第五章 不确定性推理

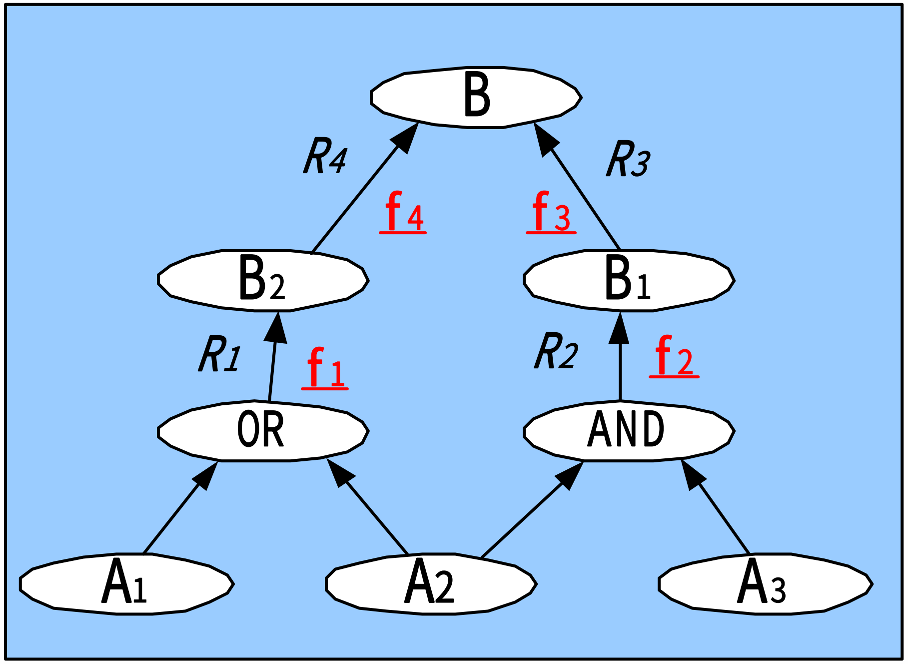
- 概述
- 概率论基础
- 主观Bayes方法
- 确定性方法（可信度方法）
- 证据理论
- Bayes网络

福州大学陈昭炯

概述

不确定推理：{初始证据, 知识}（均不确定）→ 结论（不确定但合理）

R1：A1∨ A2→B2(f1)
R2：A2 ∧ A3→B1(f2)
R3：B1→B(f3)
R4：B2→B(f4)



概述-不确定性的表示

不确定性的表示和度量

- 知识（静态强度）：一般由专家给出的数值
- 证据（动态强度）
  - 初始：专家给出
  - 中间：传递算法计算
- 度量方式选择原则：
  - －表达充分
  - －便于估计
  - －便于传递计算
  - －直观且有依据有语义描述

计算问题：不确定性的传播和更新。也是获取新信息的过程。

组合证据不确定性的方法

－最大最小方法：

$$T(E1 \wedge E2)=Min\{T(E1),T(E2)\}$$

$$T(E1 \vee E2)=Max\{T(E1),T(E2)\}$$

－概率方法：

$$T(E1 \wedge E2)=T(E1)\times T(E2)$$

$$T(E1 \vee E2)=T(E1)+T(E2)-T(E1)\times T(E2)$$

传递算法及结论合成算法

概率回顾

- 条件概率：

$$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \qquad 其中 \quad (P(A)>0)$$

- 乘法定理

$$P(AB)=P(A)P(B/A) \qquad (P(A)>0)$$
$$P(AB)=P(B)P(A/B) \qquad (P(B)>0)$$

- 全概率公式 设 $B_1, B_2, \ldots B_n$ 为样本空间S的一个划分，

$P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$ ，A是其中的一个事件，则

$$P(A)=P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)+\ldots+P(B_n)P(A/B_n)$$

- 贝叶斯（Bayes）公式或逆概率公式： 设$B_1, B_{2,} \ldots B_n$ 为样本空间S的一个划分，A是其中的一个事件，且

  $P(A) > 0, \quad P(B_i) > 0 (i = 1,2,\cdots,n)$

则有:

$$P(B_i / A) = \frac{P(AB_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A/B_i)}{P(B_1)P(A/B_1) + \ldots + P(B_n)P(A/B_n)}$$

贝叶斯公式意义

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i) \times P(A \mid B_i)}{P(A)}$$

$P(B_i)$:先验概率

Bayes公式

1）$B_1, B_2, \ldots B_n$ ：划分

2）B_m：A发生的各种“因素”

3) $P(B_m)$：A出现前“原因” 出现的可能性，即先验概率。

4) $P(B_m / A)$ ：后验概率 ；A的出现有助于对各种“因素”发生的概率作进一步估计

- **贝叶斯决策：在已知$P(B_m)$ 先验概率的情况下，做试验。再通过试验中事件A（证据）的具体情况得到的新信息，获得在A出现的情况下各种因素 B_m 发生情况的新知识。**

主观Bayes方法

- 1976年提出的，应用于地矿勘探专家系统Prospector
- 不确定推理系统包括：
  - 不确定性的表示：
    - 规则/知识
    - 事实/证据
  - 不确定性的计算
    - 组合证据的不确定算法
    - 不确定性的传递算法
    - 结论的不确定算法

主观Bayes方法

知识不确定性的表示

IF　A　THEN　(LS,LN)　B　(P(B))

A：前提条件，简单或复合（OR,AND)

B：结论

P(B)：B的先验概率，无专门证据时，由专家给出

LS(A→B)：充分性度量，由专家给定，∈[0，∞]

LN(¬A→B)：必要性度量，由专家给定，∈[0，∞]

主观Bayes方法

初始证据不确定性的表示

- P(A|A’):在观察A’下给出初始证据A的概率∈[0,1]

例：A：血色素小于100g/L
- A1’：电子检测仪检测
- A2’：试纸比对
- A3’：直接望诊

- 用户直接给出P(A|A’)
- 通过可信度C(A|A’) ∈[-*a*,*a*]间接给出P(A|A’)

不确定性的传递算法

$$P(B) \xrightarrow[\text{LS, LN}]{P(A),P(A|A')} \begin{cases} P(B|A), & \text{A肯定存在时} \\ P(B|\neg A), & \text{A肯定不存在时，先验→后验} \\ P(B|A'), & \text{A不确定时} \end{cases}$$

几率函数

$$Q(x) = \frac{P(x)}{1 - P(x)}$$

- Q(x)与P(x)单调性相同
- $P(x) \in [0,1]$；$Q(x) \in [0, +\infty]$

当 P(X)＝0， 有Q(X)＝0,X为假

当 P(X)＝0.5， 有 Q(X)＝1

当 P(X)＝1， 有Q(X)＝∞，X为真

1。证据A肯定存在的情况；P(A)=P(A|A’)=1

(1)求后验概率P(B|A)

$$Bayes \Rightarrow \begin{cases} P(B|A) = \dfrac{P(A|B)P(B)}{P(A)} \\ P(\neg B|A) = \dfrac{P(A|\neg B)P(\neg B)}{P(A)} \end{cases} \xrightarrow{\text{相除，整理}}$$

$$\begin{cases} Q(B|A) = LS \times Q(B) \\ LS = \dfrac{P(A|B)}{P(A|\neg B)} \end{cases} \longrightarrow \boxed{P(B|A) = \dfrac{LS \times P(B)}{(LS-1)\times P(B)+1}}$$

(2) LS的意义: $Q(B|A)=LS\times Q(B)$

LS >1	$Q(B\|A)>Q(B)$ $P(B\|A)>P(B)$	A的∃使B为真的概率↗,LS↗→P(B|A)↗, LS →∞⇒Q(B|A) →∞,P(B|A) →1,LS充分性
LS =1	$Q(B\|A)=Q(B)$ $P(B\|A)=P(B)$	A的∃与B无关
LS∈ (0,1)	$Q(B\|A)<Q(B)$ $P(B\|A)<P(B)$	A的∃使B为真的概率↘,LS↘→P(B|A) ↘
LS =0	$Q(B\|A)=0$ $P(B\|A)=0$	A的∃使B为假

- 尽管 $LS=P(A|B)/P(A|\neg B)$，但LS并不由此式确定，该式仅具理论意义
- 专家根据上表中LS的定性意义给出估算值

2。证据A肯定不存在的情况；P(A)=P(A|A’)=0，P(¬A)=1

(1)求后验概率P(B| ¬A)

$$Bayes \Rightarrow \begin{cases} P(B|\neg A) = \dfrac{P(\neg A|B)P(B)}{P(\neg A)} \\ P(\neg B|\neg A) = \dfrac{P(\neg A|\neg B)P(\neg B)}{P(\neg A)} \end{cases} \xrightarrow{\text{相除，整理}}$$

$$\begin{cases} Q(B|\neg A) = LN \times Q(B) \\ LN = \dfrac{P(\neg A|B)}{P(\neg A|\neg B)} \end{cases} \longrightarrow \boxed{P(B|\neg A) = \dfrac{LN \times P(B)}{(LN-1)\times P(B)+1}}$$

