第六章 真空中的静电场

静电场的应用
（视频）

§6-1 电荷 库仑定律

一. 电荷

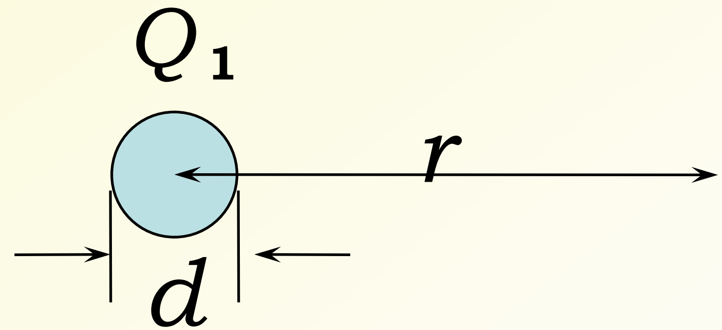
- 电荷有两类:同类电荷相互排斥，异类电荷相互吸引。
- 电荷的量子化：任何带电体所带的电量只能是电子电量e的整数倍, 即$Q=ne$(n是整数)。

  $e=1.602\times10^{-19}$库仑，为电子电量

  宏观带电体的带电量$q>>e$，准连续
- 电荷守恒定律：在任何孤立体系中，电荷的代数和保持不变。
- 电荷量的相对论不变性：在不同的惯性参考系中测量同一带电体上的电荷，所得的电量都相同。

二. 库仑定律和叠加原理

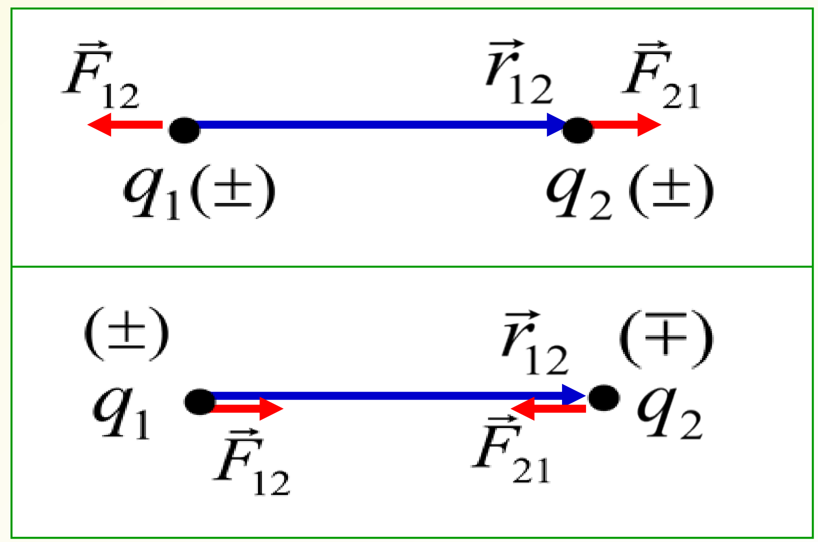
1. 点电荷模型



可以简化为点电荷的条件:

$$d \ll r$$

2. 库仑定律



$$\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{r}_0$$

$$\vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{r}$$ 施力电荷指向受力电荷的矢径的单位矢量

$$k = 8.9880\times10^{9}\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2}$$

引入真空电容率： $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{4\pi k} = 8\cdot 85\times 10^{-12}\,\mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}$

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0 \qquad \vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2 \vec{r}}{r^3}$$

目的：使后面的大量电磁学公式不出现 4π 因子

▲q_1,q_2包含符号，若q_1,q_2同号则为斥力，若q_1,q_2异号则为引力。

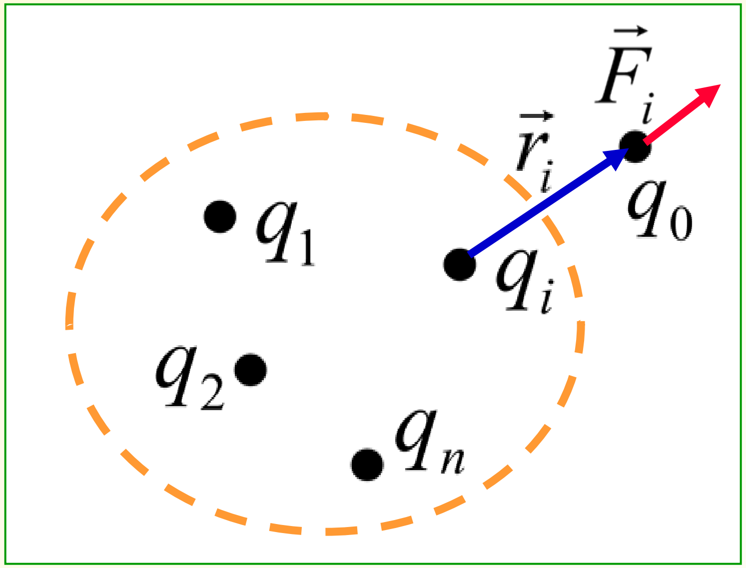
▲ 库仑定律适用的条件：

- 施力电荷对观测者静止（受力电荷可运动）
- 目前认为在10^{-17}m-10^{7}m 范围均成立。

三. 电场力叠加原理

两点电荷间相互作用力不因其它电荷的存在而改变。

点电荷系对某点电荷的作用等于系内各点电荷单独存在时对该电荷作用的**矢量和**。



$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$$

$$= \sum_i \frac{q_0 q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2} \vec{r}_{0i}$$

