জটিল রাশিমালা:-

① বর্গমূল নির্ণয়:

ⓐ $7 - 30\sqrt{-2}$

$= 7 - 2.5.3\sqrt{-2}$

$= 7 - 2.5.3\, i\sqrt{2}$

$= (5)^2 - 2.5.3i\sqrt{2} + (3i\sqrt{2})^2$

$= (5 - 3i\sqrt{2})^2$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $= \pm(5 - 3i\sqrt{2})$ (Ans.)

ⓑ $\frac{1}{2}(1 - 3\sqrt{-7})$

$= \frac{1}{4}(2 - 2\cdot 3i\sqrt{7})$

$= \frac{1}{4}\{(3)^2 - 2\cdot 3\cdot i\sqrt{7} + (i\sqrt{7})^2\}$

$= \frac{1}{4}(3 - i\sqrt{7})^2$

$= \{\frac{1}{2}(3 - i\sqrt{7})\}^2$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $= \pm\{\frac{1}{2}(3 - i\sqrt{7})\}$ (Ans.)

ⓒ $x + i\sqrt{1 - x^2}$

$= x + i\sqrt{(1+x)(1-x)}$

$= \frac{1}{2}\{2x + 2i\sqrt{(1+x)}\cdot\sqrt{(1-x)}\}$

$= \frac{1}{2}\{(\sqrt{1+x})^2 + 2\cdot\sqrt{(1+x)}\cdot i\sqrt{(1-x)} + (\sqrt{1-x})^2\}$

$= \frac{1}{2}\{\sqrt{1+x} + i\sqrt{1-x}\}^2$

$= \{\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+x} + i\sqrt{1-x})\}^2$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $= \pm\{\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+x} + i\sqrt{1-x})\}$. (Ans.)

ⓓ $-8 - 6\sqrt{-1}$

$= -8 - 2.3.i\sqrt{1}$

$= -8 - 2.3.i.1$

$= (1)^2 - 2.3.i + (3i)^2$

$= (1 - 3i)^2$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল : $\pm(1 - 3i)$ (Ans.)

② মান নির্ণয়: (বর্গমূল) (i)

ⓐ i^{45454}

$= -1$. (Ans.)

ⓑ i^{4457}

$= i$. (Ans.)

ⓒ i^{14587}

$= -i$ (Ans.)

ⓓ i^{44444}

$= 1$. (Ans.)

[ভাগফল পূর্ণসংখ্যা হলে 1 হবে। ভগ্নাংশ হলে i হবে]

ভাগফল জোড় হলে পজিটিভ হবে। বিজোড় হলে নেগেটিভ হবে]

③ মান নির্ণয়: (ঘনমূল):

ⓐ ω^{2548}

$= \omega^2$ (Ans.)

ⓑ ω^{255}

$= \omega^0 = 1$. (Ans.)

ⓒ ω^{56879}

$= \omega^2$ (Ans.)

ⓓ ω^{1222}

$= \omega$ (Ans.)

[৩ দ্বারা ভাগ দিতে হবে]

$$\boxed{\begin{array}{l} -1 = i^2 \\ i = \sqrt{-1} \end{array}}$$

(4) given,

$\sqrt[4]{-144}$

$=\sqrt[4]{(12i)^2}$

$=\sqrt{\pm 12i}$

$=\sqrt{6}.\sqrt{\pm 2i}$

$=\sqrt{6}.\sqrt{(1)^2\pm 2i+(i)^2}$

$=\sqrt{6}\sqrt{(1\pm i)^2}$

$=\sqrt{6}.(1\pm i)$ (Ans.)

(5) $\sqrt[6]{-64}$

let, $x=\sqrt[6]{-64}$

বা, $x^6=-64$

বা, $x^6+4^3=0$

বা, $(x^2)^3+4^3=0$

বা, $(x^2+4)(x^4-4x^2+16)=0$

যখন, $x^2=-4$

বা, $x=\sqrt{-4}=\sqrt{4i^2}$

∴ $x=\pm 2i$

অথবা, $x^4-4x^2+16=0$

বা, $x^2=\frac{4\pm\sqrt{16\pm 64}}{2}$

$=\frac{4\pm\sqrt{(4i)^2 3}}{2}$

$=\frac{4\pm 4i\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{2(2\pm 2i\sqrt{3})}{2}$

$=2\pm 2i\sqrt{3}$

$x^2=(\sqrt{3})^2\pm 2i\sqrt{3}+(i)^2$

$=(\sqrt{3}\pm i)^2$

∴ $x=\pm(\sqrt{3}\pm i)$.

