

되추적 기법

# 주요 내용

- 제약 충족 문제
- 되추적 기법
- $n$ -여왕말 문제
- 그래프 색칠하기

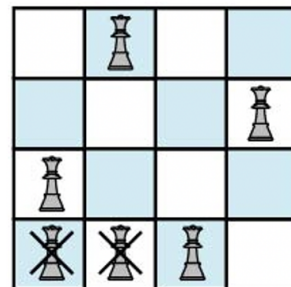
# 제약 충족 문제

- 여러 개의 대상 각각에 할당할 값을 특정 도메인(영역)에서 정해진 제약 조건에 따라 선택하는 문제
- 예제:  $n$ -여왕말 문제

## 4-여왕말 문제

- 여왕말: 체스판에서 상하좌우, 대각선 등 임의로 움직일 수 있음
- 4-여왕말 문제
  - (대상) 변수: 1번부터 4번까지 이름이 붙은 네 개의 여왕말
  - 도메인: 4x4 모양의 체스판에 포함된 1번 열부터 4번 열
  - 제약 조건: 서로 다른 두 개의 여왕말이 하나의 행, 열, 또는 대각선 상에 위치하지 않음

제약 조건 충족 여부



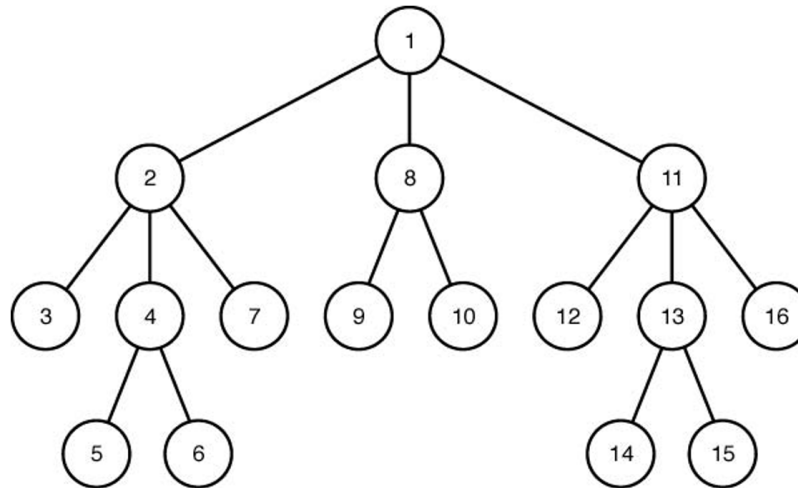
# 되추적 기법

- 제약 충족 문제를 해결하는 기법
- 백트래킹<sup>backtracking</sup>으로 불리기도 함
- 많은 제약 충족 문제가 제약 조건만 서로 다를 뿐 동일한 되추적 알고리즘으로 해결 가능