例1. 在氢原子中，电子与质子的距离为5.3×10^{-11}米，试求静电力及万有引力，并比较这两个力的数量关系。

由于电子与质子之间距离约为它们自身直径的10^{5}倍，因而可将电子、质子看成点电荷。

电子与质子之间静电力（库仑力）为吸引力

$$F_E = e^2 \Big/ 4\pi\varepsilon_0 R^2 = 8.2\times10^{-8}(\text{牛})$$

电子与质子之间的万有引力为

$$F_G = GmM \Big/ R^2 = 3.6\times10^{-47}\ N$$

忽略！

所以库仑力与万有引力数值之比为 $F_E \Big/ F_G = 2.3\times10^{39}$

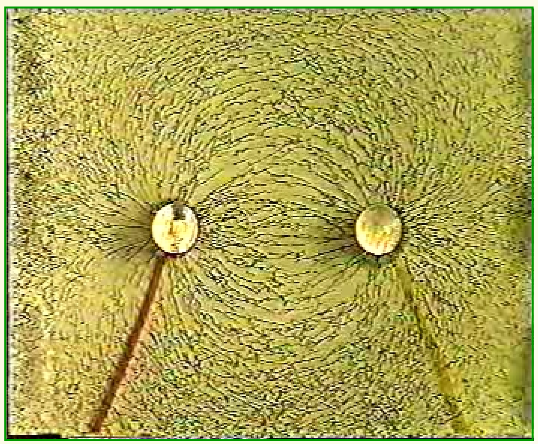
§6-2 静电场 电场强度

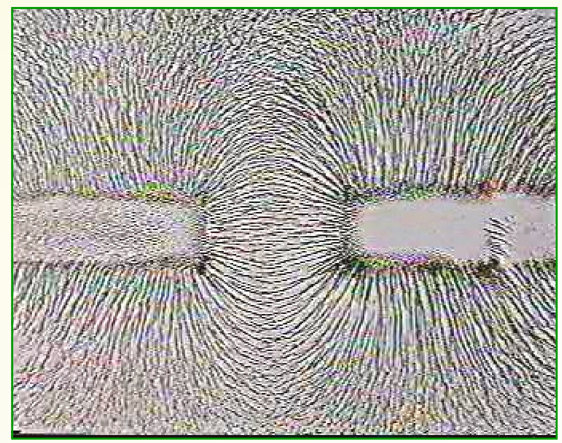
一．电场

1. “场”概念的建立和发展

18 世纪：　力的超距作用思想风行欧洲大陆。

英国法拉第：探索电磁力传递机制, 由电极化现象和磁化现象提出“场”的概念。





19 世纪：

英国麦克斯韦建立电磁场方程，定量描述场的性质和场运动规律。

电荷 $\rightleftarrows$ 电场 $\rightleftarrows$ 电荷

20世纪：

爱因斯坦：　　相对论树立了“场”的实在地位

质能关系揭示出实物与场不能截然划分。场本身参与能量和动量交换，是物质存在的基本形式之一。

2. 静电场的特点

★叠加性

★对外属性：

(1) 场中任何带电体都受电场力作用

(2) 带电体在电场中移动时，场对带电体做功

(3)使处于电场中的导体发生静电平衡；电介质发生电介质极化

★研究方法：

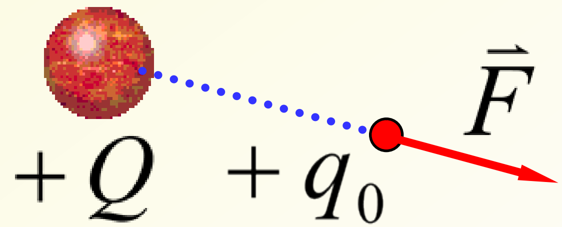
电场力—引入电场强度 $\vec{E}$

电场能量—引入电势 U

二　电场强度

1. 场源电荷： 产生电场的点电荷、点电荷系、或带电体。

试验电荷： 电量足够小的点电荷



略去对场源电荷分布的影响

与场点对应

2. 实验结果

①在不同场点，静止的试验电荷受的电场力不相同；

②在同一场点，改变静止试验电荷电量大小，试验电荷所受力也不相同，但比值$\vec{F}/q_0$是一个常矢量；

③ 选择场中不同的场点，重复②的实验发现，比值随着场点的不同，这个矢量也在变化。

定义 $\vec{E}=\dfrac{\vec{F}}{q_0}$

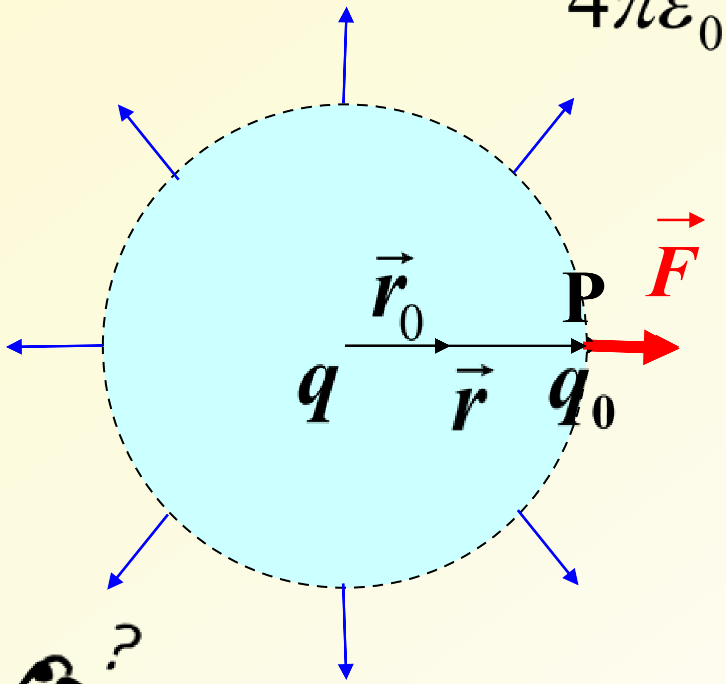
- 大小：等于单位试验电荷在该点所受电场力
- 方向：与 $+q_0$受力方向相同
- 单位：N/C；V/m。

$\vec{E}$：空间矢量函数，反应电场空间各点的固有性质，与q_0无关

三、电场强度的计算

1. 点电荷的电场

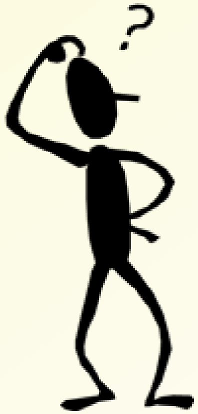
$$\vec{F} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0 \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0$$



特点:

(1)是球对称的;

(2)是与 r 平方反比的非均匀场。



当 $r \to 0$ 时，

$E \to \infty$?

