দ্বিঘাত সমীকরণ ও অসমতা :

(01) $4x^2-6x+1=0$ সমীকরণের মূল দুইটি যথাক্রমে α ও β।

মূলদ্বয়ের যোগফল, $\alpha+\beta=\frac{6}{4}$ মূলদ্বয়ের গুণফল, $\alpha\beta=\frac{1}{4}$

এখন $(\alpha+\frac{1}{\beta})$ ও $(\beta+\frac{1}{\alpha})$ মূলদ্বয়ের

যোগফল, $(\alpha+\frac{1}{\beta})+(\beta+\frac{1}{\alpha})$
$= \alpha+\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$
$= \frac{6}{4}\times\frac{6/4}{1/4}$
$= \frac{15}{2}$

গুণফল, $(\alpha+\frac{1}{\beta})(\beta+\frac{1}{\alpha})$
$= \alpha\beta+1+1+\frac{1}{\alpha\beta}$
$= \frac{1}{4}+1+1+4$
$= \frac{25}{4}$

∴ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2-\frac{15}{2}x+\frac{25}{4}=0$

∴ $4x^2-30x+25=0$ (Ans.)

(02) $ax^2+bx+a=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের

যোগফল, $\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$ এবং $\alpha\beta=1$

∴ $(a\alpha+b)$ এবং $(a\beta+b)$ মূলদ্বয়ের

যোগফল, $a\alpha+b+a\beta+b$
$= a(\frac{-b}{a})+2b$
$= b$

গুণফল, $(a\alpha+b)(a\beta+b)$
$= a^2\alpha\beta+ab\alpha+ab\beta+b^2$
$= a^2(1)+ab(\frac{-b}{a})+b^2$
$= a^2$

∴ নির্ণেয় সমীকরণ: $x^2-bx+a^2=0$; (Ans)

(03) $x^2-2bx+b^2-a^2=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় যথাক্রমে,

$\alpha=\frac{2b+\sqrt{4b^2-4b^2+4a^2}}{2}$, $\beta=\frac{2b-\sqrt{4b^2-4b^2+4a^2}}{2}$

$=\frac{2(b+a)}{2}=(b+a)$ $= b-a$.

∴ শর্তানুসারে, $\alpha_1=(b+a)+(b-a)=2b$

$\beta_1=(b+a)-(b-a)=2a$

∴ মূলদ্বয়ের যোগফল, $(\alpha_1+\beta_1)$ $=2b+2a$ $=2(a+b)$ গুণফল, $\alpha_1\beta_1=4ab$

∴ নির্ণেয় সমীকরণ: $x^2-2(a+b)x+4ab=0$; (Ans)

(04) $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের

যোগফল, $(\alpha+\beta)=\frac{-b}{a}$ এবং গুণফল, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

∴ $\frac{1}{\alpha^2}$ এবং $\frac{1}{\beta^2}$ মূলদ্বয়ের

যোগফল, $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$
$=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}$
$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$
$=\frac{(\frac{-b}{a})^2-\frac{2c}{a}}{\frac{c^2}{a^2}}$
$=\frac{b^2-2ac}{c^2}$

গুণফল, $\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{1}{\beta^2}$
$=\frac{1}{(\alpha\beta)^2}=\frac{a^2}{c^2}$

∴ নির্ণেয় সমীকরণ: $x^2-\frac{b^2-2ac}{c^2}x+\frac{a^2}{c^2}=0$

বা, $c^2x^2-(b^2-2ac)x+a^2=0$ (Ans.)

(05) given,

$(b+c-a)x^2+(c+a-b)x+(a+b-c)=0$

বা, $(-a-a)x^2+(-b-b)x+(-c-c)=0$

বা, $-2(ax^2+bx+c)=0$

∴ $ax^2+bx+c=0$

∴ নিশ্চায়ক, $D=b^2-4ac$
$=(a+c)^2-4ac$
$=(a-c)^2$

∴ নিশ্চায়কের মানটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা। সুতরাং সমীকরণের মূলগুলি মূলদ হবে।

(06) নিশ্চায়ক, $D=b^2-4ac$
$=(2a^2+2b^2)^2-4(a^2-b^2)(a^2-b^2)$
$=(2a^2+2b^2)^2-(2a^2-2b^2)^2$
$=(2a^2+2b^2+2a^2-2b^2)(2a^2+2b^2-2a^2+2b^2)$
$=4a^2+4b^2=16a^2b^2$

