概率论

知识点及对应题目

第一章

> 随机事件的概率

1. 12. 甲、乙两个盒子里各装有 10 只螺钉，每个盒子的螺钉中各有一只是次品，其余均为正品，现从甲盒中任取两只螺钉放入乙盒中，再从乙盒中取出两只，问从乙盒中取出的恰好是一只正品、一只次品的概率是多少？

分析：条件概率

> 1. 首先这件事情是连续的（也就是从甲取出的螺丝钉会对乙取出螺丝钉的最终结果产生影响）
> 2. 可以分情况讨论（从甲中取出的两个都是正品，从甲中取出的有一个次品）
> 3. 在这两种情况的基础上去分析乙中螺丝钉的情况
> 4. 使用加法原理，对两种情况的概率相加
>
> **情况一：**
>
> 从甲中取出的全是正品 $\frac{C_9^2}{C_{10}^2}$ ，在这个前提下，从乙中取出的恰好一只正品，一只次品的概率
>
> $\frac{C_{11}^1 \cdot C_1^1}{C_{12}^2}$
>
> **情况二：**
>
> 从甲中取出一个正品一个次品 $\frac{C_9^1 \cdot C_1^1}{C_{10}^2}$ ，在这个前提下，从乙中取出的恰好一只正品，一只次品的概率
>
> $\frac{C_{10}^1 \cdot C_2^1}{C_{12}^2}$
>
> 使用加法原理：
>
> $P = \frac{C_9^2}{C_{10}^2} \cdot \frac{C_{11}^1 \cdot C_1^1}{C_{12}^2} + \frac{C_9^1 \cdot C_1^1}{C_{10}^2} \cdot \frac{C_{10}^1 \cdot C_2^1}{C_{12}^2}$
>
> 组合数的计算方法

$$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

简化方法

$\frac{C_9^2}{C_{10}^2} = \frac{\frac{9*8}{2*1}}{\frac{10*9}{2*1}} = \frac{9*8}{10*9} = \frac{4}{5}$

答案:

$\frac{4}{5} * \frac{1}{6} + \frac{1}{5} * \frac{10}{33}$

其实这不是我想要的解法，使用这种方法，我虽然能够解开题目，但是我非常难受，因我我感觉这非常的繁琐，不够优雅

我总是倾向于把问题复杂化，我时常想把握当下所有的事情，把所有的可能都算出来，我希望交给下一步的不是假设，而是已经计算好的概率，虽然这很愚蠢，但这不是一个人的偏执。

分析问题:

从甲中取出的螺丝钉有一个次品的概率，上面已经计算过，为$\frac{1}{5}$，所以乙里面有$\frac{6}{5}$ 个次品，$\frac{54}{5}$ 个，从中取出一个正品，一个次品的概率

参考答案:

解 设 $A_i(i=1, 2)$ 表示“放入乙盒的螺钉中有 i 只正品”，B 表示“乙盒中取出的两只螺钉是一只次品、一只正品”，则由题意知

$$P(A_1)=\frac{C_1^1C_9^1}{C_{10}^2}=\frac{1}{5}, \quad P(B|A_1)=\frac{C_2^1C_{10}^1}{C_{12}^2}=\frac{10}{33}.$$

$$P(A_2)=\frac{C_9^2}{C_{10}^2}=\frac{4}{5}, \quad P(B|A_2)=\frac{C_1^1C_{11}^1}{C_{12}^2}=\frac{1}{6}.$$

从而由全概率公式得

$$P(B)=\sum_{i=1}^{2}P(A_i)P(B|A_i)$$
$$=\frac{1}{5}\times\frac{10}{33}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{10+22}{165}=\frac{32}{165}\approx 0.194.$$

2.

3. 甲、乙两人射击，甲击中的概率为 0.8，乙击中的概率为 0.7，两人同时射击，并假定中靶与否是独立的. 求：

(1) 两人都中靶的概率；

(2) 甲中乙不中的概率；

(3) 甲不中乙中的概率.

分析：独立事件

> 1. 两人都中靶
>
>   0.8*0.7= 0.56
>
> 2. 甲中乙不中
>
>   0.8*0.3 = 0.24
>
> 3. 甲不中乙中
>
>   0.2*0.7 =0.14

参考答案：

解 记事件 A 为"甲击中目标"，事件 B 为"乙击中目标"，则两人都中靶可以表示为 AB，甲中乙不中可表示为 $A\overline{B}$，甲不中乙中可表示为 $\overline{A}B$，由独立性得

(1) $P(AB)=P(A)P(B)=0.8\times0.7=0.56$；

(2) $P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})=0.8\times0.3=0.24$；

(3) $P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B)=0.2\times0.7=0.14$.

