离散数学 II

Discrete Mathematics II

封筠

fengjun@stdu.edu.cn

20-11

课程回顾

相容关系：相容关系定义、相容类、最大相容类、完全覆盖、寻找最大相容类的方法、相容关系与完全覆盖一一对应

第三章 集合与关系第7讲

3—12 序关系

要求掌握如下概念：

偏序关系、盖住关系、哈斯图、链、反链、全序集、极大元、极小元、最大元、最小元、上界、下界、最小上界（上确界）、最大下界（下确界）、良序集

一、偏序关系及其表示

1、定义3-12.1： 设A是一个集合，如果A上的一个关系R满足自反性、反对称性和传递性，则称R是A上的一个偏序关系，记作≼。<A，≼>称作偏序集。若<x,y> ∈ ≼，则记作x ≼ y，读作“x小于等于y”。

例：设集合A={a，b，c}，A上的关系R={<a，a>，<a，b>，<a，c>，<b，b>，<b，c>，<c，c>}是偏序关系。

例：设集合A={1，2，3，4}，A上的小于等于关系 ≤={<1，1>， <1，2>，<1，3>，<1，4>， <2，2>， <2，3>，<2，4>，<3，3>，<3，4>，<4，4>}
是偏序关系。

集合A={1，2，3，4}，A上的大于等于关系 ≥ ={<1，1>， <2，1>，<3，1>，<4，1>， <2，2>， <3，2>，<4，2>， <3，3>，<4，3>，<4，4>}
也是偏序关系。

例题1：在实数集R上，证明小于等于关系“≤”是偏序关系。

证明：

1. 对于任何实数$a\in R$,有$a\leqslant a$成立，故R是自反的。

2. 对任何实数$a,b\in R$，如果$a\leqslant b$且$b\leqslant a$必有$a=b$，故R是反对称的。

3. 如果$a\leqslant b$，$b\leqslant c$,有$a\leqslant c$,故R是传递的。

因此R是偏序关系。

例1：设A={1，2，3}，A的幂集

$\wp(A)=\{\varnothing，\{1\}，\{2\}，\{3\}，\{1，2\}，\{1，3\}，\{2，3\}，\{1，2，3\}\}$

上的包含关系$\subseteq$是偏序关系。

$$
\begin{aligned}
\subseteq = \{&<\varnothing,\varnothing>, <\varnothing,\{1\}>, <\varnothing,\{2\}>, <\varnothing,\{3\}>, \\
&<\varnothing,\{1,2\}>, <\varnothing,\{1,3\}>, <\varnothing,\{2,3\}>, <\varnothing,\{1,2,3\}>, \\
&<\{1\},\{1\}>, <\{1\},\{1,2\}>, <\{1\},\{1,3\}>, <\{1\},\{1,2,3\}>, \\
&<\{2\},\{2\}>, <\{2\},\{1,2\}>, <\{2\},\{2,3\}>, <\{2\},\{1,2,3\}>, \\
&<\{3\},\{3\}>, <\{3\},\{1,3\}>, <\{3\},\{2,3\}>, <\{3\},\{1,2,3\}>, \\
&<\{1,2\},\{1,2\}>, <\{1,2\},\{1,2,3\}>, <\{1,3\},\{1,3\}>, \\
&<\{1,3\},\{1,2,3\}>, <\{2,3\},\{2,3\}>, <\{2,3\},\{1,2,3\}>, \\
&<\{1,2,3\},\{1,2,3\}>\}
\end{aligned}
$$

证明：

(1)$\forall S\in\wp(A)$，因$S\subseteq S$ $\therefore\subseteq$具有自反性。

(2)$\forall S$、$W\in\wp(A)$，如$S\subseteq W$，且$W\subseteq S$，则$S=W$。即如$<S, W>\in\subseteq$，$<W, S>\in\subseteq$，则$S=W$。$\therefore\subseteq$具有反对称性。

(3)$\forall S$，W，$Z\in\wp(A)$，如$<S, W>\in\subseteq$，$<W, Z>\in\subseteq$，即$S\subseteq W$，$W\subseteq Z$，则$S\subseteq Z$，$\therefore <S, Z>\in\subseteq$，$\therefore\subseteq$具有传递性。