∴ নিশ্চায়কের মানটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা। সুতরাং সমীকরণের মূলগুলো মূলদ সংখ্যা।

(০৭) নিশ্চায়ক, $D = b^2 - 4ac$

$= \left(ka + \frac{c}{k}\right)^2 - 4ac$

$= k^2a^2 + 2ka\cdot\frac{c}{k} + \frac{c^2}{k^2} - 4ac$

$= \left(ka - \frac{c}{k}\right)^2$

যা একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা। সুতরাং সমীকরণের মূলদ্বয় মূলদ সংখ্যা হবে। (showed)

(০৮) নিশ্চায়ক, $D = b^2 - 4ac$

$= (2a+2b)^2 - 4\times 2(a^2+b^2)$

$= 4a^2 + 8ab + 4b^2 - 8a^2 - 8b^2$

$= -4a^2 + 8ab - 4b^2$

$= -4(a^2 - 2ab + b^2)$

$= -4(a-b)^2$

∴ নিশ্চায়ক একটি নিখুঁতবর্গের ঋণাত্মক সংখ্যা। সুতরাং মূলদ্বয় বাস্তব হবে না।

যদি, $D = -4(a-a)$

$= 0$

যদি $a = b$ হয় তবে মূলদ্বয় বাস্তব সংখ্যা হবে। (showed)

(০৯) নিশ্চায়ক, $D = b^2 - 4ac$

বা, $0 = (k+2)^2 - 4\times 4(k-1)$

বা, $0 = k^2 + 4k + 4 - 16k + 16$

বা, $0 = k^2 - 12k + 20$

∴ $k = 10$ অথবা, $k = 2$ (Ans)

∴ নির্ণেয় $k = 10$ অথবা $k = 2$. (Ans)

(১০) নিশ্চায়ক, $D = b^2 - 4ac$

$= (2p-4)^2 - 4(2p-10)$

$= 4p^2 - 16p + 16 - 8p + 40$

$= 4p^2 - 24p + 56$

$= (2p)^2 - 2\cdot 2p\cdot 6 + (6)^2 + 20$

$= (2p-6)^2 + 20$

যা একটি ধনাত্মক সংখ্যা, সুতরাং সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব হবে যদি p বাস্তব হয়। (showed)

again, $(\alpha - \beta) = 6$

বা, $(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = 36$

বা, $(2p-4)^2 - 4(2p-10) = 36$

বা, $4p^2 - 16p + 16 - 8p + 40 - 36 = 0$

বা, $4p^2 - 24p + 20 = 0$

∴ $p = 5$ অথবা $p = 1$

∴ নির্ণেয় $p = 5$ or $p = 1$ (Ans)

(১১) নিশ্চায়ক, $D = b^2 - 4ac$

বা, $0 = (6ab)^2 - 4(ac + 8b^2)a^2$

বা, $0 = 36a^2b^2 - 4a^3c - 32a^2b^2$

বা, $0 = 4b^2a^2 - 4a^3c$

বা, $b^2 = ac$

∴ $ac(x+1)^2 = 4b^2x$

বা, $b^2(x+1)^2 = 4b^2x$

বা, $x^2 + 2x + 1 - 4x = 0$

বা, $x^2 - 2x + 1 = 0$

∴ নিশ্চায়ক, $D = b^2 - 4ac$

$= (2)^2 - 4\times 1\times 1$

$= 0$

∵ $D = 0$; সুতরাং সমীকরণের মূলদ্বয় মূলদ হবে। (showed).

(12) given,

$x^2 - 6x - 1 + k(2x+1) = 0$

বা, $x^2 - 6x - 1 + 2kx + k = 0$

বা, $x^2 + 2x(k-3) + k - 1 = 0$

নিশ্চায়ক,

$D = b^2 - 4ac$

বা, $0 = (2k-6)^2 - 4(k-1)$

বা, $0 = 4k^2 - 24k + 36 - 4k + 4$

বা, $0 = 4k^2 - 28k + 40$

$\therefore k = 5$ or $k = 2$ (Ans)

