第八章练习参考答案

一、

1．二元可满足性问题 2SAT

例：给定布尔变量的一个有限集合U={u1,u2,..,un}及定义其上的子句C={c1,c2,…,cm},其中|Ck|=2,k=1,2,…,m，

问：是否存在*U* 的一个真赋值，使得*C* 中所有的子句均被满足？

证明： 2SAT 是P－类问题。

证：为叙述方便，采用数理逻辑中的“合取式”表达逻辑命题，于是

 C=c1∧c2∧…∧cm==

      

其中ci.cj表示逻辑“与”，*x*k*+y*k表示逻辑“或”， *x*k*,y*k是某个uj 或。

考虑表达式C=,如果有某个*x*k*+y*k*=u*i*+*，则在乘积式中可以去掉该子句：C/=C\(xk+yk) ，可见*C* 与C/的可满足性是等价的。所以我们可以假定*C* 中不含有形如*u*i*+*的子句。注意到此时*C* 中的子句个数不会超过*n*(*n-*1)。

如果逻辑变量*un* 或它的非在*C* 的某个子句中出现，我们将*C* 表示成

C=G.(un+y1)…(un+yk)(+z1)…(+zh) (1)

其中*G* 是*C* 的一部分子句，而且不出现逻辑变量*un* 或它的非。令 C/=G. (2)

 (2)式中不再含有变量*un* 或它的非。记U/={u1,u2,…un-1}。如果存在*U* 的真赋值，使得*C*满足，则一定存在*U/*的真赋值使得*C/* 满足。

因为如果*un* 取真值，则所有的*zj* 必然取真值； *un* 取假值，所有的*yi* 必然都取真值，不管那中情况， *C/* 的乘积部分必然取真值。反之，假设存在U/ 的真赋值，使得*C*/ 满足。若有某个*yi* 取假值，则所有的*zj*必然取真值，此时令un取真值，得到*U* 的真赋值，使得*C* 满足。若有某个*z*j取假值，则令*un* 取假值，得到*U*的真赋值，使得*C* 满足。如果所有的*yi*和*zj* 都取真值， *un* 取假值得到*U* 的真赋值，使得*C* 满足。

至此我们得到： *C* 与*C* /的可满足性是等价的。但是后者涉及的变量数比前

者少1，子句数为*m-(k+h)+kh*。但是，我们可以像前面一样简化掉所有形如*u*i*+*的子句，因而可以假定 *C*/中子句个数不超过 (n-1)(n-2)。

上述过程可以一直进行到判定只含有一个逻辑变量的逻辑语句的可满足性问题。这需要一个常数时间即可。注意到我们每一步简化都可以在多项式（关于

*n* 的）步骤内完成，总共需要至多n-1步简化，因而，在多项式时间内可以完成2SAT 可满足性问题的判定。即2SAT 是P－类问题。 证毕

2.证明：用提示的限制法。

给定S/⊆S，验证|S/|≤K，需|S|=O(n)时间,验证任给c∈C，S/∩c非空可在|C|\*|c|\*|S/|=|C|\*n2内完成，所以问题是多项式可验证的，相遇集问题∈NP。

下面证明顶点覆盖问题∝|c|=2的相遇集问题。任给图G(V,E)，设E={(x1,y1),(x2,y2)…,(xm,ym)} ,令S=V,C={{x1,y1},{x2,y2}…,{xm,ym}}，那么，若G存在顶点覆盖V/，|V/|≤K，则V/覆盖E的每条边的至少一个顶点，即V/包含xi,yi至少一个,i=1,2,..,m。取S/=V/，显然，S/与C中任意子集{xi,yi}交集不空。反之，若存在相遇集S/，则令V/=S/，由于S/与C中子集交不空，则S/必含有xi,yi之一，说明它是G的顶点覆盖。至此我们证了明|c|=2的相遇集问题是NP难的，从而相遇集问题也是NP难的。相遇集问题∈NP，所以是NP完全问题。证毕。

3.证明：用提示的限制法。

将矩阵A和b的各行取相同值a11,a12,…a1n和b1，则问题变为：判定是否存在X，a11x1+a12x2+…a1nxn≤b1，判定且CTX≥D问题,这就是0/1背包判定问题。0/1背包判定问题是NPC，所以这个特殊整数规划问题也是NPC问题，从而一般的整数规划问题是NPC问题。

任给X，原问题的判定AX<=b和CTX>=D需计算mn2+n次乘法和加法及2次比较，可在多项式时间内完成，随意原问题∈NP。证毕。

5. 独立集问题：

例：对于给定的无向图*G*(*V*,*E*)和正整数*k* (≤|*V* | )