所以$\subseteq$是$\wp(A)$上的偏序关系。

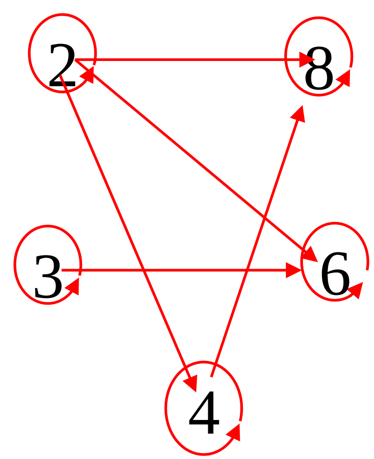
例2：给定集合A={2,3,4,6,8}，令

“≼”={<x,y>|x整除y}，

验证“≼”是偏序关系。

解：“≼”={<2,2 >,<2,4>,<2,6>,<2,8>,
< 3,3>,<3,6 >,<4,4>,< 4,8 >, <6,6 >,<8,8>}

$$M_{\leq}=\begin{bmatrix}1&0&1&1&1\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$



设A是非零自然数集，D_A是A上的整除关系。

(1)$\forall x\in A$，因x能整除x，$\therefore D_A$具有自反性。

(2)$\forall x$、$y\in A$，如x能整除y，且y能整除x，则x=y。即如$\langle x, y\rangle\in D_A$，$\langle y, x\rangle\in D_A$，则x=y。$\therefore D_A$具有反对称性。

(3)$\forall x, y, z\in A$，如$\langle x, y\rangle\in D_A$，$\langle y, z\rangle\in D_A$，即x能整除y，y能整除z，则x能整除z，$\therefore \langle x, z\rangle\in D_A$，$\therefore D_A$具有传递性。

所以D_A是A上的偏序关系。

2、盖住

定义3-12.2：在偏序集$<A, \leq>$中，如果x、$y \in A$，$x \leq y$，$x \neq y$，且没有其他元素z，使$x \leq z$，$z \leq y$，则称**元素y盖住元素x**。

记$\mathrm{COV}\ A=\{<x, y> \mid x \in A, y \in A, x \neq y, y$盖住$x\}$。

例3: 给定集合$A=\{2,3,4,6,8\}$，令

"$\preccurlyeq$" $=\{<x,y> \mid x$整除$y\}$

解："$\preccurlyeq$" $=\{<2,2>,<2,4>,<2,6>,<2,8>,$

$<3,3>,<3,6>,<4,4>,<4,8>,<6,6>,<8,8>\}$

$\mathrm{COV}\ A=\{<2,4>,<2,6>,<3,6>,<4,8>\}$

例题3: 给定集合$A=\{1,2,3,4,6,12\}$，令“$\preccurlyeq$”$=\{<x,y>|x$整除$y\}$，求COV A

解：

$\preccurlyeq=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<1,6>,<1,12>,$

$<2,2>,<2,4>,<2,6>,<2,12>,<3,3>,<3,6>,$

$<3,12>,<4,4>,<4,12>,<6,6>,<6,12>,<12,12>\}$

$\text{COV } A=\{< 1,2>,<1,3 >,<2,4>, <2,6>,$

$< 3,6>,<4,12>,<6,12>\}$

3、哈斯图（简化的偏序关系图）

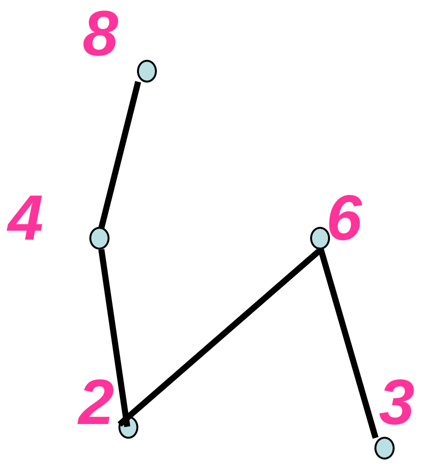
对于给定偏序集<A，≤>，它的盖住关系是唯一的，所以可用盖住的性质画出偏序集合图，或称哈斯图，其作图规则为：

