离散数学 II
Discrete Mathematics II

封筠

fengjun@stdu.edu.cn

20-10

课程回顾

有序n元组：序偶定义、序偶性质

笛卡尔积（直积）：定义、性质、举例

关系基本概念：两个等价定义、前域、值域、特殊的关系

关系的三种表示：序偶集合表示法、关系矩阵、关系图

第三章 集合与关系第3讲

3—6 关系的性质

3—7 复合关系和逆关系

3-6 关系的性质

在一个小的集合上可以定义很多个（ 2^{n^2} ）不同的关系，但真正有实际意义的只是其中很少的一部分，它们一般都是有着某些性质的关系。本节讨论集合X上的二元关系R的一些特殊性质。

要求：

掌握关系的五种性质（自反性、反自反性、对称性、反对称性、传递性），能够对关系性质进行正确判断。

一、自反性和反自反性

1、自反性（定义3-6.1）：设R是集合X上的二元关系，如果对于每一个$x \in X$，有$\langle x, x\rangle \in R$，则称R是**自反的**。

$$R在X上自反 \Leftrightarrow (\forall x)(x \in X \to \langle x, x\rangle \in R)$$

2、反自反性（定义3-6.4）：设R是集合X上的二元关系，如果对于每一个$x \in X$，有$\langle x, x\rangle \notin R$，则称R是**反自反的**。

$$R在X上反自反 \Leftrightarrow (\forall x)(x \in X \to \langle x, x\rangle \notin R)$$

例如，在实数集合中，”≤”是自反的，因为对于任意实数$x \leq x$成立。

平面上三角形的全等关系是自反的。

说明：全域关系E_X是自反的；

恒等关系I_X是自反的。

例：X={a，b，c}，R1={<a，a>，<b，b>，<c，c>，<a，b>，<c，a>}是自反的，

R2={<a，b>，<b，c>，<c，a>}是反自反的，

R3={<a，a>，<b，c>}不是自反的也不是反自反的。

注意：R不是自反的，未必一定是反自反的。

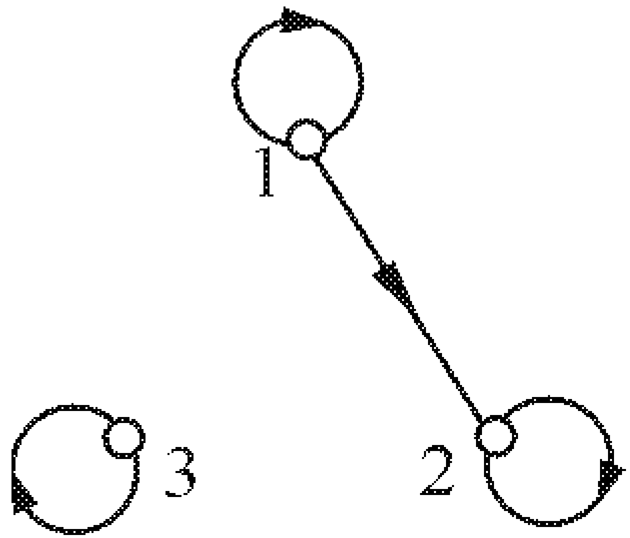
一个关系可能既不是自反的，也不是反自反的。

例1：设X={1,2,3}，X上的二元关系

$$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 1,2\rangle\}$$

R是自反的，它的关系矩阵，关系图如下：

$$M_R=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

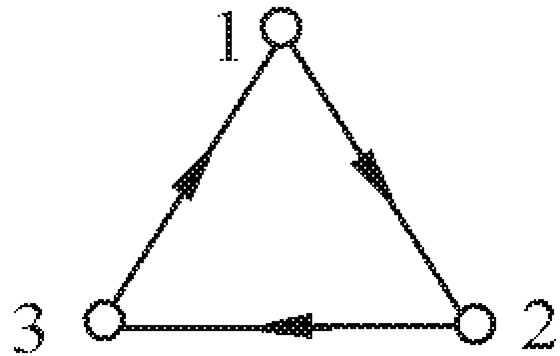


例2：设$X=\{1,2,3\}$，X上的二元关系

$$R=\{<1,2>,<2,3>,<3,1>\},$$

R是反自反的,它的关系图,关系矩阵如下所示:

