3. Cuadrados mínimos

miércoles, 2 de noviembre de 2022 08:06

1) Considere las alturas $b_i = 0, 8, 8, 20$ alcanzadas en $t_i = 0, 1, 3, 4$.
¿Cuál es la mejor recta $C + Dt$ que aproxima en el sentido de los cuadrados mínimos?

$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $a \cdot b \rightsquigarrow \underbrace{(1,2)}_{a^T} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Así pienso el prod escalar a través del prod matricial

OBS:
$$\overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}^{A} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot 2 + a_{12}(-1) \\ a_{21} \cdot 2 + a_{22}(-1) \end{pmatrix}$$
$$= 2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}}_{col_1(A)} + (-1) \underbrace{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}}_{col_2(A)}$$

Haga un Dibujo.

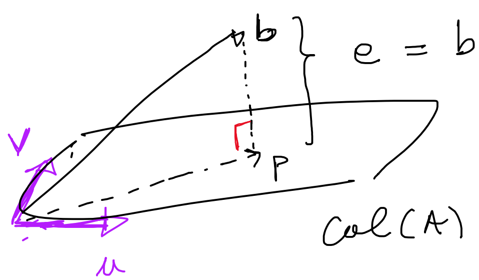
Sol:
$$C + D.0 = 0$$
$$C + D\,1 = 8$$
$$C + D.3 = 8$$
$$C + D.4 = 20$$

$$\rightsquigarrow \underbrace{\begin{array}{cc} u & v \\ \left[\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right. & \left.\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}\right] \end{array}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \\ 20 \end{bmatrix}}_{b}$$

No tiene sol

Pero podemos buscar $\hat{x}$ tq $A\hat{x}$ esté lo más cerca de b

y como $p = A\hat{x}$ = comb lineal de las cols de A $\longrightarrow$ p vive en el subesp col de A



$e = b - A\hat{x}$ es $\perp$ col(A)

$e \perp u$

$e \perp v$

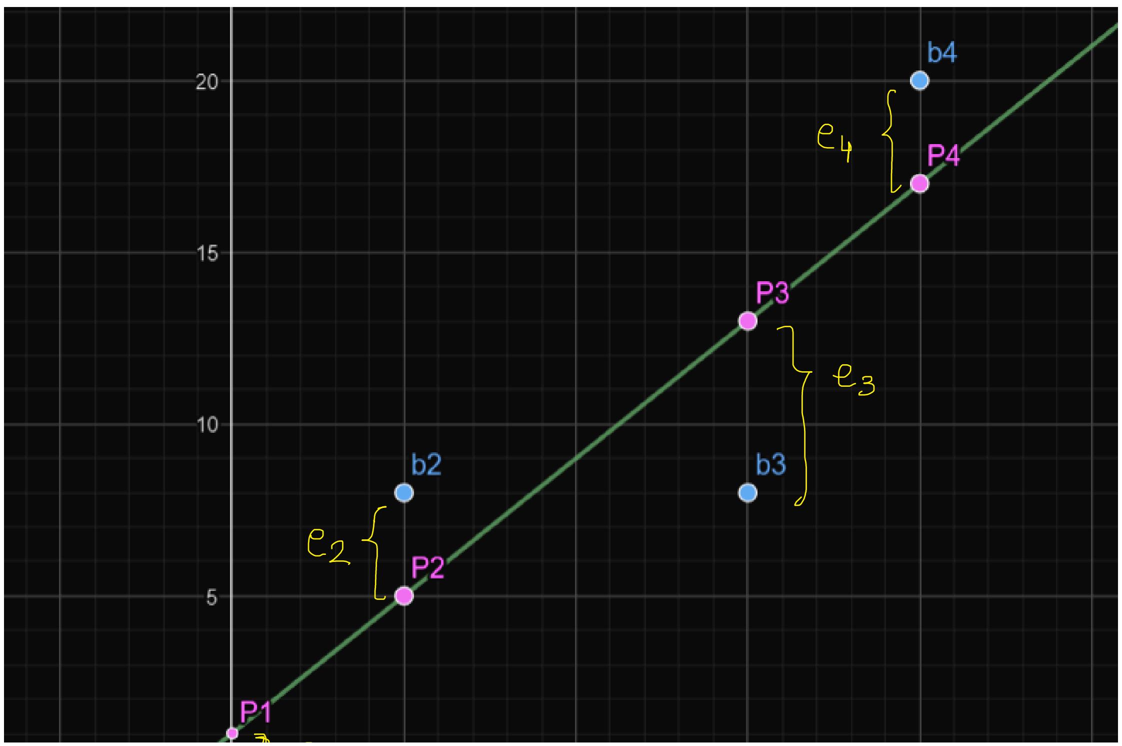
$$\left.\begin{array}{l} u.(b - A\hat{x}) = 0 \\ v.(b - A\hat{x}) = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} u^T(b - A\hat{x}) = 0 \\ v^T(b - A\hat{x}) = 0 \end{array}\right\} \overbrace{\begin{bmatrix} u^T \\ \hline v^T \end{bmatrix}}^{A^T} \cdot (b - A\hat{x}) = 0$$

$$A^T b = A^T A \hat{x} \rightsquigarrow \begin{cases} \hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b \\ P = A\hat{x} = \underbrace{A(A^T A)^{-1} A^T}_{P \,=\, \text{matriz proy}} b \end{cases}$$

la cuenta da $\hat{x} = (1, 4)$

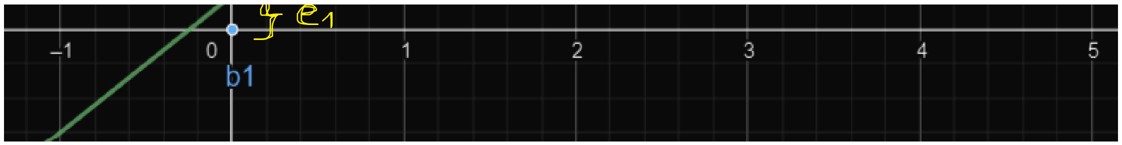
$p = (1, 5, 13, 17)$

$e = (-1, 3, -5, 3)$



$E = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2$

$E = 44$



¿Cómo se hace utilizando análisis? ¿Cómo sería utilizar las ecuaciones normales (la fórmula)?