(1)小圆圈代表元素。

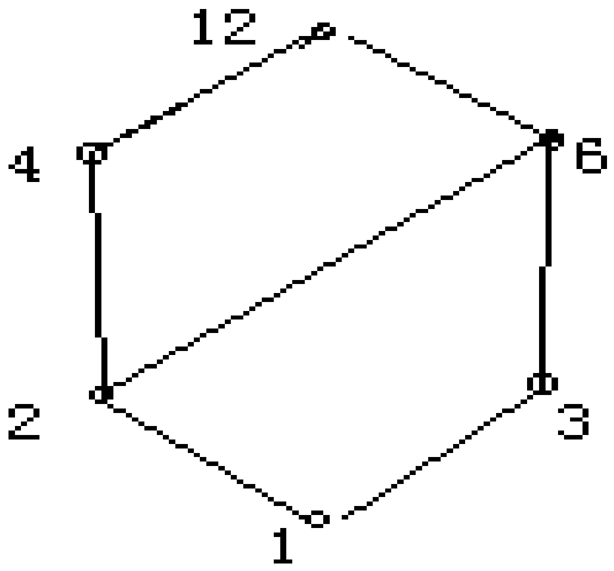
(2)如果x≤y且x≠y，将代表y的小圆圈画在代表x的小圆圈之上。

(3)如果<x，y>∈COVA，则在x与y之间用直线连结。

例3



例题3

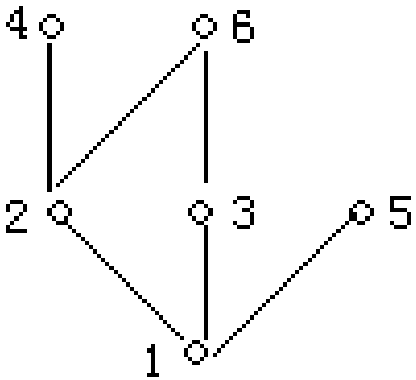


哈斯图能确定出来一个偏序关系吗？

例4：画出下列偏序集<{1，2，3，4，5，6}，D_A>的哈斯图（D_A是A上的整除关系）

D_A={<1，1>，<2，2>，<3，3>，<4，4>，<5，5>，<6，6>，<1，2>，<1，3>，<1，4>，<1，5>，<1，6>，<2，4>，<2，6>，<3，6>}

COV A={< 1,2>,<1,3 >,<1,5>,
<2,4>, < 2,6>,<3,6>}



例5：设A={1，2，3}，

而℘(A) ={∅，{1}，{2}，{3}，{1，2}，

{1，3}，{2，3}，{1，2，3}}

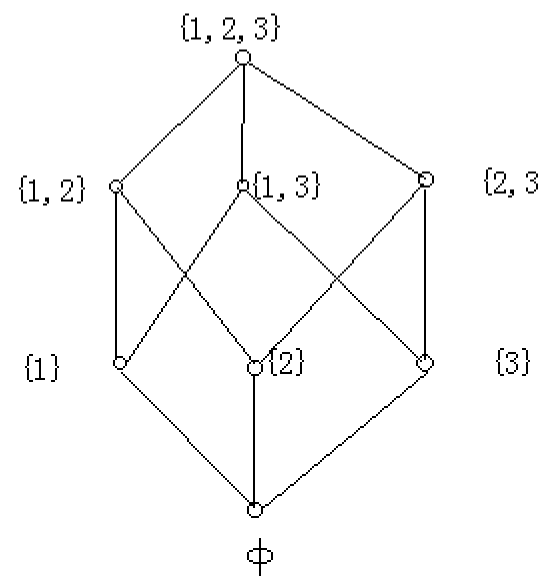
画出偏序集<℘(A)，⊆>的哈斯图。

COV ℘(A) ={< ∅ , {1} >,< ∅ , {2} >,< ∅, {3} >,

< {1} ,{1,2} >,< {1} , {1,3} >,< {2},{1,2} >,<{2},

{2,3}>, <{3}, {1,3}>,<{3},{2,3}>,< {1,2},{1,2,3}>,

< {1,3}, {1,2,3}>, < {2,3}, {1,2,3}> }



4、链和反链

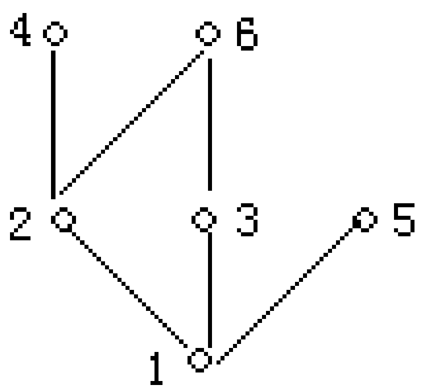
定义3-12.3：设<A，≤ >是一个偏序集合，在A的一个子集中，如果每两个元素都是有关系的，则称这个子集为链。在A的一个子集中，如果每两个元素都是无关的，则称这个子集为反链。 约 若A的子集只有单个元素，则这个子集即是

