
Problemas de Valor Inicial

Trabalho 2

SME0202 Métodos Numéricos em Equações Diferenciais

Cody Stefano Barham Setti – 4856322

Ian de Holanda Cavalcanti Bezerra – 13835412

10 de Junho de 2025

0 PVI de Interesse

Nesse trabalho vamos resolver dois PVIs, um com um pendulo simples, o exemplo classico do osilador harmonico, e em seguida, o pendulo duplo, um exemplo de movimento chaotico.

Vamos explorar como diferentes metodos de solucao desse PVI se comportam com diferentes fatores como malha de discretizacao ou pequenas perturbacoes as condicoes iniciais.

1 Pêndulo Simples

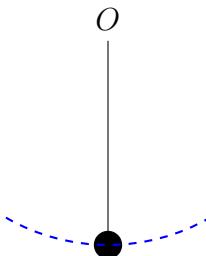


Figura 1: Pêndulo Simples

Formulação do Problema

O movimento do pêndulo simples é descrito pela seguinte equação diferencial de segunda ordem:

$$q''(t) + \sin(q(t)) = 0, \quad q(0) = q_0, \quad q'(0) = 0 \quad (1)$$

onde $q(t)$ é o ângulo em relação à vertical. Para este trabalho, consideramos $q_0 = \frac{\pi}{4}$.

Solução Analítica

A solução analítica é dada em termos de funções elípticas:

$$q(t) = 2 \arcsin \left\{ \sin \left(\frac{q_0}{2} \right) \operatorname{sn} \left[K \left(\sin^2 \left(\frac{q_0}{2} \right) \right) - t; \sin^2 \left(\frac{q_0}{2} \right) \right] \right\} \quad (2)$$

onde $\operatorname{sn}(\cdot; \cdot)$ é a função elíptica de Jacobi e $K(\cdot)$ a integral elíptica completa de primeira ordem.

Métodos Numéricos

Foram implementados três métodos numéricos para resolver o sistema equivalente de EDOs de primeira ordem:

- **Euler Explícito:** método simples de passo único, primeira ordem;
- **Runge-Kutta de 4^a Ordem (RK4):** método clássico de quarta ordem;
- **Euler Implícito:** método de primeira ordem, resolvido via método de Newton.

Resultados

Evolução Temporal A seguir, apresentamos os gráficos da posição angular em função do tempo para cada método, comparando com a solução analítica de referência.

