

COMPUTACIÓN CIENTÍFICA

PRÁCTICA 2

INSTITUTO DE EDUCACIÓN



UNIVERSIDAD
NACIONAL DE
HURLINGHAM

- 1) Usar el método de bisección para encontrar soluciones con un error menor que 10^{-3} para $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$ en los intervalos $[0, 1]$, $[1, 3.2]$ y $[3.2, 4]$. Use que $x = 3$ es raíz de este polinomio para obtener representantes de sus raíces en los que puede confiar hasta 10 cifras decimales $[\rho \leq 5 \times 10^{-t}]$. ¿Cuántas iteraciones son necesarias si se quiere aproximar con 3 cifras significativas?
- 2) Aproxime $\sqrt{3}$ de forma correcta hasta 10^{-4} usando el algoritmo de bisección. [Ayuda: considere $x^2 - 3$].
- 3) Muestre que $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ tiene una raíz en $[1, 2]$. Cree un código en python que aplique bisección a f en este intervalo y que como output brinde una tabla

n	a_n	b_n	p_n
1	0	2	1
2	1	2	1.5
3	1.5	2	1.75
...

- 4) Analizar por qué en el cálculo del punto medio es conveniente realizar la cuenta $p = a + (b - a)/2$ en vez de $\hat{p} = (b + a)/2$. Considere una máquina con aritmética decimal de dos dígitos. De un ejemplo donde el cálculo de \hat{p} caiga fuera del intervalo original. Por otro lado, de un ejemplo donde se produzca *overflow*. ¿Es posible replicar estos ejemplos en Python?
- 5) Sea $f(x) = (x - 1)^{15}$. Explique por qué utilizar como criterio de STOP $f(x_n) < \text{TOL}$ no es adecuado para hallar una buena aproximación de la raíz $\alpha = 1$. ¿Qué criterio de STOP conviene utilizar?
- 6) ¿Cuánta *precisión*?
 - a) ¿Cuántos dígitos binarios de precisión se ganan en cada paso del método de bisección?, ¿cuántos dígitos decimales?, ¿cuántos pasos se requieren para cada dígito decimal de precisión?.
 - b) Decida sobre la veracidad de la siguiente frase y justifique. *Como $\log_2(10) \approx 3.32$, necesitamos entonces 3.32 pasos de bisección por cada dígito decimal.*
- 7) Aplicar el método de bisección para hallar una solución a $x = \cos(x)$ en el intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$. Comparar con el método Regula Falsi. ¿Cuál converge más rápido? ¿Cuál es la velocidad de convergencia de cada método?
- 8) Sabemos que el criterio de stop no es único. Considere programar variantes de sus códigos que admitan diferentes criterios de stop. Esto debería hacerse con *subtareas*, para no repetir código. Los criterios de stop que podemos considerar son los siguientes:

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon \quad (1)$$

$$|f(x_n)| < \varepsilon \quad (2)$$

$$\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} \right| < \varepsilon \quad (3)$$

¿Cuál tiene más sentido? Recuerde que puede, y en muchos casos es deseable, considerar añadir funciones de creación de df para visualizar una tabla apropiada. Estas funciones estarán ligadas a las variantes de los métodos mencionados.

- 9) ¿Es cierto que si f tiene un único cero en $x = 0 \in [a, b]$ y $f(a)f(b) < 0$, entonces el criterio de aproximación de error relativo

$$\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} \right|$$

falla?