$$M_R=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



3、关系矩阵的特点

自反关系的关系矩阵的对角元素均为1，反自反关系的关系矩阵的对角元素均为0。

4、关系图的特点

自反关系的关系图，每个结点均有自回路，而反自反关系的关系图，每个结点均没有自回路。

5、结论：

R是X上的二元关系，则：

(1)R是自反关系的充要条件是$I_X \subseteq R$。

(2)R是反自反关系的充要条件是$I_X \cap R = \varnothing$。

(3)如果$I_X \cap R \neq \varnothing$且$I_X \not\subseteq R$，则R既不是自反的，也不是反自反的。

(4)如果|X|=n，其中n个序偶为<x，x>，则X上的自反关系共有2^{n*n-n}个。

例,|X|=3，X上关系共有2^9个，而自反关系共有2^6个。

常见自反关系：全域关系、恒等关系、小于等于关系、大于等于关系、整除关系、包含关系等。

常见反自反关系：小于关系、大于关系、真包含关系等。

思考：最大（含有序偶最多）、最小（含有序偶最少）的自反/反自反关系分别是？设**A={1,2,3}**

例3：设$A=\{1,2,3\}$,R_1,R_2,R_3是A上的关系，

$$R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$$

$$R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 2,1\rangle\}$$

$$R_3=\{\langle 3,1\rangle,\langle 1,2\rangle\}$$

则R_1,R_2,R_3是否为A上的自反或反自反关系？

	自反性	反自反性
R_1	×	×
R_2	√	×
R_3	×	√

二、对称性和反对称性

1、对称性（定义3-6.2）：设R是集合X上的二元关系，如果对于每一个x，y∈X，每当<x，y>∈R，就有<y，x>∈R，则称R是对称的。

R在X上对称

$\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)(x\in X\wedge y\in X\wedge \langle x,y\rangle\in R\rightarrow \langle y,x\rangle\in R)$

2、反对称性（定义3-6.5）：设R是集合X上的二元关系，如果对于每一个x，y∈X，每当<x，y>∈R和<y，x>∈R必有x=y，则称R是反对称的。

R在X上反对称

$\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)(x\in X\wedge y\in X\wedge \langle x,y\rangle\in R\wedge \langle y,x\rangle\in R\rightarrow x=y)$

$$(\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,x\rangle\in R)\rightarrow(x=y)$$

$$\Leftrightarrow\neg(\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,x\rangle\in R)\vee(x=y)$$

$$\Leftrightarrow(\langle x,y\rangle\notin R\vee\langle y,x\rangle\notin R)\vee(x=y)$$

$$\Leftrightarrow(\langle x,y\rangle\notin R\vee(x=y))\vee\langle y,x\rangle\notin R$$

$$\Leftrightarrow\neg(\langle x,y\rangle\in R\wedge\neg(x=y))\vee\langle y,x\rangle\notin R$$

$$\Leftrightarrow(\langle x,y\rangle\in R\wedge(x\neq y))\rightarrow\langle y,x\rangle\notin R$$

由此，反对称的定义又可以等价地描述为：

$$(\forall x)(\forall y)(x\in X\wedge y\in X\wedge\langle x,y\rangle\in R\wedge(x\neq y)\rightarrow\langle y,x\rangle\notin R)$$

例如，平面上三角形的相似关系是对称的。

例：

R1={<1，1>，<2，3>，<3，2>}是对称的，

R2={<1，1>，<3，3>}是对称的也是反对称的，

R3={<2，2>，<2，3>，<3，2>，<3，1>}不是对称的也不是反对称的，

R4={<2，2>，<2，3>，<3，1>}是反对称的。

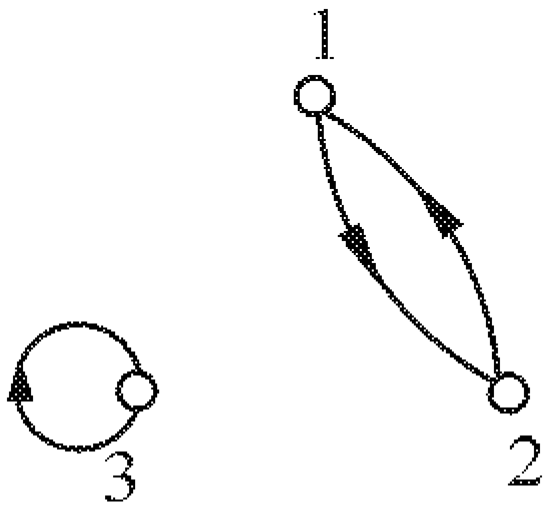
注意：存在关系既不是对称的，也不是反对称的。也存在关系既是对称的，也是反对称的。