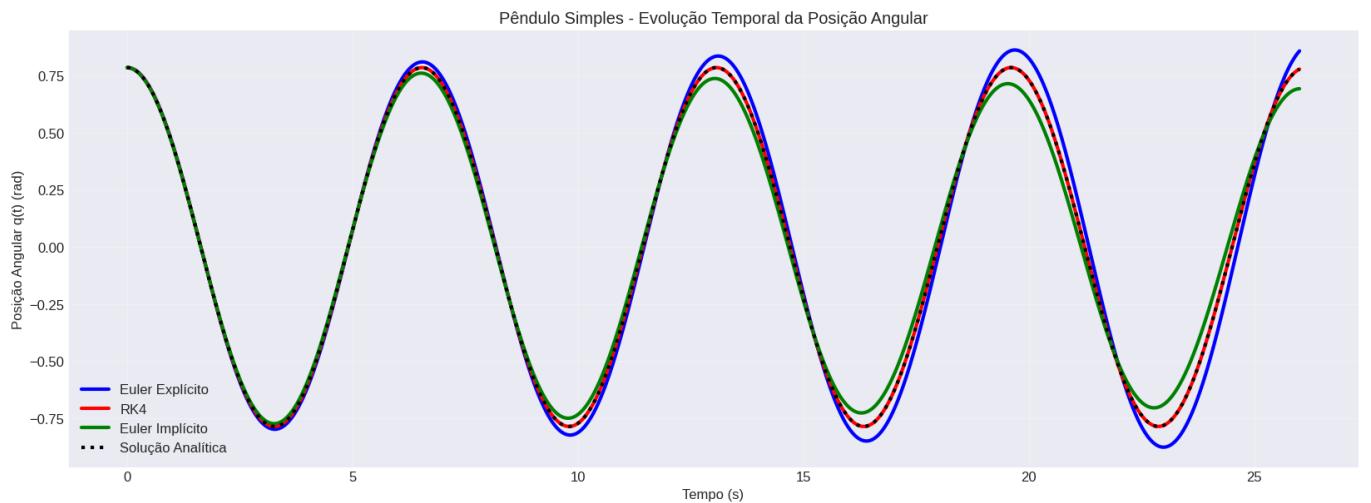


Figura 2: Evolução temporal do ângulo $q(t)$ para cada método numérico e solução analítica.

Ordem de Convergência Os gráficos a seguir mostram o erro em função do passo de tempo para cada método, evidenciando a ordem de convergência esperada.

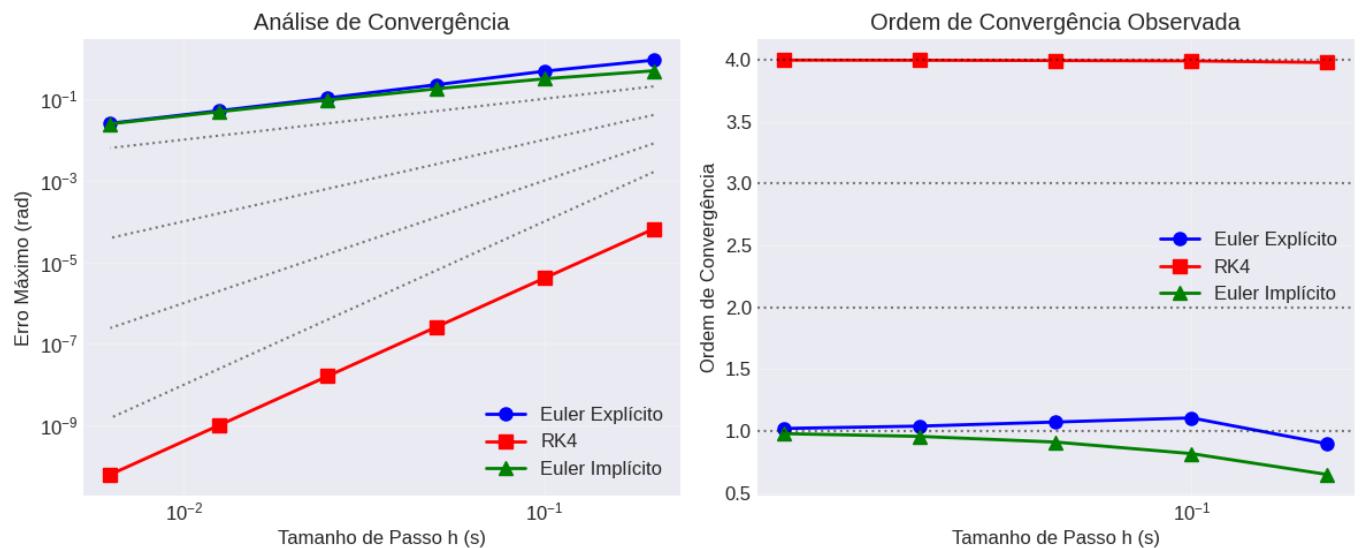


Figura 3: Erro maximo em função do passo de tempo para cada método.

Retrato de Fase O retrato de fase (velocidade angular p vs. posição angular q) para cada método é apresentado a seguir.

