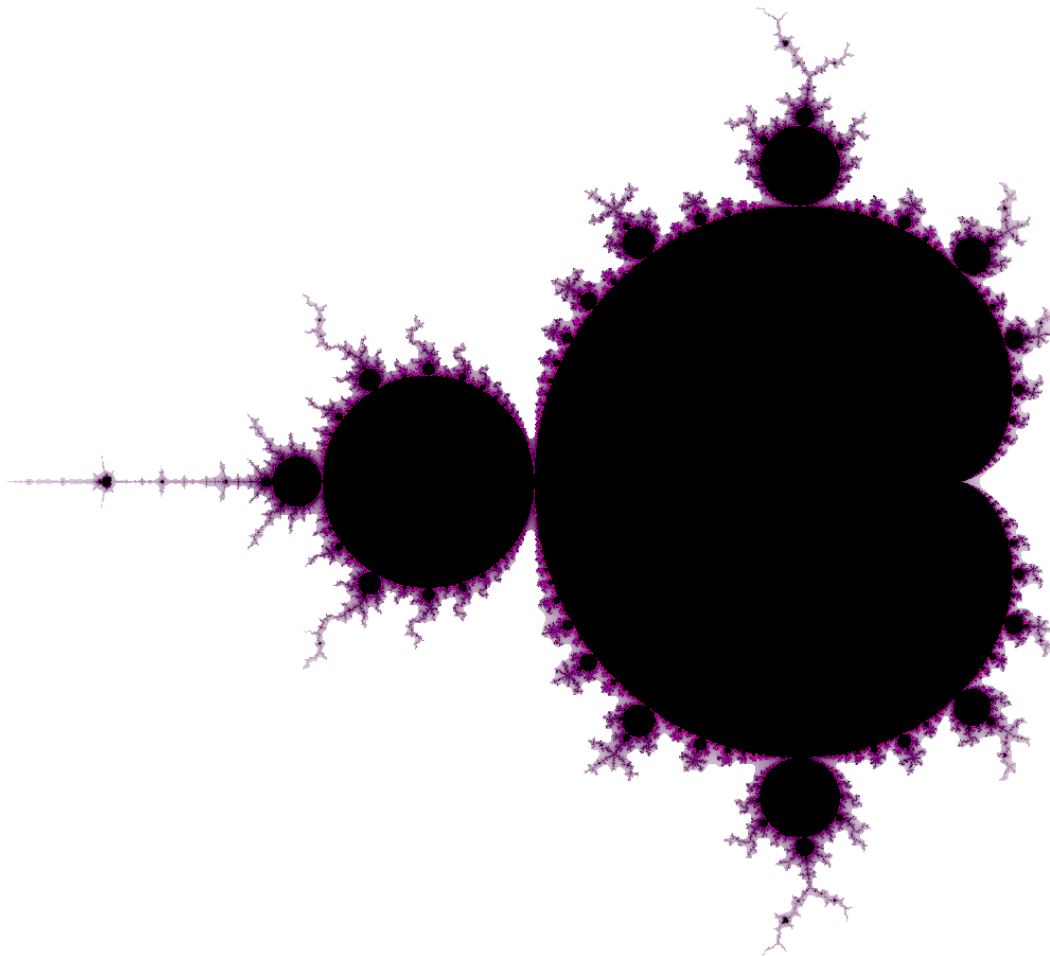


Felix-Klein-Gymnasium

Böttingerstraße 17
37073 Göttingen

Die Mandelbrot Menge, das Fraktal und seine Boxcounting-Dimension



Autor:
Lukas Thomann

Betreut von:
Bernd Beyerstedt

Abgabetermin: 15 März 2023
Datum: 13. März 2023

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
1.1	Themenvorstellung	3
1.2	Gliederung	3
2	Mandelbrot-Menge	4
2.1	Allgemeines	4
2.1.1	Komplexe Zahlen	4
2.1.2	Benoît Mandelbrot	4
2.1.3	Was ist ein Fraktal?	5
2.2	Was ist die Mandelbrot-Menge?	5
2.2.1	Definition	6
2.3	Visualisierung	6
2.4	Warum $ z_n > 2 \Rightarrow z_{n+1} > z_n $ gilt	6
3	Versuch: Die Boxcounting-Dimension der Grenze der Mandelbrot-Menge	8
3.1	Boxcounting-Dimension	8
3.1.1	Fraktale Dimension	8
3.1.2	Die Boxcounting-Dimension	9
3.1.3	Bestimmung anhand eines selbstähnlichen Fraktales	9
3.2	Vorbereitung	10
3.2.1	Informatische Umsetzung der Formel	10
3.2.2	Überprüfung des Algorithmus	11
3.2.3	Grenze der Mandelbrot-Menge	12
3.2.4	Das Bild der Grenze	12
3.3	Messungen und Ergebnisse	13
3.3.1	Erster Messbereich:	13
3.3.2	Zweiter Messbereich:	14
3.3.3	Dritter Messbereich:	14
3.3.4	Vierter Messbereich	14
3.4	Verifizierung der Ergebnisse	14
3.5	Auswertung der Ergebnisse	15
3.6	Fazit	16
4	Anhang	17
4.1	Grafiken	17
4.1.1	Mandelbrot Fluchtradius	17
4.1.2	Klassische Koch-Kurve	17
4.1.3	Rechteckige Koch-Kurve	18
4.1.4	Boxdimensionen der 4 Messungen	18
4.2	Tabellen	19
4.2.1	Messergebnisse	19
4.3	Code	23
4.4	Boxcounting-Algorithmus	23
4.5	Literaturverzeichnis	24
4.6	Sonstiges	25
4.6.1	Gesamtes Programm mit Boxcounting-Algorithmus (Quellcode)	25
4.6.2	Mandelbrot Browser	25
4.6.3	Originalbilder der Messungen samt Ergebnissen und Geogebra Datei	25
4.6.4	Schöne Processing Animationen zur Mandelbrot-Menge	25
4.6.5	Einverständiserklärung	26

Abbildungsverzeichnis

1	Mandelbrot-Menge (Titelbild)	1
2	Mini Mandelbrot	5
3	Verfolgung eines Punktes über mehrere Iterationen	6
4	Koch-Kurve mit 3 Schritten	10
5	Grenze der Mandelbrot-Menge	12
6	Messbereich 1 (invertiert)	13
7	Messbereich 2 (invertiert)	14
8	Messbereich 3 (invertiert)	14
9	Messbereich 4 (invertiert)	14
10	Durchschnitt jedes D_n 's	15
11	Mandelbrot Fluchtradius	17
12	Klassische Koch-Kurve	17
13	Rechteckige Koch-Kurve	18
14	Die Boxdimensionen der Messungen mit $x = n$ und $y = D_n$	18
15	Tabelle: Erster Messbereich	19
16	Tabelle: Zweiter Messbereich	20
17	Tabelle: Dritter Messbereich	21
18	Tabelle: Vierter Messbereich	22

Wichtig: jede dieser Grafiken ist bis auf die benutzten Tools (Bibliotheken und Programme) vollständig selbst erstellt.

1 Einleitung

1.1 Themenvorstellung

Die Mandelbrot Menge ist ein Fraktal. Das bedeutet, sie ist eine unendlich detaillierte sowie komplexe Struktur mit nie endenden, unendlich kleinen Strukturen in sich selbst. Besonders faszinierend ist dabei, dass diese unendlich detaillierte Menge aus einer sehr kurzen Formel entsteht: $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_{n-1}^2 + c$, wobei $c \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ und $z_0 = 0$. Die Faszination an diesem Gebilde im Zusammenhang mit seiner Komplexität motivierte mich für dieses Thema.

Das Fraktal sticht nicht nur wegen seiner Schönheit hervor, sondern wirkte auch als eines der ersten großen Beispiele für das Zusammenspiel von großer Rechenleistung und mathematischen Objekten. Entdeckt wurde die Mandelbrot Menge von Benoît Mandelbrot, ein Mathematiker, bekannt für sein geometrisches Verständnis von Problemen. Auf die Mandelbrot Menge stieß Benoît Mandelbrot zufällig, als er an den eng mit dem Mandelbrot verbundenen Julia Mengen arbeitete.

