1. Diferenciales

Tuesday, August 9, 2022 3:57 PM

Notación diferencial para la derivada : $y = f(x)$

$\frac{dy}{dx} = f'(x)$ o Tamb se puede usar directamente $\frac{df}{dx}$

Si lo dejamos así, es solo una notación,
pero queremos ver más allá...

Sabemos dada $f(x)$, planteando

$$\frac{\overbrace{f(x+h) - f(x)}^{\Delta y}}{\underbrace{h}_{\Delta x}}$$ (cociente incremental)

y haciendo $h \to 0$, obtenemos $f'(x)$
(x def)

(*) Me dice que (cuando Δx es pequeño)

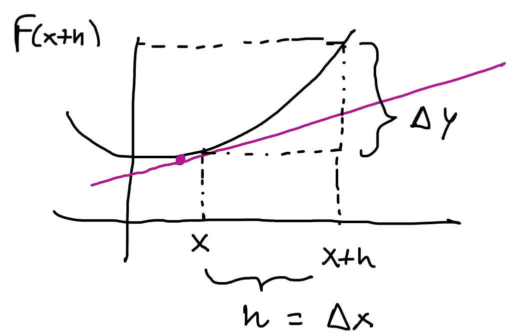
(1) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon$ donde $\varepsilon \to 0$ cuando Δx lo hace

$$\Delta y = \underbrace{f'(x)\Delta x + \varepsilon \Delta x}_{\text{quiero interpretarlo gráficamente}}$$

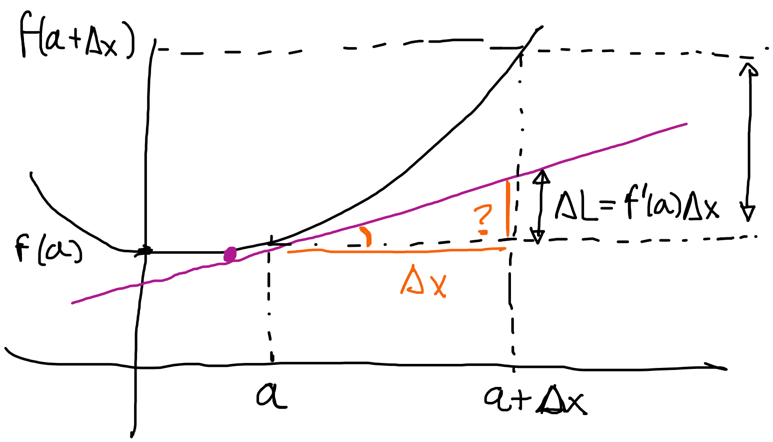
Δ = delta mayúscula $\rightsquigarrow$ se utiliza para indicar variación

Podemos reescribir el límite así :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \qquad (*)$$



mirémoslo en un caso puntual $\rightsquigarrow$ Estoy mirando $f'(a)$



$\Delta y = f(a+\Delta x) - f(a)$

L = recta tg en $x=a$

$L = f'(a)(x-a) + f(a)$

ΔL = Variación de L

$= L(a+\Delta x) - L(a)$

$= f'(a)(\cancel{a}+\Delta x - \cancel{a}) + \cancel{f(a)} - \cancel{f(a)}$

$= f'(a)\Delta x$

$\dfrac{?}{\Delta x}$ = Pendiente $= f'(a)$

$? = f'(a)\Delta x$

Volviendo al caso gral, dado x, Llamemos $dy = f'(x)\Delta x$ = variación en la linealización

IDEA: Considerar dicha variación cuando DELTA x es muy pequeño, y en este caso voy a tener

$dy = f'(x)\,dx$ (El dibujo sería el mismo, reemplazando Δx por dx)

OBS: $\Delta y - dy \to 0$ si $\Delta x \to 0$ ¿Pero con qué velocidad?

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon \Delta x = dy + \varepsilon \Delta x$$

$$\Rightarrow \quad \Delta y - dy = \varepsilon \Delta x \qquad \text{donde} \quad \varepsilon \to 0 \quad \text{cuando} \quad \Delta x \to 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\overbrace{\Delta y - dy}}{\Delta x} = \varepsilon \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0$$

"es un infinitésimo de orden superior al incremento Δx"

o

Versión Comp Cient: $\Delta y - dy = o(\Delta x)$

Propiedades de dy:

1) dy es proporcional a Δx $\quad$ Por ej si $x=a$ $\left(dy = f'(a)\,\Delta x \right)$

2) $\dfrac{\Delta y - dy}{\Delta x} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0$

$$\boxed{\text{Defino} \quad dx = \Delta x}$$

Esto nos permite definir el diferencial del argumento x, ya que (DELTA x) tiene las mismas propiedades :

En efecto:

1) Δx es proporcional a Δx : $\Delta x = 1 \cdot \Delta x$

2) $\dfrac{\Delta x - dx}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x - \Delta x}{\Delta x} = 0$

Consecuencia: $dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$ $\rightsquigarrow$ $dy = f'(x)dx$

Si me permito manipular los diferenciales,

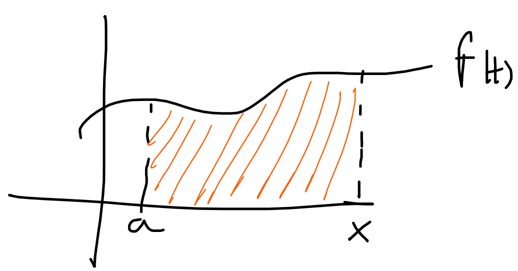
$$dy = f'(x)dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Para seguirla en YouTube 👉 [Diferenciales]

Cortesía Miguel ✨

$\int f(x)dx \Longleftrightarrow$ sabemos $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

es esuna primitiva de f (TFC)



$$\int_a^x f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(t_i)\,\Delta t_i$$