Modelos logísticos

Wednesday, August 17, 2022 8:35 AM

Vimos modelo de crec exp ⇝ $\frac{dP}{dt} = rP$ "la variación de la pob es prop a la pob"

$\underbrace{\frac{dP}{dt} \cdot \frac{1}{P}}_{\text{Tasa de crec por individuo}} = r$ "La tasa de crec por individuo permanece cte"

sabemos que entonces $P(t) = P_0 e^{rt}$, Tamb vimos que r puede contener info sobre nacimientos (b) y muertes (d)

Sabemos que este modelo va a fallar (pues P se va a infinito bastante rápido), sin embargo modela bastante bien en los orígenes ciertos fenómenos de crecimiento (poblaciones, virus, etc).
Ejemplo: ver https://www.agenciapacourondo.com.ar/sociedad/matematica-y-coronavirus

Cuando teníamos $\frac{dP}{dt} = (b-d)P$ las tasas b y d no dependían de la densidad poblacional

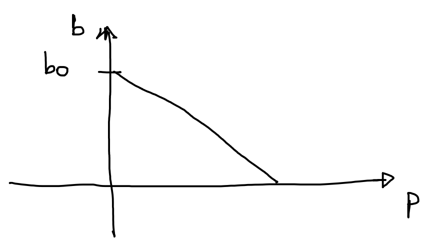
b y d no son denso-dependientes en el modelo exponencial

¿Cómo podemos modificar b y d para que sean dependientes de la densidad y respondan a la sobrepoblación?

Idea: Si aumenta la sobrepoblación, la tasa de nacimientos debería disminuir (falta de recursos, falta de comida)

La forma más sencilla de considerar la denso-dependencia es (como no podía ser de otra forma) una dependencia lineal:

$b = b_0 - aP$



- Si $P \approx 0 \Rightarrow$ la tasa es $\approx \underbrace{b_0}_{\text{Tasa de nac en condiciones ideales}}$ (tasa ≈ cte)

Similarmente modificamos la tasa de mortalidad para que sea denso-dependiente

$d = d_0 + cP$

- Si $a=0$ → tengo una tasa cte (mod exponencial) ($y\ c=0$)

OBS: Podría suceder que solo una de las tasas sea denso dependiente. Sin embargo se puede ver que se llega al mismo modelo

Si introducimos estas consideraciones en el mod exp:

$$\frac{dP}{dt} = (b-d)P = [b_0 - aP - (d_0 + cP)]P$$

$$\frac{dP}{dt} = [b_0 - d_0 - (a+c)P]P$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{b_0 - d_0}{b_0 - d_0}[b_0 - d_0 - (a+c)P]P$$

$$\frac{dP}{dt} = \underbrace{(b_0 - d_0)}_{r}\left[1 - \frac{a+c}{b_0 - d_0}P\right]P$$

(llamo $r = b_0 - d_0$)

$$\frac{dP}{dt} = r[1 - P/K]P$$

defino $K = \frac{b_0 - d_0}{a+c}$

(por conveniencia matemática)

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = rP\,(1 - P/K)} \quad (*)$$

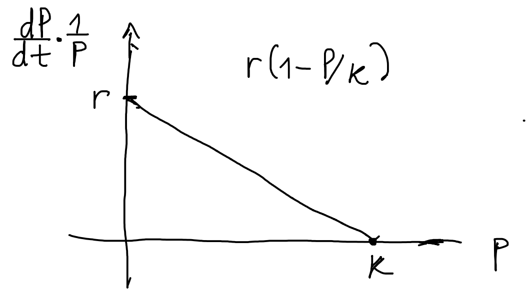
Modelo logístico

OBS 1: La ec logística es como si a la exponencial la multiplicásemos por el término adicional entre paréntesis

$1 - P/K$ = Porción no utilizada de la capacidad portadora

Ej: $K = 100$, $P = 7$ ⟿ $1 - P/K = 0.93$

(No estoy usando el 93% de K)



Cuando P está próximo a cero, la tasa de crecimiento por individuo, no se ve afectada por la competencia (Es considerada cte). Cuando P aumenta hasta K (la capacidad portadora) la tasa de incremento por individuo disminuye a cero.

