# Modelos Matemáticos

## Práctica 2

Instituto de Educación

Universidad Nacional de Hurlingham

1. Resuelva la ecuación $dy/dx = (x-5)/y^2$. Luego, utilizando un ordenador, haga un plot de las soluciones para $k = -500, -200, 0, 100, 300, 500$. Identifique cada curva con la solución al PVI $y(0) = x_0$ correspondiente.

2. Considere la ecuación diferencial $dy/dx = e^{-x^2}$. Sin ayuda del ordenador, bosqueje el gráfico de una solución $y = \phi(x)$ [Ayuda: analice la la derivada de $y$, la curvatura, y los límites en el infinito].

3. Con la ayuda de un ordenador, haga un campo de direcciones para la ED del pitem anterior y bosqueje una solución que cumpla $y(0) = 0$

4. V o F

   ☐ $y = 0$ e $y = \frac{1}{16}x^4$ satisface son 2 soluciones de la ecuación diferencial $dy/dx = xy^{\frac{1}{2}}$ y la condición inicial $y(0) = 0$.

   ☐ Las funciones

   $$y = \frac{1}{16}x^4, \quad -\infty < x < \infty$$

   y

   $$y = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{16}x^4 & x \geq 0 \end{cases}$$

   satisfacen que son 2 soluciones de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}}$ y la condición inicial $y(2) = 1$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

5. Respecto del ejercicio anterior, ¿qué hubiese respondido si comenzaba con un campo de direcciones de $dy/dx = xy^{\frac{1}{2}}$? Justifique.

6. En los siguientes problemas, utilice el ordenador para obtener un campo de direcciones para la ecuación diferencial dada. A mano, bosqueje una curva de solución aproximada que pase por cada uno de los puntos dados.

   **a)** $\frac{dy}{dx} = x$
   - **(i)** $y(0) = 0$
   - **(ii)** $y(0) = -3$

   **b)** $\frac{dy}{dx} = x + y$
   - **(i)** $y(-2) = 2$
   - **(ii)** $y(1) = -3$

   **c)** $\frac{dy}{dx} = -x$
   - **(i)** $y(1) = 1$
   - **(ii)** $y(0) = 4$

   **d)** $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}$
   - **(i)** $y(0) = 1$
   - **(ii)** $y(-2) = -1$

   **e)** $\frac{dy}{dx} = 0.2x^2 + y$
   - **(i)** $y(0) = \frac{1}{2}$
   - **(ii)** $y(2) = -1$

   **f)** $\frac{dy}{dx} = xe^y$
   - **(i)** $y(0) = -2$
   - **(ii)** $y(1) = 2.5$

   **g)** $\frac{dy}{dx} = y - \cos(\frac{\pi}{2}x)$
   - **(i)** $y(2) = 2$
   - **(ii)** $y(-1) = 0$

   **h)** $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{y}{x}$
   - **(i)** $y(-\frac{1}{2}) = 2$
   - **(ii)** $y(\frac{3}{2}) = 0$

7. Cree un campo de direcciones para las siguientes ecuaciones diferenciales y grafique las posibles curvas solución. Luego escoja un valor inicial y grafique (encima del campo) la solución que se obtiene de aplicar el método de Euler.

   **a)** $\frac{dy}{dt} = -0.4(t - 72)$ **b)** $\frac{dy}{dx} = 3x + 2y - 4$ **c)** $\frac{dy}{dx} = x^2 \cos(x)$

   **d)** $\frac{dy}{dt} = te^t$ **e)** $\frac{dy}{dx} = 1 - y^2 - x^2$ **f)** $\frac{dy}{dt} = t^2 \sin(y)$

   **g)** $\frac{dy}{dx} = 3y + xy$

8. Una ecuación no lineal famosa es la ecuación logística:

$$\frac{dy}{dt} = ay - by^2.$$

   Muestre que esta ecuación, y su forma en términos de $K$, son equivalentes. Muestre en el proceso como se relacionan $a$, $b$ y $K$. ¿Cuál es la más adecuada para un modelado poblacional?

9. Resuelva la ecuación logística de forma analítica cuidando de que quede en una forma compartida por alguna fuente bibliográfica. Luego muestre que la sustitución $z = 1/y$ convierte la logística en lineal. Redescubra la solución de la ecuación logística utilizando este hecho (investigue en el proceso cómo se resuelven las EDOs lineales).