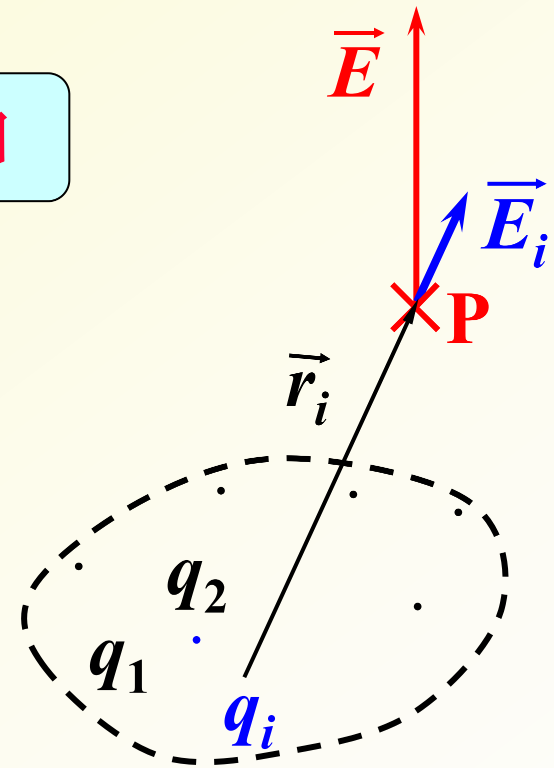
此时，点电荷模型已失效，所以这个公式已不能用！

2. 点电荷系

矢量和

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i}{q_0} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$$

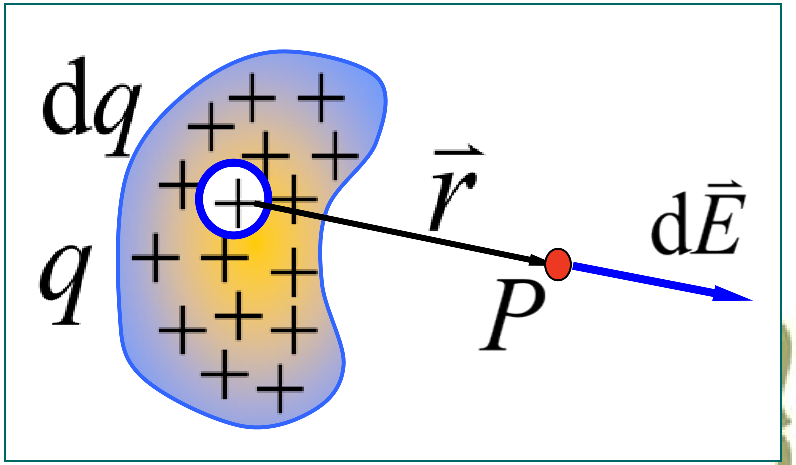
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2} \vec{r}_{0i}$$



静电场的场强叠加原理：

点电荷系电场中某点总场强等于各点电荷单独存在时在该点产生的场强矢量和。

3、连续带电体的电场强度



① 由 $\mathrm{d}\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^2}\vec{r}_0$

② 由 $\vec{E} = \int \mathrm{d}\vec{E} = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^2}\vec{r}_0$

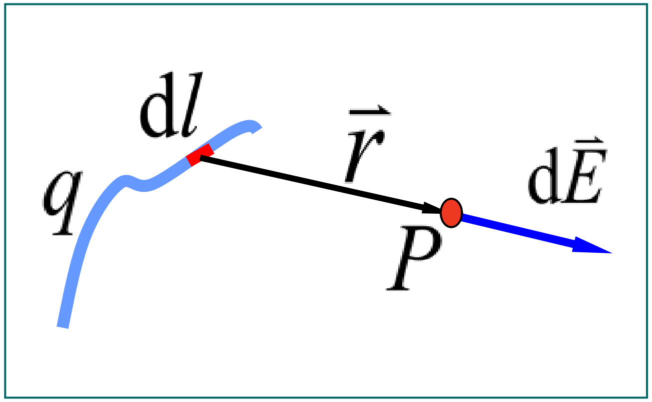
一般来说 $\int d\vec{E} \neq \int dE$

实际运算时
应**建立坐标**

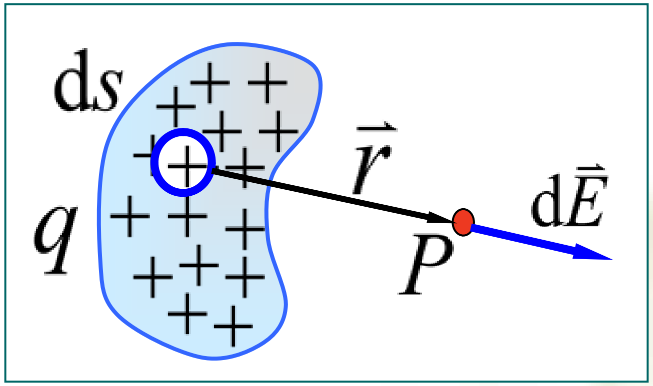
将$d\vec{E} \to \begin{cases} dE_x \to E_x = \int dE_x \\ dE_y \to E_y = \int dE_y \end{cases}$

$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} \quad E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} \quad \tan\theta = \frac{E_y}{E_x}$