## 되추적 기법 관련 개념

- 깊이 우선 탐색
- 상태 공간 트리
- 노드의 유망성
- 가지치기

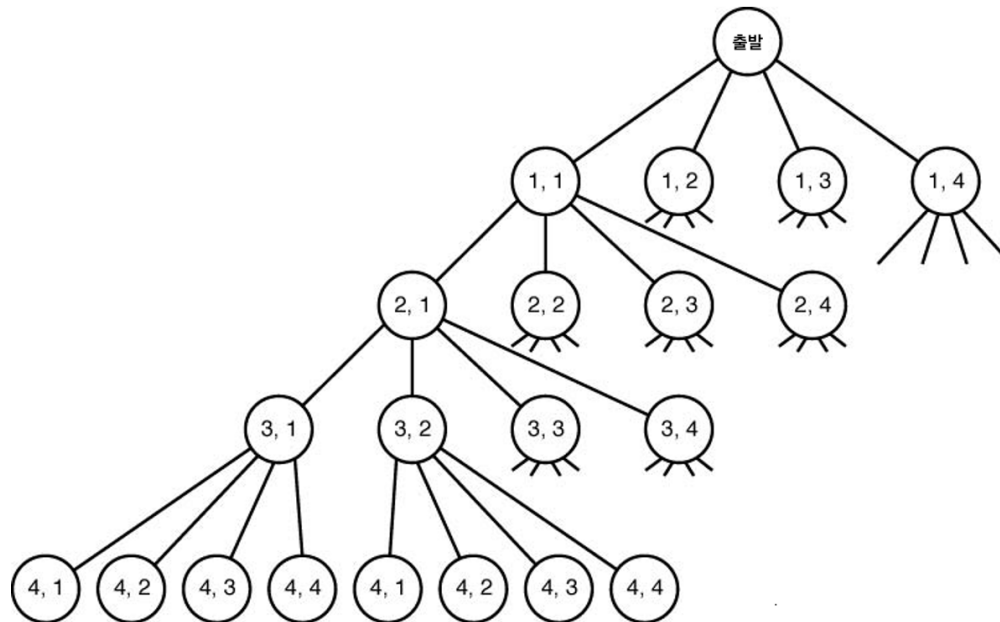
## 깊이 우선 탐색





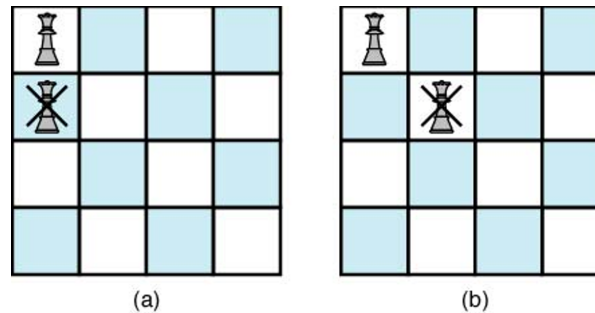
## 상태 공간 트리

- (대상) 변수가 가질 수 있는 모든 값으로 구성된 트리
- 예제: 4x4 로 이루어진 체스판에 네 개의 체스 여왕말을 놓을 수 있는 위치를 노드로 표현한 상태 공간 트리
  - 루트: 출발 노드이며 여왕말의 위치와는 무관함.
  - 깊이  $k$ 의 노드:  $k$  번째 여왕말이 놓일 수 있는 열 위치



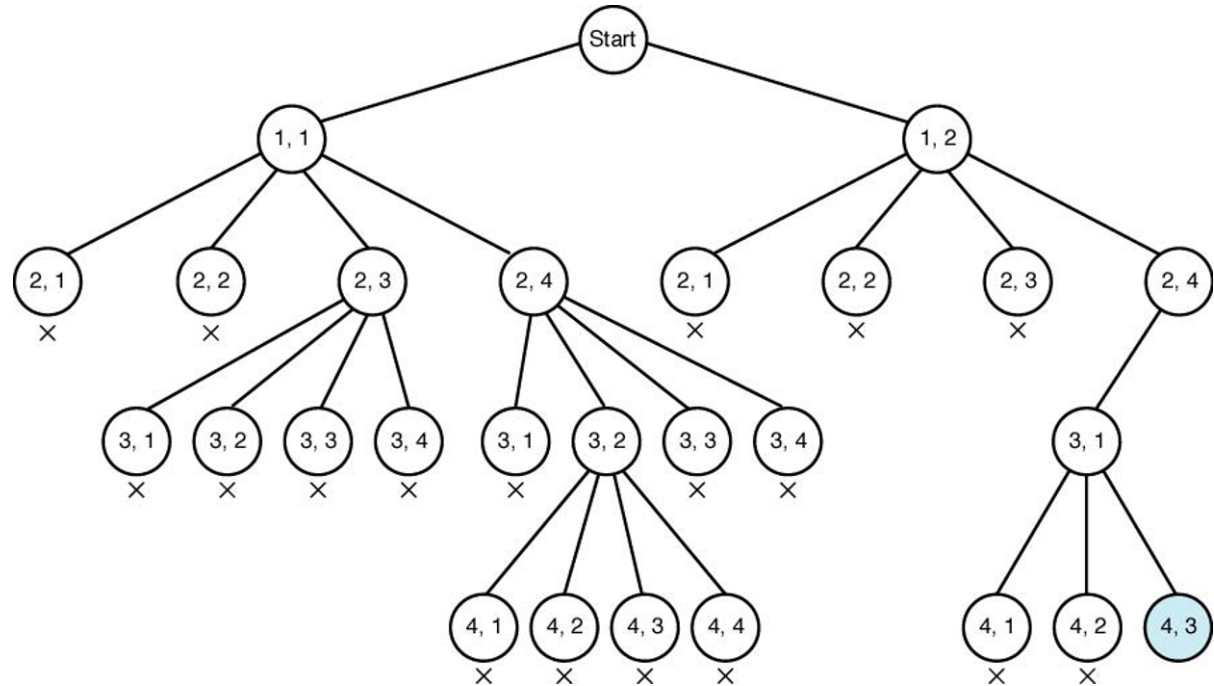
## 노드의 유망성

- 지정된 제약 조건을 만족시키는 노드
- 예제: 아래 그림 참고.
  - 첫째 여왕말의 위치에 따라 둘째 여왕말이 놓일 수 있는 위치에 해당하는 노드의 유망성이 결정됨
  - 둘째 여왕말에 대해 1번, 2번 칸에 해당하는 노드는 유망하지 않음

