离散数学 II
Discrete Mathematics II

封筠

fengjun@stdu.edu.cn

20-10

课程回顾

关系的性质：自反性、反自反性、对称性、反对称性、传递性（定义、集合表达式、关系矩阵、关系图特点）

复合关系：复合关系定义、关系的n次幂、复合关系矩阵、复合关系的性质

逆关系：逆关系定义、定理

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
集合表达式	$I_A \subseteq R$	$I_A \cap R = \varphi$	$R = R^c$	$R \cap R^c \subseteq I_A$	$R \cdot R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是1	主对角线元素全是0	矩阵是对称矩阵	若 $r_{ij}=1$，且 $i \neq j$，则 $r_{ji}=0$ 即：除对角线元素外对称元素不能同时为1	对 M^2 中1所在位置，M中相应的位置都是1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	如果两个顶点之间有边，一定是一对方向相反的边(无单边)	如果两点之间有边，一定是一条有向边(无双向边)	如果顶点 x_i 到 x_j 有边，x_j 到 x_k 有边，则从 x_i 到 x_k 也有边

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
$R \cap S$	√	√	√	√	√
$R \cup S$	√	√	√	×	×
$R - S$	×	√	√	√	×
$R \circ S$	√	×	×	×	×
R^c	√	√	√	√	√

第三章 集合与关系第4讲

3—8 关系的闭包运算

3—9 集合的划分和覆盖

3-8 关系的闭包

可对给定的关系用扩充一些序偶的办法得到具有某些特殊性质的新关系，即闭包运算。

要求：

掌握关系的闭包运算，要求会求关系的自反(对称、传递)闭包。

现在来讨论另一种重要关系——闭包. 所谓闭包是指，对于给定的关系R和一种性质P, 则把包含R并且满足性质P的最小关系称为R对于P的闭包, 记为P(R). 若P是自反的, 则称R的自反闭包, 记为r(R), 若P是对称的，则称R的对称闭包, 记为s(R); 若P是传递的, 则称R的传递闭包,记为t(R).

也可形式地给出下面的定义和定理.

一、关系的闭包定义

定义3-8.1：设R是X上的二元关系，如果另外有一个关系R'满足：

(1)R'是自反的(对称的，传递的)；

(2)$R' \supseteq R$；

(3)(最小性) 对于任何自反的(对称的，传递的)关系R''，如果有$R'' \supseteq R$，就有$R'' \supseteq R'$。则称关系R'为R的自反(对称，传递)闭包。记作r(R)，(s(R)，t(R))

例：设集合X={x，y，z}，X上的关系

R={<x，x>，<x，y>，<y，z>}，则

自反闭包

r(R)={<x，x>，<x，y>，<y，z>，<y，y>，<z，z>}

对称闭包

s(R)={<x，x>，<x，y>，<y，z>，<y，x>，<z，y>}

传递闭包

t(R)={<x，x>，<x，y>，<y，z>，<x，z>}

由闭包的定义可以知道，构造关系**R**的闭包方法就是向**R**中加入必要的有序偶，使其具有所希望的性质。下面定理体现了这一点。

二、关系的性质与闭包的联系

1、定理3-8.1：设R是X上的二元关系，则

(1)R是自反的，当且仅当r(R)=R

(2)R是对称的，当且仅当s(R)=R

(3)R是传递的，当且仅当t(R)=R

证明 只证明①

①必要性: 令R为自反.

由于$R \subseteq R$, 任何包含R的自反关系 T, 有 $R \subseteq T$, 可见R满足自反闭包定义, 即$r(R) = R$.

充分性: 由自反闭包定义R是自反的.

三、关系闭包的求解方法

1、集合表示形式下关系闭包的求解方法

下面再给出关于闭包的四个构造性定理.（定理3-8.2 ~定理3-8.5 ）这些定理提供了一种集合表示形式下关系闭包的求解方法。

（1）定理3-8.2：设R是集合X上的二元关系，则$r(R)=R\cup I_x$

证明：$R\subseteq R\cup I_x$，$R\cup I_x$是自反的，定义的前两条满足了。设R''满足$R\subseteq R''$，R''是自反的，

$\forall <x, y>\in R\cup I_x$，则$<x, y>\in R$或$<x, y>\in I_x$。如果$<x, y>\in R$则由$R\subseteq R''$，$<x, y>\in R''$。如果$<x, y>\in I_x$则必有$x=y$，即$<x, x>\in I_x$，由$R''$的自反性，则$<x, y>\in R''$，总之均有$<x, y>\in R''$，所以$R\cup I_X\subseteq R''$，满足定义第三条。得$r(R)=R\cup I_x$。□

