Modelos Matemáticos

Práctica 1

Instituto de Educación
Universidad Nacional de Hurlingham

1. Reescribir las siguientes propiedades y reglas de derivación en términos de diferenciales.

   a) **(P1)**: $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.
   b) **(P2)**: $(kf(x))' = kf'(x)$ para todo $k \in \mathbb{R}$.
   c) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ [**Regla del producto**]
   d) Idem para [**Regla de la división**]
   e) En el caso de la regla de la cadena, $(f \cdot g)' = f'(g(x))g'(x)$, *deduzca la misma mediante la manipulación de diferenciales.*

2. Suponga que está considerando calcular una primitiva de $f(u)$. Muestre que si el argumento u se sustituye por una función del argumento x, $u = g(x)$, resulta

$$\int f(u)du = \int f(g(x))g'(x)dx$$

   Muestre un ejemplo de su autoría donde sea útil poner esto en práctica.

3. Deduzca el método de partes utilizando diferenciales.

4. Después de enterarse de los escándalos financieros como el caso de *Generación Zoe* y la caída de la *criptomoneda LUNA*, Tincho decidió aprender trading por su cuenta para tomar control de sus inversiones siguiendo a *youtubers.* Desde entonces, ha estado registrando sus pérdidas y ganancias en el mercado de futuros cripto apalancándose a 150x, como buen degen. Aunque algunas horas son buenas y otras no tanto, parece haber un patrón subyacente. ¿Puede construir un modelo que capte el comportamiento de sus resultados por hora y determine si su estrategia está funcionando? Para ello deberá cargar el archivo `tincho.cvs` que se encuentra en la carpeta Prácticas.

5. En el archivo `E_Coli.cvs` se tienen los datos de un cultivo de Escherichia Coli. Armar un modelo que sirva para predecir cuántos especímenes habrá en la hora 110.

6. Supongamos que la tasa de variación de una cantidad es $R(t) = R_0 e^{kt}$, donde $k > 0$. ¿Cómo podemos recuperar la cantidad $Q(t)$?

7. **¿Sabía Ud que...?**

   a) Si una cantidad crece exponencialmente, el tiempo que tarda en duplicarse permanece constante. Más específicamente, el **tiempo de duplicación** está dado por $\boldsymbol{t} = \frac{\ln(2)}{k}$. ¿Demuéstrelo.
   b) Si un bosque crece en forma exponencial y en los últimos ciento treinta y cuatro años se ha duplicado su masa vegetal, volverá a duplicarse la misma en los próximos ciento treinta y cuatro años, y así sucesivamente. Si en cambio sabemos que ese mismo bosque ha aumentado en los últimos 10 años en un 5.31%, podremos asegurar que cada diez años tendrá el 5.31% más de masa que al comenzar los mismos? Para poder apreciar este fenómeno, observe que

en general, para una exponencial $g(x) = y_0 e^x$, se tiene $\frac{g(x+h)}{g(x)} = e^h$. Utilice este hecho para demostrar lo afirmado arriba.

c) ¿Puede demostrarse en general, para una cantidad que crece de forma exponencial, que si se conoce un período de tiempo Δt en el que dicha cantidad haya aumentado un $x\%$, entonces puede asegurarse que siempre que transcurra un período de igual magnitud, aumentará el mismo $x\%$?

d) Si este fuese un compendio de ejercicios típicos de manipulación algebraica descontextualizada, se le pediría resolver: *Sea $g(x) = y_0 a^x$, $a > 0$. Determinar y_0 y a, sabiendo que $g(1) = 0.3$ y $g(3) = 0.012$; hallar x tal que $g(x)$ sea igual al 4% de $g(0)$*? Resuélvalo.

8. **Crecimiento poblacional**

   a) Considere una población de bacterias que crece de acuerdo a la función $f(t) = 200e^{0.02t}$, donde t se mide en minutos. ¿Cuántas bacterias están presentes en la población después de 5 horas (300 minutos)? ¿Cuándo llega la población a 100000 bacterias?

      (i) Llamemos Δt al tiempo que demoró llegar a 100000 bacterias. Verificar que la población se incrementó aproximadamente un 24% en este período. ¿Cuánto será el incremento en la mitad del tiempo? ¿Y en un cuarto del tiempo?

      (ii) Demuestre que el incremento no es proporcional al tiempo transcurrido. Es decir, si sabemos que en un período Δt, tenemos un incremento de $x\%$, entonces en un período $a\Delta t$ no se obtiene un incremento $ax\%$.

      (iii) ¿Cómo explica lo sucedido en (i). Justifique.

   b) Suponga que una población de peces crece exponencialmente. Un estanque se abastece inicialmente con 500 peces. Después de 6 meses, hay 1000 peces en el estanque. El propietario permitirá que sus amigos y vecinos pesquen en su estanque después de que la población de peces alcance los 10000. ¿Cuándo podrán pescar los amigos del dueño? Si hubiese tomado 9 meses en vez de 6, ¿cuánto deberían haber esperado los amigos?