1.2 Gliederung

Diese Arbeit wird sich im ersten Teil mit den Grundlagen der Mandelbrot-Menge befassen, unter anderem mit der Visualisierung und der Bedeutung sowie der Geschichte des Begriffes Fraktal. Der zweite Teil beinhaltet ein Experiment zur numerischen Bestimmung der Boxcounting-Dimension der Grenze der Mandelbrotmenge, wofür erst die Grundlagen zum Verständnis einer Fraktalen Dimension gelegt werden. Darauf folgen dann die Vorbereitungen des Experiments sowie dessen Auswertung. Die Schwierigkeiten, mögliche Verbesserungen und eine Finale Bewertung beinhaltet das Fazit.

2 Mandelbrot-Menge

2.1 Allgemeines

2.1.1 Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen: Eine komplexe Zahl hat normalerweise den Aufbau $z = a + i \cdot b$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ und $i^2 = -1$. Die Zahlenmenge, zu welcher die komplexen Zahlen gehören, hat das Symbol \mathbb{C} und „umschließt“ die Menge \mathbb{R} . Auf dem Zahlenstrahl füllt die Menge \mathbb{R} die Lücken für die z.B. irrationalen Zahlen, ebenso erweitert auch die Menge \mathbb{C} den Zahlenstrahl, jedoch um eine Dimension. Der Zahlenstrahl ist mit der Menge \mathbb{C} deshalb auch kein Zahlenstrahl, sondern eine Fläche, im englischen deshalb auch „complex plane“ genannt. Dargestellt werden Funktionen mit komplexen Zahlen als Ein- und Ausgabe ¹ klassischerweise dennoch im 2D Raum. wobei die y-Achse meistens den Imaginärteil darstellt, während die x-Achse für den Realteil genutzt wird. Die erweiterte Dimension findet sich dabei in den Eigenschaften dieser Funktionen, z.B. statt Linien ganze Flächen auszufüllen. ²

2.1.2 Benoît Mandelbrot

Benoît B. Mandelbrot (*20 November 1924; †14 Oktober 2010) war ein berühmter Mathematiker des 20.ten Jahrhunderts. Er wurde in Polen geboren und zog 1936 aufgrund der Bedrohung, welche das aufstrebende Naziregime für ihn und seine Familie bedeutete, nach Paris.

Nachdem seine Familie vor den deutschen Besatzern nach Tulle geflohen war, studierte er in einer Elitehochschule bei Gaston Julia ³ und anderen Mathematikgrößen. Anschließend absolvierte er seinen Master am California Institute of Technology in Aeronautik und promovierte 1952 im Fach Mathematik an der Universität Paris.

Er beschäftigte sich zunächst mit Finanzmärkten und Kosmologie, dann ab 1979 mit fraktalen Julia Mengen. Während dieser Forschungsarbeiten stieß er erstmalig auf die Mandelbrot Menge und brachte anschließend sein bekanntestes Buch heraus: „The Fractal Geometry of Nature“, von welchem auch eines der bekanntesten Zitate der fraktalen Geometrie stammt: „Clouds are not spheres, mountains are not cones, coastlines are not circles, and bark is not smooth, nor does lightning travel in a straight line.“ ⁴ Benoît Mandelbrot starb im Alter von 85 Jahren.

¹genau eine Ein- und Ausgabe z.B. $f(x) = x$

²Wikipedia, [Complex number](#), vgl. Introduction & Definition & Visualization

³Mathematiker, Leistete bedeutende Arbeit beim Verständnis und der Theorie der Julia Mengen

⁴Mandelbrot, [The fractal geometry of nature: Updated and augmented](#)

Durch seinen Einfluss in der Mathematik über die Erforschung und Erkundung der Fraktale wurde der Begriff „Fraktal“ etabliert. Er war der erste Mathematiker, der die „theory of roughness“ entwickelte. Ihre Grundlage besteht darin, die Welt nicht zu idealisieren, sondern vielmehr die „Makel“ als grundlegende Eigenschaft eines Objektes zu sehen. ⁵

2.1.3 Was ist ein Fraktal?

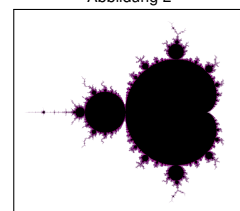
Was ist eigentlich ein Fraktal? Die Definition von B. Mandelbrot besagt: „A fractal is by definition a set for which the Hausdorff Besicovitch dimension strictly exceeds the topological dimension.“ ⁶ Der Begriff „set“ bezieht sich hier auf eine mathematische Menge. Diese ist definiert als ein aus mehreren Elementen bestehendes Konstrukt, dazu gehören etwa die Zahlenmengen wie \mathbb{Z} oder \mathbb{C} und, nach dieser Definition, auch Fraktale. ⁷

Dass die „Hausdorff Besicovitch dimension“ immer größer sein muss, als die topologische Dimension, bezieht sich auf die Rauheit eines Fraktales. Geometrisch betrachtet kann man dieser Eigenschaft entnehmen, dass ein Fraktal niemals eine glatte Oberfläche erreicht, unabhängig davon, wie weit dieses vergrößert wurde. Mehr noch, ein Fraktal wird nicht nur niemals glatt, es wird niemals weniger rau, woraus sich schlussfolgern lässt, dass ein Fraktal eine Struktur mit unendlich detaillierten Strukturen in sich selbst sein muss. ⁸

2.2 Was ist die Mandelbrot-Menge?

Die Mandelbrot-Menge ist ein zweidimensionales Fraktal. Beschreiben lässt sich diese mit dem markanten mittleren Kardioden mit einem links angeschlossenen Kreis mit ungefähr halben horizontalen Durchmesser. Des Weiteren lassen sich an dessen Rändern kleine Satelliten erkennen, welche ebenfalls an ihren Rändern kleine Satelliten zu besitzen scheinen. Auch markant ist der Strahl, welcher zur Linken aus dem kleineren Kreis zu kommen scheint ([Abbildung 2](#)).

Abbildung 2



⁵Wikipedia, [Benoît Mandelbrot](#), vgl. Fractals and theory of roughness

⁶Mandelbrot, [The fractal geometry of nature: Updated and augmented](#), siehe: „definition of the term fractal“

⁷Wikipedia, [Set \(mathematics\)](#), vgl. introduction

⁸3Blue1Brown, [Fractals are typically not self-similar](#), vgl. min 15:10

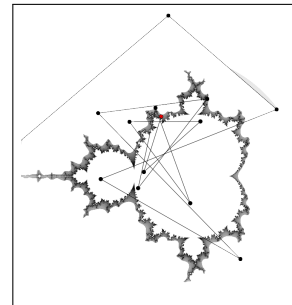
2.2.1 Definition

Die Grundlage der Mandelbrot-Menge bildet die Funktion $f(z) = z^2 + c$. Definiert ist die Mandelbrot-Menge als jene Werte für c , für welche $f^\circ(z) < \infty$. Für die Variablen gilt $z, c \in \mathbb{C}$, wobei $z_0 = 0$. Generell bedeutet dies: wenn man die Funktion $f(z)$ unendlich oft auf sich selbst anwendet, also $f(f(f(\dots f(0)\dots)))$ und das Ergebnis $< \infty$, gehört der Wert c zur Mandelbrot Menge.⁹

2.3 Visualisierung

Die Mandelbrot-Menge wird mit einem iterativen Prozess errechnet. Dieser lässt sich mathematisch mit einer Rekursionsformel beschreiben: $z_n = z_{n-1}^2 + c$, wobei $n \in \mathbb{N}_0$ und $z_0 = 0$. Die Konstante c bekommt dabei den Wert des Punktes aus einem zweidimensionalen Koordinatensystem mit der y-Achse als Imaginär- und der x-Achse als Realteil, im Sachzusammenhang: $P(a|b) \hat{=} a + bi = c_P$.

