

A. ECUACIÓN LOGÍSTICA CON POBLACIÓN UMBRAL. Una mejora del modelo logístico incluye una población umbral. La población umbral se define como la población mínima necesaria para que la especie sobreviva. Usamos la variable T para representar la población umbral. Una ecuación diferencial que incorpora tanto el umbral de población T como la capacidad portadora K es

$$\frac{dP}{dt} = -rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) \left(1 - \frac{P}{T}\right)$$

donde r representa la tasa de crecimiento.

1. La población umbral es útil para los biólogos y se puede utilizar para determinar si una especie determinada debe colocarse en la lista de especies en peligro de extinción. Un grupo de investigadores australianos dice que ha determinado el umbral de población para que cualquier especie sobreviva: 5000 adultos. Por lo tanto, usamos $T = 5000$ como población umbral en este proyecto. Suponga que la capacidad portadora ambiental en Montana para los alces es de 25000. Establezca la ecuación utilizando la capacidad de carga de 25000 y el umbral de población de 5000. Suponga una tasa de crecimiento neto anual del 18%.
2. Dibuje el campo de direcciones de forma aproximada para la ecuación diferencial del paso 1, junto con varias soluciones para diferentes poblaciones iniciales, de manera de cubrir los diferentes escenarios posibles para la evolución de la solución $P(t)$. ¿Cuáles son las soluciones constantes de la ecuación diferencial? ¿A qué corresponden estas soluciones en el modelo de población original (es decir, en un contexto biológico)?
3. ¿Cuál es la población límite para cada población inicial que eligió en el paso 2? (Use el campo de direcciones para ver qué sucede, es decir, busque las asíntotas horizontales de sus soluciones).
4. Llegue al máximo nivel de refinamiento del gráfico de las soluciones dibujadas anteriormente a través de un análisis de función, incluido el gráfico de $\frac{dP}{dt}$ contra P . Justifique con detalle.
5. Compruebe que sus gráficos son aceptables aproximando $P(t)$ mediante el método de Euler y graficando dicha aproximación con Python.
6. Esta ecuación se puede resolver utilizando el método de separación de variables. Sin embargo, es muy difícil obtener la solución como una función explícita de t . Usando una población inicial de 18000 alces, resuelva el problema de valor inicial y exprese la solución como una función implícita de t , o resuelva el problema general de valor inicial, encontrando una solución en términos de r , K , T y P_0 .