大学物理学电子教案

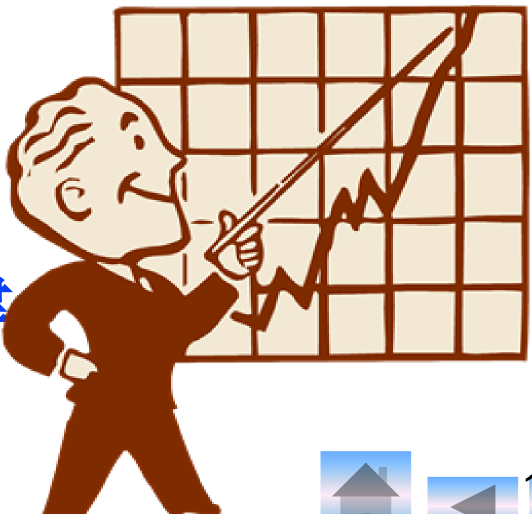
机械能与机械能守恒定律

2-4　功 动能 动能定理

2-5　保守力的功　势能

2-6　功能原理　机械能守恒定律

*§2-7　碰　撞



复习

•冲量

$$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt$$

•动量定理

$$\vec{I}=\int\vec{F}dt=\Delta\vec{P}$$

•质点系的动量定理

$$\vec{I}=\vec{P}-\vec{P}_0$$

•动量守恒定律

$$\vec{P}=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i=\text{恒矢量}$$

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

对上式运算 $\longrightarrow$ 寻找物理意义

乘以时间元dt $\longrightarrow$ 动量定理

点乘元位移dr $\longrightarrow$ 动能定理

与r叉乘 $\longrightarrow$ 角动量定理

（第三章学习）

…… $\longrightarrow$ ……

2-4 功 动能 动能定理

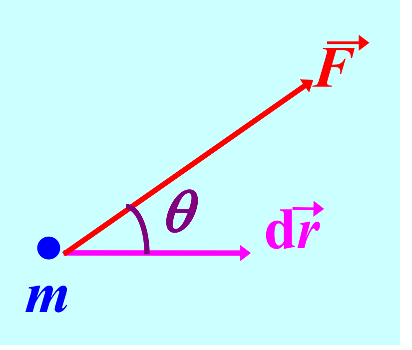
一、功与功率

1、功 功是力和它所作用的质点的位移的点积。

（1）元功（对微小过程，可当成恒力、直线运动）

$$\mathrm{d}A=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

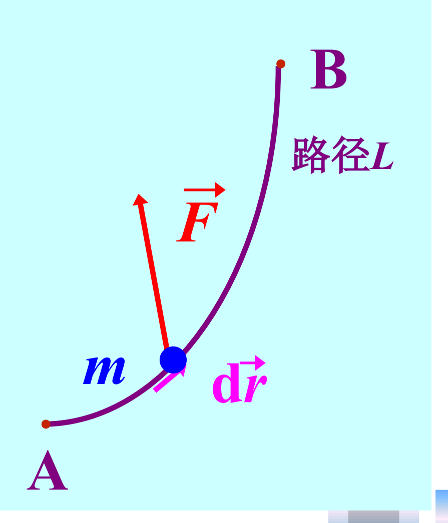
$$\mathrm{d}A=F\cos\theta\,\mathrm{d}r$$



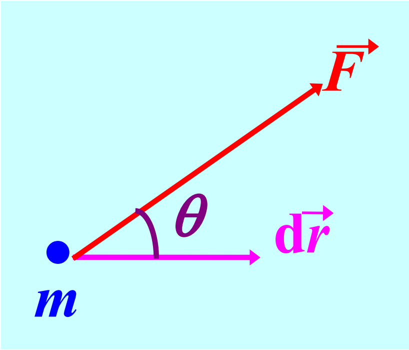
（2）功 如质点沿路径 L 由 $A\to B$，力 F 所做的功为

$$A=\int_{A\,(L)}^{B}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$A=\int_{A}^{B}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_{A}^{B}F\cos\theta\,\mathrm{d}r$$



说明：



（1）功是标量，没有方向，但有正负。

例如元功 $\mathrm{d}A = F\cos\theta\,\mathrm{d}r$

$$0^\circ < \theta < 90^\circ, \quad \mathrm{d}A > 0$$

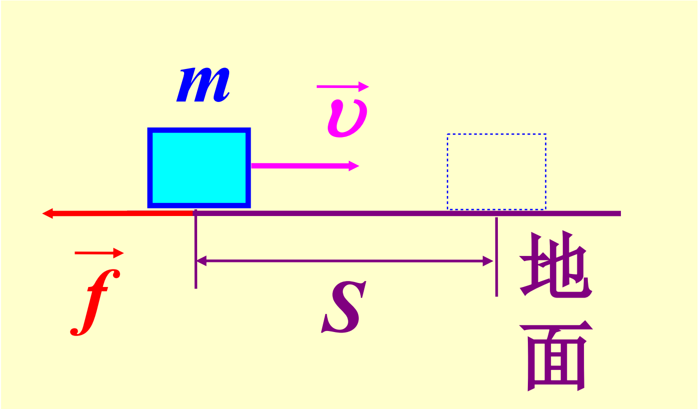
$$90^\circ < \theta < 180^\circ, \quad \mathrm{d}A < 0$$

$$\theta = 90^\circ \quad \vec{F} \perp \mathrm{d}\vec{r} \quad \mathrm{d}A = 0$$

（2）功是过程量，与路径有关。

（3）功和参考系的选择有关。

如图，摩擦力的功



从地面上看： $A = -fs$

从m上看： $A' = 0 \neq A$

（4）合力的功 = 分力的功的代数和

$$A=\int\sum\vec{F}_i\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\sum\int\vec{F}_i\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\sum_i A_i$$