10. Consideremos la población de venado cola blanca (Odocoileus virginianus) en el estado de Kentucky. El Departamento de Recursos de Pesca y Vida Silvestre de Kentucky (KDFWR) establece pautas para la caza y la pesca en el estado. Antes de la temporada de caza de 2004, estimó una población de 900.000 ciervos. Johnson señala: Una población de ciervos que tiene mucho que comer y no es cazada por humanos u otros depredadores se duplicará cada tres años'". (George Johnson, El problema de la explosión de poblaciones de ciervos no tiene soluciones atractivas""", 12 de enero de 2001). Esto supone que la población crece exponencialmente, lo cual es razonable, al menos a corto plazo, con abundante suministro de alimentos y sin depredadores. El KDFWR también informa sobre las densidades de población de venados en 32 condados de Kentucky, cuyo promedio es de aproximadamente 10 ciervos por kilómetro cuadrado. Supongamos que esta es la densidad de ciervos para todo el estado (15340 kilómetros cuadrados). La capacidad de carga $K$ es 15340 kilómetros cuadrados multiplicados por 10 ciervos por km cuadrado, o 150340 ciervos.
    a) Resuelva el problema de valor inicial.
    b) Según este modelo ¿cuál será la población dentro de 3 años? Recuerde que el tiempo de duplicación previsto Johnson para la población de ciervos fue de 3 años. ¿Cómo se comparan estos valores?
    c) Supongamos que la población lograra llegar a 1200000 ciervos. ¿Qué predice la ecuación logística? ¿Qué le pasará a la población en este escenario?
    d) ¿Cuales son las soluciones de equilibrio y de qué tipo son?

11. Consideremos la ecuación diferencial $y' = (x-3)(y^2-4)$, con la condición inicial $y(0) = 0.5$.
    a) Grafique el campo de direcciones junto con la solución correspondiente.
    b) ¿De qué tipo son los equilibrios? Justifique.

12. **La ecuación logística es autónoma**. Esto quiere decir que $f$ depende sólo de $y$ y no de $t$: $dy/dt = f(y)$. Esto significa que el tiempo $t$ no es esencial en los gráficos. La gráfica de $f(y)$ contra $y$ es la clave. Para la ecuación logística, la parábola $f(y) = ay - by^2$ *dice todo*. Es importante (y no difícil) poder decidir la estabilidad sin una fórmula para $y(t)$. Todo depende de la derivada $df/dy$ en el valor estacionario $y = Y$. Muestre que el estado estacionario $y = Y$ es estable si $df/dy < 0$ en $y = Y$. Ayuda: llame $c = (df/dy)(Y)$ y use que cerca del estado estacionario, $f(y)$ se parece a $c(y - Y)$.

13. Aplique lo visto en el ítem anterior para caracterizar analíticamente los estados estacionarios de la ecuación $ay - by^2$.

**Ecuación logística con cosecha.** ¿Qué sucede cuando una población biológica es manejada por humanos? Esto sucede en muchas áreas, por ejemplo, en las pesquerías. Por lo tanto, además de los factores de las tasas de reproducción y la competencia por los recursos, debemos considerar el efecto de la pesca en la tasa de crecimiento. Si estuviésemos estudiando la gestión forestal, el factor análogo sería la tala. Si se tratase de la gestión agrícola, podríamos estar interesados en cosechar trigo. El término general para eliminar miembros de una población biológica gestionada es la **cosecha**.

14. Supongamos que la ecuación logística además incluye una tasa constante de cosecha $-h$. Esto reducirá la tasa de crecimiento $dy/dt$. Considere la ecuación $dy/dt = 4y - y^2 - 3$. ¿Cuáles son los estados estacionarios? Analice a través del gráfico $y' = f(y)$ **contra** $y$.

15. Con el mismo razonamiento que el ítem anterior, realice un análisis de la naturaleza de los estados estacionarios (estables o inestables) para $h = 4$ y $h > 4$. En uno de los casos decimos que hay una **cosecha crítica** y en el otro **sobreexplotación**. Determine qué nombre corresponde a cada caso.

16. **Primero** resuelva $dy/dt = 4y - y^2 - h$ para $h = 3$, $4$ y $5$. **Segundo** realice un campo de direcciones y analice la evolución de las posibles soluciones (determine los casos relevantes) según donde comience $y$. **Finalmente** grafique las soluciones usando el método de Euler.

17. La población de truchas en un estanque está dada por $P' = 0.4P(1 - P/10000) - 400$, donde 400 truchas son capturadas por año. Utilice Python para graficar un campo de direcciones y extraer algunas soluciones de muestra. ¿Qué espera del comportamiento?

18. En el problema anterior, ¿cuáles son las estabilidades de los equilibrios $0 < P1 < P2$?