P-NP 문제

주요 내용

- 문제 난이도
- **P** 대 **NP**
- **NP**-완전과 **NP**-난해

문제 난이도

- 문제의 난이도: 문제를 해결하는 알고리즘이 가질 수 있는 **가장 낮은 계산 복잡도**
- 행렬 곱셈 문제의 난이도: $\Omega(n^2)$
- 주어진 문제의 난이도를 항상 확인할 수 있는 것은 아님.

다항 시간 알고리즘

- **다항 시간**polynomial time 알고리즘: 최악 시간 복잡도가 어떤 다항식 $p(n)$에 대해 다음이 성립

$$W(n) \in O(p(n))$$

- 예제

$$2n \qquad 3n^3 + 4n \qquad 5n + n^{10} \qquad n \lg n$$

- $n \lg n$ 또한 다항 시간 복잡도 함수로 간주

- 최악 시간 복잡도가 아래와 같은 알고리즘은 다항 시간 알고리즘이 아님.

$$2^n \qquad 2^{0.01n} \qquad 2^{\sqrt{n}} \qquad n!$$

난이도 분류

첫째, 다항 시간 알고리즘이 존재하는 문제

- 정렬된 배열을 대상으로 검색: $\Theta(\lg n)$
- 행렬 곱셈: $\Theta(n^{2.3728639})$

둘째, 다루기 힘들다고 증명된 문제

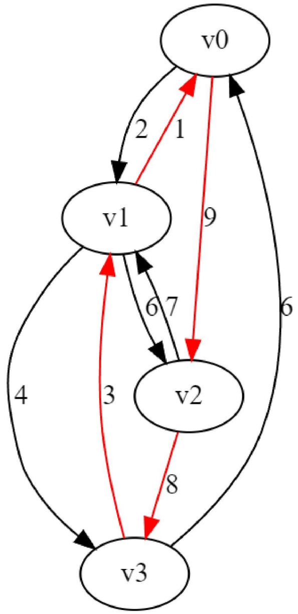
- 그래프의 모든 경로를 다 출력해야 하는 문제처럼 지수승 만큼의 출력을 요구하는 문제
- 정지문제Halting problem 처럼 지수승 이상의 출력을 요구하진 않지만 다항 시간 내에 풀 수 없음이 증명된 문제

셋째, 다항 시간 알고리즘이 알려지지 않았지만 다항 시간 알고리즘이 존재하지 않는다는 증명도 없는 문제

- 0-1 배낭채우기 문제
- 외판원 문제
- m-색칠하기 문제 ($m > 2$)

