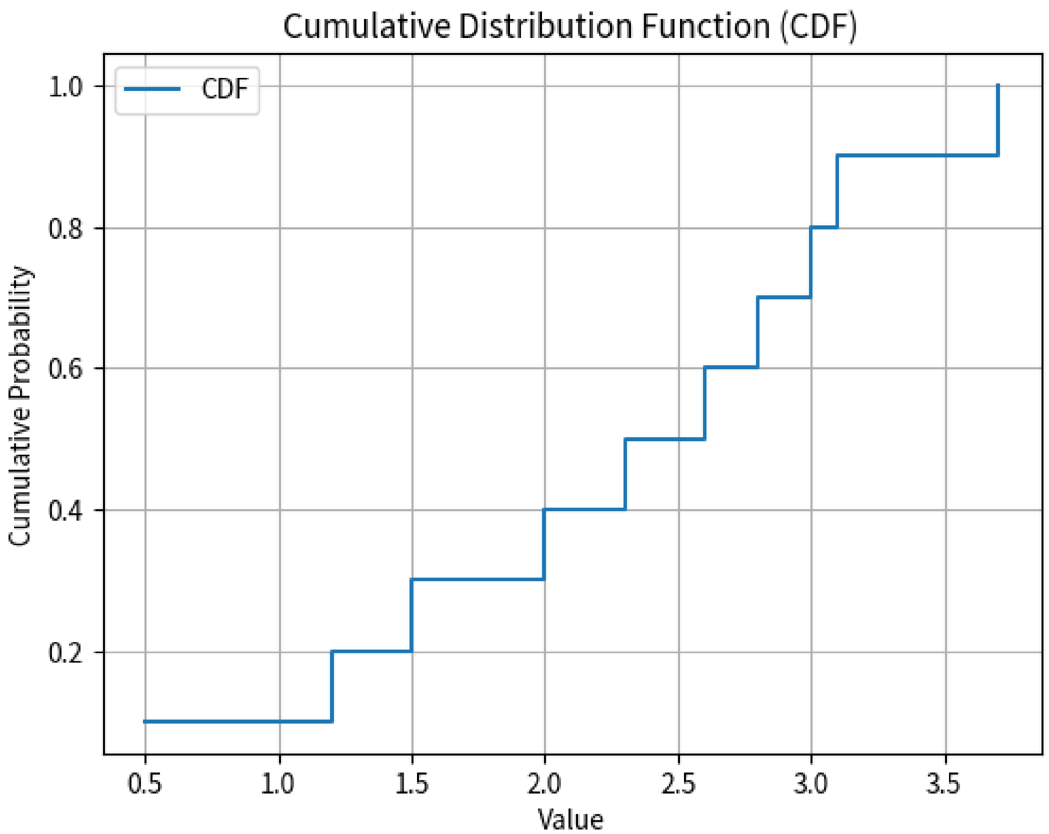
題目 1：繪製累積分布函數（CDF）

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# 給定的數據
data = [0.5, 1.2, 2.3, 3.1, 2.8, 1.5, 2.0, 3.7, 2.6, 3.0]

# 計算累積分布函數 (CDF)
sorted_data = np.sort(data)
cdf = np.arange(1, len(sorted_data) + 1) / len(sorted_data)

# 繪圖
plt.step(sorted_data, cdf, where='post', label="CDF") # 使用階梯圖
plt.title("Cumulative Distribution Function (CDF)")
plt.xlabel("Value")
plt.ylabel("Cumulative Probability")
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```



