

2013 级本科班概率统计期末试卷

一、解答下列各题（共 30 分）

1. (10 分) 病树的主人外出, 委托邻居浇水, 如果不浇水树死去的概率为 0.8. 如果浇水则树死去的概率为 0.1. 该主人有 90% 的把握确定邻居会记得浇水.

(1) 求主人回来树还活着的概率;

(2) 主人回来树还活着, 求邻居记得浇水的概率.

2. (10 分) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} Cx^3, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$,

(1) 确定常数 C ; (2) 求 X 的分布函数 $F(x)$; (3) 求 $E(X)$.

3. (10 分) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$,

求 $Y = X^2$ 的概率密度.

二、解答下列各题（每小题 10 分，共 20 分）

1. 设事件 A, B 满足 $P(A) = \frac{1}{4}, P(B|A) = P(A|B) = \frac{1}{2}$,

令 $X = \begin{cases} 1, & A \text{ 发生} \\ 0, & A \text{ 不发生} \end{cases}, Y = \begin{cases} 1, & B \text{ 发生} \\ 0, & B \text{ 不发生} \end{cases}$,

求(1) (X, Y) 的分布律; (2) X, Y 是否相互独立? 为什么? (3) 相关系数 ρ_{XY} .

2. 设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ 上服从均匀分布, 求(1) X 的边缘概率密度; (2) $P\{X < Y\}$; (3) $Z = X + Y$ 的概率密度.

三、解答下列各题（每小题 10 分，共 20 分）

1. 设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} (\theta+1)x^\theta, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 其中 $\theta > -1$ 是未知参数,

X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的一个简单随机样本, 求 θ 的最大似然估计量.

2. 某种药品重量服从正态分布, 规定其重量的方差为 $\sigma^2 = 0.025$, 现从某天的产品中抽取 16 袋, 测得样本方差 $s^2 = 0.036$, 问该天生产的药品重量的方差是否符合标准? ($\alpha = 0.05$)

附: $\chi_{0.95}^2(16) = 7.962, \chi_{0.05}^2(16) = 26.296, \chi_{0.975}^2(15) = 6.262, \chi_{0.025}^2(15) = 27.488$

四、选择填空题（每空 3 分，共 30 分）（将正确答案填在横线上）

1. 设 X 的方差为 2，则由切比雪夫不等式， $P\{|X - E(X)| \leq 2\} \geq$ _____.
2. 设总体 X 与 Y 独立且都服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$ ，已知 X_1, X_2, \dots, X_m 与 Y_1, Y_2, \dots, Y_n 是分别来自总体 X 与 Y 的简单随机样本，统计量 $T = \frac{2(X_1 + \dots + X_m)}{\sqrt{Y_1^2 + \dots + Y_n^2}}$ 服从 $t(n)$ 分布，则 $\frac{m}{n} =$ _____.
3. 已知总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布， X_1, \dots, X_n 是取自总体 X 的简单随机样本，其均值为 \bar{X} ，样本方差为 S^2 ，如果 $\hat{\lambda} = a\bar{X} + (2 - 3a)S^2$ 是 λ 的无偏估计，则 $a =$ _____.
4. 将一枚硬币重复掷 n 次，以 X 和 Y 分别表示正面朝上和反面朝上的次数，则 X 和 Y 的相关系数等于_____.
5. 设 A, B 为随机事件， $P(A) = 0.8, P(A - B) = 0.3$ ，则 $P(\overline{AB}) =$ _____.
6. 设 X 的分布函数为 $F(x)$ ，则 $P\{X = a\} =$ _____， $P\{a < X \leq b\} =$ _____.
7. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 独立，且都服从二项分布 $B(4, 0.5)$ ，随机变量 $T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ ，则 $ET =$ _____.
8. 设 A, B 是任意两个概率不为 0 的互不相容事件，则下列结论中肯定不正确的是_____.
(A) $P(AB) = P(A)P(B)$ ； (B) \bar{A} 与 \bar{B} 相容；
(C) \bar{A} 与 \bar{B} 互不相容； (D) $P(A - B) = P(A)$.
9. 随机变量 X 和 Y 独立，且方差分别为 4 和 2，则随机变量 $Z = 3X - 2Y$ 的方差是_____.
(A) 8； (B) 16； (C) 28； (D) 44.