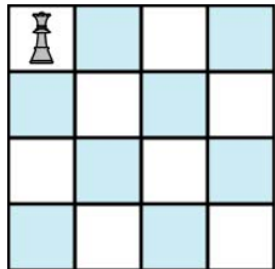


# 가지치기

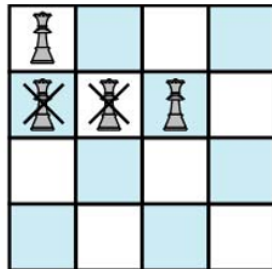
- 특정 노드에서 시작되는 가지를 제거하기
- 예제: 4x4 로 이루어진 체스판의 상태 공간 트리에서 유망하지 않은 노드를 가지치기한 결과



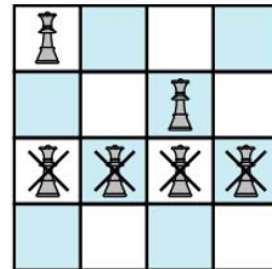
## 4-여왕말 문제 되추적 알고리즘



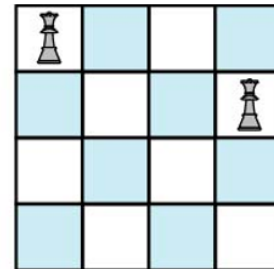
(a)



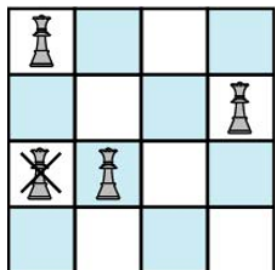
(b)



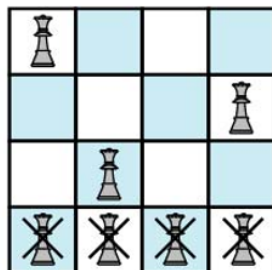
(c)



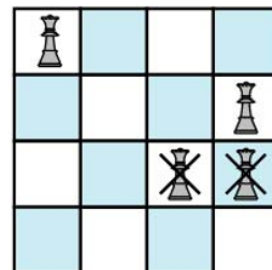
(d)



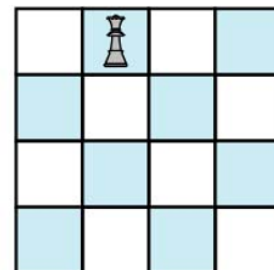
(e)



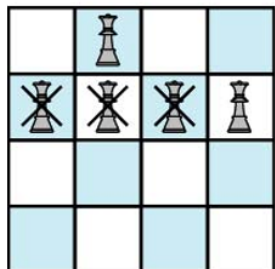
(f)



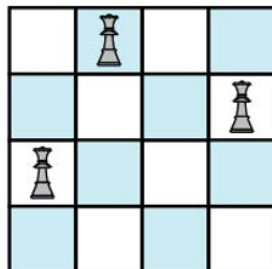
(g)



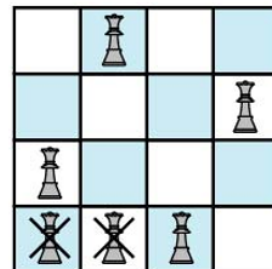
(h)



(i)



(j)



(k)

## 되추적 알고리즘 vs. 깊이 우선 탐색

- 4-여왕말 문제 해결 알고리즘: 되추적 알고리즘 대 깊이 우선 탐색
- 깊이 우선 탐색 알고리즘: 155 개의 노드 탐색
- 되추적 알고리즘: 27개의 노드 탐색

# n-여왕말 문제

- (대상) 변수: 1번부터 n번까지 이름이 붙은 n 개의 여왕말
- 도메인:  $n \times n$  모양의 체스판에 포함된 1번부터 n번 열
- 제약 조건: 서로 다른 두 개의 여왕말이 하나의 행, 열, 또는 대각선 상에 위치하지 않음

