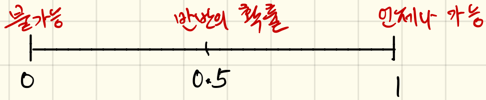
4장 확률 계산하기

1. 확률과 확률론

- 확률 : 어떤 사건이 발생할 가능성
- 확률론 이란?
  - 데이터로부터 얻은 정보를 활용하여 어떤 확률을 측정하고 미래를 예측하는 이론
- 어떤 사건은 다른 사건에 비해 발생할 가능성이 높다. 따라서 확률론을 활용하여 발생할 사건들에 대해 대비하고 어떻게 활용할 수 있는지를 준비할 수 있음.

p.172

- 확률값 : 0과 1 사이의 실수



- 예제 : 카지노 룰렛 게임.

P.169

2. 룰렛게임

- 크루피에 (게임 진행자) 가 공을 던지기 전에 공이 들어갈 구멍을 맞추는 게임.
- 38 개의 구멍
  - 1 에서 36 까지 번호가 붙은 구멍
  - 0 과 00 으로 표시된 구멍
- 각 구멍은 빨강 또는 검정으로 색칠되어 있음.
- 0 과 00 구멍은 초록색이며 "꽝" 역할 수행.
- 질문 : 어느 사건에 베팅할까요?

P. 175

3. 룰렛 확률 구하기 예제

예) 구슬이 7번 구멍에서 멈출 확률

$$= \frac{1}{38} = 0.026 \quad (즉,\ 2.6\%)$$

4. 확률 구하기 일반화

- 사건 A가 일어날 확률 : $P(A)$

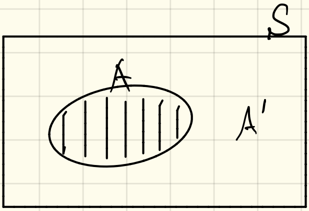
$$P(A) = \frac{\text{사건 A가 일어날 경우의 수}}{\text{전체 경우의 수}} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

  - S : 표본공간 (모든 가능한 사건들의 공간)
- 주의사항
  - 표본공간 S 의 정확한 의미는 상황과 조건에 의존
  - 나중에 조건부확률을 배울 때에 좀 더 자세히 설명될 것임

p.176

5. 벤 다이어그램 활용

• 표본공간 S와 사건 A와의 관계를 벤 다이어그램을 이용하여 나타낼 수 있음.



• A의 여사건 (A') : A가 일어나지 않을 사건

$$P(A') = 1 - P(A)$$

p.177

• **연습문제**

- $P(9) = \frac{1}{38}$
- $P(\text{초록색}) = \frac{2}{38}$
- $P(\text{검정색}) = \frac{18}{38}$
- $P(38) = 0$

6. 두 사건의 합과 곱

• 질문

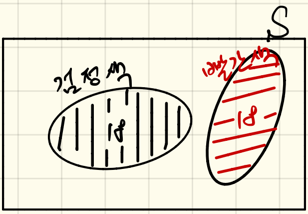
- 사건 A 또는 사건 B가 발생할 확률은?
- 사건 A와 사건 B가 동시에 발생할 확률은?

p.182

• 예①

- A : 검정색
- B : 빨간색

$$P(A \text{ 또는 } B) = \frac{36}{38} = \frac{18}{38} + \frac{18}{38} = P(A) + P(B)$$



A와 B는 서로 배반임

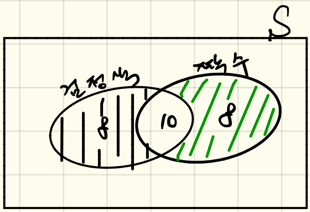
두 사건이 동시에 발생하지 않음

p.187

예②

- A : 검정색
- B : 짝수

$$P(A \text{ 또는 } B) = \frac{26}{38} \neq \frac{18}{38} + \frac{18}{38} = P(A) + P(B)$$



A와 B는 서로 배반 아님

두 사건이 동시에 발생하는 경우 존재

- 사건의 합 확률 계산

$$P(A \text{ 또는 } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ 이고 } B)$$

⇒ 예② 의 확률

$$P(A \text{ 또는 } B) = \frac{18}{38} + \frac{18}{38} - \frac{10}{38}$$

$$= \frac{26}{38}$$

이유 : $P(A \text{ 이고 } B) = \frac{10}{38}$

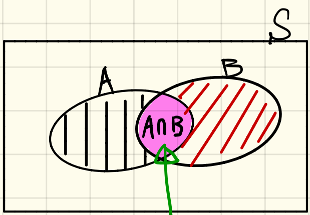
룰렛 게임 그림에서
직접 확인 가능.