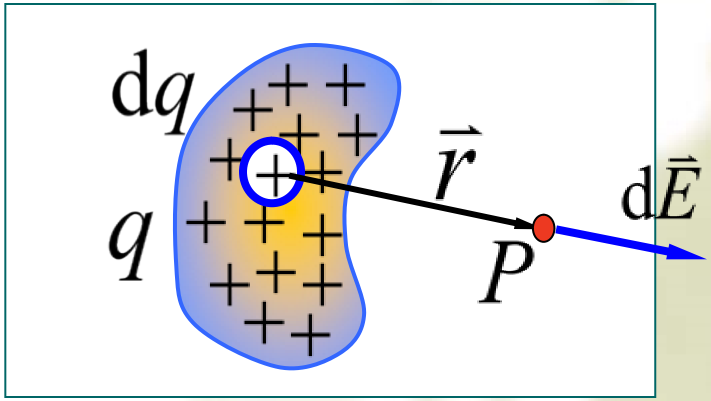
电荷**线**分布　$dq = \lambda dl$



电荷**面**分布　$dq = \sigma ds$



电荷**体**分布　$dq = \rho dV$



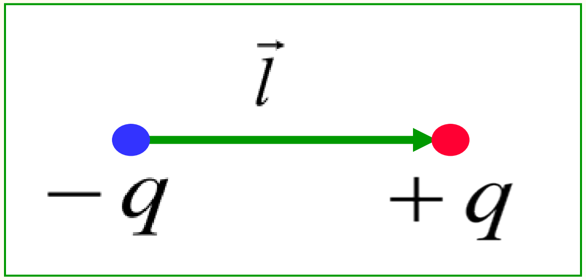
求电场强度的思路：已知场源电荷分布

将带电体看成许多点电荷的集合 → 点电荷 $\vec{E}$ 公式和 $\vec{E}$ 叠加原理 → 原则上可求出任意场源电荷的 $\vec{E}$ 分布

例1　电偶极子的电场

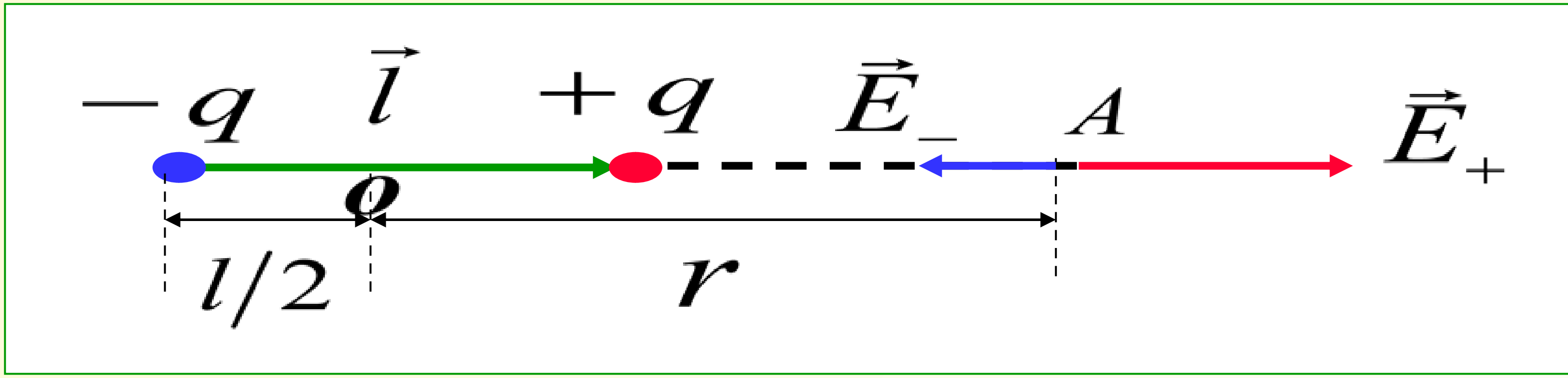
电偶极子：相距很近的等量异号电荷

电偶极矩：　$\vec{p} = q\vec{l}$



是由电介质极化，电磁波的发射、接收，中性原子间相互作用……总结出的**理想模型**。

1. 轴线延长线上 A 的场强



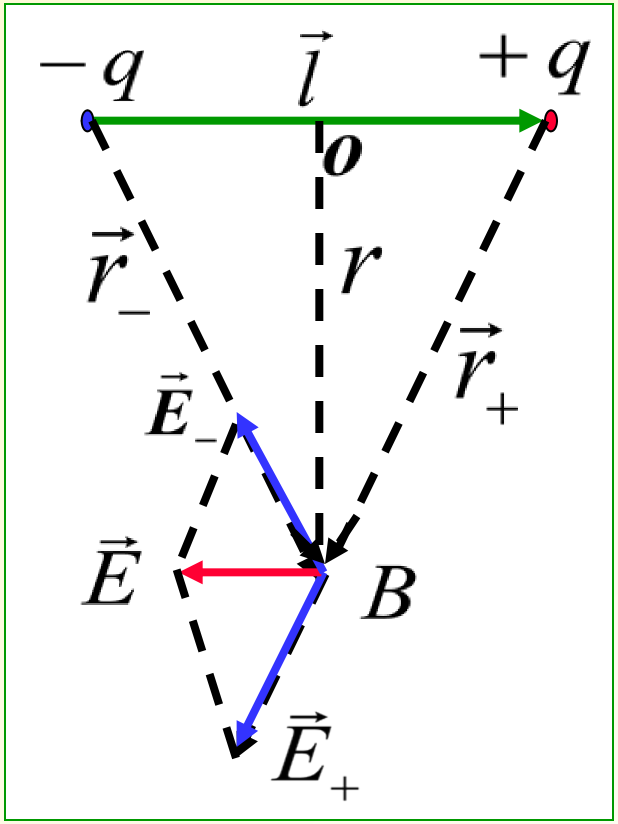
$$E = E_+ + E_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(r-\frac{l}{2})^2} - \frac{1}{(r+\frac{l}{2})^2}\right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2rL}{(r^2-\frac{l^2}{4})^2}$$

r □ l

$$\vec{E} = \frac{\vec{p}}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$$

2. 中垂线上*B*的场强（自学）

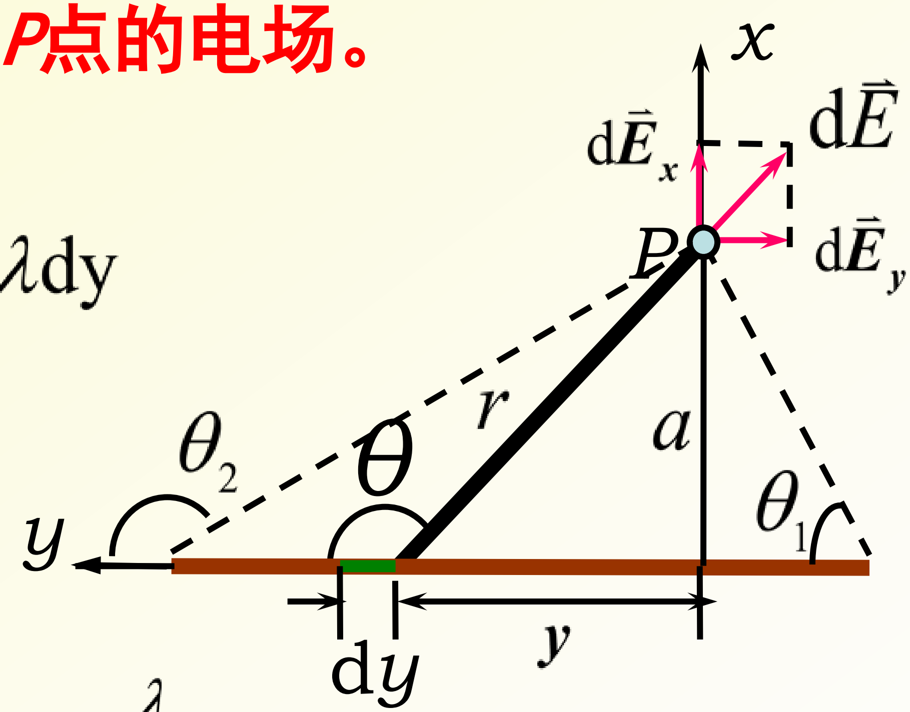


$$\vec{E}=\vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{q\,\vec{r}_+}{4\pi\varepsilon_0 r_+^3} + \left(-\frac{q\,\vec{r}_-}{4\pi\varepsilon_0\, r_-^3}\right)$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\, r^3}(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = -\frac{q\,\vec{l}}{4\pi\varepsilon_0\, r^3}$$

$$=-\frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

例2.　求一均匀带电直线在*P*点的电场。



解： 建立直角坐标系

取线元 dy 带电 $dq = \lambda dy$

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dy}{r^2}\vec{r}_0$$

将 $d\vec{E}$ 投影到坐标轴上

$$\begin{cases} dE_x = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda dy}{r^2}\sin\theta \\ dE_y = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda dy}{r^2}\cos\theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} dE_x = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\sin\theta d\theta \\ dE_y = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\cos\theta d\theta \end{cases}$$