(13) given, $ax + by = 1$

বা, $y = \frac{1-ax}{b}$

again, $ax^2 + by^2 = 1$

বা, $ax^2 + b\left(\frac{1-ax}{b}\right)^2 = 1$

বা, $bax^2 + (1 - 2ax + a^2x^2) = b$

বা, $x^2(ab + a^2) - 2ax - b + 1 = 0$

$\therefore$ নিশ্চায়ক, $0 = b^2 - 4ab$

বা, $0 = (2a)^2 - 4(ab + a^2)(-b+1)$

বা, $0 = 4a^2 - 4ab - 4a^2 + 4ab^2 + 4a^2b$

বা, $0 = 4ab(-1 + b + a)$

বা, $0 = -1 + a + b$

বা, $1 = a + b$ (Proved)

(14) নিশ্চায়ক, $D = b^2 - 4ac$

বা, $0 = (2k+6)^2 - 4(2k+3)(k+1)$

বা, $0 = 4k^2 + 24k + 36 - 8k^2 - 20k - 12$

বা, $0 = -4k^2 + 4k + 24$

$\therefore k = 3$ or $k = -2$ (Ans)

(15) let, সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল α.

$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$

$c\alpha^2 + b\alpha + a = 0$

$\therefore \frac{\alpha^2}{ab-bc} = \frac{\alpha}{c^2-a^2} = \frac{1}{ab-bc}$

এখন, $\frac{\alpha^2}{ab-bc} = \frac{1}{ab-bc}$

বা, $\alpha^2 = 1$

বা, $\alpha = \pm 1$

আবার, $\frac{\alpha^2}{ab-bc} = \frac{\alpha}{c^2-a^2}$

বা, $\frac{\pm 1}{-b(c-a)} = \frac{1}{(c+a)(c-a)}$

বা, $c + a = \pm b$

(Proved)

(16) let, সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল α.

$p\alpha^2 + q\alpha + 1 = 0$

$q\alpha^2 + p\alpha + 1 = 0$

$\therefore \frac{\alpha^2}{q-p} = \frac{\alpha}{q-p} = \frac{1}{p^2-q^2}$

এখন, $\frac{\alpha^2}{q-p} = \frac{\alpha}{q-p}$

বা, $\alpha^2 = \alpha$

বা, $\alpha = 1$

আবার, $\frac{\alpha}{q-p} = \frac{1}{p^2-q^2}$

বা, $\frac{1}{-(p-q)} = \frac{1}{(p+q)(p-q)}$

বা, $p + q = -1$

বা, $p + q + 1 = 0$ (Proved)

(17) let, সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল α.

$\alpha^2 + k\alpha - 6k = 0$

$\alpha^2 - 2\alpha - k = 0$

$\therefore \frac{\alpha^2}{-k^2-12k} = \frac{\alpha}{-6k+k} = \frac{1}{-2-k}$

$\therefore \frac{\alpha}{-6k+k} = \frac{1}{-2-k}$

বা, $\alpha = \frac{-5k}{-2-k} = \frac{5k}{2+k}$

আবার, $\frac{\alpha^2}{-k^2-12k} = \frac{\alpha}{-5k}$

বা, $\alpha = \frac{-k^2-12k}{-5k}$

$\therefore \frac{5k}{2+k} = \frac{k^2+12k}{5k} = \frac{k^2+12k}{5k}$

বা, $25k^2 = 2k^2 + 24k + k^3 + 12k^2$

বা, $k^3 - 11k^2 + 24k = 0$

বা, $k(k^2 - 11k + 24) = 0$

$\therefore k = 0 \mid k = 8 \mid k = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় $k = 0, 8, 3$ (Ans)

(18) let, সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল α।

$$\alpha^2+p\alpha+q=0$$
$$\alpha^2+q\alpha+p=0$$

$$\therefore \frac{\alpha^2}{p^2-q^2}=\frac{\alpha}{q-p}=\frac{1}{q-p}$$

এখন, $\frac{\alpha}{q-p}=\frac{1}{q-p}$

$\therefore \alpha=1$

আবার, $\frac{\alpha^2}{p^2-q^2}=\frac{\alpha}{q-p}$

বা, $\frac{1}{(p+q)(p-q)}=\frac{1}{-(p-q)}$

বা, $p+q=-1$.

again,
$x^2-px+q=0$ সমীকরণের এবং $x^2+qx+p=0$ সমীকরণের অপর মূলদ্বয় β_1, β_2

গুণফল, $\alpha\beta_1=q$ $\therefore \beta_1=q$

গুণফল, $\alpha\beta_2=p$ $\therefore \beta_2=p$

$\therefore$ মূলদ্বয়ের সমীকরণ:

$$x^2-(\beta_1+\beta_2)x+\beta_1\beta_2=0$$

বা, $x^2-(p+q)x+pq=0$ [$\because p+q=-1$]

বা, $x^2+x+pq=0$ (Proved).