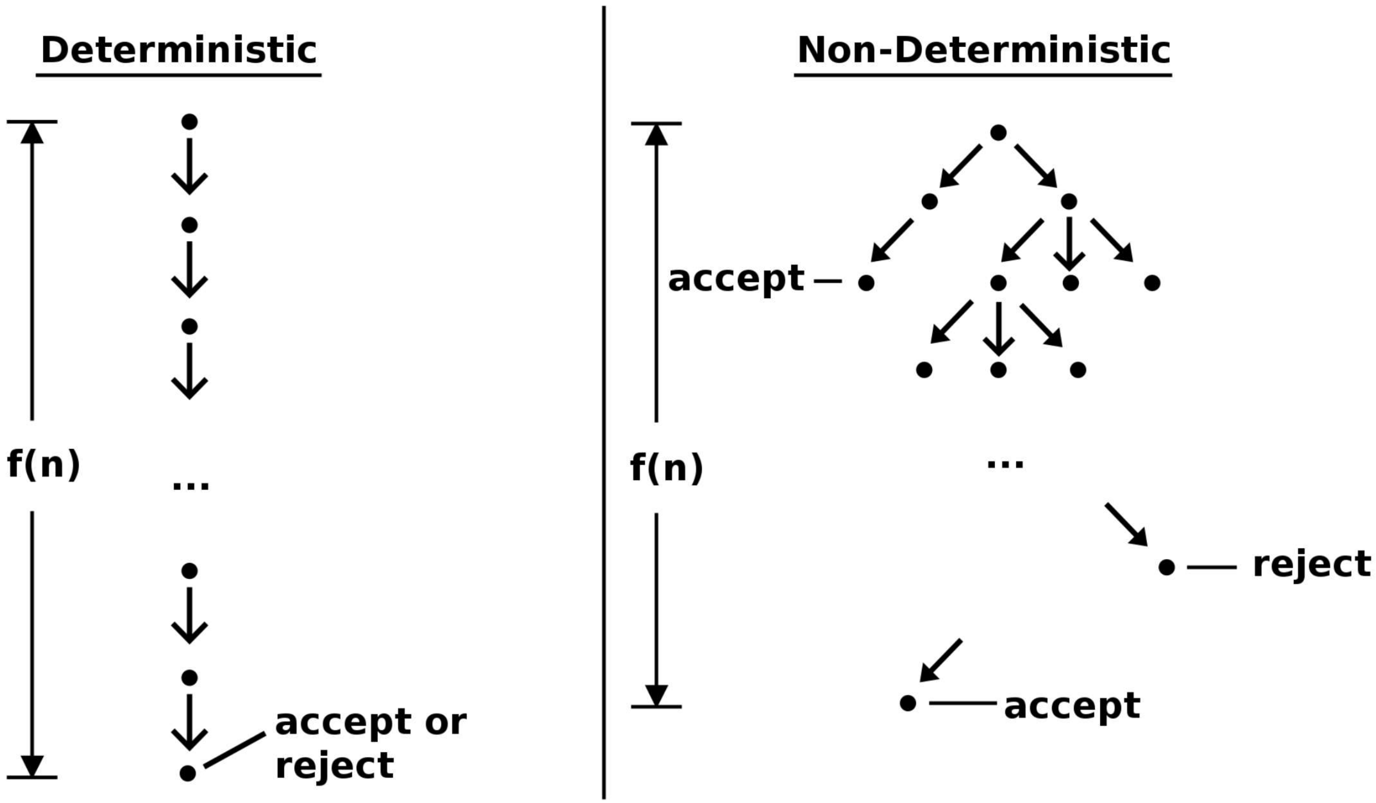
외판원 문제

- 일주 경로 1: `v0 -> v1 -> v2 -> v3 -> v0`
- 일주 경로 2: `v0 -> v2 -> v1 -> v3 -> v0`
- 일주 경로 3: `v0 -> v2 -> v3 -> v1 -> v0`
- 동적계획법을 이용한 알고리즘: $O(n^2\,2^n)$



P 대 NP

결정론적 vs. 비결정론적 튜링 기계



비결정론적 알고리즘

- 비결정론적 튜링 기계로 구현될 수 있는 알고리즘
- 비결정론적 다항 시간 알고리즘: 다항 시간 계산 복잡도를 갖는 비결정론적 알고리즘
- (결정론적) 튜링 기계로 구현될 수 있는 알고리즘: 결정론적$_{\text{deterministic}}$ 알고리즘

