

浅谈置换群

codgician

2020.03.14

关系

- 集合的笛卡尔积 (Cartesian product):

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

- 设 A 是集合, 集合 $A \times A$ 的每个子集 R 叫做集合 A 上的一个**关系** (relation)。
- 若 $(a, b) \in R$, 则称 a 和 b 有关系 R , 记作 aRb 。

等价关系

若集合 A 上的关系 \sim 满足如下条件:

- **自反性**: $\forall a \in A, a \sim a$;
- **对称性**: $\forall a, b \in A$, 若 $a \sim b$ 则 $b \sim a$;
- **传递性**: $\forall a, b \in A$, 若 $a \sim b, b \sim c$, 则 $a \sim c$;

则称 \sim 是**等价关系** (equivalence relation)

$$a \sim b := a \equiv b \pmod{7}$$

- 自反性? 对称性? 传递性?
- 看起来可以把所有自然数分成 7 类.....

等价类

设 \sim 是 A 上的等价关系, $\forall a \in A$, $[a]$ 表示 A 中与 a 等价的全部元素构成的集合:

$$[a] = \{b \sim a \mid b \in A\}$$

称 $[a]$ 为 a 所在的**等价类** (equivalence class)。

若 $a, b \in A$ 且 $[a] \cap [b] \neq \emptyset$, 则 $[a] = [b]$ 。

若 $a, b \in A$ 且 $[a] \cap [b] \neq \emptyset$, 则 $[a] = [b]$ 。

- 假设 $k_1 \in [a]$ 且 $k_1 \notin [b]$, $k_2 \in [a] \cap [b]$;
- 则有 $k_1 \sim a$, $k_2 \sim a$, $k_2 \sim b$;
- 由传递性得 $k_1 \sim b$, 与假设不符。

若 $a, b \in A$ 且 $[a] \cap [b] \neq \emptyset$, 则 $[a] = [b]$ 。

- 集合 A 可看作一些两两不相交的等价类的并：

$$A = \bigcup_{a \in R} [a] \quad (\text{两两不相交之并})$$

- A 上的每个等价关系给出集合 A 的一个**划分** (partition)。

群 (G, \cdot)

G 是非空集合, 且二元运算满足:

- 结合律: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- 单位元 e : $\forall a \in G, ea = ae = a$
- 逆元: $\forall a \in G, \exists b \in G$ s.t. $ab = ba = e$

群 (G, \cdot)

G 是非空集合, 且二元运算满足:

- 结合律: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- 单位元 e : $\forall a \in G, ea = ae = a$
- 逆元: $\forall a \in G, \exists b \in G$ s.t. $ab = ba = e$

若满足交换律, 则称为**交换群**

- 左右逆元相等:

- 设 x 是 a 的左逆元, y 是 a 的右逆元, 有:

$$x = xe = x(ay) = (xa)y = y$$

- 满足消去律:

- $\forall a, b, c \in G, ab = ac \Leftrightarrow b = c$

子群

设 (G, \cdot) 为群, H 是 G 的子集, 若 (H, \cdot) 成群, 则称 H 为 G 的子群 (subgroup), 记作 $H \leq G$;

陪集

设 $H \leq G$, 对于 $x \in G$:

- H 的一个**左陪集** (left coset) xH :

$$xH = \{x \cdot h \mid h \in H\}$$

- H 的一个**右陪集** (right coset) Hx :

$$Hx = \{h \cdot x \mid h \in H\}$$

$$xH = \{x \cdot h \mid h \in H\}$$

$$xH = \{x \cdot h \mid h \in H\}$$

$$x \sim y := x \in yH$$

- **自反性:** $x \in xH$;
- **对称性:** 若 $y \in xH$, 则 $x \in yH$;
- **传递性:** 若 $z \in yH$, $y \in xH$, 则 $z \in xH$ 。

- 若 $xH \cap yH \neq \emptyset$, 则 $xH = yH$;
- 利用陪集可以对群 G 进行划分 (陪集分解) :

$$G = \bigcup_{g \in R} gH \text{ (两两不相交之并)}$$

- 对于 $a, b \in H, g \in G$, 由消去律 $a \neq b \Leftrightarrow ga \neq gb$;
- 因此, $\forall g \in R, |gH| = |H|$:

$$|G| = \sum_{g \in R} |gH| = \sum_{g \in R} |H| = |R| \cdot |H|$$

拉格朗日定理

设 G 为有限群, $H \leq G$, 则:

$$|G| = [G : H] \cdot |H|$$

其中 $[G : H]$ 称为群 H 对于群 G 的**指数** (index)。

置换

一个集合的**置换** (permutation) 即从该集合映射至自身的双射。

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

$$\text{复合运算: } (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$1 \rightarrow 4 \rightarrow 3$$

$$2 \rightarrow 5 \rightarrow 6$$

任一置换都能被划分成若干不交的映射链？

轮换表示法

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{记作}} (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} = (1 \ 4 \ 3) \cdot (2 \ 5 \ 6)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} = (1 \ 4 \ 3) \cdot (2 \ 5 \ 6)$$

若不计轮换内外的次序，对于任意置换的不交轮换分解是唯一的吗？

- 对于恒等置换, 显然分解是唯一的;
- 对于非恒等置换, $\exists i$ s.t. $\sigma(i) \neq i$.
 - $i \rightarrow \sigma(i) \rightarrow \sigma^2(i) \rightarrow \dots$
 - 由抽屉原理, $\exists t_1 < t_2$ s.t. $\sigma^{t_1}(i) = \sigma^{t_2}(i)$
 - 令 t 为使得 $\sigma^t(i) = i$ 的最小正整数, 则:

$$(i \ \sigma(i) \ \dots \ \sigma^{t-1}(i))$$

是一个轮换。

- 对于每个这样的 i 都如此操作即可构造出一个唯一的不相交轮换分解式：
 - 每个元素在分解式中恰好出现 1 次；
 - 每个元素所属的轮换是固定的。

轮换的幂运算

轮换的幂运算

$(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$

轮换的幂运算

$$\begin{aligned} & (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)^2 \\ &= (1\ 3\ 5) \cdot (2\ 4\ 6) \end{aligned}$$

轮换的幂运算

$$\begin{aligned} & (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)^3 \\ &= (1\ 4) \cdot (2\ 5) \cdot (3\ 6) \end{aligned}$$