（5）功的计算

$$\boxed{A=\int_{A\,(L)}^{B}\vec{F}\cdot d\,\vec{r}}$$

$$\vec{F}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k}$$

$$d\vec{r}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}$$

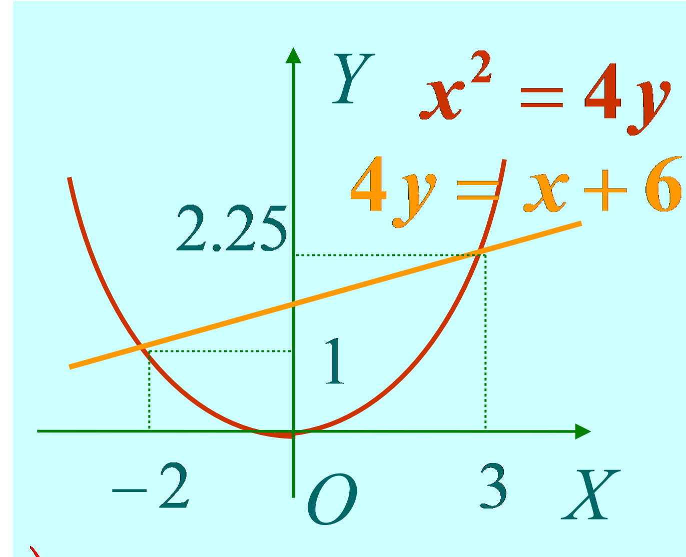
$$A=\int\left(F_x dx+F_y dy+F_z dz\right)$$

例1 作用在质点上的力为

$\vec{F} = 2y\vec{i} + 4\vec{j}(N)$ 。求质点从

$x_1 = -2(m)$ 处运动到 $x_2 = 3(m)$

处该力作的功：沿直线和抛物线。



解：$A = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_a^b \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz \right)$

直线 $A_1 = \int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} (F_x dx + F_y dy) = \int_{x_1}^{x_2} 2y dx + \int_{y_1}^{y_2} 4 dy$

$$= \int_{-2}^{3} \frac{1}{2}(x+6) dx + \int_1^{9/4} 4 dy = 21.25J$$

抛物线 $A_2 = \int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} (F_x dx + F_y dy) = \int_{x_1}^{x_2} 2y dx + \int_{y_1}^{y_2} 4 dy$

$$= \int_{-2}^{3} \frac{x^2}{2} dx + \int_1^{9/4} 4 dy = 10.8J$$

2、功率（表示作功的快慢）

(1) 平均功率：$\overline{P} = \dfrac{\Delta A}{\Delta t}$

$\mathrm{d}A = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$

(2) 瞬时功率：$P = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta A}{\Delta t} = \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

瞬时功率等于力与物体速度的点积。

- 功率的单位（瓦特）$1\mathrm{W} = 1\mathrm{J} \cdot \mathrm{s}^{-1}$　$1\mathrm{kW} = 10^3\,\mathrm{W}$

几个功率的数量级：

睡觉	70—80W(基础代谢)	闲谈	70—80W
走路	170—380W	听课	70—140W
跑步	700—1000W	足球	630—840W

例2. 质量为$2kg$的质点在力 $\vec{F}=12t\vec{i}$ (SI) 的作用下，从静止出发，沿x轴正向作直线运动。求（1）前三秒内该力所作的功；（2）t=3s时的功率。

解：（一维运动可以用标量）

（1）$$A=\int \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}dt=\int_0^3 12tv\,dt$$

$$v=v_0+\int_0^t a\,dt=0+\int_0^t\frac{F}{m}dt=\int_0^t\frac{12t}{2}dt=3t^2$$

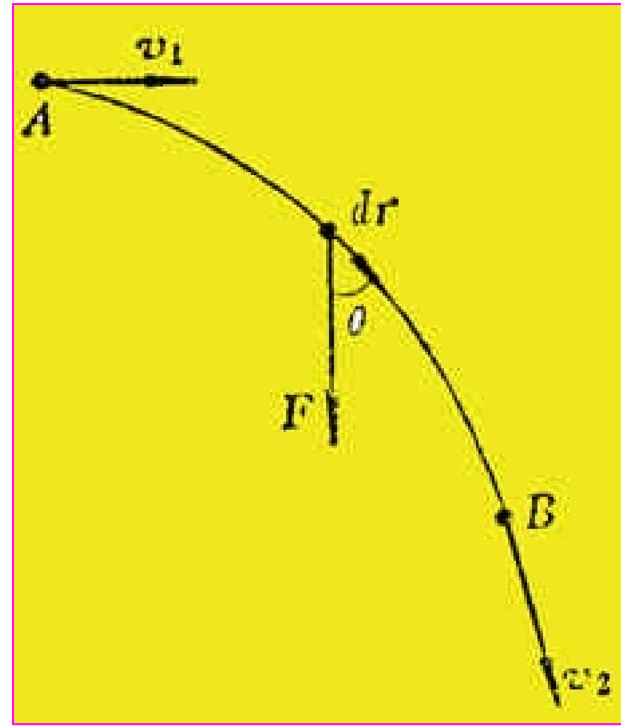
$$\therefore A=\int_0^3 12t\cdot 3t^2 dt=\int_0^3 36t^3 dt=9t^4\Big|_{t=3}=729J$$

（2）$$P=\vec{F}\cdot\vec{v}=12t\cdot 3t^2\Big|_{t=3}=972\text{W}$$

二、质点的动能定理

1、问题：

一质量为m 的物体在合外力F的作用下，由A点运动到B点，其速度的大小由v_1变成v_2。求合外力对物体所作的功与物体动能之间的关系。



$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = md\vec{v}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = m\vec{v}\cdot d\vec{v}$$

$$m\vec{v}\cdot d\vec{v} = mvdv$$

$$\int\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{v_1}^{v_2} mv\cdot dv$$