对关系矩阵而言，$r(R)$的关系矩阵只要将M_R的对角元置1即可。

（2）**定理3-8.3**：设R是集合X上的二元关系，则$s(R)=R\cup R^c$。

证明：$R\subseteq R\cup R^c$满足定义第一条。

$\forall\langle x，y\rangle\in R\cup R^c\Leftrightarrow\langle x，y\rangle\in R\vee\langle x，y\rangle\in R^c\Leftrightarrow\langle y，x\rangle\in R^c\vee\langle y，x\rangle\in R\Leftrightarrow\langle y，x\rangle\in R\cup R^c$，所以$R\cup R^c$是对称的，满足定义的第二条。

如果$R\subseteq R''$，且R''是对称的，$\forall\langle x，y\rangle\in R\cup R^c$，则$\langle x，y\rangle\in R$或$\langle x，y\rangle\in R^c$，如$\langle x，y\rangle\in R$，由$R\subseteq R''$，则$\langle x，y\rangle\in R''$，如$\langle x，y\rangle\in R^c$则$\langle y，x\rangle\in R$则$\langle y，x\rangle\in R''$，又因$R''$对称，所以$\langle x，y\rangle\in R''$，所以$R\cup R^c\subseteq R''$，满足定义第三条。得$s(R)=R\cup R^c$。

（3）定理3-8.4：设R是集合X上的二元关系，则

$t(R)=\bigcup_{i=1}^{\infty}R^{(i)}=R\cup R^{(2)}\cup R^{(3)}\cup\ldots$

证明

首先证明 $\bigcup_{i=1}^{\infty}R\subseteq t(R)$. 用归纳法证明如下:

基础步: 根据传递闭包定义, $R\subseteq t(R)$;

归纳步: 假设n≥1时$R^{(n)}\subseteq t(R)$, 欲证$R^{(n+1)}\subseteq t(R)$令 $x,y\in \mathcal{X}$, 则:

$x\,R^{(n+1)}y\Leftrightarrow x\,R^{(n)}\circ Ry$

$\Leftrightarrow (\exists z)(xR^{(n)}z\wedge zRy)$

$\Rightarrow xR^{(n)}z\wedge zRy$

$\Rightarrow xt(R)z\wedge zt(R)y$

$\Leftrightarrow xt(R)y$

因此, $R^{(n+1)}\subseteq t(R)$. 于是, $\bigcup_{i=1}^{\infty}R^{(i)}\subseteq t(R)$.

次证$t(R) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R^{(i)}$, 由于包含 R的传递关系都包含$t(R)$，且$R \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R^{(i)}$, 因此只需证明$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^{(i)}$是传递即可. 令x, y, z $\in \mathscr{X}$, 则

$$x\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} R^{(i)}\right)y \wedge y\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} R^{(i)}\right)z \Rightarrow (\exists j)(xR^{(j)}y) \wedge (\exists k)(yR^{(k)}z)$$

$$\Rightarrow xR^{(j)}y \wedge yR^{(k)}z$$

$$\Rightarrow xR^{(j)}y \circ yR^{(k)}z$$

$$\Rightarrow xR^{(j+k)}z$$

$$\Rightarrow x\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} R^{(i)}\right)z$$

因此, $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^{(i)}$是传递的. 综上可知, $t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^{(i)}$.
将其记作R^{+}

例题1：设A={a，b，c}，R是A上的二元关系，且给定R={<a，b>，<b，c>，<c，a>}，求r(R)，s(R)，t(R)。

解：r(R)={<a，b>，<b，c>，<c，a>，<a，a>，<b，b>，<c，c>}

s(R)={<a，b>，<b，a>，<b，c>，<c，b>，<c，a>，<a，c>}

为了求t(R)，先写出

$$M_R=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$$

$$M_R^{(2)}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

$$M_R^{(3)}=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

继续计算求解，会得出$R^{(4)}=R=R^{(3n+1)}$, $R^{(5)}=R^{(2)}=R^{(3n+2)}$, $R^{(6)}=R^{(3)}=R^{(3n+3)}$