轮换的幂运算

$$\begin{aligned} & (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)^4 \\ &= (1\ 5\ 3) \cdot (2\ 6\ 4) \end{aligned}$$

$$\sigma = (a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{n-1})$$

- $\sigma^t(a_i) = a_{[(i+t) \bmod n]}$
- 令 $k \in \mathbb{N}^*$ s.t. $\sigma^{tk}(a_i) = a_i$:

$$\sigma = (a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{n-1})$$

- $\sigma^t(a_i) = a_{[(i+t) \bmod n]}$
- 令 $k \in \mathbb{N}^*$ s.t. $\sigma^{tk}(a_i) = a_i$:

$$i + tk \equiv i \pmod{n}$$

$$\sigma = (a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{n-1})$$

- $\sigma^t(a_i) = a_{[(i+t) \bmod n]}$
- 令 $k \in \mathbb{N}^*$ s.t. $\sigma^{tk}(a_i) = a_i$:

$$tk \equiv 0 \pmod{n}$$

最小非负解: $k = \frac{n}{\gcd(n,t)}$

$$\sigma = (a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{n-1})$$

- σ^t 可表示为 $\gcd(n, t)$ 个长为 $\frac{n}{\gcd(n, t)}$ 的轮换;
- a_i 所在轮换里第 j ($0 \leq j < \gcd(n, t)$) 个元素为 $a_{(i+jt) \bmod n}$ 。

$$\sigma = (a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{n-1})$$

- σ^t 可表示为 $\gcd(n, t)$ 个长为 $\frac{n}{\gcd(n, t)}$ 的轮换;
- a_i 所在轮换里第 j ($0 \leq j < \gcd(n, t)$) 个元素为 $a_{(i+jt) \bmod n}$ 。
 - a_i 所在轮换内元素下标模 $\gcd(n, t)$ 均为 i ;
 - $a_0, a_1, \dots, a_{\gcd(n, t)-1}$ 一定位于不同轮换。

置换群

n 个元的所有置换，在复合运算 \circ 下成群，称作 n 元**对称群** (symmetric group)，记作 S_n

- **结合律**： $(\sigma \circ \tau) \circ \phi = \sigma \circ (\tau \circ \phi)$
- **单位元**：恒等置换 $\epsilon \circ x = x$;
- **逆元**：置换是双射，故必然存在逆置换。

群在集合上的作用

$$\phi : G \times M \longrightarrow M$$

$$(\sigma, x) \longmapsto \sigma \circ x$$

- $\forall x \in M$ 满足:
 - **单位元**: $\exists \epsilon \in G$ s.t. $\epsilon \circ x = x$
 - **结合律**: $\tau \circ (\sigma \circ x) = (\tau \circ \sigma) \circ x$

用黑白两色对等边三角形顶点染色，若可通过旋转得到的方案算相同方案，求方案数？

用黑白两色对等边三角形顶点染色，若可通过旋转得到的方案算相同方案，求方案数？



在旋转意义下同构

用黑白两色对等边三角形顶点染色，若可通过旋转得到的方案算相同方案，求方案数？

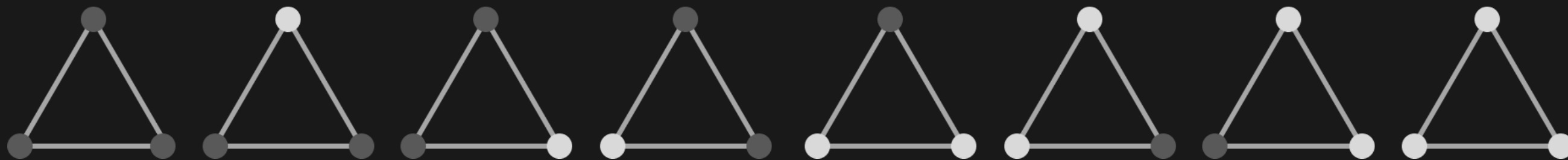
$$G = \{\text{顺时针旋转 } 0^\circ, 120^\circ, 240^\circ\}$$

$$M = \{\text{不考虑同构时的染色方案}\}$$

用黑白两色对等边三角形顶点染色，若可通过旋转得到的方案算相同方案，求方案数？

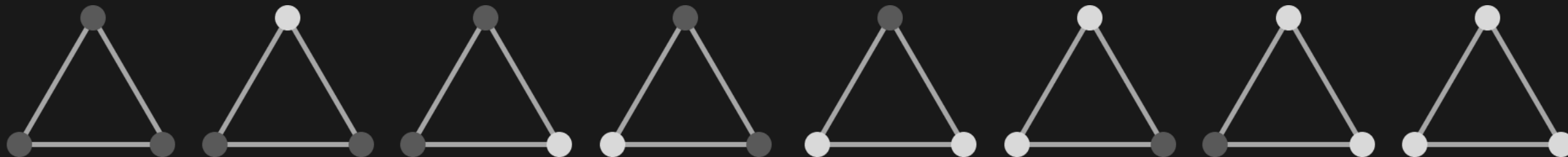
$G = \{\text{顺时针旋转 } 0^\circ, 120^\circ, 240^\circ\}$