題目 2：蒙地卡羅模擬估算圓周率（π）

```
import random
import matplotlib.pyplot as plt

def monte_carlo_pi(radius, num_samples):
inside_circle = 0

for _ in range(num_samples):
x, y = random.uniform(-radius, radius), random.uniform(-radius, radius)
if x**2 + y**2 <= radius**2:
inside_circle += 1

# 圓的面積與正方形面積的比例為 πr² / (2r)² = π / 4，因此估算公式不變
return (inside_circle / num_samples) * 4

# 設定半徑與測試樣本數
radius = 50
n_values = [100, 1000, 10000, 100000, 1000000]
results = []

print("Monte Carlo Simulation for Estimating π (Radius = 50):")
for n in n_values:
estimated_pi = monte_carlo_pi(radius, n)
results.append((n, estimated_pi))
print(f"Samples: {n}, Estimated π: {estimated_pi:.6f}")
```

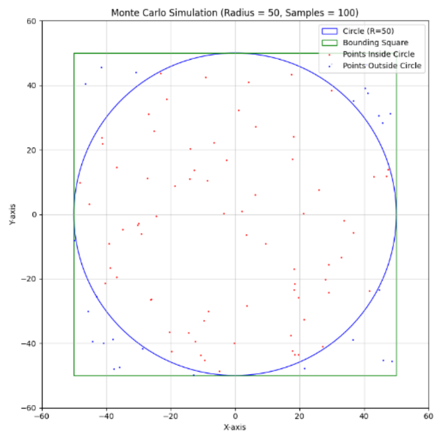
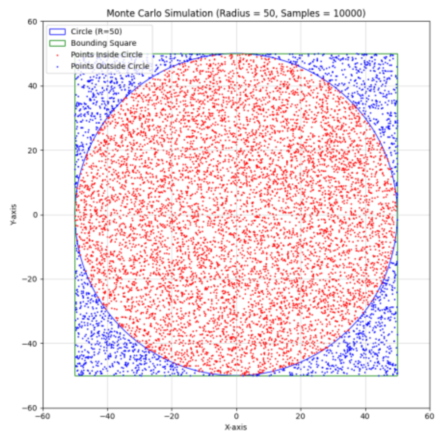
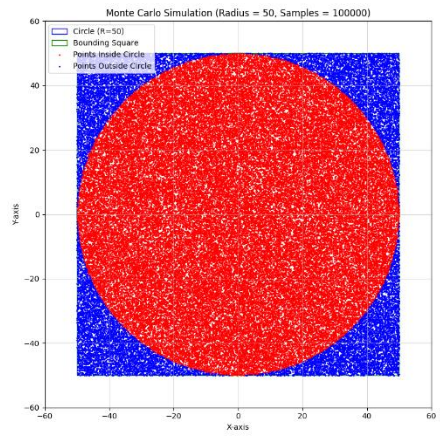
```
Monte Carlo Simulation for Estimating π (Radius = 50):

Samples: 100, Estimated π: 2.960000

Samples: 1000, Estimated π: 3.156000

Samples: 10000, Estimated π: 3.139600

Samples: 100000, Estimated π: 3.138400

Samples: 1000000, Estimated π: 3.139480
```

（額外）題目 2：蒙地卡羅模擬估算圓周率（π）

```
import random
import matplotlib.pyplot as plt

def monte_carlo_pi_visualized(radius, num_samples):
inside_circle = 0
points_x_in, points_y_in = [], [] # 圓內點
points_x_out, points_y_out = [], [] # 圓外點

for _ in range(num_samples):
x, y = random.uniform(-radius, radius), random.uniform(-radius, radius)
if x**2 + y**2 <= radius**2:
inside_circle += 1
points_x_in.append(x)
points_y_in.append(y)
else:
points_x_out.append(x)
points_y_out.append(y)

# 計算 π
estimated_pi = (inside_circle / num_samples) * 4

# 繪圖
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8, 8))
# 繪製圓形
circle = plt.Circle((0, 0), radius, color='blue', fill=False,
label="Circle (R=50)")
ax.add_artist(circle)
# 繪製外接正方形
square = plt.Rectangle((-radius, -radius), 2*radius, 2*radius,
color='green', fill=False, label="Bounding Square")
ax.add_artist(square)
# 繪製隨機點
ax.scatter(points_x_in, points_y_in, color='red', s=1, label="Points
Inside Circle")
ax.scatter(points_x_out, points_y_out, color='blue', s=1, label="Points
Outside Circle")

# 設定圖表屬性
ax.set_xlim(-radius - 10, radius + 10)
ax.set_ylim(-radius - 10, radius + 10)
```

```python
ax.set_aspect('equal', adjustable='box')
plt.title(f"Monte Carlo Simulation (Radius = {radius}, Samples =
{num_samples})")
plt.xlabel("X-axis")
plt.ylabel("Y-axis")
plt.legend()
plt.grid(alpha=0.5)
plt.tight_layout()
plt.show()

return estimated_pi

# 執行模擬與繪圖
# 設定半徑與測試樣本數
radius = 50
n_values = [100, 10000, 100000]
results = []

print("Monte Carlo Simulation for Estimating π (Radius = 50):")
for n in n_values:
print(f"Estimated π using {n} samples: {estimated_pi:.6f}")
estimated_pi = monte_carlo_pi_visualized(radius, n)
```