(19) let, সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল α.

$$\alpha^2+b\alpha+c=0$$
$$\alpha^2+m\alpha+n=0$$

$$\therefore \frac{\alpha^2}{bn-cm}=\frac{\alpha}{n-c}=\frac{1}{m-b}$$

$$\therefore \frac{\alpha^2}{bn-cm}=\frac{1}{m-b}$$

বা, $\alpha^2=\frac{bn-cm}{m-b}$

$\therefore \alpha=\sqrt{\frac{bn-cm}{m-b}}$ (showed)

(20) let, সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল α.

$$p\alpha^2+2\alpha+1=0$$
$$\alpha^2+2\alpha+p=0$$

$$\therefore \frac{\alpha^2}{2p-2}=\frac{\alpha}{1-p^2}=\frac{1}{2p-2}$$

এখন, $\frac{\alpha^2}{2p-2}=\frac{1}{2p-2}$

বা, $\alpha^2=1$

বা, $\alpha=\pm1$

আবার, $\frac{\alpha^2}{2p-2}=\frac{\alpha}{1-p^2}$

বা, $\frac{\alpha}{2p-2}=\frac{1}{1-p^2}$

বা, $1-p^2=2p-2$

বা, $p^2-2p-3=0$

$\therefore p=3$ অথবা $p=-1$ (Ans)

(21) let, সমীকরণটির মূলদ্বয় যথাক্রমে 4α এবং 5α.

$\therefore$ মূলদ্বয়ের যোগফল, $4\alpha+5\alpha=\frac{-b}{a}$

বা, $9\alpha=\frac{-b}{a}$

বা, $\alpha=\frac{-b}{9a}$

গুণফল, $4\alpha\times5\alpha=\frac{c}{a}$

বা, $20\alpha^2=\frac{c}{a}$

বা, $20\left(\frac{-b}{9a}\right)^2=\frac{c}{a}$

বা, $20b^2=\frac{81a^2c}{a}$

$\therefore 20b^2=81ac$ (Proved)

(22) $ax^2+bx+b=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের

যোগফল, $(m\alpha+\alpha n)=\frac{-b}{a}$

বা, $m+n=\frac{-b}{\alpha a}$

গুণফল, $\alpha m\times\alpha n=\frac{b}{a}$

বা, $mn=\frac{b}{a\alpha^2}$

$$L.H.S=\sqrt{\frac{m}{n}}+\sqrt{\frac{n}{m}}+\sqrt{\frac{b}{a}}$$
$$=\frac{m+n}{\sqrt{mn}}+\sqrt{\frac{b}{a}}$$
$$=\frac{-b}{\alpha a}\times\sqrt{\frac{a\alpha^2}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}$$
$$=\frac{-\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+\sqrt{\frac{b}{a}}=0=R.H.S \text{ (Proved)}$$

(23) $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় যথাক্রমে α এবং αn.

$\therefore$ মূলদ্বয়ের যোগফল,

$\alpha+\alpha n=-\frac{b}{a}$

বা, $\alpha(1+n)=-\frac{b}{a}$

বা, $(1+n)=\frac{-b}{a\alpha}$

গুণফল, $\alpha.\alpha n=\frac{c}{a}$

বা, $n=\frac{c}{a\alpha^2}$

$$L.H.S=\frac{(n+1)^2}{n}=\frac{\left(\frac{-b}{a\alpha}\right)^2}{\frac{c}{a\alpha^2}}$$
$$=\frac{b^2}{a^2\alpha^2}\times\frac{a\alpha^2}{c}$$
$$=\frac{b^2}{ac}=R.H.S \text{ (Proved)}$$

(২৪) $27x^2+6x-p+2=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় যথাক্রমে α এবং α^2,

