Computación Científica

Práctica 2

Instituto de Educación

Universidad Nacional de Hurlingham

1) Usar el método de bisección para encontrar soluciones con un error menor que 10^{-3} para $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$ en los intervalos $[0, 1]$, $[1, 3.2]$ y $[3.2, 4]$. Use que $x = 3$ es raíz de este polinomio para obtener representantes de sus raíces en los que puede confiar hasta 10 cifras decimales $[\rho \leq 5 \times 10^{-t}]$. ¿Cuántas iteraciones son necesarias si se quiere aproximar con 3 cifras significativas?

2) Aproxime $\sqrt{3}$ de forma correcta hasta 10^{-4} usando el algoritmo de bisección. [Ayuda: considere $x^2 - 3$].

3) Muestre que $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ tiene una raíz en $[1, 2]$. Cree un código en python que aplique bisección a f en este intervalo y que como output brinde una tabla

n	a_n	b_n	p_n
1	0	2	1
2	1	2	1.5
3	1.5	2	1.75
...	...	...	...

4) Analizar por qué en el cálculo del punto medio es conveniente realizar la cuenta $p = a + (b - a)/2$ en vez de $\hat{p} = (b + a)/2$. Considere una máquina con aritmética decimal de dos dígitos. De un ejemplo donde el cálculo de $\hat{p}$ caiga fuera del intervalo original. Por otro lado, de un ujemplo donde se produzca *overflow*. ¿Es posible replicar estos ejemplos en Python?

5) Sea $f(x) = (x - 1)^{15}$. Explique por qué utilizar como criterio de STOP $f(x_n) < \text{TOL}$ no es adecuado para hallar una buena aproximación de la raíz $\alpha = 1$. ¿Qué criterio de STOP conviene utilizar?

6) ¿Cuánta *precisión*?

   a) ¿Cuántos dígitos binarios de precisión se ganan en cada paso del método de bisección?, ¿cuántos dígitos decimales?, ¿cuántos pasos se requieren para cada dígito decimal de precisión?.

   b) Decida sobre la veracidad de la siguiente frase y justifique. *Como* log_2(10) $\approx$ 3.32*, necesitamos entonces* 3.32 *pasos de bisección por cada dígito decimal.*

7) Aplicar el método de bisección para hallar una solución a $x = \cos(x)$ en el intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$. Comparar con el método Regula Falsi. ¿Cuál converge más rápido? ¿Cuál es la velocidad de convergencia de cada método?

8) Sabemos que el criterio de stop no es único. Considere programar variantes de sus códigos que admitan diferentes ccriterios de stop. Esto debería hacerse con *subtareas*, para no repetir código. Los criterios de stop que podemos considerar son los siguientes:

$$\left|x_{n+1} - x_n\right| < \varepsilon \qquad (1)$$
$$|f(x_n)| < \varepsilon \qquad (2)$$
$$\left|\frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}}\right| < \varepsilon \qquad (3)$$

¿Cuál tiene más sentido? Recuerde que puede, y en muchos casos es deseable, considerar añadir funciones de creación de df para visualizar una tabla apropiada. Estas funciones estarán ligadas a las variantes de los métodos mencionados.

9) ¿Es cierto que si f tiene un único cero en $x = 0 \in [a, b]$ y $f(a)f(b) < 0$, entonces el criterio de aproximación de error relativo

$$\left|\frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}}\right|$$

falla?

10) En el ejercicio 7 investigue en Python los cocientes $(x_{n+1} - \alpha)/(x_n - \alpha)$. ¿Puede decir algo acerca del tipo de convergencia?

11) Considere la función $g(x) = \sqrt{x}$.

   a) Caracterice los subitervalos $I \subset [0, 1]$ para los cuales g cumple las hipótesis del Teorema del Punto Fijo. Justifique el cumplimiento de las mismas y establezca el punto fijo p al cual converge la sucesión p_n?
   b) ¿Qué sucede con la iteración si se escoge $p_0 > 0$ arbitrariamente cercano a 0? ¿Cómo relaciona esto con el ítem anterior?
   c) Caracterice los subitervalos $I \subset [0, 1]$ para los cuales la iteración de punto fijo no converge. Acompañe desde lo gráfico para cada ítem.