思考：在哈斯图中，链与反链如何体现？

例4：偏序集<{1，2，3，4，5，6}，D_A>

D_A={<1，1>，<2，2>，<3，3>，<4，4>，<5，5>，<6，6>，<1，2>，<1，3>，<1，4>，<1，5>，<1，6>，<2，4>，<2，6>，<3，6>}

哈斯图为：



从哈斯图上容易看出，
在每个链中总可以从最
高结点出发沿着盖住方
向遍历该链中所有结点。
每个反链中任两个结点
间均无连线。

子

{

{6}，{2，3}，}，{3，5}，{4，6}，{5，6}，{2，3，5}，{4，5，6}都是反链。

例题4：设集合 A ＝｛a,b,c,d,e｝上的二元关系为

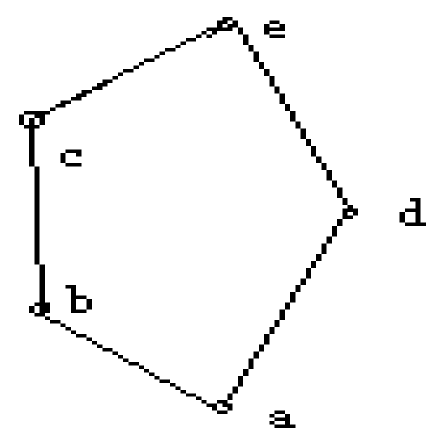
R＝{<a,a>,<a,b>,<a,c>,<a,d>,<a,e>,<b,b>,<b,c>,
<b,e>,<c,c>,<c,e>,<d,d>,<d,e>, <e,e>}

验证偏序集，画出哈斯图，举例说明链及反链。

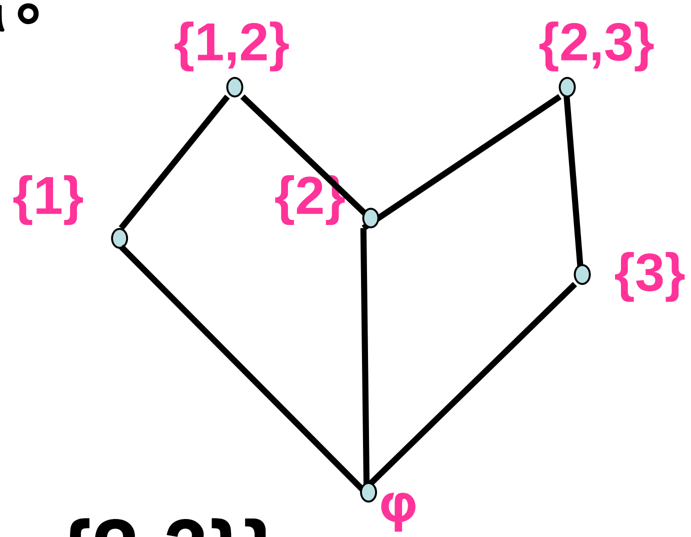
证明：(见P141)

COV R＝{<a,b>,<b,c>,<c,e>,<a,d>,<d,e>}

集合｛a,b,c,e｝, {a,b,c}，{b,c},
{a}，{a,d,e}都是 A 的子集也是链,
而｛b,d｝，{c,d}，{a} 等都是反链。



例6: 已知偏序集< A,R>的哈斯图如右所示，写出集合A和关系R的表达式。



解：A={φ,{1}, {2}, {3}, {1,2}, {2,3}}

R={< φ, {1}>, < φ, {1,2}>,
< {1}, {1,2}>, < φ, {2}>, < {2}, {1,2}>,
< φ, {2,3}>, < {2}, {2,3}>, < φ, {3}>,
< {3}, {2,3}>} $\cup I_A$