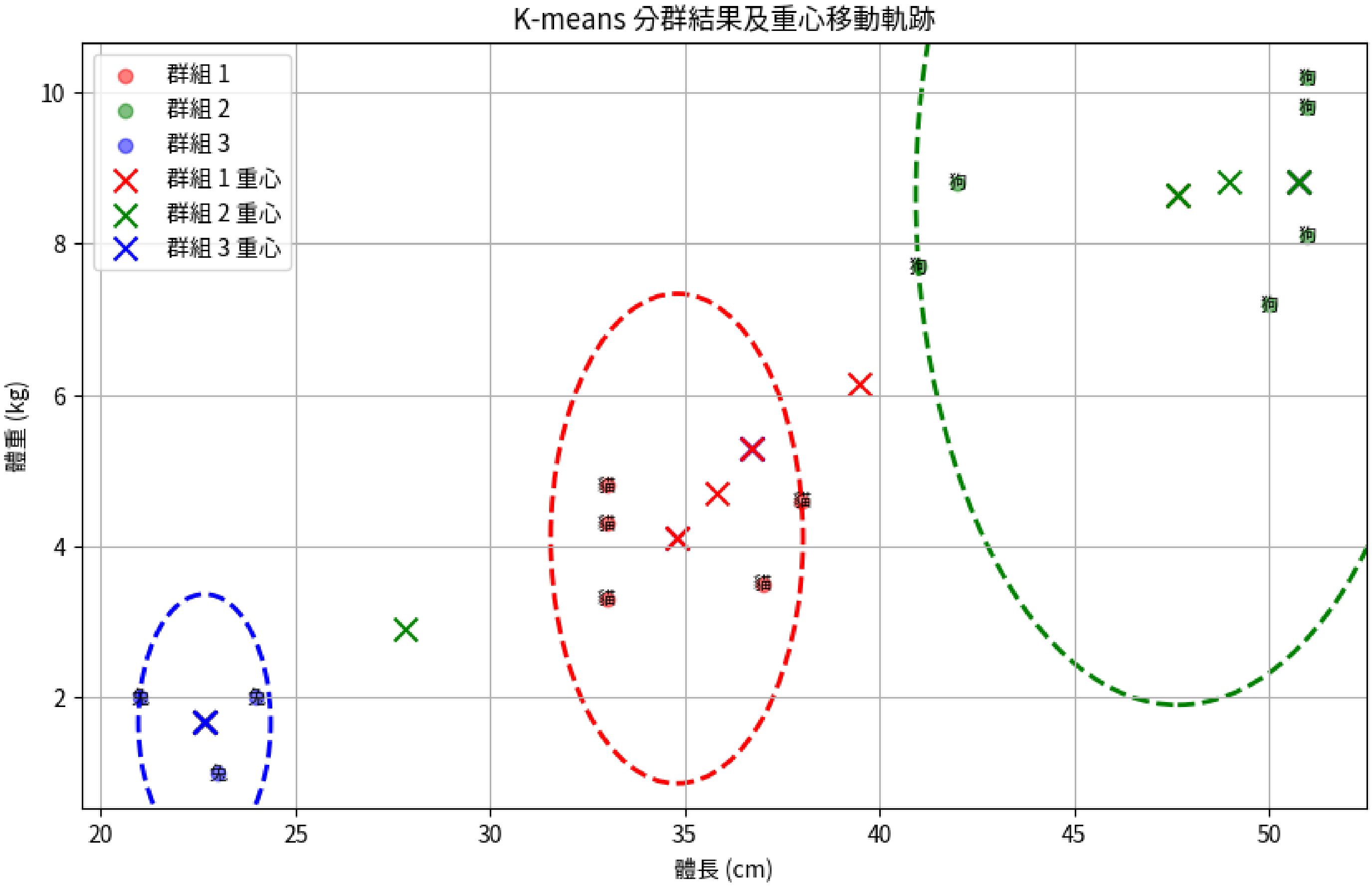
Monte Carlo Simulation for Estimating π (Radius = 50):