例4：设X={1,2,3}，X上的二元关系

R={<1,2>,<2,1>,<3,3>}，

R是对称的。它的关系矩阵，关系图如下：

$$M_R=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

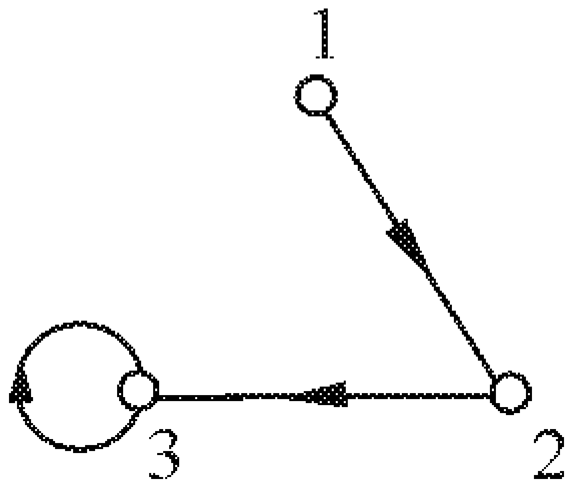


例5：设X={1,2,3}，X上的二元关系

R={<1,2>,<2,3>,<3,3>}

R是反对称的。它的关系图，关系矩阵如下：

$$M_R=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



3、关系矩阵和关系图的特点

对称关系的关系矩阵是对称矩阵，即对所有i，j，$r_{ij}=r_{ji}$，对称关系的关系图，任何两个不同的结点之间，或者有双向两条弧，或者没有弧。

反对称关系的关系矩阵，如果在非对角元上$r_{ij}=1$，则在其对称位置上$r_{ji}=0$，反对称关系的关系图，任何两个不同的结点之间至多有一条弧。

4、结论

R是X上的二元关系，则：

(1)R是对称关系的充要条件是$R=R^c$（逆关系）。

(2)R是反对称关系的充要条件是$R \cap R^c \subseteq I_X$。

(3)如果R既是对称，又是反对称的，则$R \subseteq I_X$。

常见对称关系：全域关系、恒等关系、
空关系φ。

反对称关系：恒等关系、空关系φ。

例6：设$A=\{1,2,3\}$，R_1,R_2,R_3,R_4是A上的关系，

$R_1=\{<1,2>,<2,1>\}$

$R_2=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<2,1>\}$

$R_3=\{<3,1>,<1,2>,<2,1>\}$

$R_4=\{<3,3>,<1,1>\}$

则R_1,R_2,R_3,R_4是否为A上的对称或反对称关系？

	对称性	反对称性
R_1	√	×
R_2	×	√
R_3	×	×
R_4	√	√

例题1：设$A=\{2,3,5,7\}$，定义A上的二元关系如下：$R=\{<x,y>|(x-y)/2是整数\}$

试证明R在A上是自反的和对称的。

证明：$\forall x \in A$，$(x-x)/2=0$，0是整数，所以$<x,x> \in R$，即R是自反的。

设x，$y \in A$，若$<x,y> \in R$，即$(x-y)/2$是整数，

因为整数的相反数也是整数，

所以$(y-x)/2=-(x-y)/2$是整数，$<y,x> \in R$。

即R是对称的。

三、传递性

1、定义（定义3-6.3）：设R是集合X上的二元关系，如果对于任意x，y，z∈X，每当<x，y>∈R，<y，z>∈R时就有<x，z>∈R，则称R是传递的。

R在X上传递

$\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x\in X\wedge y\in X\wedge z\in X\wedge \langle x,y\rangle\in R\wedge \langle y,z\rangle\in R\rightarrow \langle x,z\rangle\in R)$

例：

R1={<x,y>,<z,x>,<z,y>}是传递的，

R2={<x,b>,<c,d>}也是传递的，它没有违背定义。

R3={<x,b>,<b,x>}不是传递的。

2、定理：设R、S是A上的传递关系，则 $R\cap S$ 也是A上的传递关系。

证明：设 $<x,y> \in R\cap S$，$<y,z>\in R\cap S$，则 $<x,y> \in R$，$<y,z>\in R$ 且 $<x,y> \in S$，$<y,z>\in S$。因为R、S是A上的传递关系，所以 $<x,z>\in R$，$<x,z> \in S$，从而 $<x,z> \in R\cap S$，即 $R\cap S$ 是A上的传递关系。