- 용어의 기호화

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

합집합 기호
(또는, 혹은)

교집합 기호
(이고, 그리고)



중첩되어서 두 번 더해짐.

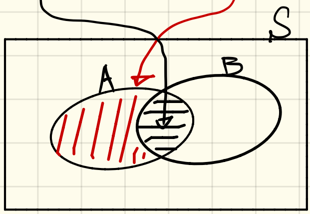
* 주의 : A와 B가 서로 배반사건인 경우
$P(A \cap B) = 0$ 이다.
따라서,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

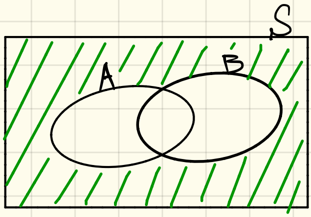
p. 191

7. 벤 다이어그램 연습

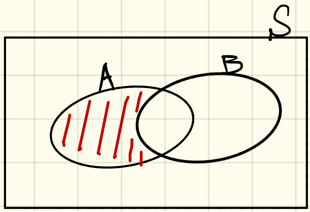
- $P(A \cap B) + P(A \cap B')$



- $P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B)$



- $P(A \cup B) - P(B) = P(A \cap B')$



p.195 ~ 196

8. 조건부 확률

- $P(A|B)$: 특정 사건 B가 발생한다는 조건 하에서 다른 사건 A가 발생할 확률

- 예 : 룰렛게임에서 공이 검정색 구멍에 들어간다는 전제 하에 짝수 구멍에 들어갈 확률은?

  사건 A : 공이 짝수 구멍에 들어간다.

  사건 B : 공이 검정색 구멍에 들어간다.

  ⇒ 답 : $P(A|B) = \frac{10}{18}$ ← 짝수 구멍의 개수 / 검정색 구멍의 개수

  주의 : - 분모에 사용되는 표본공간이 달라졌다.

  - 따라서, $P(A|B) \neq P(A \cap B)$

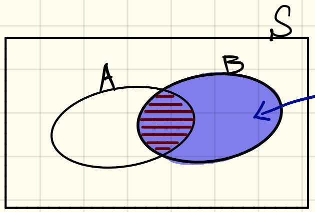
- 일반적으로 아래 식이 성립한다.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

이유 :

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- 벤 다이어 그램으로 보는 조건부 확률



P(A|B)를 계산할 때 이곳이 표본공간이 됨. 즉, S가 아님.

p. 213

9. 베이스 정리

- 조건부 확률 계산을 도움
- 불확실한 상황에서 의사결정 문제를 수학적으로 다룰 때 매우 중요한 도구 제공
- 주어진 확률을 이용하여 미래의 확률을 계산할 때 활용.

$$p(A|B) = \frac{P(A) * P(B|A)}{P(A) * P(B|A) + P(A') * P(B|A')}$$

p.214~215

예) 게임회사에서 자체 개발한 게임 두 개를 테스트하기 위해 지원자를 모집하여 아래의 결과를 얻었음.

- 테스트 지원자 중 80%는 게임1 선택
- 〃 〃 〃 20%는 게임2 〃
- 게임1을 테스트한 사람 중에 60%가 만족
- 게임2를 〃 〃 70%가 만족

질문: 테스트 지원자 중에 임의로 한 사람을 선택하여 게임 만족여부를 물었더니 그렇다고 하였음.
이때 그 사람이 게임2를 선택했었을 확률은?

힌트: 베이스 정리 활용

해법: 베이즈 정리를 활용하기 위해 두 개의 사건 A와 B를 정의해야 함.

사건 A: 게임2 선택

사건 B: 게임에 만족

⇒ $P(A|B)$를 계산해야 함.

먼저 아래 사실을 확인할 수 있다.

- A': 게임1 선택
- $P(A') = 0.8$
- $P(A) = 0.2$
- $P(B|A') = 0.6$
- $P(B|A) = 0.7$

이제 베이즈 정리를 이용할 수 있다.

$$P(A|B) = \frac{P(A) * P(B|A)}{P(A) * P(B|A) + P(A') * P(B|A')}$$

$$= \frac{0.2 * 0.7}{0.2 * 0.7 + 0.8 * 0.6}$$

$$= \frac{0.14}{0.62} = \frac{7}{31} = 0.226$$

- 연습문제 (책에 없음)

어느 병원에서 암진단에 대한 아래의 자료를 갖고 있다.