(2) LN的意义: Q(B|¬A)=LN×Q(B)

LN >1	Q(B|¬A)>Q(B) P(B|¬A)>P(B)	A不∃使B为真的概率↗,LN↗→P(B|¬A)↗, LN →∞⇒Q(B|¬A) →∞,P(B|¬A) →1
LN =1	Q(B|¬A)=Q(B) P(B|¬A)=P(B)	¬A的∃与B无关
LN∈ (0,1)	Q(B|¬A)<Q(B) P(B|¬A)<P(B)	A不∃使B为真的概率↘,LN↘→P(B|¬A)↘ ¬A∃→B不为真；LN必要性
LN =0	Q(B|¬A)=0 P(B|¬A)=0	LN →0 ⇒ B为假⇔B真⇒A∃

- 尽管 LN=P(¬A|B)/ P(¬A|¬B)，但LN并不由此式确定，该式仅具理论意义
- 专家根据上表中LN的定性意义给出估算值

- LS、LN满足：

  LS、LN≥０，不独立。

  LS，LN不能同时 ＞１或 ＜１

  LS，LN可同时＝1

例1：

PROSPECTOR中的规则;

IF 有石英硫矿带 （LS=300,LN=0.2）THEN 必有钾矿带

IF 有玻璃褐铁矿 （LS=1000000,LN=0.01）THEN 有最佳的矿产结构

例：$IF \quad A_i \quad THEN \begin{cases}(10,1)\\(20,1)\\(1,0.002)\end{cases} \quad B_i \begin{cases}0.03\\0.05\\0.3\end{cases} \quad i=1,2,3$

求：$A_i(i=1,2,3)$存在，不存在时，$P(B_i\mid A_i), P(B_i\mid\neg A_i)=?$

解：（1）$A_i(i=1,2,3)$存在

$$P(B_i\mid A_i)=\frac{LS_i\times P(B_i)}{(LS_i-1)\times P(B_i)+1}=\begin{cases}0.24, i=1\uparrow\\0.51, i=2\uparrow\\0.3, \quad i=3\end{cases}$$

（2）$A_i(i=1,2,3)$不存在

$$P(B_i\mid\neg A_i)=\frac{LN_i\times P(B_i)}{(LN_i-1)\times P(B_i)+1}=\begin{cases}0.03, & i=1\\0.05, & i=2\\0.00086, & i=3\downarrow 350\text{倍}\end{cases}$$

3。证据不确定的情况：$0<P(A|A')<1$

(1)Dudd公式(已证明)

$$P(B|A')=P(B|A)\times P(A|A')+P(B|\neg A)\times P(\neg A|A')$$

*不能写成P(B|A),它表示A存在

*类全概公式，A， ¬A为划分

*令$P(A|A')=t$,则$P(B|A')=tP(B|A)+(1-t)P(B|\neg A)$，加权和

（2）P(B|A')的具体计算

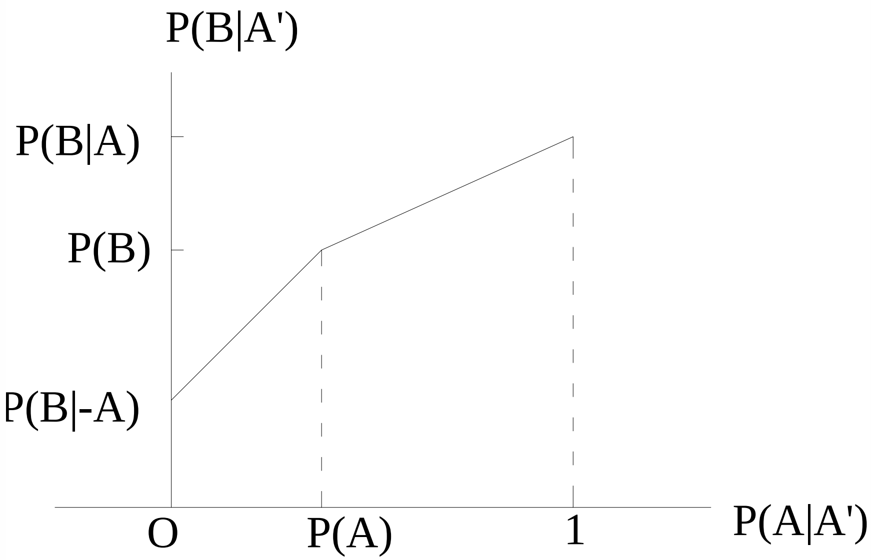
P(A|A')	P(B|A')
1	P(B|A) √
0	P(B|¬A) √
P(A)	P(B) √
[0,P(A)]	$P(B\mid\neg A)+\dfrac{P(B)-P(B\mid\neg A)}{P(A)}\times P(A\mid A')$
[P(A),1]	$P(B)+\dfrac{P(B\mid A)-P(B)}{1-P(A)}\times[P(A\mid A')-P(A)]$

插值

公式

$$P(B|A')=P(B|A)\times P(A|A')+P(B|\neg A)\times P(\neg A|A')$$

(3)公式的几何意义



插值：加入P(A)点是为了提高准确度，否则为两点插值

$$P(B/A')=\begin{cases} P(B/\neg A)+\dfrac{P(B)-P(B/\neg A)}{P(A)}\times P(A/A') & P(A/A')\in[0,P(A)] \\ P(B)+\dfrac{P(B/A)-P(B)}{1-P(A)}\times[P(A/A')-P(A)] & P(A/A')\in[P(A),1] \end{cases}$$

(4)组合证据不确定性算法

$$P(A|A')=\begin{cases}\min\limits_{1\le i\le n}\{P(A_i|A')\}, & A=A_1A_2\cdots A_n\\ \max\limits_{1\le i\le n}\{P(A_i|A')\}, & A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\\ 1-P(A_i|A'), & A=\neg A_i\end{cases}$$

(5)结论不确定性的合成算法

N条知识都支持结论B，A $_i$’↔A$_i$ → B（直接导致）

$$Q(B|A_1',A_2',\cdots,A_n')=\underbrace{\frac{Q(B|A_1')}{Q(B)}\times\frac{Q(B|A_2')}{Q(B)}\times\cdots\times\frac{Q(B|A_n')}{Q(B)}}_{\text{比例系数}}\times Q(B)$$

- 已知：P(A)=1,$P(B_1)=0.04$, $P(B_2)=0.02$ 求：$P(B_2|A)$
  $R_1: A\rightarrow B_1$ LS=20 LN=1
  $R_2: B_1\rightarrow B_2$ LS=300 LN=0.001

$$A \longrightarrow B_1 \longrightarrow B_2$$
$$A' \longrightarrow A \longrightarrow B$$

$$P(B/A')=\begin{cases} P(B/\neg A)+\dfrac{P(B)-P(B/\neg A)}{P(A)}\times P(A/A') & 0\le P(A/A')<P(A) \\ P(B)+\dfrac{P(B/A)-P(B)}{1-P(A)}\times[P(A/A')-P(A)] & P(A)\le P(A/A')\le 1 \end{cases}$$

- 分析计算：

$$P(B_2\mid A)\longrightarrow\begin{cases} B\Leftarrow B_2, A\Leftarrow B_1, A'\Leftarrow A \\ P(A\mid A')\in ?[0,P(A)],?[P(A),1] \\ P(B_1\mid A),P(B_1)\text{比较大小} \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(B_1\mid A) \\ P(B_1)* \end{cases}\text{比较大小}\Leftrightarrow\begin{cases} P(B_1\mid A)=\dfrac{LS_1\times P(B_1)}{(LS_1-1)\times P(B_1)+1}=\dfrac{20\times 0.04}{(20-1)\times 0.04+1}=0.454 \\ P(B_1)=0.04 \end{cases}$$

$$P(B_2\mid A)=P(B_2)+\frac{P(B_2\mid B_1)-P(B_2)}{1-P(B_1)}\times[P(B_1\mid A)-P(B_1)]$$

$$P(B_2\mid B_1)=\frac{LS_2\times P(B_2)}{(LS_2-1)\times P(B_2)+1}=\frac{300\times 0.02}{(300-1)\times 0.02+1}=0.859(\text{假定}B_1\text{肯定发生时})$$

$$P(B_2\mid A)=0.02+\frac{0.859-0.02}{1-0.04}\times[0.454-0.04]=0.382$$

- 已知：证据A_1，A_2必然发生，$P(B_1)=0.03$求B_1的更新值$P(B_1|A_1',A_2')$

  R_1：$A_1 \to B_1$ LS=20 LN=1；

  R_2：$A_2 \to B_1$ LS=300 LN=1

$$\begin{tikzcd}
A_1' \arrow[r, leftrightarrow] & A_1 \arrow[dr] & \\
 & & \mathbf{B1} \\
A_2' \arrow[r, leftrightarrow] & A_2 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

