本次课要讲授的内容

§1-3　曲线运动的描述

一、运动叠加原理

二、抛体运动

三、曲线运动的描述

（一）曲线运动的自然坐标描述

(二)圆周运动

§1-4　相对运动

一、运动描述的相对性

二、伽利略变换

总结！

知识回顾

运动方程→轨迹方程（轨道）

在直角坐标系中：

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

$$= \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\vec{k}$$

§1-3曲线运动的描述

一、运动的叠加原理

当物体同时参与两个或多个运动时，其总的运动乃是各个独立运动的合成结果。这称为运动叠加原理，或运动的独立性原理。

二、抛体运动

抛体运动： 从地面上某点向空中抛出的物体在空中所做的运动。

- 运动方程

以抛射点为坐标原点建立坐标系如图，

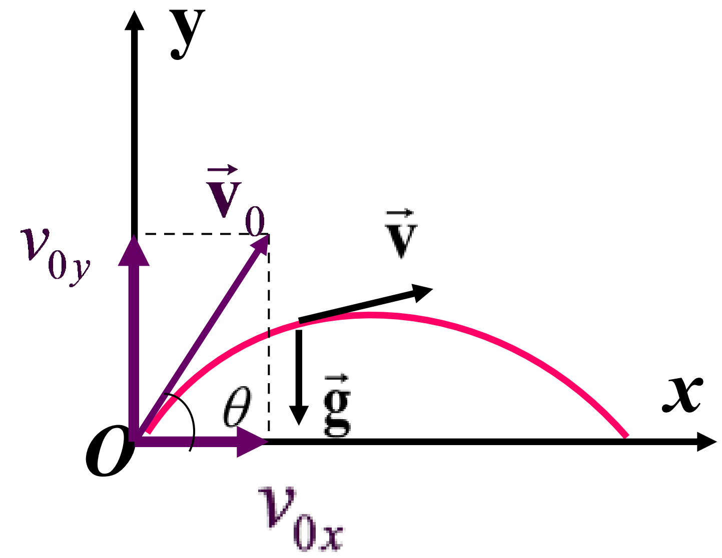
设抛出时刻t=0的速率为v_0，抛射角为θ，

则初速度分量分别为：

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta,$$

$$v_{0y} = v_0 \sin\theta$$

而加速度恒定 $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{g}} = -g\vec{\mathbf{j}}$



故任意时刻的速度为：

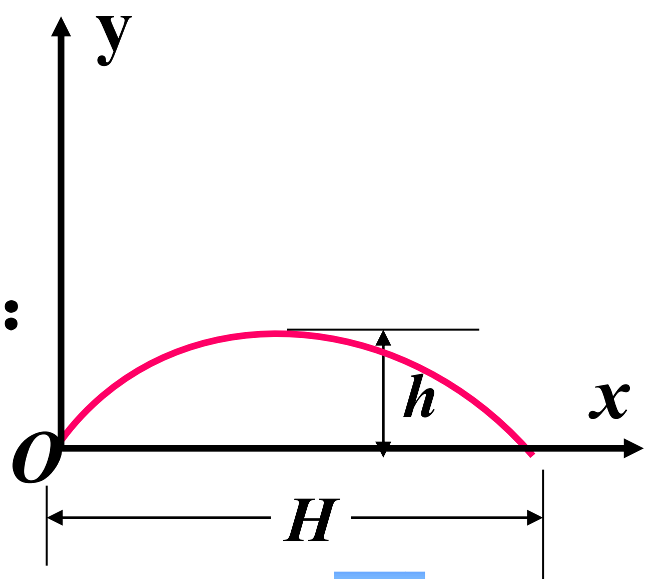
$$\vec{\mathbf{v}} = (v_0 \cos\theta)\vec{\mathbf{i}} + (v_0 \sin\theta - gt)\vec{\mathbf{j}}$$

将上式积分，得到运动方程的矢量形式为

$$\vec{\mathbf{r}} = (v_0 t \cos\theta)\vec{\mathbf{i}} + (v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2)\vec{\mathbf{j}}$$

消去此方程中的时间参数*t*，得到抛体运动的轨迹方程为

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\theta - \frac{1}{2}\frac{gx^2}{v_0^2\cos^2\theta}$$



y = 0 得射程：

$$H = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

求极值得最大射高：

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

由方程 $\vec{r} = (v_0 t\cos\theta)\vec{\mathbf{i}} + (v_0 t\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2)\vec{\mathbf{j}}$

