第二章　随机变量及其分布

主要内容： 随机变量和分布函数（重点）；离散型随机变量；连续型随机变量（重点）；正态分布（重点）；随机变量函数的分布（重点与难点）。

要求

理解一维随机变量定义；掌握分布函数的定义及性质；掌握离散型随机变量的分布律；连续型随机变量的分布密度等基本概念；掌握几种常见离散和连续型随机变量；掌握随机变量函数的分布。

第三章　二维随机变量及其分布

主要内容：二维随机变量的概念及其分布函数（重点）；二维离散型随机变量；二维连续型随机变量及二维随机变量函数的分布（重点与难点）。

要求

（1）理解二维随机变量；联合分布函数、边缘分布函数等定义；掌握二维离散型随机变量

的联合分布律、边缘分布律及独立性；掌握二维连续型随机变量的联合分布密度、边缘分布密度及独立性；掌握二维离散型随机变量函数的分布；掌握用定义法求二维连续型随机变量函数的分布；掌握和的分布；掌握最值分布。

（2）选讲：条件分布律及条件密度；商的分布。

第四章　随机变量的数字特征

主要内容： 数学期望（重点）；方差（重点）；协方差、相关系数和矩。

要求

（1）掌握随机变量的数学期望和方差的定义、计算及性质；了解协方差、相关系数及二阶矩。

（2）选讲：高阶矩（大于 2 ）、协方差矩阵。

一、一维

1、分布函数 $F(x)=P\{X\leq x\}$

性质1 $0\leq F(x)\leq 1$

性质2 $F(x)$ 单调不减

性质3 $F(-\infty)=0, F(+\infty)=1$

性质4 $F(x)$ 关于x右连续

2、离散型

（1）分布律 $P\{X=x_k\}=p_k\,(k=1,2,3,\cdots)$

注2 分布律也可用表格表示:

X	x_1	x_2	…	x_k	…	取值行
$P\{X=x_k\}$	p_1	p_2	…	p_k	…	概率行

性质1 $p_k \geq 0, k=1,2,\cdots$

性质2 $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$

（2）常见分布律

常见分布律	分布律	期望	方差
0−1 分布	$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}$, $k=0,1$	p	$p(1-p)$
二项分布 B(n,p)	$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ $(k=0,1,\cdots,n)$.	np	$np(1-p)$
泊松分布 $P(\lambda)$	$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,2,\cdots$	λ	λ

二项分布的最可能值:

$$m=\begin{cases}[(n+1)p],(n+1)p\notin Z\\(n+1)p\ and\ (n+1)p-1,(n+1)p\in Z\end{cases}$$

离散型随机变量及其分布律

性质1 $F(x)$是递增的阶梯函数;

性质2 其间断点均为右连续的;

性质3 其间断点即为X的可能取值点;

性质4 其间断点的跳跃高度是对应的概率值.

这是离散型随机变量分布函数特有的性质。

典型例题

例4

X	0	1	2
P	1/3	1/6	1/2

解：由分布函数定义$F(x)=P\{X\leq x\}$可知，当$x<0$时，$F(x)=0$；当$0\leq x<1$时，$F(x)=P\{X=0\}=1/3$；当$1\leq x<2$时，$F(x)=P\{X=0\}+P\{X=1\}=1/2$；当$x\geq 2$时，$F(x)=P\{X=0\}+P\{X=1\}+P\{X=2\}=1$.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 1/3, & 0\le x<1 \\ 1/2, & 1\le x<2 \\ 1, & x\ge 2 \end{cases}$$

例5 已知分布函数为：

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 0.4, & 0\le x<1 \\ 0.8, & 1\le x<2 \\ 1, & x\ge 2 \end{cases}$$

求其分布律

例5

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 0.4, & 0\le x<1\\ 0.8, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$$

解:

X	0	1	2
P	0.4	0.4	0.2

3. 连续型

（1） 概率密度函数 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t,$

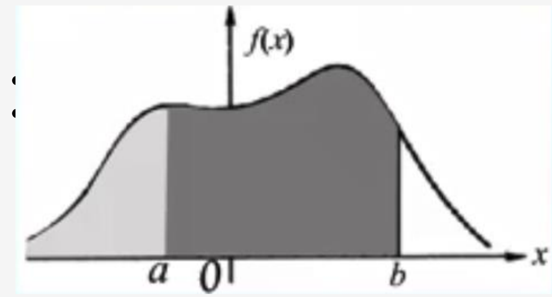
性质1 $f(x)\ge 0.$

在此处键入公式。

性质2 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=1.$

性质3 P{X∈ S}= $\int_S f(x)dx$

注1 概率密度可以完整刻画连续型随机变量的概率分布．利用概率密度可以求任意事件的概率：



如 $P\{a<X\le b\}=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

注2 连续性随机变量的分布函数 $F(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数 $P\{X=x\}=F(x)-F(x-0)=0;$

注3 $P\{a<X\le b\}=P\{a<X<b\}=P\{a\le X<b\}$

$$=P\{a\le X\le b\}=F(b)-F(a).$$

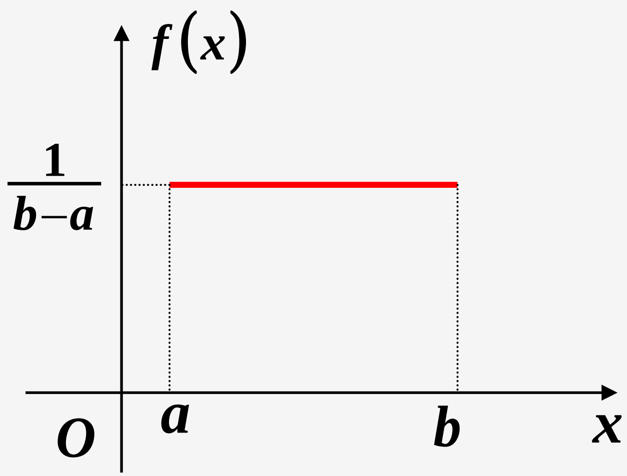
注4 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$，$f(x)=F'(x)$(在密度函数的连续点处)

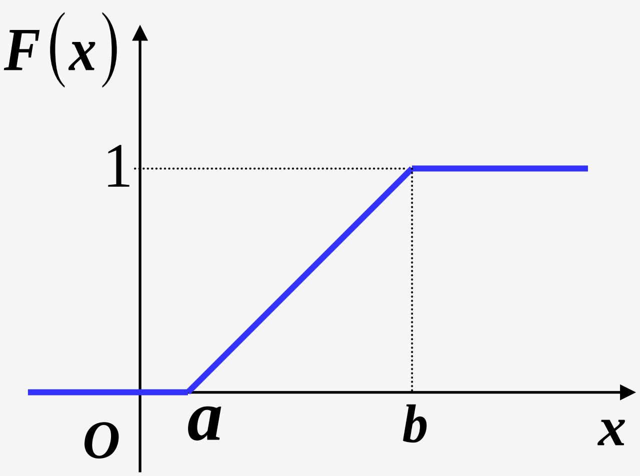
(2) 常见分布

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & else.\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x<b,\\ 1, & b\le x.\end{cases}$$

记为$X \sim U(a, b)$





若 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0,\\ 0, & else.\end{cases}$$

则称 X 服从参数为 λ ($\lambda>0$)的指数分布，记为($X\sim\pi(\lambda)$)

分布函数为 $$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0,\\ 0, & else.\end{cases}$$