$$A = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

定义：动能$E_k = mv^2/2$

单位：J　　量纲：ML^2T^{-2}

2、质点的动能定理：

合外力对质点所作的功等于质点动能的增量。

说明：

（1）功和动能都与参考系有关，动能定理只适用于惯性系。

（2）动能定理说明：功是质点动能变化的量度

过程量 状态量

（3）动能、动量都是表征物体运动状态的重要物理量。

功 ⟷ 动能定理 ⟷ 反映力的空间累积

冲量 ⟷ 动量定理 ⟷ 反映力的时间累积

2-5 保守力的功　势能

一、几种常见力作功特点

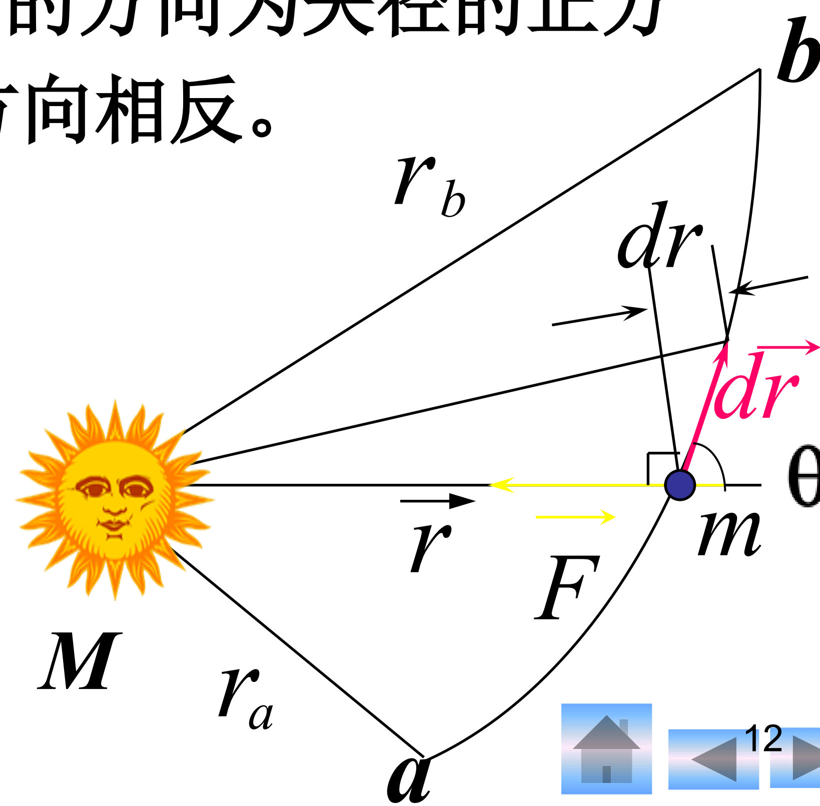
1、 万有引力的功

规定：两个质点之间在引力作用下相对运动时，以*M*所在处为原点，*M*指向*m*的方向为矢径的正方向。*m*受的引力方向与矢径方向相反。

$$A=\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_a^b -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}\cdot d\vec{r}$$

$$=\int_{r_a}^{r_b} -GMm\frac{1}{r^2}dr$$

$$=-GMm\frac{1}{r_a}-(-GMm\frac{1}{r_b})$$



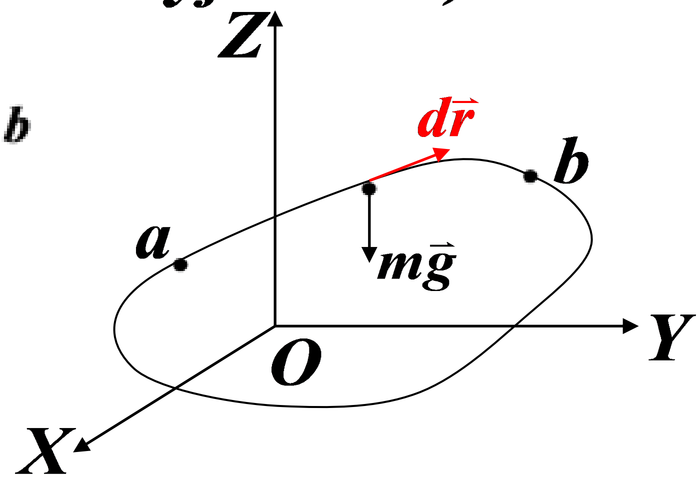
功的数值只与始末位置有关！

2、 重力的功

m在重力作用下由a运动到b，取地面为坐标原点.

$$A_G=\int_a^b m\vec{g}\cdot d\vec{r}=\int_a^b(-mg)\vec{k}\cdot(dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k})$$

$$=\int_{z_a}^{z_b}-mgdz=mgz_a-mgz_b$$



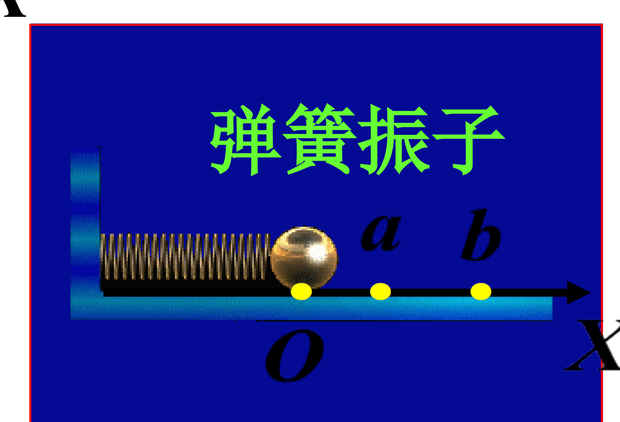
3、 弹力的功

$$F=-kx$$

$$A=\int_{x_a}^{x_b}-kxdx$$

$$=\frac{1}{2}kx_a{}^2-\frac{1}{2}kx_b{}^2$$

$$=-(\frac{1}{2}kx_b{}^2-\frac{1}{2}kx_a{}^2)$$



功的数值只与始末位置有关！

二、保守力和非保守力

1、保守力

作功只与物体的初、末位置有关，而与路径无关。

保守力的另一个特性：

——沿任一闭合路径一周作功为零

$$A_{保} = \oint_{L} \vec{F}_{保} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$$

以后遇到的保守力主要有：

重力、万有引力、弹簧的弹力、静电力

2、非保守力

作功与路径有关，如摩擦力、爆炸力。

三、势能

1、势能　与物体间相互作用及相对位置有关的能量．

重力功

$$A=-(mgz_b-mgz_a)$$

引力功

$$A=-\left[(-G\frac{Mm}{r_b})-(-G\frac{Mm}{r_a})\right]$$

弹力功

$$A=-(\frac{1}{2}kx_b^2-\frac{1}{2}kx_a^2)$$

重力势能

$$E_{\mathrm{p}}=mgz$$

引力势能

$$E_p=-G\frac{Mm}{r}$$

弹性势能

$$E_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}kx^2$$

2. 保守力作功等于势能增量的负值

$$A=-(E_{\mathrm{p2}}-E_{\mathrm{p1}})=-\Delta E_{\mathrm{P}}$$

讨论

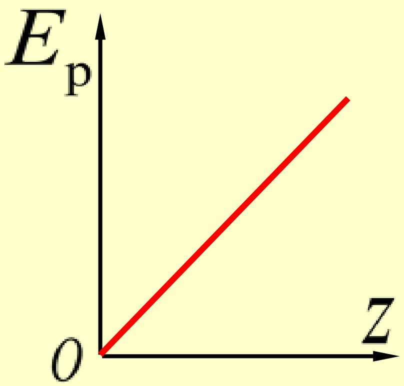
- 势能是状态函数 $E_{\mathrm{p}} = E_{\mathrm{p}}(x, y, z)$
- 势能是属于系统的．
- 势能具有相对性，势能大小与势能零点的选取有关．
- 势能计算 $A = -(E_{\mathrm{p}} - E_{\mathrm{p0}}) = -\Delta E_{\mathrm{p}}$