Abbildung 3: Verfolgung eines Punktes über mehrere Iterationen



Die Rekursionsformel funktioniert in ihrer Anwendung wie ein Ausschlussverfahren. Dabei wird bei einer Iteration n ($n < \infty$) allein am Zahlenwert von z_n bestimmt, ob der Punkt c_P nicht zu der Mandelbrot-Menge gehört.¹⁰ Sollte $|z_n| > 2$ sein, so ist der Punkt von der Mandelbrot-Menge ausgeschlossen, da dann $|z_{n+1}| > |z_n|$. Ist $|z_n| \leq 2$ so ist die Zugehörigkeit zum Fraktal durch diese Methode nicht bestimmt. Dem Punkt c_P wird anschließend, basierend auf den Quotienten von $\frac{n}{n_{\max}}$, eine Farbe zugewiesen. Sollte $\lim_{n \rightarrow \infty}$ für alle Punkte eingesetzt werden, so sind per Definition alle Punkte, für welche $|z_n| \leq 2$ gilt, notwendigerweise zugehörig.¹¹ Da normalerweise Gradienten für ein visuell ansprechendes Bild genutzt werden, wäre dieses Bild nur maximal zweifarbig. Dies ist dem Quotienten geschuldet, welcher für $\frac{n}{n_{\max}}$ entweder 1 oder 0 ergibt, da $\frac{x}{\infty} = 0, x \in \mathbb{R}$ oder $n = n_{\max} \Rightarrow \frac{n}{n_{\max}} = 1$.

2.4 Warum $|z_n| > 2 \Rightarrow |z_{n+1}| > |z_n|$ gilt

Der Radius von 2, auch genant „Fluchtradius“, geht aus der Bedingung hervor, dass die Entfernung zum Koordinatenursprung in folgenden Iterationen größer wird, wenn $|z_n| = |z_{n-1}^2 + c| > 2$.¹²

⁹Wikipedia, [Mandelbrot set](#), vgl. Introduction

¹⁰Es ist möglich, mit dem Zahlenwert von z_n eine Zugehörigkeit zur Mandelbrot-Menge zu erkennen (z.B., wenn $z_n = 0$ und $n > 0$), dies ist jedoch für die praktische Anwendung nicht von Bedeutung und wird deshalb im Umfang dieser Arbeit nicht betrachtet.

¹¹[Unterunterabschnitt 2.2.1](#)

¹²der Betrag von $z \in \mathbb{C}$ ist gleich der Länge des Ortsvektors von z

Behauptung:

$$|z_{n+1}| = |z_n^2 + c| > |z_n| \quad (1)$$

Für $c \leq 2$ gilt im ungünstigsten Fall¹³:

$$\begin{aligned} |z_{n+1}| &= |z_n^2 - c| \\ \Leftrightarrow |z_{n+1}| &= |z_n^2| - 2 \end{aligned}$$

aus $|a| \cdot |b| = |a \cdot b|$ folgt:

$$\Leftrightarrow |z_{n+1}| = |z_n|^2 - 2$$

aus $|z_n| > 2 \Rightarrow |z_n|^2 > 4$ folgt:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow |z_{n+1}| &= |z_n|^2 - 2 > 2 \\ \Rightarrow |z_{n+1}| &> 2 \end{aligned}$$

Für $c > 2$ ist die Eigenschaft von $z_0 = 0$ bzw. $z_1 = c$ von Bedeutung:

$$|z_2| = |z_1^2 + c| = |c^2 + c|$$

im ungünstigsten Fall:

$$\Leftrightarrow |z_2| = |c|^2 - |c|$$

solange $c > 2$ gilt:

$$\begin{aligned} |c| &< |c|^2 - |c| \\ \Leftrightarrow 2 \cdot |c| &< |c|^2 \end{aligned}$$

daraus folgt für nachfolgende Iterationen:

$$\begin{aligned} |z_2| &= |c|^2 - |c| > |c| > 2 \\ |z_3| &= |z_2|^2 - |c| \\ \Rightarrow |z_{n+1}| &> |z_n| \end{aligned}$$

Es wurde bewiesen: sowohl für $|c| \leq 2$ als auch für $|c| > 2$, wenn $|z_n| > 2$ gilt für folgende Iterationen der Rekursionsformel $|z_{n+1}| > |z_n|$.¹⁴

¹³Graphische Erklärung für den ungünstigsten Fall in [Unterunterabschnitt 4.1.1](#)

¹⁴Mathematics Stack Exchange, [Explain Mandelbot-Set escape radius](#), fungierte als Ursprung dieser Ansätze.

3 Versuch: Die Boxcounting-Dimension der Grenze der Mandelbrot-Menge

3.1 Boxcounting-Dimension

3.1.1 Fraktale Dimension

Konventionell verstehen wir Dimensionen eines Objektes als die Anzahl Achsen im Koordinaten-System, auf welchen sich das genannte Objekt erstreckt, also die minimale Anzahl an Koordinaten, mit denen jeder Punkt innerhalb dieses Objektes beschrieben werden kann (Linie: 1D, Kugel: 3D, Punkt: 0D). Eine fraktale Dimension hingegen hat die Charakteristik, jede reelle Zahl anzunehmen, das bedeutet, es gibt Fraktale mit zum Beispiel einer Dimension von 1.5 oder $\sqrt{2}$. Weiterhin ist es fraktalen Dimensionen möglich, wie „The Fractal Geometry of Nature“ beschrieben, unterschiedliche Werte für verschiedene Definitionen anzunehmen.¹⁵

Um diese Bezeichnung von einer Dimension mit Dezimalzahlen zu verstehen, muss erst die Sicht auf den Begriff Dimension erweitert werden. Fraktale Dimensionen sind, anders als die bekannten Dimensionen, kein Indikator dafür, welche Dimension sie im topologischen Sinn haben. Vielmehr sind fraktale Dimensionen eine Messeinheit für die Rauheit eines Objektes. Danach hat ein Fraktal mit zum Beispiel einer Dimension von 1.8, eine rauere Struktur als eines mit der Dimension von 1.2.

Zu beachten ist dabei, dass die Rauheit eines Fraktales immer auf die topologische Dimension des Objektes bezogen ist. Ein Fraktal mit einer topologischen Dimension von 1 und einer fraktalen Dimension von 1.8 ist rauer als ein Fraktal mit der topologischen Dimension von 3 und einer fraktalen Dimension von 3.2. Grundlegend ist auch, dass die fraktale Dimension nur für Objekte gilt, dessen Struktur, unabhängig vom untersuchten Ort, immer rau bleibt, ähnlich einer Kugel, dessen Oberfläche immer glatt sein wird. Diese Eigenschaft schließt dennoch nicht aus, reale Objekte, wie das berühmte Beispiel der britischen Küste, als Fraktal zu bezeichnen. Diese ist, wie jedes andere Objekt in der Natur, streng betrachtet kein Fraktal, doch ebenso wenig gibt es einen Ball, welcher genau einer Kugel entspricht.¹⁶

Die Idee, eine mathematische Beschreibung für die Rauheit einer Struktur zu finden, stammt von Benoît Mandelbrot. Er war der erste Mathematiker, welcher die sogenannte „theory of roughness“ erstellte, dafür gedacht, mit einer mathematischen Formel die Intensität der „Unglattheit“ in einer Figur zu bestimmen.¹⁷

¹⁵Mandelbrot, *The fractal geometry of nature: Updated and augmented*, vgl. „the idea of dimension“

¹⁶3Blue1Brown, *Fractals are typically not self-similar*, vgl. auch Videobeschreibung

¹⁷Wikipedia, *Benoît Mandelbrot*, vgl. Fractals and the „theory of roughness“

3.1.2 Die Boxcounting-Dimension

Die Boxcounting-Dimension setzt für die Bestimmung der Dimension auf die Veränderung der Fläche bei Vergrößerung des Objektes bzw. Verkleinerung der Boxen. Für ein Rechteck mit $D = 2$ gilt dessen Dimension, da die Skalierung mit einem konstanten Faktor f von $s_1 = a \cdot b$ auf $s_2 = a \cdot f \cdot b \cdot f = a \cdot b \cdot f^2$ nach $\log_f(\frac{s_2}{s_1}) = 2$ ergibt. Der Begriff „Boxcounting“ kommt von der Annäherung zu dem eingenommenen Raum (in diesem Beispiel Fläche) von s_1 und s_2 . Dieser Raum wird mit einem theoretisch unendlich feinen Raster aus Boxen (hier Quadrate) ausgelegt. Sollte eine dieser Boxen einen Teil des Fraktales beinhalten, wird sie gezählt. Die Boxcounting-Dimension ist nach dieser Theorie definiert als: ^{18 19}

$$D := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log(\tilde{N}(\epsilon))}{\log(1/\epsilon)} \quad (2)$$

