Computación Científica

Práctica 2

Instituto de Educación

Universidad Nacional de Hurlingham

1) Usar el método de bisección para encontrar soluciones con un error menor que 10^{-3} para $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$ en los intervalos $[0, 1]$, $[1, 3.2]$ y $[3.2, 4]$. Use que $x = 3$ es raíz de este polinomio para obtener representantes de sus raíces en los que puede confiar hasta 10 cifras decimales $[\rho \leq 5 \times 10^{-t}]$. ¿Cuántas iteraciones son necesarias si se quiere aproximar con 3 cifras significativas?

2) Aproxime $\sqrt{3}$ de forma correcta hasta 10^{-4} usando el algoritmo de bisección. [Ayuda: considere $x^2 - 3$].

3) Muestre que $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ tiene una raíz en $[1, 2]$. Cree un código en python que aplique bisección a f en este intervalo y que como output brinde una tabla

4) Analizar por qué en el cálculo del punto medio se escogió realizar la cuenta $p = a + \frac{b-a}{2}$ en vez de $\hat{p} = \frac{b+a}{2}$. Considere una máquina con aritmética decimal de dos dígitos. De un ejemplo donde el cálculo de $\hat{p}$ caiga fuera del intervalo original. Por otro lado, de un ujemplo donde se produzca *overflow.* ¿Es posible replicar estos ejemplos en Python?

5) Sea $f(x) = (x - 1)^{15}$. Explique por qué utilizar como criterio de STOP $f(x_n) <$ TOL no es adecuado para hallar una buena aproximación de la raíz $\alpha = 1$. ¿Qué criterio de STOP conviene utilizar?

6) ¿Cuánta *precisión*?

   a) ¿Cuántos dígitos binarios de precisión se ganan en cada paso del método de bisección?, ¿cuántos dígitos decimales?, ¿cuántos pasos se requieren para cada dígito decimal de precisión?.

   b) Decida sobre la veracidad de la siguiente frase y justifique.*Como* log_2(10) $\approx$ 3.32*, necesitamos entonces* 3.32 *pasos de bisección por cada dígito decimal.*

7) Aplicar el método de bisección para hallar una solución a $x = \cos(x)$ en el intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$. Comparar con el método Regula Falsi. ¿Cuál converge más rápido? ¿Cuál es la velocidad de convergencia de cada método?

8) En el ejercicio 7 investigue en Python los cocientes $\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha}$. ¿Puede decir algo acerca del tipo de convergencia?

9) Considere la función $g(x) = \sqrt{x}$.

   a) Caracterice los subitervalos $I \subset [0, 1]$ para los cuales g cumple las hipótesis del Teorema del Punto Fijo. Justifique el cumplimiento de las mismas y establezca el punto fijo p al cual converge la sucesión p_n?
   b) ¿Qué sucede con la iteración si se escoge $p_0 > 0$ arbitrariamente cercano a 0? ¿Cómo relaciona esto con el ítem anterior?
   c) Caracterice los subitervalos $I \subset [0, 1]$ para los cuales la iteración de punto fijo no converge. Acompañe desde lo gráfico para cada ítem.

10) ¿V o F?

a) Si $g : [0,1] \to [0,1]$, entonces existe $p \in [0,1]$ tal que $g(p) = p$.
b) Si $g : [0,1] \to [0,1]$ es una función continua, entonces existe $p \in [0,1]$ tal que $g(p) = p$.
c) Si $g : [0,1] \to [0,1]$ es una función que no es continua, entonces existe $p \in [0,1]$ tal que $g(p) = p$.

11) Demuestre que si p es un punto fijo de una función derivable g, entonces:

a) Si $|g'(p)| > 1$, p es un repulsor, es decir, la sucesión x_n se aleja de p.
b) Si $|g'(p)| < 1$, p es un atractor, es decir, la secesión x_n converge a p.
c) ¿Qué sucede si $|g'(p)| = 1$?. Dar un ejemplo gráfico para cada uno de los ítems anteriores.

12) En la demostración del teorema de punto fijo se utiliza que $g : I \to I$. ¿Por qué esto es necesario? Si ahora ya sabemos que g posee un punto fijo en cierto intervalo J, ¿es necesario conseguir un intervalo I tal que $g : I \to I$? Justifique.