令 $E_{\mathrm{p0}} = 0$ $\quad E_{\mathrm{p}}(x, y, z) = \int_{(x,y,z)}^{E_{\mathrm{p0}}=0} \vec{F}_{保} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$

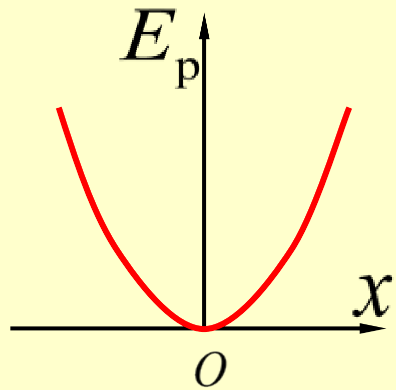
质点在某一点的势能大小等于在相应的保守力的作用下，由所在点移动到零势能点时保守力所做的功。

3、势能曲线

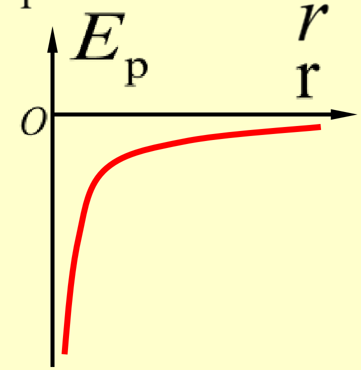
$$E_{\mathrm{p}} = mgz$$



$$E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}kx^2$$



$$E_{\mathrm{p}} = -G\frac{m'm}{r}$$



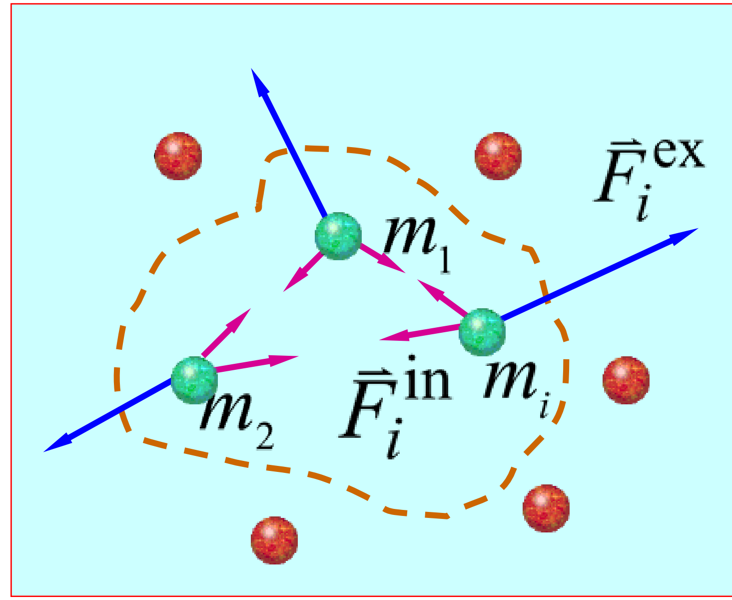
重力势能曲线 弹性势能曲线 引力势能曲线

$z=0,\quad E_{\mathrm{p}}=0$ $x=0,\quad E_{\mathrm{p}}=0$ $r\to\infty,\quad E_{\mathrm{p}}=0$

§ 2-6 功能原理 机械能守恒

一、质点系的动能定理

设由n个质点组成的质点系



对第i个质点，有

$$A_{i外} + A_{i内} = E_{ki} - E_{ki0}$$

外力功　　内力功

对质点系，有

$$\sum_n A_{i外} + \sum_n A_{i内} = \sum_n E_{ki} - \sum_n E_{ki0} = E_k - E_{k0}$$

一对作用力和反作用力的功

?

质点系动能定理 $A_{外} + A_{内} = E_k - E_{k0}$

注意　内力可以改变质点系的动能

二、质点系的功能原理

将质点系动能定理中的$A_{内}$分解为：$A_{内}=A_{保内}+A_{非保内}$

则 $A_{外}+A_{内}=E_{k}-E_{k0}$ → $A_{外}+A_{保内}+A_{非保内}=E_{K}-E_{K0}$

又 $A_{保内}=-(E_{p}-E_{p0})=-\Delta E_{p}$

$$A_{外}-(E_{P}-E_{P0})+A_{非保内}=E_{K}-E_{K0}$$

$$A_{外}+A_{非保内}=E_{K}-E_{K0}+(E_{P}-E_{P0})=(E_{K}+E_{P})-(E_{K0}+E_{P0})$$

$A_{外}+A_{非保内}=E-E_{0}$ → 积分形式

$E=E_{K}+E_{P}$，机械能

$dA_{外}+dA_{非保内}=dE$ → 微分形式

质点系的功能原理：质点系机械能的增量等于外力和非保守内力作功之和。

三、机械能守恒定律

由质点系的功能原理 $A_{外}+A_{非保内}=E-E_0$

若 $A_{外}+A_{非保内}=0$ → $E=E_0$ 或 $E=$ 恒量

机械能守恒定律:只有保守内力作功（或合外力和非保守内力作功为零）时，系统的机械能守恒。

说明:

