}{2}}1\mathrm{d}x, & -1\le z\le 1\\ 0, & elsewhere\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{z+1}{2}, & -1\le z\le 1\\ 0, & elsewhere\end{cases}$

二、解答下列各题（每题 10 分，共 20 分）

1. 解：样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的值分别为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，

似然函数为 $L(\beta)=\dfrac{1}{\Gamma^n(\alpha)}(\beta)^{-\alpha n}\prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha-1}\exp(-\dfrac{n\overline{x}}{\beta})$

对似然函数取对数得 $\ln L(\beta)=-n\ln\Gamma(\alpha)-\alpha n\ln\beta+(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\dfrac{n\overline{x}}{\beta}$，

令 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\ln L(\beta)=-\dfrac{\alpha n}{\beta}+\dfrac{n\overline{x}}{\beta^2}=0,$

得极大似然估计值为 $\hat{\beta}=\dfrac{\overline{x}}{\alpha}$.

2. 解：假设 $H_0:\mu=80,\qquad H_1:\mu\ne 80.$

选择统计量：$U=\dfrac{\overline{X}-80}{14/\sqrt{n}}$，拒绝域为 $\{|u|=|\dfrac{\overline{x}-80}{14/\sqrt{n}}|>u_{\alpha/2}\}$

根据显著性水平和查正态分布函数表可以得到分位数为 $u_{\alpha/2}=u_{0.025}=1.96$，

由已知 $n=49,\overline{x}=85$ 算得：$|u|=|\dfrac{\overline{x}-80}{14/\sqrt{n}}|=|\dfrac{85-80}{14/\sqrt{49}}|=2.5>1.96$

从而拒绝原假设 H_0，即这次该学院考试平均成绩与全校平均成绩有差异。

三、填空题（每题 3 分）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.1151	0.1587	1	0.2	1/9	$\overline{X}$	$t(9)$	3	$2\sigma u_{\alpha/2}/\sqrt{n}$	2