二、特殊元素

1、极大元、极小元

定义3-12.5：设<A，≤>是一个偏序集，且B是A的子集，对于B中的一个元素b，如果B中没有任何元素x，满足b≠x

且b ≤x，则称b为B的极大元；同理，如果B中没有任何元素x，能满足b≠x且x≤b，则称b为B的极小元。

设$<A, \preccurlyeq>$是偏序集，$B \subseteq A$，$b \in B$

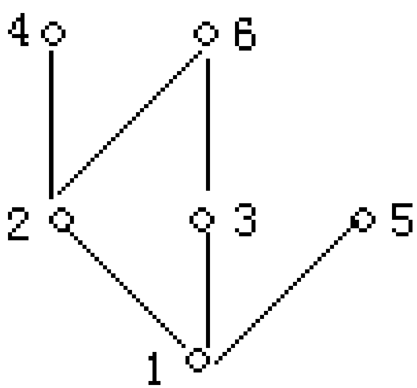
极大元： 若$\neg (\forall x)(x \in B \rightarrow b \neq x \wedge b \preccurlyeq x)$成立，则称b为B的极大元.

极小元： 若$\neg (\forall x)(x \in B \rightarrow b \neq x \wedge x \preccurlyeq b)$成立，则称b为B的极小元.

例4：A={1，2，3，4，5，6},D_A是A上的整除关系.

D_A={<1，1>，<2，2>，<3，3>，<4，4>，<5，5>，<6，6>，<1，2>，<1，3>，<1，4>，<1，5>，<1，6>，<2，4>，<2，6>，<3，6>}

偏序集<A，D_A>的哈斯图为：



子集{2，3，4，6}的极大元是4，6，极小元是2，3。

子集{1，2，3，6}的极大元是6，极小元是1。

极大元和极小元不是唯一的。

从定义**3-12.5**中可以知道，当**B=A**时，偏序集**<A，≤ >**的极大元即是哈斯图中最顶层的元素，其极小元是哈斯图中最低层的元素，不同的极小元素或不同的极大元素之间是无关的。

2、最大元、最小元

定义3-12.6：设<A，≤>是一个偏序集，且B是A的子集，若有某个元素b∈B，对于B中的每一个元素x，有x≤b，则称b为<B，≤>的最大元；同理，若有某个元素b∈B，对于B中的每一个元素x，有b≤x，则称b为<B≤>的最小元。

设$<A, \leq>$是偏序集，$B \subseteq A$，$b \in B$

最大元：若$(\forall x)(x \in B \rightarrow x \leq b)$成立，则称b为B的最大元.

最小元：若$(\forall x)(x \in B \rightarrow b \leq x)$成立，则称b为B的最小元.

3、**定理3-12.1**：设<A，≤>是偏序集，且B是A的子集，若B有最大元(最小元)，则必是唯一的。

证明：如果b1，b2∈B均是最大元，由b1是最大元，有b2≤b1，由b2是最大元，有b1≤b2，从≤的反对称性得b1＝b2，即最大元是唯一的。

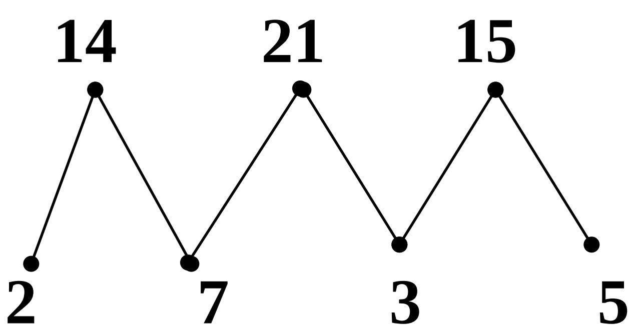
B的最小元情况与此类似。

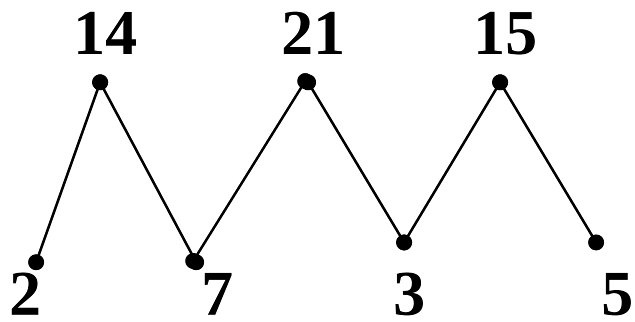
当B=A时，B的最大（最小）元就是偏序集<A，≤>的最大（最小）元。如例题3的图3-12.2（141页）中，<A，≤>的最大元为12，最小元为1。