$M = \{\text{不考虑同构时的染色方案}\}$

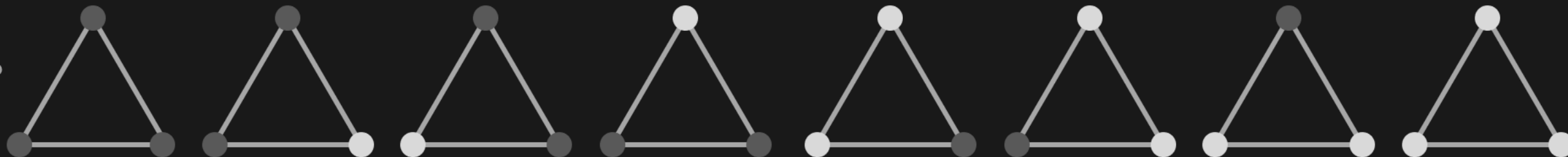


不考虑同构时的染色方案

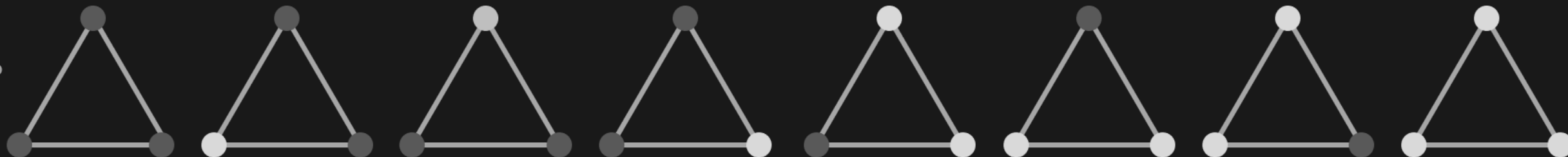
0°



120°

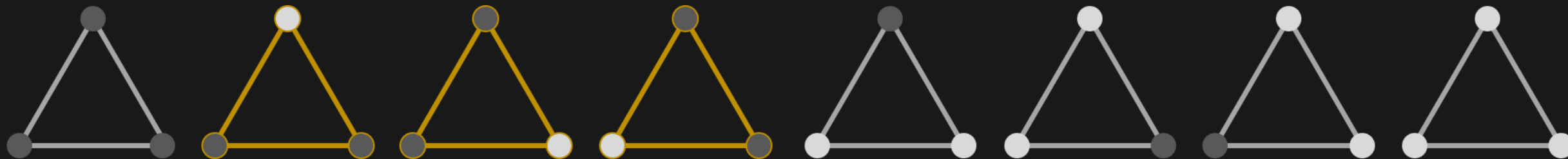


240°

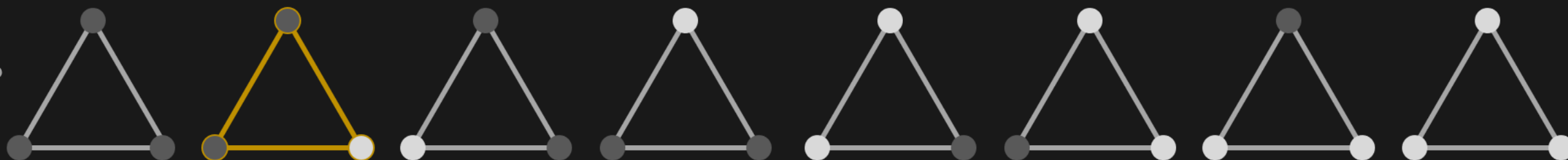


$$G \times M$$

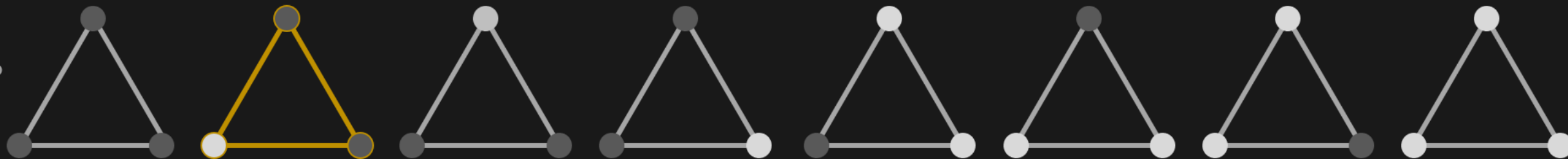
0°



120°

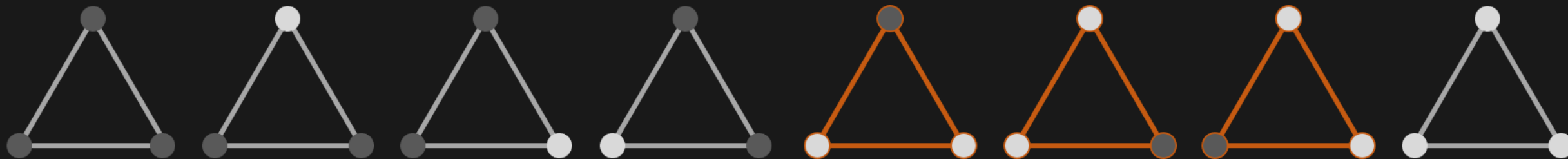


240°

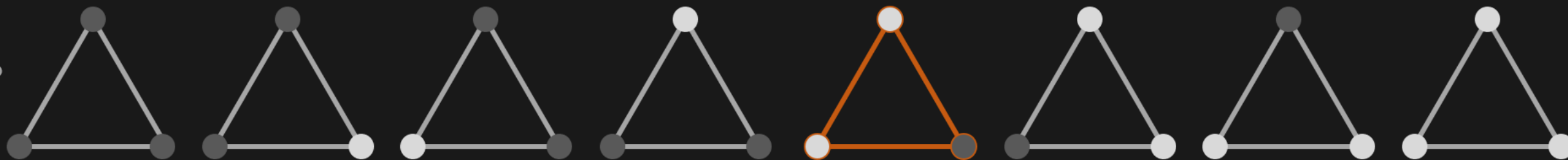


等价类?

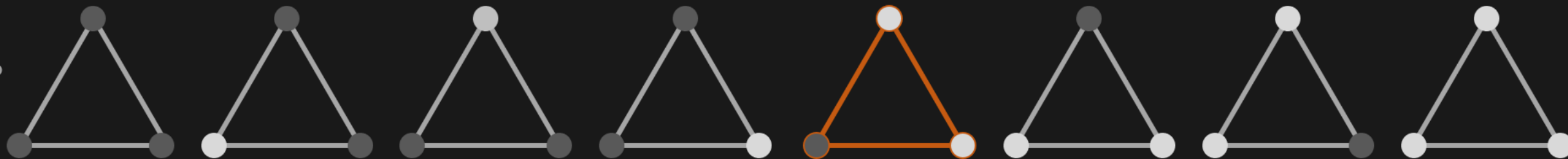
0°



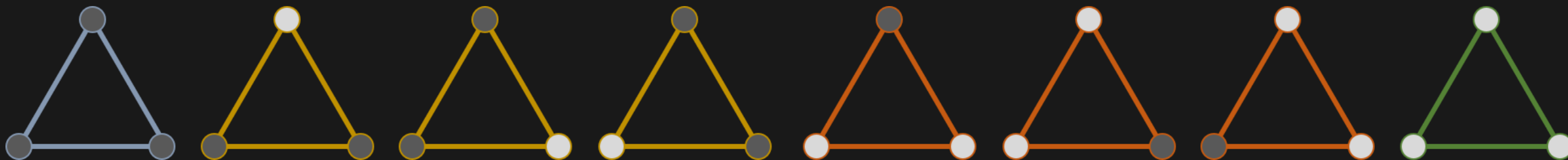
120°



240°



等价类?