2) ¿Cuál es la mejor parábola $C + Dt + Et^2$ que aproxima las alturas $b = 6, 0, 0, 2$ cuando $t = 0, 1/3, 1, 2$? Resolver por álgebra y por análisis. Ubicar los p_i y los e_i.

Busco

$$C + D\cdot 0 + E\,0 = 6$$

$$\vdots$$

$$C + D\,2 + E\cdot 4 = 2$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1/3 & 1/9\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}C\\ D\\ E\end{bmatrix}}_{\hat{x}} = \begin{bmatrix}6\\ 0\\ 0\\ 2\end{bmatrix}$$

El = no tiene sol!

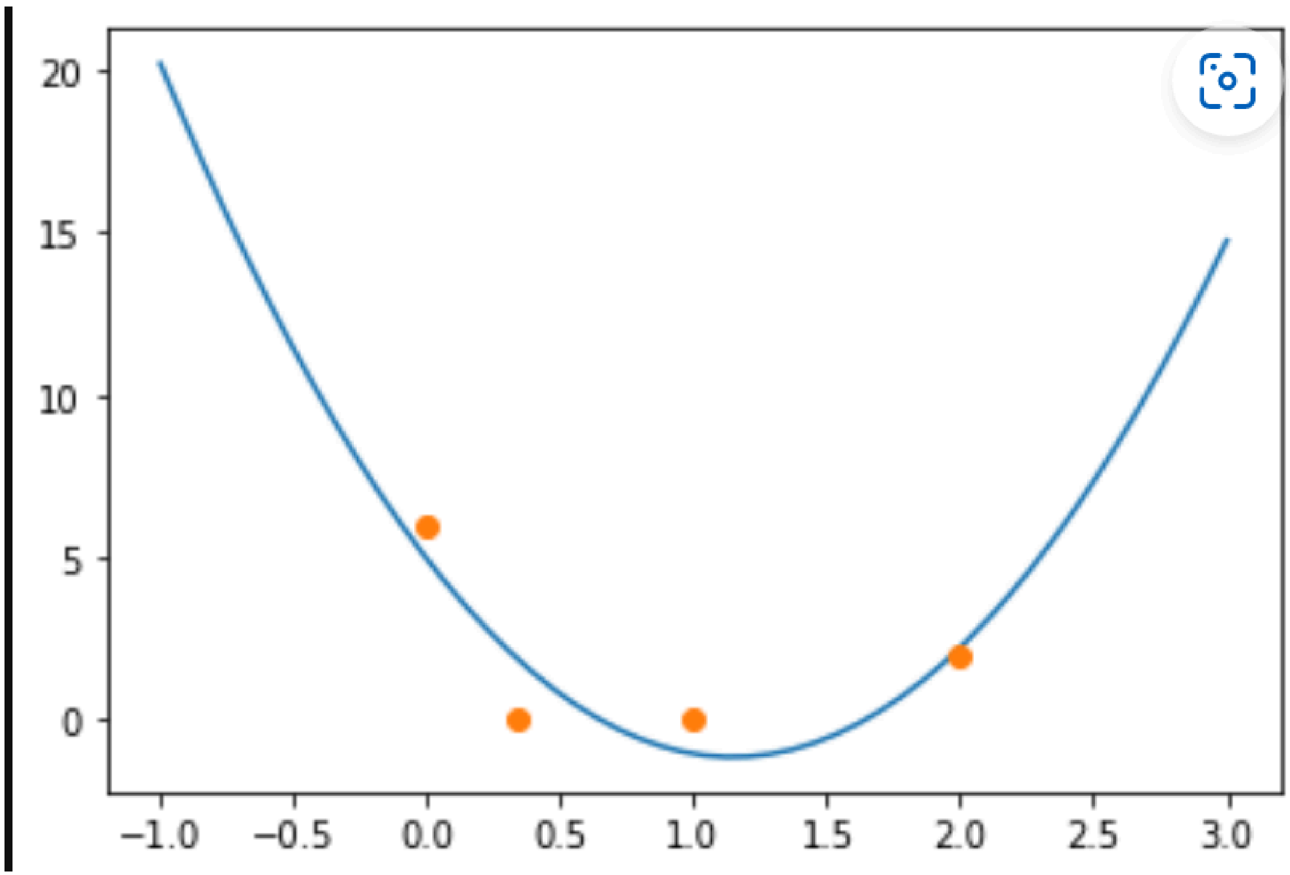
p = Proyección sobre col(A)

OJO: Ahora col(A) tiene dim

Sé que $b - A\hat{x} \perp col(A)$ y eso me llevo a

$$A^T A \hat{x} = A^T b$$

$\hat{x} =$ (4.939393939393943, -10.636363636363635, 4.636363636363634)



$$\frac{dP}{dt} = r.P$$

$$\frac{d}{dt}(f+g) = \frac{df}{dt} + \frac{dg}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} f(g(x)) = \frac{df}{dt}(g(x)) \cdot \frac{dg}{dg}$$

$$= \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dt}$$