积分变量代换　$y = a\tan(\theta - \dfrac{\pi}{2}) = -a\cot\theta$　$dy = a\csc^2\theta d\theta$

$$r^2 = a^2 + y^2 = a^2\csc^2\theta$$

积分 $E_x=\int \mathrm{d}E_x=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$

$$E_y=\int \mathrm{d}E_y=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\cos\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\sin\theta_2-\sin\theta_1)$$

$$\boldsymbol{E}=E_x\vec{\boldsymbol{i}}+E_y\vec{\boldsymbol{j}}$$

讨论： （1）若 $a<<L$则

$$\begin{cases}\theta_1=0\\ \theta_2=\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}E_x=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\\ E_y=0\end{cases}$$

当 $\lambda>0$ 方向沿半径指向外

$\lambda<0$ 方向沿半径指向内

（2）若为半无限长带电直线，则

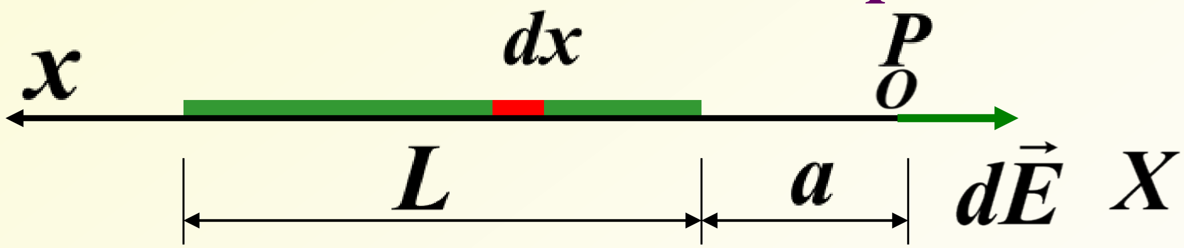
$$\begin{cases}\theta_1=\dfrac{\pi}{2}\\ \theta_2=\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}E_x=\dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\\ E_y=-\dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\end{cases}$$

（3）若*P*在中垂线上

$$\begin{cases}E_x=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\cos\theta_1\\ E_y=0\end{cases}$$

课堂练习

求均匀带电细杆延长线上一点的场强。已知 q, L, a



$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

$$E = \int_a^{a+L} \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0 x^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{L+a}\right)$$

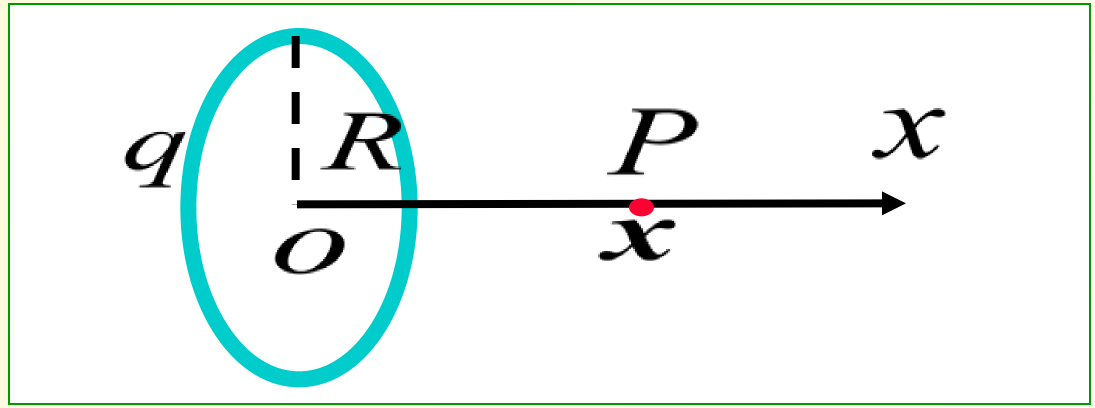
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a(L+a)}$$