抛体运动可看作是由水平方向的匀速直线运动与竖直方向的匀变速直线运动叠加而成。

思考：

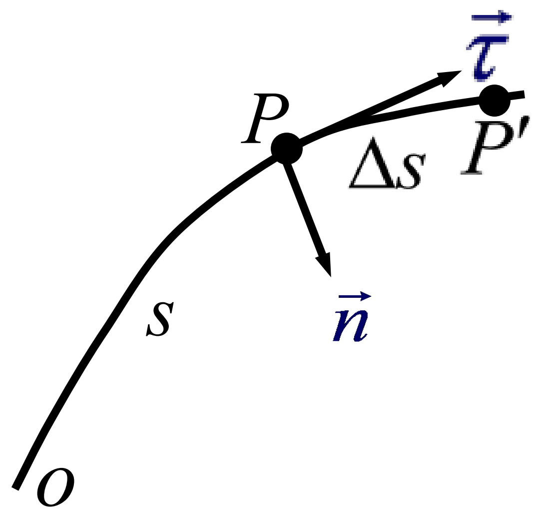
猎人瞄准树上的猴子射击，猴子一见火光就跳下自由下落），能避开子弹吗？

三、曲线运动的描述

（一） 曲线运动的自然坐标描述

➢物理量

（1） 位置：在轨道上取一固定点O，用质点距离O的路程长度 s，可惟一确定质点的位置。 位置 s有正负之分。



（2）位置变化： Δs

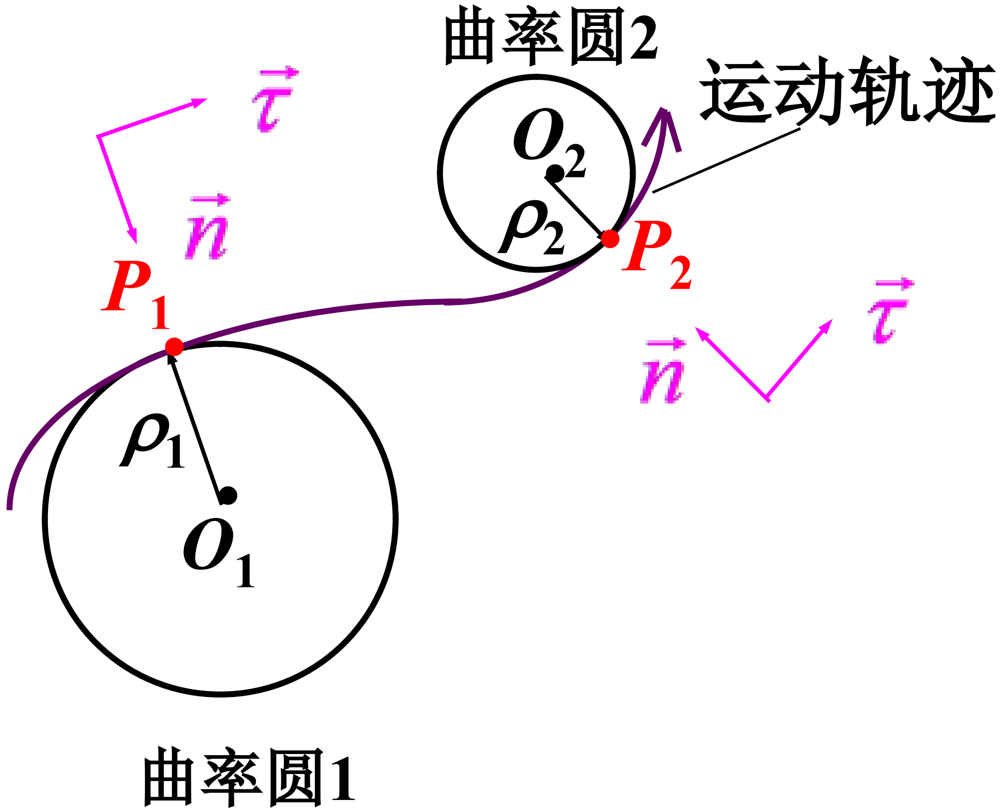
（3）速度： 沿切线方向

因为 $|\vec{v}| = \left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right| = \dfrac{ds}{dt}$

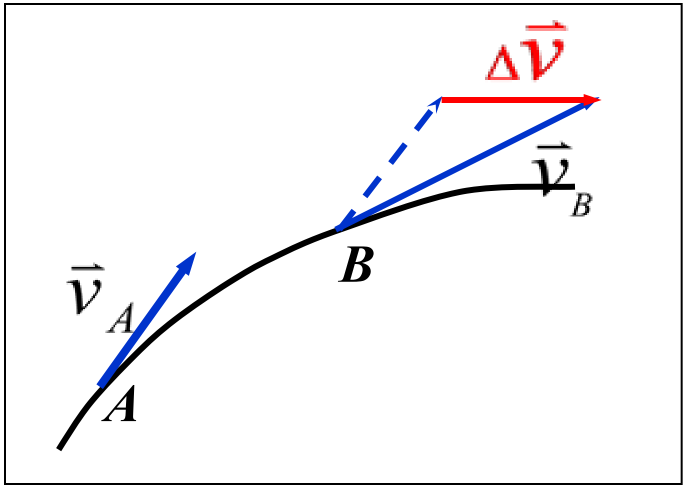
所以 $\vec{v} = |\vec{v}|\vec{\tau} = \dfrac{ds}{dt}\vec{\tau}$

