Ecuaciones no lineales

Convergencia made easy **v. 2.0**

Selección

📖 Escogimos una selección de teoremas de convergencia. Mostraremos estos resultados de forma parcial dejando espacio al estudiante para la investigación.

💻 Para programar, es más conveniente escoger la letra `p` para las raíces que `alpha` o `a`. Por este motivo, utilizaremos p para referirnos a una raíz en general.

A. CONVERGENCIA

Definición 1 **(Punto fijo)** : Un punto fijo de una función g es un punto p tal que $g(p) = p$. También se dice que $x = g(x)$ tiene una raíz en $x = p$.

Teorema del valor medio | Lagrange — Teorema 2

Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe un número ξ en (a, b) tal que

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Teorema de Punto Fijo — Teorema 3

Si $x = g(x)$ tiene una raíz en $x = p$ y $|g'(x)| \leq \lambda < 1$ en el entorno $|x - p| < \delta$, entonces para toda aproximación inicial x_0 en dicho entorno se cumple que:

(i) Todas las iteraciones $x_n \in |x - x_0| < \delta$,
(ii) $x_n \longrightarrow p$,
(iii) El punto fijo p es único allí.

Demostración. (i) Por inducción. Supong $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in |x - p| < \delta$. Entonces

$$\begin{aligned} |x_n - p| &= |g(x_{n-1}) - g(p)| \\ &\leq \lambda\, |x_{n-1} - p| \\ &< |x_{n-1} - p| \\ &< \delta. \end{aligned}$$

Para (ii) observamos que

$$
\begin{aligned}
|x_n - p| &\leq \lambda \; |x_{n-1} - x_0| \\
&\leq \lambda^2 \; |x_{n-2} - x_0| \\
&\leq \dots \\
&\leq \lambda^n \; |x_1 - x_0| \longrightarrow 0.
\end{aligned}
$$

(iii) Supong β otro punto fijo en $|x - p| < \delta$. Entonces

$$
\begin{aligned}
|p - \beta| &= |g(p) - g(\beta)| \\
&\leq \lambda \; |p - \beta| \\
&< |p - \beta| \text{ , absurdo.}
\end{aligned}
$$

■

Convergencia de Newton — Corolario 4

Si f es una función con derivada continua, $f(p) = 0$ y $f'(p) \neq 0$, el método de Newton aplicado a f converge si comenzamos lo suficientemente cerca de la raíz p.

Demostración. Ejercicio.

Regula-Falsi 1 — Teorema 5

Sea f convexa en $[a, b]$ y dos veces derivable con todas sus derivadas continuas y supongamos $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$. Entonces la sucesión de Regula-Falsi converge a la única raíz p de f en $[a, b]$.

Demostración. Sea x_n la sucesión de Regula-Falsi. Entonces

$$
x_{n+1} = x_n + \frac{x_n - b}{f(x_n) - f(b)} f(x_n) \, , \tag{1}
$$

Ya que los siguientes hechos tienen lugar: como f es convexa, tiene exactamente un cero, p, en $[a, b]$. Además, la secante que conecta $f(a)$ y $f(b)$ se encuentra completamente por encima de la gráfica de $y = f(x)$ y, por lo tanto, interseca la línea real a la izquierda de p. Este será el caso para todas las secantes subsiguientes, lo que significa que el punto $x = b$ permanece fijo mientras que el otro punto final a se actualiza continuamente, produciendo una secuencia monótonamente creciente de aproximaciones $x_n > x_{n-1} > \dots > x_1 = a$.

Cualquier sucesión de este tipo, al estar acotada superiormente por p, es convergente, y haciendo $n \longrightarrow \infty$ en (1), $x_n \longrightarrow p$.