1. 当 $\Delta E=0$ 时，

$$\Delta E_k=-\Delta E_p=A_{保内}$$

所以 $A_{内保}$ 是 E_P 与 E_K 之间转化的手段和度量。

2. 对于一个孤立系统（与外界无相互作用）

$\because A_{外}=0$　　$\therefore A_{非保内}=E_2-E_1$

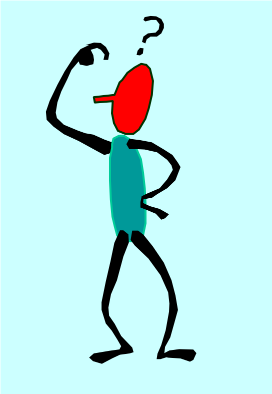
若$A_{非保内}\neq 0$，它的机械能就不守恒。

◆ $A_{非内}<0$ ----- $E_2<E_1$----机械能转化为其他形式能量。

◆ $A_{非内}>0$ ----- $E_2>E_1$----其他形式能量转化机械能。

注意：　1. 机械能守恒定律也只适用与惯性系。

2. 但是，在一个惯性系中机械能守恒，在另一个惯性系中机械能不见得守恒。



要看机械能守恒条件在该惯性系中是否成立！

机械能守恒和惯性系关系举例

四、能量守恒定律

如果考虑各种物理现象，计及各种能量，则一个孤立系统不管经历何种变化，系统所有能量的总和保持不变。

—— 普遍的能量守恒定律

机械能守恒定律是普遍的能量守恒定律在机械运动范围内的体现。

这是在美国加州的一组排成阵列的镜子，它们将太阳光会聚到塔顶处的锅炉上。

太阳能→热能

应用举例

★利用定义求功、功率等；

例1（验证功是过程量）

例2(求功和功率)

★单纯应用功能定理求解问题；

例3(功能原理)

例4(机械能守恒)

★综合类

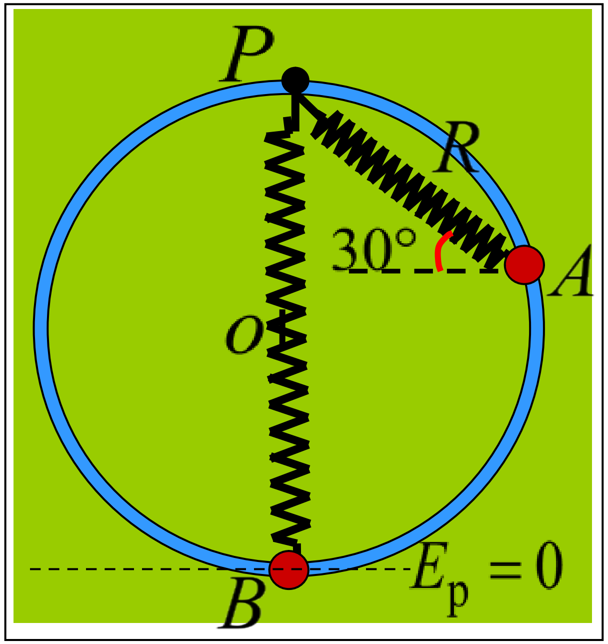
功能＋牛顿定律　　例5

功能＋动量　　例6　　例7

¶¯Á¿ÄÜÁ¿ÊØºã1

¶¯Á¿ÄÜÁ¿ÊØºã2

例3 有一轻弹簧，其一端系在铅直放置的圆环的顶点P，另一端系一质量为m的小球，小球穿过圆环并在圆环上运动(不计摩擦)。开始小球静止于点A，弹簧处于自然状态，其长度为圆环半径R；当小球运动到圆环的底端点B时，小球对圆环没有压力。求弹簧的劲度系数。



分析 以弹簧、小球和地球为一系统。

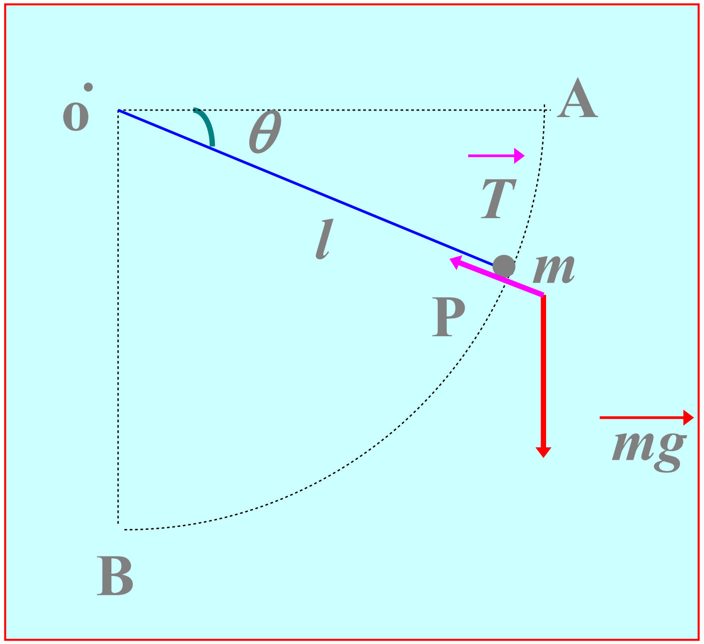
$\because A \to B$ 只有保守内力做功

$\therefore$系统机械能守恒 $E_B = E_A$

取图中点 B为重力势能零点

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}kR^2 = mgR(2 - \sin 30^\circ) \\ &kR - mg = m\frac{v_B^2}{R} \end{aligned}\right\} \Rightarrow k = \frac{2mg}{R}$$

例4 已知绳长l，绳端拴一质量m的小球，自水平位置由静止释放。求：球摆至任一位置时，球的速度及绳中的张力。



分析 过程：球自 $A \to P$（单过程）

系统：m ---地球

条件：外力T，但 $A_T = 0$；内力

mg（保守内力）；$A_{非保内}=0$

机械能守恒

选A点为势能零点，列机械能守恒方程

$$0 = \frac{1}{2} m v^2 - mg\, l \sin\theta \quad (1)$$

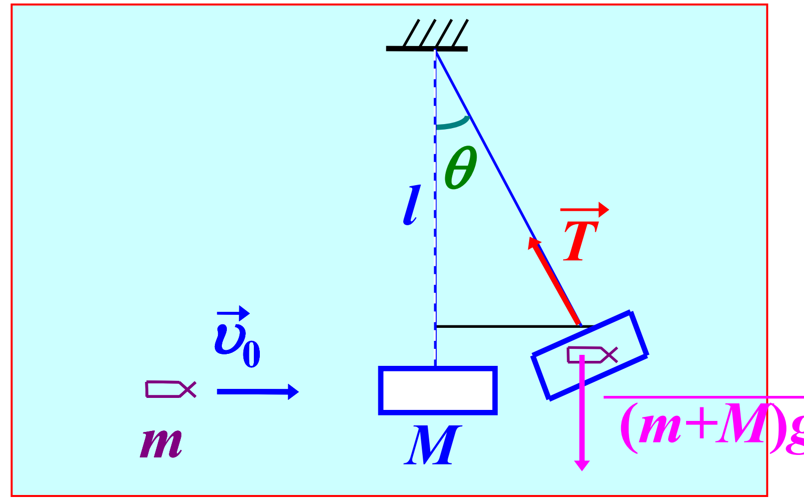
列牛顿定律方程

$$T - mg\sin\theta = m\frac{v^2}{l} \quad (2)$$

$$v = (2g\, l\sin\theta)1/2$$

$$T = 3mg\sin\theta$$

例5 子弹m以速度υ_0击中一悬挂着的木块M，并留在其中，绳长l已知。求：M摆至最高时图中的θ角。



分析　两过程

过程1：　m—M非弹性碰撞

系统：　m—M

条件：　水平动量守恒

方程：$m\vec{\upsilon}_0 = (m+M)\,\vec{\upsilon}$　　(1)