例题6：设A={2,3,5,7,14,15,21},其偏序关系 R={<2,14>,<3,15>,<3,21>,<5,15>,<7,14>,<7,21>, <2,2>,<3,3>,<5,5>,<7,7>,<14,14>,<15,15>,<21,21>}

求B={2,7,3,21,14}的极大元与极小元，最大元与最小元。

解 COV A={<2,14>,<3,15>,<3,21>,<5,15>,<7,14>,<7,21>}





故 B的极小元集合是{2，7，3}，

B的极大元集合为{14，21}

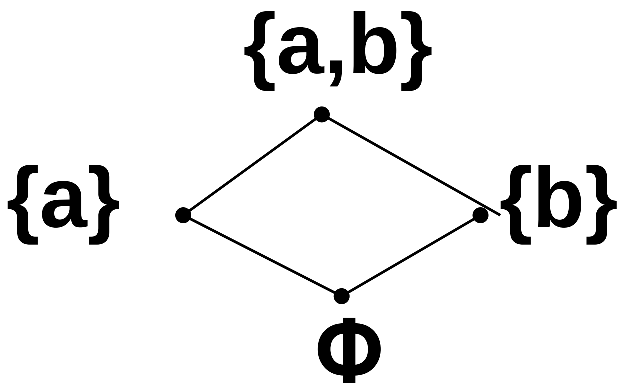
B无最大元，无最小元

注：（1）极大元，极小元不是唯一的。

（2）最大元或最小元可能不存在。

（3）B的最大元必为极大元，B的最小元必为极小元。

例7：偏序集<P({a,b}), ⊆> 哈斯图如左下角:



解: a)若B={{a},Φ},

则{a}是B的最大元， Φ是B的最小元。

b)若B={{a},{b}},

则B没有最大元和最小元，因{a},{b}是不可比较的。

最小(大)元与极小(大)元的联系与区别：

- 最小(大)元是B中最小(大)的元素，它与B中其它元素都可比；而极小(大)元不一定与B中其它元素都可比，只要没有比它小(大)的元素即可。
- 对于有穷集合B，最小(大)元不一定存在，但若存在则一定唯一存在；而极小(大)元一定存在，并且可能存在多个。
- 若B中只有一个极小(大)元，则它一定是B的最小(大)元。

练习：设$A=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$，A上的二元关系

$R=\{\langle b,d\rangle,\langle b,e\rangle,\langle b,f\rangle,\langle c,d\rangle,\langle c,e\rangle,\langle c,f\rangle,\langle d,f\rangle,\langle e,f\rangle,\langle g,h\rangle\}\cup I_A$