- 一种等价关系?
- 借助该等价关系对集合进行划分?
- 有多少不同的等价类?

轨道

群 G 作用于集合 M 上, $x \in M$, 称 M 的子集

$$\text{orb}_G(x) = \{\sigma \circ x \mid \sigma \in G\}$$

为 x 在 G 作用下的**轨道** (orbit), 简称过 x 的轨道。

$$\text{orb}_G(x) = \{\sigma \circ x \mid \sigma \in G\}$$

$$x \sim y := x \in \text{orb}_G(y)$$

- **自反性**: $x \in \text{orb}_G(x)$;
- **对称性**: 若 $y \in \text{orb}_G(x)$, 则 $x \in \text{orb}_G(y)$;
- **传递性**: 若 $z \in \text{orb}_G(y)$, $y \in \text{orb}_G(x)$, 则 $z \in \text{orb}_G(x)$ 。

- 若 $\text{orb}_G(x) \cap \text{orb}_G(y) \neq \emptyset$, 则 $\text{orb}_G(x) = \text{orb}_G(y)$;
- 在 M 的每一条轨道上取一个元素组成 M 的一个子集 R , 称为 M 的**轨道的代表元集**, 则:

$$M = \bigcup_{x \in R} \text{orb}_G(x)$$

并且此中各 $\text{orb}_G(x)$ 互不相交。

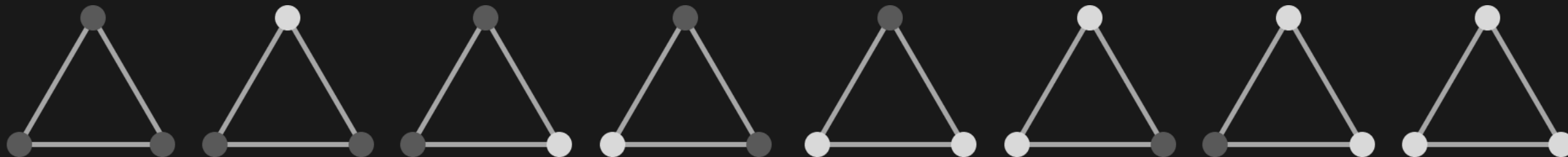
稳定子

设群 G 作用于集合 M , 对 $x \in M$, 称

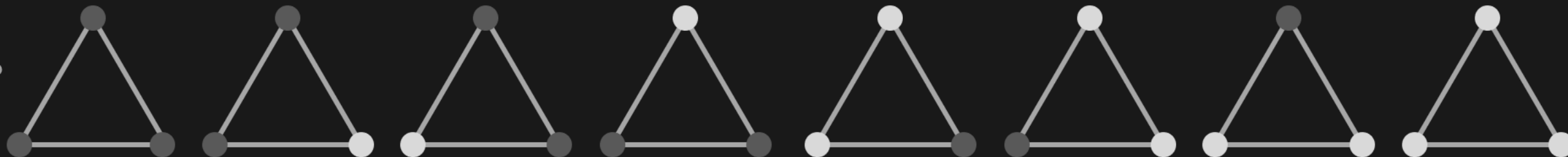
$$\text{stab}_G(x) = \{\sigma \circ x = x \mid \sigma \in G\}$$

为群 G 作用下 x 的**稳定子** (stabilizer)。

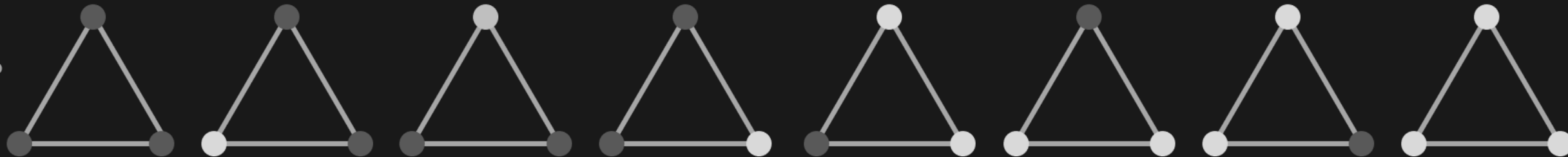
0°



120°



240°



$$G \times M$$

$$\text{stab}_G(x) = \{\sigma \circ x = x \mid \sigma \in G\} \leq G$$

$$\text{stab}_G(x) = \{\sigma \circ x = x \mid \sigma \in G\} \leq G$$

- **封闭性**: $\forall \sigma, \tau \in \text{stab}_G(x), \sigma \circ \tau \circ x = \sigma \circ x = x$, 故 $(\sigma \circ \tau) \in \text{stab}_G(x)$;
- **结合律**: 显然置换的复合满足结合律;
- **单位元**: 恒等置换 $\epsilon \circ x = x$;
- **逆元**: $\forall \sigma \in \text{stab}_G(x), \sigma^{-1} \circ x = \sigma^{-1} \circ (\sigma \circ x) = \epsilon(x) = x$ 。

$$\text{stab}_G(x) = \{\sigma \circ x = x \mid \sigma \in G\} \leq G$$

$$\text{stab}_G(x) = \{\sigma \circ x = x \mid \sigma \in G\} \leq G$$

- 既然是子群，那可以用来对 G 进行左陪集划分；

$$\text{stab}_G(x) = \{\sigma \circ x = x \mid \sigma \in G\} \leq G$$

- $\beta\text{stab}_G(x)$ 里的元素相当于作用于 x 时 G 中所有与 β 等价的置换:

$$\beta\text{stab}_G(x) = \{(\beta \circ \sigma) \circ x = \beta \circ x \mid \sigma \in G\}$$

$$\text{stab}_G(x) = \{\sigma \circ x = x \mid \sigma \in G\} \leq G$$

- $\beta\text{stab}_G(x)$ 里的元素相当于作用于 x 时 G 中所有与 β 等价的置换:

$$\beta\text{stab}_G(x) = \{\tau \circ x = \beta \circ x \mid \tau \in G\}$$

$$\text{stab}_G(x) = \{\sigma \circ x = x \mid \sigma \in G\} \leq G$$

- $\beta\text{stab}_G(x)$ 里的元素相当于作用于 x 时 G 中所有与 β 等价的置换:

$$\beta\text{stab}_G(x) = \{\tau \circ x = \beta \circ x \mid \tau \in G\}$$

- $\text{orb}_G(x) = \{\sigma \circ x \mid \sigma \in G\}$ 表示作用于 x 时互不等价的置换, 即上述不同左陪集的数量。