- 分析计算

$$P(B_1|A_i)=\frac{LS_i\times P(B_1)}{(LS_i-1)\times P(B_1)+1}=\begin{cases}\dfrac{20\times 0.03}{(20-1)\times 0.03+1}=0.382, i=1\\ \dfrac{300\times 0.03}{(300-1)\times 0.03+1}=0.903, i=2\end{cases}$$

方法一：$P(B_1|A_1A_2)=\dfrac{LS_2\times P(B_1|A_1)}{(LS_2-1)\times P(B_1|A_1)+1}=\dfrac{LS_1\times P(B_1|A_2)}{(LS_1-1)\times P(B_1|A_2)+1}$

$$=\frac{300\times 0.382}{(300-1)\times 0.382+1}=\frac{20\times 0.903}{(20-1)\times 0.903+1}=0.99464$$

方法二：$Q(B_1|A_1A_2)=\dfrac{Q(B|A_1')}{Q(B)}\times\dfrac{Q(B|A_2')}{Q(B)}\times Q(B)=\dfrac{P(B|A_1')}{1-P(B|A_1')}\times\dfrac{P(B|A_2')}{1-P(B|A_2')}\times\dfrac{1-P(B)}{P(B)}$

$$=\frac{0.382}{1-0.382}\times\frac{0.903}{1-0.903}\times\frac{1-0.03}{0.03}$$

$$P(B_1|A_1A_2)=\frac{Q(B_1|A_1A_2)}{1+Q(B_1|A_1A_2)}=0.99464$$

主观贝叶斯方法

- 主观Bayes方法的评价
  - 优点：
    - 计算方法直观、明了。
  - 缺点：
    - 要求B_j相互无关（实际不可能）。
    - $P(B|A')$与$P(B_i)$很难计算。
    - 应用困难。

确定性方法（可信度方法）

- MYCIN系统研制过程中产生的不确定推理方法，第一个采用了不确定推理逻辑，70’s著名。
- 提出该方法时应遵循的原则
  – 不采用严格的统计理论。近似方法。
  – 用专家的经验估计代替统计数据
  – 尽量减少需要专家提供的经验数据，尽量使少量数据包含多种信息。
  – 新方法应适用于证据为增量式地增加的情况。
  – 专家数据的轻微扰动不影响最终的推理结论。

确定性方法

- 理论基础
  - 以定量法为工具，比较法为原则的相对确认理论。
  - 采用此方法的MYCIN系统的诊断结果不只给出一个最可信结论及可信度，而是给出可信度较高的前几位，供比较选用。
- 过程
  - 规则的不确定性度量
  - 证据（前提）的不确定性度量。
  - 推理计算。

规则 (规则的不确定性度量)

- 规则 A → B，可信度表示为CF(B，A)。

$$CF(B,\ A)=\begin{cases}\dfrac{P(B|A)-P(B)}{1-P(B)}\geq 0, & P(B|A)\geq P(B)\\ \dfrac{P(B|A)-P(B)}{P(B)}<0, & P(B|A)<P(B)\end{cases}$$ (理论定义)

-1 ≤ CF(B, A) ≤ 1

➢CF(B,A)表示由证据A得到假设B的确定性(可信)因子，是相对于先验概率p(B)时后验概率P(B|A)<u>变化程度</u>的衡量

$$P(B_i)=\begin{cases}0.1 & ,i=1\\ 0.7 & ,i=2\\ 0.78 & ,i=3\end{cases},\ P(B_i\mid A_i)=\begin{cases}0.7 & ,i=1\\ 0.8 & ,i=2\\ 0.8 & ,i=3\end{cases},\quad CF(B_i,A_i)=\begin{cases}2/3 & ,i=1\\ 1/3 & ,i=2\\ 1/11 & ,i=3\end{cases},$$

规则 (规则的不确定性度量)

- CF(B, A)的特殊值：
  - CF(B, A) = 1， 前提真，结论必真
  - CF(B, A) = -1，前提真，结论必假
  - CF(B, A) = 0 ， 前提真假与结论无关

- 实际应用中CF(B, A)的值由专家根据理论上的定性意义确定，并不是由P(B|A), P(B)计算得到的。

规则（证据的不确定性度量）

- 证据A的可信度表示为CF(A)
  同样有：$-1 \leq CF(A) \leq 1$
- 特殊值：CF(A) = 1，　　前提肯定真
  CF(A) = -1，　　前提肯定假
  CF(A) = 0，　　对前提一无所知
- CF(A) ＞ 0，　表示A以CF(A)程度为真
  CF(A) ＜ 0，　表示A以CF(A)程度为假

规则 (推理计算 1)

- “与”的计算： $A_1 \wedge A_2 \rightarrow B$

  $CF(A_1 \wedge A_2) = \min\{CF(A_1), CF(A_2)\}$

- “或”的计算： $A_1 \vee A_2 \rightarrow B$

  $CF(A_1 \vee A_2) = \max\{CF(A_1), CF(A_2)\}$

- “非”的计算：

  $CF(\sim A) = -CF(A)$

- 由A， A →B， 求 CF(B) (CF(B)未知时)

  $CF(B) = CF(A)\cdot CF(B,A)$

  ($CF(A) < 0$ 时可以不算，即为“0”)

规则（推理计算 2）

- 合成，由两条规则求出再合并：独立使用

由$CF_1(B)$、$CF_2(B)$，求 $CF(B)$

$$CF(B)=\begin{cases} CF_1(B)+CF_2(B)-CF_1(B)\,CF_2(B), & \text{当}CF_1(B)\geq 0\text{，}CF_2(B)\geq 0 \\ CF_1(B)+CF_2(B)+CF_1(B)\,CF_2(B), & \text{当}CF_1(B)<0\text{，}CF_2(B)<0 \\ \dfrac{CF_1(B)+CF_2(B)}{1-\min\{|CF_1(B)|,|CF_2(B)|\}}, & \text{当}CF_1(B)\text{与}CF_2(B)\text{符号不同} \end{cases}$$

规则 (推理计算 3)

- 更新，由CF(A)、A →B、CF(B, A)、CF(B)，求 CF(B|A) ：
- 用于CF(B)已知时，顺序实时代入更新

  – 当A必然发生，CF(A)=1时：

$$
\mathrm{CF}(B \mid A) = \begin{cases} \mathrm{CF}(B) + \mathrm{CF}(B, A)(1 - \mathrm{CF}(B)), & \text{当}\ \mathrm{CF}(B) \geq 0,\ \ \mathrm{CF}(B, A) \geq 0 \\ \mathrm{CF}(B) + \mathrm{CF}(B, A)(1 + \mathrm{CF}(B)), & \text{当}\ \mathrm{CF}(B) < 0,\ \ \mathrm{CF}(B, A) < 0 \\ \dfrac{\mathrm{CF}(B) + \mathrm{CF}(B, A)}{1 - \min\{|\mathrm{CF}(B)|, |\mathrm{CF}(B, A)|\}}, & \text{当}\ \mathrm{CF}(B)\ \text{与}\ \mathrm{CF}(B, A)\ \text{符号不同} \end{cases}
$$

规则 (推理计算 4)

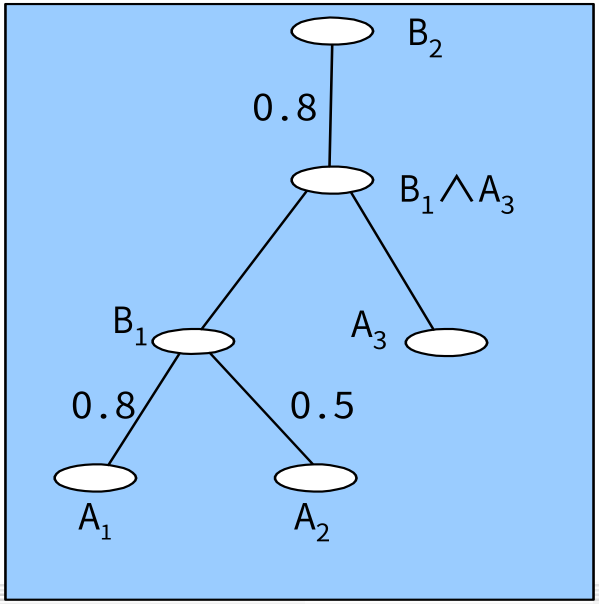
– 当A不必然发生，CF(A)<1时：

- 0 < CF(A) < 1，
  用CF(A)CF(B, A)代替CF(A)=1时的CF(B, A)即可。

$$\mathrm{CF}(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}) = \begin{cases} \mathrm{CF(B)} + CF(A)\cdot \mathrm{CF(B,\ A)}(1 - \mathrm{CF(B)}), & \text{当}\mathrm{CF(B)} \ge 0,\ CF(A)\cdot\mathrm{CF(B,\ A)} \ge 0 \\ \mathrm{CF(B)} + CF(A)\cdot \mathrm{CF(B,\ A)}(1 + \mathrm{CF(B)}), & \text{当}\mathrm{CF(B)} < 0,\ CF(A)\cdot\mathrm{CF(B,\ A)} < 0 \\ \dfrac{\mathrm{CF(B)} + CF(A)\cdot\mathrm{CF(B,\ A)}}{1 - \min\{|CF(B)|, |CF(A)\cdot CF(B, A)|\}}, & \text{其他情形} \end{cases}$$