12) ¿V o F?
   a) Si $g : [0, 1] \to [0, 1]$, entonces existe $p \in [0, 1]$ tal que $g(p) = p$.
   b) Si $g : [0, 1] \to [0, 1]$ es una función continua, entonces existe $p \in [0, 1]$ tal que $g(p) = p$.
   c) Si $g : [0, 1] \to [0, 1]$ es una función que no es continua, entonces existe $p \in [0, 1]$ tal que $g(p) = p$.

13) Demuestre que si p es un punto fijo de una función derivable g, entonces:

   a) Si $|g'(p)| > 1$, p es un repulsor, es decir, la sucesión x_n se aleja de p.
   b) Si $|g'(p)| < 1$, p es un atractor, es decir, la secesión x_n converge a p.
   c) ¿Qué sucede si $|g'(p)| = 1$?. Dar un ejemplo gráfico para cada uno de los ítems anteriores.

14) En la demostración del teorema de punto fijo se utiliza que $g : I \to I$. ¿Por qué esto es necesario? Si ahora ya sabemos que g posee un punto fijo en cierto intervalo J, ¿es necesario conseguir un intervalo I tal que $g : I \to I$? Justifique.

15) Considere la función $f(x) = -5x^3 + 15x^2 - 15x + 5$.

a) Para cada raíz de f, encuentre un intervalo que la contenga de forma aislada. Demuestre este hecho desde la matemática.

b) En relación con el ítem anterior, ¿Qué sucede si aplica el método de Regula Falsi en el intervalo $[0.8, 1.3]$?

c) Utilice bisección en el mismo intervalo. ¿Cómo explica el comportamiento en cada método?

d) ¿Es posible hallar la raíz utilizando el método de punto fijo? Argumente en varios niveles: desde lo gráfico haciendo el diagrama de telaraña, desde lo teórico analizando las condiciones de convergencia, y desde lo experimental utilizando Python.

e) ¿Qué método resultó más conveniente? Justifique minuciosamente.

16) Sea $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)\ln(x) + \frac{x}{10} + 1$.

a) f posee una única ráiz. Caracterizar todos los pares (a_1, b_1) para los cuales es posible iniciar la sucesión de Regula Falsi de modo tal que resulte convergente. Argumentar desde lo gráfico.

b) Considere un par (a_1, b_1) de los hallados en el ítem anterior. ¿Qué sucede si iniciamos el método de la secante con el mismo? ¿Es posible implementar el método de la secante? Graficar y observar que siempre falla.

c) ¿Es posible plantear la búsqueda de la raíz, de forma exitosa, mediante el método de punto fijo? Argumente en todos los niveles como en.

17) Considere $f(x) = \left(-(x-2)^{1/3} - x\right)/x + 1.2$.

a) f posee una raíz α en el intervalo $[0, 5]$. Caracterizar todos los pares (a_1, b_1) para los cuales es posible iniciar la sucesión de la secante de modo tal que resulte convergente a α . Argumentar desde lo gráfico.

b) ¿Es posible plantear la búsqueda de la raíz, de forma exitosa, mediante el método de punto fijo? Argumente en todos los niveles.

18) Analizar usando el Método de Newton.

a) Considere $f(x) = x^3 - 3x + 2$. Compruebe usando Python que la convergencia a la raíz $\alpha = -2$ es cuadrática . Produzca un código que tenga como output una tabla cuyas columnas son n (el número de iteración), p_n, $|x_{n+1} - x_n|$, $E_n = |x - x_n|$, E_{n+1}/E_n y E_{n+1}/E_n^2. Corra el mismo hasta $n = 4$ comenzando en $x_0 = -2.4$.

b) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ Corra el código hecho en el ítem anterior para investigar la convergencia a la raíz $\alpha = 1$ comenzando en $p_0 = 1.2$. ¿Cómo es la convergencia? Desarrolle.