## 예제: 8-여왕말 문제

```
In [1]: from collections import defaultdict

variables = range(1, 9)

domains = defaultdict(list)
columns = range(1, 9)
for var in variables:
    domains[var] = columns
```

```
In [2]: domains
```

```
Out[2]: defaultdict(list,
                    {1: range(1, 9),
                     2: range(1, 9),
                     3: range(1, 9),
                     4: range(1, 9),
                     5: range(1, 9),
                     6: range(1, 9),
                     7: range(1, 9),
                     8: range(1, 9)})
```

## 유망성 판단

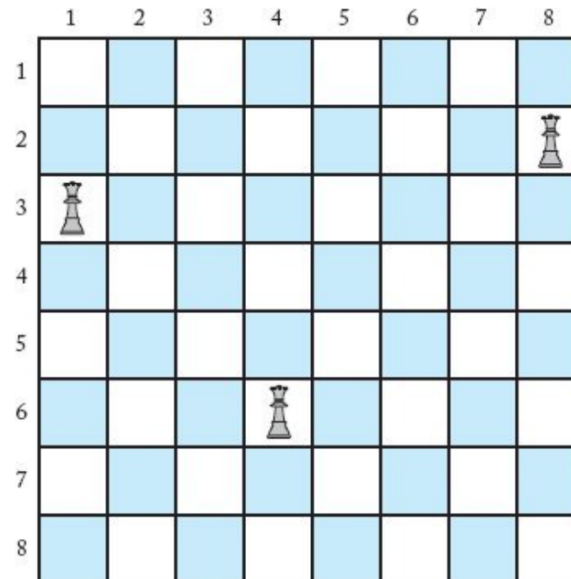
위치가 이미 정해진 여왕말들을 대상으로 다음 세 개의 제약 조건이 성립함을 확인한다.

- 동일한 행에 위치하지 않기: 각각의 여왕말이 다른 행에 위치되도록 하기에 알고리즘이 작동하기에 자연스럽게 처리됨.
- 동일한 열에 위치하지 않기: 서로 다른 키에 대해 동일한 값이 사용되지 않도록 해야 함.



- 동일한 대각선 상에 위치하지 않기: 두 개의 여왕말 `q1`, `q2` 가 동일한 대각선 상에 위치하려면 행과 열의 차이의 절댓값이 같아야 함(아래 그림 참고. 아래 식에서 예를 들어 `q1r` 과 `q1c` 는 각각 `q1` 이 위치한 행과 열의 좌표를 가리킴.

$$\text{abs}(q1r - q2r) == \text{abs}(q1c - q2c)$$



```
In [3]: def promissing_queens(assignment=defaultdict(int)):

    # q1: 모든 여왕말 대상으로 유망성 확인
    for q1r, q1c in assignment.items(): # q1의 행과 열

        # q2 = 아랫쪽에 자리한 여왕말들과 함께 제약 조건 성립 여부 확인
        # q1r과 q2r은 자연스럽게 다름
        for q2r in range(q1r + 1, len(assignment) + 1):
            q2c = assignment[q2r]
            if q1c == q2c: # 동일 열에 위치?
                return False
            if abs(q1r - q2r) == abs(q1c - q2c): # 동일 대각선상에 위치?
                return False

    # 모든 변수에 대해 제약조건 만족됨
    return True
```

## 되추적 함수 구현

- 지금까지 설명한 내용을 재귀 함수로 구현
- 재귀는 새로운 여왕말을 위치시킬 때마다 호출

```
In [4]: def backtracking_search_queens(num_queens, assignment=defaultdict(int)):

    variables = range(1, num_queens+1)
    domains = defaultdict(list)

    columns = range(1, num_queens+1)
    for var in variables:
        domains[var] = columns

    if len(assignment) == len(variables):
        return assignment

    unassigned = [v for v in variables if v not in assignment]
    first = unassigned[0] # 다음 대상 여왕말

    for value in domains[first]:
        local_assignment = assignment.copy()
        local_assignment[first] = value

        if promising_queens(local_assignment):
            result = backtracking_search_queens(num_queens, local_assignment)

            if result is not None:
                return result

    return None
```

## n-여왕말 문제 되추적 알고리즘의 시간 복잡도

- n 개의 여왕말이 주어졌을 때 상태 공간 트리에 포함된 탐색 대상 노드의 수

$$1 + n + n^2 + n^3 + \cdots + n^n = \frac{n^{n+1} - 1}{n - 1}$$

- 이보다 더 효율적인 알고리즘은 아직 알려지지 않았다.

# 그래프 색칠하기

준비중 ...