* দ্বিপদী:- (দ্বিপদী:-)

(1)

(i) $(2x+\frac{1}{6x})^{10}$ এর বিস্তৃতিতে

$T_{r+1} = {}^{10}C_r(2x)^{10-r}\cdot(\frac{1}{6x})^r$

$= {}^{10}C_r\cdot 2^{10-r}\cdot\frac{1}{6^r}\cdot x^{10-2r}$

শর্তানুসারে, $x^{10-2r} = x^0$

$\therefore r = 5$

$\therefore T_{(5+1)} = {}^{10}C_5\cdot 2^{10-5}\cdot\frac{1}{6^5}$

$= \frac{28}{27}$ (Ans.)

(ii) $(x^2-2+\frac{1}{x^2})^6 = (x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})^6$

$= (x-\frac{1}{x})^{12}$ এর বিস্তৃতিতে,

$T_{(r+1)} = {}^{12}C_r\cdot x^{12-r}\cdot(-\frac{1}{x})^r$

$= {}^{12}C_r\cdot x^{12-2r}\cdot(-1)^r$

শর্তানুসারে, $x^{12-2r} = x^0$

$\therefore r = 6.$

$\therefore T_{(6+1)} = {}^{12}C_6\cdot x^{12-12}\cdot(-1)^6$

$= 924.$ (Ans.)

(iii) $(1+x)^p(1+\frac{1}{x})^q$

$= (1+x)^p(\frac{1+x}{x})^q$

$= \frac{(1+x)^{p+q}}{x^q}$ এর বিস্তৃতিতে,

$T_{(r+1)} = {}^{p+q}C_r\cdot x^r\cdot\frac{1}{x^q}$

$= {}^{p+q}C_r\cdot x^{r-q}$

শর্তানুসারে, $x^{r-q} = x^0$

বা, $r = q$

$\therefore T_{(q+1)} = {}^{p+q}C_q = \frac{\lfloor p+q}{\lfloor q\,\lfloor p}$ (Ans.)

(iv) $(2x^2-\frac{1}{x^3})^{10}$ এর বিস্তৃতিতে

$T_{(r+1)} = {}^{10}C_r\cdot(2x^2)^{10-r}\cdot(-\frac{1}{x^3})^r$

$= (-1)^r\cdot{}^{10}C_r\cdot 2^{10-r}\cdot x^{20-5r}$

শর্তানুসারে, $x^{20-5r} = x^0$

$\therefore x = 4.$

$\therefore T_{(4+1)} = (-1)^4\cdot{}^{10}C_4\cdot 2^{10-4}$

$= 13440$ (Ans.)

(v) $(\frac{x^4}{y^3}+\frac{y^2}{2x})^{10}$ এর বিস্তৃতিতে,

$T_{(r+1)} = {}^{10}C_r\cdot(\frac{x^4}{y^3})^{10-r}\cdot(\frac{y^2}{2x})^r$

$= {}^{10}C_r\cdot\frac{1}{2^r}\cdot x^{40-5r}\cdot y^{5r-30}$

শর্তানুসারে, $y^{5r-30} = y^0$

$\therefore r = 6$

$\therefore T_{(6+1)} = {}^{10}C_6\cdot\frac{1}{2^6}\cdot x^{40-5\times6}$

$= \frac{105}{32}x^{10}$ (Ans.)

(2) $(1+x)^{44}$ এর বিস্তৃতিতে শর্তানুসারে,

21 তম পদ = 22 তম পদ

বা, ${}^{44}C_{20}\cdot x^{20} = {}^{44}C_{21}\,x^{21}$

$\therefore x = \frac{7}{8}.$ (Ans.)

(3) $(x-\frac{1}{x})^{2n}$ এর সূচক জোড় সংখ্যা হওয়ায় মধ্যপদ 1 টি।

$\therefore$ মধ্যপদ $= \frac{2n}{2}+1 = n+1$ তম পদ।

$\therefore T_{(n+1)} = {}^{2n}C_n\cdot(x)^{2n-n}\cdot(-\frac{1}{x})^n$

$= \frac{2n!}{n!\,n!}\cdot(-1)^n$

$= \frac{2^n\cdot n!\{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)\}}{n!\,n!}$ $[\because 2n! = 2^n\cdot n!\{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)\}]$

$= \frac{\{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)\}}{n!}\times(-2)^n$ (showed).

