Ecuaciones no lineales

Convergencia made easy **v. 1.0**

Selección

Escogimos una selección de teoremas de convergencia. Mostraremos estos resultados de forma parcial dejando espacio al estudiante para la investigación.

Definición 1 **(Punto fijo)** : Un punto fijo de una función g es un punto α tal que $g(\alpha) = \alpha$. También se dice que $x = g(x)$ tiene una raíz en $x = \alpha$.

Teorema del valor medio | Lagrange — Teorema 2

Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe un número ξ en (a, b) tal que

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

Teorema de Punto Fijo — Teorema 3

Si $x = g(x)$ tiene una raíz en $x = \alpha$ y $|g'(x)| \leq \lambda < 1$ en el entorno $|x - \alpha| < \delta$, entonces para toda aproximación inicial x_0 en dicho entorno se cumple que:

(i) Todas las iteraciones $x_n \in |x - x_0| < \delta$,
(ii) $x_n \longrightarrow \alpha$,
(iii) El punto fijo α es único allí.

Demostración. (i) Por inducción. Supong $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \in |x - \alpha| < \delta$. Entonces

$$\begin{aligned} |x_n - \alpha| &= |g(x_{n-1}) - g(\alpha)| \\ &\leq \lambda\, |x_{n-1} - \alpha| \\ &< |x_{n-1} - \alpha| \\ &< \delta. \end{aligned}$$

Para (ii) observamos que

$$\begin{aligned} |x_n - \alpha| &\leq \lambda\, |x_{n-1} - x_0| \\ &\leq \lambda^2\, |x_{n-2} - x_0| \\ &\leq \ldots \\ &\leq \lambda^n\, |x_1 - x_0| \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

(iii) Supong β otro punto fijo en $|x - \alpha| < \delta$. Entonces

$$
\begin{aligned}
|\alpha - \beta| &= |g(\alpha) - g(\beta)| \\
&\leq \lambda \, |\alpha - \beta| \\
&< |\alpha - \beta| \text{ , absurdo.}
\end{aligned}
$$

∎

Convergencia de Newton — Corolario 4

Si f es una función con derivada continua, el método de Newton aplicado a f converge si comenzamos lo suficientemente cerca de la raíz α.

Demostración. Ejercicio.

Regula-Falsi 1 — Teorema 5

Sea f convexa en $[a, b]$ y dos veces derivable con todas sus derivadas continuas y supongamos $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$. Entonces la sucesión de Regula-Falsi converge a la única raíz α de f en $[a, b]$.

Demostración. Sea x_n la sucesión de Regula-Falsi. Entonces

$$
x_{n+1} = x_n + \frac{x_n - b}{f(x_n) - f(b)} f(x_n) \, , \tag{1}
$$

Ya que los siguientes hechos tienen lugar: como f es convexa, tiene exactamente un cero, α, en $[a, b]$. Además, la secante que conecta $f(a)$ y $f(b)$ se encuentra completamente por encima de la gráfica de $y = f(x)$ y, por lo tanto, interseca la línea real a la izquierda de α. Este será el caso para todas las secantes subsiguientes, lo que significa que el punto $x = b$ permanece fijo mientras que el otro punto final a se actualiza continuamente, produciendo una secuencia monótonamente creciente de aproximaciones $x_n > x_{n-1} > \ldots > x_1 = a$.

Cualquier sucesión de este tipo, al estar acotada superiormente por α, es convergente, y haciendo $n \longrightarrow \infty$ en (1), $x_n \longrightarrow \alpha$.

∎

Regula-Falsi 2 — Corolario 6

Bajo las mismas hipótesis de derivabilidad para f que en el teorema anterior, la sucesión de Regula-Falsi converge a la raíz α de f en $[a, b]$ si:

(i) f convexa en $[a, b]$ y $f(a) > 0$, $f(b) < 0$,
(ii) f cóncava en $[a, b]$ y $f(a) < 0$, $f(b) > 0$.
(iii) f cóncava en $[a, b]$ y $f(a) > 0$, $f(b) < 0$.

Demostración. Ejercicio.

Secante

Teorema 7

Sea f dos veces derivable con segunda derivada continua. Si las aproximaciones iniciales x_1 y x_2 están lo suficientemente cerca de una raíz α de f, entonces la sucesión

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots \; . \tag{2}$$

converge a α.

Demostración. Ejercicio optativo.