若 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ -\infty<x<+\infty,$$

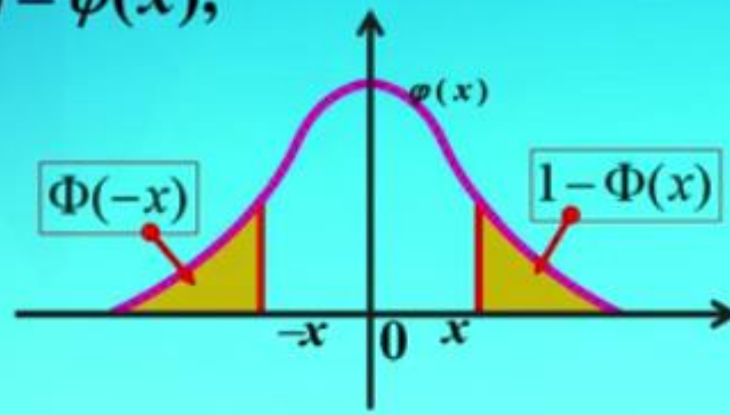
则称 X 服从参数为 $\mu,\sigma^2(\sigma>0)$ 的正态分布（或高斯分布），记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

标准正态分布性质

1. 密度函数关于y轴对称，即$\varphi(-x)=\varphi(x)$;

2. $\Phi(0)=\dfrac{1}{2}$;

3. $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$;



4. $P\{|X|<a\}=P\{-a<X<a\}$

$$=\Phi(a)-\Phi(-a)$$
$$=\Phi(a)-(1-\Phi(a))$$
$$=2\Phi(a)-1;$$

5. $P\{|X|>a\}=1-P\{|X|\}\leqslant a\}$

$$=2[1-\Phi(a)].$$

一般正态分布标准化

定理1 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2), Y=\frac{X-\mu}{\sigma}$，则$Y\sim N(0,1)$

推论1 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则$F(x)=\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$

推论2 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则$P\{X<a\}=\Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$,

$$P\{X>a\}=1-\Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$$

练习

$X\sim N(\mu,\sigma^2), Y=aX+b$ $\sim ?$

$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ $\sim ?$

二、方差的计算

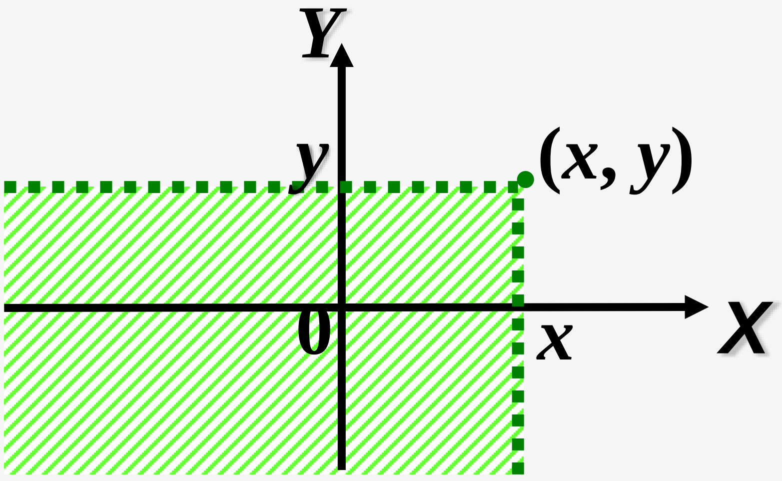
➤ 0−1 分布的方差 $= p(1-p)$	p
➤ 二项分布 $b(n, p)$的方差 $= np(1-p)$	np
➤ 泊松分布 $P(\lambda)$ 的方差$= \lambda$	λ
➤ 正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的方差$= \sigma^2$	μ
➤ 均匀分布 $U(a, b)$ 的方差 $= (b-a)^2/12$	$(a+b)/2$
➤ 指数分布 $Exp(\lambda)$ 的方差$= 1/\lambda^2$	$1/\lambda$

$\pi(\lambda)$

二、 二维随机变量

1、联合分布函数 $F(x, y) = \{X \le x, Y \le y\}$

注 $F(x, y)$**表示随机点**(X, Y)**落在以点**(x, y)**为右上端点的广义矩形域内的概率.**



联合分布函数的基本性质

1. **非减性:** $F(x, y)$分别关于 x 和 y 非减.

2. **右连续性:** $F(x, y)$分别关于 x 和 y 右连续.

3. **有界性:** $0 \le F(x, y) \le 1.$

$$F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0, \quad F(+\infty, +\infty) = 1.$$

4. **非负性:** (二维特别性质!!!)

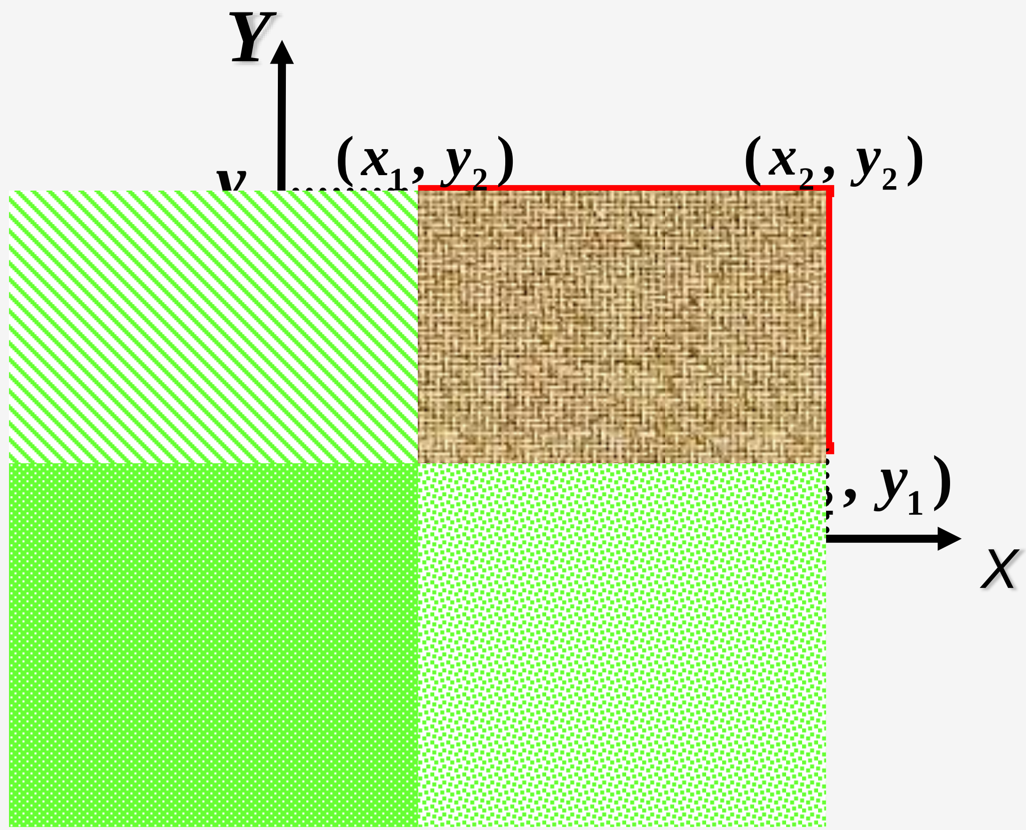
$$F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1) \ge 0$$

$$(x_1 < x_2,\ y_1 < y_2)$$

二维随机变量的概念

$$F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1) \geq 0,$$

$$x_2 > x_1, y_2 > y_1$$



边缘分布函数和独立性

解决　若已知X, Y的联合分布函数$F(x, y)$，则：

$$F_X(x) = F(x, +\infty), \qquad F_Y(y) = F(+\infty, y)$$

注1　若已知X, Y的联合分布函数$F(x, y)$，则唯一确定边缘分布函数，但由边缘分布函数一般不能求得联合分布函数，所以联合分布函数包含更多信息。

设F(x,y)是二维随机变量(X,Y)的联合分布函数，若对于任意实数 x, y 均满足

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y),$$

则称X与Y 相互独立.

注　若 X, Y 独立，则 $G(X), H(Y)$ 也是独立的.