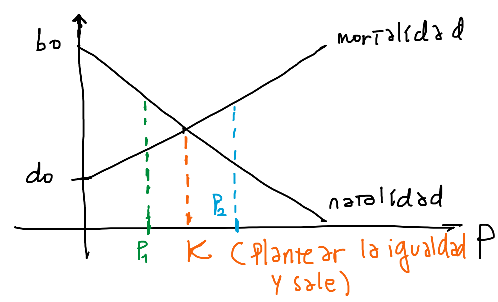
P_1: Esto es un presupuesto del modelo
→ denso-dependencia lineal:
Cada individuo que se incorpora contribuye a la disminución de la tasa de crec pob per capita (de forma lineal)

P_2: K es cte. La disponibilidad de recursos no varía con el tpo

- me dudo como está compuesta -

Sentido biológico de K:
"Capacidad portadora"
Representa el tamaño máximo al que puede llegar una población dados una variedad de recursos potencialmente limitantes (espacio, alimento, abrigo)

Si volvemos a b y d



Cuando $P = K$ la pob deja de crecer ($\frac{dP}{dt} = 0$)

Es un equilibrio estable:
"No importa el valor de P, siempre va a tender a K"

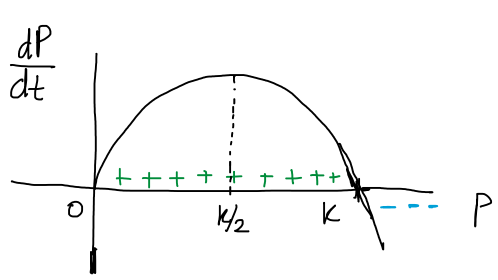
Si estoy en $P_1 < K$: $b > d$
⇒ P sigue creciendo

Si estoy en $P_2 > K$: $b < d$
⇒ P decrecerá

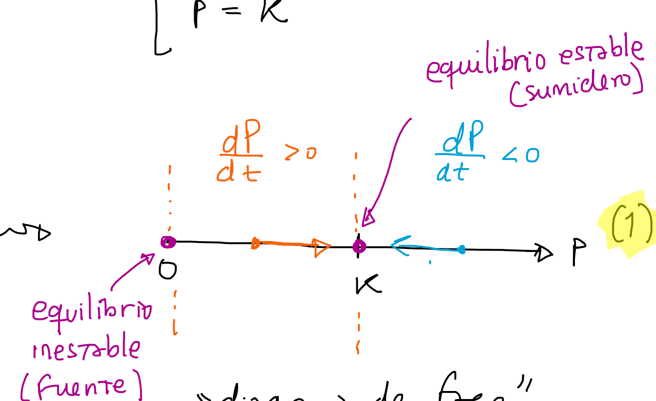
(*) Lo puedo resolver vía separación de variables (más adelante)

¿Puedo "espiar" cómo es P usando solo lo que me brinda (*)?

$$\frac{dP}{dt} = rP(1 - P/K) \qquad ¿\frac{dP}{dt} = 0? \begin{cases} P = 0 \\ P = K \end{cases}$$



⟿



Podemos espiar $\frac{d^2P}{dt^2}$ (derivada segunda)

(OBS de la notación ⇝ $\frac{d}{dt}\left(\frac{dP}{dt}\right) = \frac{d^2P}{dt^2}$)

$$\frac{dP}{dt} = rP(1-P/K) = rP - \frac{r}{K}P^2$$

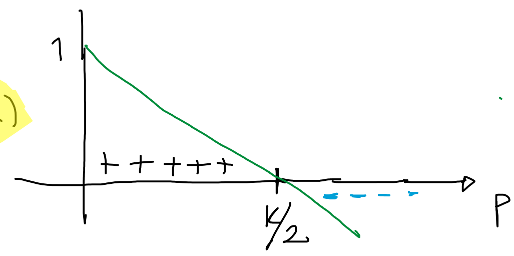
$$\frac{d^2P}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(rP - \frac{r}{K}P^2\right) = r\frac{dP}{dt} - \frac{r}{K}2P\frac{dP}{dt} = \left(r - \frac{r}{K}.2P\right)\frac{dP}{dt}$$

$$\frac{d^2P}{dt^2} = r\left(1 - \frac{2}{K}P\right)\frac{dP}{dt}$$ ⇝ quiero ver el signo p/ determinar la curvatura.