所以$t(R)= R\cup R^{(2)}\cup R^{(3)}$

（4）定理3-8.5：设X含有n个元素的集合，R是X上的二元关系，则存在一个正整数k≤n，使得

$$t(R)=R\cup R^{(2)}\cup R^{(3)}\cup\ldots\cup R^{(K)}$$

例：A={a，b，c，d}，R={<a，b>，<a，c>，<b，c>，<b，d>}，求t(R)。

解：

$R^{(2)}$={<a，c>，<a，d>}，

$R^{(3)}=R^{(4)}=\varnothing$

所以$t(R)=R\cup R^{(2)}\cup R^{(3)}\cup R^{(4)}$

={<a，b>，<a，c>，<b，c>，<b，d>，<a，d>}

2、用关系矩阵表示时关系闭包的求解方法

1) $M_r = M + I$

2) $M_s = M + M'$

3) $M_t = M + M^2 + M^3 + \ldots + M^n$

其中**M**为**R**的关系矩阵，**I**是单位矩阵，**M'**是**M**的转置矩阵。

例如:设A={a,b,c,d},R={<a,b>, <b,a>, <b,c>, <c,d>, <d,b>},则

$$M_r = M+I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_s = M+M' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_t = M+M^2+M^3+M^4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Warshall算法(一种求传递闭包算法)

设R是n个元素集合A上的二元关系，

(1)A是R的相关矩阵；

(2)置i=1；

(3)对所有j，如果$a_{ji}=1$，则对k=1，2，…，n

$a_{jk}=a_{jk}+a_{ik}$（第i行与第j行逻辑相加，记于第j行）

(4)i=i+1；

(5)如果i≤n，则转到步骤(3)，否则停止。

Warshall算法

例如:设A={a,b,c,d},R={<a,b>, <b,a>, <b,c>, <c,d>, <d,b>}, 则

$$M_t = M+M^2+M^3+M^4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{i=1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{i=2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{i=3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{i=4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

具体书写过程见书P124，例题3

编程实践：C语言编写相应的程序段。

```
#define N 3
main()
{ int a[N][N]={{1,0,0},{0,1,0},{0,1,1}};
  int i,j,k,s;
  for(i=0;i<N;i++)
    for(j=0;j<N;j++)
      if (a[j][i]=1)
            for(k=0;k<N;k++)
            {   a[j][k] +=a[i][k];
                  if (a[j][k] >1) a[j][k] =1;
            }
}
```

Python?

3、关系图表示时关系闭包的求解方法

相应闭包求法为： 设**R, r(R), s(R), t(R)** 的关系图与**G**的顶点集相等，除了**G**的边以外依据下列方法添加新的边：

(1)r(R)在**R**的基础上添加自回路，使得每点均有自回路，最终得到的是G_r。

(2)s(R)在R中两结点间只有一条弧时，再添一条反向弧，使两结点间或是0条弧，或是两条弧，原来两点间没有弧不能添加，最终得到G_s 。

(3)t(R)在R中如结点x通过有向路能通到z，则添加一条从x到z的有向弧，其中包括如x能达到自身，则必须添加从x到x的自回路。具体说，考察G的每个顶点x_i, 找出从x_i出发的所有2步,3步,…,n步长的路径(n为G中的顶点数)。设路径的终点为x_{j1},x_{j2}, …,x_{jk}，如果有从x_i到x_{jl} (l=1,2, …,k)的边，就加上这条边，最终得到G_t 。

四、关系闭包的性质

1、设R，S是非空集合A上的关系，且R⊇S，

则

(1) $r(R) \supseteq r(S)$

(2) $s(R) \supseteq s(S)$

(3) $t(R) \supseteq t(S)$

证明：利用各种闭包定义即可

(1) 显然$r(R) \supseteq R$，又$R \supseteq S$，即 $r(R) \supseteq S$，

利用闭包定义中的最小性即可得$r(R) \supseteq r(S)$

（2），（3）类同

2、定理

①R为自反⇒s(R)和t(R)为自反

②R为对称⇒r(R)和t(R)是对称

③R为传递⇒r(R)是传递的

证明 只给出②的证明.

②因为r(R)=R∪I_x, 已知R为对称, 而$\mathscr{I}_x$显然也是对称的, 因此r(R)是对称的.

t(R)=R∪R^2∪R^3∪…, 用归纳法证明t(R)对称. 由于 R是对称的, 则对于x,y∈X, 可推出:

$xR^2y \Leftrightarrow x(R\circ R)y \Leftrightarrow (\exists z)(xRz \wedge zRy)$

$\Leftrightarrow (\exists z)(zRx \wedge yRz) \Leftrightarrow (\exists z)(yRz \wedge zRx)$

$\Leftrightarrow y(R\circ R)x$

- 因此R^2是对称的.
- 假设对于$n \geq 1$时, R^n是对称, 欲证R^{n+1}是对称. 令$x, y \in \mathcal{X}$, 则:

$xR^{n+1}y \Leftrightarrow x(R^n\circ R)y \Leftrightarrow (\exists z)(xR^nz \wedge zRy)$

$\Leftrightarrow (\exists z)(zR^nx \wedge yRz) \Leftrightarrow (\exists z)(yRz \wedge zR^nx)$

$\Leftrightarrow y(R\circ R^n)x \Leftrightarrow yR^{n+1}x$

- 故R^{n+1}是对称的, 于是$t(R)$是对称的.

