浅谈置换群

codgician

2020.03.14

关系

- 集合的**笛卡尔积** (Cartesian product)：

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

- 设 A 是集合，集合 $A \times A$ 的每个子集 R 叫做集合 A 上的一个**关系** (relation)。
- 若 $(a, b) \in R$，则称 a 和 b 有关系 R，记作 aRb。

等价关系

若集合 A 上的关系 $\sim$ 满足如下条件：

- **自反性**：$\forall a \in A,\ a \sim a;$
- **对称性**：$\forall a, b \in A,$ 若 $a \sim b$ 则 $b \sim a;$
- **传递性**：$\forall a, b \in A,$ 若 $a \sim b,\ b \sim c,$ 则 $a \sim c;$

则称 $\sim$ 是**等价关系** (equivalence relation)

$$a \sim b := a \equiv b \pmod 7$$

- 自反性？对称性？传递性？
- 看起来可以把所有自然数分成 7 类……

等价类

设 $\sim$ 是 A 上的等价关系，$\forall a \in A$，$[a]$ 表示 A 中与 a 等价的全部元素构成的集合：

$$[a] = \{b \sim a \mid b \in A\}$$

称 $[a]$ 为 a 所在的**等价类** (equivalence class)。

若 $a, b \in A$ **且** $[a] \cap [b] \neq \emptyset$**，则** $[a] = [b]$**。**

若 $a, b \in A$ 且 $[a] \cap [b] \neq \emptyset$，则 $[a] = [b]$。

- 假设 $k_1 \in [a]$ 且 $k_1 \notin [b]$，$k_2 \in [a] \cap [b]$;
- 则有 $k_1 \sim a$，$k_2 \sim a$，$k_2 \sim b$;
- 由传递性得 $k_1 \sim b$，与假设不符。

若 $a, b \in A$ **且** $[a] \cap [b] \neq \emptyset$**，则** $[a] = [b]$。

- 集合 A 可看作一些两两不相交的等价类的并：

$$A = \bigcup_{a \in R} [a] \text{（两两不相交之并）}$$

- A 上的每个等价关系给出集合 A 的一个**划分** (partition)。

群 $(G, \cdot)$

G 是非空集合，且二元运算满足：

- 结合律：$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- 单位元 e：$\forall a \in G,\ ea = ae = a$
- 逆元：$\forall a \in G,\ \exists b \in G\ \text{ s.t. }\ ab = ba = e$

群 $(G, \cdot)$

G 是非空集合，且二元运算满足：

- 结合律：$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- 单位元 e：$\forall a \in G,\ ea = ae = a$
- 逆元：$\forall a \in G,\ \exists b \in G \ \text{ s.t. } \ ab = ba = e$

若满足交换律，则称为**交换群**

- 左右逆元相等：
  - 设 x 是 a 的左逆元，y 是 a 的右逆元，有：

$$x = xe = x(ay) = (xa)y = y$$

- 满足消去律：
  - $\forall a, b, c \in G,\ ab = ac \Leftrightarrow b = c$

子群

设 $(G, \cdot)$ 为群，H 是 G 的子集，若 $(H, \cdot)$ 成群，则称 H 为 G 的**子群** (subgroup)，记作 $H \leq G$；

陪集

设 $H \leq G$，对于 $x \in G$:

- H 的一个**左陪集** (left coset) xH:

$$xH = \{x \cdot h \mid h \in H\}$$

- H 的一个**右陪集** (right coset) Hx:

$$Hx = \{h \cdot x \mid h \in H\}$$

$$xH = \{x \cdot h \mid h \in H\}$$

$$xH = \{x \cdot h \mid h \in H\}$$

$$x \sim y := x \in yH$$

- **自反性**：$x \in xH$；
- **对称性**：若 $y \in xH$，则 $x \in yH$；
- **传递性**：若 $z \in yH$，$y \in xH$，则 $z \in xH$。

- 若 $xH \cap yH \neq \emptyset$，则 $xH = yH$；
- 利用陪集可以对群 G 进行划分（陪集分解）：

$$G = \bigcup_{g \in R} gH \text{（两两不相交之并）}$$

- 对于 $a, b \in H, g \in G$，由消去律 $a \neq b \Leftrightarrow ga \neq gb$;
- 因此，$\forall g \in R$, $|gH| = |H|$:

$$|G| = \sum_{g \in R} |gH| = \sum_{g \in R} |H| = |R| \cdot |H|$$

拉格朗日定理

设 G 为有限群，$H \leq G$，则：

$$|G| = [G : H] \cdot |H|$$

其中 $[G : H]$ 称为群 H 对于群 G 的**指数** (index)。

置换

一个集合的**置换** (permutation) 即从该集合映射至自身的双射。

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

复合运算: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$1 \to 4 \to 3$$

$$2 \to 5 \to 6$$

任一置换都能被划分成若干不交的映射链?

轮换表示法

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{记作}} (a_1 \ \ a_2 \ \ \dots \ \ a_n)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 4\ 3) \cdot (2\ 5\ 6)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} = (1\ \ 4\ \ 3) \cdot (2\ \ 5\ \ 6)$$

若不计轮换内外的次序，对于任意置换的不交轮换分解是唯一的吗？

- 对于恒等置换，显然分解是唯一的；
- 对于非恒等置换，$\exists i \text{ s.t. } \sigma(i) \neq i$。
  - $i \to \sigma(i) \to \sigma^2(i) \to \dots$
  - 由抽屉原理，$\exists t_1 < t_2 \text{ s.t. } \sigma^{t_1}(i) = \sigma^{t_2}(i)$
  - 令 t 为使得 $\sigma^t(i) = i$ 的最小正整数，则：

$$(i \ \ \sigma(i) \ \ \dots \ \ \sigma^{t-1}(i))$$

  是一个轮换。

- 对于每个这样的 i 都如此操作即可构造出一个唯一的不相交轮换分解式：
  - 每个元素在分解式中恰好出现 1 次；
  - 每个元素所属于的轮换是固定的。

轮换的幂运算

轮换的幂运算

$$(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$$

轮换的幂运算

$$
\begin{aligned}
&(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6)^2 \\
&= (1\ \ 3\ \ 5)\cdot(2\ \ 4\ \ 6)
\end{aligned}
$$

轮换的幂运算

$$
\begin{aligned}
&(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6)^3 \\
&= (1\ \ 4)\cdot(2\ \ 5)\cdot(3\ \ 6)
\end{aligned}
$$

