# 시간 복잡도

# 주요 내용

- 알고리즘 분석
- 시간복잡도와 "Big-O" 표현식

# 알고리즘 vs. 프로그램

- 알고리즘
  - 주어진 **문제를 해결하기 위한 절차**의 단계별 설명서.
  - 주어진 문제의 모든 경우를 해결할 수 있어야 함.
  - 특정 프로그래밍언어 또는 프로그램 구현 방식과 무관함
  - 주어진 문제를 해결하는 여러 종류의 알고리즘 존재 가능

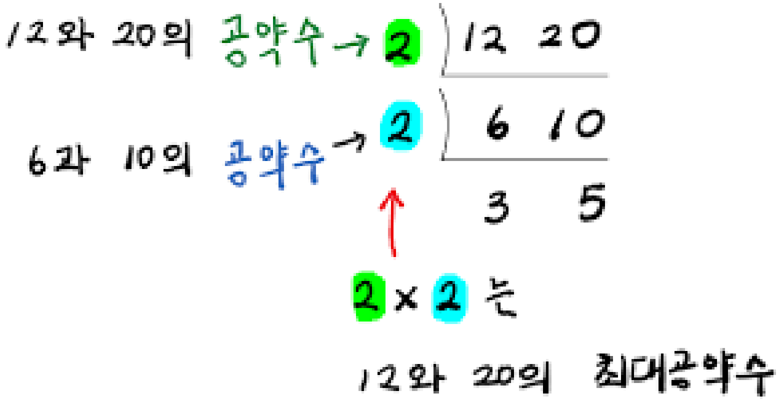
- (컴퓨터) 프로그램
  - 주어진 문제를 해결하기 위해 **특정** 프로그래밍언어로 작성되어 실행이 가능한 코드
  - 사용하는 프로그래밍언어와 작성자에 따른 여러 종류의 프로그램 존재
  - 프로그램의 핵심은 문제해결을 위한 특정 알고리즘!
  - 동일한 알고리즘을 이용하더라도 다르게 보이는 프로그램 구현 가능

# 문제와 알고리즘

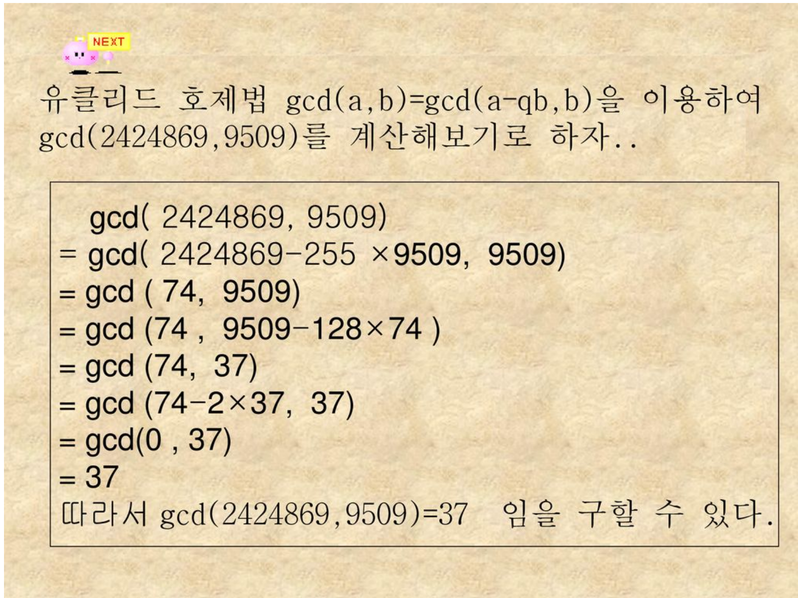
- '두 정수의 최대공약수 구하기' **문제**를 해결하는 **알고리즘**
    - 임의의 두 정수에 대해 동일한 방식으로 최대공약수를 구해야 함
    - **문제의 특정 사례**에 의존하지 않아야 함.
- 주어진 문제를 해결하는 여러 알고리즘이 존재 가능

# 하나의 문제, 두 개의 알고리즘 예제: 최대공약수 구하기 문제

- 알고리즘 1: 초등학교에서 배운 방식



- 알고리즘 2: 유클리드 호제법 방식



# 하나의 알고리즘, 두 개의 프로그램 예제: 1 부터 n 까지 합 구하기

- 프로그램 1

In [1]:

```
def sum_of_n(n):
    the_sum = 0
    for i in range(1, n + 1):
        the_sum = the_sum + i

    return the_sum
```