∴ নির্ণেয় মান, $=\pm 2i, \pm(\sqrt{3}\pm i)$ (Ans)

(6) $\sqrt[4]{-81}$

$=\sqrt[4]{(9i)^2}$

$=\sqrt{\pm 9i}$

$=\sqrt{9}.\sqrt{\pm i}$

$=3\sqrt{\frac{1}{2}(\pm 2i)}$

$=\frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{(1^2\pm 2i+i^2)}$

$=\frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{(1\pm i)^2}$

$=\frac{3}{\sqrt{2}}(1\pm i)$ (Ans.)

(7) given,

$\sqrt[3]{a+ib}=x+iy$

বা, $a+ib=x^3+3x^2iy+3xi^2y^2+i^3y^3$

বা, $a+ib=x^3+3x^2iy-3xy^2-iy^3$

বা, $a+ib=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)$

বাস্তব ও অবাস্তব অংশগুলো তুলনা করে পাই,

$a=x^3-3xy^2$ এবং $b=3x^2y-y^3$

দেখা, $\sqrt[3]{a-ib}=x-iy$

বা, $a-ib=(x-iy)^3$

L.H.S $=(x-iy)^3$

$=x^3-3x^2iy+3xi^2y^2-i^3y^3$

$=x^3-3x^2iy-3xy^2+iy^3$

$=(x^3-3xy^2)-i(3x^2y-iy^3)$

$=a-ib$

$=$ R.H.S (showed).

(8) given,

$\sqrt[3]{x+iy} = p+iq$

বা, $x+iy = (p+iq)^3$

বা, $x+iy = p^3+3p^2iq+3pi^2q^2+i^3q^3$

বা, $x+iy = p^3+3p^2iq-3pq^2-iq^3$

বা, $x+iy = (p^3-3pq^2)+i(3p^2q-q^3)$

বাস্তব ও অবাস্তব অংশ সমীকৃত করে পাই,

$x = p^3-3pq^2$ এবং $y = 3p^2q-q^3$

$R.H.S = \frac{x}{p}+\frac{y}{q}$

$= \frac{p^3-3pq^2}{p}+\frac{3p^2q-q^3}{q}$

$= \frac{p(p^2-3q^2)}{p}+\frac{q(3p^2-q^2)}{q}$

$= p^2-3q^2+3p^2-q^2$

$= 4p^2-4q^2 = 4(p^2-q^2)$

$= L.H.S$ (showed).

(09) $L.H.S = \{\frac{1}{2}(1+\sqrt{-3})\}^6$

$= \frac{1}{64}\{(1+\sqrt{-3})^3\}^2$

$= \frac{1}{64}\{1+3\sqrt{-3}+3(\sqrt{-3})^2+(\sqrt{-3})^3\}^2$

$= \frac{1}{64}\{1+3\sqrt{-3}-9-3\sqrt{-3}\}^2$

$= \frac{1}{64}(-8)^2$

$= \frac{64}{64} = 1 = R.H.S$ (Proved).

(10) $R.H.S = (x-1)(x-\alpha)(x-\alpha^2)$

$= (x-1)(x^2-x\alpha^2-\alpha x+\alpha^3)$

$= (x-1)\{x^2-x(\alpha+\alpha^2)+\alpha^3\}$

$= (x-1)\{x^2-x(-1)+1\}$

$= (x-1)(x^2+x+1)$

$= (x^3-1^3) = L.H.S$ (Proved).