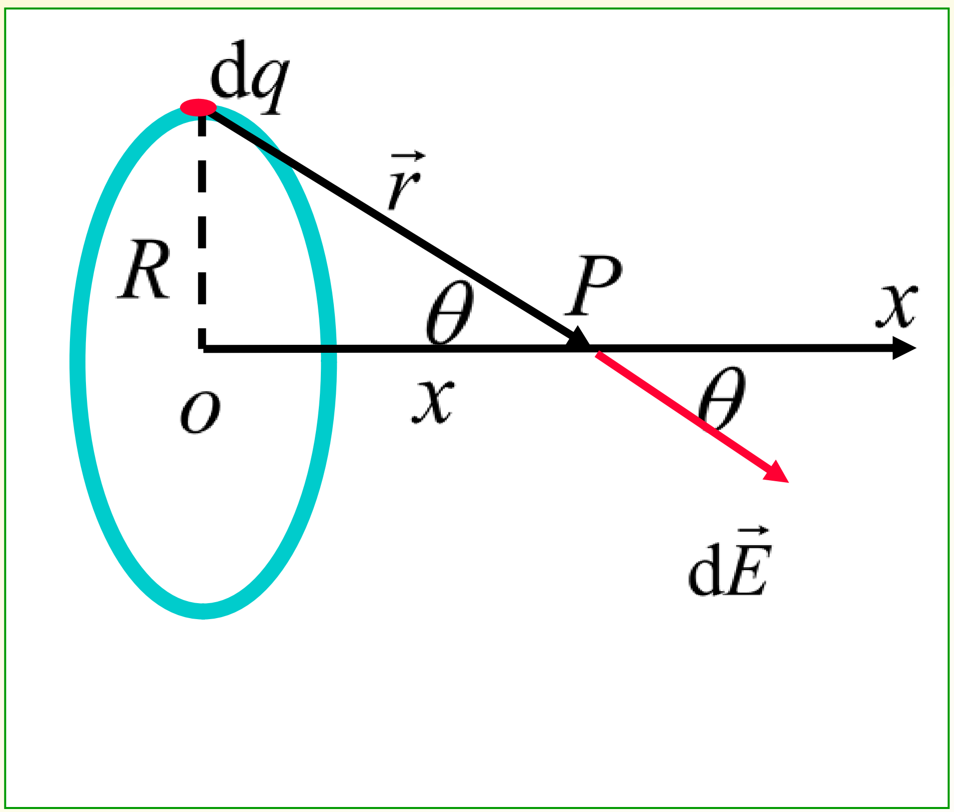
例3. 均匀带电细圆环轴线上的电场

已知：q ，R

场点 $P(x)$

求： $\vec{E}_P = ?$



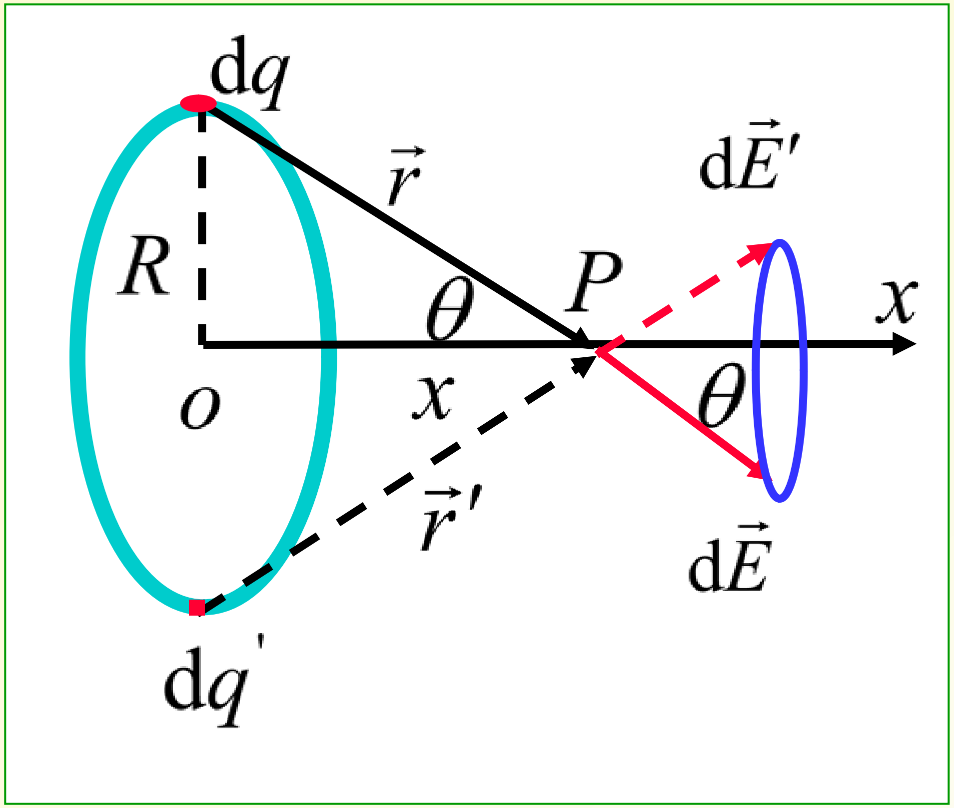


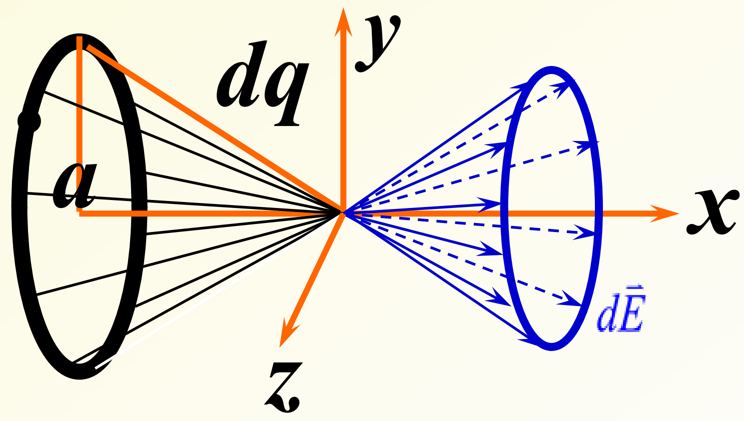
解：建立 ox 坐标

在圆环上取

$$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}l = \frac{q}{2\pi R}\mathrm{d}l$$