轮换的幂运算

$$(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6)^4$$
$$= (1\ \ 5\ \ 3) \cdot (2\ \ 6\ \ 4)$$

$$\sigma = (a_0 \;\; a_1 \;\; \ldots \;\; a_{n-1})$$

- $\sigma^t(a_i) = a_{[(i+t) \bmod n]}$
- 令 $k \in N^* \;$ s.t. $\sigma^{tk}(a_i) = a_i$:

$$\sigma = (a_0 \ \ a_1 \ \ \ldots \ \ a_{n-1})$$

- $\sigma^t(a_i) = a_{[(i+t) \bmod n]}$
- 令 $k \in N^* \ \text{s.t.} \ \sigma^{tk}(a_i) = a_i$:

$$i + tk \equiv i \pmod{n}$$

$$\sigma = (a_0 \ \ a_1 \ \ \ldots \ \ a_{n-1})$$

- $\sigma^t(a_i) = a_{[(i+t) \bmod n]}$
- 令 $k \in N^* \ \text{s.t.} \ \sigma^{tk}(a_i) = a_i$:

$$tk \equiv 0 \pmod{n}$$

最小正整数解：$k = \frac{n}{\gcd(n,t)}$

$$\sigma = (a_0 \;\; a_1 \;\; \dots \;\; a_{n-1})$$

- σ^t 可表示为 $\gcd(n, t)$ 个长为 $\frac{n}{\gcd(n,t)}$ 的轮换；
- a_i 所在轮换里第 j 个元素为 $a_{(i+jt) \bmod n}$。

$$\sigma = (a_0 \ \ a_1 \ \ \ldots \ \ a_{n-1})$$

- σ^t 可表示为 $\gcd(n,t)$ 个长为 $\frac{n}{\gcd(n,t)}$ 的轮换；
- a_i 所在轮换里第 j 个元素为 $a_{(i+jt) \bmod n}$。
  - a_i 所在轮换内元素下标模 $\gcd(n,t)$ 均为 i；
  - $a_0, a_1, \ldots a_{\gcd(n,t)-1}$ 一定位于不同轮换。

置换群

n 个元的所有置换，在复合运算 $\circ$ 下成群，称作 n 元**对称群** (symmetric group)，记作 S_n

- **结合律**：$(\sigma \circ \tau) \circ \phi = \sigma \circ (\tau \circ \phi)$
- **单位元**：恒等置换 $\epsilon \circ x = x$；
- **逆元**：置换是双射，故必然存在逆置换。

群在集合上的作用

$$\begin{aligned} \phi : G \times M &\longrightarrow M \\ (\sigma, x) &\longmapsto \sigma \circ x \end{aligned}$$

- $\forall x \in M$ 满足：
  - **单位元**：$\exists \epsilon \in G \text{ s.t. } \epsilon \circ x = x$
  - **结合律**：$\tau \circ (\sigma \circ x) = (\tau \circ \sigma) \circ x$

用黑白两色对等边三角形顶点染色，若可通过旋转得到的方案算相同方案，求方案数?

用黑白两色对等边三角形顶点染色，若可通过旋转得到的方案算相同方案，求方案数？

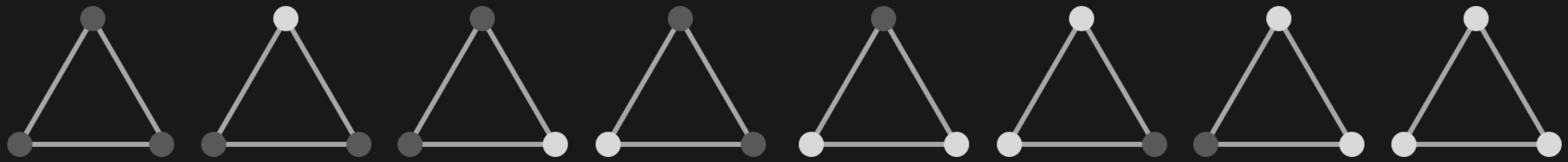
在旋转意义下同构

用黑白两色对等边三角形顶点染色，若可通过旋转得到的方案算相同方案，求方案数?

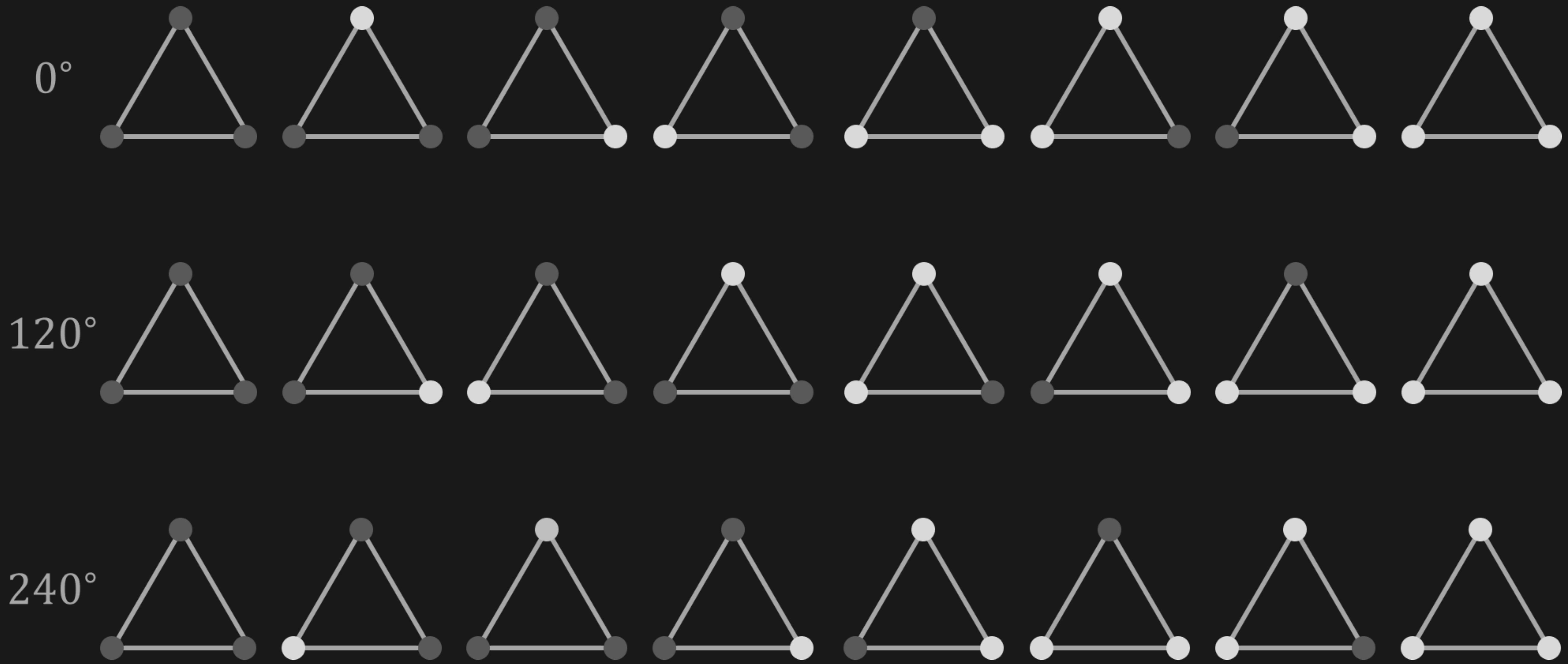
$$G=\{\text{顺时针旋转 }0^\circ,120^\circ,240^\circ\}$$
$$M=\{\text{不考虑同构时的染色方案}\}$$

用黑白两色对等边三角形顶点染色，若可通过旋转得到的方案算相同方案，求方案数?