3.

5. 制造一种零件可采用两种工艺：第一种工艺有三道工序，每道工序的废品率分别为 0.1，0.2，0.3；第二种工艺有两道工序，每道工序的废品率都是 0.3. 如果用第一种工艺，在合格零件中，一级品率为 0.9；如果用第二种工艺，合格品中的一级品率只有 0.8. 试问哪一种工艺能保证得到一级品的概率较大？

分析：

> **对第一种工序进行分析：**
>
> 1. 合格率 0.9 * 0.8 *0.7 = 0.504
> 2. 得到一级品的概率 0.504*0.9 = 0.4536
>
> **对第二种工序进行分析：**
>
> 1. 得到合格品的概率 0.7*0.7 = 0.49
> 2. 得到一级品的概率 0.49*0.8 = 0.392

参考答案：

解 第一种工艺的合格品率为

$$P(A_1)=(1-0.1)\times(1-0.2)\times(1-0.3)=0.504,$$

则由第一种工艺得到的一级品率为

$$p_1=0.9P(A_1)=0.9\times0.504=0.4536;$$

第二种工艺的合格品率为

$$P(A_2)=(1-0.3)\times(1-0.3)=0.49,$$

则由第二种工艺得到的一级品率为

$$p_2=0.8P(A_2)=0.8\times0.49=0.392.$$

由 $p_1>p_2$ 知，第一种工艺能保证得到一级品的概率较大.

4.

7. 甲、乙、丙 3 部机床独立地工作，由 1 个人照管. 某段时间，它们不需要照管的概率依次是 0.9，0.8，0.85，求在这段时间内，机床因无人照管而停工的概率.

分析：

> 1. 求机床因无人照看而停工的概率，但是现在只有一个工人， 所以也就是求需要有两台或以上的机床需要照看的概率
> 2. 分情况讨论，两台机床需要照看的概率，三台机床需要照看的概率，或者讨论它的反面，一台机床需要照看，或者没有机床需要照看的概率，然后用总概率减去
>   - 都不需要照看的概率
>
> $0.9*0.8*0.85=0.612$
>   - 一台需要照看的概率
>
> $(0.1*0.8*0.85)+(0.9*0.2*0.85)+(0.9*0.8*0.15)=0.329$
>   - 两台需要照看的概率（讨论哪一台不需要被照看）
>
> $(0.9*0.2*0.15)+(0.1*0.8*0.15)+(0.1*0.2*0.85)=0.056$
>   - 三台需要照看的概率
>
> $0.1*0.2*0.15=0.003$
> 3. 答案使用加法
>
>   0.056 + 0.003 = 0.059

参考答案：

解 设A,B,C分别表示在这段时间内机床甲、乙、丙需要工人照管，因无人照管而停工即有两台或两台以上机床需要照管，此事件可表示为$AB\cup AC\cup BC$.

于是，由加法公式及独立性可得所求概率为

$$\begin{aligned}
&P(AB\cup AC\cup BC)\\
&\quad=P(AB)+P(AC)+P(BC)-2P(ABC)\\
&\quad=P(A)P(B)+P(A)P(C)+P(B)P(C)-2P(A)P(B)P(C)\\
&\quad=0.1\times0.2+0.1\times0.15+0.2\times0.15-2\times(0.1\times0.2\times0.15)\\
&\quad=0.059.
\end{aligned}$$

第二章

> 随机变量及其分布

第三章

> 多维随机变量及其分布

第四章

> 随机变量的数字特征

第五章

> 数理统计的基础知识

第六章

> 参数估计

第七章

> 假设检验

第八章

> 方差分析与回归分析

往年题目

1. 1. 甲、乙、丙三人各射击一次靶，设A表示"甲中靶"，B表示"乙中靶"，C表示"丙中靶"，则事件"三人中至少有一人中靶"可表示为________.
2. 2. 设 $P(A)=\frac{1}{3},P(B)=\frac{1}{4},P(A\cup B)=\frac{1}{2}$，则 $P(AB)=$________.
3. 3. 口袋中有3个白球，2个黑球，从中随机地取出2个球，则取得2个球颜色相同的概率是________.