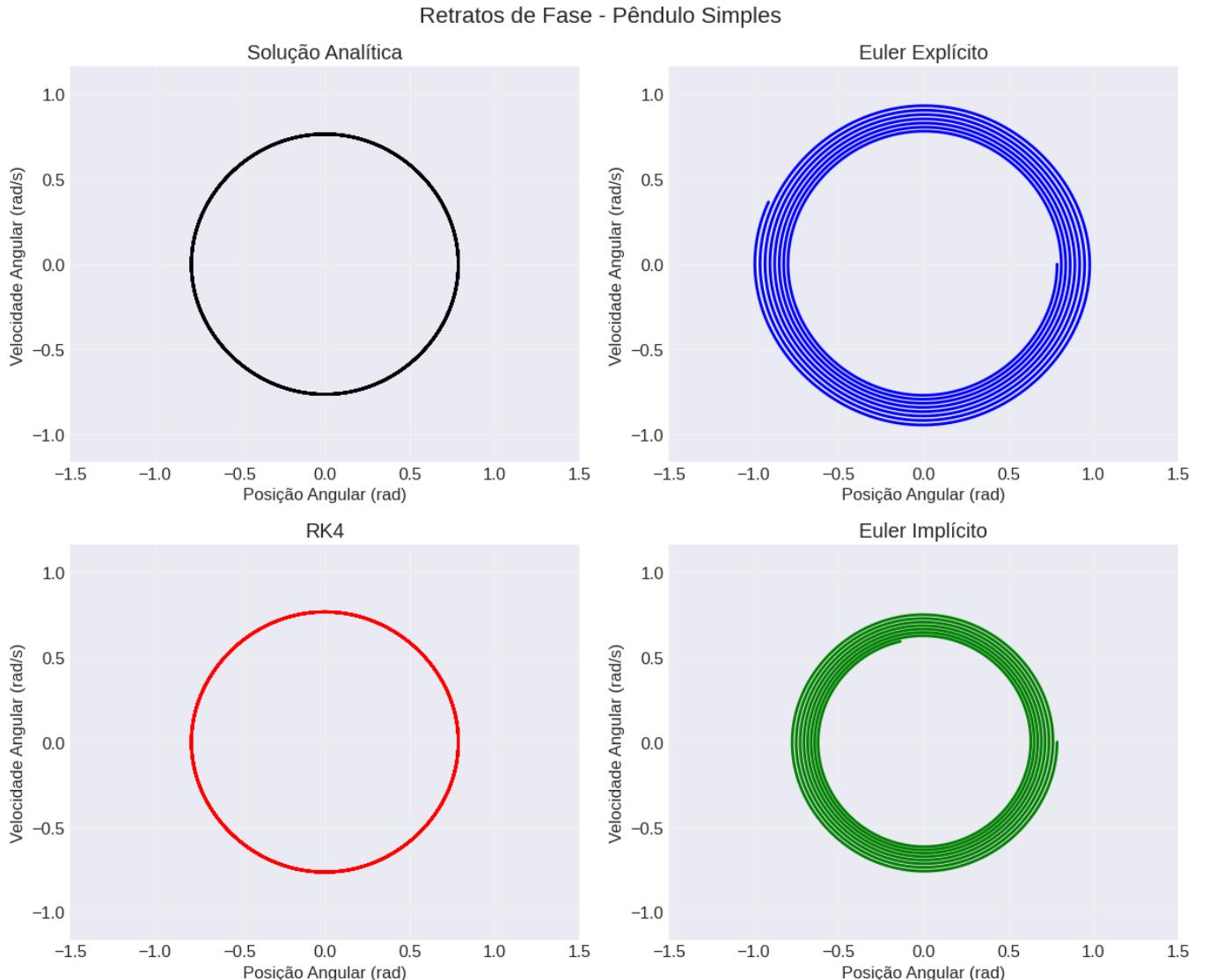


Figura 4: Retrato de fase (q, p) para cada método numérico.

Discussão

Os métodos numéricos implementados produziram resultados coerentes com a teoria. O esquema de Runge–Kutta de quarta ordem (RK4) apresentou maior precisão e ordem de convergência, ao passo que os métodos de Euler explícito e implícito exibiram erros mais acentuados para passos de tempo equivalentes. No retrato de fase, fica evidente a divergência comportamental entre os métodos de Euler: o explícito acumula energia a cada oscilação em relação à solução analítica, enquanto o implícito dissipava energia, reduzindo progressivamente a amplitude das oscilações.