离散型 二维离散型随机变量(X, Y)的联合分布律：

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j), i, j = 1,2,\dots$$

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

已知 (X, Y) 的联合分布律为 p_{ij}，则

X的边缘分布律为：$p_i = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = p_{i\bullet}$

Y的边缘分布律为：$p_j = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} = p_{\bullet j}$

X 和Y 相互独立

$\Updownarrow$

$P\{X=x_i, Y=y_j\} = P\{X=x_i\} P\{Y=y_j\} = P_{i\bullet} \cdot P_{\bullet j}$

(对于任意的i，j)

3.连续型

设(X,Y)的联合分布函数为$F(x,y)$，若存在非负可积的二元函数$f(x,y)$,使得对任意实数对(x,y)有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dvdu$$

则称随机变量为连续型的，其中$f(x,y)$ 称为(x,y)的联合概率密度。

一、 二维连续型随机变量的概念

性质1 $f(x,y) \geq 0$

性质2 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dvdu = 1$

性质 3 $P\{(X,Y)\in G\} = \iint\limits_{G} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

性质 4 若 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处连续，则有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y).$$

已知 (X, Y) 的联合密度函数为 $f(x, y)$,

X 的边缘密度函数为: $f_X(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}\,y$

Y 的边缘密度函数为: $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}\,x$

定义2 设二维连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度为 $f(x,y)$,边缘密度函数为$f_X(x)$和$f_Y(y)$,

若$f(x,y)=f_X(x)\,f_Y(y)$,

则称X与Y相互独立.

三、随机变量函数的分布

1、离散随机变量（一维，二维）

（1）列举法

方法

利用下表由X的分布律求出$Y=g(X)$的分布律

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_i	$\cdots$
概率	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_i	$\cdots$
$Y=g(X)$	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$g(x_3)$	$\cdots$	$g(x_i)$	$\cdots$

把 $g(x_1)$，$g(x_2)$，$g(x_3)$，$\cdots g(x_i)$，$\cdots$适当整理排列，若中有相同的取值，则把对应的概率值加起来，即可得到Y的分布律.

例 设 (X, Y) 的联合分布律为

$X \backslash Y$	-1	1	2
-1	$\frac{5}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{6}{20}$
2	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$

试求 (1) $X+Y$ (2) $X-Y$ 的分布律。

二维离散型随机变量函数的分布

解 由题中分布律可得下表:

P	$\frac{5}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$
(X,Y)	$(-1,-1)$	$(-1,1)$	$(-1,2)$	$(2,-1)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$X+Y$	-2	0	1	1	3	4
$X-Y$	0	-2	-3	3	1	0

从而得:

二维离散型随机变量函数的分布

(1) $X+Y$ 的分布律为:

$X+Y$	-2	0	1	3	4
P	$\frac{5}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$

(2) $X-Y$ 的分布律为:

$X-Y$	-3	-2	0	1	3
P	$\frac{6}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$

二维离散型随机变量函数的分布

离散场合的卷积公式：设离散随机变量 X 与 Y 独立，则 $Z=X+Y$ 的分布列为

$$P(Z=z_k)=\sum_{i=1}^{\infty}P(X=x_i)P(Y=z_k-x_i)$$

$$P(Z=z_k)=\sum_{j=1}^{\infty}P(X=z_k-y_j)P(Y=y_j)$$

例 **设 X, Y 相互独立并且分别服从参数为 λ_1，λ_2 的泊松分布，试求 $Z=X+Y$ 的分布律。**

例 **设 X, Y 相互独立并且 $X \sim B(n_1, p)$，$Y \sim B(n_2, p)$，试求 $Z=X+Y$ 的分布律。**

注1　若 $X \sim P(\lambda_1)$，$Y \sim P(\lambda_2)$，且独立，

则　$Z = X + Y \sim P(\lambda_1 + \lambda 2)$.

注2　若 $X \sim B(n_1, p)$，$Y \sim B(n_2, p)$，且独立，

则 $Z = X + Y \sim B(n_1 + n_2, p)$.

注3　若 $X_i \sim B(1, p)$，且独立，

则 $Z = X_1 + X_2 + \dots\dots + X_n \sim B(n, p)$.

独立的0-1分布随机变量之和服从二项分布.

（2）、数学期望的计算

例 设离散型随机变量X的概率分布为

X	-1	0	1	2
P	0.2	0.1	0.4	0.3

求X的数学期望.

解：$E(X) = -1\times0.2+0\times0.1+1\times0.4+2\times0.3 = 0.8.$

2、连续型

1. 求密度函数

定义法---- 先求分布函数：$F_Y(y)$

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{g(X)\le y\}$，设 $L_y=\{x\,|\,g(x)\le y\}$

$F_Y(y)=P(X\in L_y)=\int_{L_y} f_X(x)\,dx=\int_{\{x|g(x)\le y\}} f_X(x)\,dx$

则

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}$$

再求概率密度：

注1 关键在于确定积分区间L_y.

公式法:

定理1 X 的概率密度函数为 $f_X(x)$，函数 $g(x)$ 处处可导且恒有$g'(x)>0$（或$g'(x)<0$），则 $Y=g(x)$ 是连续型随机变量，其概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)|, & \alpha<y<\beta \\ 0, & else \end{cases}$$

其中 $\alpha=\min\{g(-\infty),\ g(+\infty)\},\beta=\max\{g(-\infty),\ g(+\infty)\}$,
$h(y)$ 是 $g(x)$ 的反函数.

1. $Z=X+Y$ 的分布

设(X,Y)的密度函数为$f(x,y)$，则$Z=X+Y$的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}$$

$$=\iint_{x+y\leqslant z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$\overline{\overline{\text{令 } x=u-y}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-y,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}u.$$

于是Z的概率密度为

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\mathrm{d}y.$$

由X与Y的对称性又得

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\mathrm{d}x.$$

1. $Z=X+Y$ 的分布

设(X,Y)的密度函数为 $f(x,y)$，则 $Z=X+Y$ 的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}$$
$$=\iint_{x+y\leqslant z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$
$$\xlongequal{\text{令 } x=u-y}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}y$$
$$=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-y,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}u.$$

于是 Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\mathrm{d}y.$$

由 X 与 Y 的对称性又得

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\mathrm{d}x.$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,z-x)\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(z-y,y)\,\mathrm{d}y$$

特别地，X与Y独立，则 $Z=X+Y$的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\,\mathrm{d}y$$

——连续场合的卷积公式

注1 若$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$,且相互独立，则$X \pm Y \sim N(\mu_1 \pm \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

注2 独立正态变量的线性组合仍为正态变量.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right)$$

四、最大值和最小值的分布

设随机变量X与Y 独立, 它们的分布函数分别为 $F_X(x)$ 及 $F_Y(y)$, 求 $\max(X,Y)$ 及 $\min(X,Y)$ 的分布.

(1) 最大值的分布

$$F_{\max}(z) = P(\max(X,Y) \le z) = P(X \le z, Y \le z)$$
$$= P(X \le z) \cdot P(Y \le z) = F_X(z)F_Y(z)$$

(2) 最小值的分布

$$F_{\min}(z) = P(\min(X,Y) \le z) = 1 - P(\min(X,Y) > z)$$
$$= 1 - P(X > z, Y > z) = 1 - P(X > z) \cdot P(Y > z)$$
$$= 1 - [1 - P(X \le z)] \cdot [1 - P(Y \le z)]$$
$$= 1 - [1 - F_X(z)] \cdot [1 - F_Y(z)]$$