轨道-稳定子定理

设有限群 G 作用于集合 M , $x \in M$, 则:

$$|G| = |\text{stab}_G(x)| \cdot |\text{orb}_G(x)|$$

BURNSIDE 引理

设有限群 G 作用于有限集 M 上, 则轨道数:

$$|M/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} |\text{fix}(\sigma)|$$

其中 $\text{fix}(\sigma)$ 代表 σ 的不动元构成的集合:

$$\text{fix}(\sigma) = \{\sigma \circ x = x \mid x \in M\}$$

证明

$$\text{stab}_G(x) = \{\sigma \circ x = x \mid \sigma \in G\}$$

$$\text{fix}(\sigma) = \{\sigma \circ x = x \mid x \in M\}$$

$$\sum_{x \in M} |\text{stab}_G(x)| = \sum_{\sigma \in G} |\text{fix}(\sigma)|$$

- 每个轨道对轨道数贡献为 1, 故 $x \in M$ 对答案的贡献为 $\frac{1}{|\text{orb}_G(x)|}$:

$$\begin{aligned} |M/G| &= \sum_{x \in M} \frac{1}{|\text{orb}_G(x)|} \\ &= \sum_{x \in M} \frac{|\text{stab}_G(x)|}{|G|} \quad (\text{轨道-稳定子定理}) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} |\text{fix}(\sigma)| \end{aligned}$$

对正六边形的 6 个顶点，一半涂黑一半涂白。若经旋转可得到的方案算相同方案，求方案数？

对正六边形的 6 个顶点，一半涂黑一半涂白。若经旋转可得到的方案算相同方案，求方案数？

$$M = \{\text{不计同构的涂色方案}\} \quad |M| = \binom{6}{3} = 20$$

$$G = \{\text{顺时针旋转 } 0^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ\}$$

记 6 个顶点分别为 A_1, A_2, \dots, A_6

旋转 0°

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \end{pmatrix}$$

将这一置换作用于 M 中的任意元素都不会使该元素发生变化，故不动元有 20 个。

旋转 60°

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \\ A_6 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \end{pmatrix}$$

若要成为不动元，则应当满足：

$$A_1 = A_2 = \cdots = A_6$$

故没有不动元

旋转 120°

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \\ A_5 & A_6 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{pmatrix}$$

若要成为不动元，则应当满足：

$$A_1 = A_3 = A_5, A_2 = A_4 = A_6$$

故不动元数量为 2

旋转 180°

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \\ A_4 & A_5 & A_6 & A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix}$$

若要成为不动元，则应当满足：

$$A_1 = A_4, A_2 = A_5, A_3 = A_6$$

故没有不动元

- 旋转 60° 与 旋转 300° 情形相似;
- 旋转 120° 与 旋转 240° 情形相似。

$$\text{轨道数: } \frac{1}{6}(20 + 2 + 2) = 4$$

PÓLYA 计数定理

- 将置换表示为若干轮换乘积，若轮换内元素颜色均相同即为不动元.....
- 记染色可选的颜色数为 m ， $c(\sigma)$ 为置换 σ 被分解为不交轮换乘积的个数，则：

PÓLYA 计数定理

- 将置换表示为若干轮换乘积，若轮换内元素颜色均相同即为不动元.....
- 记染色可选的颜色数为 m ， $c(\sigma)$ 为置换 σ 被分解为不交轮换乘积的个数，则：

$$\text{fix}(\sigma) = m^{c(\sigma)}$$

PÓLYA 计数定理

- 将置换表示为若干轮换乘积，若轮换内元素颜色均相同即为不动元.....
- 记染色可选的颜色数为 m ， $c(\sigma)$ 为置换 σ 被分解为不交轮换乘积的个数，则：

$$|M/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} m^{c(\sigma)}$$

小结

- 关系 | 等价关系 | 等价类
 - 对集合分类：等价类 $[a]$ 内的元素都与存在 a 等价关系；
- 群 | 子群 | 陪集
 - 对群分类：陪集 gH 里的所有元素都与 g 存在等价关系；
- 群在集合上的作用
 - 轨道： M 的子集，在 G 作用下与 x 等价的元素；
 - 稳定子： G 的子群，对于 x 而言 G 中等价的置换；
 - 轨道-稳定子定理 | Burnside 引理 | Pólya 计数法

项链染色

长为 n 的环, m 种颜色对环上元素染色, 经旋转或翻转都算作相同方案

$$n, m \leq 10^9$$

分析

$$G = \{ \text{顺时针旋转 } \frac{2\pi}{n}, \dots, (n-1)\frac{2\pi}{n}, 2\pi, \\ \text{过每一条对称轴的翻转} \}$$

$$M = \{ \text{不考虑同构的所有染色方案} \}$$

$$G \text{ 作用于 } M$$

分析

$$G = \{ \text{顺时针旋转 } \frac{2\pi}{n}, \dots, (n-1)\frac{2\pi}{n}, 2\pi, \\ \text{过每一条对称轴的翻转} \}$$

$$M = \{ \text{不考虑同构的所有染色方案} \}$$

G 作用于 M

G 中复合运算封闭吗?

若将环上的元素按顺时针编号： $0, 1, \dots, (n - 1)$

- 顺时针旋转 $k \frac{2\pi}{n}$ ： $\sigma_k(i) = (i + k) \bmod n$;
- 沿过点 a 的对称轴翻转：

$$\tau_a(i) = \begin{cases} i & i = a \text{ or } a \text{ 对面的点} \\ (2a - i) \bmod n & \text{otherwise} \end{cases}$$

若将环上的元素按顺时针编号： $0, 1, \dots, (n - 1)$

- 顺时针旋转 $k \frac{2\pi}{n}$ ： $\sigma_k(i) = (i + k) \bmod n$;
- 沿过点 a 的对称轴翻转：

$$\tau_a(i) = \begin{cases} i & i = a \text{ or } a \text{ 对面的点} \\ (2a - i) \bmod n & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 考虑 $i \neq a$ 的情况 ($i = a$ 显然封闭) , 若 $2 \mid k$:

$$\sigma_k \circ \tau_a \circ i = (2a - i + k) \bmod n = \tau_{(a + \frac{k}{2}) \bmod n} i$$

