离散数学 II
Discrete Mathematics Ⅱ

封筠

fengjun@stdu.edu.cn

20-10

课程回顾

等价关系和等价类：等价关系的定义与证明、模k等价关系、等价类定义与性质、模k等价类、商集的定义与特点、等价关系与集合划分的一一对应关系

练习: 设A={1,2,3,4,5,6,7,8,9}, R为A上的关系

$$R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y \in A \wedge x \equiv y \pmod 3\}$$

要求：1、验证R为A上的等价关系；

2、写出元素的等价类；

3、写出商集A/R。

第三章 集合与关系第6讲

3—11 相容关系

3-11 相容关系

要求：掌握相容关系、相容类、最大相容类、完全覆盖的概念，会求由相容关系R产生相容类、最大相容类C_R以及集合的完全覆盖$C_R(A)$。

举例：A={cat, teacher, cold, desk, knife, by}

R={ <x,y>|x,y∈A且x,y有相同的字母}。

令x1=cat，x2=teacher，x3=cold，x4=desk，

x5=knife，x6=by

R={<X1,X1>,<X1,X2>,<X1,X3),<X2,X1>,<X2,X2>,<X2,X3>,<X2,X4>,<X2,X5>,<X3,X1>,<X3,X2>,<X3,X3>,<X3,X4>,<X4,X2>,<X4,X3>,<X4,X4>,<X4,X5>,<X5,X2>,<X5,X4>,<X5,X5>}

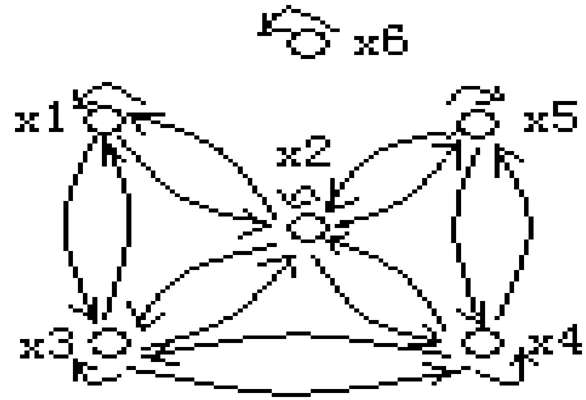
举例：A={cat, teacher, cold, desk, knife, by}

R={ $<x,y>|x,y\in A$且x,y有相同的字母}。

R的关系矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

R的关系图为



特点：矩阵主对角线为1，对称矩阵；

关系图中每一个结点都自有回路，且弧线都是成对出现。自反的、对称的，但不是传递的。

一、相容关系及其表示

1、定义3-11.1：设集合A上的关系R，若R是自反的、对称的，则称R为相容关系。

例如，设A={a,b,c,d}，A上的二元关系：

R={<a,a>,<b,b>,<c,c>,<d,d>,<a,c>,<c,d>,<c,a>,<d,c>}。

显然，自反的、对称的，R是一个相容关系。但R不是一个等价关系。

注意：等价关系一定是相容关系，相容关系不一定是等价关系。

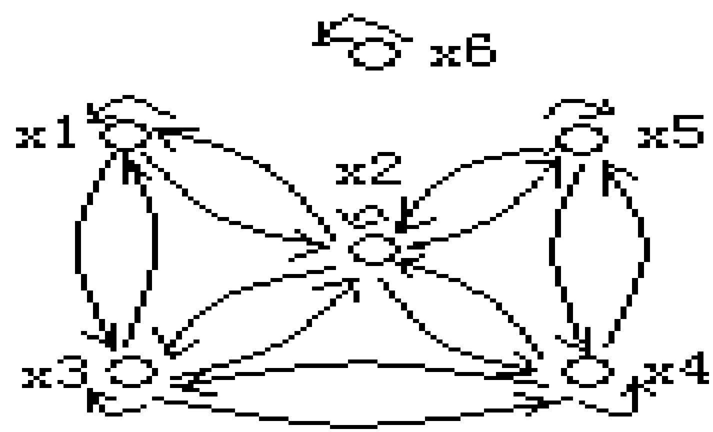
上例中，令x1=cat，x2=teacher，x3=cold，x4=desk，x5=knife，x6=by

R={<X1,X1>,<X1,X2>,<X1,X3),<X2,X1>,<X2,X2>,<X2,X3>,<X2,X4>,<X2,X5>,<X3,X1>,<X3,X2>,<X3,X3>,<X3,X4>,<X4,X2>,<X4,X3>,<X4,X4>,<X4,X5>,<X5,X2>,<X5,X4>,<X5,X5>}