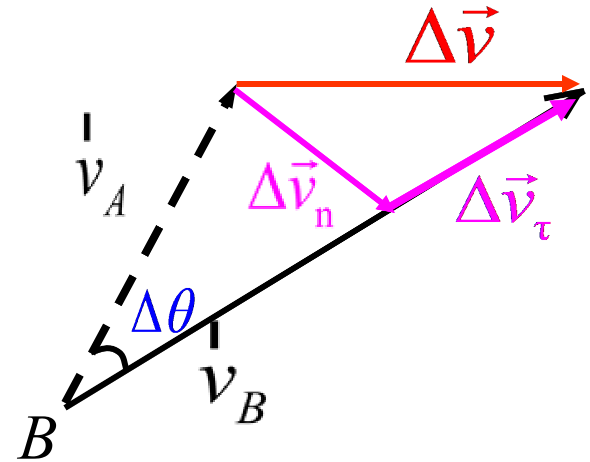
自然坐标系:在曲线上的各点固结一系列由当地的切线和法线所组成的坐标系

一个任意的平面曲线运动，可以视为由一系列小段圆周运动所组成。



(4) 加速度：





速度的改变为：$\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_\tau + \Delta\vec{v}_n$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{v}_\tau}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t}$$

切向加速度

$$= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

法向加速度

ρ —曲率半径

切向加速度： $\vec{a}_{\tau} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}$

描述速度大小的改变，不影响速度的方向

法向加速度： $\vec{a}_{\mathrm{n}} = \dfrac{v^2}{\rho}\vec{n}$

描述速度方向的改变，不影响速度的大小

$$\vec{a} = a_{\tau}\vec{\tau} + a_{\mathrm{n}}\vec{n} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

(1) $a_{\tau} = 0$ 匀速运动； (2) $a_{\tau} \neq 0$ 变速运动

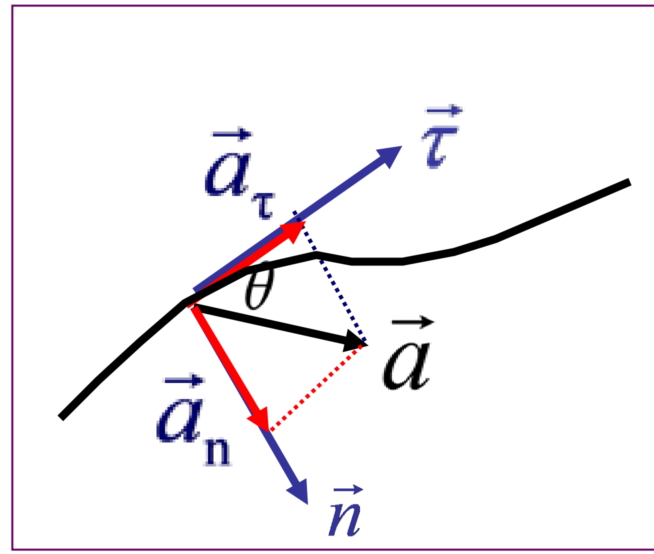
(3) $a_{\mathrm{n}} = 0$ 直线运动； (4) $a_{\mathrm{n}} \neq 0$ 曲线运动

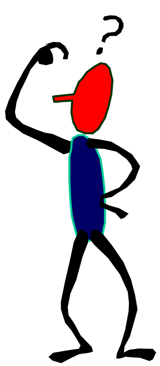
$$\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_\mathrm{n} \vec{n} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

大小：$|\vec{a}| = \sqrt{a_\tau^{\ 2} + a_\mathrm{n}^{\ 2}}$

方向：$\theta = \arctan \dfrac{a_\mathrm{n}}{a_\tau}$

$\vec{a}$与$\vec{a}_\tau$的夹角





$$\left|\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad ?$$

$|\vec{a}|$ $\qquad$ $|\vec{a}_\tau|$

例　已知抛体的初速度，求它在轨道最高点的曲率半径。

解：最高点只有水平速度，且此时重力加速度正沿轨迹法线，

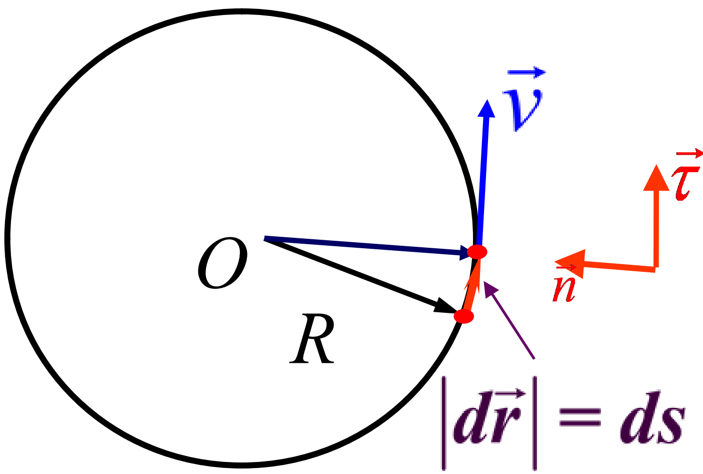
由 $a_n = \dfrac{\upsilon^2}{\rho} = g \rightarrow$ $\rho = \dfrac{(\upsilon_0 \cos\theta)^2}{g}$

（二）圆周运动

1. 圆周运动的线量描述　　自然坐标系中

（1）元位移　$d\vec{r} = ds\vec{\tau}$

（2）速度　$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{ds}{dt}\vec{\tau} = v\vec{\tau}$