(4) $(3+\frac{x}{2})^n$ এর বিস্তৃতিতে,

$T_{(r+1)} = {}^nC_r \cdot (3)^{n-r} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^r$

$= {}^nC_r \cdot 3^{n-r} \cdot \frac{1}{2^r} \cdot x^r$

শর্তানুসারে, ${}^nC_7 \cdot 3^{n-7} \cdot \frac{1}{2^7} = {}^nC_8 \cdot 3^{n-8} \cdot \frac{1}{2^8}$

বা, $3^{n-7-n+8} \cdot \frac{1}{2^{7-8}} = \frac{{}^nC_8}{{}^nC_7}$

বা, $3\times 2 = \frac{n-7}{8}$

বা, $48 = n-7$

$\therefore n = 55$ (Ans.)

(5) $(2x^2+\frac{p}{x^3})^{10}$ এর বিস্তৃতিতে,

$T_{(r+1)} = {}^{10}C_r \cdot (2x^2)^{10-r} \cdot \left(\frac{p}{x^3}\right)^r$

$= {}^{10}C_r \cdot 2^{10-r} \cdot p^r \cdot x^{20-5r}$

১ম, $x^{20-5r} = x^5$ এবং ২য়, $x^{20-5r} = x^{15}$

$\therefore r = 3$ $\therefore r = 1$

শর্তানুসারে, ${}^{10}C_3 \cdot 2^{10-3} \cdot p^3 = {}^{10}C_1 \, 2^{10-1} \cdot p^1$

$\therefore p = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (Ans.)

(6) $(2x^2+\frac{k}{x^3})^{10}$ এর বিস্তৃতিতে,

$T_{(r+1)} = {}^{10}C_r \cdot (2x^2)^{10-r} \cdot \left(\frac{k}{x^3}\right)^r$

$= {}^{10}C_r \cdot 2^{10-r} \cdot k^r \cdot x^{20-5r}$

$\therefore$ $x^{20-5r} = x^5$ এবং $x^{20-5r} = x^{15}$

$\therefore r = 3$ $\therefore r = 1$

শর্তানুসারে, ${}^{10}C_3 \cdot 2^{10-3} \cdot k^3 = {}^{10}C_1 \, 2^{10-1} \cdot k^1$

$\therefore k = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (Ans.)

(7) $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে,

$T_{(r+1)} = {}^nC_r \cdot x^r$

এবং $T_{(r+3)} = {}^nC_{r+2} \, x^{r+2}$

শর্তানুসারে, ${}^nC_r = {}^nC_{r+2}$

বা, $\frac{{}^nC_{r+2}}{{}^nC_r} = 1$

বা, $\frac{n-r}{r+2} = 1$

বা, $n-r = r+2$

$\therefore 2r = n-2$ (showed).

(8) $(2x^2+\frac{2}{x})^{19}$ এর বিস্তৃতিতে,

$T_{(r+1)} = {}^{19}C_r \cdot (2x^2)^{19-r} \left(\frac{3}{x}\right)^r$

$= {}^{19}C_r \cdot 2^{19-r} \cdot 3^r \cdot x^{19-3r}$

এবং $T_{(r+2)} = {}^{19}C_{r+1} \, (2x^2)^{19-r-1} \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^{r+1}$

$= {}^{19}C_{r+1} \cdot 2^{18-r} \cdot 3^{r+1} \cdot x^{35-3r}$

শর্তানুসারে,
${}^{19}C_{r+1} \cdot 2^{18-r} \cdot 3^{r+1} = {}^{19}C_r \cdot 2^{19-r} \cdot 3^r$

বা, $\frac{{}^{19}C_{r+1}}{{}^{19}C_r} = 2^{19-r-18+r} \cdot 3^{r-r-1}$

বা, $\frac{19-r}{r+1} = \frac{2}{3}$

বা, $57-3r = 2r+2$

বা, $5r = 55$

$\therefore r = 11$ (Ans.)