最大值和最小值的分布

推广到有限多个独立随机变量的情形, 有

$$F_{\max}(z) = \prod_{i=1}^{n} F_i(z)$$

$$F_{\min}(z) = 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - F_i(z)]$$

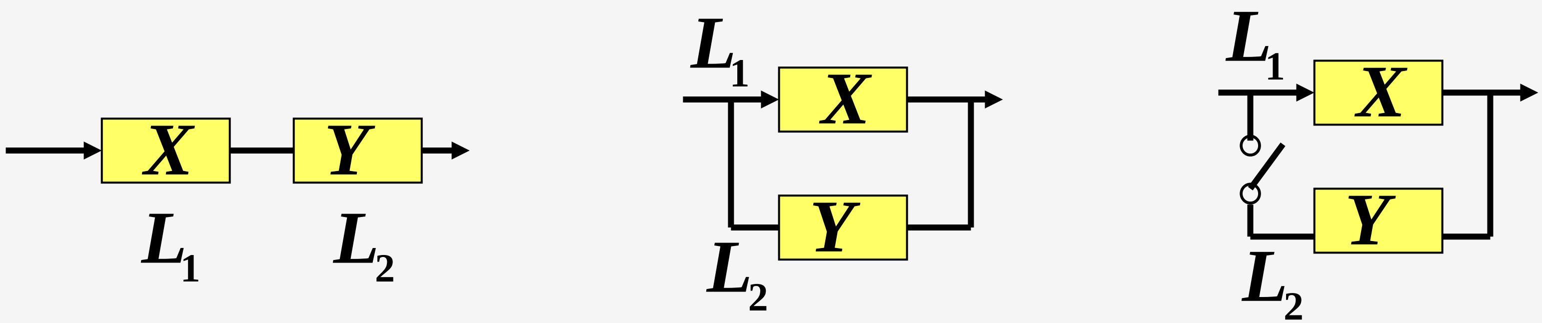
特别地, 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布, 则它们的分布函数为

$$F_{\max}(z) = [F(z)]^n$$

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F(z)]^n$$

例6 设 L_1, L_2 的寿命分别为 X, Y,已知它们的概率密度分别为

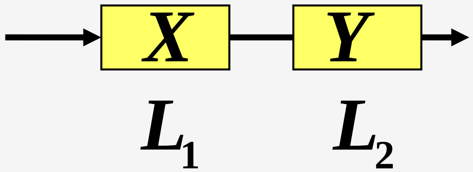
$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0,\end{cases}$$



若系统L按照如上三种方式联接，分别求出对应系统寿命的密度?

四、最大值和最小值的分布

解



$$Z=\min(X,Y).$$

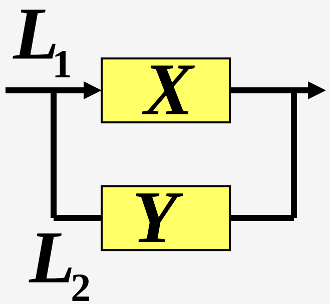
$$F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

$$=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ f_{\min}(z)=\begin{cases}(\alpha+\beta)\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

四、最大值和最小值的分布

解



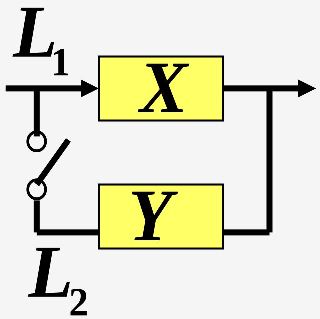
$$Z = \max(X, Y).$$

$$F_{\max}(z) = F_X(z) \cdot F_Y(z) = \begin{cases} (1-\mathrm{e}^{-\alpha z})(1-\mathrm{e}^{-\beta z}), & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

$$f_{\max}(z) = \begin{cases} \alpha \mathrm{e}^{-\alpha z} + \beta \mathrm{e}^{-\beta z} - (\alpha + \beta)\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)z}, & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

四、最大值和最小值的分布

解



$$Z = X + Y$$

当 $z > 0$ 时，$Z = X + Y$ 的概率密度为

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^z \alpha \mathrm{e}^{-\alpha(z-y)} \beta \mathrm{e}^{-\beta y}\,\mathrm{d}y$$

$$= \alpha\beta \mathrm{e}^{-\alpha z} \int_0^z \mathrm{e}^{-(\beta-\alpha)y}\,\mathrm{d}y = \frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}[\mathrm{e}^{-\alpha z} - \mathrm{e}^{-\beta z}].$$

四、随机变量函数的数学特征

1.期望

若$Y = g(X)$ 的数学期望存在,则

$$E(g(X)) = \begin{cases} \sum_i g(x_i)p_i \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx \end{cases}$$

其中$f(x)$或者$P(X = x_i) = p_i$为X的密度函数或者分布律.

一维

三、随机变量函数的数学期望

二维

定理 若$Z = g(X,Y)$的数学期望存在,则

$$E(g(X,Y)) = \begin{cases} \sum_i \sum_j g(x_i, y_j) p_{ij} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f(x,y) dxdy \end{cases}$$

其中$f(x,y)$或者$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$为$(X,Y)$的联合密度函数或者联合分布律.

特别地

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy$$

数学期望的性质

性质1 $E(C)=C$

性质2 $E(X+C)=E(X)+C$

性质3 $E(kX)=k\,E(X)$

性质4 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ $\left(E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)=\sum_{k=1}^{n} EX_k\right)$

性质5 当 X 与 Y 独立时, $E(XY)=E(X)\,E(Y)$

$E\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right)=\prod_{k=1}^{n} E(X_k)$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ **独立**

2、方差

1)利用定义计算

离散型 $$D(X)=\sum_{n=1}^{\infty}[x_n-E(X)]^2p_n.$$

连续型 $$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2f(x)\mathrm{d}x.$$

2) 利用方差的重要计算公式

$$DX=EX^2-(EX)^2$$

方差的性质

讨论 $X+Y$ 的方差

1. $\mathrm{D}(X \pm Y) = \mathrm{D}(X) + \mathrm{D}(Y) \pm 2E[X-E(X)][Y-E(Y)]$

2. $E[X-E(X)][Y-E(Y)] = E(XY) - E(X)\mathrm{E}(Y)$

3. 当X与Y独立时，$E[X-E(X)][Y-E(Y)] = 0.$

4. 当X与Y独立时，$\mathrm{D}(X \pm Y) = \mathrm{D}(X) + \mathrm{D}(Y)$.

注意：以上命题反之不成立.

例 X 与 Y 独立，$DX = 6$，$DY = 3$，则 $D(2X-Y) =?$

提示 利用方差的性质独立

解：$D(2X-Y) = 4DX+DY=27$.

四、协方差、相关系数和矩

3. 协方差

Cov(X, Y) = E[X-E(X)][Y-E(Y)] ,

为 X 与 Y 的协方差.

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y) &= E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}\\ &= E(XY)-E(X)E(Y)-E(Y)E(X)+E(X)E(Y)\\ &= E(XY)-E(X)E(Y).\end{aligned}$$

协方差的性质

(1) $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)\mathrm{E}(Y)$.

(2) 若 X与 Y独立，则 $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

(3) $\mathrm{D}(X\pm Y) = \mathrm{D}(X)+ \mathrm{D}(Y) \pm 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$

(4) $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$. (性质1)

(5) $\mathrm{Cov}(X, a) = 0$. (性质1)

(6) $\mathrm{Cov}(aX, bY) = ab\mathrm{Cov}(X, Y)$. (性质1)

(7) $\mathrm{Cov}(X+Y, Z) = \mathrm{Cov}(X, Z) + \mathrm{Cov}(Y, Z)$. (性质1)

$\mathrm{Cov}(aX+b, cY+d)=ac\mathrm{Cov}(X, Y)$.

4.相关系数

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

为 X 与 Y 的相关系数.

注

(2) $\rho_{XY} = \pm 1 \Leftrightarrow$

X 与 Y 几乎处处有线性关系。

$$P(Y=aX+b)=1$$

X与Y不相关

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{Cov}(X, Y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$$

$$\Leftrightarrow \quad D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$$

不相关与相互独立

若 X 与 Y 相互独立，则 X 与 Y 不相关；

反之，不成立。

即 X 与 Y 不相关，它们不一定相互独立.

但对于二维正态分布，不相关与独立等价.

二维正态分布的数字特征

$$(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$

(1) $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$;

(2) 参数 ρ 为 X 和 Y 的相关系数;

(3) X, Y 独立 $\Longleftrightarrow$ $\rho = 0$.

(4) 不相关与独立等价.

2017年（2015级）

1. 设随机变量 X 服从 0-1 分布， $p=0.8$，则 X 的分布函数为______.

