Ecuaciones no lineales

Convergencia made easy **v. 1.0**

Selección

Escogimos una selección de teoremas de convergencia. Mostraremos estos resultados de forma parcial dejando espacio al estudiante para la investigación.

A. CONVERGENCIA

Definición 1 **(Punto fijo)** : Un punto fijo de una función g es un punto α tal que $g(\alpha) = \alpha$. También se dice que $x = g(x)$ tiene una raíz en $x = \alpha$.

Teorema del valor medio | Lagrange — Teorema 2

Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe un número ξ en (a, b) tal que

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

Teorema de Punto Fijo — Teorema 3

Si $x = g(x)$ tiene una raíz en $x = \alpha$ y $|g'(x)| \leq \lambda < 1$ en el entorno $|x - \alpha| < \delta$, entonces para toda aproximación inicial x_0 en dicho entorno se cumple que:

(i) Todas las iteraciones $x_n \in |x - x_0| < \delta$,
(ii) $x_n \longrightarrow \alpha$,
(iii) El punto fijo α es único allí.

Demostración. (i) Por inducción. Supong $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \in |x - \alpha| < \delta$. Entonces

$$\begin{aligned} |x_n - \alpha| &= |g(x_{n-1}) - g(\alpha)| \\ &\leq \lambda\,|x_{n-1} - \alpha| \\ &< |x_{n-1} - \alpha| \\ &< \delta. \end{aligned}$$

Para (ii) observamos que

$$\begin{aligned} |x_n - \alpha| &\leq \lambda\,|x_{n-1} - x_0| \\ &\leq \lambda^2\,|x_{n-2} - x_0| \\ &\leq \ldots \\ &\leq \lambda^n\,|x_1 - x_0| \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

(iii) Supong β otro punto fijo en $|x-\alpha|<\delta$. Entonces

$$\begin{aligned}|\alpha-\beta| &= |g(\alpha)-g(\beta)| \\ &\leq \lambda\ |\alpha-\beta| \\ &< |\alpha-\beta|\ , \text{ absurdo.}\end{aligned}$$

■

Convergencia de Newton — Corolario 4

Si f es una función con derivada continua, el método de Newton aplicado a f converge si comenzamos lo suficientemente cerca de la raíz α.

Demostración. Ejercicio.

Regula-Falsi 1 — Teorema 5

Sea f convexa en $[a,b]$ y dos veces derivable con todas sus derivadas continuas y supongamos $f(a)<0$ y $f(b)>0$. Entonces la sucesión de Regula-Falsi converge a la única raíz α de f en $[a,b]$.

Demostración. Sea x_n la sucesión de Regula-Falsi. Entonces

$$x_{n+1}=x_n+\frac{x_n-b}{f(x_n)-f(b)}f(x_n)\,, \tag{1}$$

Ya que los siguientes hechos tienen lugar: como f es convexa, tiene exactamente un cero, α, en $[a,b]$. Además, la secante que conecta $f(a)$ y $f(b)$ se encuentra completamente por encima de la gráfica de $y=f(x)$ y, por lo tanto, interseca la línea real a la izquierda de α. Este será el caso para todas las secantes subsiguientes, lo que significa que el punto $x=b$ permanece fijo mientras que el otro punto final a se actualiza continuamente, produciendo una secuencia monótonamente creciente de aproximaciones $x_n>x_{n-1}>\ldots>x_1=a$.

Cualquier sucesión de este tipo, al estar acotada superiormente por α, es convergente, y haciendo $n\longrightarrow\infty$ en (1), $x_n\longrightarrow\alpha$.

■

Regula-Falsi 2 — Corolario 6

Bajo las mismas hipótesis de derivabilidad para f que en el teorema anterior, la sucesión de Regula-Falsi converge a la raíz α de f en $[a,b]$ si:

(i) f convexa en $[a,b]$ y $f(a)>0$, $f(b)<0$,
(ii) f cóncava en $[a,b]$ y $f(a)<0$, $f(b)>0$.
(iii) f cóncava en $[a,b]$ y $f(a)>0$, $f(b)<0$.

Demostración. Ejercicio.

Secante Teorema 7

Sea f dos veces derivable con segunda derivada continua. Si las aproximaciones iniciales x_1 y x_2 están lo suficientemente cerca de una raíz α de f, entonces la sucesión

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots \, . \tag{2}$$

converge a α.

Demostración. Ejercicio optativo.

B. ORDEN DE CONVERGENCIA

Definición 8 **(Orden de convergencia)** : Supongamos que $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión que converge a p, con $p_n \neq p$ para todo n. Si existen constantes positivas λ y α con

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^{\alpha}} = \lambda \tag{3}$$

entonces $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a p con orden α y una constante de error asintótica λ.

Se dice que un método iterativo de la forma $p_n = g(p_{n-1})$ es de orden α, si la sucesión $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a la solución $p = g(p)$ con orden α.

Definición 9 **(Orden de convergencia)** :

Se dice que x_n converge a α con (al menos) orden p, si

$$|x_n - \alpha| \leq \varepsilon_n, \tag{4}$$

donde $\{\varepsilon_n\}$ es una sucesión positiva que satisface

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^p} = c \tag{5}$$

(i) Si $p = 1$, debemos asumir además, que $c < 1$.
(ii) Si en (4) se cumple la igualdad, se dice que c es la *constante de error asintótica.*

Ejercicio 1. ¿Es cierto que son equivalentes? ¿Alguna implica a la otra? Justificar.