<table>
<tr>
<td>Estimated π using 100 samples: 3.140512</td>
<td>Estimated π using 10000 samples: 3.104000</td>
<td>Estimated π using 100000 samples: 3.158800</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

題目 3: K-Means 分群分析

```python
import pandas as pd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from sklearn.cluster import KMeans

# 1. 載入資料
data = pd.read_csv('/content/drive/MyDrive/Colab Notebooks/機率學/data/data.csv')
length = data['體長(cm)']
weight = data['體重(kg)']
species = data['動物種類']

# 2. 執行k-means 分群，初始重心隨機選擇
X = np.array(list(zip(length, weight)))
k = 3  # 設定群組數
kmeans = KMeans(n_clusters=k, init='k-means++', max_iter=10)

# 記錄每次迭代的重心位置
centroids_history = []

# 定義 KMeans 的自定義 fit 方法來捕捉每次迭代的重心位置
def custom_fit(kmeans, X):
    for _ in range(kmeans.max_iter):
        kmeans.fit(X)  # 執行 KMeans 以更新標籤和重心
        centroids_history.append(kmeans.cluster_centers_)  # 記錄當前重心

# 執行自定義 fit 方法
custom_fit(kmeans, X)

# 3. 繪製分群結果的散點圖及重心移動軌跡
plt.figure(figsize=(10, 6))
colors = ['red', 'green', 'blue']  # 每個群組的顏色
center_colors = ['red', 'green', 'blue']  # 重心顏色與群組顏色相同

# 繪製散點圖
for i in range(k):
    plt.scatter(X[kmeans.labels_ == i][:, 0], X[kmeans.labels_ == i][:, 1], color=colors[i], label=f'群組 {i+1}', alpha=0.5)

    # 標記每個數據點的標籤
```

```
    for j in range(len(X[kmeans.labels_ == i])):
        plt.text(X[kmeans.labels_ == i][j][0], X[kmeans.labels_ ==
i][j][1], species.iloc[kmeans.labels_ == i].iloc[j],
                 color='black', fontsize=8, ha='center', va='center')

# 4. 繪製每次迭代的重心點，並標註群組名稱
for iteration, centers in enumerate(centroids_history):
    for i in range(k):
        plt.scatter(centers[i][0], centers[i][1], color=center_colors[i],
marker='x', s=100, label=f'群組 {i+1} 重心' if iteration == 0 else "")

# 5. 用圓圈表示各群最後一次的範圍
for i in range(k):
    # 取得每個群組的資料點
    group_data = X[kmeans.labels_ == i]
    # 計算資料點到重心的最大距離（半徑）
    centroid = kmeans.cluster_centers_[i]
    distances = np.linalg.norm(group_data - centroid, axis=1)  # 計算每個點
到重心的距離
    max_distance = np.max(distances)  # 取最大距離作為圓的半徑
    # 繪製圓圈（以重心為圓心，半徑為最大距離）
    circle = plt.Circle((centroid[0], centroid[1]), max_distance,
color=colors[i], fill=False, linestyle='--', linewidth=2)
    plt.gca().add_artist(circle)

plt.xlabel('體長 (cm)')
plt.ylabel('體重 (kg)')
plt.title('K-means 分群結果及重心移動軌跡')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()

# 6. 輸出每群的最終重心座標及群內樣本數量
for i in range(k):
    print(f'群組 {i+1} 重心: {kmeans.cluster_centers_[i]}, 樣本數量:
{sum(kmeans.labels_ == i)}')

# 7. 輸出每次迭代的重心值
for iteration, centers in enumerate(centroids_history):
    print(f'第 {iteration + 1} 次迭代的重心: {centers}')
```