2 Pêndulo Duplo

Formulação do Problema

O pêndulo duplo é um sistema composto por dois pêndulos acoplados, apresentando comportamento dinâmico não-linear e, para certas condições, caótico. O sistema pode ser modelado por um conjunto de quatro EDOs de primeira ordem:

$$\dot{q}_1 = p_1, \quad (3)$$

$$\dot{q}_2 = p_2, \quad (4)$$

$$\dot{p}_1 = f_1(q_1, q_2, p_1, p_2), \quad (5)$$

$$\dot{p}_2 = f_2(q_1, q_2, p_1, p_2) \quad (6)$$

As equações completas estão detalhadas no notebook e seguem a formulação clássica do problema do pêndulo duplo.

Método Numérico

O sistema foi resolvido utilizando o método de Runge–Kutta de 4^a ordem (RK4), devido à sua robustez para sistemas não-lineares e capacidade de capturar comportamentos complexos como o caos.

Resultados

Experimento 1: Condições Próximas do Equilíbrio Foram escolhidos valores iniciais pequenos para q_1 e q_2 , próximos do equilíbrio. A trajetória do segundo pêndulo no plano xy é apresentada abaixo:

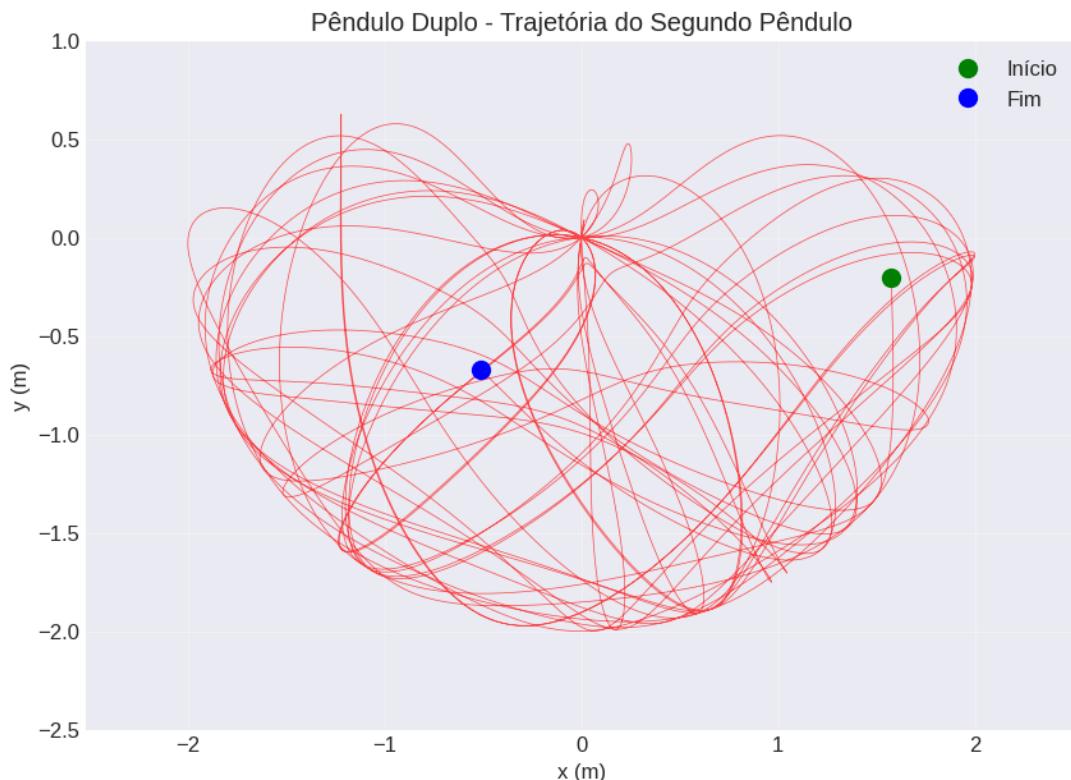


Figura 5: Trajetória $(x_2(t), y_2(t))$ do segundo pêndulo para condições iniciais próximas do equilíbrio.

