2015级本科班概率统计期末试卷参考答案

一、选择填空题（每空3分，共30分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	0.6	0.3	20	0.2	$t(9)$	$2\overline{X}$	$\frac{1}{6}$	B	B	D

二、解答下列各题（共40分）

1. 解：**（法一）**按题设，已知 $P(A)=0.1, P(B\mid A)=0.9, P(B\mid \bar{A})=\dfrac{5}{900}$，

由全概率公式 $P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\bar{A})P(B\mid \bar{A})=0.1\times 0.9+0.9\times\dfrac{5}{900}=0.095$

于是由贝叶斯公式，可得 $P(A\mid B)=\dfrac{P(A)P(B\mid A)}{P(B)}=\dfrac{0.09}{0.095}=0.9474.$

（法二）由已知得 $P(AB)=\dfrac{90}{1000}$=0.09………服用者中，90人的呈阳性

$P(B)=\dfrac{90+5}{1000}$=0.095……….服用者中，90人的呈阳性，未服用也有5人呈阳性

由条件概率公式 $P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{0.09}{0.095}=\dfrac{18}{19}.$

2. 解：(1) $1=\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-|x|}dx=2\int_{-\infty}^{0}Ae^{x}dx=2A$，所以 $A=\dfrac{1}{2}$.

(2) $P\{0<X<1\}=\int_0^1\dfrac{1}{2}e^{-x}dx=\dfrac{1}{2}(1-e^{-1})$

(3) $$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}\int_{-\infty}^{x}\dfrac{1}{2}e^{t}dt, & x<0\\ \int_{-\infty}^{0}\dfrac{1}{2}e^{t}dt+\int_0^x\dfrac{1}{2}e^{-t}dt, & x\ge 0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{x}, & x<0\\ 1-\dfrac{1}{2}e^{-x} & x\ge 0\end{cases}$$

3. 解： $f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$,

法一（不推荐） $y=1-e^{-2x}$ 的反函数 $x=-\dfrac{1}{2}\ln(1-y), 0<y<1$ **（范围不好找）**

所以 $f_Y(y)=\begin{cases} f_X(-\frac{1}{2}\ln(1-y))\bullet\left|(-\frac{1}{2}\ln(1-y))'\right|, & 0<y<1 \\ 0, & others \end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases} 1, & 0<y<1 \\ 0, & others \end{cases}$

法二（推荐） $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{1-e^{-2X}\le y\}=P\{e^{-2X}\ge 1-y\}$

由于 e^{-2X} 恒大于零，故

（1）$1-y\le 0$ 即 $y\ge 1$ 时，$\{e^{-2X}\ge 1-y\}$ 为必然事件，故 $F_Y(y)=1\Rightarrow f_Y(y)=0$

（2）$1-y>0$ 即 $y<1$ 时，$F_Y(y)=P\{e^{-2X}\ge 1-y\}=P\{-2X\ge \ln(1-y)\}$

$$=P\{X\le \frac{-1}{2}\ln(1-y)\}=F_X(\frac{-1}{2}\ln(1-y))$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=f_X(\frac{-1}{2}\ln(1-y))\cdot\frac{1}{2(1-y)}$$

由 $f_X(x)=2e^{-2x}$，$(x>0)$ 得 $\frac{-1}{2}\ln(1-y)>0\Rightarrow 1-y<1\Rightarrow y>0$ 时

$$f_X(\frac{-1}{2}\ln(1-y))=2e^{\ln(1-y)}=2(1-y)\Rightarrow f_Y(y)=1$$

综上所述 $f_Y(y)=\begin{cases} 1, & 0<y<1 \\ 0, & others \end{cases}$

4. 解：$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, x\in R$, $f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, y\in R$，由 X 与 Y 相互独立得

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{2\pi}e^{\frac{x^2+y^2}{-2}},\quad f(zy,y)=\frac{1}{2\pi}e^{\frac{(zy)^2+y^2}{-2}}=\frac{1}{2\pi}e^{\frac{(z^2+1)y^2}{-2}}$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\,f(zy,y)dy=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|y|e^{\frac{(z^2+1)y^2}{-2}}dy=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}ye^{\frac{(z^2+1)y^2}{-2}}dy=\frac{1}{\pi(z^2+1)}$$

或根据 Z 的分布函数求分布密度

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{\frac{X}{Y}\le z\}=\iint_{x/y<z}f(x,y)dxdy$$ （画出积分区域图）

$$=\int_{-\infty}^{0}dy\int_{yz}^{+\infty}f(x,y)dx+\int_0^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{yz}f(x,y)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{0}dy\int_{z}^{-\infty}yf(uy,y)du+\int_{0}^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{z}yf(uy,y)du \qquad （换元 u=\frac{x}{y}）$$

$$=-\int_{-\infty}^{z}du\int_{-\infty}^{0}yf(uy,y)dy+\int_{-\infty}^{z}du\int_{0}^{+\infty}yf(uy,y)dy$$

得到分布密度的计算式，仿照上面的求解！

三、解答下列各题（共 30 分）

1. 解：似然函数 $L(p)=\prod_{i=1}^{n}P\{X_i=x_i\}=\prod_{i=1}^{n}p(1-p)^{x_i-1}=p^n(1-p)^{n\overline{x}-n}$，

对数似然函数 $\ln L(p)=n\ln p+(n\overline{x}-n)\ln(1-p)$

令 $\dfrac{d\ln L(p)}{dp}=\dfrac{n}{p}-\dfrac{n\overline{x}-n}{1-p}=0$，

解得 p 的最大似然估计量为 $\hat{p}=\dfrac{1}{\overline{X}}$

2. 解：$H_0:\mu=310,\ H_1:\mu\neq 310,$

标准差 σ 已知,拒绝域为 $|U|>u_{\frac{\alpha}{2}}$,取 $\alpha=0.05,\ n=10,\ u_{\frac{\alpha}{2}}=u_{0.025}=1.96$,

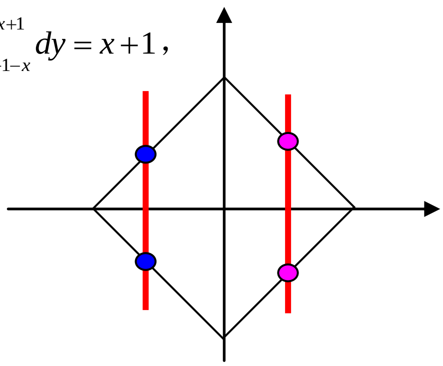
由检验统计量 $|U|=\left|\dfrac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|=\left|\dfrac{320-310}{12/\sqrt{10}}\right|=2.63>1.96$，拒绝 H_0，

即，以 95%的把握认为估产 310kg 不正确。

3. 解：由题意知 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & (x,y)\in D\\ 0, & others\end{cases}$

(1) 当 $0<x<1$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\frac{1}{2}\int_{x-1}^{1-x}dy=1-x$，

当 $-1<x<0$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\frac{1}{2}\int_{-1-x}^{x+1}dy=x+1$，



所以，$f_X(x)=\begin{cases}x+1, & -1<x<0\\ 1-x, & 0<x<1\\ 0, & others\end{cases}$

由对称性，即知 $f_Y(y)=\begin{cases}y+1, & -1<y<0\\ 1-y, & 0<y<1\\ 0, & others\end{cases}$

(2) $P\{|X|<Y\}=P\{(X,Y)\in G\}=\dfrac{1}{4}$，其中区域 G 见下图。

(3) 因为 $f(x,y)\neq f_X(x)\bullet f_Y(y)$，所以不独立。