

《概率论与数理统计(A)》随机变量部分测验

一、离散型随机变量(第 1, 2 小题必做, 第 3, 4 小题可任选其一)

1. 设 X 与 Y 的联合概率分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2
1	0.1	0.2	0
2	0.3	0.05	a
3	0.15	0	0.1

(1) 求 a 的值; (2) 求 X 与 Y 的边缘分布律, 并判断 X 与 Y 是否相互独立;

(3) 求 $2X+3Y$ 的分布律.

2. 一整数 X 随机地在 1,2,3,4 四个数中取一个值, 另一整数 Y 随机地在 $1 \sim X$ 中取一个值, 写出 (X, Y) 的联合分布律、 $X+Y$ 的分布律和 EX .

3. 设 $R.V. \xi, \eta$ 独立同分布, 分布律均为 $P\{\xi=i\}=1/3, i=1,2,3$. 设 $X=\max\{\xi, \eta\}, Y=\min\{\xi, \eta\}$ 求 (X, Y) 的联合分布律 (给出分析过程).

4. 已知 X, Y 以及 XY 的分布律如下表, 求 (X, Y) 的联合分布律 (给出分析过程).

X	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Y	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

XY	0	1	2	4
P	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{12}$

二、连续型随机变量

1. 设 $R.V. X$ 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} Cx^3, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 求(1)常数 C ; (2)分布函数 $F(x)$; (3) $E(X)$.

2. 设 $R.V. X$ 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} \frac{A}{\sqrt{1-x^2}} & |x| < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$, 求(1)系数 A , (2)分布函数 $F(x)$, (3) $D(X)$

3. 设 $R.V. X \sim U[-2, 2]$, 求 $Y=X^2$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

4. 设二维 $R.V. (X, Y)$ 的联合概率密度函数为 $f(x, y)=\begin{cases} a(x+y), & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

求 (1) 常数 a ; (2) X, Y 的边缘密度函数; (3) $E(XY)$;

三、填空题

1. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 独立且同服从 $N(0,1)$, $Y = \sum_{i=1}^n X_i^2$, 则 $D(Y) = \underline{\hspace{2cm}}$
2. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 独立, 且都服从 $B(4,0.5)$, 随机变量 $T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$, 则 $ET = \underline{\hspace{2cm}}$
3. 设随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立, $Y = X_1 - 2X_2 + 3X_3 - 1$ 且 $X_1 \sim U(0,6)$, $X_2 \sim N(1,3)$, $X_3 \sim \pi(3)$, 则 $EY = \underline{\hspace{2cm}}$, $DY = \underline{\hspace{2cm}}$
4. 随机变量 X 和 Y 独立, 且方差分别为 4 和 2, 则随机变量 $D(3X - 2Y) = \underline{\hspace{2cm}}$
5. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$, 则 $Y = X^2$ 的概率密度 $f_Y(y) = \underline{\hspace{2cm}}$
6. 设 X 与 Y 相互独立, 且 $X \sim \pi(1)$, $Y \sim \pi(2)$, 则 $Z = X + Y$ 的密度函数 $f_Z(z) = \underline{\hspace{2cm}}$

四、附加题 (任选做)

1. 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y = aX + b$ ($a > 0$), 则 $\rho_{XY} = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 设随机变量 X 的可能取值为: $-2, 0, 1$, 且有 $E(X) = 0.5$, $P\{X = 0\} = 0.2$ 则 $P\{X = 1\} = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. 设随机变量 X, Y 有相同的分布律如下, 并且 $P(XY = 0) = 1$, 则 $P(X \neq Y) = \underline{\hspace{2cm}}$

X		0	1
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

4. (10 分) 设事件 A, B 满足 $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B|A) = P(A|B) = \frac{1}{2}$,

令 $X = \begin{cases} 1, & A \text{ 发生} \\ 0, & A \text{ 不发生} \end{cases}$, $Y = \begin{cases} 1, & B \text{ 发生} \\ 0, & B \text{ 不发生} \end{cases}$,

求(1) (X, Y) 的分布律; (2) X, Y 是否相互独立? 为什么? (3) 相关系数 ρ_{XY} .

5. 设二维 $R.V. (X, Y)$ 的联合概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} e^{-x-y}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

(1) 求 X, Y 的边缘概率密度函数, 并判断 X 与 Y 是否相互独立; (2) 求 EX, EY