(A) $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 0.8, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$； (B) $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 0.2, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$；

(C) $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1, & x>0\end{cases}$； (D) $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 0.2, & x>0\end{cases}$.

2. 设 X 服从二项分布，其分布律为 $P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$，$(k=0,1,\cdots,n)$，若 $(n+1)p$ 不是整数，则 k 取______时 $P\{X=k\}$ 最大。

(A) $(n+1)p$； (B) $(n+1)p-1$； (C) np； (D) $[(n+1)p]$.

3.（10分）设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=Ae^{-|x|}, -\infty<x<+\infty,$

求：(1) 系数 A；(2) $P\{0<X<1\}$；(3) X 的分布函数。

4.（10分）设随机变量 X 服从参数为 2 的指数分布，求 $Y=1-e^{-2X}$ 的概率密度函数。

2017 年（2015 级）

1．设随机变量 X 服从 0-1 分布， $p=0.8$，则 X 的分布函数为______.

(A) $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 0.8, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$； (B) $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 0.2, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$；

(C) $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1, & x>0\end{cases}$； (D) $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 0.2, & x>0\end{cases}$.

2．设 X 服从二项分布，其分布律为 $P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$，$(k=0,1,\cdots,n)$，若 $(n+1)p$ 不是整数，则 k 取______时 $P\{X=k\}$ 最大。

(A) $(n+1)p$； (B) $(n+1)p-1$； (C) np； (D) $[(n+1)p]$.

3．（10 分）设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=Ae^{-|x|}, -\infty<x<+\infty,$

求：(1) 系数 A；(2) $P\{0<X<1\}$；(3) X 的分布函数。

4．（10 分）设随机变量 X 服从参数为 2 的指数分布，求 $Y=1-e^{-2X}$ 的概率密度函数。

3 2. 解： (1) $1=\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-|x|}dx=2\int_{-\infty}^{0}Ae^{x}dx=2A$，所以 $A=\frac{1}{2}$.

(2) $P\{0<X<1\}=\int_{0}^{1}\frac{1}{2}e^{-x}dx=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$

(3) $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{t}dt, & x<0\\ \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^{t}dt+\int_{0}^{x}\frac{1}{2}e^{-t}dt, & x\ge 0\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & x<0\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x} & x\ge 0\end{cases}$

4 3. 解： $f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$,

法一（不推荐）$y=1-e^{-2x}$ 的反函数 $x=-\frac{1}{2}\ln(1-y)$, $0<y<1$ （范围不好找）

所以 $f_Y(y)=\begin{cases} f_X(-\dfrac{1}{2}\ln(1-y))\bullet\left|(-\dfrac{1}{2}\ln(1-y))'\right|, & 0<y<1 \\ 0, & others \end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases} 1, & 0<y<1 \\ 0, & others \end{cases}$

法二（推荐） $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{1-e^{-2X}\le y\}=P\{e^{-2X}\ge 1-y\}$

由于 e^{-2X} 恒大于零，故

（1）$1-y\le 0$ 即 $y\ge 1$ 时，$\{e^{-2X}\ge 1-y\}$ 为必然事件，故 $F_Y(y)=1\Rightarrow f_Y(y)=0$

（2）$1-y>0$ 即 $y<1$ 时，$F_Y(y)=P\{e^{-2X}\ge 1-y\}=P\{-2X\ge \ln(1-y)\}$

$$=P\{X\le \frac{-1}{2}\ln(1-y)\}=F_X(\frac{-1}{2}\ln(1-y))$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=f_X(\frac{-1}{2}\ln(1-y))\cdot\frac{1}{2(1-y)}$$

由 $f_X(x)=2e^{-2x}$，$(x>0)$ 得 $\dfrac{-1}{2}\ln(1-y)>0\Rightarrow 1-y<1\Rightarrow y>0$ 时

$$f_X(\frac{-1}{2}\ln(1-y))=2e^{\ln(1-y)}=2(1-y)\Rightarrow f_Y(y)=1$$

综上所述 $f_Y(y)=\begin{cases} 1, & 0<y<1 \\ 0, & others \end{cases}$

5.（10 分）设二维随机变量(X,Y)服从在区域D上的均匀分布，其中D为由直线

$x+y=1, x+y=-1, x-y=1, x-y=-1$围成的区域，

求：(1) X和Y的边缘密度函数；(2) $P\{|X|<Y\}$；(3) X与Y是否独立，为什么？

6. 设X是随机变量，其概率密度为$f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\le x\le 0\\ 1-x, & 0<x\le 1\\ 0, & others\end{cases}$，则$DX=$________.

7. 已知随机变量X_1,X_2,X_3相互独立，且$X_1\sim U(0,6), X_2\sim N(1,3)$，$X_3$服从参数为 3 的指数分布，$Y=X_1-2X_2+3X_3$，则$E(Y^2)=$________.

~~8.（10 分）设随机变量X与Y相互独立，$X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(0,1)$，求$Z=X/Y$的概率密度.~~

5.（10 分）设二维随机变量 (X,Y) 服从在区域 D 上的均匀分布，其中 D 为由直线

$x+y=1, x+y=-1, x-y=1, x-y=-1$ 围成的区域，

求：(1) X 和 Y 的边缘密度函数；(2) $P\{|X|<Y\}$；(3) X 与 Y 是否独立，为什么？

6. 设 X 是随机变量，其概率密度为 $f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\le x\le 0\\ 1-x, & 0<x\le 1\\ 0, & others\end{cases}$，则 $DX=$ 1/6.

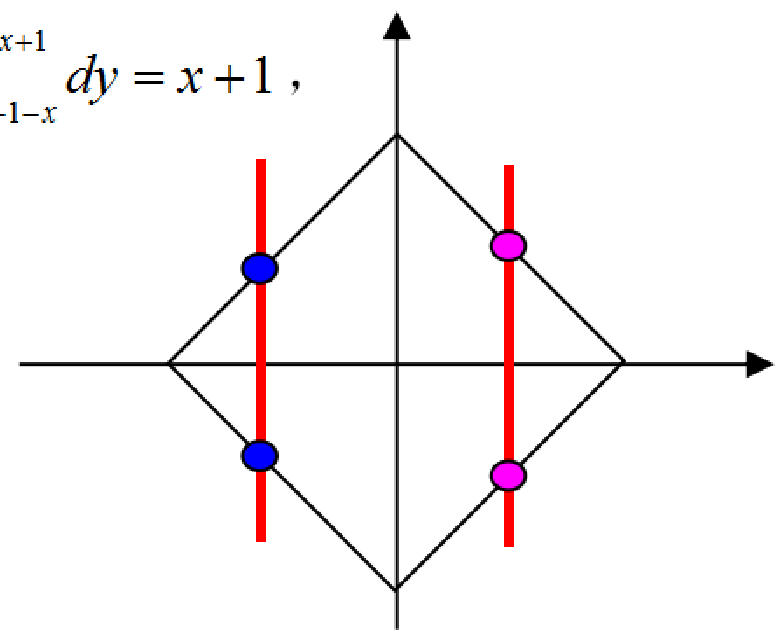
7. 已知随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立，且 $X_1\sim U(0,6), X_2\sim N(1,3)$， X_3 服从参数为 3 的指数分布，$Y=X_1-2X_2+3X_3$，则 $E(Y^2)=$ 20.