注意：R、S均是传递的，但 $R\cup S$ 未必是传递的。

例：R={<a，b>}，S={<b，c>}，则R、S均是传递的，但 $R\cup S$={<a，b>，<b，c>}不是传递的。

定理:设R是X上的二元关系，R是传递的当且仅当$R \circ R \subseteq R$。

证明： 设R是传递的，下证$R \circ R \subseteq R$。

$\langle x,y \rangle \in R \circ R$，由合成运算定义，

则$\exists z \in X$, 使得$\langle x,z \rangle \in R$且$\langle z,y \rangle \in R$,

又因为R是传递的，所以$\langle x,y \rangle \in R$,

这就证明了$R \circ R \subseteq R$。

设$R \circ R \subseteq R$，下证R是传递的。

$\forall \langle x,y \rangle \in R$且$\langle y,z \rangle \in R$，由复合关系的定义

得$\langle x,z \rangle \in R \circ R$，因为$R \circ R \subseteq R$,

所以$\langle x,z \rangle \in R$，所以$R$是传递的。

有人说：集合**A**上的关系**R**，如果是对称且传递的，则它也是自反的。其理由是，从**aRb**，由对称性得**bRa**，再由传递性得**aRa**，该说法正确吗？为什么？

错误！再看自反性、对称性、传递性的定义。

自反性是说对于每一个x∈X，有<x，x>∈R。对称性是说每当<x，y>∈R，就有<y，x>∈R，没有要求对于每一个x∈X，传递性是说每当<x，y>∈R，<y，z>∈R时就有<x，z>∈R，也没有要求对于每一个x∈X。因此不能从一个关系是对称且传递的推出它是是自反的。

例如A={a，b，c}，

R={<a,a>，<b,b>，<a,b>，<b,a>}

是A上的一个二元关系，R是对称且传递的，但R不是自反的，因为对于c∈A，没有<c,c> ∈R。

例7:设R是实数集合，

$$S=\{<x,y>|x\in R\wedge y\in R\wedge x=y\}$$

是实数集合上的等于关系。证明实数集合上的等于关系是传递的。

证明：$\forall x,y,z\in R$，$<x,y>\in S$且$<y,z>\in S$，

由S的定义有x=y和y=z，

由实数相等的概念得x=z。

再根据S的定义，$<x,z>\in S$。

故实数集合上的等于关系S是传递的。

常见传递关系：全域关系、恒等关系、空关系φ、小于等于关系、大于等于关系、整除关系、包含关系、小于关系、大于关系、真包含关系等。

关系矩阵：若X上的二元关系R是传递的，当且仅当关系矩阵中，对于任何$x_i, x_j, x_k \in X$，如果有$r_{ij}=1$，并且$r_{jk}=1$则必有$r_{ik}=1$。

关系图：若X上的二元关系R是传递的，当且仅当关系图中，若结点x_i有弧线指向结点x_j，并且结点x_j有弧线指向结点x_k，则结点x_i必有一条弧线直接指向结点x_k。

例8：设$A=\{1,2,3\}$,R_1,R_2,R_3是A上的关系，

$R_1=\{<1,2>,<2,1>\}$

$R_2=\{<2,1>\}$

$R_3=\{<3,1>,<1,2>,<2,1>\}$

$R_4=\{<3,3>,<1,1>\}$

则R_1,R_2,R_3,R_4是否为A上的传递关系？

	传递性
R_1	×
R_2	√
R_3	×
R_4	√

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
集合表达式	$I_A \subseteq R$	$I_A \cap R = \varphi$	$R = R^c$	$R \cap R^c \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是1	主对角线元素全是0	矩阵是对称矩阵	若 $r_{ij} = 1$，且 $i \neq j$，则$r_{ji} = 0$ 即：除对角线元素外对称元素不能同时为1	对M^2中1所在位置，M中相应的位置都是1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	如果两个顶点之间有边，一定是一对方向相反的边(无单边)	如果两点之间有边，一定是一条有向边(无双向边)	如果顶点x_i到x_j有边，x_j到x_k有边，则从x_i到x_k也有边

例9：设$A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$上的关系，R是A上的关系， $R=\{<x,y>|x,y\in A \wedge x+y=10\}$，说明R具有哪些性质。