若将环上的元素按顺时针编号： $0, 1, \dots, (n - 1)$

- 顺时针旋转 $k \frac{2\pi}{n}$ ： $\sigma_k(i) = (i + k) \bmod n$;
- 沿过点 a 的对称轴翻转：

$$\tau_a(i) = \begin{cases} i & i = a \text{ or } a \text{ 对面的点} \\ (2a - i) \bmod n & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 考虑 $i \neq a$ 的情况 ($i = a$ 显然封闭) , 若 $2 \nmid k$:

$$\sigma_k \circ \tau_a \circ i = (2a - i + k) \bmod n = \tau_{(a + \frac{n+k}{2}) \bmod n}$$

旋转

- 旋转置换一共 n 种;
- 旋转 $\frac{2\pi}{n}$ 时只能分解成一个不交轮换;
- 旋转 $i\frac{2\pi}{n}$ 可看作前者的 i 次幂, 故可拆成 $\gcd(n, i)$ 个轮换:

$$\sum_{\sigma} |\text{fix}(\sigma)| = \sum_{i=1}^n m^{\gcd(n, i)}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{g \in G} | \operatorname{fix}(\sigma) | &= \sum_{i=1}^n m^{\operatorname{gcd}(n,i)} \\
&= \sum_{d|n} m^d \sum_{i=1}^n [\operatorname{gcd}(n, i) = d] \\
&= \sum_{d|n} m^d \sum_{i=1}^{\frac{n}{d}} [\operatorname{gcd}(\frac{n}{d}, i) = 1] \\
&= \sum_{d|n} m^d \cdot \varphi(\frac{n}{d})
\end{aligned}$$

翻转

- 翻转置换一共 n 种。
- n 为偶数：
 - $\frac{n}{2}$ 条过点的对称轴: $c(\tau) = \frac{n}{2} + 1$
 - $\frac{n}{2}$ 条过边的对称轴: $c(\tau) = \frac{n}{2}$

$$\sum_{\tau} |\text{fix}(\tau)| = \frac{n}{2} \cdot m^{\frac{n}{2}+1} + \frac{n}{2} \cdot m^{\frac{n}{2}}$$

- n 为奇数:

- n 条 既过点又过边的对称轴: $c(\tau) = \frac{n+1}{2}$

$$\sum_{\tau} |\text{fix}(\tau)| = n \cdot m^{\frac{n+1}{2}}$$

结论

$$\begin{aligned}
 |M/G| &= \frac{\sum_{\sigma} |\text{fix}(\sigma)| + \sum_{\tau} |\text{fix}(\tau)|}{2n} \\
 &= \frac{1}{2n} \sum_{d|n} m^d \cdot \varphi\left(\frac{n}{d}\right) \\
 &\quad + \frac{1}{2n} \begin{cases} \frac{n}{2} \cdot m^{\frac{n}{2}+1} + \frac{n}{2} \cdot m^{\frac{n}{2}} & 2 \mid n \\ n \cdot m^{\frac{n+1}{2}} & 2 \nmid n \end{cases}
 \end{aligned}$$

南昌 J. SUMMON

现要从 4 种不同的水晶中取 n 个围成一个圈，但有 m 个限制条件：每条限制条件要求某四种水晶不能在围成的圈中连续出现。通过旋转可互相得到的方案算作一种方案，问有多少种本质不同的方案？（结果模 998244353）

$$n \leq 10^5, m \leq 256$$

分析

$$G = \{\text{顺时针旋转}\frac{2\pi}{n}, \dots, (n-1)\frac{2\pi}{n}, 2\pi\}$$

$$M = \{\text{满足限制且不计同构的染色方案}\}$$

分析

$$G = \{\text{顺时针旋转 } \frac{2\pi}{n}, \dots, (n-1)\frac{2\pi}{n}, 2\pi\}$$

$$M = \{\text{满足限制且不计同构的染色方案}\}$$

- 单单把每一个轮换内的所有元素染成相同颜色可能破坏限制条件;
- 无法直接应用 Pólya 计数定理。

- 旋转 $\frac{2\pi}{n}$ 只能分解成一个不交轮换;
- 旋转 $i\frac{2\pi}{n}$ 可看作前者的 i 次幂, 因此:
 - 可表示为 $\gcd(n, i)$ 个不交轮换之积;
 - 标号模 $\gcd(n, i)$ 结果相同的点在同一轮换内。

- 旋转 $\frac{2\pi}{n}$ 只能分解成一个不交轮换;
- 旋转 $i\frac{2\pi}{n}$ 可看作前者的 i 次幂, 因此:
 - 可表示为 $\gcd(n, i)$ 个不交轮换之积;
 - 标号模 $\gcd(n, i)$ 结果相同的点在同一轮换内。

对于旋转 $i\frac{2\pi}{n}$ 这一置换, 只需确定前 $\gcd(n, i)$ 个元素的颜色即可知道该置换下不动元数量!

DP 求不动元数量

- 记 $v\langle a, b, c, d \rangle$ 代表是否允许 a, b, c, d 四种颜色相邻;

$$v\langle a, b, c, d \rangle = \begin{cases} 0 & \text{不允许 } a, b, c, d \text{ 相邻} \\ 1 & \text{允许 } a, b, c, d \text{ 相邻} \end{cases}$$

- 记 $\text{dp}\langle i, a, b, c \rangle$ 代表 i 个元素排成一排, 最后 3 个元素的颜色分别为 a, b, c 的方案数:

$$\text{dp}\langle i, a, b, c \rangle = \sum_k v\langle k, a, b, c \rangle \cdot \text{dp}\langle i - 1, k, a, b \rangle$$

- 记 $\text{dp}\langle i, a, b, c \rangle$ 代表 i 个元素排成一排，最后 3 个元素的颜色分别为 a, b, c 的方案数：

$$\text{dp}\langle i, a, b, c \rangle = \sum_k v\langle k, a, b, c \rangle \cdot \text{dp}\langle i - 1, k, a, b \rangle$$

- 枚举前 3 个元素的颜色 $\langle a, b, c \rangle$:
 - 只初始化 $\text{dp}\langle 3, a, b, c \rangle = 1$;
 - $\text{dp}\langle m + 3, a, b, c \rangle$ 即为 m 个元素围成环时不动元方案数。