- CF(A) ≦0，
  规则A → B不可使用，即此计算不必进行。
  （如MYCIN系统CF(A)≤0.2就认为是不可使用的。其目的是使专家数据经轻微扰动不影响最终结果。）

- 已知：R_1：$A_1 \rightarrow B_1$ CF（B_1，A_1）＝0.8
  R_2：$A_2 \rightarrow B_1$ CF（B_1，A_2）＝0.5
  R_3：$B_1 \wedge A_3 \rightarrow B_2$ CF（B_2，$B_1 \wedge A_3$）＝0.8
  CF（A_1）＝CF（A_2）＝CF（A_3）＝1；
  CF（B_1）= CF（B_2）=0；
- 计算 CF（B_1）、CF（B_2）更新值
- 本题可图示为



- 依规则R_1

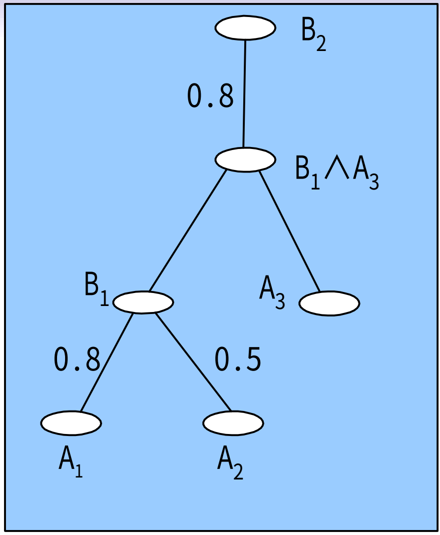
CF（$B_1|A_1$）＝$CF(B_1)+CF(B_1,A_1)(1-CF(B_1))=0+0.8\times1=0.8$，

即更新后CF（B_1）＝0.8

- 依规则R_2（代入上一结果）

CF（$B_1|A_2$）＝$CF(B_1)+CF(B_1,A_2)(1-CF(B_1))=0.8+0.5\times0.2=0.9$

更新后CF（B_1）＝0.9



- 依R_3，先计算 1 0.9

CF（$B_1\wedge A_3$）＝min（CF（A_3），CF（B_1））＝0.9

由于CF（$B_1\wedge A_3$）<1，

$CF(B_2|B_1\wedge A_3)=CF(B_2)+CF(B_1\wedge A_3)\times CF(B_2,B_1\wedge A_3)\times(1-CF(B_2))$

$=0+0.9\times0.8(1-0)=0.72$

- 答：更新后的可信度分别是：CF（B_1）＝0.9，CF（B_2）＝0.72

- 评论
  - 可信度方法的宗旨不是理论上的严密性，而是处理实际问题的可用性。
  - 不可一成不变地用于任何领域，推广时必须根据情况修改。

证据理论

♦ 源于20世纪60年代美国哈佛大学数学家A. P. Dempster在利用上、下限概率来解决多值映射问题方面的研究工作。

♦ Dempster的学生G. Shafer对证据理论做了进一步的发展，引入信任函数概念，形成了一套处理不确定性推理问题的数学方法，

♦1976年出版了《证据的数学理论》(*A Mathematical Theory of Evidence*)，这标志着证据理论正式成为一种处理不确定性问题的完整理论。

•适用领域：信息融合、专家系统、情报分析、法律案件分析、多属性决策分析，等等。

•当概率值已知时，证据理论就成了概率论。因此，概率论是证据理论的一个特例，有时也称证据论为广义概率论

基本概率分配函数（Basic probability assignment: **BPA**）

U：样本空间（识别框架） $U=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\},e_i$是基本事件

$\tilde{A}$：随机事件空间；$\tilde{A}=\{A\,|\,A\subseteq U\}$,所有U中子集，$|\tilde{A}|=2^n$

函数 $M:2^n\to[0,1]$,且：

$$\begin{cases} M(\phi)=0 \\ \sum\limits_{A\subseteq U} M(A)=1 \end{cases}$$

M是2^n上的概率分配函数

$M(A)\geq 0$为A的基本概率数

*M在$\tilde{A}$论域上讨论，与概率意 义不同

例：U={红，黄，蓝}

- A_1={红}, A_2={黄}, A_3={蓝},

  A_4={红，黄}, A_5={红，蓝}, A_6={黄，蓝},

  A_7={红，黄，蓝}, A_8={∅}

- U的所有子集共有2^3＝8个，$\tilde{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_8\}$
- $A_i \rightarrow M(A_i) \in [0,1]$, $\Sigma A_i=1$

$M(A_1)=0.3$,

$M(A_2)=M(A_8)=0$,

$M(A_3)=M(A_6)=M(A_7)=0.1$

$M(A_4)=M(A_5)=0.2$

- $M(A_i)$表示事件结果为A_i的可信程度

BPA的含义

- BPA的作用是把U的任一子集A都映射为[0,1]上的一个数M(A)
- M(A)表示证据对子集A成立的信任度量（信任分配）。
- 概率分配函数不是概率。
- 概率分配函数既可将信度赋予假设空间的单个元素，还能赋予它的子集，
- 类似人类在各级抽象层次上的证据收集过程，只需为那些你感兴趣且收集了证据的子集分配信任值，余下的信任值作为未知的情况全部留给了总集U。
- 证据理论中，一个样本空间称为一个识别框架U， U由一系列对象构成，对象之间两两互斥，且包含当前要识别的全体对象。
- 证据理论的基本问题是，已知识别框架U，判明U中一个先验的未定元素属于U中某个子集A的程度。

- Example: disease diagnostics

  U = {Allergy, Flu, Cold, Pneumonia}

- BPA:

  $m: 2^{|U|} \to [0, 1]$

  m_1: {Flu, Cold, Pneu} 0.6

  U : 0.4

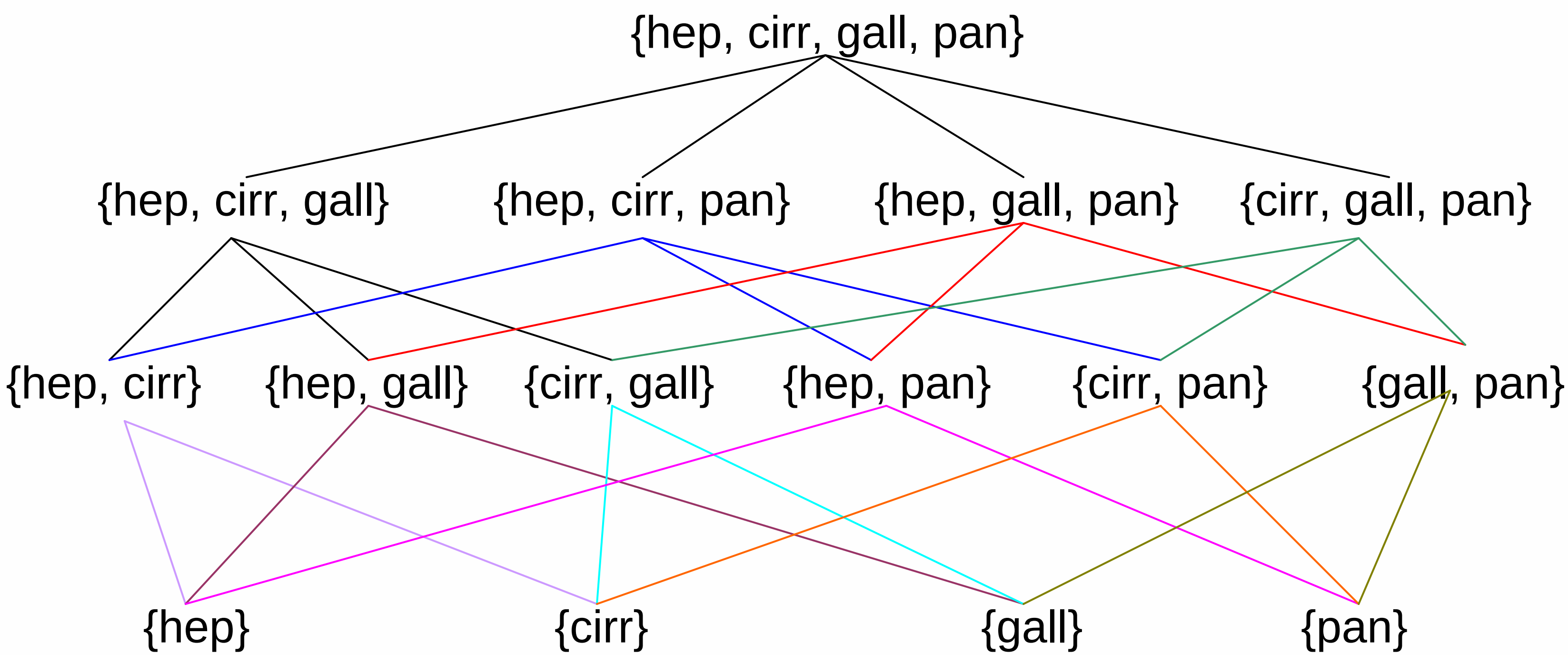
Example

- Patient has cholestatic jaundice（胆道阻滞型黄疸）
- Possible causes are:
  - Hepatitis (hep肝炎)
  - Cirrhosis (cirr肝硬化)
  - Gallstone (gall胆结石)
  - Pancreatic cancer (pan胰腺癌)

