Private Study Zone
CSE DUET Admission Coaching
Tanvir Ahmed (CSE, DUET)
Contact: 013179-80443

জ্যামিতিঃ

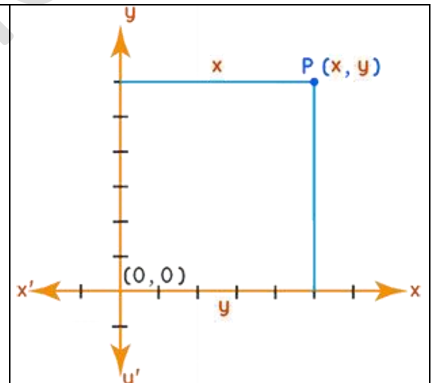
স্থানাংক(CO-ORDINATES)ঃ

স্থানাংক ২ প্রকারঃ

1) **কার্তেসীয় স্থানাংক এবং**
2) **পোলার স্থানাংক।**

১) কার্তেসীয় স্থানাংকঃ

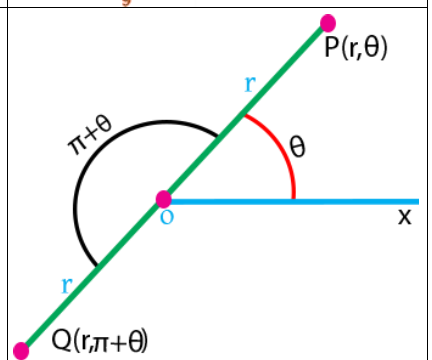
দুইটি সরলরেখা পরস্পরকে ছেদ করলে নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে ঐ সরলেখাদ্বয়ের যে দূরত্ব পাওয়া যায় ***তার স্থানাঙ্ককে কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক*** এবং এই কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক থেকে সরলরেখার যে সমীকরণ পাওয়া যায় তাকে ***সরললেরেখার কার্তেসীয় সমীকরণ*** বলে। **X** এবং **Y** অক্ষ বিবেচনায় কোন বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক **(x, y)** হলে, কার্তেসীয় সমীকরণ হিসেবে আমরা লিখতে পারি, $(X-x) + (Y-y) = 0$



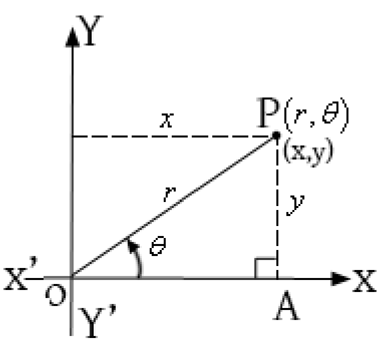
২) পোলার স্থানাংকঃ

পোলার স্থানাংক ব্যবস্থা এক ধরনের দ্বিমাত্রিক স্থানাংক ব্যবস্থা যেখানে সমতলের প্রতিটি বিন্দুর অবস্থান একটি নির্দিষ্ট বিন্দু ও একটি নির্দিষ্ট অক্ষরেখার সাপেক্ষে নির্নয় করা হয়। নির্দিষ্ট বিন্দুটিকে পোলার স্থানাংক ব্যবস্থার সাপেক্ষ বিন্দু ও নির্দিষ্ট রেখাটিকে সাপেক্ষ রেখা বলে। **যে স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা মূল বিন্দু থেকে কাঙ্ক্ষিত বিন্দুর সরাসরি দূরত্ব এবং সেটি কত কোণে আছে তা নির্দেশ করে তাকে পোলার স্থানাংক বলে।**

চিত্রে, (r,θ) এবং $(r,\theta) = (r,\pi + \theta)$



কার্তেসীয় ও পোলারের স্থানাংকের সম্পর্কঃ
(Relation between polar and cartesian co-ordinates)



ধরা যাক, কার্তেসীয় সমতলে যেকোনো একটি বিন্দু **P** এর পোলার ও কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক যথাক্রমে **(r, θ)** এবং **(x, y)**। **OP** যোগ করি এবং **OX** এর ওপর **PA** লম্ব আঁকি।

তাহলে, **OP =r, ∠POA = θ, OA = x** এবং **PA = y**

ΔOAP-হতে পাই, $\cos\boldsymbol{\theta} = \frac{OA}{OP} = \frac{x}{r}$ $\therefore \mathbf{x = r\cos\theta}$--- (i)

$$\sin\boldsymbol{\theta} = \frac{PA}{OP} = \frac{y}{r} \quad \therefore \mathbf{y = r\sin\theta}\text{---- (ii)}$$

(i)^2 + (ii)^2 করে পাই, $r^2=x^2+ y^2$ $\therefore \mathbf{r=\sqrt{x^2 + y^2}}$ -----(iii)

আবার, (ii) ÷ (i) করলে পাই, $\frac{r\sin\boldsymbol{\theta}}{r\cos\boldsymbol{\theta}} = \frac{y}{x}$

$$\therefore \boldsymbol{\theta} = \mathbf{\tan^{-1}\frac{y}{x}} \text{ ------- (iv) যেখানে, } \boldsymbol{\theta \leq 0 \leq 2\pi}.$$

বিভিন্ন চতুর্ভাগে θ-এর মান নির্ণয়:

(i)	**১ম চতুর্ভাগে**	(x, y) **বিন্দুর জন্য**	$\boldsymbol{\theta} = \tan^{-1}\frac{y}{x}$
(ii)	**২য় চতুর্ভাগে**	(-x, y) **বিন্দুর জন্য**	$\boldsymbol{\theta} = \pi - \tan^{-1}\lvert\frac{y}{x}\rvert$
(iii)	**৩য় চতুর্ভাগে**	(-x, -y) **বিন্দুর জন্য**	$\boldsymbol{\theta} = \pi + \tan^{-1}\lvert\frac{y}{x}\rvert$
(iv)	**৪র্থ চতুর্ভাগে**	(x, -y) **বিন্দুর জন্য**	$\boldsymbol{\theta} = 2\pi - \tan^{-1}\lvert\frac{y}{x}\rvert$

দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব (Distance between two points):

কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায়ঃ মনে করি, **P(x_1, y_1)** এবং **Q(x_2, y_2)** একই সমতলে অবস্থিত দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু। **P** ও **Q** বিন্দু হতে অক্ষের ওপর যথাক্রমে **PA** ও **QB** লম্ব আঁকি। আবার, **P** হতে **QB** রেখার ওপর **PR** লম্ব আঁকি।