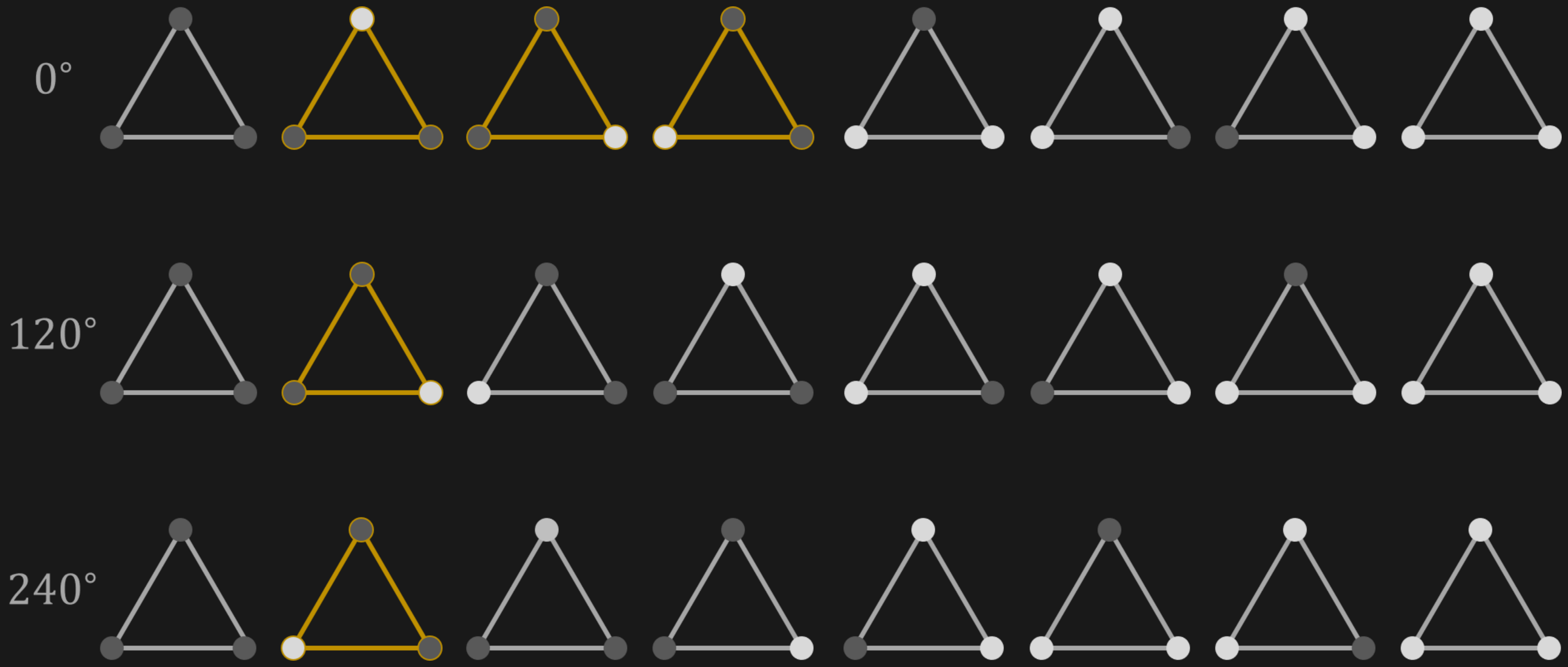
$$G=\{\text{顺时针旋转 }0^\circ,120^\circ,240^\circ\}$$
$$M=\{\text{不考虑同构时的染色方案}\}$$



不考虑同构时的染色方案

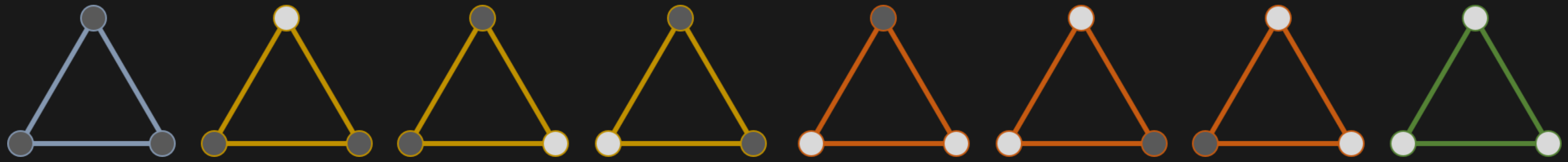


$G \times M$



等价类?

等价类?



- 一种等价关系?
- 借助该等价关系对集合进行划分?
- 有多少不同的等价类?

轨道

群 G 作用于集合 M 上，$x \in M$，称 M 的子集

$$\operatorname{orb}_G(x) = \{\sigma \circ x \mid \sigma \in G\}$$

为 x 在 G 作用下的**轨道** (orbit)，简称过 x 的轨道。

轨道

群 G 作用于集合 M 上，$x \in M$，称 M 的子集

$$\operatorname{orb}_G(x) = \{\sigma \circ x \mid \sigma \in G\}$$

为 x 在 G 作用下的**轨道** (orbit)，简称过 x 的轨道。

- G 中置换作用于元素 x 所能得到的不同结果；
- $|\operatorname{orb}_G(x)|$：对于元素 x 而言，G 中本质不同置换的种数。

$$\mathrm{orb}_G(x) = \{\sigma \circ x \mid \sigma \in G\}$$

$$x \sim y := x \in \mathrm{orb}_G(y)$$

- **自反性**：$x \in \mathrm{orb}_G(x)$；
- **对称性**：若 $y \in \mathrm{orb}_G(x)$，则 $x \in \mathrm{orb}_G(y)$；
- **传递性**：若 $z \in \mathrm{orb}_G(y), y \in \mathrm{orb}_G(x)$，则 $z \in \mathrm{orb}_G(x)$。