问： *G* 是否包含一个于*k*－独立集V/， 即是否存在一个子集V/⊆V| , |V/|=k，使得 V/中的任何两个顶点在图中*G* 都不相邻。

证明独立集问题是 NPC 问题（提示：考虑独立集和团的关系：如果V/是图*G* 的团，则 V/是G的补图G\*的独立集；反之亦然）。

证明：

思路：欲证明 Π∈*NPC* ；选取一个已知的 NP 完全问题Π/；构造一个从Π/ 到Π 的变换*f* ；证明*f* 为一个多项式变换。

我们选取团问题作为参照物：给定一个无向图*G*(*V*, *E*)，存在V/⊂*V* ，|*V* /| = *k* ，且对于任意*u*,*v∈*V/有(*u*, *v*)∈*E*。我们构造新的无向图 G\*(V,E\*)使得G\*为*G* 的补图，即对于任意*u*,*v∈V* ，若(*u*,*v*)∈*E*，则 (u,v)∉*E\**；若(*u*,*v*)∉ *E*，则 (u,v) ∈*E\*。*

（1）考虑独立集和团的关系：如果V/是图*G* 的团，则V/是*G* 的补图*G\**的独立集；

反之亦然。（详见（4）证明）

（2） 首先说明独立集问题是NP问题。因为无向图G\*(V,E\*)的团问题是一个NP 问题，从而由其对应关系可知，G(V,E)的独立集问题也是一个 NP 问题。（也可仿照无向图的独立团问题的三个阶段的方法，证明独立集问题是NP问题）

（3） 已知团问题是NPC问题。

（4） 下面证明独立集到团问题的转换是一个多项式变换，只需要证明*G\**包含一个k 独立集V/，当且仅当*G* 包含一个k团。

（i）如果*G\**包含一个k 独立集*V* /，则在无向图*G\**中任何两个顶点(u,v)∈V/都不相邻，因为*G* 为G\*的补图，故在无向图*G* 中，对于顶点子集V/，任何两个顶点u,v∈V / 必然都存在(u,v)∈E ，即*G* 包含一个k团。

（ii）如果*G* 包含一个 k团，则对于无向图*G* 中任意(u,v ∈V/ 有(u,v)∈E ，因为G\*为*G* 的补图，所以在无向图G\*中对于顶点集 V/，任何两个顶点*u,v∈*V/必然都不相邻，即G\*包含一个k 独立集。

上述变换可以在多项式时间内完成，设无向图*G* 中的顶点个数为n，即|V|=n ，则对于|G∪G\*|=n(n-1)/2，所以该变换可以在多项式时间内完成，即该变换为多项式变换。

6. 证明：

任给一个图G=(V,E)的一个顶点排序v1v2..vn，验证(vi,vi+1)∈E和(vn,v1)∈E可在O(n\*|E|)≤O(n3)完成，所以Hamilton问题是NP问题。

对于Hamilton问题实例I, 其图为G=(V,E)，构造一个新的图G1=(V,E1)它是一个完全图，各边赋权如下： 若(u,v)∈E, w(u,v)=1 ; 否则 w(u,v)=k>1。其中，n是G的顶点数，得到旅行商问题实例I/。

则图G有Hamilton回路当且仅当图G1有长为n的环游路线。

旅行商问题是NPC，所以Hamilton圈问题也是NPC问题。

7.证明：

要得到max需比较所有的x=(x1,x2,..xn),xi∈{0,1}，这有2n个可能，以比较为基础的求最大问题复杂度下界O(n)，故本问题O(2n)，不存在多项式时间算法，所以0/1背包问题∉NP。

但0/1背包判定问题是NPC问题，0/1背包问题不比其更容易，所以，它是NP难问题。

二、

1.解：

（1）迭代计算：

P1(x)=an

P2(x)=an-1+P1(x)\*x

P3(x)=an-2+P2(x)\*x

……

Pn+1(x)=a0+Pn(x)\*x

不难看出，Pn+1(X)=P(x)。顺序计算P1,P2，…Pn+1，每次需一次加法一次乘法，常数时间，所以计算整个多项式需Θ(n)时间。

（2）证：多项式P(x)有n+1个系数，每个系数至少要被处理一次。如若不然，假设某个求值算法A不对系数ai进行处理，考虑输入

<a0,a1,…,ai-1,ai,ai+1,…an>和<a0,a1,…,ai-1,bi,ai+1,…an>，其中ai≠bi是不为0的数。那么这两个多项式对同一个x的求值一定不等。但是算法A的输出是不加区别的，因此算法A出错。于是任何算法至少需要n+1次运算，即时间复杂度为Ω(n)。

2.解

（1）最长回路：任给无向图G=<V,E>和正整数L≤|V|，问：G中有长度不小于L的初级(即顶点不重复)回路吗？

(2)图着色问题：任给无向图G=<V,E>和正整数K，问：能用不超过K种颜色给G的每个顶点涂一种颜色，要求任一边的两个端点的颜色都不相同吗？

3.解

证：

1. 设|V|=n,对任意一条G的回路C,判断C是否为初级回路需n(n-1)/2，判断C的长度是否不小于L需|C|+1≤n，所以存在多项式时间判定算法，问题∈NP。
2. 对V的顶点用M种颜色任一着色方案，检查每条边的两端是否同色，一次比较即可，最多n(n-1)条边，验证可在O(n2)内完成，所以问题∈NP。