（3）加速度

$$\vec{a} = \underbrace{\frac{dv}{dt}\vec{\tau}}_{} + \underbrace{\frac{v^2}{R}\vec{n}}_{}$$

$a_\tau = \dfrac{d^2 s}{dt^2}$　切向加速度

$a_n = \dfrac{v^2}{R}$　法向加速度或向心加速度

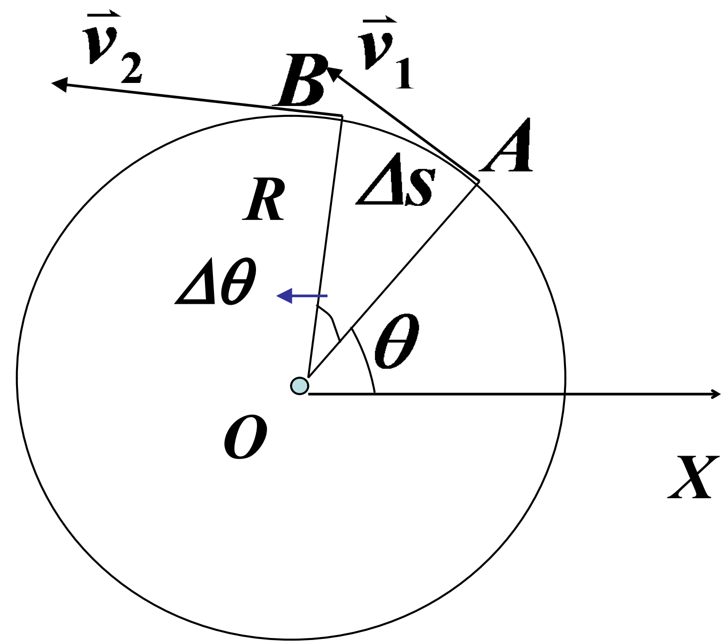
匀速圆周运动 $v = c, a_\tau = 0$　$\vec{a} = \dfrac{v^2}{R}\vec{n}$

2. 圆周运动的角量描述

(1) 角位置和角位移

$t \quad A \quad \theta \longrightarrow$ 角位置

$t+\Delta t \quad B \quad \theta+\Delta\theta \longrightarrow$ 角位移



沿逆时针转动，角位移取正值

沿顺时针转动，角位移取负值

（2）角速度

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

单位：rad/s

(3)角加速度

$$\beta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

单位：rad/s^2

(4)用角量表示的运动方程 $\theta=\theta(t)$

匀速圆周运动　　ω 是恒量

$$\theta=\theta_0+\omega t$$

匀变速圆周运动　　β 是恒量

$$\theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\beta t^2$$

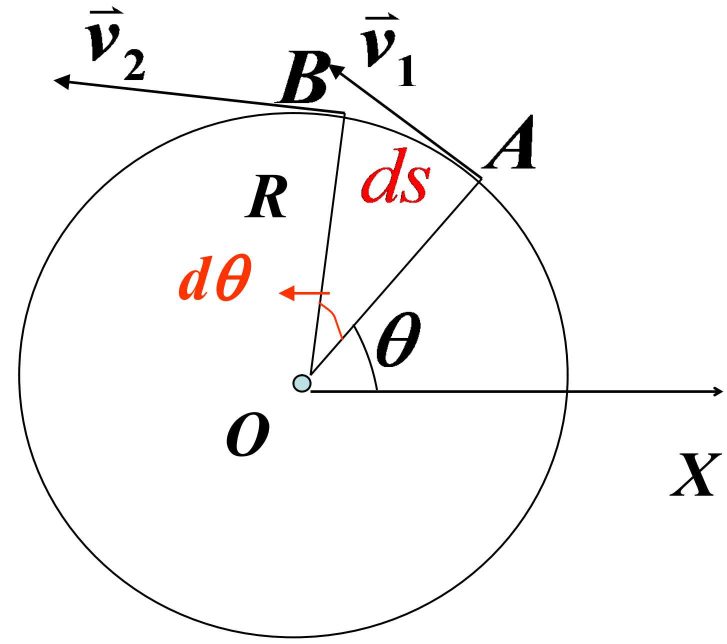
$$\omega=\omega_0+\beta t$$

$$\omega^2-\omega_0^2=2\beta(\theta-\theta_0)$$

一般圆周运动

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta=\int_0^t \omega dt \longrightarrow \theta=\theta_0+\int_0^t \omega dt$$

3. 角量与线量的关系



线量 ⟶ 速度、加速度

角量 ⟶ 角速度、角加速度

$$ds = Rd\theta$$

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega \\ a_\tau &= \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\beta \\ a_n &= \frac{v^2}{R} = R\omega^2 \end{aligned}\right\}\text{角量与线量关系式}$$