- 若 $\mathrm{orb}_G(x) \cap \mathrm{orb}_G(y) \neq \emptyset$，则 $\mathrm{orb}_G(x) = \mathrm{orb}_G(y)$；
- 在 M 的每一条轨道上取一个元素组成 M 的一个子集 R，称为 M 的**轨道的代表元集**，则：

$$M = \bigcup_{x \in R} \mathrm{orb}_G(x)$$

并且此中各 $\mathrm{orb}_G(x)$ 互不相交。

稳定子

设群 G 作用于集合 M，对 $x \in M$，称

$$\mathrm{stab}_G(x) = \{\sigma \mid \sigma \in G, \sigma \circ x = x\}$$

为群 G 作用下 x 的**稳定子** (stabilizer)。

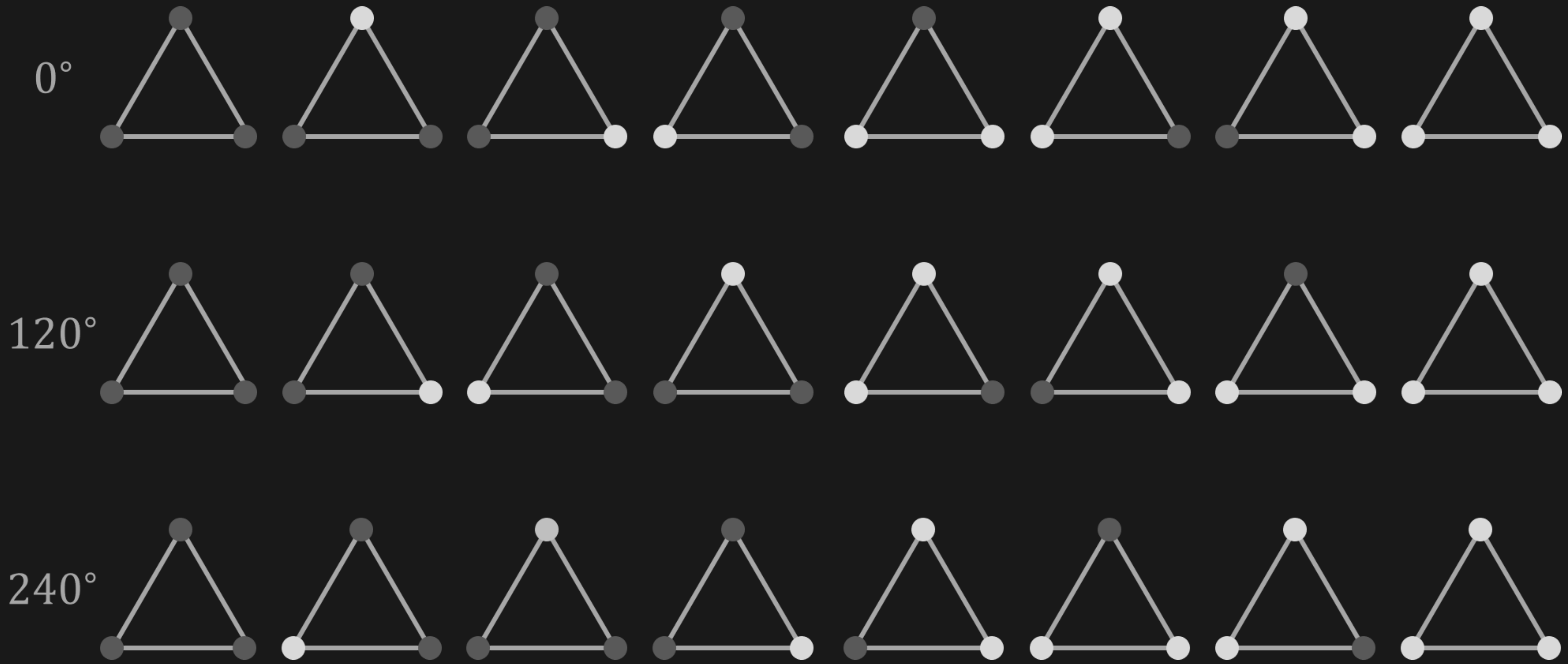
稳定子

设群 G 作用于集合 M，对 $x \in M$，称

$$\mathrm{stab}_G(x) = \{\sigma \mid \sigma \in G, \sigma \circ x = x\}$$

为群 G 作用下 x 的**稳定子** (stabilizer)。

- 所有作用于 x 后结果仍然为 x 的置换。



$$G \times M$$

$$\mathrm{stab}_G(x) = \{\sigma \circ x = x \mid \sigma \in G\} \leq G$$

$$\mathrm{stab}_G(x) = \{\sigma \circ x = x \mid \sigma \in G\} \leq G$$

- **封闭性**：$\forall \sigma, \tau \in \mathrm{stab}_G(x)$，$\sigma \circ \tau \circ x = \sigma \circ x = x$，故 $(\sigma \circ \tau) \in \mathrm{stab}_G(x)$；
- **结合律**：显然置换的复合满足结合律；
- **单位元**：恒等置换 $\epsilon \circ x = x$；
- **逆元**：$\forall \sigma \in \mathrm{stab}_G(x)$，$\sigma^{-1} \circ x = \sigma^{-1} \circ (\sigma \circ x) = \epsilon(x) = x$。

$$\mathrm{stab}_G(x) = \{\sigma \circ x = x \mid \sigma \in G\} \leq G$$

$$\mathrm{stab}_G(x) = \{\sigma \circ x = x \mid \sigma \in G\} \leq G$$

- 既然是子群，那可以用来对 G 进行左陪集划分；

$$\operatorname{stab}_G(x) = \{\sigma \circ x = x \mid \sigma \in G\} \leq G$$

- $\beta\operatorname{stab}_G(x)$ 里的元素相当于作用于 x 时 G 中所有与 β 等价的置换：

$$\beta\operatorname{stab}_G(x) = \{(\beta \circ \sigma) \circ x = \beta \circ x \mid \sigma \in G\}$$

$$\operatorname{stab}_G(x) = \{\sigma \circ x = x \mid \sigma \in G\} \leq G$$

- $\beta \operatorname{stab}_G(x)$ 里的元素相当于作用于 x 时 G 中所有与 β 等价的置换：

$$\beta \operatorname{stab}_G(x) = \{\tau \circ x = \beta \circ x \mid \tau \in G\}$$

$$\mathrm{stab}_G(x) = \{\sigma \circ x = x \mid \sigma \in G\} \leq G$$

- $\beta\mathrm{stab}_G(x)$ 里的元素相当于作用于 x 时 G 中所有与 β 等价的置换：

$$\beta\mathrm{stab}_G(x) = \{\tau \circ x = \beta \circ x \mid \tau \in G\}$$

$$|G| = |\mathrm{stab}_G(x)| \cdot [G : \mathrm{stab}_G(x)]$$

- $|\mathrm{orb}_G(x)|$：对 x 而言，G 中所有本质不同置换种数。
  - 也就是不同的上述陪集的种数！

轨道-稳定子定理

设有限群 G 作用于集合 M ， $x \in M$，则:

$$|G| = |\operatorname{stab}_G(x)| \cdot |\operatorname{orb}_G(x)|$$

BURNSIDE 引理

设有限群 G 作用于有限集 M 上，则轨道数：

$$|M/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}|\mathrm{fix}(\sigma)|$$

