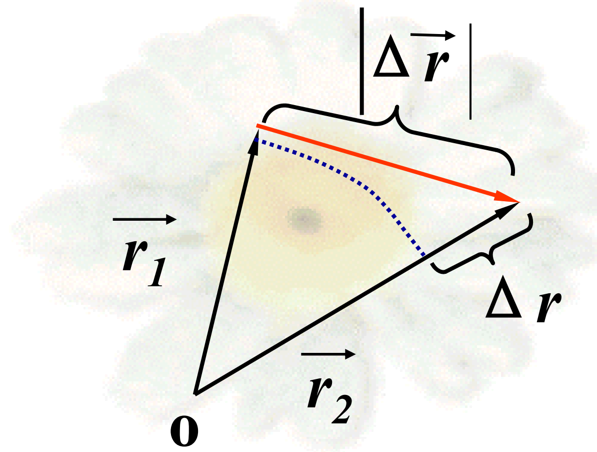
回顾

描述质点运动的基本物理量

位置：位置矢量 $\vec{r},\ \vec{r}(t)$

位置变化：位移矢量 $\Delta\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$

位置变化率：速度矢量 $\vec{v}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$

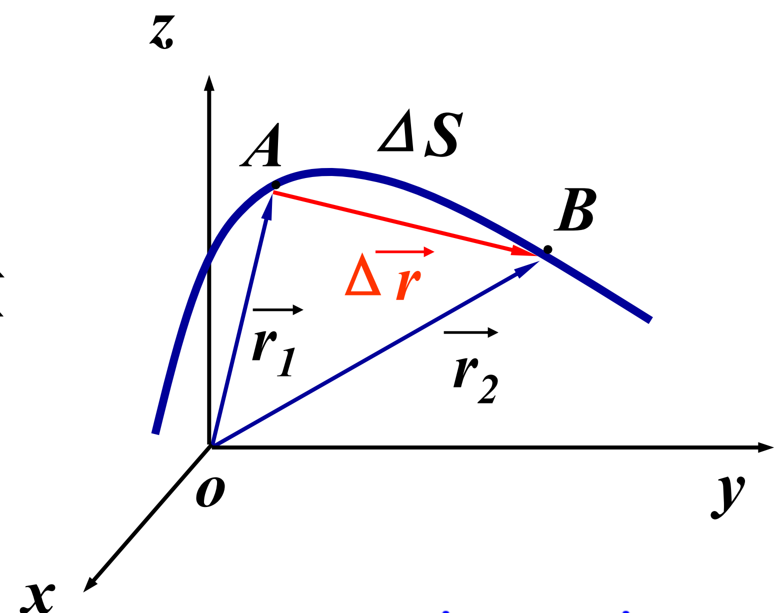


$$\Delta r = |\vec{r}_2| - |\vec{r}_1| \qquad \Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$|\Delta \vec{r}| \geq \Delta r$$

★ Δs 与 $\Delta \vec{r}$ 的区别

Δs 为路程(轨道长度)，是标量



★ $\Delta t \to 0 \qquad |d\vec{r}| = ds$

元位移的大小 = 元路程

$$\Delta s \geq |\Delta \vec{r}|$$

例： 已知：$\vec{r} = 2t\ \vec{i} + (2 - t^2)\ \vec{j}$ (SI)

求：2s末速度的大小

解:

$$\vec{r} = 2t\ \vec{i} + \left(2 - t^2\right)\ \vec{j}$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = 2\ \ \vec{i} - 2t\ \ \vec{j}$$

$$v_x = 2 \quad v_y = -2t$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2\ \sqrt{1 + t^2}$$

$$t = 2 \quad v_2 = 2\sqrt{5}\ \ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 4.47\ \ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