4. 4. 设随机变量 $X\sim N(0,1)$，则根据切比雪夫不等式 $P\{|X|\geq 3\}\leq$ ____________.

5. 5. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为取自总体 $X\sim N(0,1)$ 的简单随机样本，则 $D(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i+b_i)=$ ____________.

6. 1. 设 A,B 为两个随机事件，且 $B\subset A$，则下列选项成立的是（　　　）.

A. $P(B-A)=P(B)-P(A)$　　B. $P(B/A)=P(B)$

C. $P(A\cup B)=P(A)$　　D. $P(AB)=P(A)$

7. 2. 设 σ 是总体 X 的标准差，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是它的样本，则样本标准差 S 是总体标准差 σ 的（　　　）.

A. 矩估计量；　　B. 无偏估计量；

C. 最大似然估计量；　　D. 相合估计量.

8. 3. 若随机变量 X 和 Y 的协方差 $Cov(X,Y)=0$，则下列结论正确的是（　　　）.

A. X 与 Y 相互独立；　　B. $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$；

C. $D(X-Y)=D(X)-D(Y)$；　　D. $D(XY)=D(X)D(Y)$.

9. 4. 设总体 X 服从 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 已知，而 σ^2 未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为取自总体 X 的样本，则下列表达式中不是统计量的是（　　　）.

A. $\sum_{i=1}^{n}X_i$　　B. $X_1X_2X_3$　　C. $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)$　　D. $\frac{n(\overline{X}-5)}{\sigma}$

10. 5. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为取自总体 $X\sim N(0,1)$ 的简单随机样本，则统计量 $Y=\frac{X_1-X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2}}$ 服从（　　　）分布.

A. $F(2,2)$　　B. $t(4)$　　C. $\chi^2(2)$　　D. $t(2)$

11. 1. 设连续型随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}A+Be^{-x}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$，

求（1）A,B 的值；（4 分）　　（2）$P\{-2\leq X<1\}$；（2 分）

（3）$E(X)$；（4 分）　　（4）$Y=\frac{X}{2}$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$.（5 分）

12.

2. 设(X,Y)的联合概率分布如下表所示，

X \ Y	1	2
0	0.3	0.1
1	0.4	0.2

求(1) X,Y的边缘分布律；(4 分)　　(2) X,Y是否相互独立？(2 分)

(3) 求$Z=\max\{X,Y\}$的分布；(2 分)　(4) X与Y的相关系数. (5 分)

13.

3、已知随机变量X与Y相互独立，概率密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\geq 0\\ 0, & 其它\end{cases},\quad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y\geq 0\\ 0, & 其它\end{cases}$$

求(1) (X,Y)落在以 x 轴，y 轴及直线 2x+y=2 所围成的三角形区域 D 内的概率；(6 分)

(2) $Z=X+Y$的概率密度函数$f_Z(z)$. (6 分)

14.

4. 设总体X的分布为

X	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中$\theta\ (0<\theta<1)$为未知参数，现抽得一个样本$x_1=1,x_2=2,x_3=1$，求θ的矩估计值和最大似然估计值.（10 分）

15.

1. 一单位有甲、乙两人，已知甲近期出差的概率为 80%，若甲出差，则乙出差的概率为 20%；若甲不出差，则乙出差的概率为 90%.

(1)求近期乙出差的概率；(4 分)

(2)若已知乙近期出差在外，求甲出差的概率. (4 分)

16.

2.用 3 个机床加工同一种零件，零件由各机床加工的概率分别为 0.4，0.5，0.1，各机床加工的零件为合格品的概率分别等于 0.92，0.9，0.95，求全部产品中的合格率.（8 分）

17.

3. 计算机在进行数学计算时，遵从四舍五入原则. 为简单计，现在对小数点后面第一位进行舍入计算，则可以认为误差 X 服从$[-0.5,0.5]$上的均匀分布. 若在一项计算中进行了 100 次数字计算，求平均误差落在区间$[-\frac{\sqrt{3}}{20},\frac{\sqrt{3}}{20}]$上的概率. (9 分)

（注：$\Phi(3.0)=0.9987$，$\Phi(2.0)=0.9773$，$\Phi(2.5)=0.9938$，$\Phi(3.33)=0.9995$）