তাহলে, $OA = x_1$, $OB = x_2$, $PA= y_1$ এবং $QB = y_2$ 2

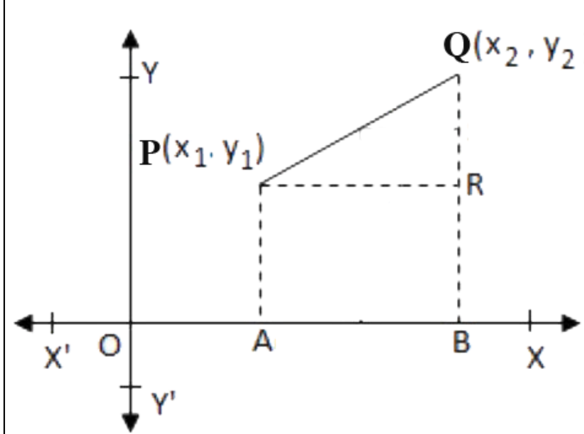
$\therefore PR = AB = OB\text{-}OA = x_2 - x_1$

এবং $QR = QB\text{-}RB = QB\text{-}PA = y_2 - y_1$

এখন, PRQ সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই,

$$PQ^2 = PR^2 + QR^2$$

$$\therefore \mathbf{PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$



সুতরাং, দুইটি বিন্দুর দূরত্ব, $= \sqrt{(\text{ভুজদ্বয়ের অন্তর})^2 + (\text{কোটিদ্বয়ের অন্তর})^2}$	

দ্রষ্টব্য-১: (i) মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 0); (ii) x-অক্ষ রেখার ওপর অবস্থিত প্রতিটি বিন্দুর কোটি শূন্য (0); (iii) y-অক্ষ রেখার ওপর অবস্থিত প্রতিটি বিন্দুর ভুজ শূন্য (0);

কাজঃ (i) (-2, -2) বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। $(2\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4})$ (ii) $(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4})$ এবং (2, 270°) বিন্দুদ্বয়ের কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। $(1,-1)$ $(0,-2)$ (iii) নিম্নলিখিত কার্তেসীয় আকারের সমীকরণটিকে পোলার আকারে এবং পোলার আকারের সমীকরণটিকে কার্তেসীয় আকারে প্রকাশ কর: (i) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ (ii) $r\cos(\theta-\alpha)=k$
$r^2(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)=a^2b^2$, $x\cos\alpha+y\sin\alpha=k$

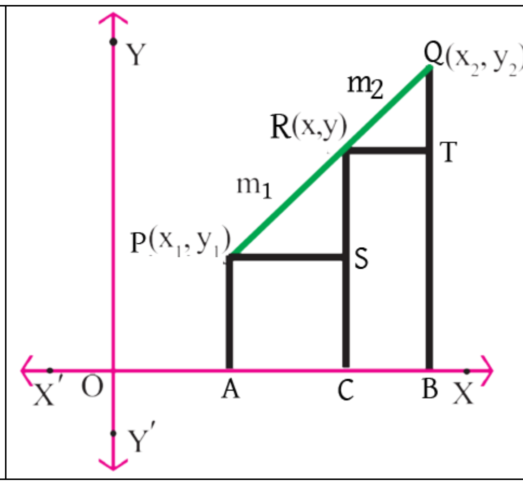
Trick-1: **কোনকিছুর মান বের করার জন্য সমীকরণের প্রয়োজন হয়। ঠিক যে কয়েকটি মান বের করবো ঐ কয়টি সমীকরণ দরকার।**
Trick-2: **এক একটি সমীকরণের জন্য এক একটি শর্ত প্রয়োজন হয়। শর্তগুলো অবশেই অংকে দেওয়া থাকবে।**
Trick-3: **একটি সমীকরণের তখনেই নির্ণয় সমীকরণ হবে। যখন x ও y ছাড়া কোন অজানা মান থাকবে না।**
Trick-4: **একটি সমীকরণের যে দিক বা বিন্দু দিয়ে যায় তা x ও y মান।**

রেখা বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক (Coordinates of a line divisor point)ঃ

১) অন্তর্বিভক্তঃ
মনে করি, **P** ও **Q** বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশ **R** বিন্দুতে $m_1 : m_2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়েছে।
∴ **R(x,y)** বিন্দুর স্থানাঙ্ক,

$$x = \frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2} \quad \text{এবং} \quad y = \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}$$

এখন, $R(x,y) = \left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$



দ্রষ্টব্য-২: (i) যদি **R, PQ** রেখাংশের মধ্যবিন্দু হয়, তবে $m_1 = m_2$ সেক্ষেত্রে $x = \frac{x_1+x_2}{2}$ এবং $x = \frac{y_1+y_2}{2}$ অর্থাৎ বিভক্ত বিন্দু বা মধ্যবিন্দু **R** এর স্থানাঙ্ক $R(x,y) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ হয়।
(ii) যদি **R, PQ** রেখাংশকে **k:1** অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তবে, $x = \frac{kx_2+x_1}{k+1}$ এবং $y = \frac{ky_2+y_1}{k+1}$ অর্থাৎ বিভক্ত

বিন্দু **R** এর স্থানাঙ্ক, $R(x,y) = \left(\frac{kx_2+x_1}{k+1}, \frac{ky_2+y_1}{k+1}\right)$.

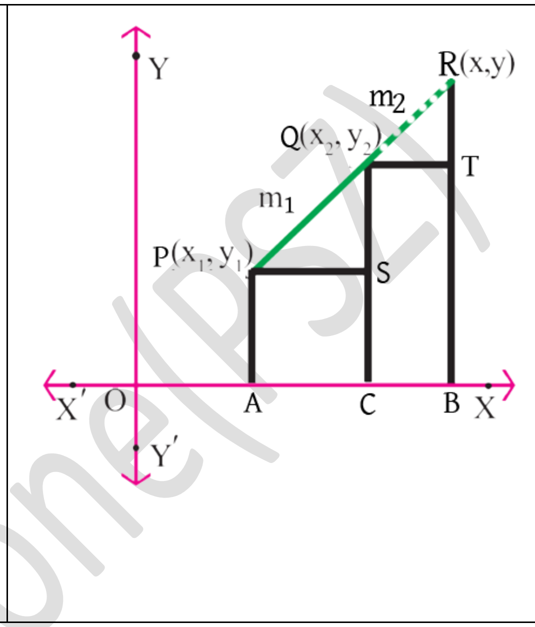
২) বহির্বিভক্তিরঃ

মনে করি, **P** ও **Q** বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশ **R** বিন্দুতে $m_1:m_2$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত হয়েছে।

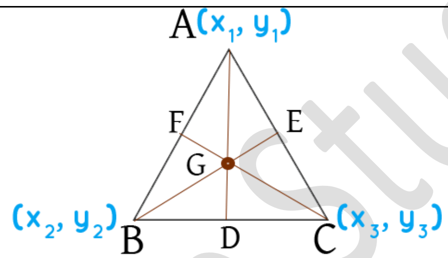
∴ $R(x,y)$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক,

$$x = \frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2} \quad \text{এবং} \quad y = \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}$$

