Common problems

Codin H

November 22, 2019

Kombinatorik

Urna med svarta och vita kulor

Urnmodeller kan appliceras på problem där det handlar om att välja ett visst antal element ur en mängd av objekt av olika typ. I urnan tänks då att man har kulor av olika färg. Enklaste fallet är då man endast har två olika färger; svarta och vita. Olika problem uppstår beroende på om man tar kulor med eller utan avseende till ordning eller med eller utan återläggning.

Utan ordning, utan återläggning

Applicering av denna modell är till exempel vid tillverkning av någon produkt där det finns en viss procentdel av de tillverkade enheterna som blir feltillverkade. Man kan ställa sig frågan vad sannolikheten är att man får k stycken feltillverkade enheter ifall man slumpvis väljer n stycken enheter.

I detta exempel så är man inte intresserad av ordningen för de valda enheterna. När man valt en enhet så lägger man inte heller tillbaks den i den totala mängden igen. Så man är alltså intresserad av ekvivalent urnmodell där kulor drages utan avseende till ordning och utan återläggning.

Rent matematiskt så kommer man i slutändan ha k stycken enheter som är feltillverkade och $n-k$ stycken enheter som är korrekt tillverkade.

Eftersom det är utan avseende till ordning så applicerar man binomialuttrycket för varje enskild grupp som representerar olika sätt att välja feltillverkade respektive korrekt tillverkade enheter utan avseende till ordning och utan återläggning. Med andra ord ur x tag y eller $\binom{x}{y}$. Där x representerar antalet enheter av den kategori som dras ur och y representerar antalet dragna enheter ur kategorin.

Om vi återgår till urnmodellen där det finns v stycken vita kulor och s stycken svarta kulor så finns det $\binom{v}{k}$ olika sätt att dra k stycken vita kulor samt $\binom{s}{n-k}$ olika sätt att dra $n-k$ stycken svarta kulor. För att ta reda på det totala antalet "gynsamma" utfall, alltså antalet sätt att dra k stycken vita och $n-k$ stycken svarta kulor vid dragning av n stycken kulor, så appliceras multiplikationsprincipen som säger att antalet sätt att utföra flera åtgärder är antalet sätt att utföra varje individuell åtgärd multiplicerade med varandra. Detta ger oss antalet sätt att välja de olika kulorna som matematiskt uttrycks $\binom{v}{k}\binom{s}{n-k}$.

Slutligen för att beräkna sannolikheten för händelsen att k stycken feltillverkade enheter väljs bland n stycken valda enheter så behöver vi veta det totala antalet utfall eftersom vi då kan applicera den klassiska sannolikhetsdefinitionen som uttryckligen säger att sannlikheten för att en händelse skall inträffa är antalet gynsamma utfall dividerat med det totala antalet utfall. Så den sista frågan vi behöver ställa oss är hur många sätt man kan välja n stycken kulor ur en mängd som sammanlagt innehåller $s + v$ stycken kulor. En liknande frågeställning har vi redan ställt tidigare i uppgiften. Antalet sätt att välja y element ur en mängd med x element är $\binom{x}{y}$. Så det totala antalet utfall blir $\binom{s+v}{n}$. Slutliga uttrycket för att beräkna sannolikheten blir följdaktligen

$$\frac{\binom{v}{k}\binom{s}{n-k}}{\binom{v+s}{n}}$$

.