Da in diesem Experiment praktisch gezählt werden muss, ist die Nutzung eines Grenzwertes nicht umsetzbar, weder für die Größe der Boxen noch für dessen Anzahl. Deshalb werde ich in dieser Arbeit den oben genannten Ansatz weiter verfolgen. Für die endliche Anzahl an Boxen gilt:

$$D \approx \frac{\log(\frac{\tilde{N}_2(\epsilon_2)}{\tilde{N}_1(\epsilon_1)})}{\log(1/\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1})} \quad (3)$$

Wobei $\epsilon_1 > \epsilon_2$ und ϵ_1 möglichst klein. ²⁰ Um für diesen endlichen Ansatz ein möglichst genaues Ergebnis zu erhalten, wird die Messung mehrmals mit unterschiedlichen Größen für ϵ durchgeführt. Des Weiteren können die Boxen durch diese Limitierung nicht jedes Detail des Fraktales erfassen, weshalb das Ergebnis aus dem Durchschnitt mehrerer Ausschnitte besteht.

3.1.3 Bestimmung anhand eines selbstähnlichen Fraktales

Ein selbstähnliches Fraktal hat die Eigenschaft, sich selbst zu beinhalten, wobei rotierte, transformierte und „nur“ dem Muster entsprechende Elemente des Fraktales ebenfalls dazu gehören. Demnach gehört zum Beispiel die Mandelbrot-Menge ebenfalls zu den selbstähnlichen Fraktalen. ²¹

Der Teil der streng selbstähnlichen Fraktale, welche exakt sich selbst beinhalten, ist aufgrund dieser Eigenschaft besonders für die exakte Boxcounting-Dimension

¹⁸Ott, *Chaos in dynamical systems*, S. 71

¹⁹Warum durch den Grenzwert das Verhältnis des Eingenommenen Raumes wegfällt, kann ich nicht erklären. Ich kann nur vermuten, dass bei $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \epsilon_2$ und damit auch $\frac{\tilde{N}(\epsilon_2)}{\tilde{N}(\epsilon_1)} = \tilde{N}(\epsilon_2)$.

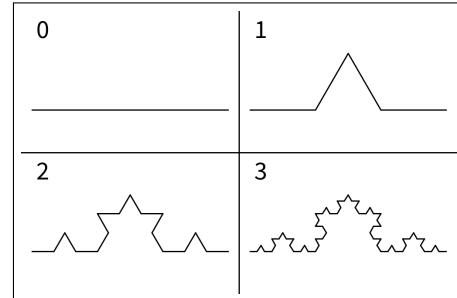
²⁰Blue1Brown, *Fractals are typically not self-similar*, wurde von dieser Quelle abgeleitet

²¹Wikipedia, *Self-similarity*, vgl. Introduction

interessant, da Vergrößerungsfaktor f und Raumänderungsfaktor s bekannt oder vergleichsweise schnell bestimmbar sind. Ein Beispiel dafür ist die Koch-Kurve und ihre Varianten. Die klassische Koch-Kurve hat per Definition sowohl $f = 1/\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$ als auch $s =$ gegeben:

Abbildung 4

Starte mit einer Linie und teile diese in drei gleich lange Elemente. Ersetze das mittlere Stück durch ein gleichseitiges Dreieck und schneide nun das alte, mittlere Stück heraus. Wiederhole den Prozess für jedes der neuen vier Elemente.



Sollte man dieser Anleitung unendlich oft folgen, so erhält man die Koch-Kurve. Der Wert für $f = 3$ ist hier durch die Eigenschaft gegeben, dass jedes der neuen Elemente $\frac{1}{3}$ der Länge des vorherigen besitzt.²² Der Faktor der Flächenvergrößerung $s = 4$ folgt daraus, dass bei einer Vergrößerung von $f = 3$, da jeder Strich aus viermal sich selbst besteht, eine viermal größere Fläche eingenommen wird. Daraus folgt:²³

$$D = \frac{\log(s)}{\log(f)} \Leftrightarrow \log_f(s) \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow \log_3(4) \approx 1.2619$$

3.2 Vorbereitung

3.2.1 Informatische Umsetzung der Formel

Zuerst wird ein sehr großer, zweidimensionaler Raum definiert (groß im Sinne der Auflösung). Anschließend wird mit begrenzten Iterationen das Fraktal mit einer bestimmten Verschiebung generiert und im Raum abgebildet, wonach der Raum in p (Proben, $p \in \mathbb{N}$) Gitter mit der gewünschten Auflösung aufgeteilt wird. Wichtig ist, dass das Fraktal sich in seiner Größe nicht verändert, sondern die „Boxen“ (hier: Quadrate) ihre Größe verkleinern, mit der kleinsten absoluten Größe von einem Pixel pro Box. Der Einfachheit halber und um Dezimalzahlen zu vermeiden, wird jede Seitenlänge der Quadrate 2^n , $n < p$, $n \in \mathbb{N}_0$ folgen. Dies bedeutet $\epsilon_{p-n} = \frac{2^n}{2^p}$.²⁴ Damit ist gegeben, dass $f = 1/\frac{\epsilon_n}{\epsilon_{n-1}} = 2$.²⁵

²² $f = 1/\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = 1/\frac{1/3}{1} = 3$

²³ Vanderbilt University, *Fractals & the Fractal Dimension*, vgl. „Exaples of geometric objects with non-integer dimensions“

²⁴ laut Gleichung 3 ist $\epsilon_n > \epsilon_{n+1}$ deshalb wird die Nummerierung von ϵ umgekehrt.

²⁵ $1/f = \frac{\epsilon_n}{\epsilon_{n-1}} = \frac{2^{p-n}}{2^p} / \frac{2^{p-(n-1)}}{2^p} = \frac{2^{2p-n}}{2^{2p-n+1}} = 2^0/2^1 = \frac{1}{2}$

Nach der Einteilung in Gitter wird jedes $\tilde{N}(\epsilon_n)$ gezählt und gespeichert. Abschließend folgt die Errechnung der durchschnittlichen Boxdimension mit:

$$\frac{1}{p-1} \cdot \sum_{k=1}^{p-1} \log_2 \frac{\tilde{N}(\epsilon_k)}{\tilde{N}(\epsilon_{k-1})} \quad (5)$$

Der daraus entstandene Code des Algorithmus findet sich im [Unterabschnitt 4.4](#).

3.2.2 Überprüfung des Algorithmus

Um die Boxdimensionen der Mandelbrotmenge zu bestimmen, sollte erst verifiziert werden, dass der programmierte Algorithmus funktioniert und wie gut er tatsächlich ist. Dazu eignet sich besonders das Fraktal der Koch-Kurve, es involviert keine komplexen Gleichungen und wird ebenfalls zweidimensional dargestellt. Für die Vorbereitung dieses Experiments werden zwei verschiedene Koch-Kurven untersucht. Zum einen die klassische Koch-Kurve mit ihrer „dreieckigen“ Struktur ([Abbildung 12](#)), zum Anderen eine Modifizierte „rechtwinklige-zickzack“ Koch-Kurve ([Abbildung 13](#)). Des Weiteren wird ebenso ein Quadrat getestet, um die Genauigkeit für die maximal messbare Dimension zu überprüfen.

Wie bereits erwähnt, hat die klassische Koch-Kurve eine Box-Dimension von ≈ 1.261 ²⁶. Der numerische Algorithmus liefert für diese bei einer Auflösung von $50 \cdot 50 \cdot 10^6$ Pixeln, einer Koch-Kurve mit 14 Iterationen und 11 verschiedenen Proben eine Boxdimension von ≈ 1.257 . Dies entspricht einer absoluten Abweichung von ≈ 0.04 und einer relativen Abweichung von $\approx 0.39\%$.