R的关系矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

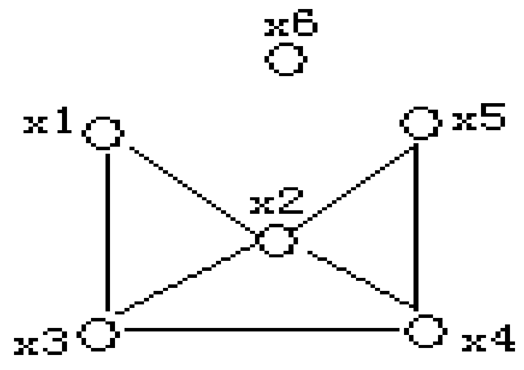
R的关系图为



2、表示：简化关系矩阵、关系图

$$\begin{array}{c}
\\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ \\
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} \\
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \end{array}
\end{array}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	1				
x_3	1	1			
x_4	0	1	1		
x_5	0	1	0	1	
x_6	0	0	0	0	0



关系矩阵可用梯形表示，不画自回路，用单线代替来回弧线

二、相容类

1、定义3-11.2：设R为集合A上的相容关系，若C⊆A，如果对于C中任意两个元素a_1、a_2有$a_1 R\ a_2$，称C是由相容关系R产生的相容类。

上例的相容关系R可产生相容类{x1，x2}，{x1，x3}，{x2，x3}，{x6}，{x2，x4，x5}等等。

相容类{x1，x2}中加进x3组成新的相容类{x1， x2，x3}，

相容类{x1，x3}中加进x2组成新的相容类{x1， x2，x3}，

相容类{x2，x3}中加进x1组成新的相容类{x1， x2，x3}

相容类 {x6}和{x2，x4，x5}加入任一新元素，就不再组成相容类，称它们是最大相容类。

说明：相容类与等价类的区别？

1、唯一性？

包含某一个元素X的等价类是唯一的，而相容类可以不唯一。

2、是否相交？

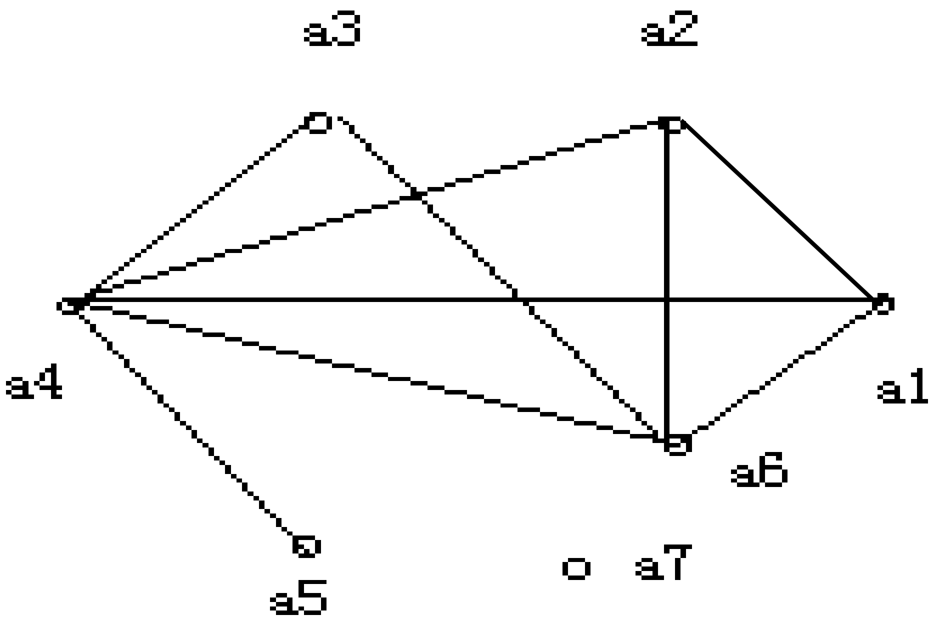
不同的等价类相交为空集，而不同的相容类相交可以非空。

2、最大相容类

定义3-11.3：设R为集合A上的相容关系，不能真包含在任何其他相容类中的相容类，称作**最大相容类**，记作C_R。