Observa-se que, para pequenas amplitudes, o movimento é regular e previsível, semelhante ao de dois pêndulos simples acoplados.

Experimento 2: Condições Caóticas e Perturbação Neste experimento, foram escolhidas condições iniciais que levam a comportamento caótico. Uma pequena perturbação foi introduzida em uma das condições iniciais e as trajetórias resultantes foram comparadas:

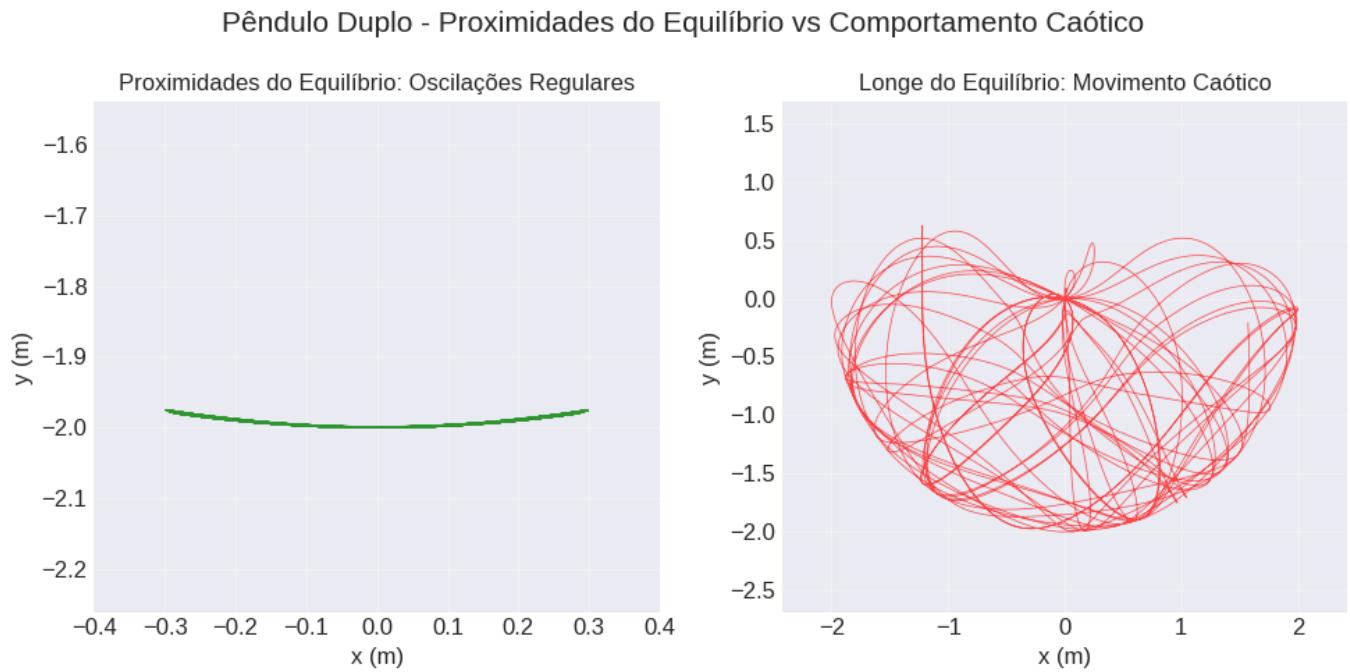


Figura 6: Trajetórias $(x_2(t), y_2(t))$ do segundo pêndulo para duas condições iniciais quase idênticas.

Abaixo, apresentamos o gráfico da distância entre as trajetórias ao longo do tempo, evidenciando a sensibilidade às condições iniciais:

