

# COMPUTACIÓN CIENTÍFICA

## PRÁCTICA 2

INSTITUTO DE EDUCACIÓN



UNIVERSIDAD  
NACIONAL DE  
HURLINGHAM

- 1) Usar el método de bisección para encontrar soluciones con un error menor que  $10^{-3}$  para  $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$  en los intervalos  $[0, 1]$ ,  $[1, 3.2]$  y  $[3.2, 4]$ . Use que  $x = 3$  es raíz de este polinomio para obtener representantes de sus raíces en los que puede confiar hasta 10 cifras decimales [ $\rho \leq 5 \times 10^{-t}$ ]. ¿Cuántas iteraciones son necesarias si se quiere aproximar con 3 cifras significativas?
- 2) Aproxime  $\sqrt{3}$  de forma correcta hasta  $10^{-4}$  usando el algoritmo de bisección. [Ayuda: considere  $x^2 - 3$ ].
- 3) Muestre que  $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$  tiene una raíz en  $[1, 2]$ . Cree un código en python que aplique bisección a  $f$  en este intervalo y que como output brinde una tabla

$n$	$a_n$	$b_n$	$p_n$
1	0	2	1
2	1	2	1.5
3	1.5	2	1.75
...	...	...	...

- 4) Analizar por qué en el cálculo del punto medio es conveniente realizar la cuenta  $p = a + (b - a)/2$  en vez de  $\hat{p} = (b + a)/2$ . Considere una máquina con aritmética decimal de dos dígitos. De un ejemplo donde el cálculo de  $\hat{p}$  caiga fuera del intervalo original. Por otro lado, de un ejemplo donde se produzca *overflow*. ¿Es posible replicar estos ejemplos en Python?
- 5) Sea  $f(x) = (x - 1)^{15}$ . Explique por qué utilizar como criterio de STOP  $f(x_n) < \text{TOL}$  no es adecuado para hallar una buena aproximación de la raíz  $\alpha = 1$ . ¿Qué criterio de STOP conviene utilizar?
- 6) ¿Cuánta *precisión*?
  - a) ¿Cuántos dígitos binarios de precisión se ganan en cada paso del método de bisección?, ¿cuántos dígitos decimales?, ¿cuántos pasos se requieren para cada dígito decimal de precisión?
  - b) Decida sobre la veracidad de la siguiente frase y justifique. *Como  $\log_2(10) \approx 3.32$ , necesitamos entonces 3.32 pasos de bisección por cada dígito decimal.*
- 7) Aplicar el método de bisección para hallar una solución a  $x = \cos(x)$  en el intervalo  $[0, \frac{\pi}{4}]$ . Comparar con el método Regula Falsi. ¿Cuál converge más rápido? ¿Cuál es la velocidad de convergencia de cada método?
- 8) En el ejercicio 7 investigue en Python los cocientes  $(x_{n+1} - \alpha)/(x_n - \alpha)$ . ¿Puede decir algo acerca del tipo de convergencia?
- 9) Considere la función  $g(x) = \sqrt{x}$ .