R	自反的	对称的	传递的
r(R)	√	√	√
s(R)	√	√	×
t(R)	√	√	√

$A=\{1,2,3\}$,

$R=\{<1,3>\}$,

$s(R\ )=\{<1,3>,<3,1>\}$

3、定理3-8.6：若$R\subseteq A\times A$，则

①$rs(R)=sr(R)$

②$rt(R)=tr(R)$

③ $ts(R)\supseteq st(R)$

证明：设I_A为A上的恒等关系，

(1) $rs(R)=r(R\cup R^c)=I_A\cup R\cup R^c$

$= I_A\cup R\cup I_A\cup R^c = (I_A\cup R)\cup(I_A\cup R)^c$

$= r(R)\cup(r(R))^c = sr(R)$

证明参见课本P126-127

4、设R，S是非空集合A上的关系，则

(1) $r(R \cup S) = r(R) \cup r(S)$

(2) $s(R \cup S) = s(R) \cup s(S)$

(3) $t(R \cup S) \supseteq t(R) \cup t(S)$

证明：课后习题P127，7

3-9 集合的划分和覆盖

在集合的研究中，除了常常把两个集合相互比较之外，有时也要把一个集合分成若干子集加以讨论。

要求：

掌握集合的划分与覆盖的定义及区别、联系。

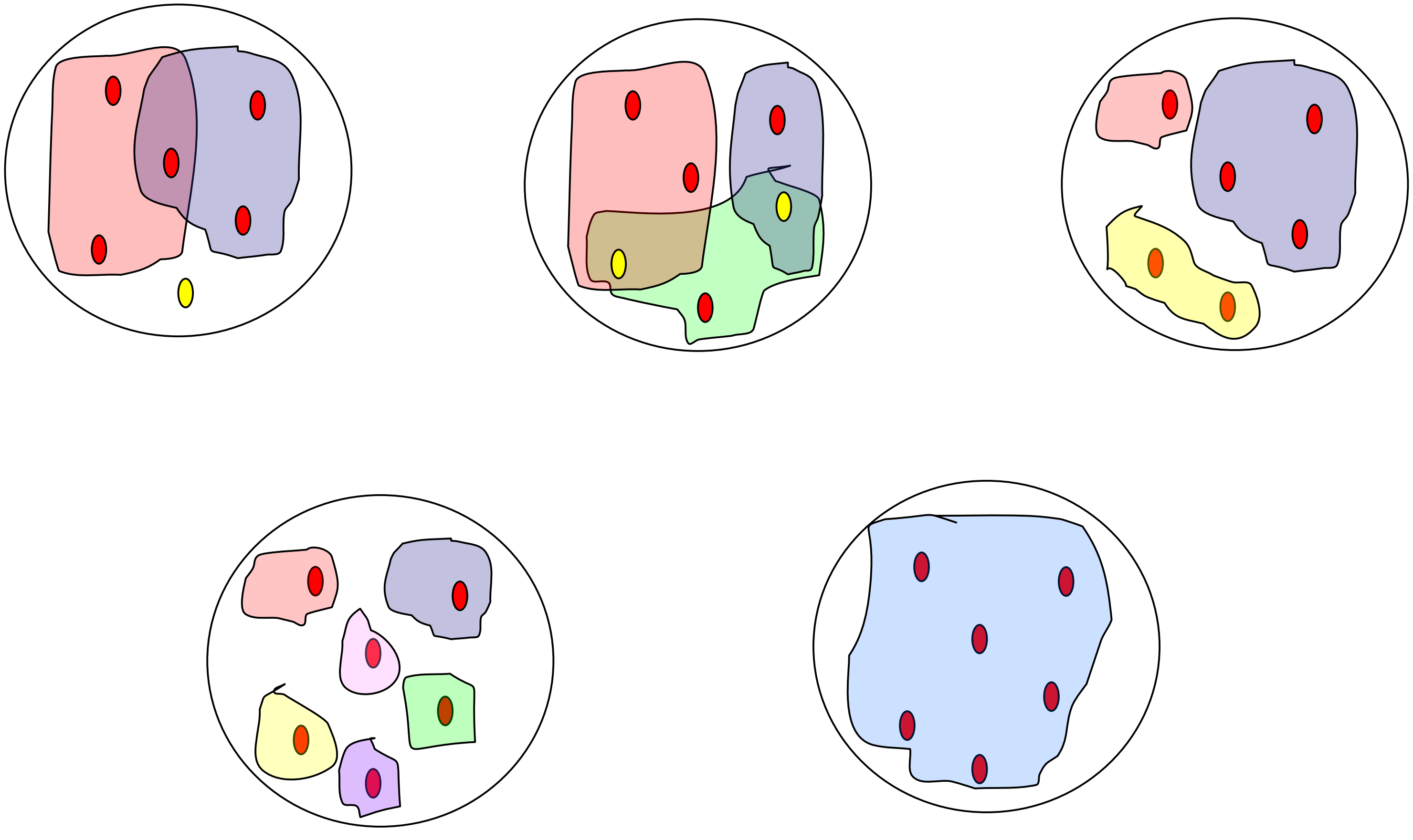
思考：

1、什么是覆盖？什么是划分？两者的区别？

2、什么是最大划分？什么是最小划分？

3、什么是交叉划分？交叉划分与原划分的关系？举例交叉划分

思考题： P130，1



一、集合的划分和覆盖

定义3-9.1：若把一个集合A分成若干个叫做分块的非空集合，使得A中每个元素至少属于一个分块，那么这些分块的全体构成的集合叫做A的一个覆盖。如果A中每个元素属于且仅属于一个分块，那么这些分块的全体构成的集合叫做A的一个划分(或分划)。

等价定义：

定义3-9.1’：令A为非空集合，$S=\{S_1, S_2, \cdots, S_m\}$，其中

① $S_i \neq \varnothing$，

② $S_i \subseteq A$，

③ $\bigcup_{i=1}^{m} S_i = A$，集合S称作集合A的覆盖。如果除以上条件外，另有$S_i \cap S_j = \varnothing$ $(i \neq j)$，则称S是A的划分(或分划)。