∴ মূলদ্বয়ের গুণফল,

$\alpha.\alpha^2 = \frac{-(p+2)}{27}$

$\alpha^3 = \frac{-(p+2)}{27}$

যোগফল,

$\alpha+\alpha^2 = \frac{-6}{27}$

বা, $\alpha^2+\alpha+\frac{6}{27}=0$

∴ $\alpha = -\frac{1}{3}$ or $\alpha = \frac{-2}{3}$

∴ $\alpha = \frac{-1}{3}$ হলে,

$(-\frac{1}{3})^3 = \frac{-(p+2)}{27}$

∴ $p=-1$ (Ans)

এবং $\alpha = -\frac{2}{3}$ হলে,

$(-\frac{2}{3})^3 = \frac{-(p+2)}{27}$

∴ $p=6$ (Ans)

(২৬) $x^2+px+q=0$ সমীকরণের একটি মূল α এবং অপরটি α^2,

∴ মূলদ্বয়ের যোগফল,

$(\alpha+\alpha^2)=-p$

গুণফল, $\alpha^3=q$

বা, $(\alpha+\alpha^2)^3=(-p)^3$

বা, $\alpha^3+3\alpha^2\alpha^2+3\alpha.\alpha^4+(\alpha^2)^3=-p^3$

বা, $q+3q(-p)+q^2=-p^3$

বা, $p^3-q(3p-1)+q^2=0$ (Proved).

(২৭) $x^2+px+q=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল

$(\alpha+\beta)=-p$ এবং গুণফল, $\alpha\beta=q$.

এবং শর্তানুসারে, $\alpha-\beta=1$

L.H.S $= p^2+4q^2$

$= (\alpha+\beta)^2+4(\alpha\beta)^2$

$= (\alpha-\beta)^2+4\alpha\beta+(2\alpha\beta)^2$

$= 1^2+4\alpha\beta+(2\alpha\beta)^2$

$= (1+2\alpha\beta)^2$

$= (1+2q)^2 =$ R.H.S (Proved)

(২৮) $x^2-bx+c=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল,

$(\alpha_1+\beta_1)=b$ এবং গুণফল, $\alpha_1\beta_1=c$

এবং $x^2-cx+b=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল,

$\alpha_2+\beta_2=c$ এবং $\alpha_2\beta_2=b$

শর্তানুসারে,

$\alpha_1-\beta_1=k$

বা, $(\alpha_1+\beta_1)^2-4\alpha_1\beta_1=k$

বা, $b^2-4c=k$

এবং, $\alpha_2-\beta_2=k$

বা, $(\alpha_2+\beta_2)^2-4\alpha_2\beta_2=k$

বা, $c^2-4b=k^2$

∴ $b^2-4c=c^2-4b$

বা, $b^2-c^2=4c-4b$

বা, $(b+c)(b-c)=-4(b-c)$

বা, $b+c=-4$

বা, $b+c+4=0$ (Proved).

(২৯) $x^2-px+q=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় যথাক্রমে α এবং $\alpha+1$

∴ যোগফল, $\alpha+\alpha+1=p$

বা, $2\alpha+1=p$

গুণফল,

$\alpha(\alpha+1)=q$

$\alpha^2+\alpha=q$

L.H.S $= p^2-4q-1$

$=(2\alpha+1)^2-4(\alpha^2+\alpha)-1$

$=4\alpha^2+4\alpha+1-4\alpha^2-4\alpha-1$

$=0$ (Proved)

(30) given, $\frac{1}{x} + \frac{1}{p-x} = \frac{1}{q}$

বা, $\frac{p-x+x}{x(p-x)} = \frac{1}{q}$

বা, $pq = xp - x^2$

বা, $x^2 - xp + pq = 0$

সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল,

$\alpha + \beta = p$ এবং গুণফল, $\alpha\beta = pq$

শর্তানুসারে, $(\alpha-\beta)^2 = n^2$

বা, $(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = n^2$

বা, $p^2 - 4pq = n^2$

বা, $p^2 - 4pq - n^2 = 0$

$\therefore p = \frac{4q \pm \sqrt{(4q)^2 - 4(-n^2)}}{2}$

$= \frac{4q \pm \sqrt{16q^2 + 4n^2}}{2}$ (Ans)

