

COMPUTACIÓN CIENTÍFICA

PRÁCTICA 2

INSTITUTO DE EDUCACIÓN



UNIVERSIDAD
NACIONAL DE
HURLINGHAM

- 1) Usar el método de bisección para encontrar soluciones con un error menor que 10^{-3} para $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$ en los intervalos $[0, 1]$, $[1, 3.2]$ y $[3.2, 4]$. Use que $x = 3$ es raíz de este polinomio para obtener representantes de sus raíces en los que puede confiar hasta 10 cifras decimales $[\rho \leq 5 \times 10^{-t}]$. ¿Cuántas iteraciones son necesarias si se quiere aproximar con 3 cifras significativas?
- 2) Aproxime $\sqrt{3}$ de forma correcta hasta 10^{-4} usando el algoritmo de bisección. [Ayuda: considere $x^2 - 3$].
- 3) Muestre que $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ tiene una raíz en $[1, 2]$. Cree un código en python que aplique bisección a f en este intervalo y que como output brinde una tabla
- 4) Analizar por qué en el cálculo del punto medio se escogió realizar la cuenta $p = a + \frac{b-a}{2}$ en vez de $\hat{p} = \frac{b+a}{2}$. Considere una máquina con aritmética decimal de dos dígitos. De un ejemplo donde el cálculo de \hat{p} caiga fuera del intervalo original. Por otro lado, de un ejemplo donde se produzca *overflow*. ¿Es posible replicar estos ejemplos en Python?
- 5) Sea $f(x) = (x - 1)^{15}$. Explique por qué utilizar como criterio de STOP $f(x_n) < \text{TOL}$ no es adecuado para hallar una buena aproximación de la raíz $\alpha = 1$. ¿Qué criterio de STOP conviene utilizar?
- 6) ¿Cuánta *precisión*?
 - a) ¿Cuántos dígitos binarios de precisión se ganan en cada paso del método de bisección?, ¿cuántos dígitos decimales?, ¿cuántos pasos se requieren para cada dígito decimal de precisión?
 - b) Decida sobre la veracidad de la siguiente frase y justifique. *Como $\log_2(10) \approx 3.32$, necesitamos entonces 3.32 pasos de bisección por cada dígito decimal.*
- 7) Aplicar el método de bisección para hallar una solución a $x = \cos(x)$ en el intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$. Comparar con el método Regula Falsi. ¿Cuál converge más rápido? ¿Cuál es la velocidad de convergencia de cada método?
- 8) En el ejercicio 7 investigue en Python los cocientes $\frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha}$. ¿Puede decir algo acerca del tipo de convergencia?
- 9) Considere la función $g(x) = \sqrt{x}$.
 - a) Caracterice los subintervalos $I \subset [0, 1]$ para los cuales g cumple las hipótesis del Teorema del Punto Fijo. Justifique el cumplimiento de las mismas y establezca el punto fijo p al cual converge la sucesión p_n ?
 - b) ¿Qué sucede con la iteración si se escoge $p_0 > 0$ arbitrariamente cercano a 0? ¿Cómo relaciona esto con el ítem anterior?
 - c) Caracterice los subintervalos $I \subset [0, 1]$ para los cuales la iteración de punto fijo no converge. Acompañe desde lo gráfico para cada ítem.
- 10) ¿V o F?

