Föreläsning 3 sammanfattning

Litteratur

I denna föreläsning ingår följande delar från kursboken: 3.2-3.4

Stokastiska variabler

När ett slumpförsök ger upphov till numeriskt resultat som exempelvis antal eller något kontinuerligt värde sägs resultatet vara en slumpvariabel, eller stokastisk variabel. Denna definieras som $X(\omega)$ vilket är en reelvärd funktion definierad på utfallsrummet enl. $X : \Omega \to R^1$.

Det finns två typer av s.v. - diskreta och kontinuerliga.

Diskreta s.v.

Diskreta s.v. antar ett ändligt eller uppräkneligt oändligt antal värden

Sannolikhetsfunktionen

Sannolikhetsfunktionen betecknas enl.

$$p_X(k) = P(X\text{"antar värdet" k}) = P(X = k), \quad k = k_1, k_2, \ldots$$

Betecknar sannolikheten för den s.v. X att anta värdet k.

Villkor:

- $0 \leq p_X(k) \leq 1$ för alla k
- $\sum_{\text{alla } k} p_X(k) = 1$

Likformig fördelning

Uppstår då en s.v. X har sannolikhetsfunktionen

$$p_X(k) = \frac{1}{m}, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Detta är exempelvis fallet vid tärningskast. Så om ett slumpförsök med tärning ger kronor lika med antalet prickar på tärningen så är sannolikheten för att få 1, 2, 3, 4, 5 eller 6 kronor lika stor. Nämligen $\frac{1}{6}$.

Tvåpunktsfördelning

Om en s.v. X antar endast två värden a eller b med sannolikheterna p och $(1-p)$, sägs X vara tvåpunktsfördelad.

Detta uppstår exempelvis vid experiment där experimentet lyckas med en viss sannolikhet p. Den tvåpunktsfördelade s.v. X antar då exempelvis antingen värdet 1 eller 0.

I specialfallet där $(X = 1, 2)$ så sägs X vara Bernoulli-fördelad. Den fördelningen har följande fördelning: $X \in Be(p)$.

För-första-gången fördelning

om en s.v. X har sannolikhetsfunktionen

$$p_X(k) = (1-p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, \ldots$$

där $0 < p < 1$ sägs X vara för-första-gången fördelad.

Beteckning för denna fördelning är $X \in \mathit{ffg}(p)$.

Exempel på när denna fördelning uppträder är vid tärningskast där man räknar antalet kast tills den första sexan uppträder.

Binomialfördelning

En s.v. X som har sannolikhetsfunktionen

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

där $0 < p < 1$ sägs vara binomialfördelad.

Detta betecknas som $X \in Bin(n, p)$.

Exempel på en binomialfördelad s.v. är antalet 6:or i 20 oberoende tärningskast. I detta fall används $Bin(20, \frac{1}{6})$.

Poisson-fördelning

En s.v. X som har sannolikhetsfunktionen

$$p_X(k) = e^{\mu} \frac{\mu^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

sägs vara Poissonfördelad. Denna fördelning betecknas $X \in Po(\mu)$.

Används för att modellera företeelser som inträffar oberoende av varandra. Till exempel att en partikel sönderfaller i ett radioaktivt preparat. Kallas ibland för små talens lag. Approximationen är rimlig om $p < 0.1$ och $n > 10$.

Väntevärde och varians för diskreta s.v.

Väntevärde för en diskret s.v. X definieras av

$$\mu_X = E(X) = \sum_{allak} k p_X(k).$$

Väntevärdet kan tolkas som lägesmåttet som anger var sannolikhetsmassan ligger i genomsnitt. Eller tyngdpunkten hos massfördelningen på x-axeln.

I senare avsnitt studeras funktioner av s.v. och väntevärden utav dessa är intressanta.

Väntevärdet för en s.v. Y där $Y = g(X)$ för en reellvärd funktion $g(\cdot)$ och en s.v. X är

$$E(Y) = \sum_{\text{alla k}} g(k) p_X(k).$$

Spridningsmått

Det vanligaste spridingsmåtten är varians och standardavvikelse. Dessa ger en uppfattning om hur utfallen sprider sig kring masscentrat för sannolikhetsfunktionen.

Varians

Variansen definieras enligt förljande

$$\sigma^2 = E((X - \mu)^2) = \sum_{\text{alla k}} (k - \mu)^2 p_X(k).$$

Standardavvikelsen

Standardavvikelsen är kvadratroten av variansen:

$$D(X) = \sqrt{V(X)}$$