~~8.（10 分）设随机变量 X 与 Y 相互独立， $X\sim N(0,1)$， $Y\sim N(0,1)$，求 $Z=X/Y$ 的概率密度.~~

~~3.~~ 5 解：由题意知 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & (x,y)\in D\\ 0, & others\end{cases}$

(1) 当 $0<x<1$ 时， $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\dfrac{1}{2}\int_{x-1}^{1-x} dy=1-x$ ，

当 $-1<x<0$ 时， $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\dfrac{1}{2}\int_{-1-x}^{x+1} dy=x+1$ ，

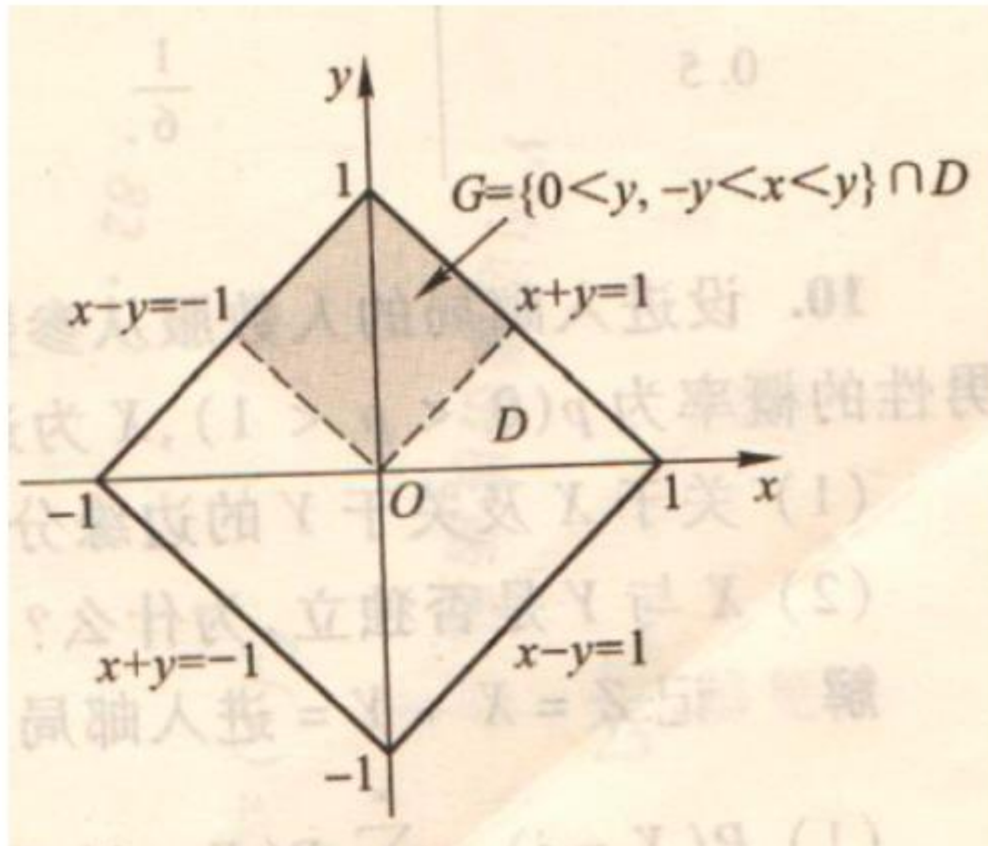


所以， $f_X(x)=\begin{cases}x+1, & -1<x<0\\ 1-x, & 0<x<1\\ 0, & others\end{cases}$

由对称性，即知 $f_Y(y)=\begin{cases}y+1, & -1<y<0\\ 1-y, & 0<y<1\\ 0, & others\end{cases}$

(2) $P\{|X|<Y\}=P\{(X,Y)\in G\}=\dfrac{1}{4}$，其中区域 G 见下图。

(3) 因为 $f(x,y)\neq f_X(x)\bullet f_Y(y)$，所以不独立。



2018 年（2016 级）

1. 设随机变量 X 服从 $N(\mu,\sigma^2)$，且 $P\{|X-\mu|<\sigma\}=0.6826$，则 $P\{X<\mu-\sigma\}=$【 】

2. 设随机变量 X 的分布律 $P\{X=i\}=1/3, i=1,2,3,$ 随机变量 Y 与 X 独立同分布，

   随机变量 $Z=\max(X,Y)+\min(X,Y)$，则 $P\{Z<3\}=$【 】.

3. 随机变量 X 与 Y 满足 $D(X+Y)=36,\quad D(X-Y)=24,$ 则 X,Y 的协方差【 】.

4. 某学生完成一道作业的时间 X 是一个随机变量，密度函数为(单位 h)：

$$f(x)=\begin{cases} cx^2+x, 0\le x\le 0.5, \\ 0, \qquad\qquad \text{其它} \end{cases}$$

   求(1) 常数 c 的值；(2)X 的分布函数；(3)此学生完成一道作业所需要的平均时间？

5. 假设分子运动速度 V 服从 Maxwell 分布，其密度函数为：

2018 年（2016 级）

1. 设随机变量 X 服从 $N(\mu,\sigma^2)$，且 $P\{|X-\mu|<\sigma\}=0.6826$，则 $P\{X<\mu-\sigma\}=$【 0.1587 】

2. 设随机变量 X 的分布律 $P\{X=i\}=1/3, i=1,2,3,$ 随机变量 Y 与 X 独立同分布，

   随机变量 $Z=\max(X,Y)+\min(X,Y)$，则 $P\{Z<3\}=$【 $\frac{1}{9}$ 】.

3. 随机变量 X 与 Y 满足 $D(X+Y)=36,\quad D(X-Y)=24,$ 则 X,Y 的协方差【 3 】.

4. 某学生完成一道作业的时间 X 是一个随机变量，密度函数为(单位 h)：

$$f(x)=\begin{cases} cx^2+x, & 0\le x\le 0.5, \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

求(1) 常数 c 的值；(2)X 的分布函数；(3)此学生完成一道作业所需要的平均时间？

5. 假设分子运动速度 V 服从 Maxwell 分布，其密度函数为：

4 2. 解：（1) 由概率密度的归一性可知：

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=0+\int_{0}^{0.5}(cx^2+x)\mathrm{d}x+0=\frac{c}{24}+\frac{1}{8} \quad\Rightarrow\quad c=21$$

（2） $$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}0, & x<0\\ \int_{0}^{x}(21t^2+t)\mathrm{d}t, & 0\le x\le 0.5,\\ 1, & x>0.5\end{cases}=\begin{cases}0, & x<0\\ 7x^3+0.5x^2, & 0\le x\le 0.5,\\ 1, & x>0.5\end{cases}$$

（3） $$EX=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x=0+\int_{0}^{0.5}x(21x^2+x)\mathrm{d}x+0=\frac{505}{1344}\approx 0.3757$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4x^2}{a^3\sqrt{\pi}}\exp(-\dfrac{x^2}{a^2}), & x>0,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

其中 $a=\dfrac{m}{2KT}$，K 为玻耳兹曼(Boltzmann)常数，T 为绝对温度，m 是分子的质量。求分子动能 $E=\dfrac{1}{2}mV^2$ 的密度函数？

6. 设二维随机变量(X,Y)在以(0,1), (1,0), (0,-1)为顶点的三角形 I 上服从均匀分布。

(1)求联合密度函数；

(2)求两个边缘密度函数；

(3)判断 X 与 Y 是否独立，并说明理由；

(4)求 $Z=X+Y$ 的密度函数？

4. 解：（1）因为服从均匀分布，故概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1, x-1\le y\le 1-x\\ 0, & elsewhere\end{cases}$$

（2） $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_{x-1}^{1-x} 1\mathrm{d}y, & 0\le x\le 1\\ 0, & elsewhere\end{cases}=\begin{cases}2-2x, & 0\le x\le 1\\ 0, & elsewhere\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_{0}^{1-y} 1\mathrm{d}x, & 0\le y\le 1\\ \int_{0}^{1+y} 1\mathrm{d}x, & -1\le y<0\\ 0, & elsewhere\end{cases}=\begin{cases}1-y, & 0\le y\le 1\\ 1+y, & -1\le y<0\\ 0, & elsewhere\end{cases}$$

（3）两个随机变量不独立，因为 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$

（4） $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_{0}^{\frac{z+1}{2}} 1\mathrm{d}x, & -1\le z\le 1\\ 0, & elsewhere\end{cases}=\begin{cases}\frac{z+1}{2}, & -1\le z\le 1\\ 0, & elsewhere\end{cases}$$

2019 年（2017 级）

1. 设 $P\{X=k\}=0.25, k=1,2,3,4$，则 $P\{2\le X<4\}=$【】.

2. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=ae^{-|x|}$，则 $a=$【】.

3. 设 X 服从参数为 0.5 的两点分布，则 $E(X^2-X+1)=$【】.

4. 设 X,Y 相互独立，且 $X\sim B(4,0.1), Y\sim B(6,0.1)$，则 $X+Y\sim$【】.

$B(4,0.2)$　　C. $B(6,0.2)$　　$B(10,0.1)$　　D. $B(10,0.2)$

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 $X\sim P(1)$ 的样本，则样本方差的期望为【】.

6. 设随机变量 X,Y 独立同服从参数为 0.5 的指数分布，则 $Z=\min\{X,Y\}$ 服从参数为【】的指数分布.

7. WHC 及其父母名下共有 2 套房产，WHC 于 2019 年春患病众筹，设筹得款项 $X\sim N(10,100)$【单位：万元】. 若筹款少于 10 万元，WHC 需要出售 2 套房产才能支付手术及相关费用；若筹款数额介于 10~30 万元之间，仅需出售 1 套房产即可；若筹款数额超过 30 万元，则其不需要出售房产。求 WHC 手术后，本人及其父母名下的共有房产数量的分布律.

2019 年（2017 级）

1. 设 $P\{X=k\}=0.25, k=1,2,3,4$，则 $P\{2\le X<4\}=$【 】. 0.5

2. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=ae^{-|x|}$，则 $a=$【 】. 0.5

3. 设 X 服从参数为 0.5 的两点分布，则 $E(X^2-X+1)=$【1】.

4. 设 X,Y 相互独立，且 $X\sim B(4,0.1), Y\sim B(6,0.1)$，则 $X+Y\sim$【 】.

$B(4,0.2)$　　C. $B(6,0.2)$　　$B(10,0.1)$　　D. $B(10,0.2)$

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 $X\sim P(1)$ 的样本，则样本方差的期望为【1】.

6. 设随机变量 X,Y 独立同服从参数为 0.5 的指数分布，则 $Z=\min\{X,Y\}$ 服从参数为【1】的指数分布.

7. WHC 及其父母名下共有 2 套房产，WHC 于 2019 年春患病众筹，设筹得款项 $X\sim N(10,100)$【单位：万元】. 若筹款少于 10 万元，WHC 需要出售 2 套房产才能支付手术及相关费用；若筹款数额介于 10~30 万元之间，仅需出售 1 套房产即可；若筹款数额超过 30 万元，则其不需要出售房产。求 WHC 手术后，本人及其父母名下的共有房产数量的分布律.

4. 解： 设 Y 为 WHC 本人及其父母名下的共有房产数量，由题意可知所有可能取值为 0，1，2。 ……………………………………………4 分

下面求其分布律：

$$P\{Y=0\}=P\{X<10\}=\Phi(\frac{10-10}{10})=\Phi(0)=0.5 \qquad \text{………6 分}$$

$$P\{Y=1\}=P\{10\le X\le 30\}=\Phi(\frac{30-10}{10})-\Phi(\frac{10-10}{10})=\Phi(2)-\Phi(0)=0.4772 \qquad \text{……….8 分}$$

$$P\{Y=2\}=P\{X>30\}=1-\Phi(\frac{30-10}{10})=1-\Phi(2)=0.0228$$ 或者

$$P\{Y=2\}=1-P\{Y=0\}-P\{Y=1\}=0.0228 \qquad \text{………10 分}$$

综上所述得：

Y	0	1	2
P	0.5	0.4772	0.0228

8. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases} kx^2, 0<x<2 \\ kx, 2\le x\le 3 \\ 0, \quad 其他 \end{cases}$，

求(1)常数 k； (2) X 的分布函数； (3) $P\{1<X\le \frac{5}{2}\}$

9. 设随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases} Ce^{-(3x+y)}, x>0, y>0 \\ 0, \quad\quad 其他 \end{cases}$，

求(1)常数 C； (2) X 与 Y 的边缘密度函数； (3) X 与 Y 是否独立，为什么？

10. 设随机变量 X 服从 $(0,1)$ 上的均匀分布，随机变量 Y 与 X 独立，且服从参数为 1 的指数分布，求随机变量 $Z=X+Y$ 的密度函数.

10

2. 解：随机变量 Z 的密度函数为 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\mathrm{d}x$

这里：$f_X(x)=\begin{cases}1, 0<x<1\\ 0, 其他\end{cases}$，　　$f_Y(z-x)=\begin{cases}e^{-(z-x)}, z>x\\ 0, \quad ,其他\end{cases}$，

可求得上述积分中被积函数的非零区域为 $D:0<x<1, z>x$（在 xoz 坐标系中画出图）

因此，当 $z<0$ 时，有 $f_Z(z)=0$；

当 $0\le z<1$ 时，有 $f_Z(z)=\int_0^z e^{-(z-x)}\mathrm{d}x=1-e^{-z}$；

当 $z\ge 1$ 时，有 $f_Z(z)=\int_0^1 e^{-(z-x)}\mathrm{d}x=e^{1-z}-e^{-z}$；

综上所述有 $f_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ 1-e^{-z}, & 0\le z<1\\ e^{1-z}-e^{-z}, & z\ge 1\end{cases}$

一, 1. 设随机变量X的方差存在(这时均值也存在),
则对任意$\varepsilon>0$，有切比雪夫不等式:

$$P\{|X-EX|\geq\varepsilon\}\leq\frac{DX}{\varepsilon^{2}},$$

或

$$P\{|X-EX|<\varepsilon\}>1-\frac{DX}{\varepsilon^{2}}.$$

注: 切比雪夫不等式意义:

理论意义：大数定律的基础.

应用意义：估计随机变量落入以其期望为中心的邻域内的概率的下界或落入该邻域外概率的上界.

2.切比雪夫大数定律

Chebyshev

设随机变量$X_1, X_2,\ldots, X_n,\ldots$,相互独立,有数学期望$E(X_1), E(X_2), \ldots, E(X_n), \ldots$,和有限的方差$D(X_1), D(X_2), \ldots, D(X_n), \ldots$,且方差有公共上界$c$,即$D(X_1)\le c$, $D(X_2)\le c$, $D(X_n)\le c$,…,

则对任意的$\varepsilon>0$,有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k)|<\varepsilon\}=1.$

注:切比雪夫大数定律表明独立随机变量序列前n个随机变量的算术平均值与其期望的算术平均值的差依概率收敛于0。

3.独立同分布中心极限定理

设 $\{X_n\}$ 为独立同分布随机变量序列，数学期望为μ,

方差为 $\sigma^2>0$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le y\right\} = \Phi(y).$

其中 $\Phi(y)$是标准正态分布的分布函数

$\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ 近似地服从$N(n\mu, n\sigma^2)$

标准化 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ 近似地服从标准正态分布N(0,1)

二.1 样本与简单随机样本

定义 简单随机样本(SRS): *Simple Random Sample*

样本 ⇨ 代表性：$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 与总体 X 同分布；
独立性：$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立.

以后谈及样本均指简单随机样本.

2.统计量

定理 设总体 X 的均值 $EX=\mu$ 方差 $DX=\sigma^2$, 且 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自这个总体的样本，则对样本均值 $\bar{X}$，有

$$E\bar{X}=\mu, \quad D\bar{X}=\frac{\sigma^2}{n}.$$

定理 设总体 X 的均值和方差都存在，

是取自这个总体的样本，则对样本方差　，有

$$E\left(S^2\right)=\sigma^2.$$

统计量：样本的任一不含未知参数的函数称为该样本的统计量.

样本均值 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2)$

样本标准差 $S=\sqrt{S^2}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$

样本k阶原点矩 $A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k,\ k=1,2,\cdots$

样本k阶中心矩 $B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k,\ k=2,3,\cdots$

3.抽样分布

χ^2分布： $\boldsymbol{\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2} \sim \chi^2(n)$.