$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0$$



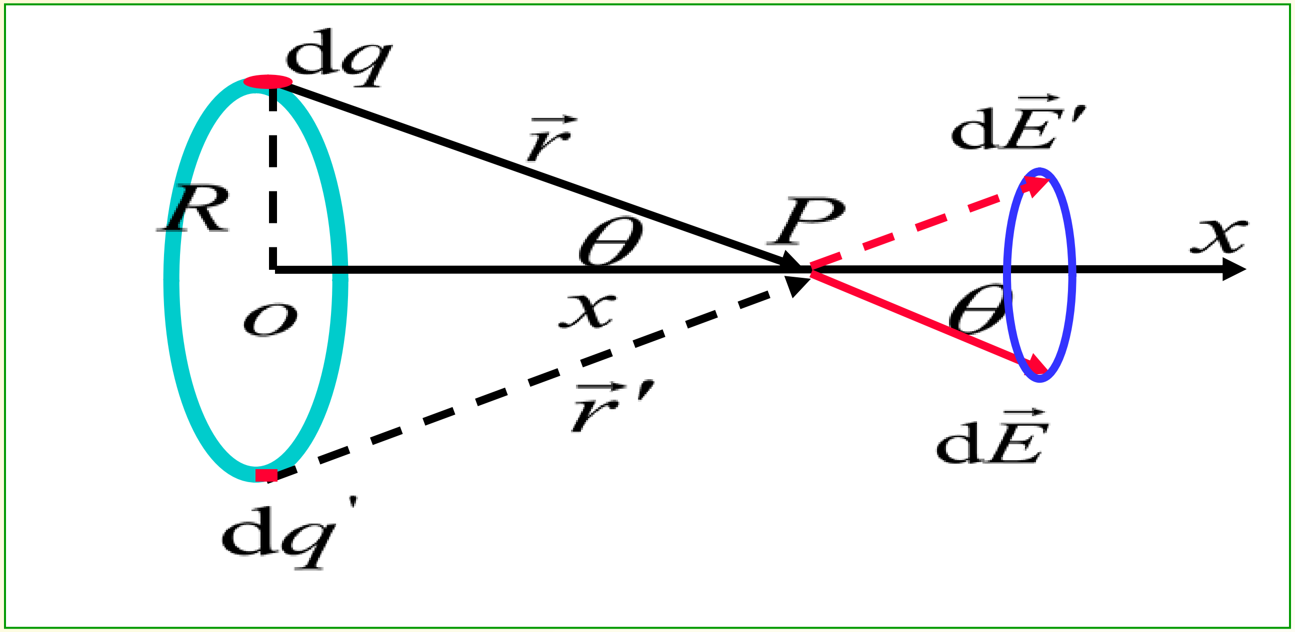


各电荷元在 P 点 $\mathrm{d}\vec{E}$ 方向不同，分布于一个圆锥面上，

将 $\mathrm{d}\vec{E}$ 分解为平行于 x 轴的分量 $\mathrm{d}\vec{E}_x$

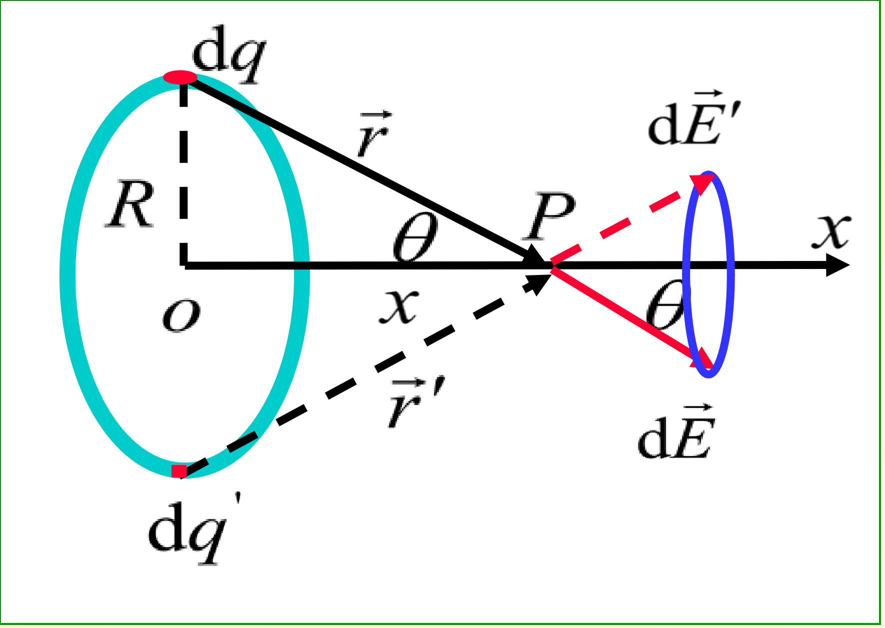
和在垂直于 x 轴平面内的分量 $\mathrm{d}\vec{E}_\perp$

由对称性可知　$E_{\perp}=\int \mathrm{d}E_{\perp}=0$



$$E=E_x=\int\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta \quad =\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta$$

$$=\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 r^3}=\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}$$



$$\vec{E}=\frac{qx\vec{i}}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}$$

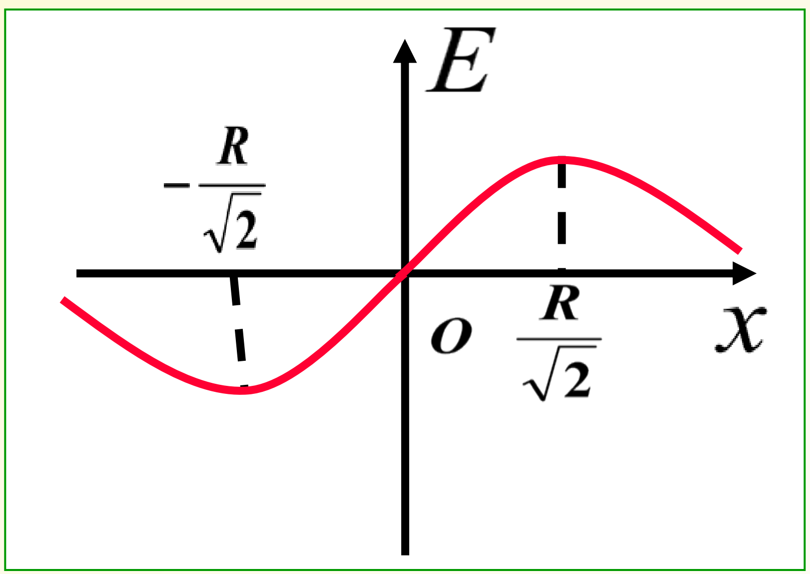
讨论:

1) **环心处** $E=0$

2) $\boldsymbol{x \gg R}$ $\boldsymbol{E=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}}$

3) 由 $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}=0$ 得 $x=\pm\dfrac{R}{\sqrt{2}}$

处 E 取极值 .



例4 均匀带电薄圆盘轴线上的电场强度.

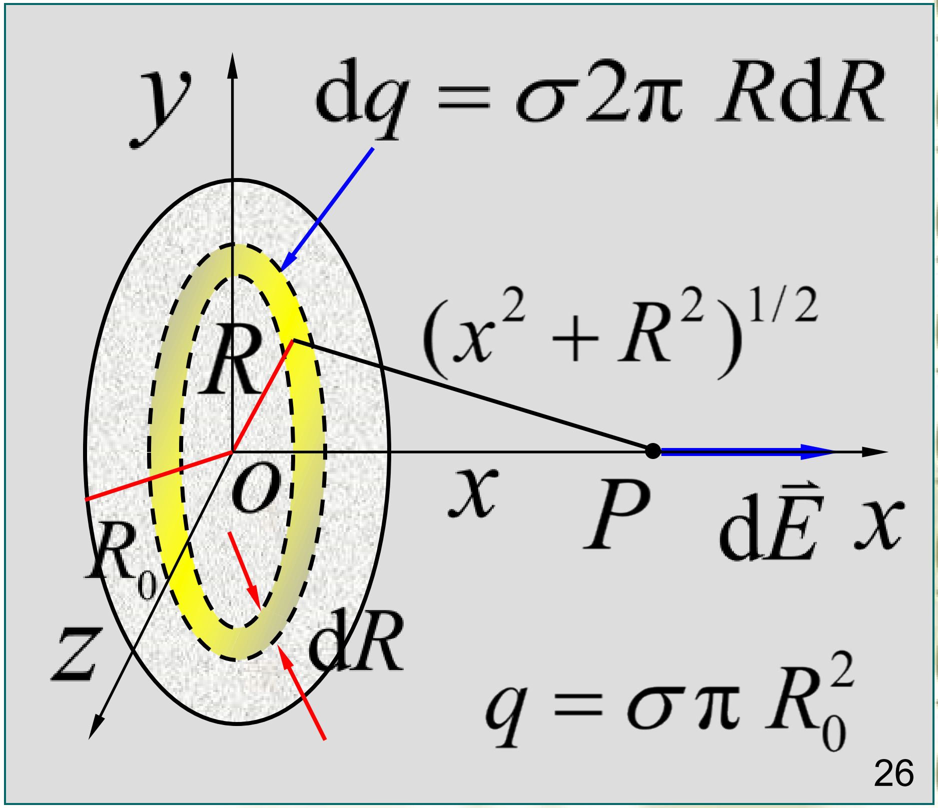
有一半径为 R_0，电荷均匀分布的薄圆盘，其电荷面密度为 σ．求通过盘心且垂直盘面的轴线上任意一点处的电场强度.