This mutually exclusive, collectively exhaustive set of hypotheses is called the *frame of discernment,* U

Subsets of the Frame of Discernment

- Each subset of the hypotheses in U is considered to be its own hypothesis



This group of all possible subsets is denoted **$2^{|U|}$**

BPA Examples

- Example 1:
  - No evidence is available concerning the diagnosis of a patient with jaundice(黄疸). What is the BPA?
  - m(U) = m({hep, cirr, gall, pan}) = 1, and
  - 0 is assigned to every other subset

BPA Examples

- Example 2:
  - ({hep, cirr}) is supported to the degree 0.6. No evidence is given to support a choice between cirrhosis and hepatitis. What is the BPA?
  - $m(\{\text{hep, cirr}\}) = 0.6$, and

    $m(U) = m(\{\text{hep, cirr, gall, pan}\}) = 1 - 0.6 = 0.4$

BPA Examples

- Example 3:
  - Evidence disconfirms the diagnosis of hepatitis （肝炎） to the degree 0.7. What is the BPA?
  - Evidence against hepatitis is considered evidence for not(hep). Therefore,

    $m(\{\text{cirr, gall, pan}\}) = 0.7$,

    and $m(\text{U}) = 0.3$

BPA Examples

- Example 4:
  - Evidence confirms the diagnosis of hepatitis （肝炎） to the degree 0.8. What is the BPA?
  - $m(\{\text{hep}\}) = 0.8$, $m(U) = 0.2$

信任函数

- 函数 Bel:$2^n \rightarrow [0,1]$，$Bel(A)=\sum_{B\subseteq A} M(B), \quad \forall A \in \tilde{A} \subseteq U$

Bel(A)：随机事件A及其所有子集信任总和（内涵，下近似，下限函数）

- Bel(∅)=0，　Bel(U)=1

似然函数

- 函数*Pl*:$2^n \rightarrow [0,1]$，*Pl*(A)=1-Bel(U-A)＝1-Bel(¬A) $=\sum_{AB\neq\phi} M(B)$
- *Pl*(A)：与A有关联（交集非空）的所有事件的信任总和（外延，上近似，上限函数）
- *pl*(∅)=0，　*pl*(U)=1

- A1={红}，A2={黄}，A3={蓝}，
  A4={红，黄}，A5={红，蓝}，A6={黄，蓝}，
  A7={红，黄，蓝}，A8={∅}

- Bel({红，黄})=M({红})+ M({黄})+ M({红，黄})=0.3+0+0.2=0.5
- Pl(A4)=1-Bel({¬ A4})= 1-Bel{蓝}＝1-0.1=0.9

＝M({红，黄})+M({红})+M({黄})+M({红，蓝})+M({黄，蓝})+M({红，黄，蓝})＝0.2+0.3+0+0.2+0.1+0.1=0.9

Pl({红})= 1-Bel({¬ 红})= 1-Bel({黄，蓝})=1-[M({黄})+ M({蓝})+ M({黄，蓝})]=0.8

= M({红})+ M({红，黄})+ M({红，蓝})+ M({红，黄，蓝})=0.8

信任函数与似然函数的关系：

➢ $Pl(A) \geq Bel(A)$

对比公式

$$\begin{cases} Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} M(B) \\ Pl(A) = \sum_{AB \neq \phi} M(B) \end{cases}$$

➢ A的信任区间：$f(Bel(A), Pl(A))$

➢ $\triangle = Pl(A) - Bel(A)$：对A的未知程度的测度

$f(0,0)$	$Bel(A)=0$, $Bel(\neg A)=1$, $\triangle=0$	A为假
$f(0,1)$	$Bel(A)=0$, $Bel(\neg A)=0$, $\triangle=1$	A为未知
$f(1,1)$	$Bel(A)=1$, $Bel(\neg A)=0$, $\triangle=0$	A为真

$f(0.25,1)$	Bel(A)=0.25, Bel(¬A)=0, △＝ 0.75	A为真度0.25, ¬A不真，A未知度0.75
$f(0,0.85)$	Bel(A)=0, Bel(¬A)=0.15, △＝0.85	A不为真，¬A为真度0.15,未知度0.85
$f(0.25,0.85)$	Bel(A)=0.25, Bel(¬A)=0.15, △＝0.6	A为真> ¬A为真，A未知度0.6

概率分配函数的正交和：

对同一集合有两种不同的概率分配函数时的组合计算公式

定义：M_1, M_2是两个概率分配函数，正交和$M = M_1 \oplus M_2$

$$
\begin{cases}
M(\phi) = 0 \\
M(A) = \dfrac{1}{K} \sum\limits_{BC=A} M_1(B) M_2(C) \\
K = 1 - \sum\limits_{BC=\phi} M_1(B) M_2(C) = \sum\limits_{BC\neq\phi} M_1(B) M_2(C) \neq 0
\end{cases}
$$

- 计算过程复杂
- 某些计算结果有悖常理

例1：$D=\{黑,白\},$

$$M_i(\{黑\},\{白\},\{黑,白\},\phi)=\begin{cases}(0.3,0.5,0.2,0), i=1\\(0.6,0.3,0.1,0), i=2\end{cases}$$

$$K=1-[M_1(黑)M_2(白)+M_1(白)M_2(黑)]=1-(0.3\times0.3+0.5\times0.6)=0.61$$

$$M(黑)=\frac{1}{K}[M_1(黑)M_2(黑)+M_1(白)M_2(黑,白)+M_1(黑,白)M_2(黑)]$$

$$=\frac{1}{0.61}[0.3\times0.6+0.3\times0.1+0.2\times0.6]=0.54$$

例2：设01年美国“911”之前，布什分别接到美国中央情报局（CIA）和国家安全局（NSA）的情报，称中东地区的某些国家或组织企图对美实施恐怖袭击。证据如表1所示。

1. 直接利用D-S证据合成公式计算表1中的所有“？”内容。

情报部门 / 恐怖分子	中央情报局（CIA）	国家安全局（NSA）	布什政府根据DS理论计算后的结果
{本•拉登}（简称“本”）	0.40	0.20	?
{萨达姆}（简称“萨”）	0.30	0.20	?
{霍梅尼}（简称“霍”）	0.10	0.05	?
{本•拉登，萨达姆}	0.10	0.50	?
U = {本，萨，霍}	0.10	0.05	?

直接利用D-S证据合成公式计算表1中的所有

计算归一化常数K。

$$K = 1 - \sum_{B \cap C = \phi} m_1(B) \cdot m_2(C)$$
$$= 1 - [m_1(\{本\}) \cdot m_2(\{萨\}) + m_1(\{本\}) \cdot m_2(\{霍\}) + \ldots + m_1(\{本,萨\}) \cdot m_2(\{霍\})]$$
$$= 1 - (0.4 \times 0.2 + 0.4 \times 0.05 + \ldots + 0.1 \times 0.05)$$
$$= 1 - 0.27$$
$$= 0.73$$

$$m_1 \oplus m_2(\{本\}) = \frac{1}{K} \sum_{B \cap C = \{本\}} m_1(B) \cdot m_2(C)$$
$$= \frac{1}{K}[m_1(\{本\}) \cdot m_2(\{本\}) + m_1(\{本\}) \cdot m_2(\{本,萨\}) +$$
$$m_1(\{本,萨\}) \cdot m_2(\{本\}) + m_1(\{本\}) \cdot m_2(\{U\}) + m_1(\{U\}) \cdot m_2(\{本\})]$$
$$= \frac{1}{0.73}(0.4 \times 0.2 + 0.4 \times 0.5 + 0.1 \times 0.2 + 0.4 \times 0.05 + 0.1 \times 0.2)$$
$$= \frac{1}{0.73}(0.08 + 0.2 + 0.02 + 0.02 + 0.02)$$
$$= 0.4658$$

$$m_1 \oplus m_2(\{萨\}) = \frac{1}{K} \sum_{B \cap C=\{萨\}} m_1(B) \cdot m_2(C) = \frac{1}{0.73}(0.3\times0.2+0.3\times0.5+0.2\times0.1+0.3\times0.05+0.2\times0.1) = 0.363$$

$$m_1 \oplus m_2(\{霍\}) = \frac{1}{K} \sum_{B \cap C=\{霍\}} m_1(B) \cdot m_2(C) = \frac{1}{0.73}(0.1\times0.05+0.1\times0.05+0.1\times0.05) = 0.0205$$

$$m_1 \oplus m_2(\{本,萨\}) = \frac{1}{K} \sum_{B \cap C=\{本，萨\}} m_1(B) \cdot m_2(C) = \frac{1}{0.73}(0.1\times0.5+0.1\times0.05+0.1\times0.5) = 0.1438$$

$$m_1 \oplus m_2(U) = \frac{1}{K} \sum_{B \cap C=U} m_1(B) \cdot m_2(C) = \frac{1}{K}[m_1(U) \cdot m_2(U)] = \frac{1}{0.73}(0.1\times0.05) = 0.0068$$