矩阵快速幂优化 DP

$$\text{dp}\langle i, a, b, c \rangle = \sum_k \mathbf{v}\langle k, a, b, c \rangle \cdot \text{dp}\langle i - 1, k, a, b \rangle$$

$$\begin{bmatrix} \text{dp}\langle i, 1, 1, 1 \rangle \\ \text{dp}\langle i, 1, 1, 2 \rangle \\ \vdots \\ \text{dp}\langle i, 4, 4, 4 \rangle \end{bmatrix} = T \cdot \begin{bmatrix} \text{dp}\langle i - 1, 1, 1, 1 \rangle \\ \text{dp}\langle i - 1, 1, 1, 2 \rangle \\ \vdots \\ \text{dp}\langle i - 1, 4, 4, 4 \rangle \end{bmatrix}$$

矩阵快速幂优化 DP

$$\text{dp}\langle i, a, b, c \rangle = \sum_k \mathbf{v}\langle k, a, b, c \rangle \cdot \text{dp}\langle i - 1, k, a, b \rangle$$

$$\begin{bmatrix} \text{dp}\langle i, 1, 1, 1 \rangle \\ \text{dp}\langle i, 1, 1, 2 \rangle \\ \vdots \\ \text{dp}\langle i, 4, 4, 4 \rangle \end{bmatrix} = T \cdot \begin{bmatrix} \text{dp}\langle i - 1, 1, 1, 1 \rangle \\ \text{dp}\langle i - 1, 1, 1, 2 \rangle \\ \vdots \\ \text{dp}\langle i - 1, 4, 4, 4 \rangle \end{bmatrix}$$

$$\text{dp}\langle i, a, b, c \rangle = \sum_{\langle j, k, l \rangle} T[a, b, c][j, k, l] \cdot \text{dp}\langle i - 1, j, k, l \rangle$$

矩阵快速幂优化 DP

$$\text{dp}\langle i, a, b, c \rangle = \sum_k \mathbf{v}\langle k, a, b, c \rangle \cdot \text{dp}\langle i - 1, k, a, b \rangle$$

$$\begin{bmatrix} \text{dp}\langle i, 1, 1, 1 \rangle \\ \text{dp}\langle i, 1, 1, 2 \rangle \\ \vdots \\ \text{dp}\langle i, 4, 4, 4 \rangle \end{bmatrix} = T \cdot \begin{bmatrix} \text{dp}\langle i - 1, 1, 1, 1 \rangle \\ \text{dp}\langle i - 1, 1, 1, 2 \rangle \\ \vdots \\ \text{dp}\langle i - 1, 4, 4, 4 \rangle \end{bmatrix}$$

$$T[a, b, c][k, a, b] = \mathbf{v}\langle k, a, b, c \rangle$$

- 枚举前三 3 个元素的颜色 $\langle a, b, c \rangle$ 时, 初始化:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 等价于 T^n 直接乘上单位矩阵;
- T^n 主对角线元素之和即为所有不动元数量。

结论

- 记 T^i 对角线元素之和为 $f(i)$
- 旋转 $i \frac{2\pi}{n}$ 下不动元个数为 $f(\gcd(n, i))$

结论

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma \in G} |\text{fix}(\sigma)| &= \sum_{i=1}^n f(\gcd(n, i)) \\ &= \sum_{d|n} f(d) \cdot \sum_{i=1}^n [\gcd(n, i) = d] \\ &= \sum_{d|n} f(d) \cdot \varphi\left(\frac{n}{d}\right)\end{aligned}$$

- 复杂度: $\mathcal{O}(\sqrt{n} \cdot 64^3 \log n)$, 但因数个数远小于 \sqrt{n} 。

无向图同构计数

n 个点无向完全图, m 种颜色给边染色, 求本质不同的染色方案数。

$$n \leq 60, m \leq 10^3$$

无向图同构计数

n 个点无向完全图, m 种颜色给边染色, 求本质不同的染色方案数。

$$n \leq 60, m \leq 10^3$$

- 两张图若**对点重标号**后可以重合即为同构;
- 把边的不存在当作一种颜色可将其推广至一般无向图同构。

分析

$G = S_n$ (n 阶对称群), $|S_n| = n!$

$M = \{\text{不计同构的无向图染色方案}\}$

- 置换是对点的置换，而染色是对边染色；
- 两点确定一条边，分析边两端点的情况。

两端在同一轮换内的边

$$\sigma = (1 \ 3 \ 5 \ 6) \cdot (2 \ 4)$$

两端在同一轮换内的边

$$\sigma = (1 \ 3 \ 5 \ 6) \cdot (2 \ 4)$$

- 对于两端点位于同一点轮换内的边：
 - $\langle 1, 3 \rangle \rightarrow \langle 3, 5 \rangle \rightarrow \langle 5, 6 \rangle \rightarrow \langle 6, 1 \rangle$
 - $\langle 1, 5 \rangle \rightarrow \langle 3, 6 \rangle$
 - $\langle 2, 4 \rangle$

$$(a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{l-1})$$

$$\langle a_i, a_j \rangle \longrightarrow \langle a_{(i+1) \bmod l}, a_{(j+1) \bmod l} \rangle \longrightarrow \dots$$

$$(a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{l-1})$$

$$\langle a_i, a_j \rangle \rightarrow \langle a_{(i+1) \bmod l}, a_{(j+1) \bmod l} \rangle \rightarrow \dots$$

$$\begin{cases} i + t \equiv i \pmod{l} \\ j + t \equiv j \pmod{l} \end{cases}$$

$$(a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{l-1})$$

$$\langle a_i, a_j \rangle \rightarrow \langle a_{(i+1) \bmod l}, a_{(j+1) \bmod l} \rangle \rightarrow \dots$$

$$t \equiv 0 \pmod{m}$$

最小非负 $t = l$, 则边轮换长度至多为 l 。

$$(a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{l-1})$$

$$\langle a_i, a_j \rangle \longrightarrow \langle a_{(i+1) \bmod l}, a_{(j+1) \bmod l} \rangle \longrightarrow \dots$$

$$(a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{l-1})$$

$$\langle a_i, a_j \rangle \longrightarrow \langle a_{(i+1) \bmod l}, a_{(j+1) \bmod l} \rangle \longrightarrow \dots$$

$$\begin{cases} i + t \equiv j \pmod{l} \\ j + t \equiv i \pmod{l} \end{cases}$$

$$(a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{l-1})$$

$$\langle a_i, a_j \rangle \rightarrow \langle a_{(i+1) \bmod l}, a_{(j+1) \bmod l} \rangle \rightarrow \dots$$

$$2i \equiv 2j \pmod{m}$$

- 若 $2 \nmid l$, 则 $i \equiv j \pmod{l}$, 无法构成边;
- 若 $2 \mid l$, 则 $i \equiv j \pmod{\frac{l}{2}}$, 最小非负 $t = \frac{l}{2}$ 。

$$(a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{l-1})$$

- 对于边 $\langle a_i, a_j \rangle$ 所在的边轮换：
 - 若 $2 \mid l$ 且 $|j - i| = \frac{l}{2}$, 则其大小为 $\frac{l}{2}$;
 - 否则其大小为 l ;
- $|j - i| \bmod l$ 相同的边在同一边轮换内, 故边轮换个数为 $\lfloor \frac{l}{2} \rfloor$ 。

