
Equações Elípticas

Trabalho 1

SME0202 Métodos Numéricos em Equações Diferenciais

Cody Stefano Barham Setti – 4856322

Ian de Holanda Cavalcanti Bezerra – 13835412

25 de Abril de 2025

1 PVC de Interesse

Para o domínio retangular $\Omega = [0, 1] \times [-1, 1]$, queremos resolver a seguinte equação de convecção-difusão anisotrópica em regime estacionário:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = c \frac{\partial u}{\partial y}.$$

com condição de Dirichlet $u(0, y) = u(1, y) = 0$ em seus bordos verticais, de Robin no bordo superior e de Neumann no inferior, conforme a figura abaixo.

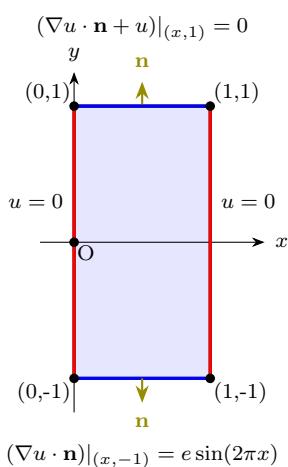


Figura 1: Domínio $\Omega = [0, 1] \times [-1, 1]$ com suas condições de contorno

Para $c = 4\pi^2 - 3$, tal problema de valor de contorno (PVC) possui solução analítica

$$u(x, y) = e^{-y} \sin(2\pi x).$$

Entretanto, elaboraremos um esquema para solucioná-la numericamente.

2 Discretização do PVC

2.1 Discretização do Domínio

2.2 Discretização da EDP

Para discretizar a EDP de interesse com precisão de ordem 2, utilizaremos diferenças finitas. Mais especificamente, aproximaremos as derivadas segundas por uma diferença centrada de 3 pontos, ao passo que, para a derivada primeira, basta uma diferença centrada de 2 pontos para atingir-se a ordem de convergência desejada. Logo, teremos as equações lineares:

$$\frac{U_{i+1j} - 2U_{ij} + U_{i-1j}}{h^2} + 3 \left(\frac{U_{ij+1} - 2U_{ij} + U_{ij-1}}{h^2} \right) = c \left(\frac{U_{ij+1} - U_{ij-1}}{2h} \right).$$

Logo, isolando as incógnitas do lado esquerdo da equação,

$$\left(\frac{3}{h^2} + \frac{c}{h} \right) U_{ij-1} + \left[U_{i-1j} - \frac{8}{h^2} U_{ij} + \frac{1}{h^2} U_{i+1j} \right] + \left(\frac{3}{h^2} - \frac{c}{2h} \right) U_{ij+1} = 0.$$

2.3 Bordo Superior

Os pontos da malha no bordo superior também tem valor desconhecido. Determinamo-nos por meio da condição de Robin

$$(\nabla u \cdot \mathbf{n} + u) |_{(x,1)} = 0, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Isto é,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + u = 0, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Ou, mais simplesmente,

$$\frac{\partial u}{\partial y} + u = 0, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Portanto, novamente, para obter convergência de ordem 2, tomaremos uma diferença **progressiva** para $\frac{\partial u}{\partial y}$ utilizando 3 pontos:

$$\frac{3U_{ij} - 4U_{ij-1} + U_{ij-2}}{2h} + U_{ij} = 0.$$

Reorganizando os índices em ordem crescente,

$$\frac{1}{2h} U_{ij-2} - \frac{4}{2h} U_{ij-1} + \left(\frac{3}{2h} + 1 \right) U_{ij} = 0.$$

2.4 Bordo Inferior

Os pontos da malha no bordo inferior, por fim, também têm valor desconhecido. Determinemo-nos pela condição de Neumann

$$(\nabla u \cdot \mathbf{n}) |_{(x,-1)} = e \sin(2\pi x), \quad \forall x \in [0, 1].$$

Isto é,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = e \sin(2\pi x), \quad \forall x \in [0, 1].$$

Ou, mais simplesmente,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e \sin(2\pi x), \quad \forall x \in [0, 1].$$

Portanto, novamente, para obter convergência de ordem 2, tomaremos uma diferença **progressiva** para $\frac{\partial u}{\partial y}$ utilizando 3 pontos:

$$\frac{3U_{ij} - 4U_{ij-1} + U_{ij-2}}{2h} = -e \sin(2\pi x_{ij}).$$

Reorganizando os índices em ordem crescente,

$$\frac{1}{2h}U_{ij-2} - \frac{4}{2h}U_{ij-1} + \frac{3}{2h}U_{ij} = -e \sin(2\pi x).$$

2.5 Solução Numérica

Com a discretização descrita acima, chegamos na solução numérica mostrada na figura a seguir:

3 Solução Exata e Análise dos Erros na Aproximação

3.1 Gráfico da Solução Exata

Avaliando os valores exatos da função nos mesmos pontos do domínio utilizados para construir-se a malha para a solução numérica obtemos o gráfico mostrado na figura a seguir:

3.2 Análise dos Erros na Aproximação

Agora, com tanto a solução numérica, quanto a exata em mãos, basta calcularmos a diferença absoluta entre seus valores em cada ponto da malha que sai de imediato o *heat-map* abaixo, identificando as regiões de maior e menor erro:

Ademais, fizemos um gráfico do erro (com sinal) no mesmo formato tridimensional das soluções numérica e exata, para tornar ainda mais fácil a localização das regiões do domínio onde um erro maior é cometido na aproximação. Vide-o abaixo:

Claramente, a região de maior erro é onde a temperatura da chapa varia mais violentamente. Isso é natural de se esperar, pois...

4 Análise de Convergência

Por fim, analisamos o erro global cometido para diferentes valores de espaçamento h , cada vez menores, cujo decaimento é mostrado no gráfico abaixo:

Como esperado, a convergência à solução exata é de ordem 2, salvo para valores muito baixos de h . Acreditamos que tal desaceleração na taxa de convergência deve-se a...