19) Implemente los métodos de bisección, Newton, Regula Falsi y secante para resolver ecuaciones no lineales en una dimensión, y pruebe sus implementaciones

encontrando al menos una raíz para cada uno de los siguientes ecuaciones ¿Qué tasa de convergencia se logra en cada caso?

a) $x^3 - 2x - 5 = 0$.
b) $e^{-x} = x$.
c) $x \sin(x) = 1$.
d) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$.

20) Muestre que en el método de la secante, conforme avanza la iteración, esta se asemeja a la iteración de Newton.

21) Sea x_n la sucesión de punto fijo. Considere la sucesión y_n dada por:

a) Considere la función

$$f(x) = \frac{xe^{-x} + \sqrt{x} - 1}{2x}$$

La misma tiene una raíz α en el intervalo $[0.1, 0.6]$. Además el problema previo puede llevarse, mediante manipulación algebraica, a uno de punto fijo. Si llamamos p_n a la sucesión de bisección y x_n a la sucesión de Punto Fijo, considere ahora la sucesión

$$y_n = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n} \quad (n = 0, 1, 2, ...), \quad (1)$$

donde $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ y $\Delta^2 x_n = \Delta(\Delta x_n)$. Notación: $y_n = \{\Delta^2\}(x_n)$. Implemente los siguientes pseudocódigos:

Código 1: Sucesión y_n

IMPUT: x, n

```
su código
```

OUTPUT: y_n

Código 2: Tabla comparativa

IMPUT: parámetros de bisección, x, cantidad de iteraciones.

```
su código
```

OUTPUT: Una tabla con 4 columnas, n, p_n, x_n, y_n, y sus valores correspondientes hasta la cantidad de iteraciones.

Mediante la observación de la tabla comparativa ¿qué conclusión puede obtener?

22) Como estudiante avezado que es usted, seguramente notó que el problema de la sucesión delta definida previamente, es que *cabalga* a cuestas de x_n, ¿no sería mejor ir utilizando los términos y_n a medida que se van generando? Es decir,

una vez calculado y_0, consideramos que esta es una mejor aproximación a partir de la cual reiniciar la iteración más lenta x_n. Así, luego de calcular x_0, x_1, x_2 e y_0, el siguiente paso comienza aplicando la iteración de punto fijo a y_0 en vez de a x_2 (¡Que buena idea! ¿No?). Entonces tenemos una nueva sucesión $\Delta S(x_k)$ que se construye siguiendo la iteración

$$x_0^{(0)} = x_0, \quad x_1^{(0)} = g\left(x_0^{(0)}\right), \quad x_2^{(0)} = g\left(x_1^{(0)}\right), \quad x_0^{(1)} = \{\Delta^2\}\left(x_0^{(0)}\right),$$
$$x_1^{(1)} = g\left(x_0^{(1)}\right) \dots$$

Dicho de otra forma, cada tercer paso de $\Delta S(x_k)$ es generado por y_n. Programe esta nueva versión de y_n

Código 1: $\Delta S(x_k)$

INPUTS: n, x

OUTPUT: $x_k^{(n)}$, sucesión y_n mejorada para punto fijo.

Al igual que en los casos previos, haga una tabla comparativa (**Código 2**) y exprese sus conclusiones. ¿Qué puede decir sobre la velocidad de convergencia de ΔS?

23) Raíces multiples.

    a) Caracterice un polinomio que posee una raíz de multiplicidad k.
    b) Vincule la multiplicidad de una raíz en un polinomio, con su derivada. ¿Esta vinculación da lugar a una *caracterización*?
    c) Sea f una función *lo suficientemente buena*. Sin conocer la estructura de f, ¿cómo definiría la noción de ráiz de orden k en $x = p$ para f?
    d) Probar que si la ecuación $f(x) = 0$ tiene una raíz de orden k en $x = p$, entonces existe una función continua $h(x)$ tal que $f(x)$ se puede expresar como el producto $f(x) = (x - p)^K h(x)$, donde $h(p) \neq 0$. [Ayuda: Usar Taylor de forma apropiada.]
    e) ¿Está en condiciones de poner en palabras qué hecho relevante muestra este ejercicio?