- a) Caracterice los subintervalos  $I \subset [0, 1]$  para los cuales  $g$  cumple las hipótesis del Teorema del Punto Fijo. Justifique el cumplimiento de las mismas y establezca el punto fijo  $p$  al cual converge la sucesión  $p_n$ ?
  - b) ¿Qué sucede con la iteración si se escoge  $p_0 > 0$  arbitrariamente cercano a 0? ¿Cómo relaciona esto con el ítem anterior?
  - c) Caracterice los subintervalos  $I \subset [0, 1]$  para los cuales la iteración de punto fijo no converge. Acompañe desde lo gráfico para cada ítem.
- 10) ¿V o F?
- a) Si  $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , entonces existe  $p \in [0, 1]$  tal que  $g(p) = p$ .
  - b) Si  $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  es una función continua, entonces existe  $p \in [0, 1]$  tal que  $g(p) = p$ .
  - c) Si  $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  es una función que no es continua, entonces existe  $p \in [0, 1]$  tal que  $g(p) = p$ .
- 11) Demuestre que si  $p$  es un punto fijo de una función derivable  $g$ , entonces:
- a) Si  $|g'(p)| > 1$ ,  $p$  es un repulsor, es decir, la sucesión  $x_n$  se aleja de  $p$ .
  - b) Si  $|g'(p)| < 1$ ,  $p$  es un atractor, es decir, la sucesión  $x_n$  converge a  $p$ .
  - c) ¿Qué sucede si  $|g'(p)| = 1$ ?. Dar un ejemplo gráfico para cada uno de los ítems anteriores.
- 12) En la demostración del teorema de punto fijo se utiliza que  $g : I \rightarrow I$ . ¿Por qué esto es necesario? Si ahora ya sabemos que  $g$  posee un punto fijo en cierto intervalo  $J$ , ¿es necesario conseguir un intervalo  $I$  tal que  $g : I \rightarrow I$ ? Justifique.
- 13) Considere la función  $f(x) = -5x^3 + 15x^2 - 15x + 5$ .
- a) Para cada raíz de  $f$ , encuentre un intervalo que la contenga de forma aislada. Demuestre este hecho desde la matemática.
  - b) En relación con el ítem anterior, ¿Qué sucede si aplica el método de Regula Falsi en el intervalo  $[0.8, 1.3]$ ?
  - c) Utilice bisección en el mismo intervalo. ¿Cómo explica el comportamiento en cada método?
  - d) ¿Es posible hallar la raíz utilizando el método de punto fijo? Argumente en varios niveles: desde lo gráfico haciendo el diagrama de telaraña, desde lo teórico analizando las condiciones de convergencia, y desde lo experimental utilizando Python.
  - e) ¿Qué método resultó más conveniente? Justifique minuciosamente.
- 14) Sea  $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right) \ln(x) + \frac{x}{10} + 1$ .
- a)  $f$  posee una única raíz. Caracterizar todos los pares  $(a_1, b_1)$  para los cuales es posible iniciar la sucesión de Regula Falsi de modo tal que resulte convergente. Argumentar desde lo gráfico.

- b) Considere un par  $(a_1, b_1)$  de los hallados en el ítem anterior. ¿Qué sucede si iniciamos el método de la secante con el mismo? ¿Es posible implementar el método de la secante? Graficar y observar que siempre falla.
- c) ¿Es posible plantear la búsqueda de la raíz, de forma exitosa, mediante el método de punto fijo? Argumente en todos los niveles como en.
- 15) Considere  $f(x) = (-(x-2)^{1/3} - x)/x + 1.2$ .
- a)  $f$  posee una raíz  $\alpha$  en el intervalo  $[0, 5]$ . Caracterizar todos los pares  $(a_1, b_1)$  para los cuales es posible iniciar la sucesión de la secante de modo tal que resulte convergente a  $\alpha$ . Argumentar desde lo gráfico.
- b) ¿Es posible plantear la búsqueda de la raíz, de forma exitosa, mediante el método de punto fijo? Argumente en todos los niveles.
- 16) Analizar usando el Método de Newton.
- a) Considere  $f(x) = x^3 - 3x + 2$ . Compruebe usando Python que la convergencia a la raíz  $\alpha = -2$  es cuadrática. Produzca un código que tenga como output una tabla cuyas columnas son  $n$  (el número de iteración),  $p_n$ ,  $|x_{n+1} - x_n|$ ,  $E_n = |x - x_n|$ ,  $E_{n+1}/E_n$  y  $E_{n+1}/E_n^2$ . Corra el mismo hasta  $n = 4$  comenzando en  $x_0 = -2.4$ .
- b)  $f(x) = x^3 - 3x + 2$  Corra el código hecho en el ítem anterior para investigar la convergencia a la raíz  $\alpha = 1$  comenzando en  $p_0 = 1.2$ . ¿Cómo es la convergencia? Desarrolle.
- 17) Implemente los métodos de bisección, Newton, Regula Falsi y secante para resolver ecuaciones no lineales en una dimensión, y pruebe sus implementaciones encontrando al menos una raíz para cada uno de los siguientes ecuaciones ¿Qué tasa de convergencia se logra en cada caso?
- a)  $x^3 - 2x - 5 = 0$ .
- b)  $e^{-x} = x$ .
- c)  $x \sin(x) = 1$ .
- d)  $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$ .
- 18) Muestre que en el método de la secante, conforme avanza la iteración, esta se asemeja a la iteración de Newton.
- 19) Raíces múltiples.
- a) Caracterice un polinomio que posee una raíz de multiplicidad  $k$ .
- b) Vincule la multiplicidad de una raíz en un polinomio, con su derivada. ¿Esta vinculación da lugar a una *caracterización*?
- c) Sea  $f$  una función *lo suficientemente buena*. Sin conocer la estructura de  $f$ , ¿cómo definiría la noción de raíz de orden  $k$  en  $x = p$  para  $f$ ?
- d) Probar que si la ecuación  $f(x) = 0$  tiene una raíz de orden  $k$  en  $x = p$ , entonces existe una función continua  $h(x)$  tal que  $f(x)$  se puede expresar como el producto  $f(x) = (x - p)^K h(x)$ , donde  $h(p) \neq 0$ . [Ayuda: Usar Taylor de forma apropiada.]