解 由例3

$$E=\frac{\boxed{q}\,x}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}$$

$$\mathrm{d}E_x=\frac{\boxed{\mathrm{d}q}\cdot x}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}$$

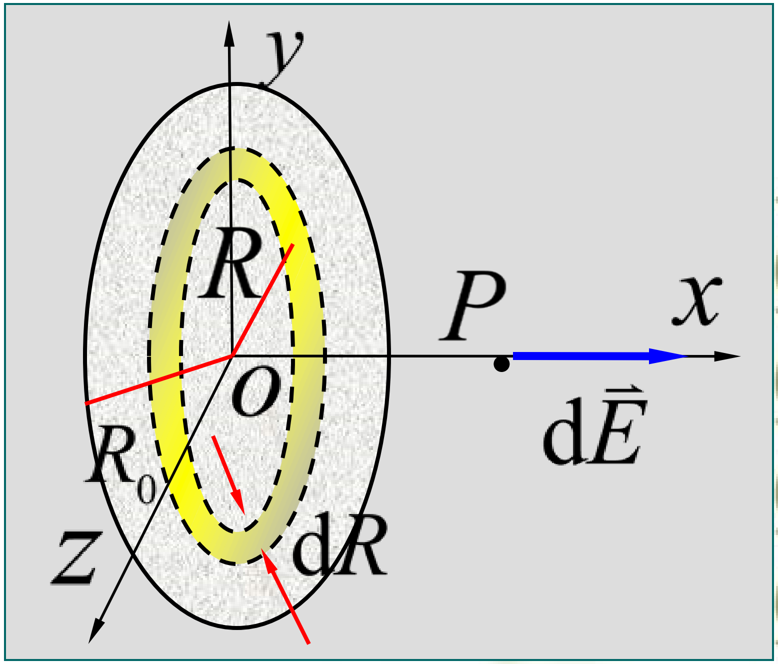
$$=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{xR\mathrm{d}R}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$



$$\mathrm{d}E_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{xR\mathrm{d}R}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

$$E = \int \mathrm{d}E_x$$

$$= \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\int_0^{R_0}\frac{R\mathrm{d}R}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$



$$E = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+R_0^2}}\right)$$

$$E=\frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+R_0^2}}\right)$$

讨 论

$$\begin{cases} x \ll R_0 & E \approx \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} \\ x \gg R_0 & E \approx \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2} \end{cases}$$

（无限大均匀带电平面的电场强度）

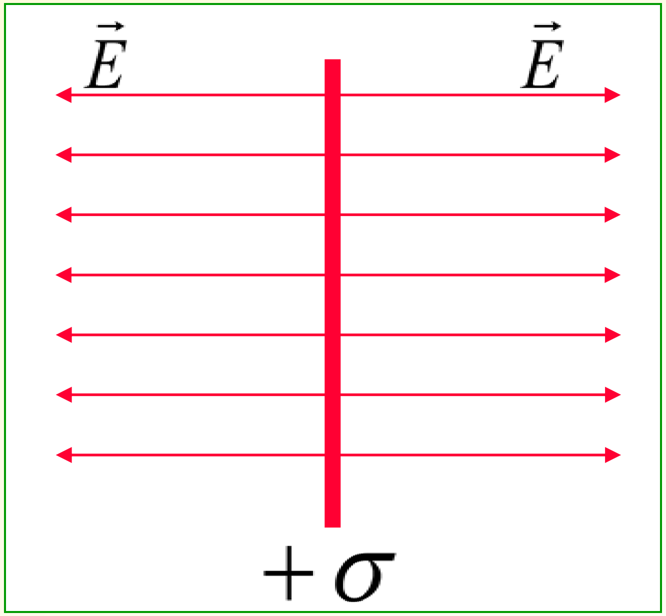
（点电荷电场强度）

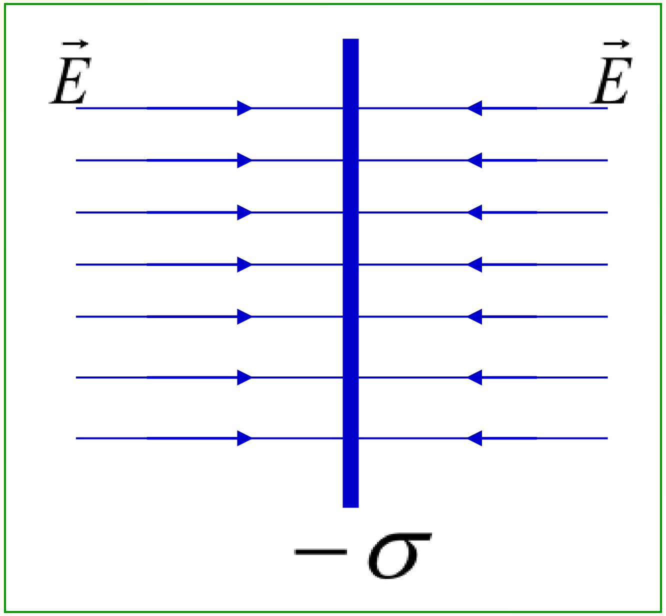
$$\left[(1+\frac{R_0^2}{x^2})^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{R_0^2}{x^2}+\cdots\right]$$

结论：

无限大带电平面产生与平面垂直的均匀电场

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$





§ 6.2 电场强度小结

➢**电场强度的定义：** $\vec{E}=\dfrac{\vec{F}}{q_0}$

➢**定量研究电场：对给定场源电荷求其** $\vec{E}$ 分布函数

.

➢**基本方法：** 用点电荷电场公式和场强叠加原理

$$\vec{E}=\frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\quad;\quad \vec{E}=\sum_i \vec{E}_i$$

$$\mathrm{d}q \;\Rightarrow\; \mathrm{d}\vec{E}\;(\mathrm{d}E_x,\mathrm{d}E_y)\;\Rightarrow\; \vec{E}=\int \mathrm{d}\vec{E}\qquad \begin{cases} E_x=\int \mathrm{d}E_x \\ E_y=\int \mathrm{d}E_y \end{cases}$$

典型带电体$\vec{E}$分布：

无限长均匀带电直线：$E=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$ 垂直于带电直线

均匀带电圆环轴线上：$\vec{E}=\dfrac{qx\vec{i}}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}$

无限大均匀带电平面：$E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ 垂直于带电面