- 10) En el ejercicio 7 investigue en Python los cocientes $(x_{n+1} - \alpha)/(x_n - \alpha)$. ¿Puede decir algo acerca del tipo de convergencia?
- 11) Considere la función $g(x) = \sqrt{x}$.
- Caracterice los subintervalos $I \subset [0, 1]$ para los cuales g cumple las hipótesis del Teorema del Punto Fijo. Justifique el cumplimiento de las mismas y establezca el punto fijo p al cual converge la sucesión p_n ?
 - ¿Qué sucede con la iteración si se escoge $p_0 > 0$ arbitrariamente cercano a 0? ¿Cómo relaciona esto con el ítem anterior?
 - Caracterice los subintervalos $I \subset [0, 1]$ para los cuales la iteración de punto fijo no converge. Acompañe desde lo gráfico para cada ítem.
- 12) ¿V o F?
- Si $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, entonces existe $p \in [0, 1]$ tal que $g(p) = p$.
 - Si $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es una función continua, entonces existe $p \in [0, 1]$ tal que $g(p) = p$.
 - Si $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es una función que no es continua, entonces existe $p \in [0, 1]$ tal que $g(p) = p$.
- 13) Demuestre que si p es un punto fijo de una función derivable g , entonces:
- Si $|g'(p)| > 1$, p es un repulsor, es decir, la sucesión x_n se aleja de p .
 - Si $|g'(p)| < 1$, p es un atractor, es decir, la sucesión x_n converge a p .
 - ¿Qué sucede si $|g'(p)| = 1$? Dar un ejemplo gráfico para cada uno de los ítems anteriores.
- 14) En la demostración del teorema de punto fijo se utiliza que $g : I \rightarrow I$. ¿Por qué esto es necesario? Si ahora ya sabemos que g posee un punto fijo en cierto intervalo J , ¿es necesario conseguir un intervalo I tal que $g : I \rightarrow I$? Justifique.
- 15) Considere la función $f(x) = -5x^3 + 15x^2 - 15x + 5$.

- a) Para cada raíz de f , encuentre un intervalo que la contenga de forma aislada. Demuestre este hecho desde la matemática.
 - b) En relación con el ítem anterior, ¿Qué sucede si aplica el método de Regula Falsi en el intervalo $[0.8, 1.3]$?
 - c) Utilice bisección en el mismo intervalo. ¿Cómo explica el comportamiento en cada método?
 - d) ¿Es posible hallar la raíz utilizando el método de punto fijo? Argumente en varios niveles: desde lo gráfico haciendo el diagrama de telaraña, desde lo teórico analizando las condiciones de convergencia, y desde lo experimental utilizando Python.
 - e) ¿Qué método resultó más conveniente? Justifique minuciosamente.
- 16) Sea $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right) \ln(x) + \frac{x}{10} + 1$.
- a) f posee una única raíz. Caracterizar todos los pares (a_1, b_1) para los cuales es posible iniciar la sucesión de Regula Falsi de modo tal que resulte convergente. Argumentar desde lo gráfico.
 - b) Considere un par (a_1, b_1) de los hallados en el ítem anterior. ¿Qué sucede si iniciamos el método de la secante con el mismo? ¿Es posible implementar el método de la secante? Graficar y observar que siempre falla.
 - c) ¿Es posible plantear la búsqueda de la raíz, de forma exitosa, mediante el método de punto fijo? Argumente en todos los niveles como en.
- 17) Considere $f(x) = (-(x-2)^{1/3} - x)/x + 1.2$.
- a) f posee una raíz α en el intervalo $[0, 5]$. Caracterizar todos los pares (a_1, b_1) para los cuales es posible iniciar la sucesión de la secante de modo tal que resulte convergente a α . Argumentar desde lo gráfico.
 - b) ¿Es posible plantear la búsqueda de la raíz, de forma exitosa, mediante el método de punto fijo? Argumente en todos los niveles.
- 18) Analizar usando el Método de Newton.
- a) Considere $f(x) = x^3 - 3x + 2$. Compruebe usando Python que la convergencia a la raíz $\alpha = -2$ es cuadrática. Produzca un código que tenga como output una tabla cuyas columnas son n (el número de iteración), p_n , $|x_{n+1} - x_n|$, $E_n = |x - x_n|$, E_{n+1}/E_n y E_{n+1}/E_n^2 . Corra el mismo hasta $n = 4$ comenzando en $x_0 = -2.4$.
 - b) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ Corra el código hecho en el ítem anterior para investigar la convergencia a la raíz $\alpha = 1$ comenzando en $p_0 = 1.2$. ¿Cómo es la convergencia? Desarrolle.
- 19) Implemente los métodos de bisección, Newton, Regula Falsi y secante para resolver ecuaciones no lineales en una dimensión, y pruebe sus implementaciones

encontrando al menos una raíz para cada uno de los siguientes ecuaciones ¿Qué tasa de convergencia se logra en cada caso?