4. 加速度矢量 $\vec{a}$

描述质点速度变化（大小和方向）的快慢

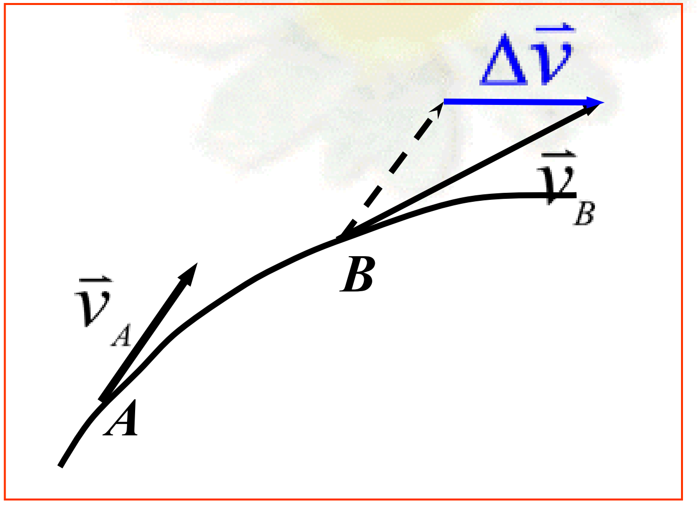
粗略描述

t时刻，A点 $\vec{v}_A$

$t+\Delta t$ 时刻，B 点，$\vec{v}_B$

Δt 时间内速度改变为

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$



$$\overline{\vec{a}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$ ———平均加速度

瞬时加速度 —— 当Δt 趋于0时

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

加速度等于速度对时间的一阶导数, 或位矢对时间的二阶导数。

特性：矢量性、瞬时性、相对性

在直角坐标系中：

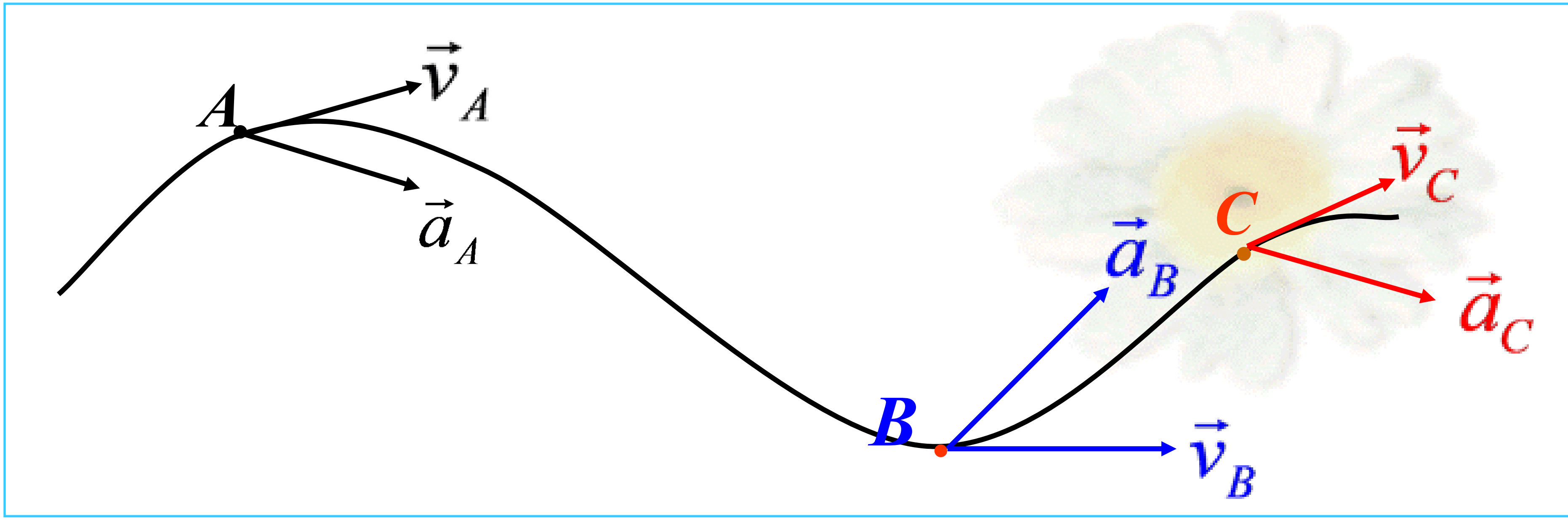
$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

$$=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\vec{k}$$

$\vec{a}$ 大小：$|\vec{a}|=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left|\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\right|=\sqrt{a_x^{\ 2}+a_y^{\ 2}+a_z^{\ 2}}$