两端在不同轮换内的边

$$\sigma = (1\ 3\ 5\ 6) \cdot (2\ 4)$$

- 两点在不同点轮换里的边：
 - $\langle 1, 2 \rangle \rightarrow \langle 3, 4 \rangle \rightarrow \langle 5, 2 \rangle \rightarrow \langle 6, 4 \rangle$
 - $\langle 1, 4 \rangle \rightarrow \langle 3, 2 \rangle \rightarrow \langle 5, 4 \rangle \rightarrow \langle 6, 2 \rangle$

$$(a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{l-1}) \cdot (b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{s-1})$$

$$\langle a_i, b_j \rangle \longrightarrow \langle a_{(i+1) \bmod l}, b_{(j+1) \bmod s} \rangle \longrightarrow \dots$$

$$(a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{l-1}) \cdot (b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{s-1})$$

$$\langle a_i, b_j \rangle \rightarrow \langle a_{(i+1) \bmod l}, b_{(j+1) \bmod s} \rangle \rightarrow \dots$$

$$\begin{cases} i + t \equiv i \pmod{l} \\ j + t \equiv j \pmod{s} \end{cases}$$

- 每个边轮换大小为 $\text{lcm}(l, s)$, 共 $\frac{ls}{\text{lcm}(l, s)} = \text{gcd}(l, s)$ 个。

点轮换与边轮换的关系

$$\sigma = \prod_{i=1}^k c_i \quad (\text{轮换 } c_i \text{ 长度为 } l_i)$$

- 可表示成边轮换的个数:

$$\sum_{i=1}^k \left\lfloor \frac{l_i}{2} \right\rfloor + \sum_{i=1}^k \sum_{j=i+1}^k \gcd(l_i, l_j)$$

点轮换与边轮换的关系

$$\sigma = \prod_{i=1}^k c_i \quad (\text{轮换 } c_i \text{ 长度为 } l_i)$$

- 可表示成边轮换的个数:

$$\sum_{i=1}^k \left\lfloor \frac{l_i}{2} \right\rfloor + \sum_{i=1}^k \sum_{j=i+1}^k \gcd(l_i, l_j)$$

- 不动元? 每个边轮换内的边染色情况应当相同;
- $|S_n| = n!$, 没办法枚举每一个置换.....

点轮换与边轮换的关系

$$\sigma = \prod_{i=1}^k c_i \quad (\text{轮换 } c_i \text{ 长度为 } l_i)$$

- 可表示成边轮换的个数:

$$\sum_{i=1}^k \left\lfloor \frac{l_i}{2} \right\rfloor + \sum_{i=1}^k \sum_{j=i+1}^k \gcd(l_i, l_j)$$

- 边轮换的个数只跟每个点轮换的大小有关系;
- 枚举点轮换大小的情况 (n 的拆分方案) ?

剪枝

- 枚举 n 的拆分方案:

$$n = \sum_{i=1}^k l_i \quad (l_1 \leq l_2 \leq \cdots \leq l_k)$$

- 每一种拆分方案对应多少点置换?

- n 个点分配到轮换内（多重组合数）：

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^k l_i!}$$

- 再考虑轮换内的顺序（圆排列）：
 - 比如 (1 2 3) 和 (1 3 2) 算不同的置换

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^k l_i!} \cdot \prod_{i=1}^k (l_i - 1)!$$

- 对于长度相等的轮换，其之间的顺序不计。
 - 记共有 s 种不同长度的轮换，其中第 i 种轮换的长度为 q_i ，则：

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^k l_i} \cdot \prod_{i=1}^s \frac{1}{q_i!}$$

结论

- 对 n 的每一种拆分方案: $n = \sum_{i=1}^k l_i$
 - $l_1 \leq l_2 \leq \cdots \leq l_k$;
 - 记共有 s 种不同长度的轮换, 其中第 i 种轮换的长度为 q_i ;
 - 其对应的点轮换数量为:

$$\frac{n!}{\left(\prod_{i=1}^k l_i\right) \cdot \left(\prod_{i=1}^s q_i!\right)}$$

$$\frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} |\text{fix}(\sigma)|$$

$$= \frac{1}{n!} \cdot \sum \frac{n!}{\left(\prod_{i=1}^k l_i\right) \cdot \left(\prod_{i=1}^s q_i!\right)} \cdot m^{\sum_{i=1}^k \left\lfloor \frac{l_i}{2} \right\rfloor + \sum_{i=1}^k \sum_{j=i+1}^k \text{gcd}(l_i, l_j)}$$

- 复杂度 $\mathcal{O} \left(\sum_{p \in \text{Partition}(n)} \text{len}^2(p) \cdot \log n \right)$
- 其实题目数据范围内 $\text{Partition}(n)$ 大小不大.....所以 \mathcal{O} (能过)。

思路回顾

- 置换是对点的置换，均可分解成点轮换之积；
- 染色对边染色，同一边轮换内边染色方案相同；
- 点轮换和边轮换之间的关系？
- 只关心边轮换个数，其只与点轮换的大小情况有关，枚举点轮换的大小情况.....

谢谢大家

相关题目 #1

- HDU 1817: Necklace of Beads
- HDU 3547: DIY Cube
- HDU 3441: Rotation
- POJ 2888: Magic Bracelet
- 洛谷 P1446: Cards

相关题目 #2

- 洛谷 P4128: 有色图
- ICPC 2014 鞍山 K: Colorful Toy
- HDU 6360: Kaleidoscope
- ICPC 2019 南昌 J: Summon
- ICPC 2019 银川 M: Crazy Cake

参考资料

- 近世代数引论/冯克勤,李尚志,章璞编著.-3版.-合肥: 中国科学技术大学出版社,2009.12
- 近世代数初步/石生明.-2版.-北京: 高等教育出版社,2006.3
- Contemporary Abstract Algebra/Joseph A. Gallian.-8th Edition
- 群论初探 - nosta - 博客园