- a) $x^3 - 2x - 5 = 0$.
 - b) $e^{-x} = x$.
 - c) $x \sin(x) = 1$.
 - d) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$.
- 20) Muestre que en el método de la secante, conforme avanza la iteración, esta se asemeja a la iteración de Newton.
- 21) Sea x_n la sucesión de punto fijo. Considere la sucesión y_n dada por:
- a) Considere la función

$$f(x) = \frac{xe^{-x} + \sqrt{x} - 1}{2x}$$

La misma tiene una raíz α en el intervalo $[0.1, 0.6]$. Además el problema previo puede llevarse, mediante manipulación algebraica, a uno de punto fijo. Si llamamos p_n a la sucesión de bisección y x_n a la sucesión de Punto Fijo, considere ahora la sucesión

$$y_n = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (1)$$

donde $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ y $\Delta^2 x_n = \Delta(\Delta x_n)$. Notación: $y_n = \{\Delta^2\}(x_n)$. Implemente los siguientes pseudocódigos:

Código 1: Sucesión y_n

INPUT: x, n

su código

OUTPUT: y_n

Código 2: Tabla comparativa

INPUT: parámetros de bisección, x , cantidad de iteraciones.

su código

OUTPUT: Una tabla con 4 columnas, n, p_n, x_n, y_n , y sus valores correspondientes hasta la cantidad de iteraciones.

Mediante la observación de la tabla comparativa ¿qué conclusión puede obtener?

- 22) Como estudiante avezado que es usted, seguramente notó que el problema de la sucesión delta definida previamente, es que *cabalga* a costas de x_n , ¿no sería mejor ir utilizando los términos y_n a medida que se van generando? Es decir,

una vez calculado y_0 , consideramos que esta es una mejor aproximación a partir de la cual reiniciar la iteración más lenta x_n . Así, luego de calcular x_0, x_1, x_2 e y_0 , el siguiente paso comienza aplicando la iteración de punto fijo a y_0 en vez de a x_2 (¡Que buena idea! ¿No?). Entonces tenemos una nueva sucesión $\Delta S(x_k)$ que se construye siguiendo la iteración

$$\begin{aligned}x_0^{(0)} &= x_0, & x_1^{(0)} &= g(x_0^{(0)}), & x_2^{(0)} &= g(x_1^{(0)}), & x_0^{(1)} &= \{\Delta^2\}(x_0^{(0)}), \\x_1^{(1)} &= g(x_0^{(1)}) \dots\end{aligned}$$

Dicho de otra forma, cada tercer paso de $\Delta S(x_k)$ es generado por y_n . Programe esta nueva versión de y_n

Código 1: $\Delta S(x_k)$

INPUTS: n, x

OUTPUT: $x_k^{(n)}$, sucesión y_n mejorada para punto fijo.

Al igual que en los casos previos, haga una tabla comparativa (**Código 2**) y exprese sus conclusiones. ¿Qué puede decir sobre la velocidad de convergencia de ΔS ?

23) Raíces múltiples.

- Caracterice un polinomio que posee una raíz de multiplicidad k .
- Vincule la multiplicidad de una raíz en un polinomio, con su derivada. ¿Esta vinculación da lugar a una *caracterización*?
- Sea f una función *lo suficientemente buena*. Sin conocer la estructura de f , ¿cómo definiría la noción de raíz de orden k en $x = p$ para f ?
- Probar que si la ecuación $f(x) = 0$ tiene una raíz de orden k en $x = p$, entonces existe una función continua $h(x)$ tal que $f(x)$ se puede expresar como el producto $f(x) = (x - p)^K h(x)$, donde $h(p) \neq 0$. [Ayuda: Usar Taylor de forma apropiada.]
- ¿Está en condiciones de poner en palabras qué hecho relevante muestra este ejercicio?

24) Usar para probar que si f tiene una raíz de orden k en $x = p$, entonces el método de Newton deja de converger con velocidad cuadrática. ¿Se puede arreglar el método para recuperar dicha velocidad?