过程2：　m—M上摆

系统：　m—M—地球

条件：　外力T，但$W_T = 0$

内力 $(m+M)g$是保守内力。

机械能守恒

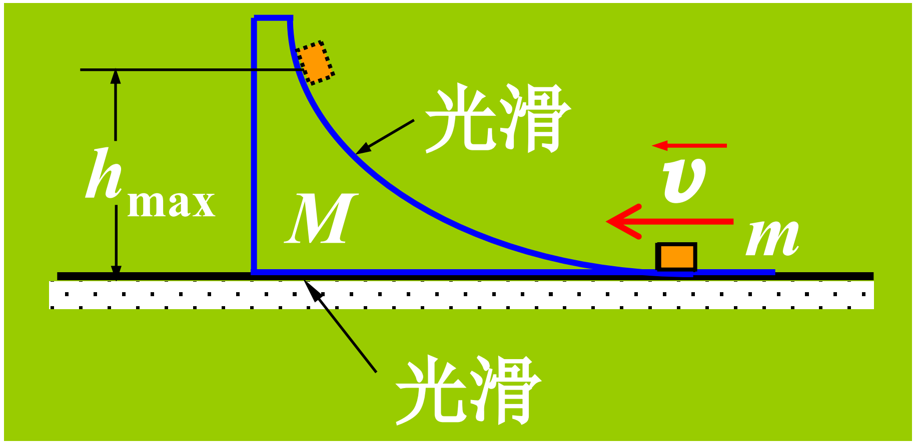
选最低点 $E_p = 0$

·方程：

$$\frac{1}{2}(m+M)\upsilon^2 = (m+M)g\,l\,(1-\cos\theta) \quad (2)$$

联立（1）和（2）可解得

例6 已知：$m = 0.2\text{kg}$， M=2kg， $v = 4.9\text{m/s}$ 。 m以速度v冲上M。求：$h_{\max} = ?$



分析 过程：m冲上M达到$h_{\max}$

两系统

系统1： $m + M$

条件： 合外力水平分力为零 水平动量守恒。

方程：$m\vec{v} = (m+M)\vec{V}$ (1)

系统2：m—M—地球

条件：$A_{外} = 0$， $A_{非保} = 0$

机械能守恒

取地面 $E_p = 0$

当$h=h_{\max}$ 时，M与m有相同的水平速度$\vec{V}$。

·方程：

$$\frac{1}{2}mv^2 + E_{pM} \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2}(m+M)V^2 + E_{pM} + mgh_{\max}$$

联立（1）和（2）可解得

小结

★加深对“功、动能、动能定理、势能、功能原理、机械能守恒定律”的理解。

★搞清规律的内容、来源、 对象、成立条件。
如它们是属于质点，还是质点系，与参考系有无关系。

★能够熟练应用定义、规律解决问题。

课下问题讨论：

一对作用力和反作用力的功讨论！

机械能守恒和惯性系关系思考！

★知识扩展：守恒定律专题

2-7 碰撞 （自学）

演示

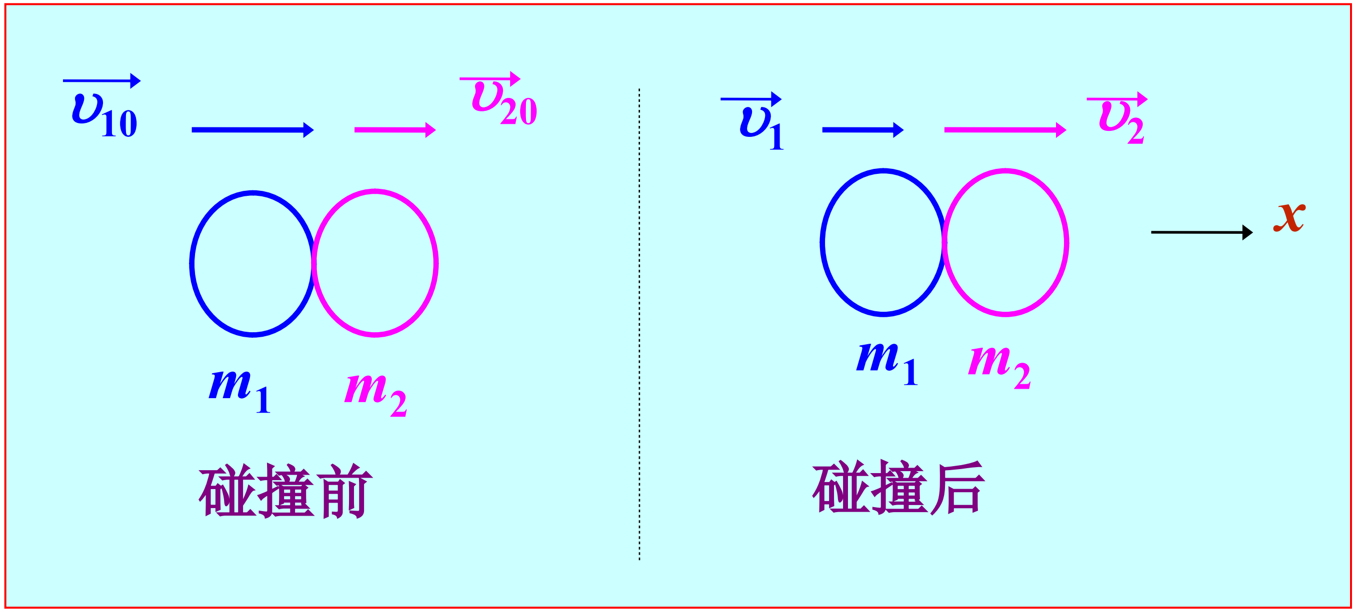
★碰撞的特点：

碰撞时间短

碰撞体间的作用力 >> 外力(外力可略，动量守恒)