- e) ¿Está en condiciones de poner en palabras qué hecho relevante muestra este ejercicio?
- 20) Usar para probar que si  $f$  tiene una raíz de orden  $k$  en  $x = p$ , entonces el método de Newton deja de converger con velocidad cuadrática. ¿Se puede arreglar el método para recuperar dicha velocidad?
- 21) Mejorando Newton
- a) Sea  $\alpha$  una raíz doble de  $f$ . Demuestre que el método de Newton *doblemente relajado*
- $$x_{n+1} = x_n - 2 \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$
- si converge a  $\alpha$ , lo hace al menos cuadráticamente. Obtener la condición bajo el cual el orden de convergencia es exactamente 2, y determine el error asintótico constante  $c$  en este caso.
- b) ¿Cuál es el enunciado análogo en el caso de una raíz de multiplicidad  $k$ ?
- 22) IRINA LA GAMER

Irina es una joven apasionada por los videojuegos. A veces, pierde la noción del tiempo y se sumerge en partidas durante horas. Su madre, preocupada por el exceso de tiempo que Irina pasa frente a la pantalla, decidió consultar a un grupo de estudiantes avanzados que ya habían aprobado Computación Científica. Su objetivo era crear un desafío matemático computacional para Irina, que determinaría cuánto tiempo podría dedicar a los videojuegos.

Así su madre le entregó un papel que rezaba lo siguiente:

$$f(x) = (e^x)/(\sqrt{x} + kx), \quad k > 0$$

La tarea consistía en elegir un valor de  $k$ , y el tiempo que Irina podría jugar estaría determinado por la raíz de la derivada de  $f$ . Además, contaría con la ayuda de estudiantes actuales de Computación Científica para resolver el problema y profundizar sus conocimientos en la interacción.

Irina quedó sorprendida por el enfoque inesperado de su madre, la cuál añadió solemnemente 🙌 😊

–Jugar videojuegos sin parar es como beber café torrado continuamente. Al principio puede ser satisfactorio, pero sobreestimula tus receptores de recompensa y pierdes la capacidad de apreciar las pequeñas cosas.

Al oír estas profundas palabras 😬, Irina aceptó el reto con renovado interés. Después de todo, le vendría bien mejorar sus habilidades matemáticas.

- a) Ayudar a Irina a determinar cuánto podrá jugar como máximo. Para ello haga un plot de las raíces de  $f'$  en función de  $k$ . Se valorará la simplicidad de las expresiones que intervengan en su resolución y la eficiencia de la misma.

- b) El cerebro de Irina no estaba preparado para ceder sus interminables dosis de dopamina provenientes de los videojuegos, por lo que impulsó a esta a proponer si podía modificar la función para poder jugar un poco más. La madre consultó a los estudiantes avanzados y le sugirieron que era posible hacer una modificación, pero que tampoco se engañe, *modificar* es una palabra muy amplia. Ayude a Irina con la modificación si sólo es posible *añadir* constantes a  $f$  y el tiempo de juego no debe exceder más de 4 hs. Muestre la función  $f$  modificada y justifique, como la misma produce la cantidad de horas que irina podrá jugar.

23) La ecuación

$$xe^{-x} = \varepsilon$$

puede resolverse por el método de Punto Fijo mediante una adaptación adecuada.

- a) Explicar dicha adaptación y justificar por qué funcionaría y cómo, desde la teoría.
- b) A medida que  $\varepsilon$  se hace más pequeño y  $x$  grande, la dinámica del producto puede permanecer pequeña para que así la ecuación tenga solución. Queremos ver cómo evolucionan dichas soluciones a medida que achicamos  $\varepsilon$  y para ello pretendemos graficarlas. Hacer varios plots con  $10^5$  muestras, en los intervalos  $[10^{-20+5k}, 10^{-19+5k}]$  para  $k = 0, 1, 2$ . ¿Cómo dibujaría el gráfico que relaciona las soluciones con los  $\varepsilon$ ? Justifique la elección del valor inicial para la iteración y la cantidad de iteraciones.
- c) ¿Qué puede decir acerca de la velocidad de convergencia a medida que  $\varepsilon$  es cada vez más pequeño? ¿Reconsideraría modificar su código?
- d) Argumente sobre la conveniencia o no, de utilizar el método de Newton con la función original. Apóyese tanto en lo gráfico, cómo en lo numérico usando Python.