■

Regula-Falsi 2 — Corolario 6

Bajo las mismas hipótesis de derivabilidad para f que en el teorema anterior, la sucesión de Regula-Falsi converge a la raíz p de f en $[a, b]$ si:

(i) f convexa en $[a, b]$ y $f(a) > 0$, $f(b) < 0$,
(ii) f cóncava en $[a, b]$ y $f(a) < 0$, $f(b) > 0$.
(iii) f cóncava en $[a, b]$ y $f(a) > 0$, $f(b) < 0$.

Demostración. Ejercicio.

Secante — Teorema 7

Sea f dos veces derivable con segunda derivada continua. Si las aproximaciones iniciales x_1 y x_2 están lo suficientemente cerca de una raíz p de f, entonces la sucesión

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{2}$$

converge a p.

Demostración. Ejercicio optativo.

B. ORDEN DE CONVERGENCIA

Definición 8 **(Orden de convergencia)** : Supongamos que $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión que converge a p, con $p_n \neq p$ para todo n. Si existen constantes positivas λ y t con

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^t} = \lambda \tag{3}$$

entonces $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a p con orden t y una constante de error asintótica λ.

Se dice que un método iterativo de la forma $p_n = g(p_{n-1})$ es de orden t, si la sucesión $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a la solución $p = g(p)$ con orden t.

Definición 9 **(Orden de convergencia)** :

Se dice que x_n converge a p con (al menos) orden p, si

$$|x_n - p| \leq \varepsilon_n, \tag{4}$$

donde $\{\varepsilon_n\}$ es una sucesión positiva que satisface

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^t} = c \tag{5}$$

(i) Si $t = 1$, debemos asumir además, que $c < 1$.
(ii) Si en (4) se cumple la igualdad, se dice que c es la *constante de error asintótica.*

Ejercicio 1. ¿Es cierto que son equivalentes? ¿Alguna implica a la otra? Justificar.

Orden de convergencia Regula Falsi Corolario 10

El orden de convergencia de R-F es lineal

Demostración. Bajo las hipótesis del Teorema 5, restamos p a ambos miembros de (1) y utilizamos que $f(p) = 0$:

$$x_{n+1} - p = x_n - p - \frac{x_n - b}{f(x_n) - f(b)}[f(x_n) - f(p)].$$

Dividiendo por $x_n - p$ y obtenemos

$$\frac{x_{n+1} - p}{x_n - p} = 1 - \frac{x_n - b}{f(x_n) - f(b)} \frac{f(x_n) - f(p)}{x_n - p}.$$

Haciendo $n \to \infty$ y usando el hecho de que $x_n \to p$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - p}{x_n - p} = 1 - (b - p)\frac{f'(p)}{f(b)}. \tag{6}$$

Luego, tenemos convergencia lineal con constante de erros asitótica

$$\lambda = c = 1 - (b - p)\frac{f'(p)}{f(b)}. \tag{7}$$

Por fundamentos geométricos, $0 < \lambda < 1$ bajo las suposiciones hechas. Un resultado análogo se cumplirá, con una constante $|\lambda| < 1$, siempre que f sea convexa o cóncava en $[a, b]$ y tenga signos opuestos en los puntos finales a y b. Uno de estos puntos finales permanece entonces fijo mientras el otro se mueve monótonamente hacia la raíz p.

∎

Ejercicio 2. Demostrar que efectivamente $0 < \lambda < 1$.

Ejercicio 3. Si no podemos asegurar la curvatura de f en $[a, b]$, ¿podemos arribas a alguna conclusión si sólo sabemos que $f''(p) \neq 0$?

Orden de convergencia de Punto Fijo Teorema 11

Bajo las hipótesis del Teorema 3, el orden de convergencia de la sucesión de Punto Fijo es lineal.

Demostración: Ejercicio.

Orden de convergencia de Newton Corolario 12

Bajo las hipótesis de Corolario 4, el orden de convergencia de la sucesión de Newton es cuadrático.

Demostración: Ejercicio.

Orden de convergencia de Secante Corolario 13

Bajo las hipótesis de Teorema 7, el orden de convergencia de la sucesión Secante es $t = \dots$

Demostración: Ejercicio.