(৭) $(a+3x)^n$ এর বিস্তৃতিতে শর্তানুযায়ী,

১ম পদ, $a^n = b \cdots (i)$

২য় পদ, ${}^nC_1 a^{n-1} \cdot 3x = \frac{21}{2}bx$

বা, $n\frac{a^n}{a} \cdot 3x = \frac{21}{2}bx$ [$\because a^n = b$]

বা, $2n = 7a \cdots (ii)$

৩য় পদ, ${}^nC_2 a^{n-2} \cdot (3x)^2 = \frac{189}{4}bx^2$

বা, $\frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{a^n}{a^2} \cdot 9x^2 = \frac{189}{4}bx^2$

বা, $\frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{21}{4}$

বা, $\frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{49}{4n^2} = \frac{21}{4}$

বা, $\frac{(n-1)7}{2n} = 3$

বা, $7n - 7 = 6n$

$\therefore n = 7$

এখন, n এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$2n = 7a$

$\therefore a = \frac{14}{7} = 2$

আবার, a এবং n এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$a^n = b$

বা, $2^7 = b$

$\therefore b = 128$

$\therefore$ নির্ণেয় $a = 2$, $b = 128$ এবং $n = 7$ (Ans.)

(১০) $(x+a)^n$ এর বিস্তৃতির শর্তানুযায়ী,

১ম পদ, $x^n = 729 \cdots (i)$

২য় পদ, ${}^nC_1 x^{n-1} \cdot a^1 = 7290$

বা, $n \cdot \frac{x^n}{x} \cdot a = 7290$

বা, $n \cdot \frac{729}{x} \cdot a = 7290$

বা, $na = 10x \cdots (ii)$

৩য় পদ, ${}^nC_2 \cdot x^{n-2} \cdot a^2 = 30375$

বা, $\frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{x^n}{x^2} \cdot a^2 = 30375$

বা, $\frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{x^n}{x^2} \cdot \left(\frac{10x}{n}\right)^2 = 30375$

বা, $\frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{100x^2}{x^2 \cdot n^2} = \frac{125}{3}$

বা, $\frac{(n-1)4}{2n} = \frac{5}{3}$

বা, $12n - 12 = 10n$

$\therefore n = 6$

এখন, n এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $x^6 = 729$

$\therefore x = 3$

আবার, x এবং n এর মান (ii) নং বসিয়ে,

$a = \frac{10 \times 3}{6}$

$\therefore a = 5$ (Ans.)

(11) $(1+x)(a-bx)^{12}$

$= (1+x)\{a^{12} + {}^{12}C_1 \cdot a^{12-1} \cdot (-bx)^1 + {}^{12}C_2 \cdot a^{12-2} \cdot (-bx)^2 + \cdots\cdots$

$+ {}^{12}C_7 \cdot a^{12-7} \cdot (-bx)^7 + {}^{12}C_8 \cdot a^{12-8} \cdot (-bx)^8 + \cdots\}$

শর্তমতে, ${}^{12}C_8 \cdot a^{12-8} \cdot (-b)^8 + {}^{12}C_7 \cdot a^{12-7} \cdot (-b)^7 = 0$

বা, ${}^{12}C_8 \cdot a^4 \cdot b^8 = {}^{12}C_7 \, a^5 \, b^7$

বা, $\dfrac{{}^{12}C_8}{{}^{12}C_7} = a^{5-4} \cdot b^{7-8}$

বা, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{5}{8}$ (Ans.)

(12) $(1-x)^8(1+x)^7$

$= (1-x)(1-x)^7(1+x)^7$

$= (1-x)(1-x^2)^7$

$= (1-x)\{1 + {}^7C_1(-x^2)^1 + {}^7C_2(-x^2)^2 + {}^7C_3(-x^2)^3 + {}^7C_4(-x^2)^4 + \cdots\}$

$\therefore$ বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ $= {}^7C_3$

$= 35$ (Ans.)

(13) $\left(x^p + \dfrac{1}{x^p}\right)^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে,

$T_{(r+1)} = {}^{2n}C_r \cdot (x^p)^{2n-r} \cdot \left(\dfrac{1}{x^p}\right)^r$

$= {}^{2n}C_r \, (x^p)^{2n-2r}$

শর্তানুসারে, $(x^p)^{2n-2r} = (x^p)^0$

বা, $2n = 2r$

$\therefore r = n$ (x মুক্ত পদ)

again, $\left(x^p + \dfrac{1}{x^p}\right)^{10}$ এর x মুক্ত পদের মান,

$= {}^{10}C_5 = 252$ (Ans.)

