Föreläsning 5 sammanfattning

Litteratur

Delar ur kurslitteraturen: 3.10, 4.1-4.7.

Funktioner av en s.v.

X är en s.v. med fördelningsfunktion $F_X(x)$ och täthetsfunktion $f_X(x)$. Y är en ytterligare s.v. definerad enligt $Y = g(X)$ där $g(\cdot)$ är en reel funktion till exempel $Y = X^2, Y = e^X, Y = \sqrt{X}$.

Om $g(\cdot)$ är en kontinuerlig, strikt monoton (växande/avtagande) funktion så kan den inversa funktionen definieras enl.

$$g^{-1}(y) = \{x : g(x) = y\}.$$

Med hjälp av denna omskrivning kan fördelningsfunktionen för Y uttryckas i termer av fördelningsfunktionen för X på följande vis:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(X \leq g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y)).$$

När man fått fram fördelningsfunktionen så kan den i sin tur deriveras vilket ger täthetsfunktionen eftersom att $\frac{d}{dy}F_Y(y) = f_Y(y)$.

En viktig detalj är huruvida $g(x)$ är *växande* eller *avtagande*. I föregående uttryck så är $g(x)$ *växande* och det är därför som vi i steget med omskrivningen till $g^-1(y)$ anger att $X \leq g^{-1}(y)$. Om $g(x)$ istället är avtagande så vänds olikheten och vi skriver istället

$$F_Y(y) = P(X \geq g^{-1}(y)) = 1 - F_X(g^{-1}(y)).$$

Hela processen kan sammanfattas som att vi vill ha inversa funktionen för veta i vilket intervall som den s.v. X kommer befinna sig i. Sedan använder vi fördelningsfunktionen för X till att definiera fördelningen för Y.

Den generella metoden för att få fram täthetsfunktionen från fördelningsfunktionen är

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right|.$$

Tvådimensionell s.v.

En tvådimensionell s.v. definieras enligt $(X, Y) = (X(\omega), Y(\omega))$ över utfallsrummet Ω och tar värden i R^2. En tolkning är att den s.v. (X, Y) associerar ett talpar till varje elemntarutfall i Ω och är alltså en funktion $\Omega \to R^2$.

(Simultan) fördelningsfunktion

Den simultana fördelningsfunktionen $F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$ där då händelsen A avser de talpar (u, v) som uppfyller $(u \leq x, v \leq y)$.

Diskret tvådimensionell s.v.

En tvådimensionell s.v. (X, Y) är diskret om både X och Y endast antar ett ändligt eller uppräkneligt oändligt antal värden. Vi förutsätter att dessa värden är icke-negativa heltal.

(Simultan) sannolikhetsfunktion

För en diskret s.v. (X, Y) definieras den simultana sannolikhetsfunktionen $p_{X,Y}(j, k)$ enligt

$$p_{X,Y}(j, k) = P(X = j, Y = k), \quad j = 0, 1, 2, ..., \quad k = 0, 1, 2, ...$$

Villkor:

- $0 \leq p_{X,Y}(j, k) \leq 1$
- $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} p_{X,Y}(j, k) = 1$, vilket överensstämmer med endimensionella s.v.

(Simultan) fördelningsfunktion

Den simultana fördelningsfunktionen för tvådimensionell diskret s.v. bestämms ur sannolikhetsfunktionen genom summering:

$$F_{X,Y}(x, y) = \sum_{j \leq k} \sum_{k \leq y} p_{X,Y}(j, k).$$

Tvådimensionell kontinuerlig s.v.

En tvådimensionell s.v. (X, Y) sägs vara *kontinuerlig* om det finns en funtion $f_{X,Y}(x, y)$ så att för alla mängder A gäller

$$P((X, Y) \in A) = \int \int_A f_{X,Y}(x, y) dx dy.$$

Funktionen $f_{X,Y}(x,y)$ kallas för den (simultana) täthetsfunktionen för den s.v. (X,Y).

Villkor:

- $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$ för alla x, y
- $\int\int_{R^2} f_{X,Y}(x,y)dxdy = 1$ dvs den totala volymen under *ytan*.

Fördelningsfunktionen fås genom integrering av täthetsfunktionen i sökta intervall:

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)dudv$$

Marginell fördelning

Om varje komponent tas för sig i en tvådimensionell s.v. så fås deras marginella fördelningar.

Exemepelvis så är den marginella sannolikhetsfunktionen för X i en *diskret* s.v. (X,Y):

$$p_X(j) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{X,Y}(j,k) \quad \text{(summering i y-led).}$$

Om (X,Y) är en kontinuerlig tvådimensionell s.v. så ges den marginella *täthetsfunktionen* för X av

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy$$

Oberoende s.v.

Om de två s.v. i en tvådimensionell s.v. (X,Y) är oberoende så gäller

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

för alla mängder A och B.

följdsats

De s.v. X och Y är oberoende omm

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y) \quad \text{för alla } x \text{ och } y,$$

eller

$$p_{X,Y}(j,k) = p_X(j)p_Y(k) \quad \text{för alla } j \text{ och } k, \text{för diskreta s.v.}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) \quad \text{för alla } x \text{ och } y, \text{ för kontinuerliga s.v.}$$

Fördelning för maximum och minimum

Om X_1 och X_2 är oberoende s.v. med fördelningsfunktioner $F_{X_1}(x)$ respektive $F_{X_2}(x)$ och $U = min(X_1, X_2)$ och $V = max(X_1, X_2)$ så gäller

$$F_U(u) = 1 - (1 - F_{X_1}(u))(1 - F_{X_2}(u)),$$

$$F_V(v) = F_{X_1}(v)F_{X_2}(v).$$

För fler än två s.v.

Om $X_1, ..., X_n$ är oberoende och *lika fördelade* med fördelningsfunktion $F_X(x)$ så har $Y = min_{i=1,...,n}(X_1, ..., X_n)$ och $Z = max_{i=1,...,n}(X_1, ..., Xn)$ fördelningsfuntionerna

$$F_Y(y) = 1 - (1 - F_X(y))^n \quad \text{och} \quad F_Z(z) = (F_X(z))^n.$$

Applikationer av min och max

Till exempel i system av flera komponenter som är parallellkopplade eller seriekopplade. Vid parallellkoppling så måste *minst en* av de seriekopplade komponenterna vara hela för att systemet ska fungera. Då vill man ta reda på Max-värdet för de enskilda komponenterna. Vid seriekopplingen måste *alla* komponenter vara hela för att systemet ska fungera och man vill därmed ha reda på komponenten med *minst* livslängd.