1、验证R是A上的偏序关系。

2、写出盖住关系COV A，画出哈斯图。

3、找出集合A的极大元和极小元，最大元和 最小元。

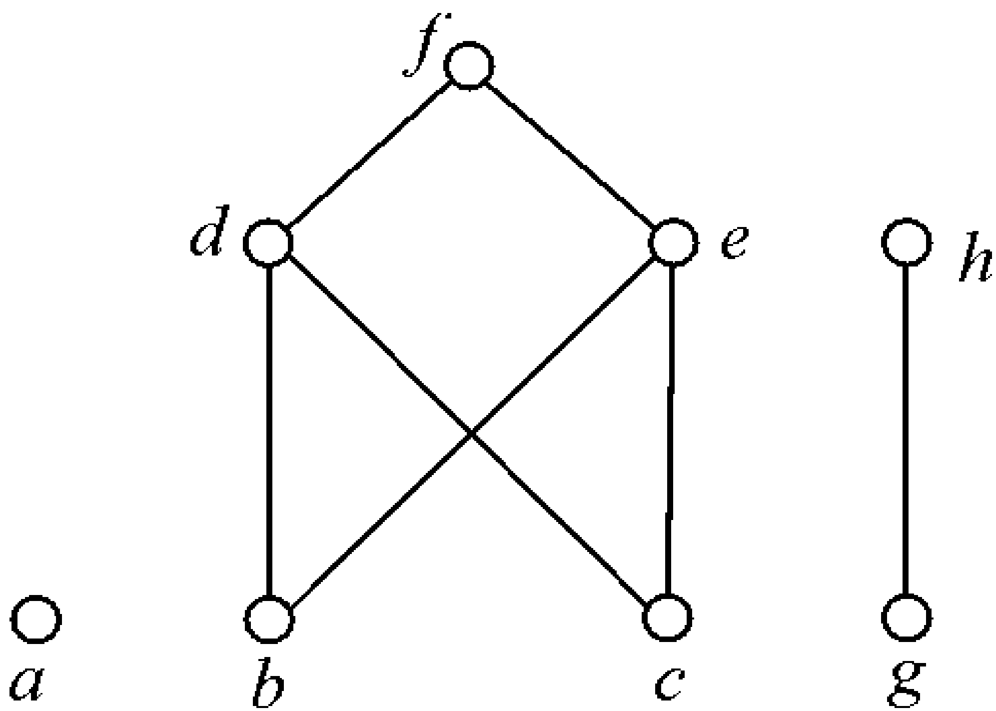
解：*R*是*A*上的偏序关系（略）。

COV $A=\{<b,d>,<b,e>,<c,d>,<c,e>,<d,f>,<e,f>,<g,h>\}$

哈斯图如下图所示。

集合*A*的极大元是：***a,f,h***。

集合*A*的极小元是：***a,b,c,g***。



4、上界、下界

定义3-12.7：设<A，≤>是一偏序集，对于$B\subseteq A$，如有$a\in A$，且对任意元素$x\in B$，都有$x\leq a$，则称a为B的上界。同理，对任意元素$x\in B$，都有$a\leq x$，则称a为B的下界。

上界: 若$(\forall x)(x\in B\rightarrow x\leq a)$成立，则称a为B的上界.

下界: 若$(\forall x)(x\in B\rightarrow a\leq x)$成立，则称a为B的下界.

5、上确界、下确界

定义3-12.8：设<A，≤>是一偏序集且B⊆A，a是B的任一上界，若对B的所有上界y均有a≤y，则称a是B的最小上界(上确界)，记作LUBB。同理，b是B的任一下界，若对B的所有下界z均有z≤b，则称b是B的最大下界(下确界)，记作GLBB。

由此可见：

- B的最小(大)元一定是B的下(上)界，同时也是B的最大下(小上)界。反之则不一定成立。
- B的上界、下界、最小上界、最大下界都可能不一定存在，但若存在，最小上界、最大下界一定是唯一存在的。