方向：$\Delta t\to 0$时，$\Delta\vec{v}$ 的极限方向

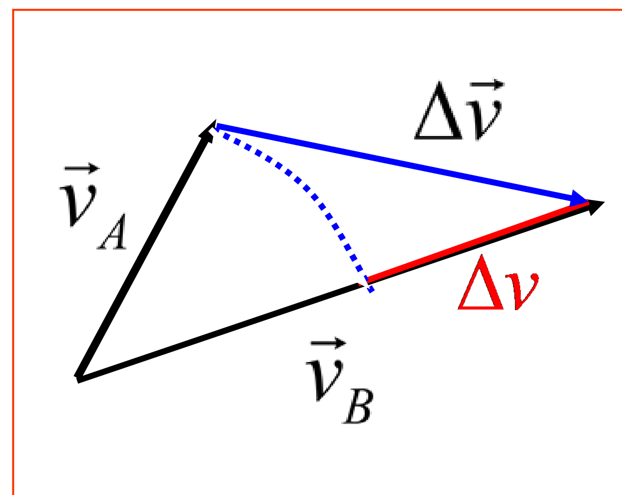
(指向曲线凹向)



思考：

$$\left|\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad ?$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t} \quad ?$$



位矢$\vec{r}$　位移$\Delta\vec{r}$　速度 $\vec{v}$　加速度 $\vec{a}$

注意

★矢量性：四个量都是矢量，有大小和方向

加减运算遵循平行四边形法则

★瞬时性：$\vec{r}$ $\vec{v}$ $\vec{a}$ $\longrightarrow$ 某一时刻的瞬时量

不同时刻不同

$\Delta\vec{r}$ $\longrightarrow$ 过程量

★相对性：不同参照系中，同一质点运动描述不同

不同坐标系中，具体表达形式不同

小结

描述质点运动的基本物理量

位置： 位矢矢量 $\vec{r},\ \vec{r}(t)$

位置变化： 位移矢量 $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

位置变化率： 速度矢量 $$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

速度变化率： 加速度矢量 $$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

知识回顾

运动方程→轨迹方程（轨道）

在直角坐标系中：

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

$$= \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\vec{k}$$

二、运动学中的两类问题

1、已知运动方程，求速度、加速度

$\longrightarrow$ 求导数

2、已知加速度和初始条件，求速度和运动方程

$\longrightarrow$ 运用积分方法

特别指出

★ 讨论问题一定要选取坐标系

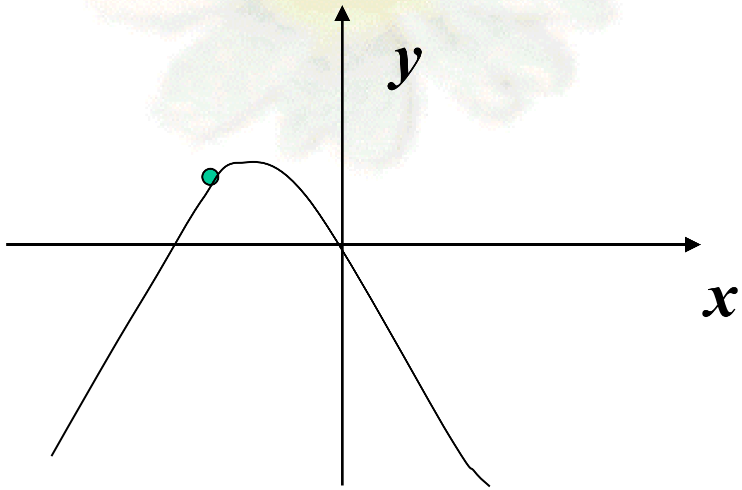
★ 注意矢量的书写

★ $d\vec{r}, ds, d\vec{v}, dt$ 与 $\Delta\vec{r}, \Delta s, \Delta\vec{v}, \Delta t$ 的物理含义

1、已知运动方程，求速度、加速度

例1：一质点运动轨迹为抛物线

$$\begin{cases} x = -t^2 & \text{(SI)} \\ y = -t^4 + 2t^2 & \text{(SI)} \end{cases}$$



求：x= -4m时（t>0)

粒子的速度、速率、加速度。

解:
$$\begin{cases} x = -t^2 \quad \text{(SI)} \\ y = -t^4 + 2t^2 \quad \text{(SI)} \end{cases}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -2t \xrightarrow{t=2} v_x = -4\,m/s$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -4t^3 + 4t \xrightarrow{t=2} v_y = -24\,m/s$$

$$\vec{v} = -4\vec{i} - 24\vec{j}\ m/s \qquad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 4\sqrt{37}\ m/s$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -2ms^{-2}$$