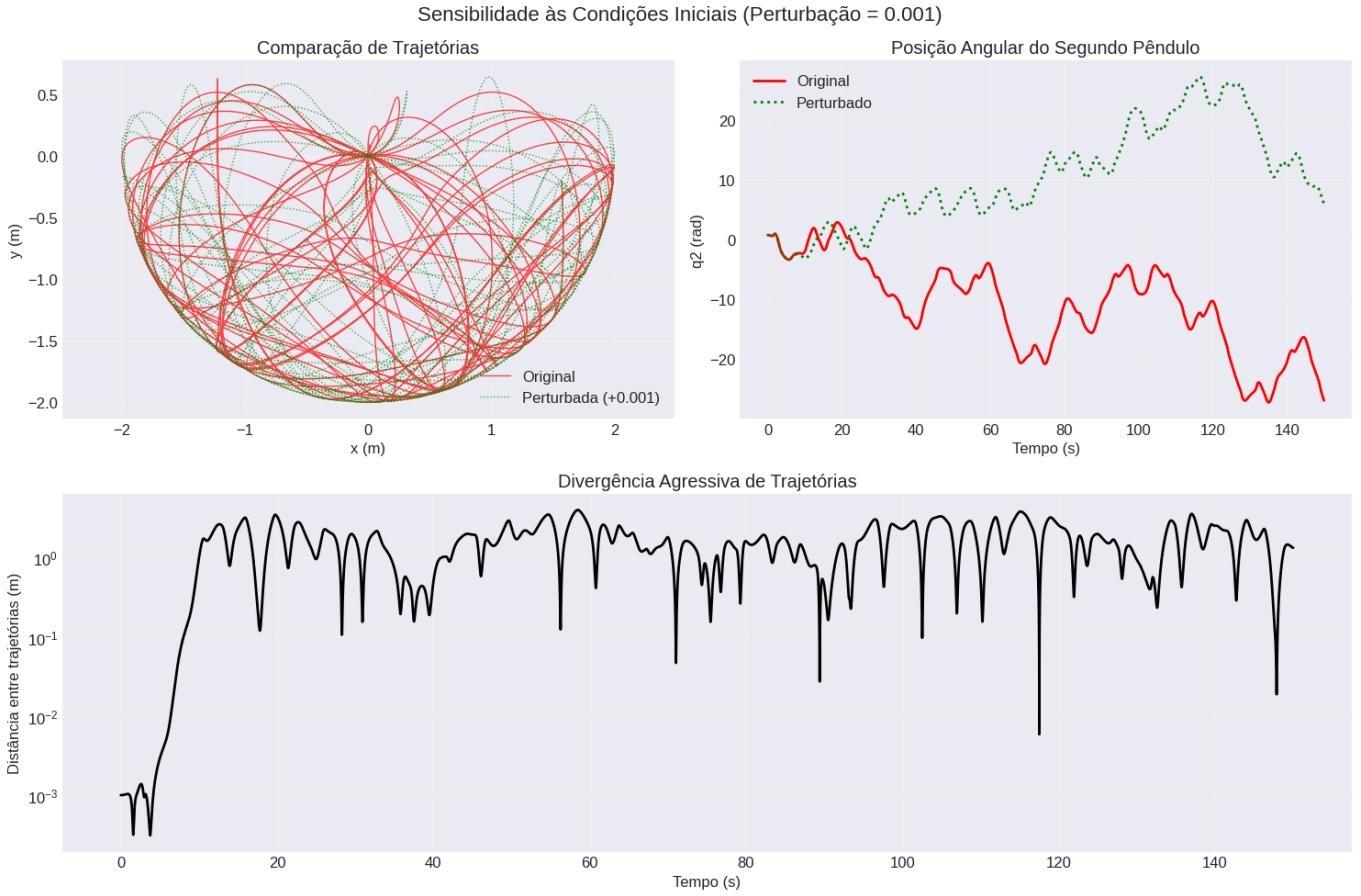


Figura 7: Divergência entre trajetórias: distância entre (x_2, y_2) para condições iniciais ligeiramente diferentes.

Discussão

O pêndulo duplo apresenta comportamento caótico para certas condições iniciais, caracterizado por extrema sensibilidade: pequenas perturbações resultam em trajetórias completamente distintas após algum tempo. Este fenômeno é evidenciado pela rápida divergência das trajetórias no gráfico acima. O método RK4 foi essencial para capturar a dinâmica complexa do sistema, permitindo observar tanto o regime regular quanto o caótico.