Un caso de interacción entre la matemática, la programación y la biología: competencia interespecífica

M. Cáceres; L. Cohen; C. Cuellar; G. García; V. Guzmán; S. Medina; W. Steinle; J. García

Universidad Nacional de Hurlingham

Actividad dirigida a estudiantes del cuarto año del Profesorado Universitario de Matemática.

Objetivos

- Abordar ciertas familias de ecuaciones diferenciales a partir de modelados de situaciones extra matemáticas (Biología).
- Utilizar la programación (Python) para explorar el modelo.
- Resolver un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas a través de métodos numéricos (Euler) que sólo pueden ser implementados con un ordenador.

Contexto

Si alguna vez ha estado nadando en un estanque, un lago o algún otro cuerpo de agua dulce estancada en la naturaleza, es posible que se haya preguntado qué otras cosas nadaban con usted. Hay cosas que quizás pueda ver, como peces, tortugas y patos, pero hay muchas más cosas que no puede ver, incluso si el agua está completamente clara. Esto se debe a que hay microorganismos diminutos que viven en masas de agua que no se pueden ver en absoluto, o al menos muy bien, sin la ayuda de un microscopio. Lo más probable es que uno de los pequeños microorganismos que lo acompañan sin que lo sepa, sea una especie de paramecio.

Fig. 1: Paramecium Caudatum

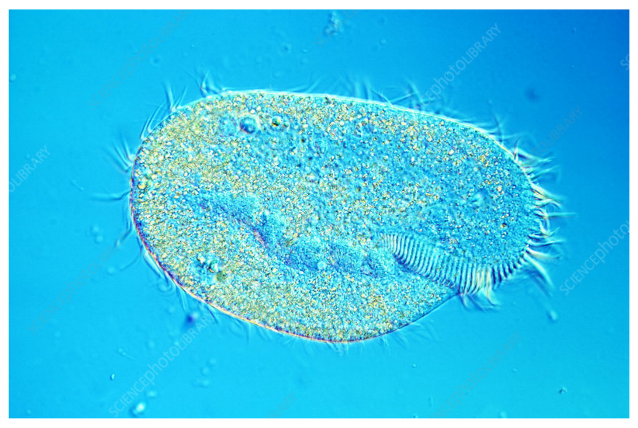

Fig. 2: Paramecium Aurelia

Dos clases de paramecios. ¡Son simpáticos!

Fig. 3: ¡Conoceme!

Euler *out of the box*

$$y' = f(x,y)\,, \quad y(x_0) = y_0 \qquad \begin{aligned} x_n &= x_0 + nh \\ y_n &= y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{aligned}$$