এখন, $R(x,y) = \left(\frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}, \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}\right)$



ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র (Centroid of Triangle)ঃ ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় পরস্পর যে বিন্দুতে ছেদ করে তাই ঐ ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র।



ΔABC - ভরকেন্দ্র,

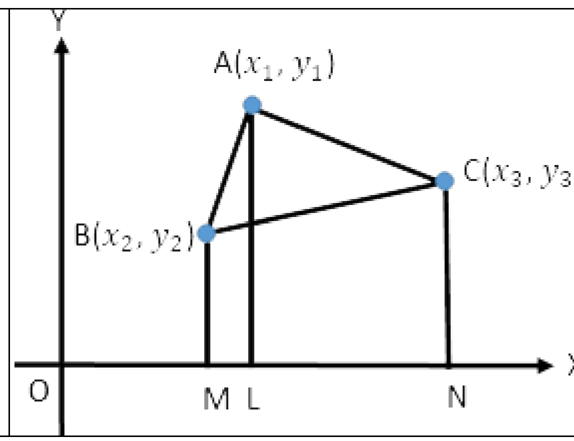
$$C\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

যেকোনো বাহুর মধ্যমা হলে 2 দ্বারা ভাগ করতে হবে।

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল (Area of a triangle)ঃ

$$\Delta ABC = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}$$

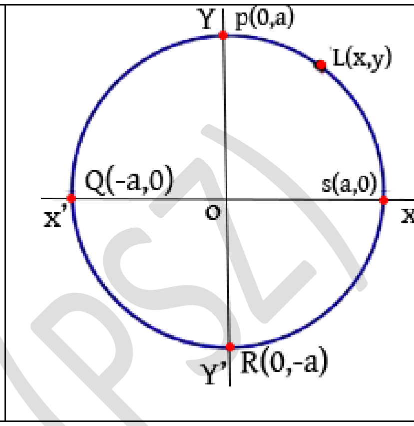
$$= \frac{1}{2}\{(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3)\}$$



4

সঞ্চারপথ(LOCUS)ঃ

সঞ্চারপথ (Locus)ঃ নির্দিষ্ট শর্তাধীনে চলমান বিন্দুসমূহের সেটকে **সঞ্চারপথ** বলে। মূলবিন্দুর চতুর্দিকে a (Constant) একক দূরত্ব বজায় রেখে অবস্থিত সকল বিন্দুসমূহের সেট একটি সঞ্চারপথ তৈরি করে। এই সঞ্চারপথটি একটি বৃত্ত, যার কেন্দ্র (0, 0) এবং ব্যাসার্ধ a, সমীকরণ আকারে তা $(x-g)^2 + (y-f)^2 = a^2$ এখানে লক্ষনীয় যে, সঞ্চারপথ তৈরি করার জন্য বিন্দুর এক বা একাধিক শর্তের প্রয়োজন হয়। কেননা শর্তযুক্ত না হলে তার সুনির্দিষ্ট রূপ নির্ধারণ করা যায় না।



উপরে উল্লেখিত উদাহরণটিতে দুইটি শর্ত ছিল:

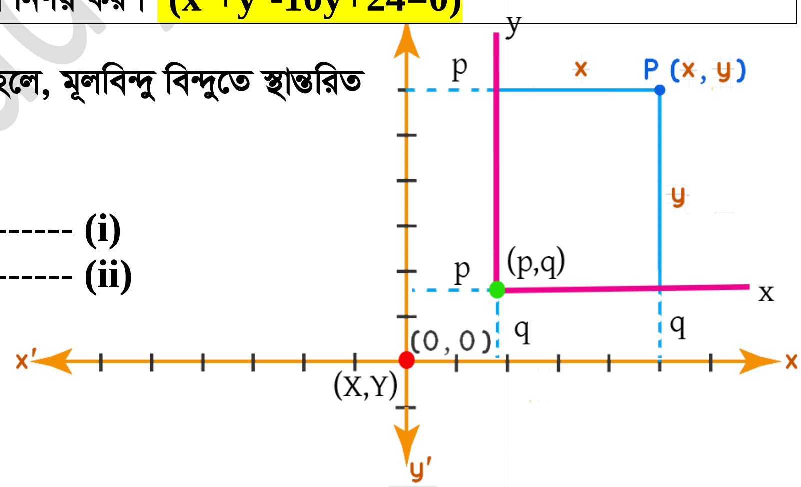
(i) একটি নির্দিষ্ট বিন্দু যা মূলবিন্দু এবং

(ii) মূলবিন্দু হতে সকল বিন্দুর দূরত্ব a একক।

কাজঃ (i) A(0, 4), B(0, 6) দুইটি স্থির বিন্দু এবং P একটি চলমান বিন্দু। P বিন্দুতে সর্বদা AB সরলরেখা সমকোণ উৎপন্ন করলে, P বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। **$(x^2+y^2-10y+24=0)$**

- আদি বিন্দু (X, Y) থেকে নতুন বিন্দু (p,q) হলে, মূলবিন্দু বিন্দুতে স্থান্তরিত করলে,

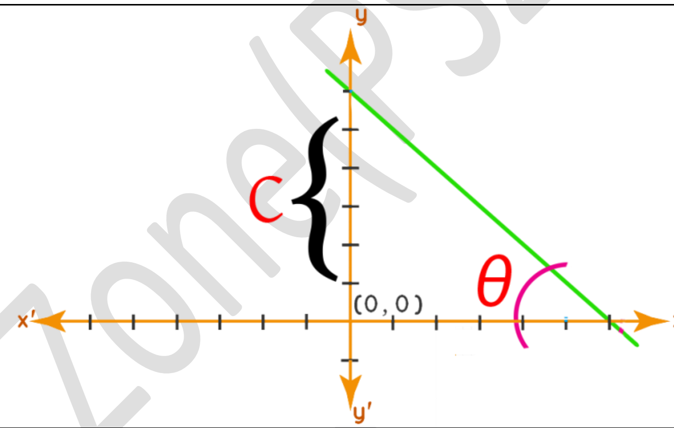
$$X = x + p \text{ ----------------------------- (i)}$$
$$Y = y + q \text{ ------------------------------ (ii)}$$