例如，A={a，b，c}，考虑下列子集：

S={{a，b}，{b，c}}，Q={{a}，{a，b}，{a，c}}

D={{a}，{b，c}}，G={{a，b，c}}

E={{a}，{b}，{c}}，F={{a}，{a，c}}

则：D、E、G、S、Q是A的覆盖

D、E、G是A的划分

F既不是划分也不是覆盖。

若是划分则必是覆盖，其逆不成立。

任何一个集合的最小划分，就是由这个集合的全部元素组成的一个分块的集合。上例中G是A的最小划分。

任何一个集合的最大划分，就是由每个元素构成一个单元素分块的集合。上例中E是A的最大划分。

二、交叉划分

定义3-9.2：若$\{A_1，A_2，\cdots，A_r\}$与$\{B_1，B_2，\cdots，B_s\}$是同一集合A的两种划分，则其中所有$A_i \cap B_j \neq \varnothing$组成的集合，成为原来两种划分的交叉划分。

例如，所有生物的集合X，可分割成$\{P，A\}$，其中P表示所有植物的集合，A表示所有动物的集合，又X也可分割成$\{E，F\}$，其中E表示史前生物，F表示史后生物，则其交叉划分为$Q=\{P \cap E，P \cap F，A \cap E，A \cap F\}$。

定理3-9.1：设{A_1，A_2，…，A_r}与{B_1，B_2，…，B_s}是同一集合X的两种划分，则其交叉划分亦是原集合的一种划分。

证明过程详见P129

定义3-9.3：给定X的任意两个划分$\{A_1, A_2, \cdots, A_r\}$与$\{B_1, B_2, \cdots, B_s\}$，若对每一个$A_j$均有$B_k$使$A_j \subseteq B_k$，则$\{A_1, A_2, \cdots, A_r\}$成为$\{B_1, B_2, \cdots, B_s\}$的加细。

定理3-9.2：任何两种划分的交… 是原来各划分的一种加细。

练习
130页(1)

证明：设$\{A_1, A_2, \cdots, A_r\}$与$\{B$ … $\}$的交叉划分为T，对T中任意元素$A_i \cap B_j$必有$A_i \cap B_j \subseteq A_i$，$A_i \cap B_j \subseteq B_j$，故T必是原划分的加细。

作业

127页(1)、(2)、(7)ab

130页(2)

The End