9. **Decaimiento exponencial.**

   a) La **Ley de enfriamiento de Newton** dice que un objeto se enfría a una velocidad proporcional a la diferencia entre la temperatura del objeto y la temperatura del entorno. En otras palabras, si T representa la temperatura del objeto y T_a representa la temperatura ambiente en una habitación, entonces $T' = -k(T - T_a)$. Notemos que este no es el modelo correcto para el decaimiento exponencial. Queremos que la derivada sea proporcional a la función, y esta expresión tiene el término adicional T_a.

   b) Realice un cambio de variables apropiado para resolver este problema y llevarlo a la forma $y' = -ky$. Concluya que $T = (T_0 - T_a)e^{-kt} + T_a$.

c) Según baristas experimentados, la temperatura óptima para servir café es entre 68 y 79 grados. Suponga que se vierte café a una temperatura de 93 grados y después de 2 minutos en una habitación a 21 grados se ha enfriado a 82. ¿Cuándo se enfría el café por primera vez para servirlo? ¿Cuándo está demasiado frío el café para servirlo?

d) **Agotamiento de los recursos naturales**. Supongamos que la tasa, $r(t)$, a la que una nación extrae petróleo disminuye exponencialmente como $r(t) = r_0 e^{kt}$, donde $r_0 = 10^7$ toneladas por año es la tasa actual de extracción. Supongamos también que la estimación de la reserva total de petróleo es de 2×10^9 toneladas.
   (i) Encuentre la constante de decaimiento máxima k para la cual las reservas totales de petróleo durarán para siempre.
   (ii) Suponga que la tasa de extracción disminuye a una tasa que es el doble del valor $(2r(t))$ en la parte (i), ¿cuánto tiempo durarán las reservas totales de petróleo?

e) **Datación por radiocarbono.** Una de las aplicaciones más comunes de un modelo de decaimiento exponencial es la datación por carbono. El carbono-14 se desintegra (emite una partícula radiactiva) a una tasa exponencial regular y constante. Por lo tanto, si sabemos cuánto carbono había presente originalmente en un objeto y cuánto carbono permanece, podemos determinar la edad del objeto. La vida media del carbono-14 es de aproximadamente 5730 años, lo que significa que, después de tantos años, la mitad del material se ha convertido del carbono-14 original al nuevo nitrógeno-14 no radiactivo. Si hoy tenemos 100 g de carbono-14, ¿cuánto queda en 50 años? Si un artefacto que originalmente contenía 100 g de carbono y ahora contiene 10 g de carbono, ¿qué edad tiene? Redondear la respuesta a los cien años más cercanos.

10. ¿Qué edad tiene un cráneo que contiene una quinta parte de radiocarbono que un cráneo moderno? Tenga en cuenta que la vida media de radiocarbono es de 5730 años.

11. Una pileta de 40 mil litros comienza a vaciarse para llenar otra de 30 mil litros, con una velocidad de 100 litros sobre min. A las 6 horas su velocidad cambia, adquiriendo un comportamiento exponencial, de forma tal que cada 3hs se reduce a la mitad. ¿En qué momento se llena la segunda pileta?

12. **Vivos vs. muertos.** Normalmente, en la dinámica de crecimiento de una población, acontecen nacimientos y muertes. La tasa de crecimiento representa los efectos combinados de nacimientos y defunciones; es decir, $r = b - d$, donde b y d son las tasas relativas de natalidad y mortalidad, respectivamente. ¿Qué es mayor, el número de personas vivas en el Tierra en 2000 o el número de personas nacidas entre 1800 y 2000? ¿En qué año el número de personas nacidas desde 1800 igualó la población en ese año? Utilice los hechos de que la población mundial era de 1000 millones en 1800 y 6000 millones en 2000. Suponga un crecimiento

exponencial uniforme entre 1800 y 2000 con una tasa de natalidad relativa que es el doble de la tasa de mortalidad relativa.

13. **Población de uno.** Use el hecho de que la población mundial era de 1000 millones en 1800 y de 6000 millones en 2000, y suponga un crecimiento exponencial con una tasa constante. De acuerdo con este modelo, ¿en qué año la población mundial fue igual a 1?

14. Considere una población hipotética donde los nacimientos ocurren de golpe cada primavera, de forma tal que la población se ve incrementada en un 50%. Por otro lado, las muertes ocurren continuamente a lo largo del año, de forma tal que cada mes, hay un 2% de decesos. Suponiendo que la población inicial es de 1000 individuos:
    a) Haga un boceto del gráfico de la población que espera obtener.
    b) Haga un programa en Python que grafique la evolución de la población luego de 12 años.
    c) Expore gráficamente qué sucede al hacer $t \to 0$.