如上面例题中，{x1， x2，x3}，{x6}，{x2，x4，x5}都是最大相容类。

例题1：设给定相容关系如137页图3-11.3所示，写出最大相容类。



解：最大相容类为：{a1，a2，a4，a6}，{a3，a4，a6}，{a4，a5}，{a7}

寻找最大相容类的方法：关系图法

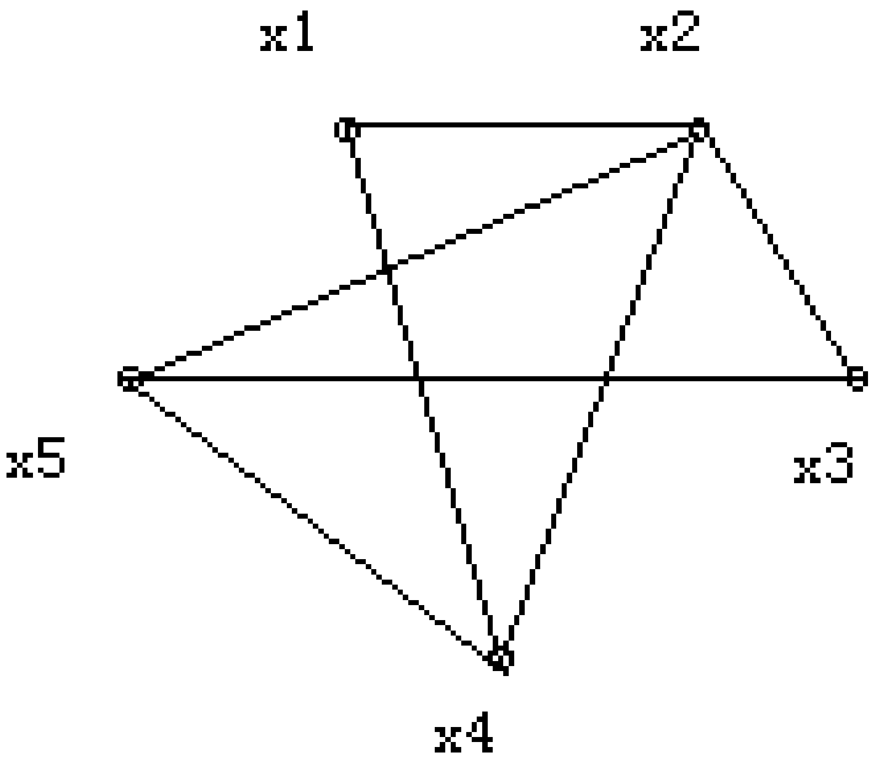
（1）一个孤立点的集合也是最大相容类；

（2）在相容关系的简化图中，最大完全多边形是每个顶点与其他所有顶点相连的多边形。这种最大完全多边形的顶点集合，才是最大相容类；

（3）如果两点连线不是最大

边，这两个顶点的集合也是最

寻找最大完全子图



例:求出关系图相对应的最大相容类.

解:{x1,x2,x4},

{x2,x3,x5},

{x2,x4,x5}

3、定理3-11.1：设R为有限集A上的相容关系，C是一个相容类，那么必存在一个最大相容类C_R，使得$C \subseteq C_R$。

证明：设$A=\{a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n\}$，构造相容类序列 $C_0 \subseteq C_1 \subseteq C_2 \subseteq \ldots\ldots$，其中$C_0 = C$

且$C_{i+1} = C_i \cup \{a_j\}$，其中j是满足$a_j \notin C_i$而$a_j$与$C_i$中各元素都有相容关系的最小足标。

由于A的元素个数$|A|=n$，所以至多经过$n-|C|$步，就使这个过程终止，而此序列的最后一个相容类，就是所要找的最大相容类。

此定理的证明告诉我们找最大相容类的方法。

从定理**3-11.1**中可以看到，**A**中任一元素**a**，它可以组成相容类**{a}**，因此必包含在一个最大相容类中，因此如由所有最大相容类作出一个集合，则**A**中每一元素至少属于该集合的一个成员之中，所以最大相容类集合必覆盖集合**A**。

三、完全覆盖

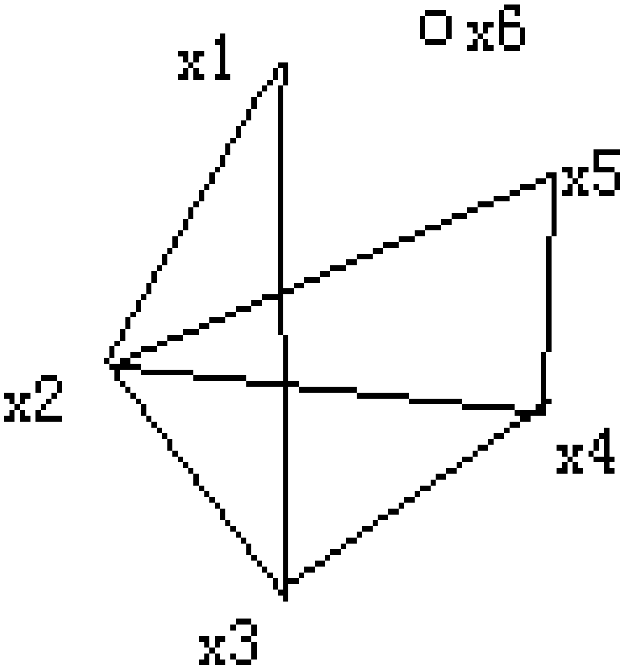
1、定义3-11.4：在集合A上的给定相容关系R，其最大相容类的集合称作集合A的完全覆盖，记作$C_R(A)$。