(14) $\left(x^4 + \dfrac{1}{x^3}\right)^{11}$ এর সূচক বিজোড় সংখ্যা।

সুতরাং এর মধ্যপদ 2 টি,

১ম মধ্যপদ $= \dfrac{n-1}{2} + 1 = \dfrac{11-1}{2} + 1 = 6$th

এবং ২য় মধ্যপদ $= \dfrac{n+1}{2} + 1 = \dfrac{11+1}{2} + 1 = 7$th.

$\therefore T_{(5+1)} = {}^{11}C_5 \cdot (x^4)^{11-5} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^3}\right)^5$

$= -{}^{11}C_5 \cdot x^{44-35}$

$= -{}^{11}C_5 \cdot x^9 = -462x^9$

এবং $T_{(6+1)} = {}^{11}C_6 \cdot (x^4)^{11-6} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^3}\right)^6$

$= +{}^{11}C_6 \cdot x^{20-18}$

$= 462x^2$

$\therefore$ মধ্যপদ দুটি হবে, $-462x^9$ এবং $462x^2$. (Ans.)

(15) $(1+x)^{24}$ এর বিস্তৃতিতে,

$T_{(r+1)} = {}^{24}C_r \cdot x^r$

এবং $T_{(r+2)} = {}^{24}C_{r+1} \cdot x^{r+1}$

শর্তানুসারে,

১ম: $\dfrac{{}^{24}C_{r+1}}{{}^{24}C_r} = \dfrac{4}{1}$

বা, $\dfrac{24-r}{r+1} = \dfrac{4}{1}$

বা, $24 - r = 4r + 4$

$\therefore r = 4$

$\therefore$ ক্রমিক পদ দুইটি (5 এবং 6);

আবার:

২য়, $\dfrac{{}^{24}C_{r+1}}{{}^{24}C_r} = \dfrac{1}{4}$

বা, $\dfrac{24-r}{r+1} = \dfrac{1}{4}$

বা, $96 - 4r = r + 1$

$\therefore r = 19.$

$\therefore$ ক্রমিক পদ দুইটি (20, 21);

$\therefore$ 5 এবং 6 অথবা 20 এবং 21; (Ans.)

(16) $(x+1)^{20}$ এর বিস্তৃতিতে,

$T_{(r-1)+1} = {}^{20}C_{r-1} \cdot x^{20-r+1}$

এবং $T_{(r+4)} = {}^{20}C_{r+3} \cdot x^{20-r-3}$

শর্তানুসারে, ${}^{20}C_{r-1} = {}^{20}C_{r+3}$

বা, $\dfrac{{}^{20}C_{r+3}}{{}^{20}C_{r-1}} = 1$

বা, $\dfrac{20-r+1}{r+3} = 1$

বা, $21 - r = r + 3$

বা, $2r = 18$

$\therefore r = 9$ (Ans.)

(17) $\left(x^3 - \dfrac{5}{x^2}\right)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে,

$T_{(r+1)} = {}^{12}C_r \cdot (x^3)^{12-r} \cdot \left(-\dfrac{5}{x^2}\right)^r$

$= {}^{12}C_r \cdot 5^r \cdot x^{36-5r} \cdot (-1)^r$

শর্তানুসারে, $x^{36-5r} = x^{11}$

বা, $36 - 5r = 11$

বা, $5r = 25$

$\therefore r = 5.$

$\therefore x^{11}$ এর সহগ $= {}^{12}C_5 \cdot 5^5 (-1)^5$

$= -{}^{12}C_5 \cdot 5^5$ (Ans.)

(18) $\left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right)^{10}$ এর সূচক জোড় সংখ্যা। সুতরাং মধ্যপদ ১টি।

$\therefore$ মধ্যপদটি $= \dfrac{n}{2} + 1$

$= \dfrac{10}{2} + 1 = 6^{th}$ (Ans.)