- 프로그램 2

In [2]:

```
def foo(tom):
    fred = 0
    for bill in range(1, tom + 1):
        barney = bill
        fred = fred + barney

    return fred
```

# 알고리즘 분석

- 두 프로그램 중에서 어떤 프로그램이 보다 좋은 프로그램인가?
    - 가독성, 명료성 등을 기준으로 보면 <프로그램 1>이 보다 좋음
- **알고리즘 분석**: 프로그램을 실행에 필요한 **컴퓨팅 자원**computing resources의 양과 활용의 효율성 측정
    - 이 기준에서 보면 위 두 프로그램은 알고리즘 측면에서 동일함.

# 컴퓨팅 자원

- 공간량
  - 알고리즘을 구현한 프로그램이 실행 될 때 요구되는 메모리, 저장 공간 등 공간의 양
  - 알고리즘 실행에 사용되는 입력값의 크기에 의존
- 실행시간
  - 알고리즘을 구현한 프로그램이 특정 결과를 반환할 때까지 걸리는 실행 시간
  - 알고리즘 실행에 사용되는 입력값의 크기에 의존

# 입력 크기에 따라 실행 시간이 달라지는 알고리즘

- 실행 시간 측정

In [3]:

```
import time

def sum_of_n_time(n):

    start = time.time()   # 실행 시작
    sum_of_n(n)           # 1부터 n까지의 합 계산
    end = time.time()     # 실행 종료

    return end - start   # 1부터 n까지의 합 계산에 필요한 시간
```

- 1만까지의 합

In [4]:

```
n = 10000
m = 10
time_sum = 0

for i in range(m):
    time_sum += sum_of_n_time(n)

print(f"1부터 {n}까지 더하는데 평균적으로 {time_sum/m:7.5f}초 걸림.")
```

```
1부터 10000까지 더하는데 평균적으로 0.00035초 걸림.
```

- 10만까지의 합

In [5]:

```
n = 100000
m = 10
time_sum = 0

for i in range(m):
    time_sum += sum_of_n_time(n)

print(f"1부터 {n}까지 더하는데 평균적으로 {time_sum/m:7.5f}초 걸림.")
```

1부터 100000까지 더하는데 평균적으로 0.00347초 걸림.

- 100만까지의 합

In [6]:

```
n = 1000000
m = 10
time_sum = 0

for i in range(m):
    time_sum += sum_of_n_time(n)

print(f"1부터 {n}까지 더하는데 평균적으로 {time_sum/m:7.5f}초 걸림.")
```

1부터 1000000까지 더하는데 평균적으로 0.03675초 걸림.

- 1천만까지의 합

In [7]:

```
n = 10000000
m = 10
time_sum = 0

for i in range(m):
    time_sum += sum_of_n_time(n)

print(f"1부터 {n}까지 더하는데 평균적으로 {time_sum/m:7.5f}초 걸림.")
```

```
1부터 10000000까지 더하는데 평균적으로 0.36891초 걸림.
```

# 실행 시간이 입력 크기에 상관 없는 알고리즘

**예제: 1 부터 n 까지 합 구하기** (다른 알고리즘)

`sum_of_n_3()` 함수는 1부터 n까지의 합을 계산하기 위해 아래 식을 이용한다.

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

In [8]:

```
def sum_of_n_2(n):
    sum = (n * (n + 1)) / 2
    return sum
```

- 실행 시간 측정

In [9]:

```
def sum_of_n_2_time(n):
    start = time.time()  # 실행 시작
    sum_of_n_2(n)
    end = time.time()    # 실행 종료

    return end - start
```

- 실행시간이 입력값에 의존하지 않음

In [10]:

```
m = 10

for n in [10000, 100000, 1000000, 10000000]:
    time_sum = 0

    for i in range(m):
        time_sum += sum_of_n_2_time(n)

    print(f"1부터 {n:8d}까지 더하는데 평균적으로 {time_sum/m:.16f}초 걸림.")
```

```
1부터    10000까지 더하는데 평균적으로 0.0000000000000000초 걸림.
1부터   100000까지 더하는데 평균적으로 0.0000000000000000초 걸림.
1부터  1000000까지 더하는데 평균적으로 0.0000000000000000초 걸림.
1부터 10000000까지 더하는데 평균적으로 0.0000000000000000초 걸림.
```

# 시간복잡도

- 실행 시간이 `sum_of_n()` 함수보다 훨씬 빠르지만 실행 시간을 절대적인 기준으로 사용되기 어려움.
- 프로그램 실행시간은 사용되는 컴퓨터, 실행 환경, 컴파일러, 프로그래밍언어 등등에 의존하기 때문임.
- 시간복잡도를 이용한 알고리즘 분석이 요구됨.