其中 $\mathrm{fix}(\sigma)$ 代表 σ 的不动元构成的集合：

$$\mathrm{fix}(\sigma) = \{x \mid x \in M, \sigma \circ x = x\}$$

证明

$$\mathrm{stab}_G(x) = \{\sigma \mid \sigma \in G, \sigma \circ x = x\}$$

$$\mathrm{fix}(\sigma) = \{x \mid x \in M, \sigma \circ x = x\}$$

$$\sum_{x \in M} \mid \mathrm{stab}_G(x) \mid = \sum_{\sigma \in G} \mid \mathrm{fix}(\sigma) \mid$$

- 每个轨道对轨道数贡献为 1，故 $x \in M$ 对答案的贡献为 $\frac{1}{|\operatorname{orb}_G(x)|}$：

$$
\begin{aligned}
|M/G| &= \sum_{x\in M} \frac{1}{|\ \operatorname{orb}_G(x)\ |} \\
&= \sum_{x\in M} \frac{|\ \operatorname{stab}_G(x)\ |}{|G|} \quad \text{（轨道-稳定子定理）} \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma\in G} |\ \operatorname{fix}(\sigma)\ |
\end{aligned}
$$

对正六边形的 6 个顶点，一半涂黑一半涂白。若经旋转可得到的方案算相同方案，求方案数?

对正六边形的 6 个顶点，一半涂黑一半涂白。若经旋转可得到的方案算相同方案，求方案数？

$$M=\{\text{不计同构的涂色方案}\}\ |M|=\binom{6}{3}=20$$

$$G=\{\text{顺时针旋转}0^\circ,60^\circ,120^\circ,180^\circ,240^\circ,300^\circ\}$$

记 6 个顶点分别为 $A_1,A_2,\ldots,A_6$

旋转 0°

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \end{pmatrix}$$

将这一置换作用于 M 中的任意元素都不会使该元素发生变化，故不动元有 20 个。

旋转 60°

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \\ A_6 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \end{pmatrix}$$

若要成为不动元，则应当满足：

$$A_1 = A_2 = \cdots = A_6$$

故没有不动元

旋转 120°

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \\ A_5 & A_6 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{pmatrix}$$

若要成为不动元，则应当满足：

$$A_1 = A_3 = A_5，A_2 = A_4 = A_6$$

故不动元数量为 2

旋转 180°

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \\ A_4 & A_5 & A_6 & A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix}$$

若要成为不动元，则应当满足：

$$A_1 = A_4,\ A_2 = A_5,\ A_3 = A_6$$

故没有不动元

- 旋转 60° 与旋转 300° 情形相似；
- 旋转 120° 与旋转 240° 情形相似。

轨道数：$\frac{1}{6}(20+2+2)=4$

PÓLYA 计数定理

- 将置换表示为若干轮换乘积，若轮换内元素颜色均相同即为不动元（这样才能保证每一个点变成新点后的颜色与原先一致）；
- 记染色可选的颜色数为 m，$c(\sigma)$ 为置换 σ 被分解为不交轮换乘积的个数，则:

PÓLYA 计数定理

- 将置换表示为若干轮换乘积，若轮换内元素颜色均相同即为不动元（这样才能保证每一个点变成新点后的颜色与原先一致）；
- 记染色可选的颜色数为 m，$c(\sigma)$ 为置换 σ 被分解为不交轮换乘积的个数，则:

$$\operatorname{fix}(\sigma) = m^{c(\sigma)}$$

PÓLYA 计数定理

- 将置换表示为若干轮换乘积，若轮换内元素颜色均相同即为不动元（这样才能保证每一个点变成新点后的颜色与原先一致）；
- 记染色可选的颜色数为 m，$c(\sigma)$ 为置换 σ 被分解为不交轮换乘积的个数，则：

$$|M/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G} m^{c(\sigma)}$$

小结

- 关系 | 等价关系 | 等价类
  - 对集合分类：等价类 $[a]$ 内的元素都与存在 a 等价关系；
- 群 | 子群 | 陪集
  - 对群分类：陪集 gH 里的所有元素都与 g 存在等价关系；
- 群在集合上的作用
  - 轨道：M 的子集，在 G 作用下与 x 等价的元素；
  - 稳定子：G 的子群，对于 x 而言 G 中等价的置换；
  - 轨道-稳定子定理 | Burnside 引理 | Pólya 计数法

项链染色

长为 n 的环，m 种颜色对环上元素染色，经旋转或翻转都算作相同方案

$$n, m \leq 10^9$$

分析

$$G=\{\text{顺时针旋转}\frac{2\pi}{n},\dots,(n-1)\frac{2\pi}{n},2\pi,$$

$$\text{过每一条对称轴的翻转}\}$$

$$M=\{\text{不考虑同构的所有染色方案}\}$$

G 作用于 M

分析

$$G=\{\text{顺时针旋转}\frac{2\pi}{n},\dots,(n-1)\frac{2\pi}{n},2\pi,$$
$$\text{过每一条对称轴的翻转}\ \}$$

$$M=\{\text{不考虑同构的所有染色方案}\}$$

G 作用于 M

G 中复合运算封闭吗?