表2　经Dempster规则合成后的mass

恐怖分子 \ 情报部门	中央情报局(CIA)	国家安全局(NSA)	布什政府根据DS理论计算后的结果
{本•拉登}（简称“本”）	0.40	0.20	0.4658
{萨达姆}（简称“萨”）	0.30	0.20	0.3630
{霍梅尼}（简称“霍”）	0.10	0.05	0.0205
{本•拉登，萨达姆}	0.10	0.50	0.1438
U=｛本，萨，霍}	0.10	0.05	0.0068

例3: "Zadeh悖论" ：某宗"谋杀案" 的三个犯罪嫌疑人组成了样本空间的识别框架U ={Peter, Paul, Mary} ，目击证人（W1, W2）分别给出下表所示的证据。

【要求】：计算证人W1和W2提供证据的组合结果。

	$m_1()$	$m_2()$
Peter	0.99	0.00
Paul	0.01	0.01
Mary	0.00	0.99

【解】：首先，计算归一化常数K。

$$K = \sum_{B \cap C \neq \varnothing} m_1(B) \cdot m_2(C)$$

$$= m_1(Peter) \cdot m_2(Peter) + m_1(Paul) \cdot m_2(Paul) + m_1(Mary) \cdot m_2(Mary)$$

$$= 0.99 \times 0 + 0.01 \times 0.01 + 0 \times 0.99 = 0.0001$$

其次，利用D-S证据合成规则分别计算Peter, Paul, Mary的组合M函数

（1）关于Peter的组合M函数

$$m_1 \oplus m_2(\{Peter\}) = \frac{1}{K} \sum_{B \cap C = \{Peter\}} m_1(B) \cdot m_2(C)$$

$$= \frac{1}{K} \cdot m_1(\{Peter\}) \cdot m_2(\{Peter\})$$

$$= \frac{1}{0.0001} \times 0.99 \times 0.00 = 0.00$$

（2）关于Paul的组合M函数

$$m_1 \oplus m_2(\{Paul\}) = \frac{1}{K} \cdot m_1(\{Paul\}) \cdot m_2(\{Paul\})$$

$$= \frac{1}{0.0001} \times 0.01 \times 0.01 = 1$$

(3) 关于Mary的组合mass函数

$$m_1 \oplus m_2(\{Mary\}) = \frac{1}{K} \sum_{B \cap C = \{Mary\}} m_1(B) \cdot m_2(C)$$

$$= \frac{1}{K} \cdot m_1(\{Mary\}) \cdot m_2(\{Mary\})$$

$$= \frac{1}{0.0001} \times 0.00 \times 0.99 = 0.00$$

对于Peter, Paul, Mary的组合M函数，求信任函数、似然函数：

信任函数值＝似然函数值＝组合后的M函数值

即， $\mathrm{Bel}(\{Peter\}) = \mathrm{Pl}(\{Peter\}) = m_{12}(\{Peter\}) = 0$

$\mathrm{Bel}(\{Paul\}) = \mathrm{Pl}(\{Paul\}) = m_{12}(\{Paul\}) = 1$

$\mathrm{Bel}(\{Mary\}) = \mathrm{Pl}(\{Mary\}) = m_{12}(\{Mary\}) = 0$

	$m_1()$	$m_2()$	*$m_{12}()$*
Peter	**0.99**	**0.00**	***0.00***
Paul	**0.01**	**0.01**	***1.00***
Mary	**0.00**	**0.99**	***0.00***

例4： 若修改“Zadeh悖论”表中的部分数据，如下表所示。请重新计算证人W1和W2提供证据的组合结果。

	$m_1()$	$m_2()$
{Peter}	0.98	0
{Paul}	0.01	0.01
{Mary}	0	0.98
Θ ={Peter，Paul，Mary}	0.01	0.01

【解】：首先，计算归一化常数K。

$$K = 1 - \sum_{B \cap C = \varnothing} m_1(B) \cdot m_2(C)$$

$$= 1 - [m_1(Peter) \cdot m_2(Paul) + m_1(Peter) \cdot m_2(Mary)$$

$$+ m_1(Paul) \cdot m_2(Mary)]$$

$$= 1 - (0.98 \times 0.01 + 0.98 \times 0.98 + 0.01 \times 0.98) = 0.02$$

归一化常数K的另一种计算法：

$$
\begin{aligned}
K &= \sum_{B\cap C\neq\varnothing} m_1(B)\cdot m_2(C) \\
&= m_1(Peter)\cdot m_2(\Theta) + m_1(Paul)\cdot m_2(Paul) \\
&+ m_1(Paul)\cdot m_2(\Theta) + m_1(\Theta)\cdot m_2(Paul) \\
&+ m_1(\Theta)\cdot m_2(Mary) + m_1(\Theta)\cdot m_2(\Theta) \\
&= 0.98\times 0.01 + 0.01\times 0.01 + 0.01\times 0.01 \\
&+ 0.01\times 0.01 + 0.01\times 0.98 + 0.01\times 0.01 = 0.02
\end{aligned}
$$

（1）计算关于Peter的组合M函数

$$m_1 \oplus m_2(\{Peter\}) = \frac{1}{K} \sum_{B \cap C = \{Peter\}} m_1(B) \cdot m_2(C)$$

$$= \frac{1}{K} \cdot [m_1(\{Peter\}) \cdot m_2(\{Peter\}) + m_1(\{Peter\}) \cdot m_2(\Theta)]$$

$$= \frac{1}{0.02} \times (0.98 \times 0 + 0.98 \times 0.01) = 0.49$$

	$m_1()$	$m_2()$
{Peter}	0.98	0
{Paul}	0.01	0.01
{Mary}	0	0.98
Θ ={Peter, Paul, Mary}	0.01	0.01

（2）计算关于Paul的组合M函数

$$m_1 \oplus m_2(\{Paul\}) = \frac{1}{K} \sum_{B \cap C = \{Paul\}} m_1(B) \cdot m_2(C)$$

$$= \frac{1}{K} \cdot [m_1(\{Paul\}) \cdot m_2(\{Paul\}) + m_1(\{Paul\}) \cdot m_2(\Theta)$$

$$+ m_1(\Theta) \cdot m_2(\{Paul\})]$$

$$= \frac{1}{0.02} \times (0.01 \times 0.01 + 0.01 \times 0.01 + 0.01 \times 0.01) = 0.015$$

	$m_1()$	$m_2()$
{Peter}	0.98	0
{Paul}	0.01	0.01
{Mary}	0	0.98
Θ ={Peter, Paul, Mary}	0.01	0.01

(3) 计算关于Mary的组合M函数

$$m_1 \oplus m_2(\{Mary\}) = \frac{1}{K} \sum_{B \cap C = \{Mary\}} m_1(B) \cdot m_2(C)$$

$$= \frac{1}{K} \cdot [m_1(\{Mary\}) \cdot m_2(\{Mary\}) + m_1(\{\Theta\}) \cdot m_2(\{Mary\})]$$

$$= \frac{1}{0.02} \times (0 \times 0.98 + 0.01 \times 0.98) = 0.49$$

	$m_1()$	$m_2()$
{Peter}	0.98	0
{Paul}	0.01	0.01
{Mary}	0	0.98
Θ ={Peter, Paul, Mary}	0.01	0.01