例1 某发动机工作时，主轴边缘一点做圆周运动，方程为 $\theta = t^3 + 4t + 3 \ \ (\mathrm{SI})$

(1) $t = 2\mathrm{s}$时，该点的角速度和角加速度为多大？

(2) 若主轴直径$D = 40\ \mathrm{cm}$，求 $t = 1\ \mathrm{s}$ 时, 该点的速度和加速度

解: (1)由运动方程得边缘一点的角速度和角加速度

$$\theta = t^3 + 4t + 3 \ \ (\mathrm{SI})$$

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 3t^2 + 4 \quad \beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 6t$$

$$t = 2\ \mathrm{s}: \ \omega = 3\times 2^2 + 4 = 16\ \ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

$$\beta = 6\times 2 = 12\ \ \mathrm{rad\cdot s^{-2}}$$

(2) 由角量和线量的关系，得边缘一点的速度、切向加速度和法向加速度

$$v = r\omega = \frac{1}{2}D\omega = \frac{1}{2}\left(3t^2+4\right)\times 0.4 = 0.2\left(3t^2+4\right)$$

$$a_\tau = r\beta = 0.2\times 6t = 1.2t$$

$$a_n = r\omega^2 = 0.2\times\left(3t^2+4\right)^2$$

$t = 1\mathrm{s}$时，$v = 0.2(3+4) = 1.4(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$

$$a_\tau = 1.2(\mathrm{m\cdot s^{-2}})$$

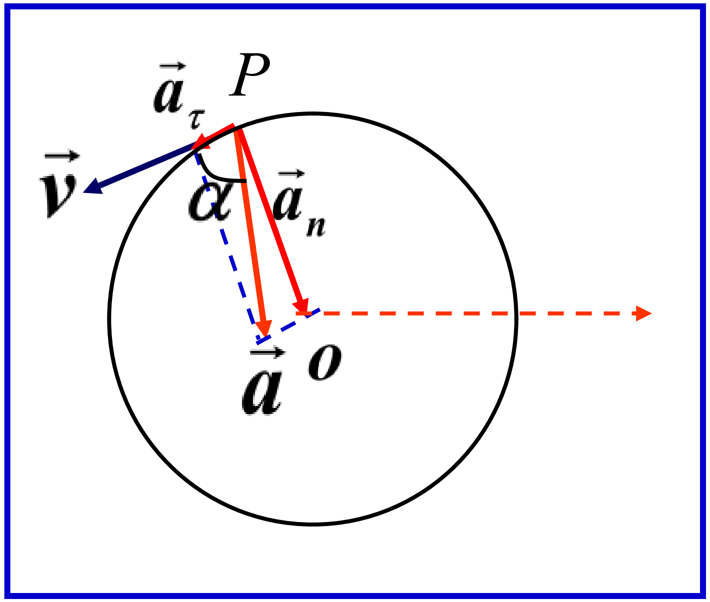
$$a_n = \left(3+4\right)^2\times 0.2 = 9.8(\mathrm{m\cdot s^{-2}})$$

作图表示t=1s其位置、速度、加速度

$$\theta = t^3 + 4t + 3$$

$t = 1$时

$$\theta_1 = 8\text{rad} \approx 456^\circ$$



此时总加速度的大小为

$$a = \sqrt{a_n^{\ 2} + a_\tau^{\ 2}} = \sqrt{1.2^2 + 9.8^2} \approx 9.87$$

$\vec{a}$与$\vec{v}$ 的夹角为

$$\theta = \arctan\frac{a_n}{a_\tau} = \arctan\frac{9.8}{1.2} \approx 83.0^\circ$$

例2. 一质点沿半径为R的圆周运动，路程与时间的关系为 $s = v_0 t - \frac{1}{2} b t^2 \ \text{(SI)}$

求：(1) 任意时刻t，质点加速度的大小和方向。

(2) 什么时刻质点加速度的大小等于b，这时质点已转了几圈？

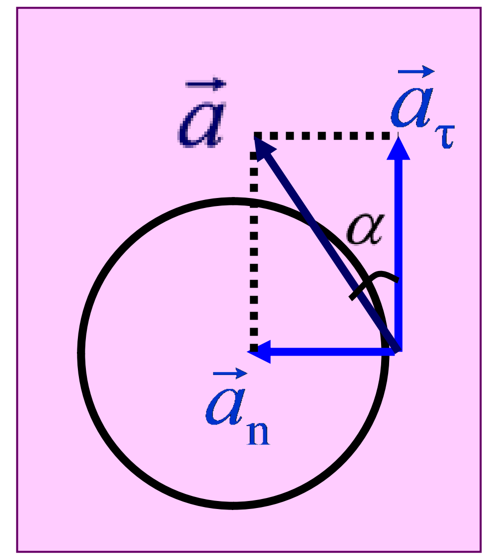
解： 质点的速率 $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v_0 - bt$

(1)任意时刻 t，$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(v_0 - bt)^2}{R}$ ，$a_\tau = \frac{dv}{dt} = -b$

加速度的大小为

$$a=\sqrt{a_{\mathrm{n}}{}^{2}+a_{\tau}^{2}}=\sqrt{\frac{(v_0-bt)^4}{R^2}+(-b)^2}=\frac{1}{R}\sqrt{(v_0-bt)^4+b^2R^2}$$