其中$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且均服从$N(0, 1)$.

t 分布： $\boldsymbol{t = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)}$.

其中$X \sim N(0,1)$，$Y \sim \chi^2(n)$，且X 与Y 独立.

F分布： $\boldsymbol{F = \dfrac{U/m}{V/n}} \sim F(m, n)$.

其中 $U \sim \chi^2(m)$，$V \sim \chi^2(n)$，且U与V独立.

4.分位数

对于给定的$\alpha(0<\alpha<1)$, 称满足 $P\{X>\pi_\alpha\}=\alpha$ 的 π_α 为X(或其分布)的上侧α 分位数.

5.设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$,则 $\bar{X}$与S^2相互独立,

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1),\quad \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1),$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1).$$

. 矩估计法

（1）求出 $\mu_l = E(X^l)$, $l = 1, 2, \cdots, k$

（2）令 $\mu_l = A_l$, $l = 1, 2, \cdots, k$

（3）解出其中 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$，用 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_k$ 表示.

（4）用方程组的解 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_k$ 分别作为 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$ 的估计量，这个估计量成为矩估计量.

极大似然估计法

(1) 求似然函数

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta) \text{ 或} L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta).$$

(2) 求对数似然函数

$$\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\ln p(x_i;\theta) \text{ 或} \ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\ln f(x_i;\theta),$$

(3) 求对数似然函数的最大值点

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln L(\theta)=0 \rightarrow \theta.$$

评价估计量的标准

估计量一评价一般有三条标准：

（1）无偏性；

（2）有效性；

参数	条件	枢轴变量及其分布	$1-\alpha$置信区间（CI）
μ	σ^2 已知	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\bar{X} \pm \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2}$
	σ^2 未知	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$\bar{X} \pm \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)$
σ^2	μ 未知	$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$

三、大数定律和中心极限定理

2017 年（2015 级）

设随机变量 X 和 Y 的数学期望分别为-2 和 2，方差分别为 1 和 4，且 X 和 Y 相互独立，则根据切比雪夫不等式，有 $P\{|X+Y|\geq 5\}\leq$ ________.

2018 年（2016 级）

投掷一枚质量均匀的硬币 10000 次，X 表示出现正面的次数，利用中心极限定理计算

$P\{5060 < X < 9000\} \approx$

2019 年（2017 级）

设 $X \sim B(100,0.04)$，则由中心极限定理得 $P\{4 \leq X \leq 100\} \approx$【】.

A. 1　　B. 0　　C. 0.5　　D. 0.25

三、大数定律和中心极限定理

2017 年（2015 级）

设随机变量 X 和 Y 的数学期望分别为-2 和 2，方差分别为 1 和 4，且 X 和 Y 相互独立，则根据切比雪夫不等式，有 $P\{|X+Y|\geq 5\}\leq$ __0.2__.

2018 年（2016 级）

投掷一枚质量均匀的硬币 10000 次，X 表示出现正面的次数，利用中心极限定理计算 $P\{5060 < X < 9000\} \approx$ 0.1539

2019 年（2017 级）

设 $X \sim B(100,0.04)$，则由中心极限定理得 $P\{4 \leq X \leq 100\} \approx$【 】.

A. 1　　B. 0　　C. 0.5　　D. 0.25

四、数理统计

2017 年（2015 级）

1. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，均服从正态分布 $N(0,3^2)$，且 $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 与 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_9$ 分别为来自总体 X,Y 的简单随机样本，则统计量 $U=\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_9^2}}$ 服从________.

2. 设总体 X 在区间 $[0,\theta]$ 上服从均匀分布，则未知参数 θ 的矩估计量为______.

3. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 为来自总体 X 的样本，则下列关于 μ 的 4 个估计量中最有效的是______.

(A) $2\bar{X}-X_1$；　(B) $\bar{X}$；　(C) $\dfrac{1}{2}(X_1+X_2)$；　(D) $\dfrac{1}{2}X_1+\dfrac{2}{3}X_2-\dfrac{1}{6}X_3$.

4.（10 分）设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的一个样本，总体 X 服从参数为 p 的几何分布，即 $P\{X=x\}=p(1-p)^{x-1}$，$x=1,2,3\cdots$，其中 p 未知，$0<p<1$，求 p 的最大似然估计量。

5.（10 分）某地早稻收割，根据长势估计平均亩产为 310kg，收割时，随机抽取了 10 块地，测出每块的实际亩产量为 $x_1,x_2,\cdots x_n$，计算得 $\bar{x}=320$. 如果已知早稻亩产量 X 服从正态分布 $N(\mu,144)$，试问所估计的平均亩产 310kg 是否正确？$(\alpha=0.05)$

附：$u=1.64$，$u=1.96$

1．解：似然函数 $L(p)=\prod_{i=1}^{n}P\{X_i=x_i\}=\prod_{i=1}^{n}p(1-p)^{x_i-1}=p^n(1-p)^{n\bar{x}-n}$，

对数似然函数 $\ln L(p)=n\ln p+(n\bar{x}-n)\ln(1-p)$

令 $\dfrac{d\ln L(p)}{dp}=\dfrac{n}{p}-\dfrac{n\bar{x}-n}{1-p}=0$，

解得 p 的最大似然估计量为 $\hat{p}=\dfrac{1}{\bar{X}}$

2．解：$H_0:\mu=310$，$H_1:\mu\neq 310$，

标准差 σ 已知,拒绝域为 $|U|>u_{\frac{\alpha}{2}}$,取 $\alpha=0.05$, $n=10$, $u_{\frac{\alpha}{2}}=u_{0.025}=1.96$，

由检验统计量 $|U|=\left|\dfrac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|=\left|\dfrac{320-310}{12/\sqrt{10}}\right|=2.63>1.96$，拒绝 H_0，

即，以 95%的把握认为估产 310kg 不正确。

8 年（2016 级）

设 $X_1,X_2,\cdots,X_{10}$ 是来自总体 X 的简单随机样本，请写出总体均值的矩估计量【 】.

设 $X_1,X_2,\cdots,X_9;Y_1,Y_2,\cdots,Y_9$ 是来自相互独立的标准正态总体 X，Y 的两组简单随机样本

量 $\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+Y_2^2+\cdots Y_9^2}}$ 服从【 】分布.(要求给出自由度)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，总体方差已知，则期望的

$1-\alpha$ 的最短的置信区间长度是【 】.

取伪错误是假设检验中的第【 】类错误.

根据以往数据分析可以假定黄家港的平均径流量 X 服从伽马分布，其概率密度为

$$f(x,\alpha,\beta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}x^{\alpha-1}\exp(-\dfrac{x}{\beta}), x>0\\ 0, \qquad x\le 0\end{cases}$$

$\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)!$ 为 α 的伽马函数，假设参数 $\alpha>1$ 已知，参数 $\beta>0$ 未知，$x_1,x_2,\cdots,x_{18}$

2019 年（2017 级）

1. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 $X\sim N(0,1)$ 的样本，则 $\rho_{X_1X_n}=$【　　】.

2. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，已知 $C\sum_{i=1}^{n-1}\left(X_{i+1}-X_i\right)^2$ 为 σ^2 的无偏估计，

   则 $C=$【　　】.

   A. $\dfrac{1}{n}$　　B. $\dfrac{1}{n-1}$　　C. $\dfrac{1}{2n-2}$　　D. $\dfrac{1}{2n}$

3. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 $X\sim P(\lambda)$ 的简单随机样本，求参数 λ 的极大似然估计量.

4. 设某节目播出时长服从 $N(\mu,4)$，现随机抽取 9 期该节目，测得平均时长为 30.4 分钟，

   问：能否认为 $\mu=30$.(显著性水平 $\alpha=0.05$)

解：这是关于正态总体均值的双侧假设检验问题，在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下检验假设：

H_0:__________；　H_1:___________.

取检验统计量为：$U=$_________；拒绝域为：__________；

由样本观测值算得 $u=$_______，故______ H_0.