（4）计算关于Θ ={Peter, Paul, Mary}的组合M函数

$$m_1 \oplus m_2(\Theta) = \frac{1}{K} \sum_{B \cap C = \Theta} m_1(B) \cdot m_2(C)$$

$$= \frac{1}{K} \cdot m_1(\Theta) \cdot m_2(\Theta)$$

$$= \frac{1}{0.02} \times 0.01 \times 0.01 = 0.005$$

此外，根据信任函数、似然函数的计算公式，可得：

即，Bel({Peter}) = 0.49; Pl({Peter}) = 0.49 + 0.005 = 0.495

Bel({Paul}) = 0.015; Pl({Paul}) = 0.015 + 0.005=0.020

Bel({Mary}) = 0.49;   Pl({Mary}) = 0.49 + 0.005 = 0.495

Bel(Θ) = Pl(Θ) = 0.49 + 0.015 + 0.49 + 0.005 = 1

	$m_1()$	$m_2()$	$m_{12}()$
{Peter}	0.98	0	0.49
{Paul}	0.01	0.01	0.015
{Mary}	0	0.98	0.49
Θ ={Peter, Paul, Mary}	0.01	0.01	0.005

D－S理论的一个具体模型

概率分配函数及其模型

$$U=\{s_1,s_2,\cdots,s_n\}$$

(1) $\sum_i M(\{s_i\})\le 1$；基本事件的信度之和不大于1

(2) $M(U)=1-\sum_i M(\{s_i\})$；除基本事件和U外，其它事件发生的信度为0

⑴ $Bel(A)=\sum_{s_i\in A} M(\{s_i\}),$

⑵ $Pl(A)=M(U)+Bel(A), A\neq U;$

⑶ A的未知度：$\Delta=Pl(A)-Bel(A)=M(U_A),$

⑷ 正交和

$$M(\{s_i\})=\frac{M_1(s_i)M_2(s_i)+M_1(s_i)M_2(U)+M_1(U)M_2(s_i)}{M_1(U)M_2(U)+\sum_i[M_1(s_i)M_2(s_i)+M_1(s_i)M_2(U)+M_1(U)M_2(s_i)]}$$

类概率函数

$$f(A) = Bel(A) + \frac{|A|}{|U|}[Pl(A) - Bel(A)]$$

$$(1)\sum_{i=1}^{n} f(s_i) = 1$$

$$(2)\forall A \subseteq U, Bel(A) \le f(A) \le Pl(A);\ f(A) = 1 - f(\neg A)$$

(3) $f(A)$满足概率定义的条件： $f(\phi) = 0;\ f(U) = 1;$

$$\forall A \subseteq U, 0 \le f(A) \le 1$$

知识不确定的表示

$$IF \quad A \quad THEN \quad B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\} \qquad CF = \{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$$

A：前提条件，简单或复合（OR,AND)

B：结论，用D中子集表示，例：天气状况

CF ：可信度因子，c_i 一b_i对应， $c_i \geq 0$，$\Sigma c_i \leq 1$

证据不确定的表示

初始证据：用户给$f(A) \in [0,1]$;

中间证据：传递算法

组合证据不确定性算法（最大最小算法）

不确定的传递算法

- **求出B的概率分配函数**

$$M(\{b_1\},\{b_2\},\cdots,\{b_n\}) = \{f(A)\times c_1, f(A)\times c_2,\cdots, f(A)\times c_n\}$$

$$M(U_B) = 1-\sum_i f(A)\times c_i$$

- **若两条知识支持同一个结论集合B，先求出各自的M1 ,M2,再求正交和 $M_1 \oplus M_2$**

- **求出*Bel(B), f(B)***

$$\begin{cases} Bel(B) = \sum_{b_i \subseteq B} M(\{b_i\}), \quad Pl(B) = 1 - Bel(\neg B) \\ f(B) = Bel(B) + \dfrac{|B|}{|U|} M(U_B) \end{cases}$$

$r_1: IF \quad E_1E_2 \quad THEN \quad G=\{g_1,g_2\}, CF=\{0.2,0.6\}$

$r_2: IF \quad GE_3 \quad THEN \quad A=\{a_1,a_2\}, CF=\{0.3,0.5\}$

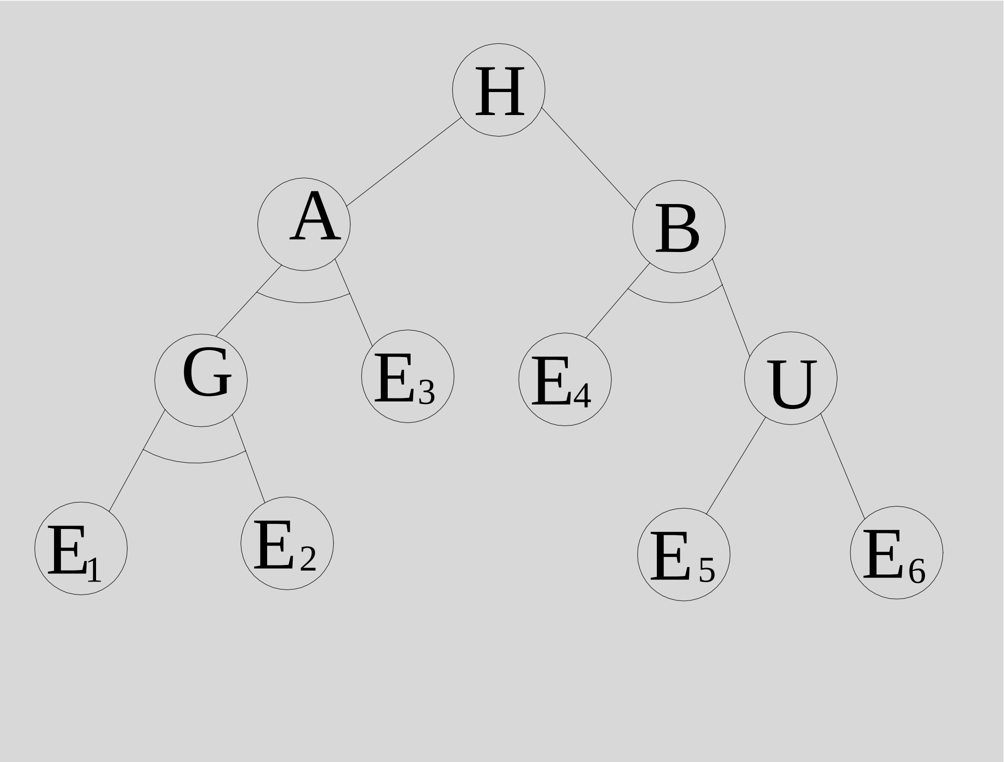
$r_3: IF \quad E_4(E_5 \cup E_6) \quad THEN \quad B=\{b_1\}, CF=\{0.7\}$

$r_4: IF \quad A \quad THEN \quad H=\{h_1,h_2,h_3\}, CF=\{0.2,0.6,0.1\}$

$r_5: IF \quad B \quad THEN \quad H=\{h_1,h_2,h_3\}, CF=\{0.4,0.2,0.1\}$

$$f(E_i)=\begin{cases}0.7, i=1\\0.8, i=2\\0.6, i=3\\0.9, i=4\\0.5, i=5\\0.7, i=6\end{cases}$$

所有的$|U|=10, CER(H)=?$



$(1)\ f(G) \quad (r_1)$

$$f(E_1E_2)=\min\{f(E_1), f(E_2)\}=0.7$$

$$M(\{g_1\},\{g_2\})=\{0.7\times 0.2, 0.7\times 0.6\}=\{0.14, 0.42\}$$

$$Pl(U_G)-Bel(U_G)=M(U_G)=1-(0.14+0.42)=0.44$$

$$Bel(G)=\sum_{i=1}^{2}M(\{g_i\})=0.14+0.42=0.56$$

$$f(G)=Bel(G)+\frac{|G|}{|U|}M(U_G)=0.56+\frac{2}{10}\times 0.44=0.65$$

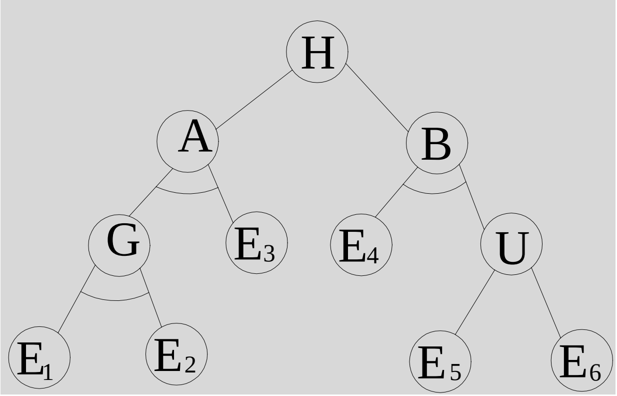
$r_1: IF \quad E_1E_2 \quad THEN \quad G=\{g_1,g_2\}, CF=\{0.2,0.6\}$