(31) let, সমীকরণের মূলদ্বয়, α এবং $\frac{1}{\alpha}$

$\therefore$ মূলদ্বয়ের গুণফল,

$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{3k+k}{k^2-3}$

বা, $k^2 - 3 - 3k - \cancel{k} = 0$

বা, $k^2 - 3k - 4 = 0$

$\therefore k = 4$ or $k = -1$ (Ans)

(32) given, $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+a} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m+a}$

বা, $\frac{x+a+x}{x(x+a)} = \frac{(m+a+m)}{m(m+a)}$

বা, $\frac{2x+a}{x^2+xa} = \frac{2m+a}{m^2+am}$

বা, $x^2 2m + ax^2 + 2mxa + xa^2 - 2xm^2 - 2xam - am^2 - a^2m = 0$

বা, $x^2(2m+a) + x(a^2 - 2m^2) - (am^2 + a^2m) = 0$

$\therefore$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল শূন্য হলে,

$a^2 = 2m^2$ (Proved).

(33) $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল, $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ এবং গুণফল, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

এখন,

$cx^2 - 2bx + 4a = 0$

বা, $\frac{c}{a}x^2 - 2\frac{b}{a}x + 4 = 0$

বা, $\alpha\beta x^2 + 2(\alpha+\beta)x + 4 = 0$

বা, $\alpha\beta x^2 + 2\alpha x + 2\beta x + 4 = 0$

বা, $\alpha x(\beta x + 2) + 2(\beta x + 2) = 0$

বা, $(\alpha x + 2)(\beta x + 2) = 0$

$\therefore x = -\frac{2}{\alpha}$ এবং $x = \frac{-2}{\beta}$ (Ans)

(34) $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল, $\alpha + \beta = -p$ এবং গুণফল, $\alpha\beta = q$

$\therefore q^2x^2 - (p^2 - 2q)x + 1 = 0$

বা, $\alpha^2\beta^2x^2 - \{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta\}x + 1 = 0$

বা, $\alpha^2\beta^2x^2 - (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 2\alpha\beta)x + 1 = 0$

বা, $\alpha^2\beta^2x^2 - \alpha^2x - \beta^2x + 1 = 0$

বা, $\alpha^2x(\beta^2x - 1) - 1(\beta^2x - 1) = 0$

বা, $(\alpha^2x - 1)(\beta^2x - 1) = 0$

$\therefore x = \frac{1}{\alpha^2}$ অথবা $x = \frac{1}{\beta^2}$ (Ans)

(36) $x^2+px+q=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল $(\alpha+\beta)=-p$ এবং গুণফল, $\alpha\beta=q$

আবার, $x^2+p_1x+q_1=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল, $\alpha_1+\beta_1=-p_1$ এবং গুণফল, $\alpha_1\beta_1=q_1$

শর্তানুসারে, $\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha}{\beta}$

বা, $\frac{(\alpha_1+\beta_1)^2}{\alpha_1\beta_1}=\frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta}$

বা, $\frac{p_1^2}{q_1}=\frac{q^2}{q}$

বা, $p_1^2q=q^2q_1$ (Proved).

(37) $ax^2-bx+c=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল $\alpha+\beta=\frac{b}{a}$ এবং গুণফল, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

আবার, $bx^2-cx+a=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল, $\alpha_1+\beta_1=\frac{c}{b}$ এবং গুণফল $\alpha_1\beta_1=\frac{a}{b}$

শর্তানুসারে,

$\alpha-\beta=\alpha_1-\beta_1$

বা, $(\alpha-\beta)^2=(\alpha_1-\beta_1)^2$

বা, $(\alpha+\beta)-4\alpha\beta=(\alpha_1+\beta_1)^2-4\alpha_1\beta_1$

বা, $\frac{b^2}{a^2}-4\frac{c}{a}=\frac{c^2}{b^2}-4\frac{a}{b}$

বা, $\frac{b^2-4ac}{a^2}=\frac{c^2-4ab}{b^2}$

বা, $b^4-4ab^2c=a^2c^2-4a^3b$

বা, $b^4-a^2c^2=4ab(bc-a^2)$ (Proved)

(38) $x^2-(p+q)x+pq=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল $(\alpha+\beta)=p+q$ এবং গুণফল, $\alpha\beta=pq$.