设<A，≤>为一偏序集，

子集{2，3，6}

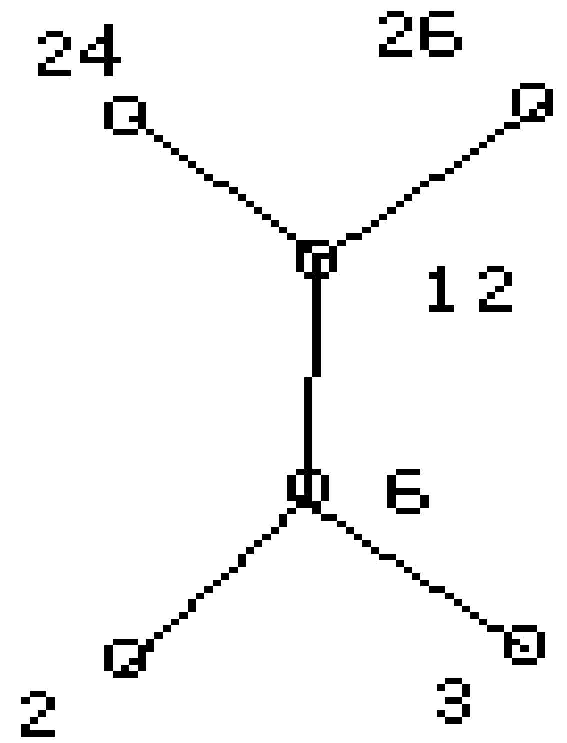
的最小上界为6，

但没有最大下界。

子集{12，6}来说，

最小上界为12，

最大下界是6。



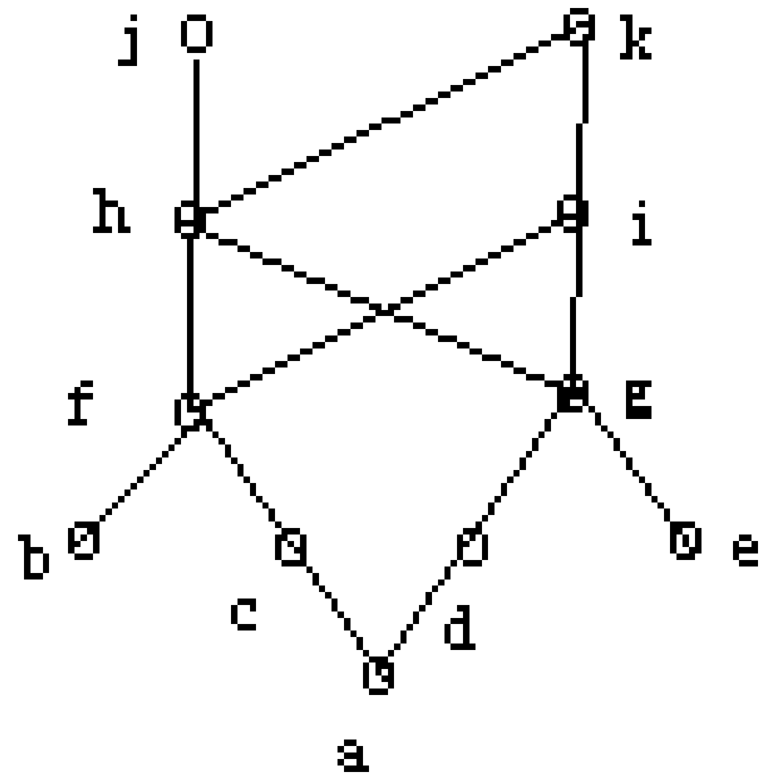
设<A，≤>为一偏序集，

{a,b,c,d,e,f,g}的上界为h, i，j,k

{h,i,j,k}的下界为

f, g,a,b,c,d,e，

{f,g,h,i,j}的最大下界为a 。

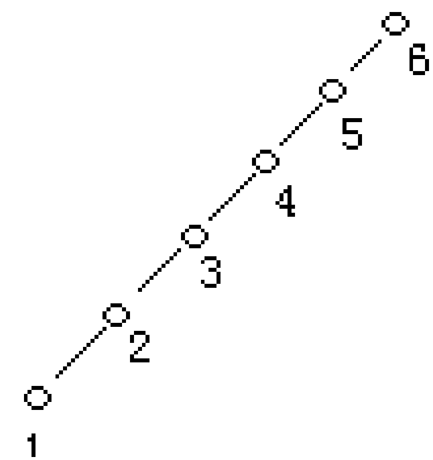


二、其它序关系

1、全序关系

定义3-12.4：在偏序集<A，≤>中，如果A是一个链，则称<A，≤>为全序集合或线序集合，在这种情况下，≤称为全序关系或线序关系。

例：A={1，2，3，4，5，6}，≤是整数上的小于等于关系，<A，≤>不仅是偏序集，而且还是全序集。其哈斯图如下：



全序关系的哈斯图是一条线。

2、良序集合

定义3-12.9：任一偏序集合，假如它的每一个非空子集都有最小元，这种偏序集称为良序的。

例如，$I_n=\{1，2，…，n\}$及$N=\{1，2，3，…\}$，对于小于等于关系来说是良序集合，即$<I_n，\leq>$，$<N，\leq>$是良序集合。

定理3-12.2：每一良序集合，一定是全序集合。

证明 设<A，≤>为良序集合，则对任意两个元素x,y∈A可构成子集{x,y}，必存在最小元素，这个最小元素不是x就是y，因此一定有x≤y或y≤x。所以<A，≤>为全序集合。

定理3-12.3：每一有限的全序集合，一定是良序集合。

证明 设A={a1,a2, ..

在假定$\langle A, \leq \rangle$不是良

子集B,在B中不存在最

合，故一定可以找出

$\langle A, \leq \rangle$是全序集，x,y∈A,所以x,y必有关系，得出

矛盾，故$\langle A, \leq \rangle$必是良序集合。

对无限的全序集合不一定成立。
例如，大于零小于1的全部实数，按大小次序关系是一个全序集合，但不是良序集合，因为集合本身就不存在最小元素。

作业

145页(1)、(6)、(7)

The End