- 암진단 검사를 받은 사람 중에 암에 걸린 확률: 20%
- 암에 걸린 사람 중에 암진단 결과가 양성인 확률: 90%
- 암에 걸리지 않았지만 암진단 결과가 양성인 확률: 30%

질문: 암진단 결과가 양성이지만 실제로는 암이 아닐 확률?

해법: 베이즈 정리를 이용하기 위해 사건 A와 B를 다음과 같이 정의한다.

- 사건 A: 암에 걸리지 않았음.
- 사건 B: 암진단 양성

⇒ - A′: 암에 걸렸음.
- $P(A') = 0.2$

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A) * P(B|A)}{P(A) * P(B|A) + P(A') * P(B|A')}$$

$$= \frac{0.8 * 0.3}{0.8 * 0.3 + 0.2 * 0.9}$$

$$= \frac{0.24}{0.24 + 0.18} = \frac{24}{42} = \frac{4}{7} = 0.57$$

결론: 진단 결과를 전혀 믿을 수 없는 수준임.
사실상 찍는 수준과 다르지 않음.
⇐ 이유: $P(B|A)$가 너무 높음.

p.221~223

10. 종속사건 대 독립사건

- 두 개의 사건 A와 B가 서로 영향을 주면 두 사건 사이에 종속관계가 성립한다.
- 반면에 서로 영향을 주지 않으면 서로 독립이라고 말한다.

- 종속여부 확인 방법 ①
  - A와 B가 서로 종속 $\Leftrightarrow$ $P(A|B) \neq P(A)$
  - A와 B가 서로 독립 $\Leftrightarrow$ $P(A|B) = P(A)$

* 주의 : $P(A|B) = P(A)$ 이면 $P(B|A) = P(B)$ 이다.

- 종속여부 확인 방법 ②
  - A와 B가 서로 종속 $\Leftrightarrow$ $P(A \cap B) \neq P(A) * P(B)$
  - A와 B가 서로 독립 $\Leftrightarrow$ $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$

예) 룰렛 게임에서 아래 두 사건의 종속/독립 여부 확인하기

- 사건 A: 짝수 구멍에 멈춘다.
- 사건 B: 검정색 구멍에 멈춘다.

힌트: 공을 한 번 굴리는 경우와 두 번 굴리는 경우에 따라 종속/독립 여부 달라짐.

해답:

p.221

- 경우 ①: 공을 한 번 굴리는 경우

P (짝수 | 검정색)

= 공이 검정색 구멍에 들어갔다는 전제하에 짝수 구멍일 확률

$= \frac{10}{18}$

$\neq \frac{18}{38} = P(\text{짝수})$

따라서, 사건 A와 사건 B는 서로 종속이다.

p.222

주의: 책과 내용이 조금 다름.

- 경우 ②: 공을 두 번 굴리는 경우

P (짝수 | 검정색)

= 첫 째 공이 검정색 주머니에 들어갔다는 전제하에 두 번째 공이 짝수 주머니에 들어갈 확률

$= \frac{10}{38} = 0.474$

$= P(\text{짝수})$

따라서, 사건 A와 사건 B는 서로 독립이다.

• 연습문제

(책에 없음)

열 장의 카드가 있다. 그중에 다섯 장은 검은색이고 나머지 다섯 장은 빨간색이다.
이제 카드 두 장을 한 장씩 임의로 선택한다.
아래 두 사건의 종속/독립 여부를 판단하라.

- 사건 A : 뽑힌 카드는 검정색이다.
- 사건 B : 뽑힌 카드는 빨간색이다.

<u>해답</u> : 카드를 뽑는 방식에 따라 종속/독립 여부가 달라진다.

- 먼저, $P(A) = P(B) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ 임을 확인한다.
- <u>방식 ① : 뽑은 카드를 다시 넣고 섞는 경우</u>

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{5}{10} = P(A)$$

그리고

$$P(A \cap B) = \frac{5}{10} * \frac{5}{10} = P(A) * P(B)$$

- <u>방식 ② : 뽑은 카드는 제외하고 다시 뽑을 경우</u>

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{5}{9} \neq \frac{5}{10} = P(A)$$

그리고

$$P(A \cap B) = \frac{5}{10} * \frac{5}{9}$$
$$\neq \frac{5}{10} * \frac{5}{10} = P(A) * P(B)$$