练习 $a_y = ?$

$$a_y = -12t^2 + 4 = \text{-}44\text{m/s}^2$$

$$\vec{a} = -2\hat{i} - 44\hat{j}$$

例2. 设质点做二维运动：

$$r = 2t\hat{i} + (2 - t^2)\hat{j}$$

求t=0秒及t=2秒时质点的速度，并求后者的大小和方向。

解：

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=2\vec{i}-2t\vec{j}$$

$$t=0 \quad \vec{v}_0=2\vec{i} \qquad t=2 \quad \vec{v}_2=2\vec{i}-4\vec{j}$$

大小： $v_2=\sqrt{2^2+4^2}=4.47m/s$

方向： $\theta=\arctan\frac{-4}{2}=-63^\circ 26'$

θ为$\overrightarrow{v_2}$与x轴的夹角

2、已知加速度和初始条件，求速度和运动方程

例3. 已知：质点沿直线运动，

$a=c\ ;\ t=0:\ x=x_0\quad v=v_0$ 求：$v(t)$ ，$x(t)$

例3. 已知：质点沿直线运动，

$a = c$; $t = 0$: $x = x_0 \quad v = v_0$ 求: $v(t)$, $x(t)$

解:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}v = a\mathrm{d}t \qquad \mathrm{d}x = v\mathrm{d}t$$

$$\int_{v_0}^{v} \mathrm{d}v = \int_0^t a\mathrm{d}t \qquad \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x = \int_0^t v\mathrm{d}t$$

$$v - v_0 = \int_0^t a\mathrm{d}t \qquad x - x_0 = \int_0^t v\mathrm{d}t$$

$$v = v_0 + at \quad * \qquad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \; *$$

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{v\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \quad \int_{v_0}^{v} v\mathrm{d}v=\int_{x_0}^{x} a\mathrm{d}x$$

$$v^2-v_0^2=2a(x-x_0)*$$

$$v=v_0+at$$

$$x-x_0=v_0t+\frac{1}{2}at^2$$

$$v^2-v_0^2=2a(x-x_0)$$

例4. 一质点由静止开始作直线运动，初始加速度为a_0，以后加速度均匀增加，每经过τ秒增加a_0，求经过 t 秒后质点的速度和运动的距离。

例4. 一质点由静止开始作直线运动，初始加速度为a_0，以后加速度均匀增加，每经过τ秒增加a_0，求经过 t 秒后质点的速度和运动的距离。

解：据题意知，加速度和时间的关系为：

$$a = a_0 + \frac{a_0}{\tau}t \qquad \because a = \frac{dv}{dt} \therefore dv = adt$$

（直线运动中可用标量代替矢量）

$$\int_0^v dv = \int_0^t adt = \int_0^t (a_0 + \frac{a_0}{\tau}t)dt = a_0 t + \frac{a_0}{2\tau}t^2$$

