2. Crecimiento exponencial

Wednesday, August 10, 2022 8:24 AM

Crecimiento de una población (Por ej de bacterias)

Se puede ver que la tasa de crecimiento es proporcional a la cantidad de individuos en ese instante

Si $P(t)$ = cant de individuos en el tpo t

$$\frac{dP}{dt} = r P$$

r: cte de prop de crec

OBS: $\frac{dP}{dt} \cdot \frac{1}{P} = r$ = Tasa de crec por cápita

¿Cómo accedo a este modelo a partir de datos?

TABLE 9.3 World population (midyear)

Year	Population (millions)	$\Delta P/P$
1980	4454	$76/4454 \approx 0.0171$
1981	4530	$80/4530 \approx 0.0177$
1982	4610	$80/4610 \approx 0.0174$
1983	4690	$80/4690 \approx 0.0171$
1984	4770	$81/4770 \approx 0.0170$
1985	4851	$82/4851 \approx 0.0169$
1986	4933	$85/4933 \approx 0.0172$
1987	5018	$87/5018 \approx 0.0173$
1988	5105	$85/5105 \approx 0.0167$
1989	5190	

$\}\Delta P$

Source: U.S. Bureau of the Census (Sept., 2007): www.census.gov/ipc/www/idb.

Pob mundial ⇝ tomo $dt = 1$ y $dP \approx \Delta P$

más sofisticado

Si consideramos la tasa promedio de nacimientos y muertes por cápita: b y d respectivamente

"Pensamiento del estilo infinitesimales"

Δt = Período de tpo pequeño

Cant de nacimientos ⇝ $b\,\Delta t\,P(t)$

Cant de muertes ⇝ $d\,\Delta t\,P(t)$

¿Cómo queda la pob luego del intervalo temporal Δt?

$$P(t+\Delta t) = P(t) + b\,\Delta t\,P(t) - d\,\Delta t\,P(t)$$

$$\frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} = (b-d)\,P(t)$$

Si $\Delta t \to 0$

$$\frac{dP}{dt} = (b-d)\,P$$

¿Como recupero r?

$$r = \frac{dP}{dt} \cdot \frac{1}{P} \approx \frac{\Delta P}{1} \frac{1}{P} = \Delta P / P \approx 0.017$$

modelo

$$\Rightarrow \frac{dP}{dt} = 0.017 \cdot P$$

¿Como resolvemos la ec $\frac{dy}{dt} = ry$, $y>0$?

Si manipulamos diferenciales:

$$dy = ry\,dt$$

$$\frac{1}{y} dy = r\,dt$$

"Separo variables"

$$\int \frac{1}{y} dy = \int r\,dt$$

$$\ln(y) + C_2 = rt + C_1$$

$$\ln(y) = rt + C_1 - C_2 = rt + C$$

$$e^{\ln(y)} = e^{rt+c}$$

$$y = e^{rt} \cdot e^{c}$$

$$y = c\,e^{rt} \qquad (c = y(0))$$

¿Cómo sería si no quiero manipular los diferenciales?

$$y'(t) = r\,y(t)$$

$$\frac{1}{y(t)} \cdot y'(t) = r$$

$$\parallel$$

$$H'(y(t)) \cdot y'(t) = r$$

donde H es una $\underbrace{\text{primitiva de } 1/x}_{H(x) = \ln|x|}$ $(H'(x) = 1/x)$

$$[H(y(t))]' = r$$

$$\int [\quad]' dt = \int r\,dt$$

$$H(y(t)) + C_2 = rt + C_1$$

$$e^{\ln(y(t))} = e^{rt+c}$$

$$y(t) = e^{rt} \cdot e^{c}$$

$H(y(t)) = rt + c_1 - c_2$

$y > 0$ $\quad H(y(t)) = rt + C$

$\ln(y(t)) = rt + c$

$y(t) = ce^{rt}$

Volviendo al ejemplo, teníamos que $\dfrac{dP}{dt} = 0.017P$

$\Rightarrow P(t) = P_0\, e^{0.017t}$ $\qquad P_0 = P(0) = $ Pob inicial, tomamos que en $t=0$ está la pob de 1980

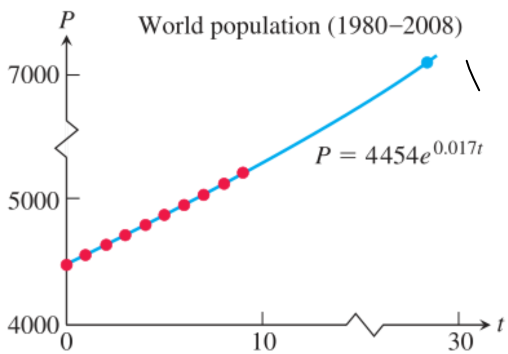


FIGURE 9.10 Notice that the value of the solution $P = 4454e^{0.017t}$ is 7169 when $t = 28$, which is nearly 7% more than the actual population in 2008.