若将环上的元素按顺时针编号：$0, 1, \ldots (n-1)$

- 顺时针旋转 $k\frac{2\pi}{n}$：$\sigma_k(i) = (i+k) \bmod n$;
- 沿过点 a 的对称轴翻转：

$$\tau_a(i) = \begin{cases} i & i = a \text{ or } a \text{ 对面的点} \\ (2a - i) \bmod n & \text{otherwise} \end{cases}$$

若将环上的元素按顺时针编号：$0, 1, \ldots (n-1)$

- 顺时针旋转 $k\frac{2\pi}{n}$：$\sigma_k(i) = (i+k) \bmod n$;
- 沿过点 a 的对称轴翻转：

$$\tau_a(i) = \begin{cases} i & i = a \text{ or } a \text{ 对面的点} \\ (2a - i) \bmod n & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 注：若 n 为偶数，则翻转对称轴可能同时过两条边的中点。这等同于共有 $2n$ 个点且不考虑此类对称轴的情况，故下面暂不考虑这种对称轴。

若将环上的元素按顺时针编号：$0, 1, \ldots (n-1)$

- 顺时针旋转 $k\frac{2\pi}{n}$：$\sigma_k(i) = (i+k) \bmod n$;
- 沿过点 a 的对称轴翻转：

$$\tau_a(i) = \begin{cases} i & i = a \ \text{ or } \ a \text{ 对面的点} \\ (2a - i) \bmod n & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 考虑 $i \neq a$ 的情况（$i = a$ 显然封闭），若 $2 \mid k$：

$$\sigma_k \circ \tau_a \circ i = (2a - i + k) \bmod n = \tau_{(a + \frac{k}{2}) \bmod n}$$

若将环上的元素按顺时针编号：$0, 1, \ldots (n-1)$

- 顺时针旋转 $k\frac{2\pi}{n}$：$\sigma_k(i) = (i+k) \bmod n$;
- 沿过点 a 的对称轴翻转：

$$\tau_a(i) = \begin{cases} i & i = a \text{ or } a \text{ 对面的点} \\ (2a-i) \bmod n & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 考虑 $i \neq a$ 的情况（$i = a$ 显然封闭），若 $2 \nmid k$：

$$\sigma_k \circ \tau_a \circ i = (2a - i + k) \bmod n = \tau_{(a + \frac{n+k}{2}) \bmod n}$$

旋转

- 旋转置换一共 n 种；
- 旋转 $\frac{2\pi}{n}$ 时只能分解成一个不交轮换；
- 旋转 $i\frac{2\pi}{n}$ 可看作前者的 i 次幂，故可拆成 $\gcd(n,i)$ 个轮换：

$$\sum_{\sigma} |\operatorname{fix}(\sigma)| = \sum_{i=1}^{n} m^{\gcd(n,i)}$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{g\in G} |\operatorname{fix}(\sigma)| &= \sum_{i=1}^{n} m^{\gcd(n,i)} \\
&= \sum_{d|n} m^d \sum_{i=1}^{n} [\gcd(n,i) = d] \\
&= \sum_{d|n} m^d \sum_{i=1}^{\frac{n}{d}} [\gcd(\frac{n}{d}, i) = 1] \\
&= \sum_{d|n} m^d \cdot \varphi(\frac{n}{d})
\end{aligned}
$$

翻转

- 翻转置换一共 n 种。
- n 为偶数:
  - $\frac{n}{2}$ 条过点的对称轴：$c(\tau) = \frac{n}{2} + 1$
  - $\frac{n}{2}$ 条过边的对称轴：$c(\tau) = \frac{n}{2}$

$$\sum_{\tau} |\operatorname{fix}(\tau)| = \frac{n}{2} \cdot m^{\frac{n}{2}+1} + \frac{n}{2} \cdot m^{\frac{n}{2}}$$

- n 为奇数:
  - n 条 既过点又过边的对称轴：$c(\tau) = \frac{n+1}{2}$

$$\sum_{\tau} |\operatorname{fix}(\tau)| = n \cdot m^{\frac{n+1}{2}}$$

结论

$$
\begin{aligned}
|M/G| &= \frac{\sum\limits_{\sigma} |\ \mathrm{fix}(\sigma)\ | + \sum\limits_{\tau} |\ \mathrm{fix}(\tau)\ |}{2n} \\
&= \frac{1}{2n} \sum_{d|n} m^d \cdot \varphi(\frac{n}{d}) \\
&+ \frac{1}{2n} \begin{cases} \frac{n}{2} \cdot m^{\frac{n}{2}+1} + \frac{n}{2} \cdot m^{\frac{n}{2}} & 2 \mid n \\ n \cdot m^{\frac{n+1}{2}} & 2 \nmid n \end{cases}
\end{aligned}
$$

复杂度：$\mathcal{O}(d(n) \cdot \sqrt{n})$，$d(n)$ 代表 n 的约数个数。

南昌 J. SUMMON

现要从 4 种不同的水晶中取 n 个围成一个圈，但有 m 个限制条件：每条限制条件要求某四种水晶不能在围成的圈中连续出现。通过旋转可互相得到的方案算作一种方案，问有多少种本质不同的方案？（结果模 998244353)

$$n \le 10^5, m \le 256$$

分析

$$G=\{\text{顺时针旋转}\frac{2\pi}{n},\ldots,(n-1)\frac{2\pi}{n},2\pi\}$$

$$M=\{\text{满足限制且不计同构的染色方案}\}$$

分析

$$G = \{\text{顺时针旋转}\frac{2\pi}{n}, \ldots, (n-1)\frac{2\pi}{n}, 2\pi\}$$

$$M = \{\text{满足限制且不计同构的染色方案}\}$$

- 单单把每一个轮换内的所有元素染成相同颜色可能破坏限制条件；
- 无法直接应用 Pólya 计数定理。

- 旋转 $\frac{2\pi}{n}$ 只能分解成一个不交轮换；
- 旋转 $i\frac{2\pi}{n}$ 可看作前者的 i 次幂，因此：
  - 可表示为 $\gcd(n, i)$ 个不交轮换之积；
  - 标号模 $\gcd(n, i)$ 结果相同的点在同一轮换内。

- 旋转 $\frac{2\pi}{n}$ 只能分解成一个不交轮换；
- 旋转 $i\frac{2\pi}{n}$ 可看作前者的 i 次幂，因此：
  - 可表示为 $\gcd(n,i)$ 个不交轮换之积；
  - 标号模 $\gcd(n,i)$ 结果相同的点在同一轮换内。

对于旋转 $i\frac{2\pi}{n}$ 这一置换，只需确定前 $\gcd(n,i)$ 个元素的颜色即可知道该置换下不动元数量！

DP 求不动元数量

- 记 $\mathrm{v}\langle a,b,c,d\rangle$ 代表是否允许 a,b,c,d 四种颜色相邻；

$$\mathrm{v}\langle a,b,c,d\rangle = \begin{cases} 0 & \text{不允许 } a,b,c,d \text{ 相邻} \\ 1 & \text{允许 } a,b,c,d \text{ 相邻} \end{cases}$$

- 记 $\mathrm{dp}\langle i, a, b, c\rangle$ 代表 i 个元素排成一排，最后 3 个元素的颜色分别为 a, b, c 的方案数：

$$\mathrm{dp}\langle i, a, b, c\rangle = \sum_k \mathrm{v}\langle k, a, b, c\rangle \cdot \mathrm{dp}\langle i-1, k, a, b\rangle$$