13) Considere la función $f(x) = -5x^3 + 15x^2 - 15x + 5$.

a) Para cada raíz de f, encuentre un intervalo que la contenga de forma aislada. Demuestre este hecho desde la matemática.

b) En relación con el ítem anterior, ¿Qué sucede si aplica el método de Regula Falsi en el intervalo $[0.8, 1.3]$?

c) Utilice bisección en el mismo intervalo. ¿Cómo explica el comportamiento en cada método?

d) ¿Es posible hallar la raíz utilizando el método de punto fijo? Argumente en varios niveles: desde lo gráfico haciendo el diagrama de telaraña, desde lo teórico analizando las condiciones de convergencia, y desde lo experimental utilizando Python.

e) ¿Qué método resultó más conveniente? Justifique minuciosamente.

14) Sea $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)\ln(x) + \frac{x}{10} + 1$.

a) f posee una única ráiz. Caracterizar todos los pares (a_1, b_1) para los cuales es posible iniciar la sucesión de Regula Falsi de modo tal que resulte convergente. Argumentar desde lo gráfico.
b) Considere un par (a_1, b_1) de los hallados en el ítem anterior. ¿Qué sucede si iniciamos el método de la secante con el mismo? ¿Es posible implementar el método de la secante? Graficar y observar que siempre falla.
c) ¿Es posible plantear la búsqueda de la raíz, de forma exitosa, mediante el método de punto fijo? Argumente en todos los niveles como en.

15) Considere $f(x) = \frac{-(x-2)^{\frac{1}{3}} - x}{x} + 1.2$.

a) f posee una raíz α en el intervalo $[0, 5]$. Caracterizar todos los pares (a_1, b_1) para los cuales es posible iniciar la sucesión de la secante de modo tal que resulte convergente a α . Argumentar desde lo gráfico.
b) ¿Es posible plantear la búsqueda de la raíz, de forma exitosa, mediante el método de punto fijo? Argumente en todos los niveles.

16) Analizar usando el Método de Newton.

a) Considere $f(x) = x^3 - 3x + 2$. Compruebe usando Python que la convergencia a la raíz $\alpha = -2$ es cuadrática . Produzca un código que tenga como output una tabla cuyas columnas son n (el número de iteración), p_n, $|x_{n+1} - x_n|$, $E_n = |x - x_n|$, E_{n+1}/E_n y E_{n+1}/E_n^2. Corra el mismo hasta $n = 4$ comenzando en $x_0 = -2.4$.
b) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ Corra el código hecho en el ítem anterior para investigar la convergencia a la raíz $\alpha = 1$ comenzando en $p_0 = 1.2$. ¿Cómo es la convergencia? Desarrolle.

17) Implemente los métodos de bisección, Newton, Regula Falsi y secante para resolver ecuaciones no lineales en una dimensión, y pruebe sus implementaciones encontrando al menos una raíz para cada uno de los siguientes ecuaciones ¿Qué tasa de convergencia se logra en cada caso?
a) $x^3 - 2x - 5 = 0$.
b) $e^{-x} = x$.
c) $x \sin(x) = 1$.
d) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$.

18) Muestre que en el método de la secante, conforme avanza la iteración, esta se asemeja a la iteración de Newton.

19) Raíces multiples.

a) Caracterice un polinomio que posee una raíz de multiplicidad k.
b) Vincule la multiplicidad de una raíz en un polinomio, con su derivada. ¿Esta vinculación da lugar a una *caracterización*?
c) Sea f una función *lo suficientemente buena*. Sin conocer la estructura de f, ¿cómo definiría la noción de ráiz de orden k en $x = p$ para f?
d) Probar que si la ecuación $f(x) = 0$ tiene una raíz de orden k en $x = p$, entonces existe una función continua $h(x)$ tal que $f(x)$ se puede expresar como el producto $f(x) = (x - p)^K h(x)$, donde $h(p) \neq 0$. [Ayuda: Usar Taylor de forma apropiada.]
e) ¿Está en condiciones de poner en palabras qué hecho relevante muestra este ejercicio?

20) Usar para probar que si f tiene una raíz de orden k en $x = p$, entonces el método de Newton deja de converger con velocidad cuadrática. ¿Se puede arreglar el método para recuperar dicha velocidad?

21) Mejorando Newton

a) Sea α una raíz doble de f. Demuestre que el método de Newton *doblemente relajado*

$x_{n+1} = x_n - 2\frac{f(x_n)}{f'}(x_n)$,

si converge a α, lo hace al menos cuadráticamente. Obtener la condición bajo el cual el orden de convergencia es exactamente 2, y determine el error asintótico constante c en este caso.

b) ¿Cuál es el enunciado análogo en el caso de una raíz de multiplicidad k?