解： $R=\{<1,9>,<2,8>,<3,7>,<4,6>,<5,5>,<9,1>,<8,2>,<7,3>,<6,4>\}$

易知 既不是自反也不是反自反的

是对称的

不是反对称的

不是传递的。

设R，S是定义在A上的关系，都具有某些共同的性质，在经过以下运算后是否还保持原来关系的性质呢？

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
$R \cap S$					
$R \cup S$					
$R - S$					
$R \circ S$					
R^c					

	自反性	反自反性	对称		
			√	√	
R∪S	√			×	×
R - S	×			√	×
R ∘ S	√	×	×	×	×
R^c	√	√		√	

R={<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,3>}, S ={<1,1>,<2,2>,<3,3>,<2,3>}, R - S ={<1,3>}

R={<1,2>}, S={<2,1>}, R ∘ S={<1,1>}

R={<1,2>}, S={<2,1>}, R∪S={<1,2>,<2,1>}

R={<1,2>,<2,1>,<1,1>,<2,2>}, S ={<3,2>,<2,3>,<3,3>,<2,2>}, R∪S={<1,2>,<2,1>,<1,1>,<2,2>,<3,2>,<2,3>,<3,3>,<2,2>}

R={<1,2>,<2,1>,<3,3>}, S ={<3,2>,<2,3>}, R ∘ S={,<1,3>,<3,2>}

R={<1,2>,<2,3>}, S ={<2,2>,<3,1>}, R ∘ S={<1,2>,<2,1>}

R={<1,2>,<2,3>,<1,3>} S={<2,3><3,1>,<2,1>}, R ∘ S={<1,3>,<1,1><2,1>}

R={<1,2>,<2,1>,<1,1><2,2>}, S ={<2,2>}, R - S ={<1,2>,<2,1>,<1,1>}

例10：如果R是反对称关系，则$R \cap R^c$的关系矩阵的非零值的分布特点？

如果R是反自反且反对称关系，则$R \cap R^c$的关系矩阵的非零值的分布特点？

解：如果R是反对称关系，则$R \cap R^c$的关系矩阵只有对角线元素可能非零。

如果R是反自反且反对称关系，则$R \cap R^c$的关系矩阵全是零，即无非零值。

3-7 复合关系和逆关系

二元关系是以序偶为元素的集合，除可进行集合的运算，如并、交、补外，还可进行关系的复合（合成）运算。

要求：

掌握关系的复合运算、逆运算的定义、相关定理，能够求解对应的复合关系、逆关系。

一、复合关系

引例：**a、b、c三人，a、b是兄妹关系，b、c是母子关系，则a、c是舅甥关系，若设R是兄妹关系，S是母子关系，则R与S的复合T是舅甥关系。如R是父子关系，R与R复合是祖孙关系。**

1、复合关系(关系的复合运算)

定义3-7.1：设X、Y、Z是三个集合，R是X到Y的关系，S是Y到Z的关系，则$R \circ S$称为R和S的**复合关系**，表示为

$$R \circ S=\{<x,z> \mid x \in X \wedge z \in Z \wedge (\exists y)(y \in Y \wedge <x,y> \in R \wedge <y,z> \in S)\}$$。

从R和S求$R \circ S$，称为**关系的合成运算**。

说明：R与S能进行复合的必要条件是R的值域所属集合Y与S前域所属集合Y是同一个集合。

例：$X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，$Y=\{3, 4, 5\}$，$Z=\{1, 2, 3\}$，R是X到Y的关系，S是Y到Z的关系：

$R=\{\langle x, y\rangle \mid x+y=6\}=\{\langle 1, 5\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$，

$S=\{\langle y, z\rangle \mid y-z=2\}=\{\langle 3, 1\rangle, \langle 4, 2\rangle, \langle 5, 3\rangle\}$，

则$R\circ S=\{\langle 1, 3\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 1\rangle\}$

另可以用推导：$\because x+y=6$，$y-z=2$，消去y得$x+z=4$

例：集合$X=\{x, y, z, d, e\}$，

$R=\{\langle x, y\rangle, \langle y, y\rangle, \langle z, d\rangle\}$，

$S=\{\langle d, y\rangle, \langle y, e\rangle, \langle z, x\rangle\}$，

则$R\circ S=\{\langle x, e\rangle, \langle y, e\rangle, \langle z, y\rangle\}$，

$S\circ R=\{\langle d, y\rangle, \langle z, y\rangle\}$，

$R\circ R=\{\langle x, y\rangle, \langle y, y\rangle\}$，$S\circ S=\{\langle d, e\rangle\}$