- 记 $\mathrm{dp}\langle i,a,b,c\rangle$ 代表 i 个元素排成一排，最后 3 个元素的颜色分别为 a,b,c 的方案数：

$$\mathrm{dp}\langle i,a,b,c\rangle=\sum_{k}\mathrm{v}\langle k,a,b,c\rangle\cdot\mathrm{dp}\langle i-1,k,a,b\rangle$$

  - 枚举前 3 个元素的颜色 $\langle a,b,c\rangle$：
    - 只初始化 $\mathrm{dp}\langle 3,a,b,c\rangle=1$；
    - $\mathrm{dp}\langle m+3,a,b,c\rangle$ 即为 m 个元素围成环时不动元方案数。

矩阵快速幂优化 DP

$$\mathrm{dp}\langle i,a,b,c\rangle = \sum_{k} \mathrm{v}\langle k,a,b,c\rangle \cdot \mathrm{dp}\langle i-1,k,a,b\rangle$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{dp}\langle i,1,1,1\rangle \\ \mathrm{dp}\langle i,1,1,2\rangle \\ \vdots \\ \mathrm{dp}\langle i,4,4,4\rangle \end{bmatrix} = T \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{dp}\langle i-1,1,1,1\rangle \\ \mathrm{dp}\langle i-1,1,1,2\rangle \\ \vdots \\ \mathrm{dp}\langle i-1,4,4,4\rangle \end{bmatrix}$$

矩阵快速幂优化 DP

$$\mathrm{dp}\langle i,a,b,c\rangle = \sum_k \mathrm{v}\langle k,a,b,c\rangle \cdot \mathrm{dp}\langle i-1,k,a,b\rangle$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{dp}\langle i,1,1,1\rangle \\ \mathrm{dp}\langle i,1,1,2\rangle \\ \vdots \\ \mathrm{dp}\langle i,4,4,4\rangle \end{bmatrix} = T \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{dp}\langle i-1,1,1,1\rangle \\ \mathrm{dp}\langle i-1,1,1,2\rangle \\ \vdots \\ \mathrm{dp}\langle i-1,4,4,4\rangle \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{dp}\langle i,a,b,c\rangle = \sum_{\langle j,k,l\rangle} T[a,b,c][j,k,l] \cdot \mathrm{dp}\langle i-1,j,k,l\rangle$$

矩阵快速幂优化 DP

$$\mathrm{dp}\langle i,a,b,c\rangle = \sum_k \mathrm{v}\langle k,a,b,c\rangle \cdot \mathrm{dp}\langle i-1,k,a,b\rangle$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{dp}\langle i,1,1,1\rangle \\ \mathrm{dp}\langle i,1,1,2\rangle \\ \vdots \\ \mathrm{dp}\langle i,4,4,4\rangle \end{bmatrix} = T \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{dp}\langle i-1,1,1,1\rangle \\ \mathrm{dp}\langle i-1,1,1,2\rangle \\ \vdots \\ \mathrm{dp}\langle i-1,4,4,4\rangle \end{bmatrix}$$

$$T[a,b,c][k,a,b] = \mathrm{v}\langle k,a,b,c\rangle$$

- 枚举前三 3 个元素的颜色 $\langle a, b, c\rangle$ 时，初始化：

$$\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

- 等价于 T^n 直接乘上单位矩阵；
- T^n 主对角线元素之和即为所有不动元数量。

结论

- 记 T^i 对角线元素之和为 $f(i)$
- 旋转 $i\frac{2\pi}{n}$ 下不动元个数为 $f(\gcd(n,i))$

结论

$$
\begin{aligned}
\sum_{\sigma\in G} |\operatorname{fix}(\sigma)| &= \sum_{i=1}^{n} f(\gcd(n,i)) \\
&= \sum_{d|n} f(d)\cdot\sum_{i=1}^{n}[\gcd(n,i)=d] \\
&= \sum_{d|n} f(d)\cdot\varphi(\frac{n}{d})
\end{aligned}
$$

- 复杂度：$\mathcal{O}(d(n)\cdot 64^3\log n)$，其中 $d(n)$ 代表 n 的约数个数。

无向图同构计数

n 个点无向完全图，m 种颜色给边染色，求本质不同的染色方案数。

$$n \le 60,\ m \le 10^3$$

无向图同构计数

n 个点无向完全图，m 种颜色给边染色，求本质不同的染色方案数。

$$n \le 60,\ m \le 10^3$$

- 两张图若**对点重标号**后可以重合即为同构；
- 把边的不存在当作一种颜色可将其推广至一般无向图同构。

分析

$$G = S_n \ \ (n\text{阶对称群}), \ |\ S_n \ | = n!$$

$$M = \{\text{不计同构的无向图染色方案}\}$$

- 置换是对点的置换，而染色是对边染色；
- 两点确定一条边，分析边两端点的情况。

两端在同一轮换内的边

$$\sigma = (1\ \ 3\ \ 5\ \ 6) \cdot (2\ \ 4)$$

两端在同一轮换内的边

$$\sigma = (1\ \ 3\ \ 5\ \ 6) \cdot (2\ \ 4)$$

- 对于两端点位于同一点轮换内的边：
  - $\langle 1, 3\rangle \to \langle 3, 5\rangle \to \langle 5, 6\rangle \to \langle 6, 1\rangle$
  - $\langle 1, 5\rangle \to \langle 3, 6\rangle$
  - $\langle 2, 4\rangle$

$$(a_0 \quad a_1 \quad \ldots \quad a_{l-1})$$

$$\langle a_i, a_j \rangle \to \langle a_{(i+1) \bmod l}, a_{(j+1) \bmod l} \rangle \to \ldots$$

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{l-1} \end{pmatrix}$$

$$\langle a_i, a_j \rangle \to \langle a_{(i+1) \bmod l}, a_{(j+1) \bmod l} \rangle \to \ldots$$

$$\begin{cases} i + t \equiv i \pmod{l} \\ j + t \equiv j \pmod{l} \end{cases}$$

$$(a_0 \quad a_1 \quad \ldots \quad a_{l-1})$$

$$\langle a_i, a_j \rangle \to \langle a_{(i+1) \bmod l}, a_{(j+1) \bmod l} \rangle \to \ldots$$

$$t \equiv 0 \pmod l$$

最小正整数解 $t = l$，则边轮换长度至多为 l。

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{l-1} \end{pmatrix}$$

$$\langle a_i, a_j \rangle \to \langle a_{(i+1) \bmod l}, a_{(j+1) \bmod l} \rangle \to \ldots$$