$\vec{a}$ 与切向的夹角为



$$\alpha=\arctan\frac{a_n}{a_\tau}=\arctan\frac{(v_0-bt)^2}{(-Rb)}$$

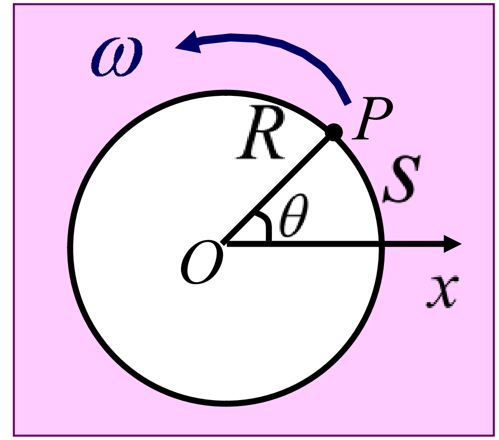
(2) 令加速度 $a=\dfrac{1}{R}\sqrt{(v_0-bt)^2+b^2R^2}=b,$

解得时间 $t=\dfrac{v_0}{b}$

用角量表示的运动方程为

$$\theta=\frac{s}{R}=\frac{v_0t}{R}-\frac{1}{2R}bt^2$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v_0}{R} - \frac{bt}{R}$$



令 $\omega = 0$，解得 $t = \dfrac{v_0}{b}$，

可见，$t = \dfrac{v_0}{b}$时质点还没有反向转动。将$t = \dfrac{v_0}{b}$代入运动方程，

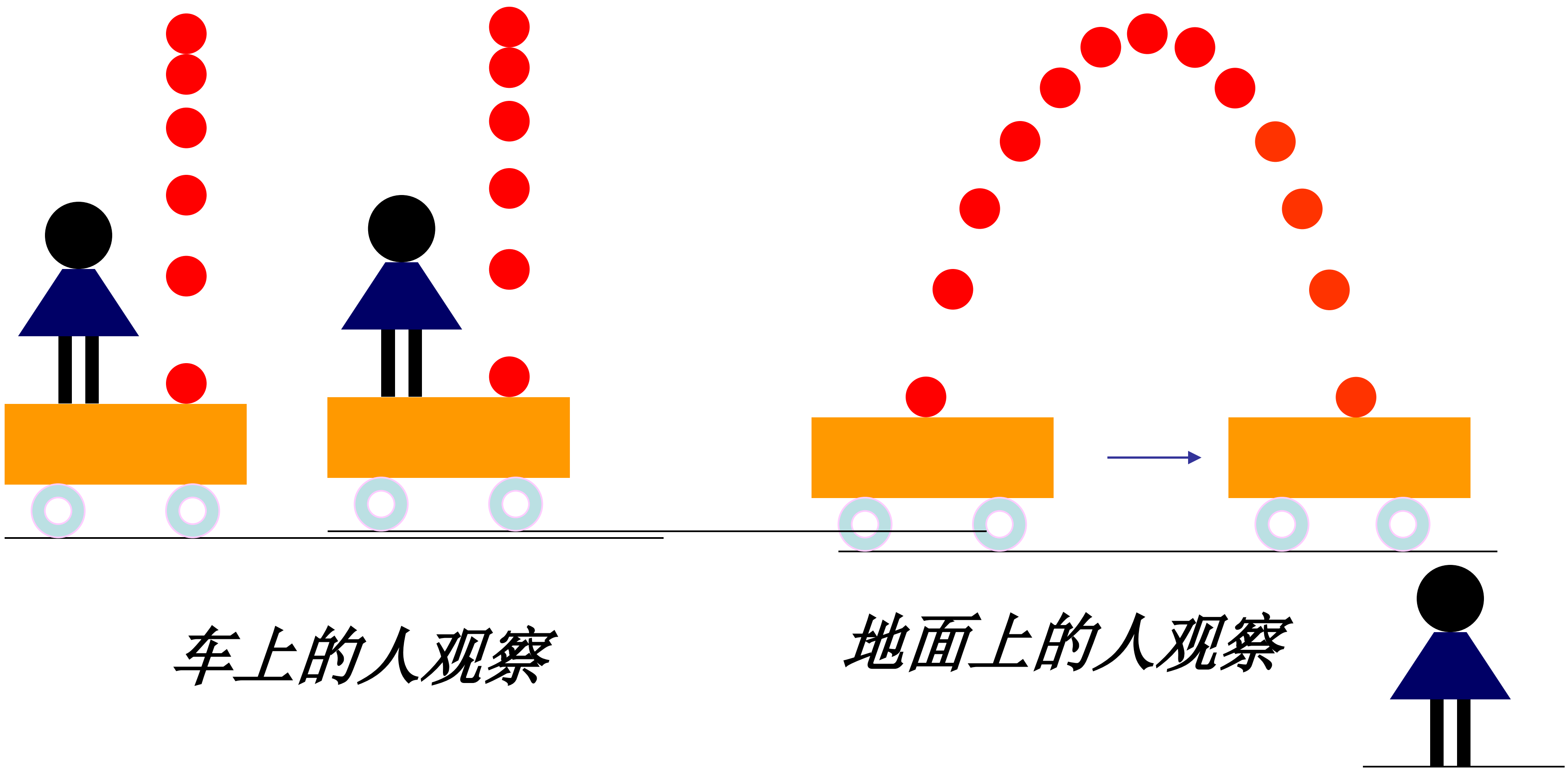
可得：

$$\theta = \frac{v_0}{R}\frac{v_0}{b} - \frac{b}{2R}\left(\frac{v_0}{b}\right)^2 = \frac{v_0^{\ 2}}{2Rb}$$