$r_2: IF \quad GE_3 \quad THEN \quad A=\{a_1,a_2\}, CF=\{0.3,0.5\}$

$r_3: IF \quad E_4(E_5\cup E_6) \quad THEN \quad B=\{b_1\}, CF=\{0.7\}$

$r_4: IF \quad A \quad THEN \quad H=\{h_1,h_2,h_3\}, CF=\{0.2,0.6,0.1\}$

$r_5: IF \quad B \quad THEN \quad H=\{h_1,h_2,h_3\}, CF=\{0.4,0.2,0.1\}$



(2) $f(A)$ (r_2)

$$f(GE_3)=\min\{f(G),f(E_3)\}=0.6$$

$$M(\{a_1\},\{a_2\})=\{0.6\times0.3,0.6\times0.5\}=\{0.18,0.3\}$$

$$M(U_A)=1-(0.18+0.3)=0.52$$

$$Bel(A)=\sum_{i=1}^{2}M(\{a_i\})=0.18+0.3=0.48$$

$$f(A)=Bel(A)+\frac{|A|}{|U|}M(U_A)=0.48+\frac{2}{10}\times0.52=0.58$$

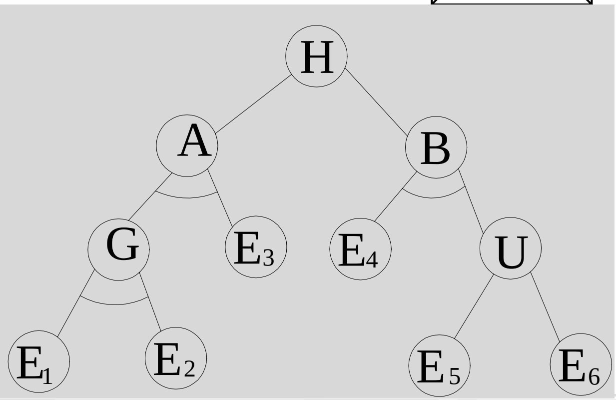
$r_1: IF \quad E_1E_2 \quad THEN \quad G=\{g_1,g_2\}, CF=\{0.2,0.6\}$

$r_2: IF \quad GE_3 \quad THEN \quad A=\{a_1,a_2\}, CF=\{0.3,0.5\}$

$r_3: IF \quad E_4(E_5\cup E_6) \quad THEN \quad B=\{b_1\}, CF=\{0.7\}$

$r_4: IF \quad A \quad THEN \quad H=\{h_1,h_2,h_3\}, CF=\{0.2,0.6,0.1\}$

$r_5: IF \quad B \quad THEN \quad H=\{h_1,h_2,h_3\}, CF=\{0.4,0.2,0.1\}$



(3) $f(B)$ (r_3)

$$f(E_4(E_5 \cup E_6)) = \min\{f(E_4), \max\{f(E_5), f(E_6)\}\} = 0.7$$

$$M(\{b_1\}) = \{0.7 \times 0.7\} = \{0.49\}$$

$$M(U_B) = 1 - 0.49 = 0.51$$

$$Bel(B) = 0.49$$

$$f(B) = Bel(B) + \frac{|B|}{|U|} M(U_B) = 0.49 + \frac{1}{10} \times 0.51 = 0.54$$

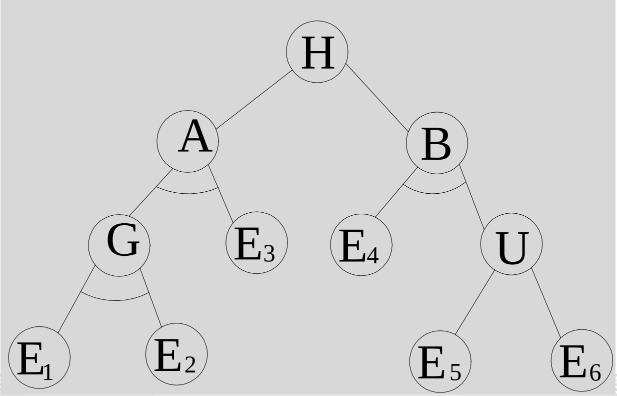
$r_1: IF \quad E_1E_2 \quad THEN \quad G=\{g_1,g_2\}, CF=\{0.2,0.6\}$

$r_2: IF \quad GE_3 \quad THEN \quad A=\{a_1,a_2\}, CF=\{0.3,0.5\}$

$r_3: IF \quad E_4(E_5 \cup E_6) \quad THEN \quad B=\{b_1\}, CF=\{0.7\}$

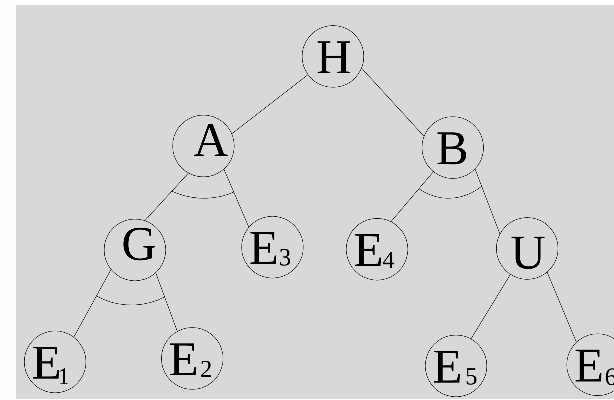
$r_4: IF \quad A \quad THEN \quad H=\{h_1,h_2,h_3\}, CF=\{0.2,0.6,0.1\}$

$r_5: IF \quad B \quad THEN \quad H=\{h_1,h_2,h_3\}, CF=\{0.4,0.2,0.1\}$



(4)求r_4, r_5的正交和

$$M_A(\{h_1\},\{h_2\},\{h_3\}) = \{f(A)\times 0.2,\ f(A)\times 0.6,\ f(A)\times 0.1\}$$
$$= \{0.116, 0.348, 0.058\}$$
$$M_B(\{h_1\},\{h_2\},\{h_3\}) = \{f(B)\times 0.2,\ f(B)\times 0.6,\ f(B)\times 0.1\}$$
$$= \{0.216, 0.108, 0.054\}$$



$$M_A(U_H) = 1-(0.116+0.348+0.058) = 0.478$$
$$M_B(U_H) = 1-(0.216+0.108+0.054) = 0.622$$
$$K = \sum_{xy\neq\phi} M_A(x)M_B(y)$$
$$= 0.116\times 0.216 + 0.348\times 0.108 + 0.058\times 0.054 + 0.478\times 0.622$$
$$+(\cdots)\times M_A(U_H) + (\cdots)\times M_B(U_H) = 0.868$$

$r_1: IF\quad E_1E_2\quad THEN\quad G=\{g_1,g_2\}, CF=\{0.2,0.6\}$
$r_2: IF\quad GE_3\quad THEN\quad A=\{a_1,a_2\}, CF=\{0.3,0.5\}$
$r_3: IF\quad E_4(E_5\cup E_6)\quad THEN\quad B=\{b_1\}, CF=\{0.7\}$
$r_4: IF\quad A\quad THEN\quad H=\{h_1,h_2,h_3\}, CF=\{0.2,0.6,0.1\}$
$r_5: IF\quad B\quad THEN\quad H=\{h_1,h_2,h_3\}, CF=\{0.4,0.2,0.1\}$

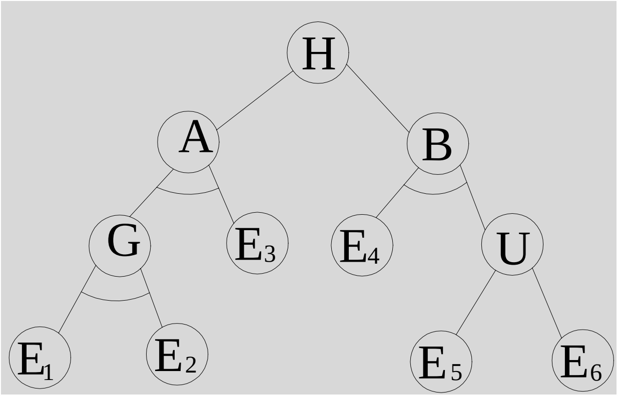
$$M(\{h_i\}) = K^{-1}\sum_{xy=h_i} M_A(x)M_B(y)$$
$$= \begin{cases} 0.23, i=1 \\ 0.35, i=2 \\ 0.075, i=3 \end{cases}$$

(5) $f(H)$

$$Bel(H) = M(\{h_1\}) + M(\{h_2\}) + M(\{h_3\})$$
$$= 0.23 + 0.35 + 0.075 = 0.655$$

$$M(U_H) = 1 - \sum_{i=1}^{3} M(\{h_i\}) = 1 - 0.655 = 0.345$$

$$f(H) = Bel(H) + \frac{|H|}{|U|} M(U_H) = 0.655 + \frac{3}{10} \times 0.345 = 0.759$$



- 满足比概率更弱的公理，先验数据更直观、易得
- 可区分“不知道”和“不确定”的差异
- 可以综合不同专家或数据源的知识或数据

♦要求证据必须是独立的，而这有时不易满足

♦证据合成规则没有非常坚固的理论支持，其合理性和有效性还存在较大的争议

♦计算上存在着潜在的指数爆炸问题