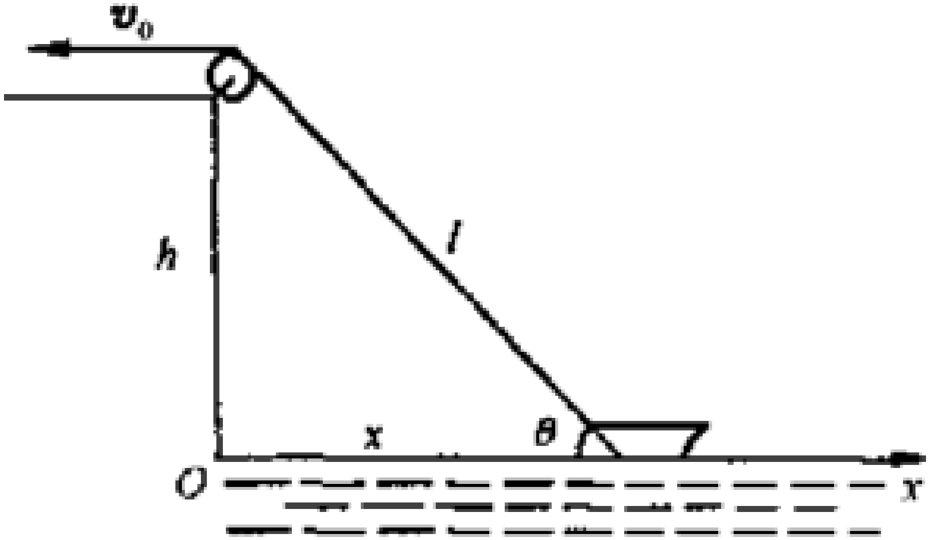
$$v = a_0 t + \frac{a_0}{2\tau}t^2$$

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad dx = vdt$$

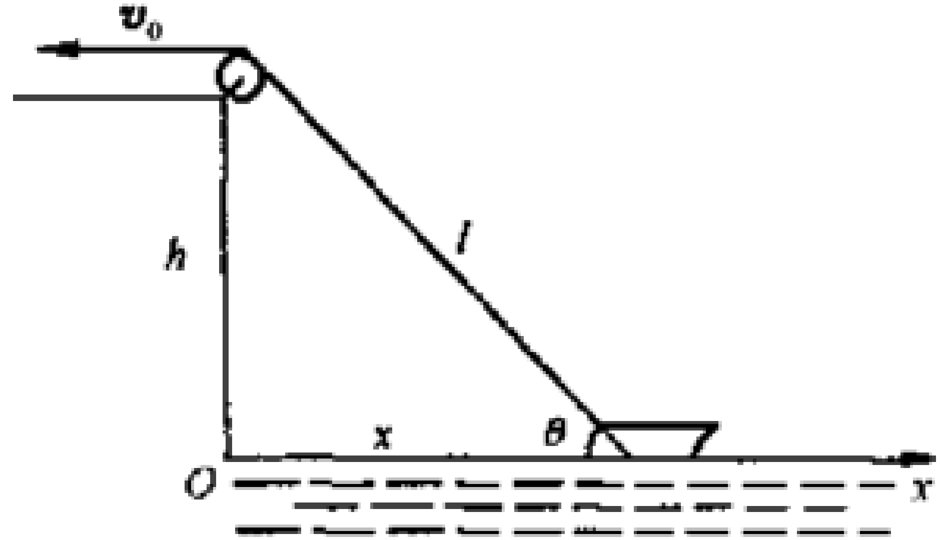
$$\therefore x = \int_0^t vdt = \int_0^t (a_0 t + \frac{a_0}{2\tau} t^2) dt = \frac{a_0}{2} t^2 + \frac{a_0}{6\tau} t^3$$

$$x = \frac{a_0}{2} t^2 + \frac{a_0}{6\tau} t^3$$

例5. 在离水面高h的岸上，有人用绳拉船靠岸，如图。设人以匀速率 v_0 收绳。
试求：当船距岸边 x_0 时，船的速度和加速度的大小各是多少？



例5. 在离水面高h的岸上，有人用绳拉船靠岸，如图。设人以匀速率 v_0 收绳。
试求：当船距岸边 x_0 时，船的速度和加速度的大小各是多少？



解 建立坐标系如图

设任意时刻t，绳长为l，船处于x位置

收绳过程中满足关系

$$l^2 = x^2 + h^2$$

两边求导得

$$2l\frac{dl}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$$

$$2l\frac{dl}{dt}=2x\frac{dx}{dt}\qquad v_0=-\frac{dl}{dt}\rightarrow$$ 收绳过程中l随时间减小

则船运动的速度为

$$v=\frac{dx}{dt}=-\frac{l}{x}v_0=-\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}v_0$$

对速度求导即可得到船运动的加速度

$$a=\frac{dv}{dt}=-\frac{v_0}{x^2}\left(x\frac{dl}{dt}-l\frac{dx}{dt}\right)=-\frac{h^2v_0^2}{x^3}$$

思考 船做怎样的运动？加速？减速？

例6. 一艘快艇在速率为 v_0 时关闭发动机，其加速度$a=-kv^2$，式中k为常数，试证明关闭发动机后又行驶距离x时，快艇速率为：$v=v_0e^{-kx}$

例6. 一艘快艇在速率为 v_0 时关闭发动机，其加速度$a=-kv^2$，式中k为常数，试证明关闭发动机后又行驶距离x时，快艇速率为： $v=v_0e^{-kx}$

证明： $a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{v\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-kv^2$

分离变量

$$\frac{\mathrm{d}v}{v}=-k\mathrm{d}x$$

$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v}=\int_0^x -k\mathrm{d}x \qquad \ln\frac{v}{v_0}=-kx$$

$$v=v_0e^{-kx}$$