例题1：令$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 2,2\rangle\}$，$S=\{\langle 4,2\rangle,\langle 2,5\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 1,3\rangle\}$，试求$R\circ S$，$S\circ R$，$R\circ(S\circ R)$，$(R\circ S)\circ R$，$R\circ R$，$S\circ S$，$R\circ R\circ R$。

解：$R\circ S=\{\langle 1,5\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 2,5\rangle\}$

$S\circ R=\{\langle 4,2\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 1,4\rangle\}$

$R\circ(S\circ R)=\{\langle 3,2\rangle\}$

$(R\circ S)\circ R=\{\langle 3,2\rangle\}$

$R\circ R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle\}$

$S\circ S=\{\langle 4,5\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 1,1\rangle\}$

$R\circ R\circ R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle\}$

关系的复合运算不满足交换律，满足结合律。

例题2：设R1和R2是集合$X=\{0，1，2，3\}$上的关系，

$R1=\{\langle i, j\rangle \mid j=i+1 \text{或} j=i/2\}$，$R2=\{\langle i, j\rangle \mid i=j+2\}$

试求$R1\circ R2$，$R2\circ R1$，$R1\circ R2\circ R1$，$R1\circ R1$，$R1\circ R1\circ R1$。

解：

$R1=\{\langle 0,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 0,0\rangle,\langle 2,1\rangle\}$

$R2=\{\langle 2,0\rangle,\langle 3,1\rangle\}$

$R1\circ R2=\{\langle 1,0\rangle,\langle 2,1\rangle\}$

$R2\circ R1=\{\langle 2,1\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 3,2\rangle\}$

$R1\circ R2\circ R1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,0\rangle,\langle 2,2\rangle\}$

$R1\circ R1=\{\langle 0,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle 0,0\rangle,\langle 2,2\rangle\}$

$R1\circ R1\circ R1=\{\langle 0,3\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 0,2\rangle,\langle 0,0\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,1\rangle\}$

关系的n次幂：设R是X上的二元关系，$n\in N$，则关系的n次幂$R^{(n)}$定义为：(1)$R^{(0)}=I_X$；(2)$R^{(n+1)}=R^{(n)}\circ R$

说明：如果R是X到Y的关系，且$X\neq Y$，则$R^{(2)}$是无意义的，因为$R\circ R$是无法复合的。

定理：设R是集合X上的二元关系，m，$n\in N$，则

(1)$R^{(m)}\circ R^{(n)}=R^{(m+n)}$(称第一指数律)

(2)$(R^{(m)})^{(n)}=R^{(mn)}$ (称第二指数律)

此定理证明可以用数学归纳法加以证明。

说明：第三指数律$(R\circ S)^{(n)}=R^{(n)}\circ S^{(n)}$一般是不成立的。因为：

$(R\circ S)^{(2)}=(R\circ S)\circ(R\circ S)=R\circ(S\circ R)\circ S$，

$R^{(2)}\circ S^{(2)}=(R\circ R)\circ(S\circ S)=R\circ(R\circ S)\circ S$，

只要交换律不成立，第三指数律不成立。

例：设X={1，2，3，4，5}，X上关系R为

$R=\{<1,2>,<2,1>,<2,3>,<3,4>,<4,5>\}$，则：

$R^{(0)}=I_X=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<4,4>,<5,5>\}$

$R^{(1)}=R$

$R^{(2)}=\{<1,1>,<2,2>,<1,3>,<2,4>,<3,5>\}$

$R^{(3)}=\{<1,2>,<2,1>,<1,4>,<2,3>,<2,5>\}$

$R^{(4)}=\{<1,1>,<2,2>,<1,5>,<2,4>,<1,3>\}$

$R^{(5)}=\{<1,2>,<1,4>,<2,1>,<2,3>,<2,5>\}$

2、关系矩阵：

设集合$X=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$，$Y=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$，$Z=\{z_1, \ldots, z_p\}$，R是X到Y的关系，其关系矩阵$M_R=(u_{ij})_{m\times n}$，S是Y到Z的关系，其关系矩阵$M_S=(v_{jk})_{n\times p}$，复合关系$R\circ S$是X到Z的关系，其关系矩阵$M_{R\bullet S}=(w_{ik})_{m\times p}$，则$w_{ik}=\bigvee_{j=1}^{n}(u_{ij}\wedge v_{jk})$。