$\Rightarrow P(t) = 4454\, e^{0.017t}$

En $t = 28 \rightarrow P \approx 7169$ que es un 7% más que la pob en 2008

Pob mundial actual 8000 millones

Ver https://countrymeters.info/es/World

Miremos cuanto da $P(t)$ con $t = 2022 - 1980 = 42$

$P(42) = 4454\, e^{0.017 \cdot 42} \approx 9096 \rightarrow$ casi un 14% más! No ajusta bien

---

Otra situación de crecimiento exponencial: Interés compuesto

Supong que tenemos un capital inicial de $1000

Los bancos suelen tener una tasa anual, supongamos 3%

Al cabo de un año ⇝ $1000\left(1 + \overset{\text{tasa}}{0.03}\right) = 1030$

Si el banco nos diese intereses a los 6 meses (la mitad). A los 6 meses tengo

$$\underbrace{1000\left(1+\frac{0.03}{2}\right)}_{C} = \text{Nuevo capital} \;\rightsquigarrow\; C\left(1+\frac{0.03}{2}\right) =$$

A fin de año tengo

$$= 1000\left(1+\frac{0.03}{2}\right)^2 =$$

Similarmente, si el interés se compone c/ 4 meses → $1000\left(1+\frac{0.03}{3}\right)^3$

Si se compone diariamente ⇝ $1000\left(1+\frac{0.03}{365}\right)^{365}$

1	1030
353	1030.453220418139
354	1030.453224128488
355	1030.4532278179452
356	1030.4532314866503
357	1030.4532351348116
358	1030.4532387626284
359	1030.4532423701987
360	1030.4532459577472
361	1030.4532495253488
362	1030.453253073309
363	1030.453256601742
364	1030.4532601107562
365	1030.453263600551

Si en un año lo compongo infinitamente

Usamos: $\lim_{N \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N = e$

En nuestro ej hacemos así:

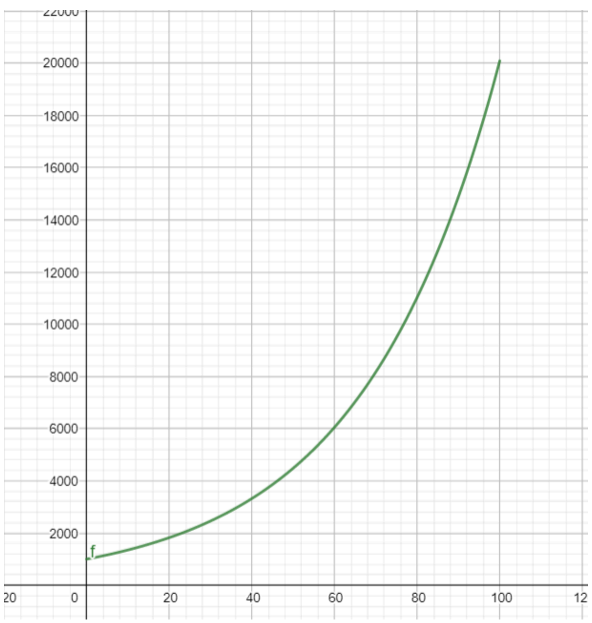
$$\lim_{i \to +\infty} \left(1 + \frac{0.03}{i}\right)^i = \lim_{i \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\underbrace{\frac{i}{0.03}}_{N}}\right)^{i/0.03}\right]^{0.03}$$

$$= e^{0.03} \approx 1.030454\ldots$$

Si t = cantidad de años y el período de composición es continuo

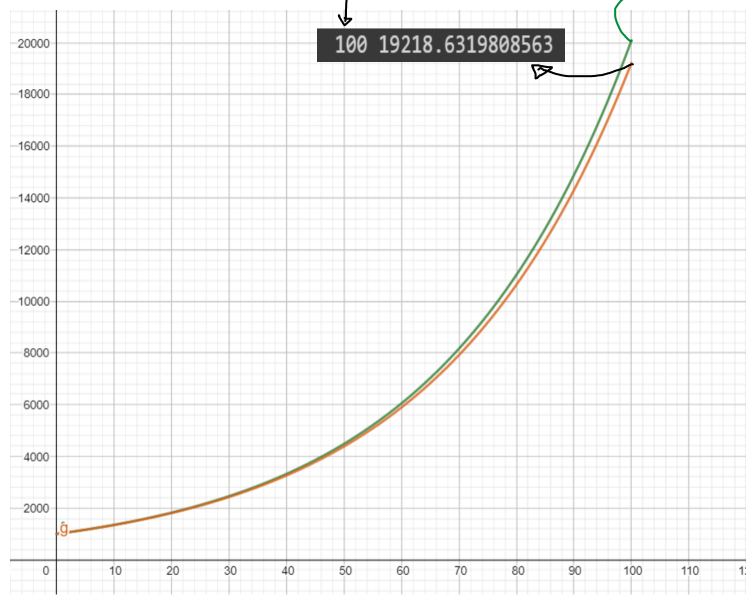
$\Rightarrow C(t) = 1000\, e^{0.03\, t}$ [Componemos continuamente c/año, durante 100 años]

$\tilde{C}(t) = 1000 \cdot (1.03)^t$ [Si componemos c/año durante 100 años]



iteración

20085



$C(100) \approx 4.5\% > \tilde{C}(100)$