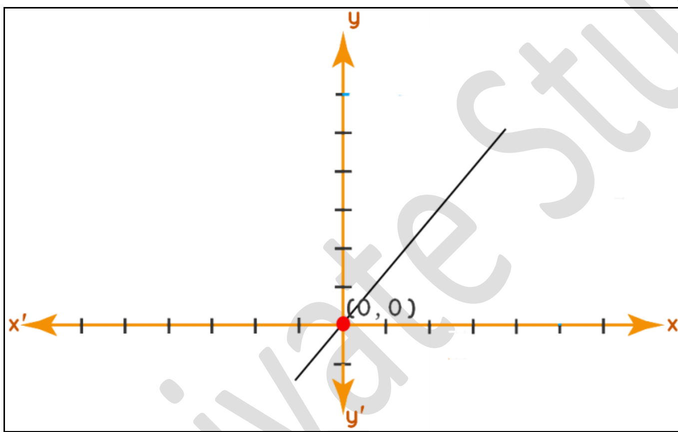
সরলরেখা(STRAIGHT LINE)ঃ

কোনো বিন্দুর সঞ্চারপথ যদি গতির দিক পরিবর্তন না করে তবে ঐ বিন্দুর সঞ্চারপথকে সরলরেখা বলা হয়। এক কথায় সরলরেখা বলতে সোজাসুজি রেখা বুঝায় যাতে কোনো প্রকার বক্রতা পরিলক্ষিত হয় না।

১. এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা X অক্ষের সাথে θ কোণ তৈরি করে এবং Y অক্ষের একটি নির্দিষ্ট অংশ ছেদ করে।

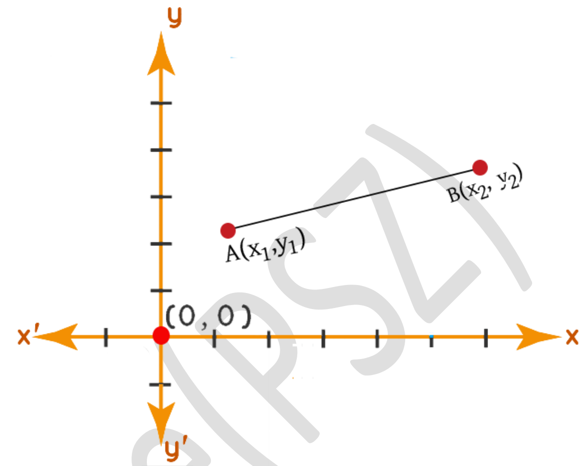
y=mx+c	

১. মূলবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ,

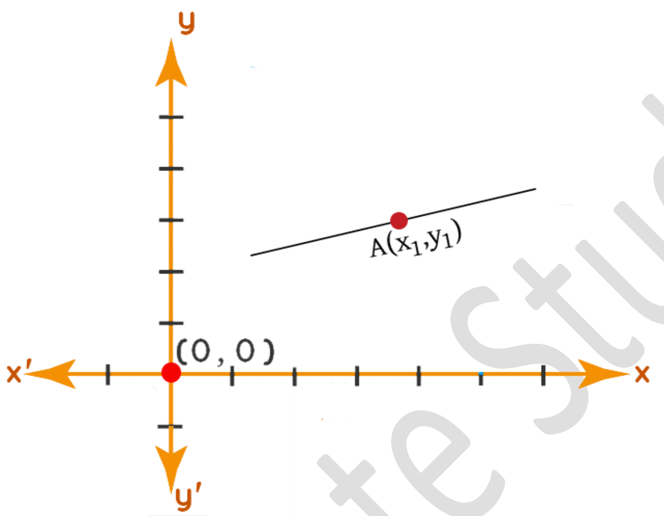
	**y=mx+c** বা, **0 = m.0 + c [0,0 মূলবিন্দুগামী]** বা, **c = 0** **∴ y=mx**
কোন বিন্দুর সমীকরণে **c=0** হলে, সমীকরণটি মূলবিন্দুগামী হবে।	

২. দুই বিন্দুগামী সমীকরণ,

AB রেখার সমীকরণ, $\frac{x-x_1}{x_1-x_2} = \frac{y-y_1}{y_1-y_2}$



২. এক বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ,



A রেখার সমীকরণ,

$(y-y_1) = m(x-x_1)$

সরলরেখার ঢাল(Slope Of Straight Line)ঃ কোনো সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তার ত্রিকোণমিতিক ট্যানজেন্ট (tangent)/নতী/ক্রমাবতী কে সরলরেখাটির ঢাল বলা হয়। ঢালকে সাধারণত m দ্বারা সূচিত করা হয়।

দ্রষ্টব্য-৩ঃ

(i) কোনো রেখার ঢাল $m = \tan\theta$ এবং $0° \leq \theta < 90°$ হলে এর মান বৃদ্ধির সাথে সাথে m এর মানও বৃদ্ধি পায়।

(ii) $\theta = 0°$ হলে, $m = \tan 0° = 0$, তখন রেখাটি x-অক্ষের সমান্তরাল বা x-অক্ষ হবে। [y-অক্ষের উপর লম্ব]

(iii) $\theta = 90°$ হলে, রেখাটি y-অক্ষের সমান্তরাল বা y-অক্ষ হবে। [x -অক্ষের উপর লম্ব]

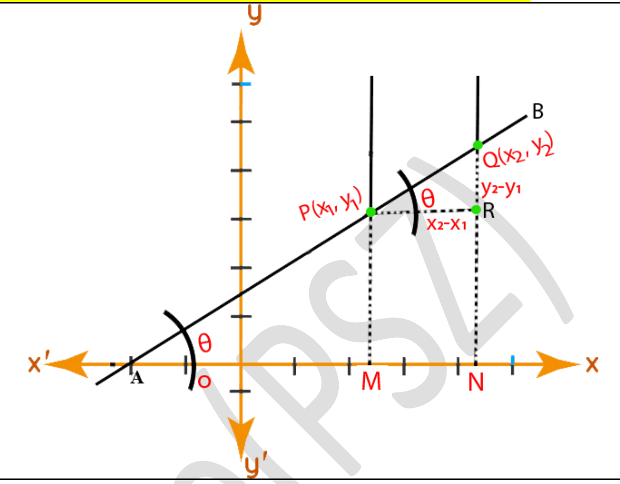
(iv) $\theta = 90°$ হলে, $m = \tan 90°$ (সংজ্ঞায়িত নয়। অসংজ্ঞায়িত) হয়। সুতরাং y-অক্ষ বা y-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার ঢাল সংজ্ঞায়িত নয়।

দুইটি বিন্দুর সংযোগরেখার ঢাল(Slope of a straight line passes through two points)ঃ

AB রেখার ঢাল m হলে,

$$m = \tan BAX = \tan\theta = \tan QPR$$

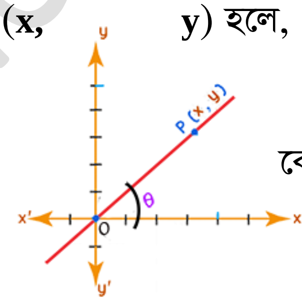
$$= \frac{QR}{PR} = \frac{QN-RN}{MN} = \frac{QN-PM}{ON-OM} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$



দ্রষ্টব্য-৪: মূল বিন্দুগামী কোনো সরলরেখার উপরস্থ (মূল বিন্দু ব্যতীত) একটিবিন্দু (x, y) হলে,