式中$\vee$代表逻辑加，满足$0\vee 0=0$，$0\vee 1=1$，

（布尔加）　　$1\vee 0=1$，$1\vee 1=1$

$\wedge$代表逻辑乘，满足$0\wedge 0=0$，$0\wedge 1=0$，

（布尔乘）　　$1\wedge 0=0$，$1\wedge 1=1$

例题3：给定集合A={1，2，3，4，5}，在A上定义两个关系。R={<1，2>，<2，2>，<3，4>}，S={<1，3>，<2，5>，<3，1>，<4，2>}。求R∘S和S∘R的矩阵。

解：

$$M_{R\circ S}=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$M_{S\circ R}=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

(2)复合运算与∪，∩的关系

设R是从集合X到Y的关系，S和T均为Y到Z的关系，U是Z到D的关系，则

①$R\circ(S\cup T)=R\circ S\cup R\circ T$

②$R\circ(S\cap T)\subseteq R\circ S\cap R\circ T$

③$(S\cup T)\circ U=S\circ U\cup T\circ U$

④$(S\cap T)\circ U\subseteq S\circ U\cap T\circ U$

证明：①$\forall\langle x, z\rangle\in R\circ(S\cup T)$

$\Leftrightarrow\exists y\in Y, \langle x, y\rangle\in R\wedge(y, z)\in S\cup T$

$\Leftrightarrow\langle x, y\rangle\in R\wedge(\langle y, z\rangle\in S\vee\langle y, z\rangle\in T)$

$\Leftrightarrow(\langle x, y\rangle\in R\wedge\langle y, z\rangle\in S)\vee(\langle x, y\rangle\in R\wedge\langle y, z\rangle\in T)$

$\Leftrightarrow\langle x, z\rangle\in R\circ S\vee\langle x, z\rangle\in R\circ T)\Leftrightarrow\langle x, z\rangle\in R\circ S\cup R\circ T$

从而$R\circ(S\cup T)=R\circ S\cup R\circ T$

3、复合关系的性质

(1)复合运算结合律

设R、S、T分别是X到Y、Y到Z、Z到D的关系，则

$(R\circ S)\circ T=R\circ(S\circ T)$

证明：$\forall$<x，w>$\in(R\circ S)\circ T$

$\Rightarrow\exists z\in Z$，<x，z>$\in R\circ S$，<z，w>$\in T$，

$\Rightarrow\exists y\in Y$，<x，y>$\in R$，<y，z>$\in S$，<z，w>$\in T$

$\Rightarrow$<x，y>$\in R$，<y，w>$\in S\circ T\Rightarrow$<x，w>$\in R\circ(S\circ T)$

所以$(R\circ S)\circ T\subseteq R\circ(S\circ T)$

类似可以证$R\circ(S\circ T)\subseteq(R\circ S)\circ T$，从而$(R\circ S)\circ T=R\circ(S\circ T)$

二、逆关系

1、逆关系

定义3-7.2：设R是集合X到Y的二元关系，如将R中每一序偶中的元素顺序互换，所得到的集合称为R的逆关系，记作$R^c=\{<y, x> \mid <x, y> \in R\}$。

说明：R^c的关系矩阵是R的关系矩阵的转置，R^c的关系图是将R的关系图中的弧改变方向。

例：设集合$X=\{x, y, z\}$，X上的关系

$R=\{<x, x>, <z, x>, <z, y>\}$，则

$R^c=\{<x, x>, <x, z>, <y, z>\}$

例题4：给定集合X={a，b，c}，R是X上的二元关系。R的关系矩阵

$$M_R=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$$

求R^c和$R\circ R^c$的关系矩阵。

解：

$$M_{R^c}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_{R\circ R^c}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