-
- a) Si $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, entonces existe $p \in [0, 1]$ tal que $g(p) = p$.
 - b) Si $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es una función continua, entonces existe $p \in [0, 1]$ tal que $g(p) = p$.
 - c) Si $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es una función que no es continua, entonces existe $p \in [0, 1]$ tal que $g(p) = p$.
- 11) Demuestre que si p es un punto fijo de una función derivable g , entonces:
- a) Si $|g'(p)| > 1$, p es un repulsor, es decir, la sucesión x_n se aleja de p .
 - b) Si $|g'(p)| < 1$, p es un atractor, es decir, la sucesión x_n converge a p .
 - c) ¿Qué sucede si $|g'(p)| = 1$? Dar un ejemplo gráfico para cada uno de los ítems anteriores.
- 12) En la demostración del teorema de punto fijo se utiliza que $g : I \rightarrow I$. ¿Por qué esto es necesario? Si ahora ya sabemos que g posee un punto fijo en cierto intervalo J , ¿es necesario conseguir un intervalo I tal que $g : I \rightarrow I$? Justifique.
- 13) Considere la función $f(x) = -5x^3 + 15x^2 - 15x + 5$.
- a) Para cada raíz de f , encuentre un intervalo que la contenga de forma aislada. Demuestre este hecho desde la matemática.
 - b) En relación con el ítem anterior, ¿Qué sucede si aplica el método de Regula Falsi en el intervalo $[0.8, 1.3]$?
 - c) Utilice bisección en el mismo intervalo. ¿Cómo explica el comportamiento en cada método?
 - d) ¿Es posible hallar la raíz utilizando el método de punto fijo? Argumente en varios niveles: desde lo gráfico haciendo el diagrama de telaraña, desde lo teórico analizando las condiciones de convergencia, y desde lo experimental utilizando Python.
 - e) ¿Qué método resultó más conveniente? Justifique minuciosamente.
- 14) Sea $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right) \ln(x) + \frac{x}{10} + 1$.
- a) f posee una única raíz. Caracterizar todos los pares (a_1, b_1) para los cuales es posible iniciar la sucesión de Regula Falsi de modo tal que resulte convergente. Argumentar desde lo gráfico.
 - b) Considere un par (a_1, b_1) de los hallados en el ítem anterior. ¿Qué sucede si iniciamos el método de la secante con el mismo? ¿Es posible implementar el método de la secante? Graficar y observar que siempre falla.
 - c) ¿Es posible plantear la búsqueda de la raíz, de forma exitosa, mediante el método de punto fijo? Argumente en todos los niveles como en.
- 15) Considere $f(x) = \frac{-(x-2)^{\frac{1}{3}}-x}{x} + 1.2$.

- a) f posee una raíz α en el intervalo $[0, 5]$. Caracterizar todos los pares (a_1, b_1) para los cuales es posible iniciar la sucesión de la secante de modo tal que resulte convergente a α . Argumentar desde lo gráfico.
- b) ¿Es posible plantear la búsqueda de la raíz, de forma exitosa, mediante el método de punto fijo? Argumente en todos los niveles.
- 16) Analizar usando el Método de Newton.
- a) Considere $f(x) = x^3 - 3x + 2$. Compruebe usando Python que la convergencia a la raíz $\alpha = -2$ es cuadrática. Produzca un código que tenga como output una tabla cuyas columnas son n (el número de iteración), p_n , $|x_{n+1} - x_n|$, $E_n = |x - x_n|$, E_{n+1}/E_n y E_{n+1}/E_n^2 . Corra el mismo hasta $n = 4$ comenzando en $x_0 = -2.4$.
- b) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ Corra el código hecho en el ítem anterior para investigar la convergencia a la raíz $\alpha = 1$ comenzando en $p_0 = 1.2$. ¿Cómo es la convergencia? Desarrolle.
- 17) Implemente los métodos de bisección, Newton, Regula Falsi y secante para resolver ecuaciones no lineales en una dimensión, y pruebe sus implementaciones encontrando al menos una raíz para cada uno de los siguientes ecuaciones ¿Qué tasa de convergencia se logra en cada caso?
- a) $x^3 - 2x - 5 = 0$.
- b) $e^{-x} = x$.
- c) $x \sin(x) = 1$.
- d) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$.
- 18) Muestre que en el método de la secante, conforme avanza la iteración, esta se asemeja a la iteración de Newton.
- 19) Raíces múltiples.
- a) Caracterice un polinomio que posee una raíz de multiplicidad k .
- b) Vincule la multiplicidad de una raíz en un polinomio, con su derivada. ¿Esta vinculación da lugar a una *caracterización*?
- c) Sea f una función *lo suficientemente buena*. Sin conocer la estructura de f , ¿cómo definiría la noción de raíz de orden k en $x = p$ para f ?
- d) Probar que si la ecuación $f(x) = 0$ tiene una raíz de orden k en $x = p$, entonces existe una función continua $h(x)$ tal que $f(x)$ se puede expresar como el producto $f(x) = (x - p)^K h(x)$, donde $h(p) \neq 0$. [Ayuda: Usar Taylor de forma apropiada.]
- e) ¿Está en condiciones de poner en palabras qué hecho relevante muestra este ejercicio?
- 20) Usar para probar que si f tiene una raíz de orden k en $x = p$, entonces el método de Newton deja de converger con velocidad cuadrática. ¿Se puede arreglar el método para recuperar dicha velocidad?
- 21) Mejorando Newton

- a) Sea α una raíz doble de f . Demuestre que el método de Newton *doblemente relajado*

$$x_{n+1} = x_n - 2 \frac{f(x_n)}{f'}(x_n),$$

si converge a α , lo hace al menos cuadráticamente. Obtener la condición bajo el cual el orden de convergencia es exactamente 2, y determine el error asintótico constante c en este caso.

- b) ¿Cuál es el enunciado análogo en el caso de una raíz de multiplicidad k ?