রেখাটির ঢাল $= \frac{y-0}{x-0} = \frac{y}{x}$ ।

অতএব, মূল বিন্দুগামী যে কোনো সরলরেখার ঢাল, ঐ রেখার ওপরে অবস্থিত যে কোনো বিন্দুর (মূল বিন্দু ব্যতীত) কোটি ও ভুজের অনুপাতের সমান।

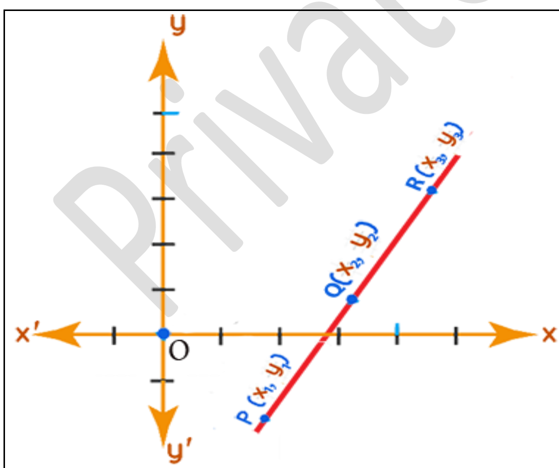


নতী বের করতে পারবোঃ $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, $y=mx+c$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{y}{x}$

তিনটি বিন্দু সমরেখ হওয়ার শর্ত:

Trick-5: $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ এবং $R(x_3, y_3)$ সমরেখ হলে **PQ** রেখা এবং **PR** রেখার ঢাল একই হবে। অতএব, তাদের ক্ষেত্রফল **0** হবে।

সুতরাং বিন্দু তিনটি সমরেখ হওয়ার শর্ত,



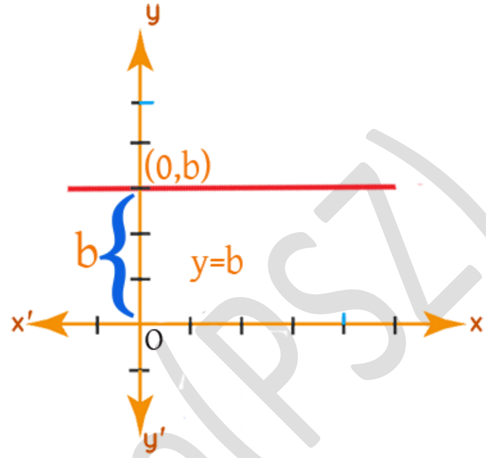
$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{y_3-y_1}{x_3-x_1} \;\ldots\ldots \text{(i)}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

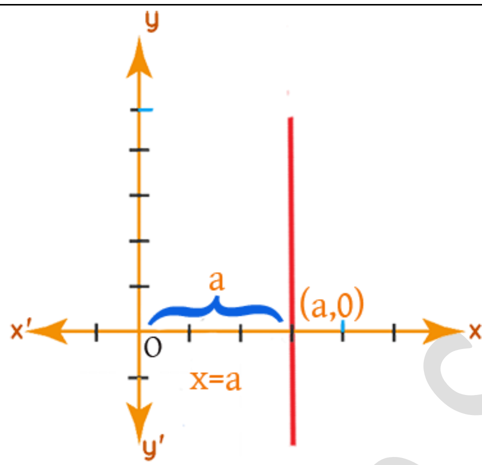
(i) অথবা (ii) অথবা (iii) -ই তিনটি বিন্দু সমরেখ হওয়ার শর্ত।

8

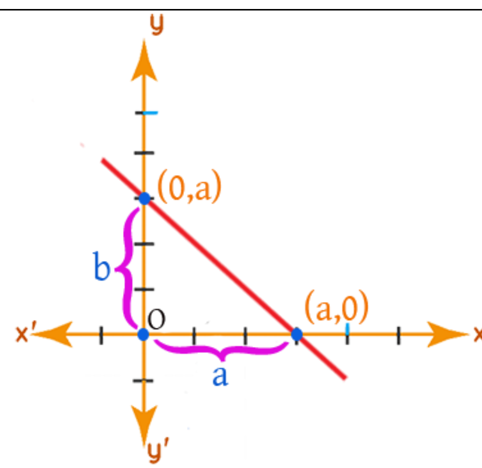
৩. X অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ,

$y=b$	

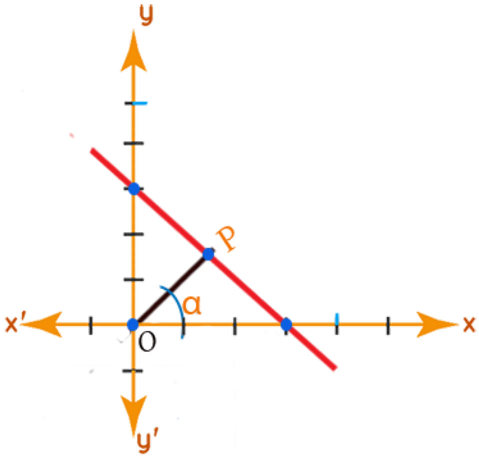
৩. Y অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ,

	$x=a$

৪. উভয় অক্ষ ছেদকারী রেখার সমীকরণ,

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$	

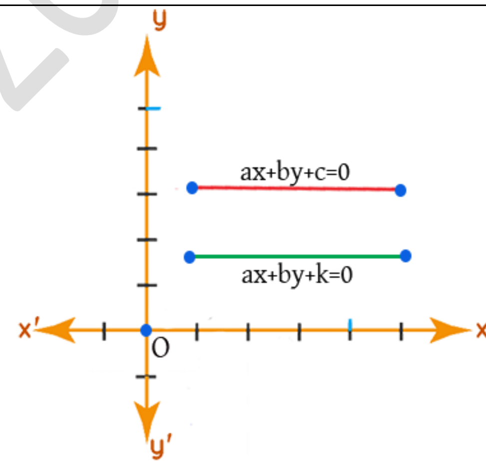
৪. এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যা, উভয় অক্ষকে ছেদ করে এবং মূলবিন্দু হইতে উহার লম্ব দূরত্ব এবং অক্ষের সাথে কোণ উৎপন্ন করে।