★正碰：

碰撞前后的速度都沿着碰撞前碰撞后球心的联线(碰撞体可作球体)。



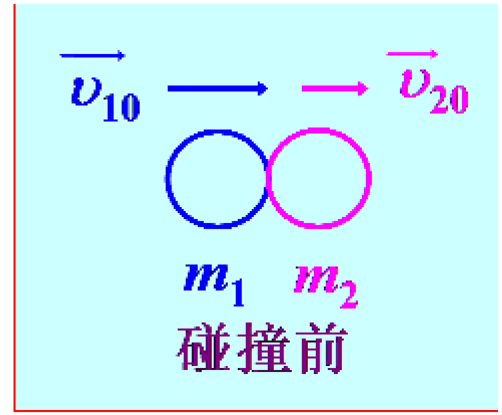
1. 弹性碰撞(动量守恒, 机械能守恒)

基本方程 沿x向动量守恒：$m_1 \upsilon_{10} + m_2 \upsilon_{20} = m_1 \upsilon_1 + m_2 \upsilon_2$

动能守恒 $\frac{1}{2}[m_1 \upsilon_{10}{}^2 + m_2 \upsilon_{20}{}^2] = \frac{1}{2}[m_1 \upsilon_1{}^2 + m_2 \upsilon_2{}^2]$

$$\upsilon_1 = \frac{(m_1 - m_2)\upsilon_{10} + 2m_2 \upsilon_{20}}{m_1 + m_2}$$

$$\upsilon_2 = \frac{(m_2 - m_1)\upsilon_{20} + 2m_1 \upsilon_{10}}{m_1 + m_2}$$



特例：

a. $m_1 = m_2$ → $\upsilon_1 = \upsilon_{20}$ 两物体
$\upsilon_2 = \upsilon_{10}$ 交换速度

b. $m_1 << m_2$ → $\upsilon_1 \cong -\upsilon_{10}$ 物体1
$\upsilon_2 \cong \frac{2m_1}{m_2} \cong 0$ 反弹

2. 非弹性碰撞(动量守恒, 机械能不守恒)

碰撞定律

恢复系数 $e=\dfrac{v_2-v_1}{v_{10}-v_{20}} \Rightarrow \begin{cases} e=1 \quad v_2-v_1=v_{10}-v_{20} & \text{弹性碰撞} \\ e=0 \quad v_2=v_1 & \text{完全非弹性碰撞} \\ 0<e<1 & \text{一般非弹性碰撞} \end{cases}$

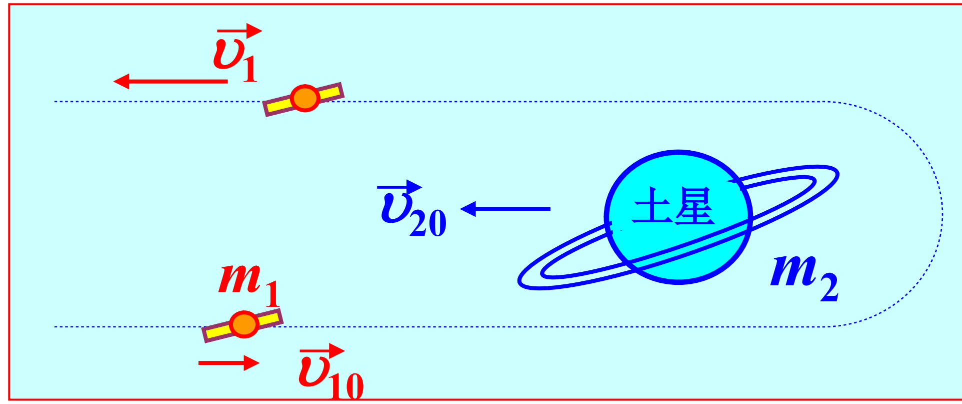
沿x向动量守恒仍成立：$m_1\upsilon_{10}+m_2\upsilon_{20}=m_1\upsilon_1+m_2\upsilon_2$

结果：$v_1=v_{10}-\dfrac{(1+e)(v_{10}-v_{20})}{m_1+m_2}m_2 \qquad v_2=v_{20}+\dfrac{(1+e)(v_{10}-v_{20})}{m_1+m_2}m_1$

碰撞过程中动能的损失：

$$\left|\Delta E_k\right|=\frac{1}{2}(1-e^2)\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(v_{10}-v_{20})^2$$

