

# MODELOS MATEMÁTICOS

## Trabajo Práctico 1

Entrega: semana del 22 de octubre de 2025

### BUENAS PRÁCTICAS

- Este trabajo incluye instancias de investigación. Deberá citar las fuentes debidamente en caso de que corresponda.
- Para aprobar el trabajo deberá tener completado de forma correcta al menos el 70% del mismo. Obs: Ud no sabe cuánto *pesa* cada parte.
- Para entregar el trabajo deberá completar el formulario de entrega y seguir sus instrucciones.

### A. BACKGROUND

- 1) Use el solucionador numérico `solve_ivp` de la librería `scipy` para graficar la solución del problema de valor inicial  $y' = -2xy + 1$ ,  $y(0) = 0$ . A partir de ello haga un gráfico. Explique cómo interpretó la documentación respecto del uso que le dió atendiendo a los siguientes **requisitos de entendimiento**:
  - i) Qué hace el solucionador.
  - ii) Qué método utiliza en su implementación.
  - iii) Qué devuelve el solucionador y cómo lo utiliza Ud. para graficar.A partir de la salida, averigüe  $y(1)$ .
- 2) Resuelva el problema de forma analítica con alguna técnica hallada en la bibliografía respecto de ecuaciones diferenciales lineales. Explique el razonamiento fundacional de la técnica.
- 3) Use el solucionador algebraico `dsolve` del módulo `sympy` para hallar la misma solución del ítem anterior.

## B. UN POCO DE TEORÍA

La sucesión de Euler se define como

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n), \quad y' = f(t, y). \quad (1)$$

En la secuencia de valores  $y_1, y_2, y_3, \dots$  generada a partir de (1), usualmente el valor de  $y_1$  no concuerda con la solución real en  $x_1$  porque el algoritmo solo proporciona una aproximación lineal a la solución. Este error se denomina **error de truncamiento local**. Se produce en cada paso; es decir, si asumimos que  $y_n$  es preciso, entonces  $y_{n+1}$  contendrá un error de truncamiento local.

- 1) Desmostrar que el error de truncamiento local es orden  $h^2$ , denotado  $O(h^2)$ , y dar una cota para el mismo. Demostrar además que si  $h$  es reducido a la mitad, el error se reduce en  $1/4$ . Explique con palabras simples y precisas la idea esencial detrás de la notación  $O$  grande.
- 2) Identifique algún método trabajado en la materia *Computación Científica* susceptible de ser analizado bajo la notación  $O$  grande en análisis de su error y desarrolle el mismo demostrando su orden. ¿Hay alguna relación matemática con el concepto de *orden de convergencia* visto en la materia? Justifique.
- 3) En el ítem anterior, asumimos que el valor de  $y_n$  era exacto en el cálculo de  $y_{n+1}$ , pero no lo es porque contiene errores de truncamiento locales de pasos anteriores. El error total en  $y_{n+1}$  es una acumulación de los errores de cada paso anterior. Este error total se denomina **error de truncamiento global**. La demostración excede a los contenidos del curso, pero **sí es posible intuir su orden** mediante una observación sencilla entre cantidad de pasos y proporcionalidad. A partir de dicho razonamiento, indique cuál debería ser el orden.

## C. UN POCO DE PRÁCTICA

El método numérico definido por la fórmula

$$y_{n+1} = y_n + h \frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^*)}{2} \quad (1)$$

$$y_{n+1}^* = y_n + h f(x_n, y_n) \quad (2)$$

Es comúnmente llamado **método de Euler mejorado**.

- 1) Hacer una interpretación gráfica del método considerando qué sucede de  $x_0$  a  $x_1$ .
- 2) Demostrar que el método de Euler mejorado tiene error de truncamiento local  $O(h^3)$ . ¿Cómo sería el error de truncamiento global?
- 3) Implementar este método en la ecuación diferencial del ejercicio A.1) con una función que controle el paso  $h$ , el intervalo de aplicación y el punto inicial. Superponer ambos gráficos.
- 4) Determine si es posible verificar las cotas de truncamiento local de ambos métodos. Construya una función de Data Frame apropiada con columnas apropiadas para tal fin y exhiba una conclusión.