(11) given,

$\alpha = \frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$

বা, $\alpha^2 = \left(\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)^2$

$\therefore \alpha^2 = i$

$L.H.S = \alpha^6+\alpha^4+\alpha^2+1$

$= (\alpha^2)^3+(\alpha^2)^2+\alpha^2+1$

$= (i)^3+(i)^2+i+1$

$= -i-1+i+1$

$= 0 = R.H.S$ (Proved).

(12) given,

$\frac{1-ix}{1+ix} = a-ib$

বা, $1-ix = a-ib+aix-i^2bx$

বা, $1-ix = (a+bx)-i(b-ax)$

বাস্তব ও অবাস্তব অংশ সমীকৃত করে পাই,

$1 = a+bx$ এবং $x = b-ax$

বা, $x = \frac{1-a}{b}$ বা, $x(1+a) = b$

$\therefore x = \frac{b}{1+a}$

Hance, $\frac{1-a}{b} = \frac{b}{1+a}$

বা, $1-a^2 = b^2$

বা, $a^2+b^2 = 1$ (showed)

(13) given,

$x = 2+i$

বা, $x-2 = i$

বা, $(x-2)^2 = i^2$

বা, $x^2-4x+4 = -1$

বা, $x^2-4x+5 = 0$

$L.H.S = x^4-4x^3+6x^2-4x+5$

$= x^4-4x^3+5x^2+x^2-4x+5$

$= x^2(x^2-4x+5)+1(x^2-4x+5)$

$= x^2(0)+1(0)$

$= 0$

$= R.H.S$ (Proved).

(14) given,

$x = -1 + i\sqrt{2}$

বা, $(x+1) = i\sqrt{2}$

বা, $(x+1)^2 = (i\sqrt{2})^2$

বা, $x^2 + 2x + 1 = -1 \times 2$

বা, $x^2 + 2x + 3 = 0$

$L.H.S = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 9$

$= x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x^3 + 4x^2 + 6x - x^2 - 2x - 3 + 12$

$= x^2(x^2+2x+3) + 2x(x^2+2x+3) - 1(x^2+2x+3) + 12$

$= x^2(0) + 2x(0) - 1(0) + 12$

$= 12 = R.H.S$ (Proved).

(15) (a) $x = \sqrt[3]{1}$

বা, $x^3 - 1 = 0$

বা, $(x-1)(x^2+x+1) = 0$

হয়, $(x-1) = 0$ অথবা, $x^2 + x + 1 = 0$

$\therefore x = 1$ বা, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4}}{2}$

$\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় ঘনমূল $= 1, \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ (Ans.)

(b) $x = \sqrt[3]{-1}$

বা, $x^3 = -1$

বা, $x^3 + 1 = 0$

বা, $(x+1)(x^2 - x + 1) = 0$

হয়, $x + 1 = 0$ অথবা, $x^2 - x + 1 = 0$

$\therefore x = -1$ বা, $x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4}}{2}$

$\therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় ঘনমূল $= -1, \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$. Ans.

(c) $x = \sqrt[3]{i}$

বা, $x^3 = i$

বা, $x^3 - i = 0$

বা, $x^3 + i^3 = 0$

বা, $(x+i)(x^2 - ix + i^2) = 0$

হয়, $(x+i) = 0$ অথবা, $x^2 - ix + i^2 = 0$

$\therefore x = -i$ বা, $x = \frac{-(-i) \pm \sqrt{(-i)^2 - 4 \times (-1)}}{2}$

$\therefore x = \frac{i \pm \sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় ঘনমূল $= -i, \frac{i \pm \sqrt{3}}{2}$; (Ans.)

$$\boxed{* \; x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

(d) $x = \sqrt[3]{-i}$

বা, $x^3 = -i$

বা, $x^3 + i = 0$ $[\because i^2 = -1]$

বা, $x^3 - i^3 = 0$

বা, $(x-i)(x^2 + ix + i^2) = 0$

বা, $(x-i)(x^2 + ix - 1) = 0$

হয়, $x - i = 0$ অথবা, $x^2 + ix - 1 = 0$

$\therefore x = i$ বা, $x = \frac{-i \pm \sqrt{(i)^2 - 4 \times -1}}{2}$

$\therefore x = \frac{-i \pm \sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় ঘনমূল $= i, \frac{-i \pm \sqrt{3}}{2}$; (Ans.)