$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$$

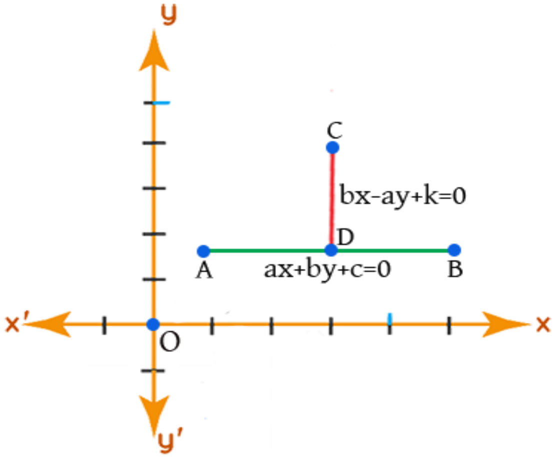
৫. দুইটি সমান্তরাল রেখার সমীকরণ,

$$ax + by + c = 0$$
$$ax + by + k = 0$$



দ্রষ্টব্য-৫: দুইটি রেখার সমান্তরাল হবে যদি তাদের ঢাল সমান হয়। $m_1 = m_2$

৫. দুইটি রেখা পরস্পর লম্ব রেখার সমীকরণ,



AB = $ax + by + c = 0$

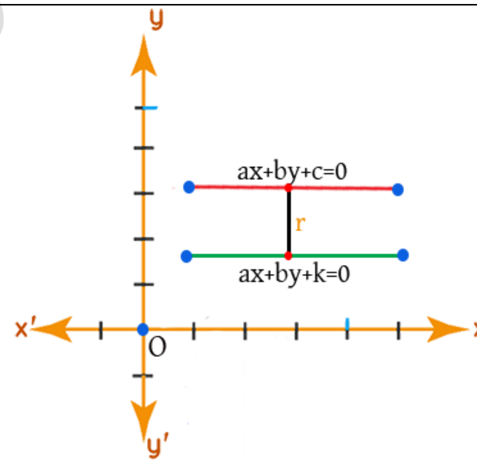
CD = $bx - ay + k = 0$

দ্রষ্টব্য-৬: দুইটি রেখা পরস্পর লম্ব হবে, যদি তাদের ঢালদ্বয়ের গুণফল -1 হয়। $m_1m_2 = -1$

৬. দুইটি সমান্তরাল রেখার দূরত্ব,

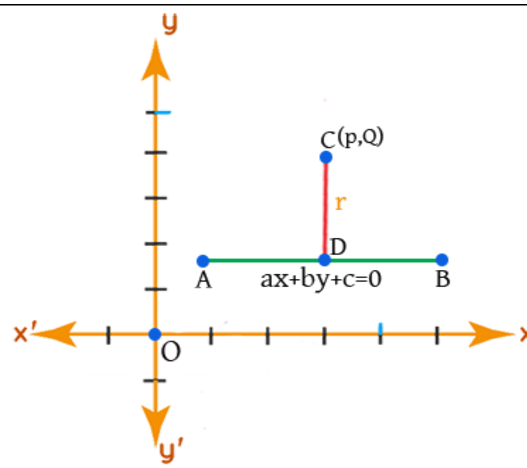
$$r = \left| \frac{c-k}{\sqrt{a^2+b^2}} \right|$$

|r| Always Positive.

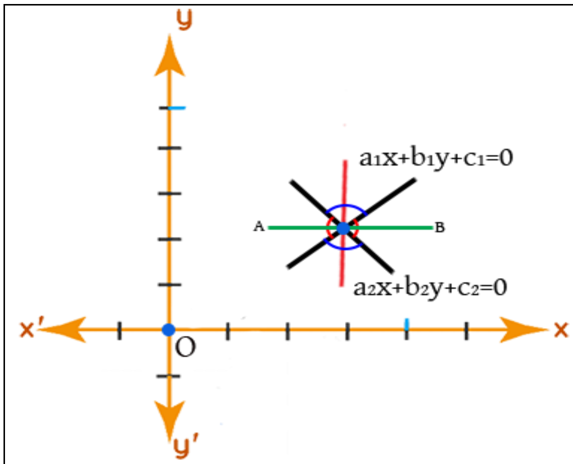


৬. লম্ব রেখার দূরত্ব,

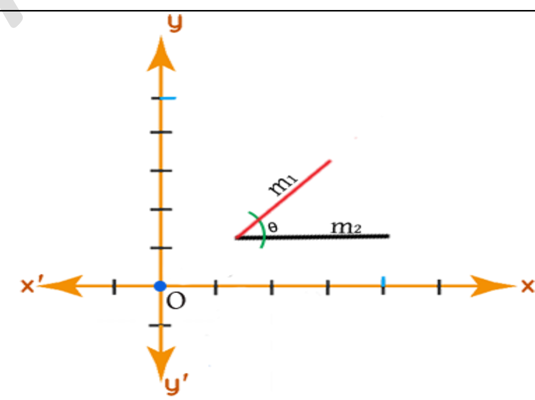
$$r = \pm \left| \frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} \right|$$



৭. মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ,

	$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1{}^2+b_1{}^2}} = \pm \frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2{}^2+b_2{}^2}}$
$a_1a_2 + b_1b_2 > 0$ হলে, (+) স্থূলকোণ । (-) সূক্ষকোণ।	$a_1a_2 + b_1b_2 < 0$ হলে, (+) সূক্ষকোণ । (-) স্থূলকোণ।

৮. দুইটি সরলরেখার অন্তর্ভুক্ত কোণঃ

$\tan\theta = \pm \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$	

Trick-6: **দুইটি বিন্দু যদি কোন রেখা ছেদ করে তাহলে ঐ দুইটি রেখার সমীকরণকে সমাধান করলে যে মান পাওয়া যায় তা ঐ বিন্দুর ছেদবিন্দুর স্থানাংক।**

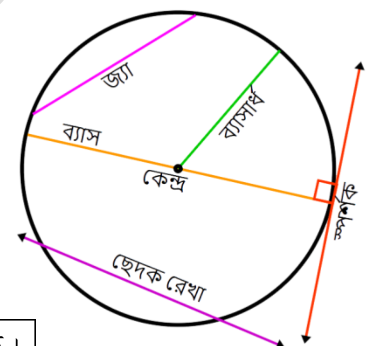
Trick-7: **স্থানাংক বের করার পদ্ধতি ৩ টি যথাঃ** (i) **মধবিন্দু থেকে।** (ii) **অন্তবিভক্তি ও বর্হিবিভক্তি থেকে।** (iii) **ছেদবিন্দু থেকে।**

Trick-8: **দূরত্ব বের করার পদ্ধতি ৩ টি যথাঃ** (i) **দুইবিন্দু থেকে।** (ii) **লম্ব দূরত্ব থেকে।** (iii) **সমান্তরাল রেখার দূরত্ব থেকে।**

Trick-9: **সরলরেখার সমীকরণের ধ্রুবকের মান বের করার পদ্ধতি ৩ টি যথাঃ** (i) **বিন্দুগামী সমীকরণ থেকে।** (ii) **লম্ব দূরত্ব থেকে।** (iii) **সমান্তরাল রেখার দূরত্ব থেকে।**

বৃত্ত (The Circle)ঃ

একটি নির্দিষ্ট বিন্দুকে কেন্দ্র করে সর্বদা সমান দূরত্ব বজায় রেখে অন্য একটি বিন্দু তার চারদিকে একবার ঘুরে এলে যে ক্ষেত্র তৈরি হয় তাকে বৃত্ত বলে।