转的圈数为 $$n = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{v_0^{\ 2}}{4\pi Rb}$$

§1-4　相对运动

一、运动描述具有相对性

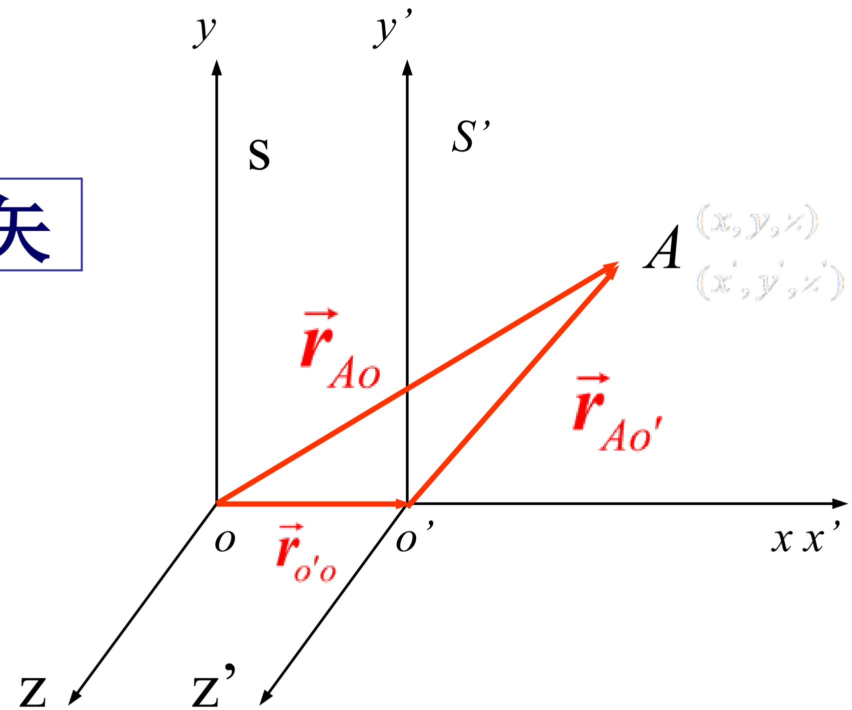


二、伽利略变换

1、位矢变换关系

$$\vec{r}_{Ao} = \vec{r}_{Ao'} + \vec{r}_{o'o}$$

绝对位矢　　相对位矢　　牵连位矢



位移变换关系

$$\Delta\vec{r}_{Ao} = \Delta\vec{r}_{Ao'} + \Delta\vec{r}_{o'o}$$

2、速度变换关系

将式得 $\vec{r}_{Ao} = \vec{r}_{Ao'} + \vec{r}_{o'o}$ 对 求导数

$$\underline{\vec{v}}_{Ao} = \underline{\vec{v}}_{Ao'} + \underline{\vec{v}}_{o'o}$$

绝对速度　　相对速度　　牵连速度

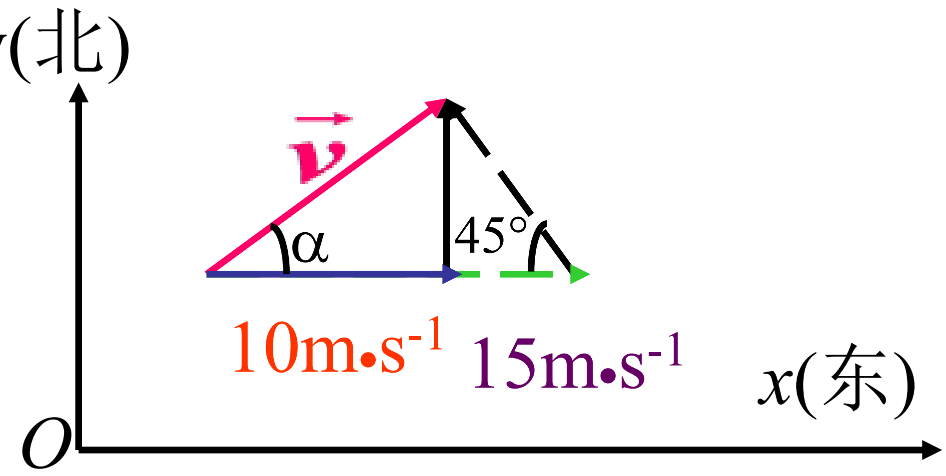
3、加速度的变换关系

$$\underline{\vec{a}}_{Ao} = \underline{\vec{a}}_{Ao'} + \underline{\vec{a}}_{o'o}$$

绝对加速度　　相对加速度　　牵连加速度

例1.某人骑摩托车向东前进，其速率为$10\mathrm{m \cdot s^{-1}}$时觉得有南风，当其速率为$15\mathrm{m \cdot s^{-1}}$时，又觉得有东南风，试求风速度。