(16) let,

$x = \sqrt{[-1 - \sqrt{\{-1 - \sqrt{(-1 - \cdots \infty)}\}}]}$

বা, $x^2 = -1 - \sqrt{\{-1 - \sqrt{(-1 - \cdots \infty)}\}}$

বা, $x^2 = -1 - x$

বা, $x^2 + x + 1 = 0$

বা, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4}}{2}$

$= \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

$= \omega$ বা ω^2 (showed).

(17) let,

$x = \sqrt{[-2+2\sqrt{\{-2+2\sqrt{(-2+\cdots\infty)}\}}]}$

বা, $x^2 = -2+2\sqrt{\{-2+2\sqrt{(-2+\cdots\infty)}\}}$

বা, $x^2 = -2+2x$

বা, $x^2-2x+2=0$

$\therefore x = \dfrac{2 \pm \sqrt{(-2)^2-4\times 2}}{2}$

$= \dfrac{2\pm\sqrt{-4}}{2}$

$= \dfrac{2\pm 2i}{2} = \dfrac{2(1\pm i)}{2}$

$= (1\pm i)$ (Ans.)

(18) given,

$\dfrac{x}{y} = \dfrac{a+ib}{c+id}$

বা, $xc + xid = ay + iyb$

বা, $(xc-ay)^2 = i^2(by-xd)^2$

বা, $x^2c^2 - 2acxy + a^2y^2 = -1(b^2y^2 - 2xybd + x^2d^2)$

বা, $x^2c^2 - 2axcy + a^2y^2 + b^2y^2 - 2xybd + x^2d^2 = 0$

বা, $x^2(c^2+d^2) - 2xy(ac+bd) + y^2(a^2+b^2) = 0$

(showed).

(19) (a) $L.H.S = (1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)(1-\omega^{10})$

$= (1-\omega^2)(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega)$

$= (1-\omega^2-\omega^2+\omega^4)(1-\omega-\omega+\omega^2)$

$= (1+\omega+\omega^2-3\omega^2)(1+\omega+\omega^2-3\omega)$

$= (-3\omega^2)(-3\omega)$

$= 9\omega^3 = 9 = R.H.S$ (Proved).

(b) $L.H.S = (x+y)^2 + (x\omega+y\omega^2)^2 + (x\omega^2+y\omega)^2$

$= x^2+2xy+y^2+x^2\omega^2+2xy\omega^3+y^2\omega^4+x^2\omega^4+2xy\omega^3+y^2\omega^2$

$= x^2(1+\omega+\omega^2)+y^2(1+\omega+\omega^2)+6xy$

$= 6xy = R.H.S$ (Proved).

(20) (a) $|z-5| = 3$ হলে লোকাসটির কেন্দ্র নির্ণয়।

মনে করি,

$|x+iy-5| = 3$

$|(x-5)+iy| = 3$

$\sqrt{(x-5)^2+(y)^2} = 3$

$(x-5)^2+y^2 = 3^2$ যা একটি বৃত্তের সমীকরণ; যার কেন্দ্র $(5,0)$ এবং ব্যাসার্ধ 3।

(21) given,

$(a+ib)(c+id) = x+iy$

বা, $ac + aid + ibc + i^2bd = x+iy$

বা, $(ac-bd)+i(ad+bc) = x+iy$

বাস্তব ও অবাস্তব অংশ সমীকৃত করে পাই,

$x = (ac-bd)$ এবং $y = (ad+bc)$

$L.H.S = (a-ib)(c-id)$

$= ac - iad - ibc + i^2bd$

$= (ac-bd) - i(ad+bc)$

$= x-iy$

$= R.H.S$ (Proved).

(22)

অনুসারে,

$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

$-+$ ✓	$++$
$--$	$+-$

$-1 = r\cos\theta$ এবং $\sqrt{3} = r\sin\theta$

সাধারণ আর্গুমেন্ট, $\theta = \tan^{-1}\left|\frac{\sqrt{3}}{-1}\right|$

$= \tan^{-1}\sqrt{3}$

$= 60^\circ$ (Ans)

যেহেতু বিন্দুটি আর্গুমেন্ট ও অবস্থিত,

মুখ্য আর্গুমেন্ট $= 180 - 60$

$= 120^\circ$.