কেন্দ্রঃ- যে বিন্দুকে কেন্দ্র করে একটি বৃত্ত আঁকা হয় তাকে ঐ বৃত্তের কেন্দ্র বলে।

বৃত্তের পরিধিঃ- একটি বৃত্তের কেন্দ্র হতে সমান দূরত্ব বজায় রেখে কোন বিন্দুর চলার পথকে পরিধি বলে।

পরিধি $= \mathbf{2\pi r}$

বৃত্তের চাপঃ- বৃত্তের পরিধির যে কোন অংশকে চাপ বলে।

দ্রষ্টব্য-১ঃ (i) বৃত্তের একই চাপের উপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ কোন কেন্দ্রেস্থ কোণের অর্ধেক। (ii) পরিধিস্থ কোণ বা বৃত্তস্থ কোণ একই কথা। (iii) অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ।

জ্যাঃ- "পরিধির যে কোন দুই বিন্দুর সংযোজক রেখাংশকে জ্যা বলে।"

দ্রষ্টব্য-২:

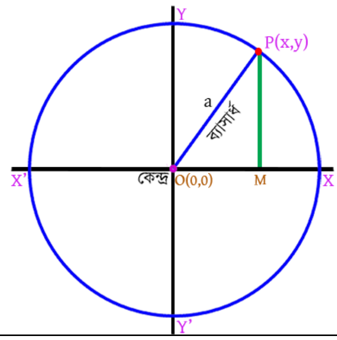
(i) বৃত্তের ব্যাসই হচ্ছে বৃত্তের বৃহত্তম জ্যা। (ii) বৃত্তের যে কোন জ্যা এর লম্ব দ্বিভখক কেন্দ্রগামী । (iii) বৃত্তের সমান সমান জ্যা কেন্দ্র হতে সমদূরবর্তী। (iv) বৃত্তের দুটি জ্যা এর মধ্যে কেন্দ্রের নিকটতম জ্যাটি অপর জ্যা অপেক্ষা বৃহত্তম।

স্পর্শকঃ- একটি বৃত্ত ও একটি সরল রেখা যদি একটি ও কেবল একটি ছেদ বিন্দু থাকে তবে রেখাটিকে বৃত্তটির একটি স্পর্শক বলে।

দ্রষ্টব্য-৩:

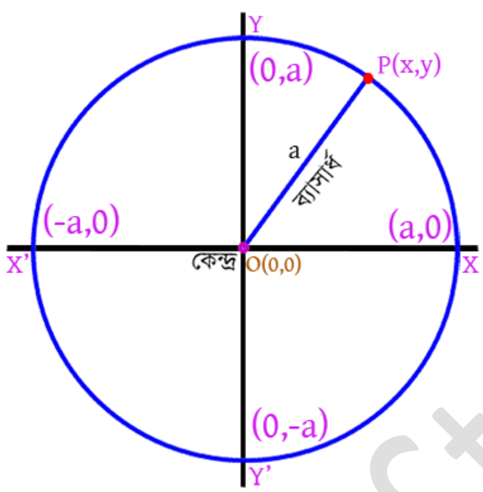
(i) বৃত্তের বহিঃস্থ যে কোন বিন্দুতে কেবল একটি স্পর্শক আঁকা যায়। (ii) বৃত্তের যে কোন বিন্দুতে অংকিত স্পর্শক স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব। (iii) বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হতে ঐ বৃত্তের উপর ২ টি স্পর্শক টানা সম্ভব।

১. মূলবিন্দুতে কেন্দ্রবিশিষ্ট ও a একক ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণঃ



$$x^2 + y^2 = a^2$$

১. মূলবিন্দুতে কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ ও অক্ষদ্বয়ের সাথে ছেদ বিন্দু নির্ধারণঃ

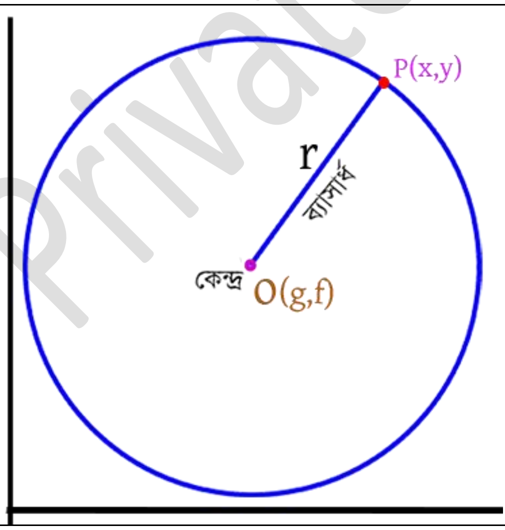


$$x^2 + y^2 = a^2$$

X-অক্ষের ওপর যেকোনো বিন্দুর **y**-স্থানাঙ্ক শূন্য (**0**)।
$x^2 + 0^2 = a^2$ বা, $x = \pm a$
Y-অক্ষের ওপর যেকোনো বিন্দুর **x**-স্থানাঙ্ক শূন্য (**0**)।
$0^2 + y^2 = a^2$ বা, $y = \pm a$

সুতরাং, কেন্দ্র মূলবিন্দু ও **a** একক ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্ত **x**-অক্ষকে (**±a, 0**) এবং **y**-অক্ষকে (**0, ±a**) বিন্দুতে ছেদ করে।

১. নির্দিষ্ট $(x_1, y_1)/(g, f)$ কেন্দ্র ও r ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণঃ



$$(x-g)^2 + (y-f)^2 = r^2$$

২. বৃত্তের সাধারণ সমীকরণঃ

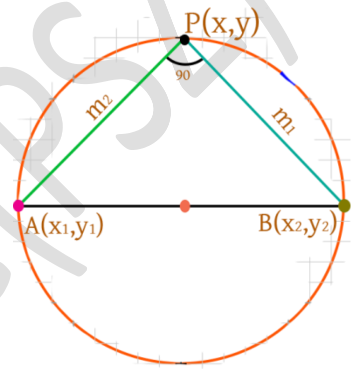
$$AP = r$$

বা, $(x-g)^2 + (y-f)^2 = r^2$ [r দেওয়া থাকলে এটা ব্যবহার করতে হবে।]

বা, $x^2-2xg+g^2+y^2-2fy+f^2 = r^2$

বা, $x^2+y^2-2gx-2fy+g^2+f^2-r^2 = 0$ [$c= g^2+f^2-r^2$ বা, $r= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$]

বা, $x^2+y^2-2gx-2fy+c = 0$ [বাকি সবক্ষেত্রে]