# 기본 계산단위

- 특정 연산자 또는 특정 명령문 등의 실행 횟수 확인
- 기본 계산단위: 실행시간을 측정하기 위해 사용되는 연산자 또는 특정 명령문
- 무엇을 기본 계산단위로 지정할 것인가는 알고리즘에 따라 다름.

## `sum_of_n()` 함수의 일정 시간복잡도

- `sum_of_n()` 함수 알고리즘의 기본 계산 단위: 변수 할당

```
def sum_of_n(n):
    the_sum = 0                     # 한 번 할당
    for i in range(1, n + 1):
        the_sum = the_sum + i       # n 번 할당

    return the_sum
```

- 변수 할당을 기본 계산단위로 사용할 때의 `sum_of_n()` 함수의 일정 시간 복잡도

$$T(n) = n + 1$$

- $T(n)$의 의미: '**크기가 $n$인 입력값에 대해 $T(n)$의 시간이 지나면 해당 알고리즘이 반환값을 계산하고 종료한다**'

## `sum_of_n_2()` 함수의 일정 시간복잡도

```
def sum_of_n_2(n):
    sum = (n * (n + 1)) / 2
    return sum
```

$$T(n) = 1$$

# 예제: 일정 시간복잡도 계산

In [11]:

```
def no_meaning(n):
    # 3번 할당
    a = 5
    b = 6
    c = 10

    # 3*n*n 번 할당
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            x = i * i
            y = j * j
            z = i * j

    # 2n 번 할당
    for k in range(n):
        w = a * k + 45
        v = b * b

    # 1번 할당
    d = 33

    return None
```

- 기본 계산단위: 변수 할당
- 일정 시간복잡도

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 3 + 3n^2 + 2n + 1 \\
&= 3n^2 + 2n + 4
\end{aligned}
$$

# Big-O 표현식

- $T(n) = n + 1$ 에서 1은 별로 중요하지 않음
    - 이유: n이 커질 수록 n+1 과 n의 차이는 무시될 수 있음.

- $T(n)$의 **Big-O 표현식**

$$T(n) \in O(n)$$

- 일반 `Big-O` 표현식

$$T(n) \in O(f(n))$$

**예제**: $T(n) = 3n^2 + 2n + 4$

- 고차항이 가장 중요.
- 상수배는 컴퓨터의 성능에 따라 발생할 수 있는 요인임.

$$T(n) \in O(n^2)$$

**예제**: $T(n) = \frac{1}{1000} n \log n + 3n + 205$

- $n$ 보다 $n \log n$ 이 더 큼.