Bei der „rechteckigen zickzack“ Koch-Kurve ist die Länge eines Elements $\frac{1}{4}$ des ursprünglichen ($\Rightarrow f = 4$), wobei jedes aus jeweils acht anderen besteht ($s = 8$). Daraus folgt eine Boxcounting-Dimension von $\log_f(s) = \log_4(8) = 1.5$. Der Algorithmus liefert hier mit $50 \cdot 50 \cdot 10^6$ Pixeln, 9 Iterationen und 11 Proben eine Boxdimension von ≈ 1.496 . Die absolute Abweichung entspricht 0.004 und die relative 0.26%.

Beim Rechteck mit einer Auflösung von $35 \cdot 35 \cdot 10^6$ Pixeln und 10 Proben berechnet der Algorithmus eine Boxcounting-Dimension von ≈ 1.992 . Die echte Boxcounting-Dimension eines Rechtecks entspricht 2, daraus folgt eine absolute Abweichung von 0.008 und eine relative Abweichung von 0.4%.

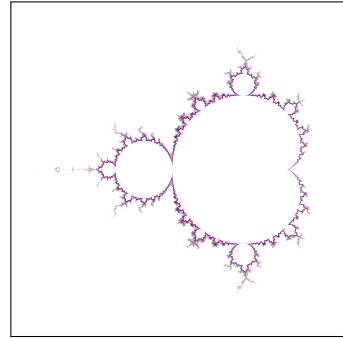
Mit diesen Ergebnissen lässt sich behaupten: „Die Fehlertoleranz des Algorithmus liegt bei $< 1\%$.“

²⁶[Gleichung 4](#)

3.2.3 Grenze der Mandelbrot-Menge

Ein Punkt liegt auf der Grenze einer Menge, wenn um diesen ein gleichmäßiger Bereich (in 2D ein Kreis) definiert werden kann und dieser immer sowohl Punkte außerhalb dieser Menge als auch Punkte innerhalb dieser Menge beinhaltet. Bei der Mandelbrot-Menge beinhaltet die Grenze jene Punkte, für welche sehr kleine Änderungen zwischen Zugehörigkeit und Überschreitung des Fluchtradius entscheiden. ²⁷

Abbildung 5: Grenze der Mandelbrot-Menge



3.2.4 Das Bild der Grenze

Um den Wert der Boxcounting-Dimension der Grenze der Mandelbrot-Menge numerisch anzunähern, wird zunächst ein brauchbares, sehr hoch aufgelöstes Bild dieser Grenze benötigt, da ϵ_n mit einer Minimalgröße von $1 \cdot 1$ Pixel in einem normalen Bild zu weit von 0 entfernt ist. Um diese, bei der Mandelbrot-Menge unendlich dünne Grenze, numerisch anzunähern, wird deshalb ein Gradient benutzt. Da Punkte, welche nah an einem zugehörigen Punkt liegen, dazu tendieren, für viele Iterationen innerhalb des Fluchtradius zu bleiben, kann man diese von „völlig falschen“ und zugehörigen Punkten unterscheiden, da sie eine andere Differenz von n/n_{\max} Iterationen besitzen. Weist man jeder Farbe im Gradienten einer bestimmten Differenz von n/n_{\max} zu, so erhält man Farbbereiche für alle Arten von Punkten. Identifiziert man nun die zugehörigen Punkte, diese an der Grenze zur Zugehörigkeit und jene, welche zu schnell ins unendliche konvergieren, so erhält man eine numerische Approximation für die Grenze der Mandelbrot-Menge.

Ein Problem dabei: die Bilder besaßen eine zu hohe Datenmenge, als dass konventionelle c++ Bibliotheken zum Laden des Bildes (opencv2 und stb_image) in der Lage wären. Die übrig gebliebene Option war daher, das Bild für jede Messung neu zu errechnen und anschließend zu verarbeiten, ähnlich wie beim Erzeugen der Koch-Kurven. Dazu ist zu erwähnen, dass es möglich war, diese generierten Bilder zu speichern, weshalb die Überprüfung auf die eine exakte Messung möglich war ([Unterabschnitt 3.4](#)).

²⁷Yale University, [Fractal Geometry](#)

Ein weiteres Problem stellten die Schichten des Gradients, welche von dem Algorithmus teilweise als Treffer gewertet wurden. Um dies zu vermeiden, beinhaltete dieser eine Toleranz, welche unglücklicherweise allein nur sehr schlechte Ergebnisse lieferte. Die Teillösung hier, war das Bild mit der Bibliothek opencv zu verarbeiten. Diese hat Funktionen, um Kontrast sowie Belichtung zu erhöhen, um die Unterschiede zwischen Grenze und Anderem zu vergrößern. Eine Eigenschaft der Farbwerte, welche sich als nützlich erwies, ist die Tatsache, dass ein Farbwert w immer die Voraussetzung $0 \leq w \leq 255$ erfüllt. Zieht man eine Konstante k von jedem Farbwert w_n ab und multipliziert anschließend jeden dieser Werte mit einem Faktor a , so werden diese, für welche $w_n \leq k$ gilt, 0 ergeben, wohingegen jeder Wert $w_n > k$ den Wert $(w_n - k) \cdot a$ haben wird. Es war somit möglich, kleine Farbwerte zu filtern, wodurch die Toleranz des Algorithmus verringert werden konnte. Diese Teillösung verbesserte das Ergebnis, jedoch war dies nicht optimal. Die Toleranz des Algorithmus musste deshalb weiterhin relativ hoch gehalten werden ($\approx \frac{1}{3}$), um falsch-positive Werte zu reduzieren. Die Folge daraus, Filamente wiesen teilweise Lücken in der Erkennung auf. Des Weiteren wurde, durch die Angleichung von Helligkeit, das Detail der Grenze reduziert, wodurch ebenfalls eine Ungenauigkeit der Messung gefördert wurde.

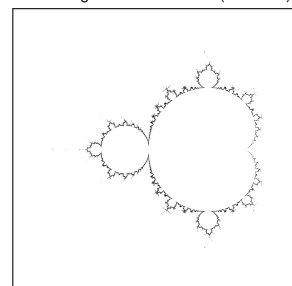
3.3 Messungen und Ergebnisse

Insgesamt wurden vier Messbereich der Grenze mit jeweils elf unterschiedlichen Boxgrößen gemessen. Alle Messbereiche wachsen mit Iterationen und Gradienten-detail dabei proportional zu ihrem Vergrößerungsfaktor gegenüber dem ersten Messbereich. Des Weiteren ist jeder Messbereich quadratisch und hat eine Auflösung von $35 \cdot 35 \cdot 10^6$ oder 1.225 Mrd. Pixeln.²⁸

3.3.1 Erster Messbereich:

Der erste Messbereich ist eine Totalaufnahme des gesamten Fraktales, sie reicht von $P1(-2.1|-1.4)$ nach $P2(0.7|1.4)$. Die Ergebnisse (Im Anhang: [Abbildung 15](#)) lieferten eine durchschnittliche Boxcounting-Dimension von ≈ 1.667 . Dabei steigen die Werte ähnlich einem begrenzten- oder auch logistischen Wachstum an, mit dem höchsten Wert von ≈ 1.944

Abbildung 6: Messbereich 1 (invertiert)

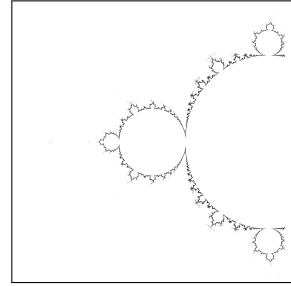


²⁸Da es nicht sinnvoll ist, Bilder dieser Dimension in .pdf Dokumente zu importieren, werden alle Bilder auf maximal $2 \cdot 2 \cdot 10^6$ Pixel herunter skaliert!

3.3.2 Zweiter Messbereich:

Der zweite Messbereich erstreckt sich über die gesamte linke Seite der Mandelbrot-Menge, von $P1(-2|-1)$ nach $P2(0|1)$. Die durchschnittlichen Ergebnisse (Im Anhang: [Abbildung 16](#)) lieferten hier ≈ 1.690 , ebenfalls mit der Tendenz nach oben (größter Wert ≈ 1.915).