解： 取风为研究对象，骑车人和地面作为两个相对运动的参考系。



根据速度变换公式得到：

$$\vec{v} = \vec{v}_{风} = \vec{v}^{1}_{风人} + \vec{v}^{1}_{人地}$$

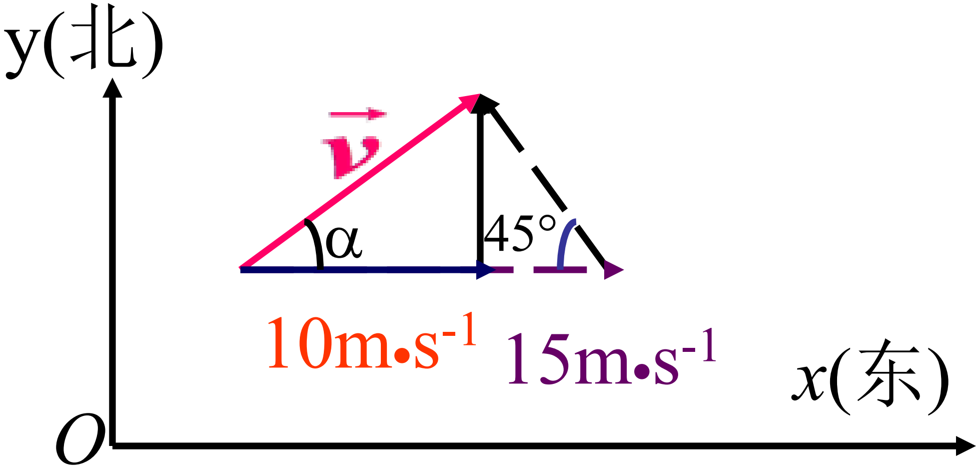
$$\vec{v} = \vec{v}_{风} = \vec{v}^{2}_{风人} + \vec{v}^{2}_{人地}$$

由图中的几何关系，知：

$$v_x = v^1_{风人} = 10(m/s)$$

$$v_y = v^2_{人地} - v^1_{地}$$

$$= 15 - 10 = 5(m/s)$$



风速的大小：

$$v = \sqrt{10^2 + 5^2}$$

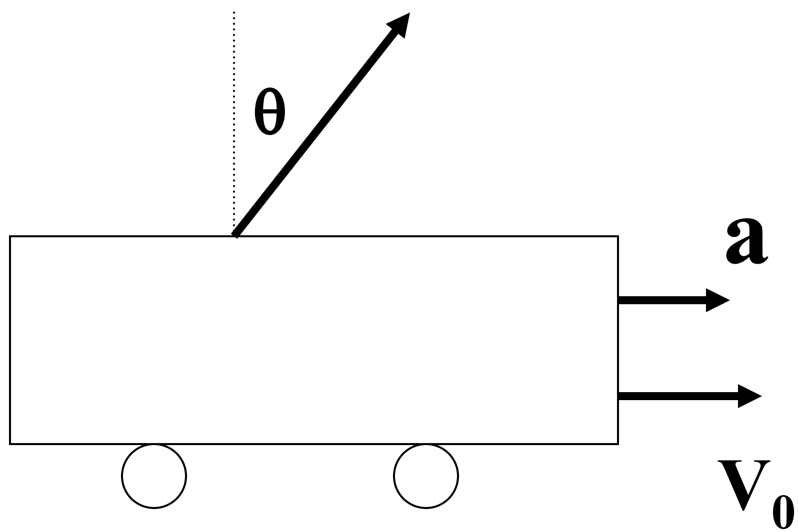
$$= 11.2(m/s)$$

风速的方向：

$$\alpha = \arctan\frac{5}{10} = 26^\circ 34'$$

为东偏北26°34'

例2*. 一男孩乘坐一铁路平板车，在平直铁路上匀加速行驶，其加速度为a，他沿车前进的斜上方抛出一球，设抛球时对车的加速度的影响可以忽略，如果使他不必移动他在车中的位置就能接住球，则抛出的方向与竖直方向的夹角应为多大？



解：抛出后车的位移：

$$\Delta x_1 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

球的位移：

$$\Delta x_2 = (v_0 + v_0' \sin\theta) t$$

$$\Delta y_2 = (v_0' \cos\theta) t - \frac{1}{2} g t^2$$

小孩接住球的条件为： $\Delta x_1 = \Delta x_2$; $\Delta y = 0$

小孩接住球的条件为： $\Delta x_1=\Delta x_2$；$\Delta y=0$

$$\therefore \frac{1}{2}at^2 = v_0'(\sin\theta)t$$

$$\frac{1}{2}gt^2 = v_0'(\cos\theta)t$$

两式相比得：

$$\frac{a}{g} = \tan\theta \qquad \theta = \arctan\frac{a}{g}$$

总结:

★熟悉运动叠加原理及在抛体运动中的应用。

★掌握平面曲线运动的自然坐标描述方法，能够应用切向加速度和法向加速度分析问题。

★掌握圆周运动的线量描述和角量描述，能够熟练应用相应概念解决问题。

★理解相对运动的描述，能分析有关问题。

第一章结束