★小知识 **弹弓效应**



- 航天技术中增大宇宙探测器速率的有效方法
- 例探测器和土星

分析：视作无接触的“碰撞”过程，遵守守恒定律的情况和两球的弹性碰撞相同。

$m_1 = 150\text{kg}$

υ_{10}=10. 4km/s（相对太阳迎向土星）

$m_2 = 5.67 \times 1026\text{kg}$

速率 υ_{20}= −9. 6km/s（相对太阳）

（以υ_{10}的方向为正方向）

由 $$\upsilon_1 = \frac{(m_1-m_2)\upsilon_{10} + 2m_2\upsilon_{20}}{m_1 + m_2}$$

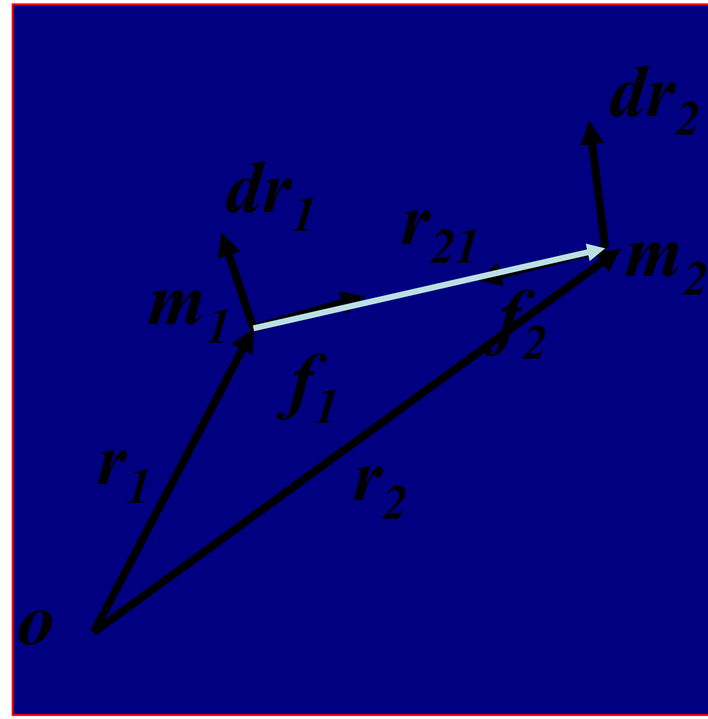
$$m_1 << m_2$$

$$\Rightarrow \upsilon_1 = -\upsilon_{10} + 2\upsilon_{20} = -29.6\ \text{m/s}$$

- 利用弹弓效应可有效减少探测器从航天飞机上发射时所需要的能量。

一对作用力和反作用力的功

m_1、m_2组成一个封闭系统
在dt时间内



$$m_1 \quad \vec{r}_1 \quad \vec{f}_1 \quad \mathrm{d}\vec{r}_1$$

$$m_2 \quad \vec{r}_2 \quad \vec{f}_2 \quad \mathrm{d}\vec{r}_2$$

$$\mathrm{d}A = \vec{f}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{f}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r}_2$$

$$\because \vec{f}_1 = -\vec{f}_2 \quad \therefore \mathrm{d}A = \vec{f}_2 \cdot (\mathrm{d}\vec{r}_2 - \mathrm{d}\vec{r}_1) = \vec{f}_2 \cdot \mathrm{d}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

$$\because \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_{21} \quad \therefore \mathrm{d}A = \vec{f}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r}_{21}$$

一对力作的功只决定于质点间的相对位移，和所选参考系无关。

一对作用力和反作用力的总功不一定为零。

讨论2　一对正压力作功之和。

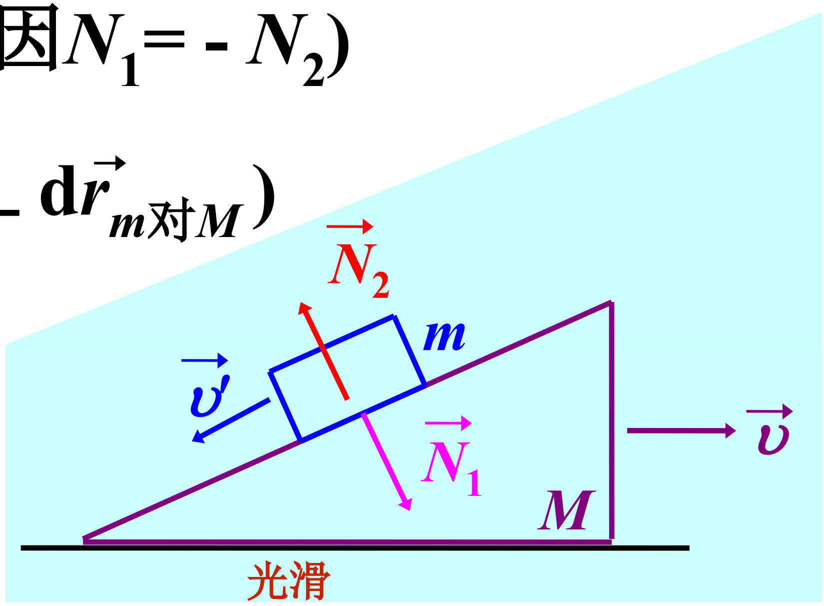
解：

$$\mathrm{d}W_{对} = \vec{N}_1\cdot\mathrm{d}\vec{r}_{M对地} + \vec{N}_2\cdot\mathrm{d}\vec{r}_{m对地}$$

$$= \vec{N}_1\cdot\mathrm{d}\vec{r}_{M对地} + \vec{N}_2\cdot(\mathrm{d}\vec{r}_{m对M} + \mathrm{d}\vec{r}_{M对地})$$

$$= \vec{N}_2\cdot\mathrm{d}\vec{r}_{m对M}，\quad (因\vec{N}_1 = -\vec{N}_2)$$

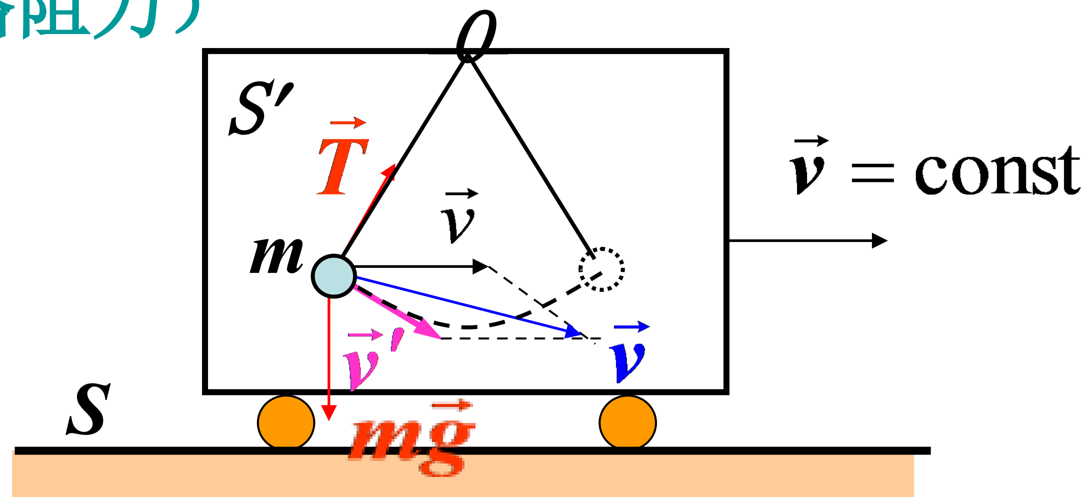
$$= 0 \qquad (因\vec{N}_2 \perp \mathrm{d}\vec{r}_{m对M})$$



N_1，N_2作功均各不为零，但作功之和为零，因两物体无相对位移。

机械能守恒和惯性系关系举例

例：一个单摆如图，对“小球和地球”组成的系统，若在匀速直线运动的小车系S'中是机械能守恒的，但在地面系S中并不守恒。（忽略阻力）



S'系中：**只有保守力**重力作功，外力拉力，$\vec{T}$不作功，机械能守恒。

S系中：$\vec{v}(=\vec{v}'+\vec{v})\not\perp\vec{T}$

$$A_{外}=A_T\neq 0$$

机械能不守恒！

作业

习题册:2.8-2.22