$$T(n) \in O(n \log n)$$

**예제**: $T(n) = c$의 시간복잡도 ($c$는 상수)

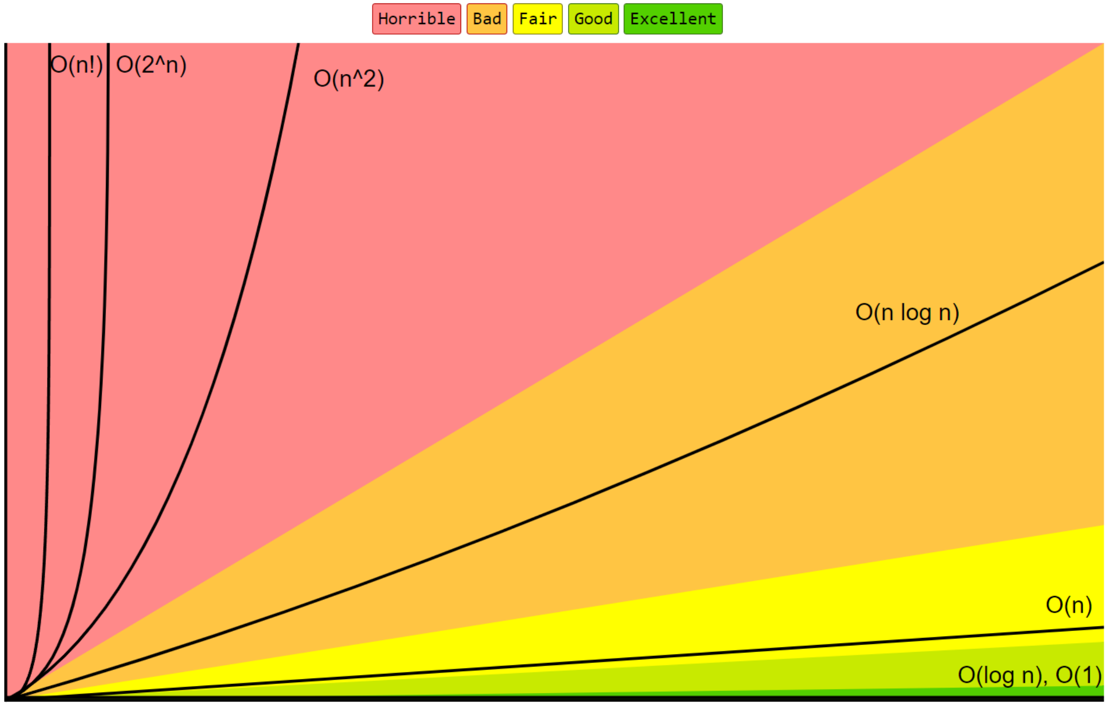
- 상수배는 무시

$$T(n) \in O(1)$$

# 주요 시간복잡도 함수

| 시간복잡도 | 의미 |
|---|---|
| $1$ | 상수 시간 |
| $\log n$ | 로그 시간 |
| $n$ | 선형 시간 |
| $n \log n$ | 로그선형 시간 |
| $n^2$ | 2차 시간 |
| $n^3$ | 3차 시간 |
| $2^n$ | 지수 시간 |
| $n!$ | 계승 시간 |

# 시간복잡도 함수의 그래프



# 시간복잡도와 실행시간

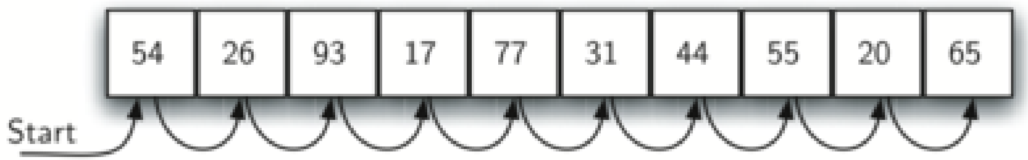
- 가정: 기본 계산단위 실행시간 = 1 ns(나노 초, 10억 분의 1 초)
- $\mu$s(마이크로 초): 100만 분의 1초
- ms(밀리 초): 천 분의 1초

| 입력 크기(n) | $\lg n$ | $n$ | $n \lg n$ | $n^2$ | $n^3$ | $2^n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 0.003 $\mu$s | 0.01 $\mu$s | 0.033 $\mu$s | 0.10 $\mu$s | 1.0 $\mu$s | 1 $\mu$s |
| 20 | 0.004 $\mu$s | 0.02 $\mu$s | 0.086 $\mu$s | 0.40 $\mu$s | 8.0 $\mu$s | 1 ms |
| 30 | 0.005 $\mu$s | 0.03 $\mu$s | 0.147 $\mu$s | 0.90 $\mu$s | 27.0 $\mu$s | 1 초 |
| 40 | 0.005 $\mu$s | 0.04 $\mu$s | 0.213 $\mu$s | 1.60 $\mu$s | 64.0 $\mu$s | 18.3 분 |
| 50 | 0.006 $\mu$s | 0.05 $\mu$s | 0.282 $\mu$s | 2.50 $\mu$s | 125.0 $\mu$s | 13 일 |
| $10^2$ | 0.007 $\mu$s | 0.10 $\mu$s | 0.664 $\mu$s | 10.00 $\mu$s | 1.0 ms | $4 \times 10^{13}$ 년 |
| $10^3$ | 0.010 $\mu$s | 1.00 $\mu$s | 9.966 $\mu$s | 1.00 ms | 1.0 초 | |
| $10^4$ | 0.013 $\mu$s | 10.00 $\mu$s | 130.000 $\mu$s | 100.00 ms | 16.7 분 | |
| $10^5$ | 0.017 $\mu$s | 0.10 ms | 1.670 ms | 10.00 초 | 11.6 일 | |
| $10^6$ | 0.020 $\mu$s | 1.00 ms | 19.930 ms | 16.70 초 | 31.7 년 | |
| $10^7$ | 0.023 $\mu$s | 0.01 초 | 0.230 초 | 1.16 일 | 31, 709 년 | |
| $10^8$ | 0.027 $\mu$s | 0.10 초 | 2.660 초 | 115.70 일 | $3.17 \times 10^7$ 년 | |
| $10^9$ | 0.030 $\mu$s | 1.00 초 | 29.900 초 | 31.70 년 | | |