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{l-1} \end{pmatrix}$$

$$\langle a_i, a_j \rangle \to \langle a_{(i+1) \bmod l}, a_{(j+1) \bmod l} \rangle \to \dots$$

$$\begin{cases} i + t \equiv j \pmod{l} \\ j + t \equiv i \pmod{l} \end{cases}$$

$$(a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_{l-1})$$

$$\langle a_i, a_j \rangle \to \langle a_{(i+1) \bmod l}, a_{(j+1) \bmod l} \rangle \to \dots$$

$$2i \equiv 2j \pmod{l}$$

- 若 $2 \nmid l$，则 $i \equiv j \pmod{l}$，无法构成边；
- 若 $2 \mid l$，则 $i \equiv j \pmod{\frac{l}{2}}$，最小非负 $t = \frac{l}{2}$。

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{l-1} \end{pmatrix}$$

- 对于边 $\langle a_i, a_j \rangle$ 所在的边轮换：
  - 若 $2 \mid l$ 且 $\mid j-i \mid = \frac{l}{2}$，则其大小为 $\frac{l}{2}$；
  - 否则其大小为 l；
- $\mid j-i \mid \bmod l$ 相同的边在同一边轮换内，故边轮换个数为 $\lfloor \frac{l}{2} \rfloor$。

两端在不同轮换内的边

$$\sigma = (1\ \ 3\ \ 5\ \ 6) \cdot (2\ \ 4)$$

- 两点在不同点轮换里的边：
  - $\langle 1, 2 \rangle \to \langle 3, 4 \rangle \to \langle 5, 2 \rangle \to \langle 6, 4 \rangle$
  - $\langle 1, 4 \rangle \to \langle 3, 2 \rangle \to \langle 5, 4 \rangle \to \langle 6, 2 \rangle$

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{l-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{s-1} \end{pmatrix}$$

$$\langle a_i, b_j \rangle \to \langle a_{(i+1) \bmod l}, b_{(j+1) \bmod s} \rangle \to \dots$$

$$(a_0 \ \ a_1 \ \ \ldots \ \ a_{l-1}) \cdot (b_0 \ \ b_1 \ \ \ldots \ \ b_{s-1})$$

$$\langle a_i, b_j \rangle \to \langle a_{(i+1) \bmod l}, b_{(j+1) \bmod s} \rangle \to \cdots$$

$$\begin{cases} i + t \equiv i \pmod{l} \\ j + t \equiv j \pmod{s} \end{cases}$$

- 每个边轮换大小为 $\operatorname{lcm}(l, s)$，共 $\frac{ls}{\operatorname{lcm}(l,s)} = \gcd(l, s)$ 个。

点轮换与边轮换的关系

$$\sigma = \prod_{i=1}^{k} c_i \quad (\text{轮换 } c_i \text{ 长度为 } l_i)$$

- 可表示成边轮换的个数：

$$\sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{l_i}{2} \right\rfloor + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i+1}^{k} \gcd(l_i, l_j)$$

点轮换与边轮换的关系

$$\sigma = \prod_{i=1}^{k} c_i \quad (\text{轮换 } c_i \text{ 长度为 } l_i)$$

- 可表示成边轮换的个数：

$$\sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{l_i}{2} \right\rfloor + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i+1}^{k} \gcd(l_i, l_j)$$

- 不动元？每个边轮换内的边染色情况应当相同；
- $|\ S_n\ | = n!$，没办法枚举每一个置换……

点轮换与边轮换的关系

$$\sigma = \prod_{i=1}^{k} c_i \quad (\text{轮换 } c_i \text{ 长度为 } l_i)$$

- 可表示成边轮换的个数：

$$\sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{l_i}{2} \right\rfloor + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i+1}^{k} \gcd(l_i, l_j)$$

- 边轮换的个数只跟每个点轮换的大小有关系；
- 枚举点轮换大小的情况（n 的拆分方案）？

剪枝

- 枚举 n 的拆分方案：

$$n = \sum_{i=1}^{k} l_i \ (l_1 \le l_2 \le \cdots \le l_k)$$

- 每一种拆分方案对应多少点置换？

- n 个点分配到轮换内（多重组合数）：

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^{k} l_i!}$$

- 再考虑轮换内的顺序（圆排列）：
  - 比如 $(1\ \ 2\ \ 3)$ 和 $(1\ \ 3\ \ 2)$ 算不同的置换

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^{k} l_i!} \cdot \prod_{i=1}^{k} (l_i - 1)!$$

- 对于长度相等的轮换，其之间的顺序不计。
  - 记共有 s 种不同长度的轮换，其中第 i 种轮换的个数为 q_i，则：

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^{k} l_i} \cdot \prod_{i=1}^{s} \frac{1}{q_i!}$$

结论

- 对 n 的每一种拆分方案：$n = \sum_{i=1}^{k} l_i$
  - $l_1 \le l_2 \le \cdots \le l_k$；
  - 记共有 s 种不同长度的轮换，其中第 i 种轮换的个数为 q_i；
  - 其对应的点轮换数量为：

$$\frac{n!}{(\prod_{i=1}^{k} l_i) \cdot (\prod_{i=1}^{s} q_i!)}$$

$$\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}|\operatorname{fix}(\sigma)|$$

$$=\frac{1}{n!}\cdot\sum\frac{n!}{(\prod_{i=1}^{k} l_i)\cdot(\prod_{i=1}^{s} q_i!)}\cdot m^{\sum_{i=1}^{k}\left\lfloor\frac{l_i}{2}\right\rfloor+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=i+1}^{k}\gcd(l_i,l_j)}$$

- 复杂度 $\mathcal{O}\left(\sum_{p\in\mathrm{Partition}(n)}\operatorname{len}^2(p)\cdot\log n\right)$
- 其实题目数据范围内 $\mathrm{Partition}(n)$ 大小不大……所以 $\mathcal{O}$(能过)。

思路回顾

- 置换是对点的置换，均可分解成点轮换之积；
- 染色对边染色，同一边轮换内边染色方案相同；
- 点轮换和边轮换之间的关系？
- 只关心边轮换个数，其只与点轮换的大小情况有关，枚举点轮换的大小情况……

谢谢大家

相关题目 #1

- HDU 1817: Necklace of Beads
- HDU 3547: DIY Cube
- HDU 3441: Rotation
- POJ 2888: Magic Bracelet
- 洛谷 P1446: Cards

相关题目 #2

- 洛谷 P4128: 有色图
- ICPC 2014 鞍山 K: Colorful Toy
- HDU 6360: Kaleidoscope
- ICPC 2019 南昌 J: Summon
- ICPC 2019 银川 M: Crazy Cake

参考资料

- 近世代数引论/冯克勤,李尚志,章璞编著.-3版.-合肥：中国科学技术大学出版社,2009.12
- 近世代数初步/石生明.-2版.-北京：高等教育出版社,2006.3
- Contemporary Abstract Algebra/Joseph A. Gallian.-8th Edition
- 群论初探 - nosta - 博客园