2、定理3-7.1：设R，R_1和R_2均是A到B的二元关系，则

(1)$(R^c)^c=R$

(2)$(R_1\cup R_2)^c=R_1^c\cup R_2^c$

(3)$(R_1\cap R_2)^c=R_1^c\cap R_2^c$

(4)$(A\times B)^c=B\times A$

(5)$(\overline{R})^c=\overline{R^c}$　$\overline{R}=A\times B-R$

(6)$(R_1-R_2)^c=R_1^c-R_2^c$

证明：(2)$<x，y>\in(R_1\cup R_2)^c$

$\Leftrightarrow<y，x>\in R_1\cup R_2$

$\Leftrightarrow<y，x>\in R_1\vee<y，x>\in R_2$

$\Leftrightarrow<x，y>\in R_1^c\vee<x，y>\in R_2^c$

$\Leftrightarrow<x，y>\in R_1^c\cup R_2^c$

3、定理3-7.2：设R是X到Y的关系，S是Y到Z的关系，则$(R\circ S)^c=S^c\circ R^c$。

证明：$\langle z, x\rangle \in (R\circ S)^c$

$\Leftrightarrow \langle x, z\rangle \in R\circ S$

$\Leftrightarrow (\exists y)(y\in Y \wedge \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in S)$

$\Leftrightarrow (\exists y)(y\in Y \wedge \langle y, x\rangle \in R^c \wedge \langle z, y\rangle \in S^c$

$\Leftrightarrow \langle z, x\rangle \in S^c\circ R^c$

例：$X=\{x, y, z\}$，$Y=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，R是X上关系，S是X到Y的关系。

$R=\{\langle x, x\rangle, \langle x, z\rangle, \langle y, y\rangle, \langle z, y\rangle, \langle z, z\rangle\}$,

$S=\{\langle x, 1\rangle, \langle x, 4\rangle, \langle y, 2\rangle, \langle z, 4\rangle, \langle z, 5\rangle\}$,

则$R\circ S=\{\langle x, 1\rangle, \langle x, 4\rangle, \langle x, 5\rangle, \langle y, 2\rangle, \langle z, 2\rangle, \langle z, 4\rangle, \langle z, 5\rangle\}$

$R^c=\{\langle x, x\rangle, \langle y, y\rangle, \langle y, z\rangle, \langle z, x\rangle, \langle z, z\rangle\}$

$S^c=\{\langle 1, x\rangle, \langle 2, y\rangle, \langle 4, x\rangle, \langle 4, z\rangle, \langle 5, z\rangle\}$

$S^c\circ R^c=\{\langle 1, x\rangle, \langle 2, y\rangle, \langle 2, z\rangle, \langle 4, x\rangle, \langle 4, z\rangle, \langle 5, x\rangle, \langle 5, z\rangle\}$

可验证：$S^c\circ R^c=(R\circ S)^c$

4、定理3-7.3：设R是X上的二元关系，则

(1)R是对称的，当且仅当$R=R^c$

(2)R是反对称的，当且仅当$R\cap R^c\subseteq I_x$

证明：

(1)因为R是对称的，

故$<x，y>\in R\Leftrightarrow<y，x>\in R\Leftrightarrow<x，y>\in R^c$，所以$R=R^c$。

反之，若$R=R^c$，因为$<x，y>\in R\Leftrightarrow<y，x>\in R^c\Leftrightarrow<y，x>\in R$，

所以R是对称的。

（即当$\langle x，y\rangle \in R$和$\langle y，x\rangle \in R$时，必有$x=y$。）

(2)设R是反对称的，

$\langle x，y\rangle \in R \cap R^c \Leftrightarrow \langle x，y\rangle \in R \wedge \langle x，y\rangle \in R^c$

$\Leftrightarrow \langle x，y\rangle \in R \wedge \langle y，x\rangle \in R$，

因为 R是反对称的， 所以$x=y$，故$R \cap R^c \subseteq I_x$。

反之，若$R \cap R^c \subseteq I_x$，$\langle x，y\rangle \in R \cap R^c$有$\langle x，y\rangle \in I_x$，即$x=y$。

又$\langle x，y\rangle \in R \cap R^c \Leftrightarrow \langle x，y\rangle \in R \wedge \langle x，y\rangle \in R^c$

$\Leftrightarrow \langle x，y\rangle \in R \wedge \langle y，x\rangle \in R$，但$x=y$， 故R是反对称的。

5、定理：设R、S是X上的自反关系，则$R\cup S$、$R\cap S$、R^c也是X上的自反关系。

设R、S是X上的对称关系，则$R\cup S$、$R\cap S$、R^c也是X上的对称关系。

设R、S是X上的反对称关系，则$R\cap S$、R^c也是X上的反对称关系。

R是传递关系的充要条件是$R\circ R\subseteq R$。

作业

113页(1)、(4)

118页 (5)、(8)

The End