# 최선, 최악, 평균 시간복잡도

- 알고리즘의 시간복잡도가 입력 크기뿐만 아니라 입력값 자체에 의존할 수도 있음.
- 일정 시간복잡도 $T(n)$ 계산 불가능
- 최선, 최악, 평균 시간복잡도를 계산 필요

# 순차 탐색




In [12]:

```
def sequentialSearch(alist, item):
    pos = 0
    found = False

    while pos < len(alist) and not found:
        if alist[pos] == item:            # 값 비교 계산단위
            found = True
        else:
            pos = pos+1

    return found
```

In [13]:

```
testlist = [54, 26, 93, 17, 77, 31, 44, 55, 20, 65]
testlist_sorted = [17, 20, 26, 31, 44, 54, 55, 65, 77, 93]

print(sequentialSearch(testlist, 93))
print(sequentialSearch(testlist_sorted, 93))
```

```
True
True
```

## `sequentialSearch()` 함수의 일정 시간복잡도 $T(n)$ 계산 가능?

- 입력 크기 $n$: 첫째인자로 사용되는 리스트의 길이
- 기본 계산단위: 리스트의 항목 확인과 비교. 즉, while 문 안에 있는 if 문의 `alist[pos] == item`를 기본 계산단위로 사용.
- `sequentialSearch(testlist, 93)` 호출: 비교를 세 번 실행
- `sequentialSearch(testlist_sorted, 93)` 호출: 비교 열 번 실행
- 동일한 길이의 리스트를 사용하더라도 리스트에 포함된 항목들의 순서에 따라 실행 시간이 달라짐.
- 일정 시간복잡도 $T(n)$을 계산 불가능

## `sequentialSearch()` 함수의 최선, 최악, 평균 시간 복잡도

- 입력 크기 $n$에 의존하는 시간복잡도의 최솟값, 최댓값, 평균값 계산 가능
- 알고리즘의 **최선**(best), **최악**(worst), **평균**(average) 시간복잡도 계산
- 입력 크기는 리스트의 길이로 지정

| | **최선** | **최악** | **평균** |
|---|---|---|---|
| 항목인 경우 | 1 | n | n/2 |
| 항목이 아닌 경우 | n | n | n |

# $B(n), W(n), A(n)$

- $B(n)$, $W(n)$, $A(n)$: 각각 최선, 최악, 평균 시간복잡도 함수를 가리킴

- 일정 시간복잡도 $T(n)$이 존재할 때:

  $$T(n) = B(n) = A(n) = W(n)$$

- 일정 시간복잡도 $T(n)$이 존재하지 않을 때:

  $$B(n) \leq A(n) \leq W(n)$$

# 어구전철

- 단어를 구성하는 문자의 순서를 바꾸어 새로운 단어 생성하기
- 영어로 **애너그램**anagram
- 예제:
    - "국왕" 과 "왕국"
    - "감동"과 "동감"
    - "다들 힘내"와 "힘내 다들" 또는 "내 힘들다"
    - "heart"와 "earth"
    - "python"과 "typhon"

# 어구전철 확인 알고리즘 1: 일일이 확인하기

In [14]:

```
def anagram_solution_1(s1, s2):
    still_ok = True          # 첫째 문자열에 포함된 문자 대상 어구전철 여부 저장

    if len(s1) != len(s2):   # 동일한 길이 여부 확인
        still_ok = False

    s2_list = list(s2)        # 둘째 문자열을 리스트로 변환
    pos_1 = 0                # 현재 확인 위치 저장

    while pos_1 < len(s1) and still_ok:          # 첫째 문자열의 모든 문자 대상 반복
        pos_2 = 0
        found = False

        while pos_2 < len(s2_list) and not found:    # 둘째 문자열의 모든 문자 대상 비교
            if s1[pos_1] == s2_list[pos_2]:          # 기본 계산단위: 비교
                found = True
            else:
                pos_2 = pos_2 + 1

        if found:
            s2_list[pos_2] = None
        else:
            still_ok = False

        pos_1 = pos_1 + 1

    return still_ok
```

- 기본 계산단위: 두 문자열 항목들 사이의 비교 연산
- 입력 크기: 문자열의 길이
- 두 문자열이 서로 어구전철일 때

$$
\begin{aligned}
T(n) &= \sum_{i=1}^{n} i \\
&= \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \\
&\in O(n^2)
\end{aligned}
$$