집합 P

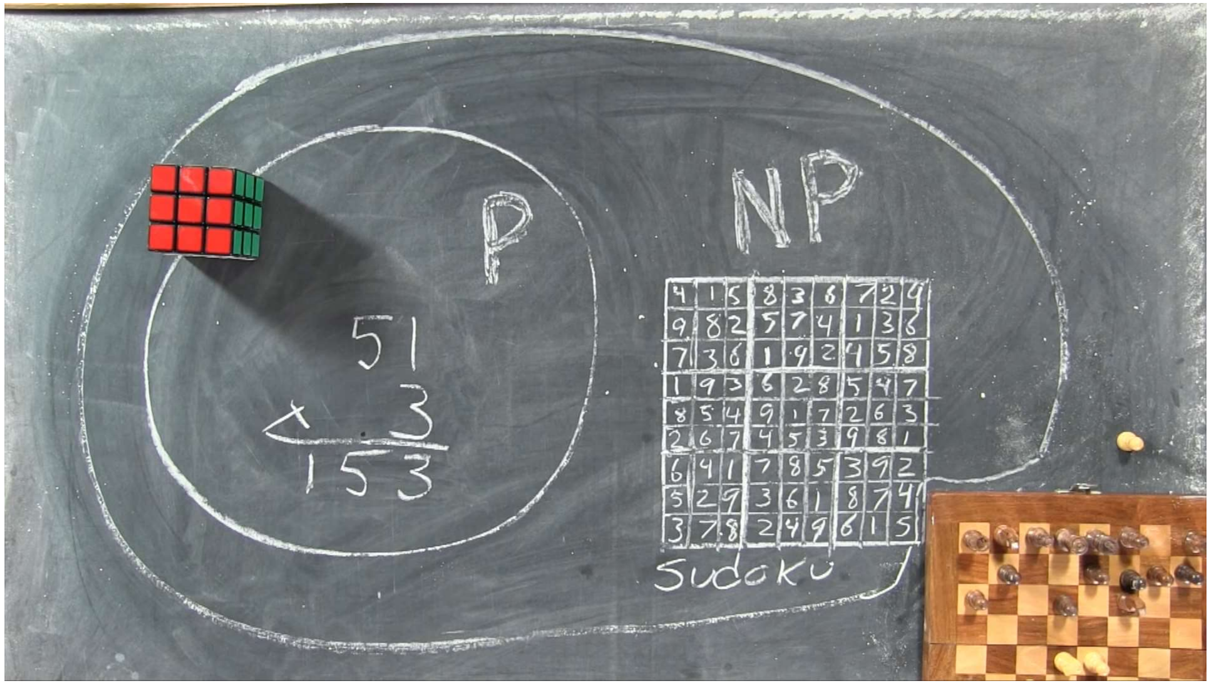
- **P**: 다항 시간 알고리즘으로 해결 가능한 모든 문제의 집합
    - 탐색 알고리즘은 대부분 **P**에 포함됨.
- 수도쿠 문제, 외판원 문제가 집합 **P**에 속하는지 여부는 아직 모름.
- 두 문제에 대해 "다항 시간 알고리즘이 존재하지 않는다" 라는 주장 또한 아직 증명되지 않았음.

집합 NP

- **NP**: 비결정론적 다항 시간 알고리즘으로 진위여부를 해결할 수 있는 문제들의 집합
- 해당 알고리즘이 문제를 제대로 해결하는지 여부를 검증하는 데에 다항 시간이 요구되는 알고리즘
- 예제: 수도쿠 문제, 외판원 문제, 소인수분해 문제
    - 문제에 대한 답이 제시되었을 때 해당 답이 제대로 된 해답인지 여부를 판단하는 일은 다항 시간 내에 판단할 수 있음

P-NP 문제

- **P** 에 속하는 문제는 모두 **NP**에 속함
- **P** 와 **NP**가 동일한지 여부에 대해서는 아직 답을 모름. 100만 달러의 상금이 걸린 **밀레니엄 문제**중에 하나.



NP-완전과 NP-난해

다항시간 다대일 축소 변환

- 문제 A를 문제 B로 다항시간 다대일 축소 변환 가능: 문제 A를 문제 B로 변환하는 다항시간 변환 알고리즘이 존재
- 문제 B를 다항 시간 내에 해결할 수 있다면 문제 A도 다항 시간 내에 해결할 수 있음의 의미함.

NP-완전NP-complete

다음 두 조건을 만족하는 문제 B를 **NP-완전**NP-complete이라 한다.

- **NP**에 속한다.
- **NP**에 속하는 임의의 다른 문제 A를 다항시간 내에 B의 문제로 축소 변환하기가 가능하다.

- 외판원 문제, 0-1 배낭채우기 등등

- **NP-난해**NP-hard 문제: **NP**-완전 문제만큼 다루기 어려운 문제

P-NP 문제의 현재 상태

- 하나의 **NP**-완전 문제가 **P**에 속한다는 것이 입증되면 **P** = **NP**가 성립. 하지만 아직 미해결.