群組 1 重心: [34.8 4.1], 樣本數量: 5

群組 2 重心: [47.66666667 8.63333333], 樣本數量: 6

群組 3 重心: [22.66666667 1.66666667], 樣本數量: 3

模擬結果說明

1. **題目 1：繪製累積分布函數（CDF）**

   使用 numpy 計算並排序輸入數據，繪製累積分布函數。模擬結果成功展示了數據累積概率隨值的變化，圖形使用階梯圖顯示累積分布的特性，並直觀反映數據分佈情況。

2. **題目 2：蒙地卡羅模擬估算圓周率（π）**

   - **非可視化模擬結果**

     在樣本數分別為 **100**、**1000**、**10000**、**100000** 和 **1000000** 時，估算的 **π** 值逐步接近數學常數 **π**，顯示蒙地卡羅方法的準確性會隨樣本數增加而提升。

   - **可視化模擬結果**

     透過繪製隨機點及圓形邊界，清楚顯示了圓內外點的分佈情況，並通過模擬結果進一步驗證 **π** 值的估算過程。隨著樣本數的增加，模擬結果的分佈越均勻，估算值越接近實際。

3. **題目 3：K-Means 分群分析**

   使用 K-Means 方法將數據分為三組，並在每次迭代中更新重心。模擬結果展示了分群後各數據點與重心的對應關係，以及每群的數量和最終重心座標。圖形直觀呈現了群組邊界、資料分佈及重心移動軌跡，清晰說明了 K-Means 演算法的收斂過程。

作業心得

透過本次作業，學到了以下幾點：

1. **程式設計能力的提升**
   本次作業的三個題目涵蓋了數據分析與模擬的不同應用場景。從累積分布函數的計算到蒙地卡羅模擬，再到 `K-Means` 分群分析，我熟悉了使用 `Python` 進行數值運算及視覺化的完整流程，也加深了對 `numpy`、`matplotlib` 和 `sklearn` 等工具的理解。

2. **蒙地卡羅方法的實踐**
   在估算 π 的過程中，體會到了蒙地卡羅方法的簡單與有效性，並學會了如何結合隨機數與幾何方法解決數學問題。通過可視化的點分佈，對圓內外關係的直觀理解也得到了強化。

3. **K-Means 分群的應用**
   分群分析題目幫助我深入理解了 `K-Means` 的原理，尤其是重心移動與群組範圍的更新過程。通過多次迭代觀察模型的收斂，對分群演算法的實現與優化有了更深入的體會。

4. **挑戰與改進**
   作業中最大的挑戰是確保程式碼的邏輯性和穩定性，例如處理輸入數據的異常情況及可視化的美觀性。未來可以進一步優化程式碼，提高執行效率，並嘗試應用更複雜的數據集來驗證演算法的普適性。

整體而言，本次作業不僅鞏固了課堂所學，還增強了實際應用的能力，為未來的專題研究與工作奠定了良好的基礎。