Evolución de las poblaciones

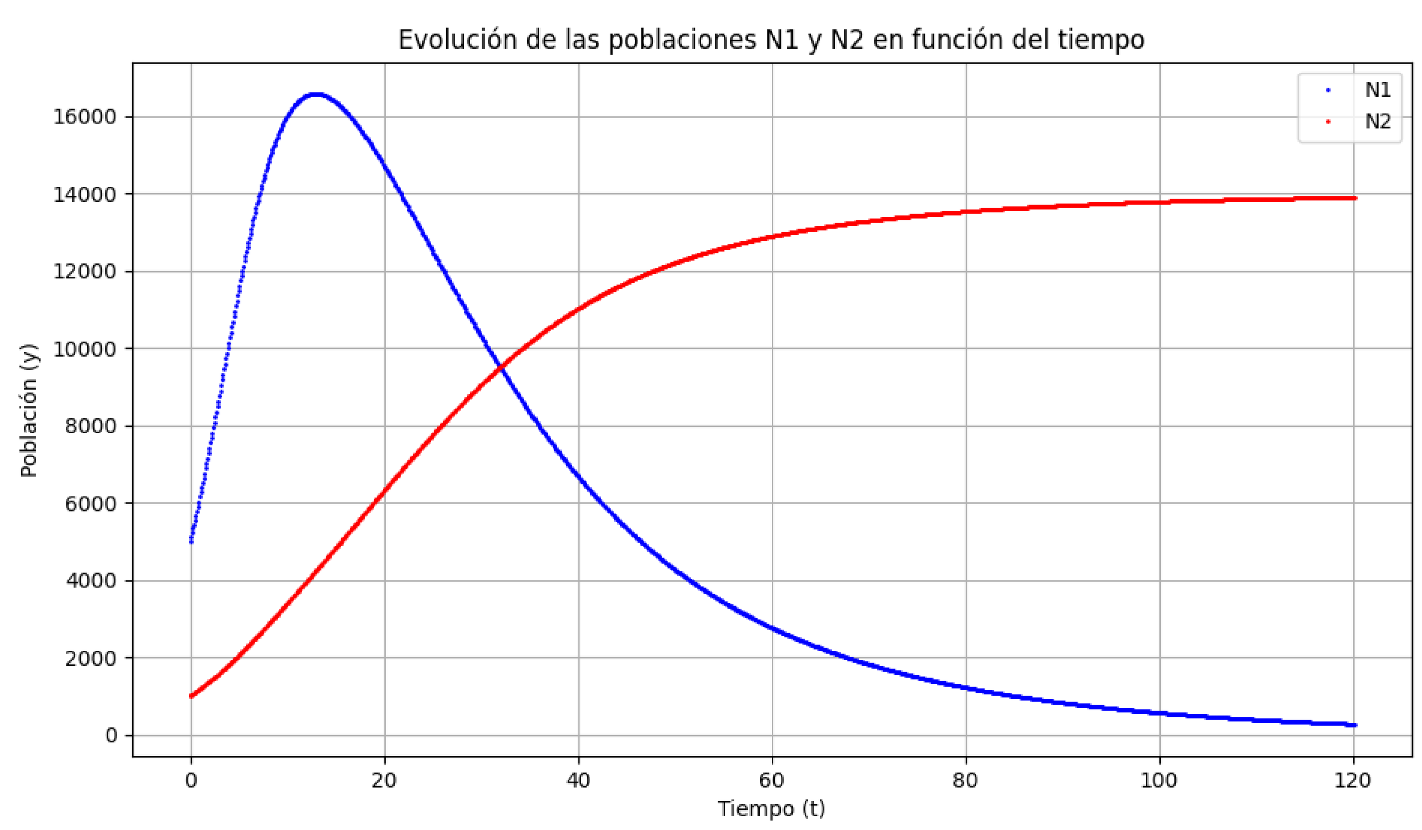

Fig. 4: Evolución usando Euler

Crecimiento logístico

Los biólogos han descubierto que en muchos sistemas biológicos la población crece hasta alcanzar un cierto estado estacionario. Matemáticamente:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) = rN\left(\frac{K-N}{K}\right)$$

En un contexto de competencia por recursos, las poblaciones se afectan mutuamente, lo que produce un sistema de ecuaciones acopladas.

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left(\frac{K_1 - N_1 - \alpha N_2}{K_1}\right)$$
$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left(\frac{K_2 - N_2 - \beta N_1}{K_2}\right)$$

La ecuación logística modela crecimientos demográficos denso-dependientes. Trabajando independientemente uno del otro, A. J. Lotka (1932) y Vito Volterra (1926) modelaron la competencia modificando la ecuación logística.

Diferenciales

Con un dato inicial $N(t_0) = N_0$ y permitiéndonos operar con diferenciales (si Leibniz lo hacía...)

$$\frac{dN}{dt} = f(N,t) \qquad \Longrightarrow \qquad N_1 - N_0 \approx f(N_0,t_0)(t_1 - t_0)$$
$$\frac{\Delta N}{\Delta t} \approx f(N_0,t_0) \qquad\qquad N1 \approx N_0 + f(N_0,t_0)(t_1 - t_0)$$

¡Recta tangente!

Código

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Define las ecuaciones logísticas modificadas para N1 y N2
def ecuacion_logistica_N1(y1, y2, alpha):
    return 0.3 * y1 * (1 - (y1 + alpha * y2) / 25000)

def ecuacion_logistica_N2(y1, y2, beta):
    return 0.2 * y2 * (1 - (y2 + beta * y1) / 14000)

# Definir condiciones iniciales y parámetros
y0_N1 = 5000
y0_N2 = 1000
h = 0.1
t = 0
tt = [0]
yy_N1 = [y0_N1]
yy_N2 = [y0_N2]
alpha = 2  # Coeficiente de competencia para N1 en relación con N2
beta = 0.3  # Coeficiente de competencia para N2 en relación con N1
```

```python
# Evolución de las ecuaciones utilizando Euler
tope = 120
while t < tope:
    y_N1 = y0_N1 + h * ecuacion_logistica_N1(y0_N1, y0_N2, alpha)
    y_N2 = y0_N2 + h * ecuacion_logistica_N2(y0_N1, y0_N2, beta)
    t = t + h
    tt.append(t)
    yy_N1.append(y_N1)
    yy_N2.append(y_N2)
    y0_N1 = y_N1
    y0_N2 = y_N2

# Graficar la evolución de ambas poblaciones en un mismo gráfico

fig, ax = plt.subplots(figsize=(11, 6))
ax.plot(tt, yy_N1, 'b.', markersize=2 ,  label='N1')
ax.plot(tt, yy_N2, 'r.', markersize=2 ,  label='N2')
ax.set_xlabel('Tiempo (t)')
ax.set_ylabel('Población (y)')
ax.set_title('Evolución de las poblaciones N1 y N2 en función del tiempo')
ax.legend()
ax.grid(True)
plt.show()
```

Fig. 5: Implementación de Euler en Python

Reflexión final

Destacamos la aparición del ordenador como una herramienta necesaria y práctica para poder simular un sistema extremadamente complejo de abordar analíticamente. Por otro lado, recuperamos un conocimiento estándar en la formación matemática (recta tangente) y le damos un sentido de herramienta que resulta central en la posibilidad de simular el modelo.

¡Buscamos datasets de ecología poblacional! Si tenés algún dato, nos ayudarías mucho escribiéndonos a javierpedro.garcia@unahur.edu.ar. ¡También estamos interesados en implementar modelados provenientes de otras ciencias!

LaTeX TikZposter