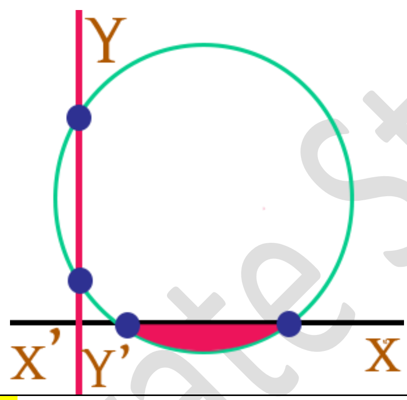
৩. (x_1, y_1)এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয় সংযোগ সরলরেখা ব্যাস ধরিয়া অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ,

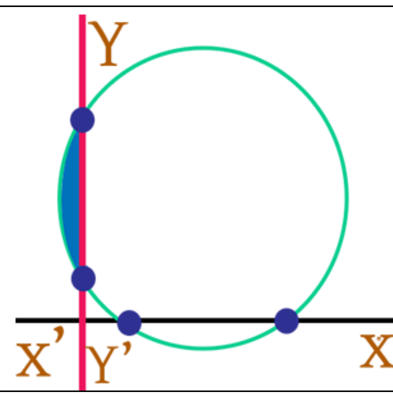
$m_1m_2= -1$ [লম্ব হলে, ঢালদ্বয়ের গুণফল '-1' হয়]

বা, $\dfrac{y-y_1}{x-x_1} \times \dfrac{y-y_2}{x-x_2} = -1$

বা, $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2) = 0$

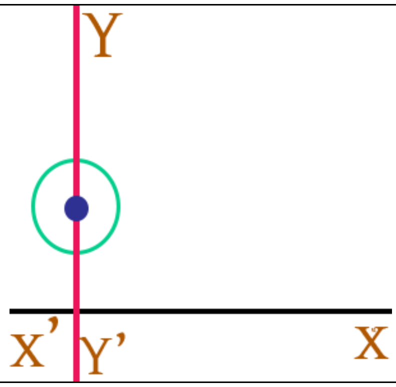
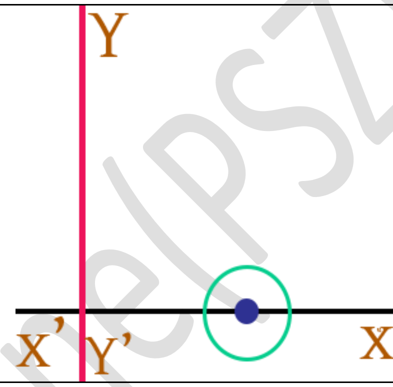
৪. বৃত্ত দ্বারা অক্ষদ্বয়ের খণ্ডিত অংশ,

বৃত্তটি দ্বারা x-অক্ষের খণ্ডিতাংশের পরিমাণ,	
	$2\sqrt{g^2 - c}$

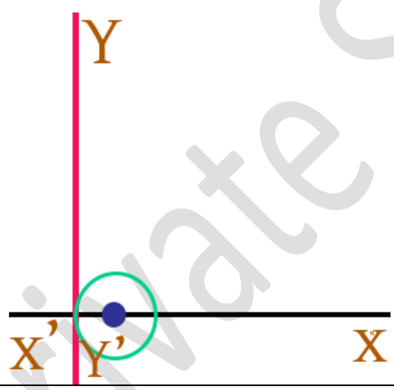
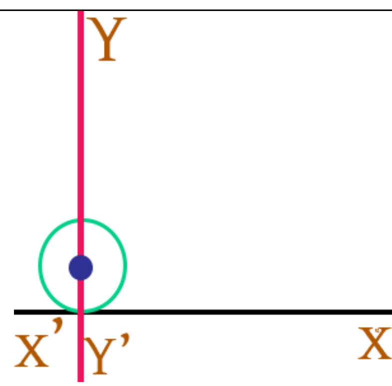
বৃত্তটি দ্বারা y-অক্ষের খণ্ডিতাংশের পরিমাণ,	
$2\sqrt{f^2 - c}$	

দ্রষ্টব্য-৪: (i) $g^2 < c$ হলে, x-অক্ষের খন্ডিতাংশ অবাস্তব হয়, অর্থাৎ বৃত্তটি x-অক্ষকে ছেদ করবে না। (ii) অনুরূপে $f^2 < c$ হলে, বৃত্তটি y-অক্ষকে ছেদ করবে না। (iii) $g^2 = c$ হলে, বৃত্তটি x-অক্ষকে এবং $f^2 = c$ হলে, বৃত্তটি y-অক্ষকে স্পর্শ করবে।

৫. কেন্দ্র x ও y -অক্ষের ওপর অবস্থিত হলে,

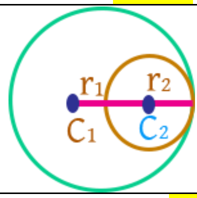
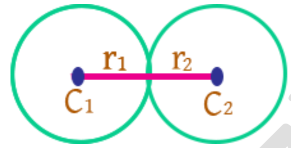
	
কেন্দ্র y -অক্ষের ওপর অবস্থিত হলে, $g = 0$ হবে এবং কেন্দ্রের ভুজ শূন্য হবে।	**কেন্দ্র x -অক্ষের ওপর অবস্থিত হলে, $f = 0$ হবে এবং কেন্দ্রের কোটি শূন্য হবে।**
দ্রষ্টব্য-৫: $c = 0$ হলে, সমীকরণটি মূলবিন্দু $(0, 0)$ দ্বারা সিদ্ধ হবে, অর্থাৎ বৃত্তটি মূলবিন্দু দিয়ে যাবে।	

৬. বৃত্তটি কেন্দ্র x ও y -অক্ষকে মূলবিন্দুতে স্পর্শ করলে, $g^2 = c$ হবে।

	
কেন্দ্র x-অক্ষকে মূলবিন্দুতে স্পর্শ করলে, $g^2=c$ হবে।	**কেন্দ্র y -অক্ষকে মূলবিন্দুতে স্পর্শ করলে, $f^2=c$ হবে।**
বৃত্তটি উভয় অক্ষকে স্পর্শ করলে, $g = f = c$	

দ্রষ্টব্য-৬: বৃত্তের সমীকরণে (**0,0**) মান বসিয়ে (**+ve**) আসলে, মূল বিন্দুটি বৃত্তের বাহিরে। (**-ve**) আসলে ভিতরে। আর শূন্য আসলে পরিধির উপরে।

৭. দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে স্পর্শ করার শর্ত:

অন্তঃস্থ	বহিঃস্থ।
	
$C_1C_2=r_1 - r_2$ [বড়টা আগে] অর্থাৎ, কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব = ব্যাসার্ধদ্বয়ের বিয়োগফল।	**$C_1C_2=r_1 + r_2$** অর্থাৎ, কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব = ব্যাসার্ধদ্বয়ের সমষ্টি