## 두 문자열의 길이가 같지만 서로 어구전철 관계가 아닐 때

- 최선: 문자열 `s1`의 첫째 문자가 리스트 `s2_list`에 포함되지 않은 경우에 어구전철이 아니라고 판단

$$B(n) = n$$

- 최악: 첫째 문자열 `s1`의 마지막 문자가 리스트 `s2_list`에 포함되지 않은 경우에 어구전철이 아니라고 판단
  - 처음 $(n-1)$개의 문자를 확인하는데 걸리는 최악 시간:

$$2+3+\cdots+n$$

  - 마지막 문자가 `s2_list`에 없는 것을 확인하는 데에 $n$ 번의 비교 필요

$$\begin{aligned} W(n) &= 2+3+\cdots+n+n \\ &= \frac{n(n+1)}{2}-1+n \\ &= \frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n-1 \\ &\in O(n^2) \end{aligned}$$

# 어구전철 확인 알고리즘 2: 정렬 후 비교

- 두 문자열이 서로 어구전철인 경우: 비교 연산자가 $n$ 번 실행
- `sort()` 함수의 시간복잡도: 알고리즘에 따라 $O(n^2)$ 또는 $O(n \log n)$
- 따라서 위 알고리즘이 시간복잡도는 사용되는 정렬 알고리즘의 시간복잡도와 동일

In [15]:

```
def anagram_solution_2(s1, s2):
    # 리스트로 형변환
    a_list_1 = list(s1)
    a_list_2 = list(s2)

    # 리스트 정렬
    a_list_1.sort()
    a_list_2.sort()

    # 동일 위치에 대해 일대일 비교. 다르면 바로 종료
    pos = 0
    matches = True

    while pos < len(s1) and matches:
        if a_list_1[pos] == a_list_2[pos]:    # 기본 계산단위: 비교
            pos = pos + 1
        else:
            matches = False

    return matches
```

# 어구전철 확인 알고리즘 3: 부르트 포스 기법

- **부르트 포스**brute force 기법: 모든 가능한 경우를 일일이 나열해보는 방법
- 예제: 문자열 `s1`에 사용된 문자들의 모든 조합을 생성한 다음에 그 중에 문자열 `s2`가 있는가를 확인하는 방식
- 일반적으로 활용하기 어려운 알고리즘임.
- $n$ 개의 문자를 이용하여 생성할 수 있는 문자열의 개수

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

# 어구전철 확인 알고리즘 4: 빈도 활용

- 어구전철 관계인 두 문자열: 각 문자를 동일한 수만큼 포함
- 모든 알파벳에 대해 각 문자열에 포함된 빈도를 측정 후 비교

In [16]:

```
def anagram_solution_4(s1, s2):

    # 빈도수 저장 용도 리스트
    c1 = [0] * 26
    c2 = [0] * 26

    # s1에 포함된 문자들의 빈도수
    for i in range(len(s1)):
        pos = ord(s1[i]) - ord("a")
        c1[pos] = c1[pos] + 1          # 기본 계산단위: 카운트

    # s2에 포함된 문자들의 빈도수
    for i in range(len(s2)):
        pos = ord(s2[i]) - ord("a")
        c2[pos] = c2[pos] + 1          # 기본 계산단위: 카운트

    # 모든 알파벳 대상 빈도수 비교
    j = 0
    still_ok = True
    while j < 26 and still_ok:
        if c1[j] == c2[j]:             # 기본 계산단위: 항목 비교
            j = j + 1
        else:
            still_ok = False

    return still_ok
```

- 길이가 $n$인 문자열에 포함된 문자들의 빈도를 확인하는 시간복잡도

$$T(n) = 2n + 26 \in O(n)$$

# 공간 복잡도 문제

- `anagram_solution_4()`의 시간복잡도는 이전 세 알고리즘에 비해 훨씬 좋음.
- 하지만 그 대신에 빈도 리스트를 새로 생성하기 위해 보다 많은 메모리를 사용
- `anagram_solution_1()`: 문자열 `s2`를 리스트로 변환한 값
- `anagram_solution_2()`: 두 문자열을 리스트로 형변환한 후 정렬. 그리고 정렬 과정에서 추가 메모리 사용 가능.
- `anagram_solution_3()`: 실제로 알고리즘을 구현하면 모든 가능한 조합을 생성하거나 저장할 때 추가 메모리 요구될 것임.