25) Mejorando Newton

- Sea α una raíz doble de f . Demuestre que el método de Newton *doblemente relajado*

$$x_{n+1} = x_n - 2 \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

si converge a α , lo hace al menos cuadráticamente. Obtener la condición bajo el cual el orden de convergencia es exactamente 2, y determine el error asintótico constante c en este caso.

b) ¿Cuál es el enunciado análogo en el caso de una raíz de multiplicidad k ?

26) IRINA LA GAMER

Irina es una joven apasionada por los videojuegos. A veces, pierde la noción del tiempo y se sumerge en partidas durante horas. Su madre, preocupada por el exceso de tiempo que Irina pasa frente a la pantalla, decidió consultar a un grupo de estudiantes avanzados que ya habían aprobado Computación Científica. Su objetivo era crear un desafío matemático computacional para Irina, que determinaría cuánto tiempo podría dedicar a los videojuegos.

Así su madre le entregó un papel que rezaba lo siguiente:

$$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x} + kx}, \quad k > 0.$$

La tarea consistía en elegir un valor de k , y el tiempo que Irina podría jugar estaría determinado por la raíz de la derivada de f . Además, contaría con la ayuda de estudiantes actuales de Computación Científica para resolver el problema y profundizar sus conocimientos en la interacción.

Irina quedó sorprendida por el enfoque inesperado de su madre, la cuál añadió solemnemente 🙌 😊

—Jugar videojuegos sin parar es como beber café torrado continuamente. Al principio puede ser satisfactorio, pero sobreestimula tus receptores de recompensa y pierdes la capacidad de apreciar las pequeñas cosas.

Al oír estas profundas palabras 😬, Irina aceptó el reto con renovado interés. Después de todo, le vendría bien mejorar sus habilidades matemáticas.

- a) Ayudar a Irina a determinar cuánto podrá jugar como máximo. Para ello haga un plot de las raíces de f' en función de k utilizando funciones adecuadas. Además justifique desde lo numérico.
- b) El cerebro de Irina no estaba preparado para ceder sus interminables dosis de dopamina provenientes de los videojuegos, por lo que impulsó a esta a proponer si podía modificar la función para poder jugar un poco más. La madre consultó a los estudiantes avanzados y le sugirieron que era posible hacer una modificación, pero que tampoco se engañe, *modificar* es una palabra muy amplia. Ayude a Irina con la modificación si sólo es posible *añadir* constantes a f y el tiempo de juego no debe exceder más de 4 hs. Muestre la función f modificada y justifique, como la misma produce la cantidad de horas que irina podrá jugar.

27) Sea

$$f(x) = \frac{xe^x}{\sqrt{x} + kx^2}.$$

- a) Graficar la dinámica de las raíces de f' para $k > 0$ confeccionando para ello funciones adecuadas. ¿Convergen a algún valor? Justificar desde lo numérico con una función tabla adecuada.
- b) Aproximar el momento en el cual la función $1 - 2k \ln^2(kx) + kx^2$ tiene exactamente 2 raíces confeccionando para ello funciones adecuadas.

28) La ecuación

$$xe^{-x} = \varepsilon$$

puede resolverse por el método de Punto Fijo mediante una adaptación adecuada.

- a) Explicar dicha adaptación y justificar por qué funcionaría y cómo, desde la teoría.
- b) A medida que ε se hace más pequeño y x grande, la dinámica del producto puede permanecer pequeña para que así la ecuación tenga solución. Queremos ver cómo evolucionan dichas soluciones a medida que achicamos ε y para ello pretendemos graficarlas. Utilizando funciones adecuadas, hacer varios plots con 10^5 muestras, en los intervalos $[10^{-20+5k}, 10^{-19+5k}]$ para $k = 0, 1, 2$. ¿Cómo dibujaría el gráfico que relaciona las soluciones con los ε ? Justifique la elección del valor inicial para la iteración y la cantidad de iteraciones.
- c) ¿Qué puede decir acerca de la velocidad de convergencia a medida que ε es cada vez más pequeño? ¿Reconsideraría modificar su código?
- d) Argumente sobre la conveniencia o no, de utilizar el método de Newton con la función original. Apóyese tanto en lo gráfico, cómo en lo numérico usando Python.