如例题1中，给定A的相容关系则有唯一的完全覆盖：{{a1，a2，a4，a6}，{a3，a4，a6}，{a4，a5}，{a7}}

思考：

1、任一个相容关系的相容类能否确定唯一的覆盖呢？

2、任一个相容关系的相容类能否确定唯一的完全覆盖呢？



A_1={x1,x2}, A_2={x1,x3},
A_3={x2,x3,x4}, A_4={x2,x3},
A_5={x6}, A_6={x2,x4,x5},

A_1={x1,x2,x3}, A_2={x2,x3,x4},
A_3={x6}, A_4={x2,x4,x5}

注: 给定相容关系R,集合A上的覆盖不唯一;但其完全覆盖唯一.

结论:

1、集合中的相容关系,唯一确定了该集合上的完全覆盖;

2、集合中的等价关系, 唯一确定了该集合上的划分.

如前面的例子，设**A**是由下列英文单词组成的集合。

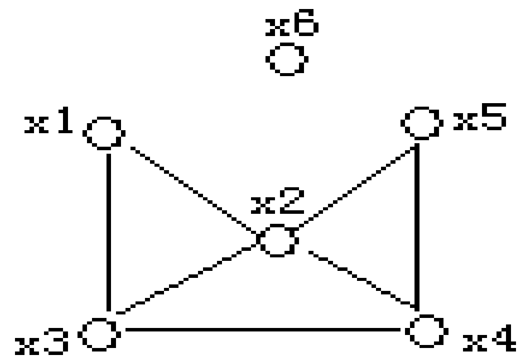
A={cat，teacher，cold，desk，knife，by}

定义关系：

R={<x，y>|x，y∈A，x和**y**有相同的字母**}**。

R是一个相容关系。

R的关系矩阵和关系图分别为：



x_2	1				
x_3	1	1			
x_4	0	1	1		
x_5	0	1	0	1	
x_6	0	0	0	0	0
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5

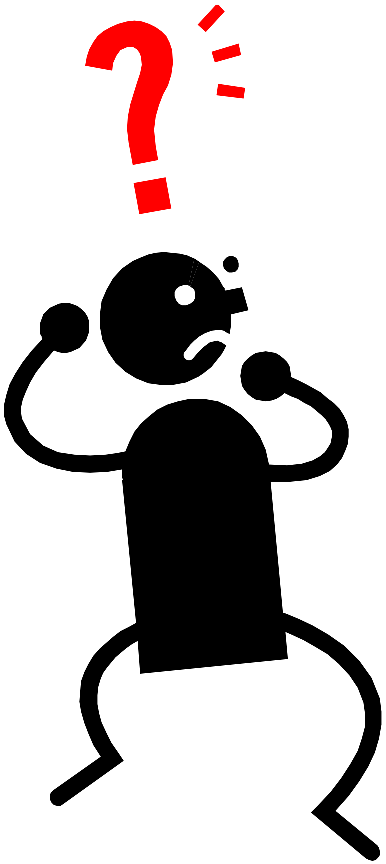
最大相容类为{x1， x2，x3}，{x6}，{x2，x4，x5}，{x2，x3，x4}

集合A的完全覆盖

$C_R(A)$={ {x1， x2，x3}，{x6}，{x2，x4，x5}，{x2，x3，x4} }

2、定理3-11.2：给定集合A的覆盖｛A_1，A_2，…，A_n｝，由它确定的关系$R=A_1\times A_1\cup A_2\times A_2\cup\ldots\cup A_n\times A_n$是相容关系。

例如，设A={1，2，3，4}，集合{{1，2，3}，{3，4}}和{{1，2}，{2，3}，{1，3}，{3，4}}都是A的覆盖，但它们可以产生相同的相容关系R={<1，1>，<1，2>，<2，1>，<2，2>，<2，3>，<3，2>，<1，3>，<3，1>，<3，3>，<4，4>，<3，4>，<4，3>}



思考：

1、不同的完全覆盖能否确定相同的相容关系？

2、不同的覆盖能否确定相同的相容关系？

例如: A={1,2,3,4},

覆盖1为{{1,2,3},{3,4}},

覆盖2为{{1,2},{2,3},{1,3},{3,4}}

产生的相同相容关系:

{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>,<2,3>,<3,2>,

<1,3>,<3,1>,<3,3>,<4,4>,<3,4>,<4,3>}

3、定理3-11.3：集合A上的相容关系R与完全覆盖$C_R(A)$存在一一对应。

练习

139页(4)、(6)

作业

139页(1)、 (2)、 (3) 、(5)

The End