(Ans)

পোলার আকার,

$-1 + \sqrt{3}i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= 2(\cos \cancel{180}^\circ + i\sin 120^\circ)$

(Ans)

(23) given,

$3|z-1| = 2|z-2|$

বা, $3|x+iy-1| = 2|x+iy-2|$

বা, $3x - 3 + 3iy = 2x - 4 + 2iy$

বা, $\sqrt{(3x-3)^2 + (3y)^2} = \sqrt{(2x-4)^2 + (2y)^2}$

বা, $9x^2 - 18x + 9 + 9y^2 = 4x^2 - 16x + 16 + 4y^2$

বা, $5x^2 - 2x - 7 + 5y^2 = 0$

বা, $5(x^2+y^2) = 2x + 7$ (Proved)

(24) given,

$|2z-1| = |z-2|$

বা, $|2(x+iy) - 1| = |(x+iy) - 2|$

বা, $|2x + 2iy - 1| = |x + iy - 2|$

বা, $\sqrt{(2x-1)^2 + (2y)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$

বা, $4x^2 - 4x + 1 + 4y^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2$

বা, $3x^2 + 3y^2 = 3$

বা, $x^2 + y^2 = 1$ (showed)

(25) let, $x = \sqrt[3]{i}$

বা, $x^3 - i = 0$

বা, $x^3 + i^3 = 0$

বা, $(x+i)(x^2 - xi + i^2) = 0$

বা, $(x+i)(x^2 - xi - 1) = 0$

$\therefore x = -i$ অথবা, $x^2 - xi - 1 = 0$

$\therefore x = \frac{i \pm \sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $= -i, \frac{i \pm \sqrt{3}}{2}$; (Ans)

(26) we know, আবার,

$\omega = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ $\omega^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$

$\therefore 2\omega = -1 + \sqrt{-3}$ $\therefore 2\omega^2 = -1 - \sqrt{-3}$

$L.H.S = (-1+\sqrt{-3})^4 + (-1-\sqrt{-3})^4$

$= (2\omega)^4 + (2\omega^2)^4$

$= 16\omega + 16\omega^2$

$= 16(\omega + \omega^2) = 16(-1)$

$= -16$

$= R.H.S$ (Proved).

(27) let,

$x = \sqrt{i} + \sqrt{-i}$

বা, $x^2 = (\sqrt{i} + \sqrt{-i})^2$

বা, $x^2 = (\sqrt{i})^2 + 2\sqrt{i}.\sqrt{-i} + (\sqrt{-i})^2$

বা, $x^2 = i + 2\sqrt{i-i} + i$

বা, $x^2 = 2$

বা, $x = \pm\sqrt{2}$

$\therefore x = \pm\sqrt{2}$ = R.H.S (Proved).

(29) L.H.S $= x^2 + y^2 + z^2$

$= (p+q)^2 + (p\omega + q\omega^2)^2 + (p\omega^2 + q\omega)^2$

$= p^2 + 2pq + q^2 + p^2\omega^2 + 2pq\omega^3 + q^2\omega^4 + p^2\omega^4$

$+ 2pq\omega^3 + q^2\omega^2$

$= p^2(1+\omega+\omega^2) + q^2(1+\omega+\omega^2) + 6pq$

$= 6pq$ = R.H.S (Proved).

(30) let, $n = 3m$.

$\therefore$ L.H.S $= \left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^{3m} + \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^{3m}$

$= (\omega)^{3m} + (\omega^2)^{3m}$

$= 1 + 1 = 2$ = R.H.S (showed)

again, let, $n = 3m+1$

$\therefore$ L.H.S $= (\omega)^{3m+1} + (\omega^2)^{3m+1}$

$= \omega^{3m}.\omega + \omega^{3m}.\omega^2$

$= \omega + \omega^2$

$= -1$ = R.H.S (showed)