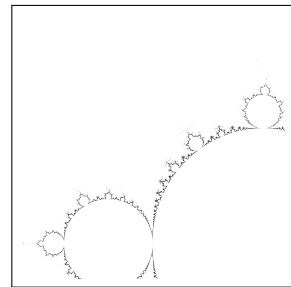
Abbildung 7: Messbereich 2 (invertiert)



3.3.3 Dritter Messbereich:

Der dritte Messbereich befasst sich mit der oberen Hälfte der Mandelbrot-Menge und erstreckt sich von $P1(-1.5|-1.3)$ nach $P2(0|0.2)$. Die Tendenz nach oben ist in den Ergebnissen (Im Anhang: [Abbildung 17](#)) ebenfalls deutlich zu sehen. Die durchschnittliche Boxcounting-Dimension beträgt ≈ 1.667 mit dem höchsten Wert von ≈ 1.874 .

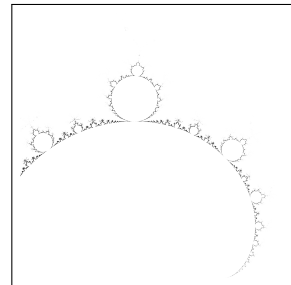
Abbildung 8: Messbereich 3 (invertiert)



3.3.4 Vierter Messbereich

Der vierte Messbereich schließt die hintere obere Hälfte ein. Er ist der kleinste Messbereich und erfasst den Bereich von $P1(-0.6|-1.1)$ bis $P2(0.5|0)$. Die Ergebnisse steigen ebenfalls mit einer durchschnittlichen Boxcounting-Dimension von ≈ 1.643 und einem Maximum von ≈ 1.776 .

Abbildung 9: Messbereich 4 (invertiert)



3.4 Verifizierung der Ergebnisse

Essentiell ist für das Experiment die Kontrolle darüber, was genau gemessen wurde. Wie bereits in [Unterunterabschnitt 3.2.4](#) erwähnt, gab es Schwierigkeiten mit den Abstufungen des Gradienten. Das darauffolgende Problem der Ungenauigkeit des Algorithmus durch die falsch positiven Werte, ist in einer Messung zunächst nicht erkennbar, da ohne Visualisierung der positiven Pixel keine exakte Beschreibung entsteht, welche Boxen vom Algorithmus als positiv gewertet werden. Um dies zu überprüfen, wurde der Algorithmus ein zweites Mal für ϵ_{10} angewendet. Der entscheidende Unterschied zwischen dem ersten und dem zweiten Durchlauf bestand darin, dass der zweite Durchlauf die als Treffer gewerteten Pixel maximal weiß färbte. Nach dem Speichern des bearbeiteten Bildes war es somit möglich, zu überprüfen, ob das Ergebnis des Algorithmus hinreichend genau ausfiel.

3.5 Auswertung der Ergebnisse

Der von Mitsuhiro Shishikura 1991 bewiesene Wert der Boxcounting-Dimension liegt bei genau 2.²⁹ Die Ergebnisse der vier Messungen sind somit auf den ersten Blick ernüchternd, da der Durchschnitt der Boxcounting-Dimensionen aller Messungen bei ≈ 1.668 liegt. Dies würde einer absoluten Abweichung von 0.332 und einer relativen Abweichung von 20% bedeuten. Mit anderen Worten, unbrauchbar.

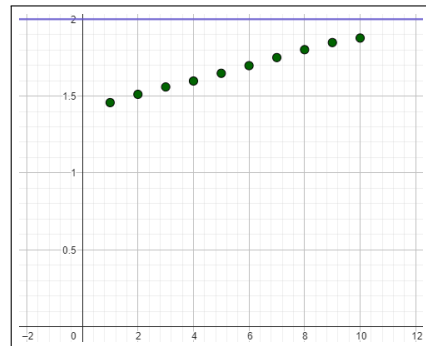
Wie man jedoch an den Diagrammen erkennen

kann, tendieren alle Messungen, wenn auch unterschiedlich, nach oben (Abbildung 14). Weiterhin ist zu erkennen, dass keine Messung jemals 2 überschreitet, woraus sich die Möglichkeit ergibt, dass jede der Messungen in Richtung 2 tendiert. Errechnet man den Durchschnitt von D_{10} aller Messungen, ergibt dieser bereits 1.887,

wodurch die relative Abweichung auf $\approx 6.5\%$ sinkt. Dass die Werte der Boxcounting-Dimension von kleineren ϵ_n begünstigt werden, ergibt ebenfalls Sinn, da diese ohnehin einzig für sehr kleine ϵ_n definiert ist. Die Umstände lassen vermuten, dass die Größe der Boxen zu hoch angesetzt wurde, man hätte kleinere Boxen verwenden müssen.

Doch es bleiben Zweifel. Der erste besteht darin, dass das Bild mit kleineren ϵ_n für die Boxen immer unschärfer wird, da die Schichten des Gradients zwischen sehr kleinen Lücken deutlich mehr Fehler erzeugen. Dies lässt sich auf die Anzahl der Iterationen in diesen Regionen zurückführen, welche denen des Randes sehr nahekommen. Dies würde bedeuten, dass die Messung nicht genauer, sondern für kleinere ϵ_n ungenauer wird. Ein Gegenargument bildet der Fakt, dass für kleine ϵ_n die Lücken der Erkennung in den Filamenten sichtbar werden, welches die Boxdimension dieser deutlich verkleinern sollte, es entsteht ein ungefähres Gleichgewicht. Ein anderes Argument gegen die Genauigkeit der großen Boxen ist, dass die Länge des Bildes nicht genau durch die Seitenlänge der Boxen teilbar ist. Für die großen Boxen „fehlt“ somit immer ein Teil ihrer Messfläche,³⁰ wodurch ebenfalls Fehler entstehen. Aus den oben genannten Gründen ergibt es also Sinn, dass die Boxcounting-Dimension genauer angenähert wird, je weiter ϵ_n schrumpft und dennoch bleibt das Problem der Bildgenauigkeit für kleine ϵ_n bestehen.

Abbildung 10: Durchschnitt jedes D_n 's



²⁹Shishikura, „The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets“, S. 1

³⁰Die Boxen werden von rechts nach links und von oben nach unten ausgelegt. Sollte eine Box nicht mehr passen, wird sie im Algorithmus unten bzw. rechts abgeschnitten \Rightarrow Fehler für die rechteste und unterste Reihe

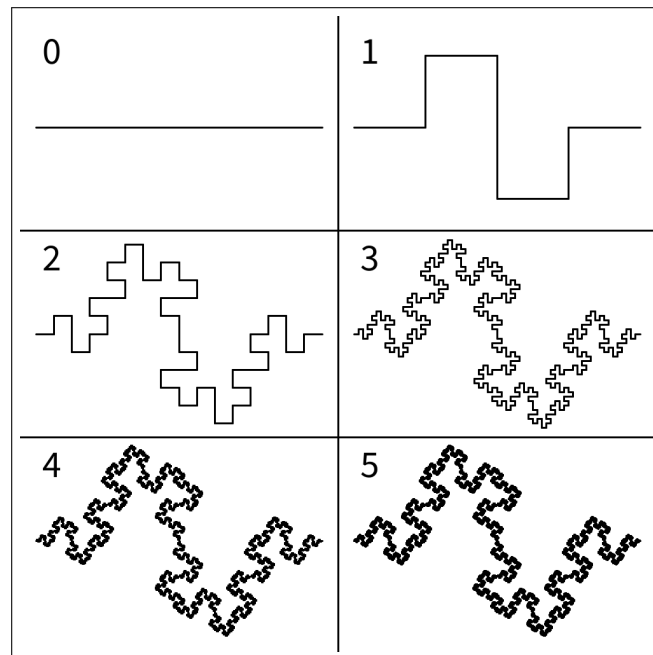
Am Ende kann dieses Experiment leider nicht für gelungen erklärt werden, jedoch auch nicht für gescheitert. Da die Zeit nicht reicht, um genauere Experimente zu starten und möglicherweise den Boxcounting-Algorithmus sowie die Generierung des Bildes zu optimieren und zu verbessern, muss diese Arbeit trotz ihrer Unvollständigkeit beendet werden.