$x^2+bx+c=0$ সমীকরণের যোগফল,

$2\alpha+2\beta=-b$ গুণফল, $2\alpha.2\beta=c$

বা, $2(\alpha+\beta)=-b$ বা, $4\alpha\beta=c$

বা, $2(p+q)=-b$ বা, $4pq=c$

$\therefore b=-2(p+q)$ (Ans) $\therefore c=4pq$ (Ans)

(39) $x^2+ax+\frac{1}{4}(a^2-b^2)=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল, $\alpha+\beta=-a$ এবং গুণফল, $\alpha\beta=\frac{1}{4}(a^2-b^2)$

$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=a^2-4\cdot\frac{1}{4}\cdot(a^2-b^2)$

$=a^2-a^2+b^2$

$=b^2$

$\therefore \alpha-\beta=\pm b$

$\therefore (\alpha+\beta)$ এবং $(\alpha-\beta)$ মূলদ্বয় দ্বারা গঠিত সমীকরণ,

$x^2-\{(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)\}x+(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=0$

বা, $x^2-(-a\pm b)x+(-a)(\pm b)=0$

$\therefore x^2+(a\pm b)x\pm ab=0$ (Ans.)

(40) $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল,

$\alpha+\beta = -\frac{b}{a}$

বা, $\alpha a+\beta a = -b$

বা, $\alpha a + b = -\beta a$

বা, $\beta a + b = -\alpha a$

$L.H.S = \frac{1}{(\alpha a+b)^2} + \frac{1}{(a\beta+b)^2}$

$= \frac{1}{(-\beta a)^2} + \frac{1}{(-\alpha a)^2}$

$= \frac{1}{\beta^2 a^2} + \frac{1}{\alpha^2 a^2}$

$= \frac{\alpha^2+\beta^2}{a^2\alpha^2\beta^2}$

$= \frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{a^2(\alpha\beta)^2}$

$= \frac{\left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right)}{a^2 \cdot \frac{c^2}{a^2}}$

$= \frac{b^2-2ac}{a^2c^2} = R.H.S$ (Proved)

(41) $x^2-px+q=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল

$\alpha+\beta = p$ এবং গুণফল, $\alpha\beta = q$

$\therefore \alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$= (p)^3 - 3qp$

$= p^3 - 3pq$ (Proved)

(42) $4x^2+2x+1=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল, $\alpha+\beta = -\frac{2}{4}$ এবং গুণফল $\alpha\beta = \frac{-1}{4}$

বা, $\beta = \frac{-1}{4\alpha}$

$\therefore \alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta$

$= \left(\frac{-2}{4}\right)^2 - 2\left(\frac{-1}{4}\right)$

$= \frac{3}{4}$

বা, $\beta^2 = \frac{3}{4} - \alpha^2$

$\beta = \frac{3-4\alpha^2}{4\beta}$

$= \frac{3-4\alpha^2}{4\left(\frac{-1}{4\alpha}\right)}$

$= \frac{3-4\alpha^2}{\frac{-1}{\alpha}}$

$= 4\alpha^3 - 3\alpha$ (Ans)

(43) দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল, $\sqrt{-5}-1$ এবং অপরটি $-\sqrt{-5}-1$

$\therefore$ মূলদ্বয়ের যোগফল,

$= (\sqrt{-5}-1) + (-\sqrt{-5}-1)$

$= -2$

গুণফল,

$(\sqrt{-5}-1)(-\sqrt{-5}-1)$

$= (-1)^2 - (\sqrt{-5})^2$

$= 1-(-5)$

$= 6$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ: $x^2+2x+6=0$ (Ans)

(44) $x^2+px+qr=0 \cdots$ (i)

বা, $x^2-(q+r)x+qr=0$

বা, $x^2-qx-rx+qr=0$

বা, $x(x-q)-r(x-q)=0$

বা, $(x-r)(x-q)=0$

$\therefore x = r$ or $x = q$

$x^2+qx+rp=0 \cdots$ (ii)

(i) এর অনুরূপ অনুসারে

$x = r$ এবং $x = p$

এবং: $x^2+rx+pq=0 \cdots$ (iii)

(i) ও (ii) এর অনুরূপ অনুসারে,

$x = p$ এবং $x = q$

$\therefore$ (i) ও (ii) এর সাধারণ মূল r

(ii) ও (iii) এর সাধারণ মূল p এবং

(iii) ও (i) এর সাধারণ মূল q। (Proved).