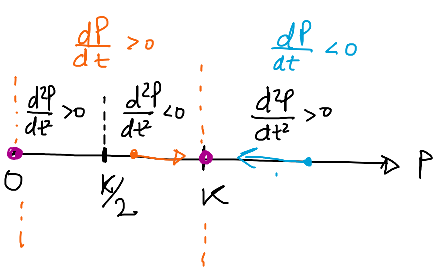
Si $P = K/2 \Rightarrow \frac{d^2P}{dt^2} = 0$ ⇝ Análisis

$$\begin{cases} 0 < P < K/2 \underset{(1)+(2)}{\Rightarrow} \frac{d^2P}{dt^2} > 0 \\ K/2 < P < K \Rightarrow \frac{d^2P}{dt^2} < 0 \\ K < P \Rightarrow \frac{d^2P}{dt^2} > 0 \end{cases}$$

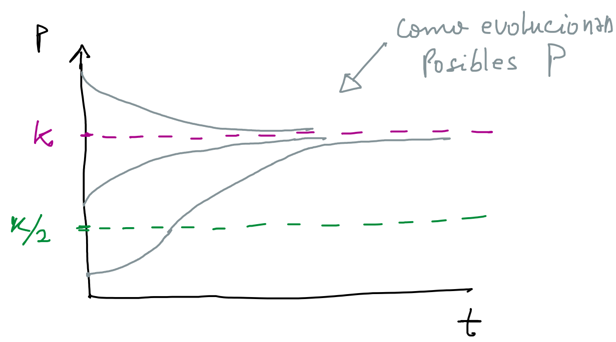
(2)



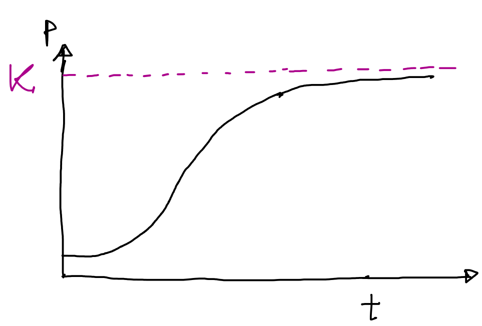
OBTENEMOS :



⇝



El caso más usual es cuando P parte de valores inferiores a $K/2$.
Entonces tenemos una curva así (sigmoidal)



Resolvamos la ec logística :

$$\frac{dP}{dt} = rP(1-P/K)$$

$$dP = rP(1-P/K)\,dt$$

$$\frac{dP}{P(1-P/K)} = r\,dt$$

$$\frac{K\,dP}{P(K-P)} = r\,dt$$

$$\frac{1}{K}\int\frac{dP}{P(K-P)} = \boxed{\int r\,dt}$$ la sé resolver

"fracciones simples"

$$\frac{\boxed{}}{P(K-P)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{K-P} = \frac{A(K-P)+PB}{P(K-P)}$$

$$K = A(K-P)+PB = (B-A)P + AK$$

$\underset{\text{igualdad de Pols}}{\Rightarrow}$ $\begin{cases} B-A=0 \\ AK=K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=A=1 \\ A=1 \end{cases}$

$$\int \frac{K\,dP}{P(K-P)} = \int \frac{1}{P} + \frac{1}{(K-P)}\,dP = \ln(P) - \ln|K-P| + C$$

$$= \frac{1}{K}\ln\left(\underbrace{\frac{P}{K-P}}\right) + C$$

después vemos el tema del módulo

CA

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$$

$$\int \frac{1}{K-x}\,dx = -\int \frac{1}{u}\,du$$

$$u = K-x$$

$$du = -dx$$

$$= -\ln|u| + C = -\ln|K-x| + C$$

queda

$$\ln\left(\frac{P}{K-P}\right) = rt + C$$

aplico exp

$$\frac{P}{K-P} = e^{rt}\cdot \underbrace{e^{C}}_{C_1}$$

$$P = C_1 e^{rt}(K-P)$$

$$P = C_1 e^{rt}K - C_1 e^{rt}P$$

$$P(1+C_1 e^{rt}) = C_1 e^{rt}K$$

$$P(t) = \frac{C_1 e^{rt} K}{1+C_1 e^{rt}}$$

→ Solo falta determinar C_1

$$\frac{P}{K-P} = C_1 e^{rt}$$

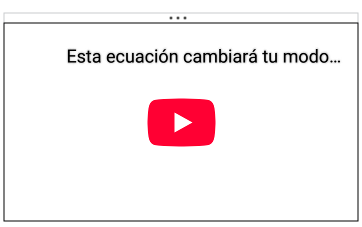
sustituyo $t=0$ y $P(0)=P_0$

$$\boxed{\frac{P_0}{K-P_0} = C_1}$$

Si reemplazamos C_1 y hacemos ctas

$$\boxed{P(t) = \frac{P_0 K e^{rt}}{(K-P_0) + P_0 e^{rt}}}$$

[Esta ecuación cambiará tu modo de ver el mundo]



😱