3.6 Fazit

Als Fazit kann ich in dieser Arbeit das Gelernte im Hinblick auf die Mandelbrot-Menge hervorheben. Dieses, sowie die Erkenntnisse über Fraktale und komplexe Zahlen im Allgemeinen in dieser Zeit, kann ich für mich persönlich nur als positiv werten. Besonders erfreut hat mich dabei das spielerische Entdecken der Mandelbrot-Menge, ermöglicht durch die Kenntnisse in der Informatik, welche mir erlaubten, eigene Programme zur Beantwortung von selbst gestellten Fragen zu programmieren. Restliche Angaben zu dem vollständigen Code, sowie einem im Zuge dieser Arbeit codierten Mandelbrot-Browser, anderen Animationen und Dateien finden sich im Anhang sowie im [Unterabschnitt 4.6](#).

4.1.3 Rechteckige Koch-Kurve

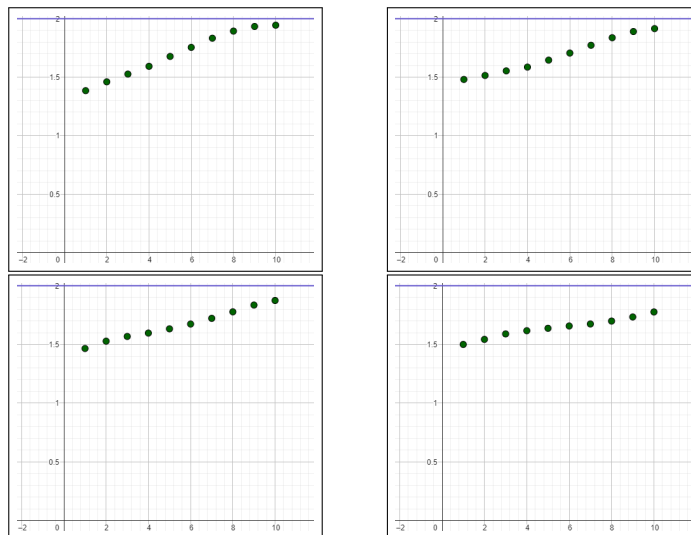
Abbildung 13: Die Schritte einer Rechteckigen Koch-Kurve mit 5 Wiederholungen nacheinander und dem Startpunkt mit einer Linie an Stelle 0



4.1.4 Boxdimensionen der 4 Messungen

Abbildung 14: Die Boxdimensionen der Messungen mit $x = n$ und $y = D_n$

(a) Boxdimensionen Messung 1 (b) Boxdimensionen Messung 2



(c) Boxdimensionen Messung 3 (d) Boxdimensionen Messung 4

4.2 Tabellen

4.2.1 Messergebnisse

Abbildung 15: Tabelle: Erster Messbereich

ϵ	Boxgröße (in Pixeln)	$\tilde{N}(\epsilon)$	Dimension D_n
ϵ_0	$2^{10} = 1.024$	234	—————
ϵ_1	$2^9 = 512$	611	$D_1 \approx 1.385$
ϵ_2	$2^8 = 256$	1681	$D_2 \approx 1.4600$
ϵ_3	$2^7 = 128$	4.842	$D_3 \approx 1.526$
ϵ_4	$2^6 = 64$	14.604	$D_4 \approx 1.593$
ϵ_5	$2^5 = 32$	46.705	$D_5 \approx 1.677$
ϵ_6	$2^4 = 16$	157.598	$D_6 \approx 1.755$
ϵ_7	$2^3 = 8$	561.485	$D_7 \approx 1.833$
ϵ_8	$2^2 = 4$	2.086.597	$D_8 \approx 1.894$
ϵ_9	$2^1 = 2$	7.969.618	$D_9 \approx 1.933$
ϵ_{10}	$2^0 = 1$	30.666.013	$D_{10} \approx 1.944$

Der erste Messbereich ([Abbildung 15](#)) erstreckt sich von $P1(-2.1| -1.4)$ nach $P2(0.7|1.4)$.³¹ Es wurden pro Punkt des $35 \cdot 35 \cdot 10^6$ Pixeln großen Bildes, 800 Iterationen durchgeführt. Der Gradient besaß 2000 Abstufungen. Die durchschnittliche Boxcounting-Dimension beträgt ≈ 1.700 , die kleinste ≈ 1.385 und die größte ≈ 1.944 .

³¹Der Messbereich ist als Quadrat definiert, wobei $P1$ die linke untere und $P2$ die rechte obere Ecke beschreibt

Abbildung 16: Tabelle: Zweiter Messbereich

ϵ	Boxgröße (in Pixeln)	$\tilde{N}(\epsilon)$	Dimension D_n
ϵ_0	$2^{10} = 1.024$	248	—————
ϵ_1	$2^9 = 512$	692	$D_1 \approx 1.480$
ϵ_2	$2^8 = 256$	1.977	$D_2 \approx 1.514$
ϵ_3	$2^7 = 128$	5.804	$D_3 \approx 1.554$
ϵ_4	$2^6 = 64$	17.424	$D_4 \approx 1.586$
ϵ_5	$2^5 = 32$	54.515	$D_5 \approx 1.646$
ϵ_6	$2^4 = 16$	177.865	$D_6 \approx 1.706$
ϵ_7	$2^3 = 8$	607.723	$D_7 \approx 1.773$
ϵ_8	$2^2 = 4$	2.171.627	$D_8 \approx 1.837$
ϵ_9	$2^1 = 2$	8.048.844	$D_9 \approx 1.890$
ϵ_{10}	$2^0 = 1$	30.354.342	$D_{10} \approx 1.915$

Der zweite Messbereich ([Abbildung 16](#)) erstreckt sich von $P1(-2|-1)$ zu $P2(0|1)$. Der Vergrößerungsfaktor v entspricht $v = \frac{0.7 - (-2.1)}{0 - (-2)} = \frac{2.8}{2} = 1.4$. Es wurden pro Punkt des $35 \cdot 35 \cdot 10^6$ Pixeln großen Bildes, 1120 Iterationen durchgeführt. Der Gradient besaß 2800 Abstufungen.³² Die durchschnittliche Boxcounting-Dimension beträgt ≈ 1.690 , die kleinste ≈ 1.480 und die größte ≈ 1.915 .

³²Iterationen: $v \cdot 800 = 1.4 \cdot 800 = 1120$, Gradient: $v \cdot 2000 = 1.4 \cdot 2000 = 2800$

Abbildung 17: Tabelle: Dritter Messbereich

ϵ	Boxgröße (in Pixeln)	$\tilde{N}(\epsilon)$	Dimension D_n
ϵ_0	$2^{10} = 1.024$	226	—————
ϵ_1	$2^9 = 512$	624	$D_1 \approx 1.465$
ϵ_2	$2^8 = 256$	1.799	$D_2 \approx 1.528$
ϵ_3	$2^7 = 128$	5.333	$D_3 \approx 1.568$
ϵ_4	$2^6 = 64$	16.128	$D_4 \approx 1.597$
ϵ_5	$2^5 = 32$	50.006	$D_5 \approx 1.633$
ϵ_6	$2^4 = 16$	159.521	$D_6 \approx 1.674$
ϵ_7	$2^3 = 8$	526.202	$D_7 \approx 1.722$
ϵ_8	$2^2 = 4$	1.803.848	$D_8 \approx 1.777$
ϵ_9	$2^1 = 2$	6.435.805	$D_9 \approx 1.835$
ϵ_{10}	$2^0 = 1$	23.589.838	$D_{10} \approx 1.874$

Der dritte Messbereich ([Abbildung 17](#)) erstreckt sich von $P1(-1.5|-1.3)$ zu $P2(0|0.2)$. Der Vergrößerungsfaktor v entspricht $v = \frac{2.8}{1.5} = 1.8\bar{6}$. Es wurden pro Punkt des $35 \cdot 35 \cdot 10^6$ Pixeln großen Bildes, 1493 Iterationen durchgeführt. Der Gradient besaß 3733 Abstufungen. Die durchschnittliche Boxcounting-Dimension beträgt ≈ 1.667 , die kleinste ≈ 1.465 und die größte ≈ 1.874 .