24) Usar para probar que si f tiene una raíz de orden k en $x = p$, entonces el método de Newton deja de converger con velocidad cuadrática. ¿Se puede arreglar el método para recuperar dicha velocidad?

25) Mejorando Newton

    a) Sea α una raíz doble de f. Demuestre que el método de Newton *doblemente relajado*

       $x_{n+1} = x_n - 2\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, si converge a α, lo hace al menos cuadráticamente. Obtener la condición bajo el cual el orden de convergencia es exactamente 2, y determine el error asintótico constante c en este caso.

b) ¿Cuál es el enunciado análogo en el caso de una raíz de multiplicidad k?

26) Irina la gamer

Irina es una joven apasionada por los videojuegos. A veces, pierde la noción del tiempo y se sumerge en partidas durante horas. Su madre, preocupada por el exceso de tiempo que Irina pasa frente a la pantalla, decidió consultar a un grupo de estudiantes avanzados que ya habían aprobado Computación Científica. Su objetivo era crear un desafío matemático computacional para Irina, que determinaría cuánto tiempo podría dedicar a los videojuegos.

Así su madre le entregó un papel que rezaba lo siguiente:

$f(x) = (e^x)/(\sqrt{x} + kx)$, $k > 0$

La tarea consistía en elegir un valor de k, y el tiempo que Irina podría jugar estaría determinado por la raíz de la derivada de f. Además, contaría con la ayuda de estudiantes actuales de Computación Científica para resolver el problema y profundizar sus conocimientos en la interacción.

Irina quedó sorprendida por el enfoque inesperado de su madre, la cuál añadió solemnemente ☝️ 😌

–Jugar videojuegos sin parar es como beber café torrado continuamente. Al principio puede ser satisfactorio, pero sobreestimula tus receptores de recompensa y pierdes la capacidad de apreciar las pequeñas cosas.

Al oir estas profundas palabras 😯 , Irina aceptó el reto con renovado interés. Después de todo, le vendría bien mejorar sus habilidades matemáticas.

a) Ayudar a Irina a determinar cuánto podrá jugar como máximo. Para ello haga un plot de las raíces de f' en función de k. Se valorará la simplicidad de las expresiones que intervengan en su resolución y la eficiencia de la misma.

b) El cerebro de Irina no estaba preparado para ceder sus interminables dosis de dopamina provenientes de los videojuegos, por lo que impulsó a esta a proponer si podía modificar la función para poder jugar un poco más. La madre consultó a los estudiantes avanzados y le sugirieron que era posible hacer una modificación, pero que tampoco se engañe, *modificar* es una palabra muy amplia. Ayude a Irina con la modificación si sólo es posible *añadir* constantes a f y el tiempo de juego no debe exceder más de 4 hs. Muestre la función f modificada y justifique, como la misma produce la cantidad de horas que irina podrá jugar.

27) La ecuación

$xe^{-x} = \varepsilon$

puede resolverse por el método de Punto Fijo mediante una adaptación adecuada.

a) Explicar dicha adaptación y justificar por qué funcionaría y cómo, desde la teoría.

b) A medida que ε se hace más pequeño y x grande, la dinámica del producto puede permanecer pequeña para que así la ecuación tenga solución. Queremos ver cómo evolucionan dichas soluciones a medida que achicamos ε y para ello pretendemos graficarlas. Hacer varios plots con 10^5 muestras, en los intervalos $[10^{-20+5k}, 10^{-19+5k}]$ para $k = 0, 1, 2$. ¿Cómo dibujaría el gráfico que relaciona las soluciones con los ε? Justifique la elección del valor inicial para la iteración y la cantidad de iteraciones.

c) ¿Qué puede decir acerca de la velocidad de convergencia a medida que ε es cada vez más pequeño? ¿Reconsideraría modificar su código?

d) Argumente sobre la conveniencia o no, de utilizar el método de Newton con la función original. Apóyese tanto en lo gráfico, cómo en lo numérico usando Python.