Abbildung 18: Tabelle: Vierter Messbereich

ϵ	Boxgröße (in Pixeln)	$\tilde{N}(\epsilon)$	Dimension D_n
ϵ_0	$2^{10} = 1.024$	250	—————
ϵ_1	$2^9 = 512$	707	$D_1 \approx 1.500$
ϵ_2	$2^8 = 256$	2.060	$D_2 \approx 1.543$
ϵ_3	$2^7 = 128$	6.199	$D_3 \approx 1.589$
ϵ_4	$2^6 = 64$	19.010	$D_4 \approx 1.617$
ϵ_5	$2^5 = 32$	59.131	$D_5 \approx 1.637$
ϵ_6	$2^4 = 16$	186.450	$D_6 \approx 1.657$
ϵ_7	$2^3 = 8$	594.998	$D_7 \approx 1.674$
ϵ_8	$2^2 = 4$	1.931.509	$D_8 \approx 1.699$
ϵ_9	$2^1 = 2$	6.423.281	$D_9 \approx 1.734$
ϵ_{10}	$2^0 = 1$	22.003.256	$D_{10} \approx 1.776$

Der vierte Messbereich ([Abbildung 18](#)) erstreckt sich von $P1(-0.6|-1.1)$ zu $P2(0.5|0)$. Der Vergrößerungsfaktor v entspricht $v = \frac{2.8}{1.1} = 2.\overline{54}$. Es wurden pro Punkt des $35 \cdot 35 \cdot 10^6$ Pixeln großen Bildes, 2036 Iterationen durchgeführt. Der Gradient besaß 5090 Abstufungen. Die durchschnittliche Boxcounting-Dimension beträgt ≈ 1.643 , die kleinste ≈ 1.500 und die größte ≈ 1.776 .

4.3 Code

4.4 Boxcounting-Algorithmus

```
void boxAlgorithm(uint8_t* image, const int color_channels,
    const int probes) {
    vector<uint32_t> results(probes);

    auto boxMethod2 = [image, color_channels, &results](const int box_size,
        const int i) {
        uint32_t counter = 0;
        const int boxSize = box_size * color_channels;
        const uint32_t xArrSize = testPlaneSizeX * color_channels;

        for(uint32_t k = 0; k < testPlaneSizeY; k += box_size)
            for(uint32_t i = 0; i < testPlaneSizeX; i += box_size) {
                bool stop = false;
                const uint32_t newI = color_channels * i;
                for(uint32_t y = 0; y < box_size && !stop; y++) {
                    if(y + k >= testPlaneSizeY) break;

                    for(uint32_t x = 0; x < boxSize && !stop; x++) {
                        if(x + newI >= xArrSize) break;
                        const uint32_t pixel = (k + y) * xArrSize + newI + x;
                        for(int z = 0; z < color_channels; z++)
                            if(image[pixel + z] > colorTolerance[z]) {
                                counter++;
                                stop = true;
                                break;
                            }
                    }
                }
            }
        results[i] = counter;
    };

    cout << endl << "starting Box-Dimension analysis" << endl;

    vector<thread> threads{};
    for(int i = 0; i < probes; i++)
        threads.emplace_back(boxMethod2, pow(2, i), i); //multithreading

    for(auto& thread : threads) thread.join(); //join threads
    ranges::reverse(results); //reverse order of results

    for(uint32_t i = 0; i < results.size(); i++)
        cout << "magnification x" << pow(2, i)
            << " hit: " << results[i] << endl;

    double sum = 0;
    for(int i = 1; i < results.size(); i++) //calc boxdimension
        sum += log2(static_cast<double>(results[i]) / results[i - 1]);

    sum /= static_cast<double>(results.size() - 1); //calc mean

    cout << "estimated fractal dimension: " << sum << " with "
        << results.size() << " measurements" << endl;
}
```


4.5 Literaturverzeichnis

1. 3Blue1Brown. *Fractals are typically not self-similar* 2017. <https://www.youtube.com/watch?v=gB9n2gHsHN4> (Datum: 7. März 2023).
2. Mandelbrot, B. B. *The fractal geometry of nature: Updated and augmented* ISBN: 0-7167-1186-9 (Freeman, New York, 1977).
3. (Hrsg. Mathematics Stack Exchange) *Explain Mandelbot-Set escape radius* 2023-03-13. <https://math.stackexchange.com/questions/3541410/explain-why-mandelbrot-set-escape-radius-is-2-to-a-dummy> (Datum: 13. März 2023).
4. Ott, E. *Chaos in dynamical systems* 2. ed. ISBN: 0-521-81196-1. <http://www.loc.gov/catdir/samples/cam033/2001052863.html> (Cambridge University Press, Cambridge, U.K und New York, 2002).
5. Shishikura, M. The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets. *Stony Brook IMS*. <https://arxiv.org/pdf/math/9201282> (1991).
6. (Hrsg. Vanderbilt University) *Fractals & the Fractal Dimension* 2017-12-06. <https://www.vanderbilt.edu/AnS/psychology/cogsci/chaos/workshop/Fractals.html> (Datum: 13. März 2023).
7. (Hrsg. Wikipedia) *Benoît Mandelbrot* 2023. https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Beno%C3%AEt_Mandelbrot&oldid=230120640 (Datum: 18. Feb. 2023).
8. (Hrsg. Wikipedia) *Complex number* 2023. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Complex_number&oldid=1142240243 (Datum: 3. Aug. 2023).
9. (Hrsg. Wikipedia) *Mandelbrot set* 2023. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Mandelbrot_set&oldid=1134659997 (Datum: 5. Feb. 2023).
10. (Hrsg. Wikipedia) *Self-similarity* 2023. <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Self-similarity&oldid=1143438852> (Datum: 13. März 2023).
11. (Hrsg. Wikipedia) *Set (mathematics)* 2023. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Set_\(mathematics\)&oldid=1135059403](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Set_(mathematics)&oldid=1135059403) (Datum: 3. Aug. 2023).
12. (Hrsg. Yale University) *Fractal Geometry* 2010-05-28. https://users.math.yale.edu/public_html/People/frame/Fractals/MandelSet/MandelBoundary/Bdry.html (Datum: 12. März 2023).

4.6 Sonstiges

WICHTIG: alle hier Referenzierten Programme sowie Bilder und anderes sind vollständig selbst erstellt (bis auf dafür genutzte Bibliotheken). Für entsprechende Nachweise einfach fragen :)

4.6.1 Gesamtes Programm mit Boxcounting-Algorithmus (Quellcode)

<https://github.com/codethinki/Facharbeit/tree/main/Messungen/Algorithmus>

4.6.2 Mandelbrot Browser

<https://github.com/codethinki/Facharbeit/releases/tag/v1.0.0>

4.6.3 Originalbilder der Messungen samt Ergebnissen und Geogebra Datei

<https://github.com/codethinki/Facharbeit/tree/main/Messungen>

4.6.4 Schöne Processing Animationen zur Mandelbrot-Menge

<https://github.com/codethinki/Facharbeit/tree/main/processing>

4.6.5 Einverständiserklärung

Versicherung der selbstständigen Erarbeitung und Anfertigung der Facharbeit

Hiermit versichere ich, dass ich die Arbeit selbstständig angefertigt, keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt und die Stellen der Facharbeit, die im Wortlaut oder im wesentlichen Inhalt aus anderen Werken (auch aus dem Internet) entnommen wurden, mit genauer Quellenangabe kenntlich gemacht habe.

Göttingen den 13. März 2023:

L. Thoman

Einverständniserklärung zur Veröffentlichung

Hiermit erkläre ich, dass ich damit einverstanden bin, wenn die von mir verfasste Facharbeit der schulinternen Öffentlichkeit zugänglich gemacht wird.

Göttingen den 13. März 2023:

L. Thoman