Equações Parabólicas e Hiperbólicas

Trabalho 3

SME0202 Métodos Numéricos em Equações Diferenciais

Cody Stefano Barham Setti – 4856322
Ian de Holanda Cavalcanti Bezerra – 13835412

01 de Julho de 2025

0 Preâmbulo

Neste trabalho, resolvemos a equação de advecção-difusão linear dada por

$$u_t + u_x = \frac{1}{\mathbb{P}e} u_{xx}, \tag{1}$$

onde $x \in [0, 15)$ e $t \in [0, 12)$, a condição de contorno é periódica (i.e.: $u(0, t) = u(15, t)$) e o valor inicial é dado por:

$$u(x, 0) = \exp(-20(x-2)^2) + \exp(-(x-5)^2).$$

Mais especificamente, construímos uma solução numérica baseada em diferenças progressivas para a derivada temporal e centrais para as espaciais. Em seguida, utilizamos um método *upwind*. Em essência, alteramos a discretização do termo advectivo u_x de uma diferença central para uma progressiva.

Em seguida, aproveitamos os dois métodos para gerar os gráficos da solução fornecida por cada (tridimensionais), assim como curvas de nível (bidimensionais) de u em função de x para 6 instantes de tempos igualmente espaçados. Mais precisamente, estas imagens foram geradas para quatro números de Peclét distintos: o primeiro para o caso de predominância da difusão ($\mathbb{P}e \ll 1$); o segundo correspondente à ocorrência de advecção e difusão em magnitudes similares ($\mathbb{P}e = 1$), e, por fim, o terceiro e, especialmente, o quarto para o caso de predominância da advecção ($\mathbb{P}e \gg 1$). Com tais imagens em mãos, avaliamos a utilidade de ambos os métodos.

Por fim, conforme pedido, fizemos uma análise das restrições sobre a discretização temporal:

$$\text{(i) } \Delta t \leq \Delta x \qquad \text{e} \qquad \text{(ii) } \Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2\mathbb{P}e^{-1} + \Delta x}$$

em função de $\mathbb{P}e$.

1 Diferenças Progressivas no Tempo e Centradas no Espaço

Discretizando a equação (**??**) por diferenças temporais progressivas e diferenças espaciais centradas, temos o método numérico

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta n} + \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x} = \frac{1}{\mathbb{P}e}\left(\frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{\Delta x^2}\right), \qquad 0 \leq j < N_x.$$

Portanto, isolando o termo desconhecido, concluímos que o método FTCS (do inglês: *Forward Time, Centered Space*) é dado por:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \tfrac{\Delta t}{2\Delta x}\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right) + \tfrac{\Delta t}{\mathbb{P}e\Delta x^2}\left(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n\right), \qquad 0 \leq j < N_x.$$

Entretanto, como lidar com os bordos ($j = 0$ e $j = N_x - 1$)? Como nossa condição de contorno é periódica, temos que

$$U_{-1}^n \doteq U_{N_x-1}^n \qquad \text{e} \qquad U_{N_x}^n \doteq U_0^n.$$

Logo, mais precisamente, temos o algoritmo:

- $j = 0$:

$$U_0^{n+1} = U_0^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(U_1^n - U_{N_x-1}^n\right) + \frac{\Delta t}{\mathbb{P}e\Delta x^2}\left(U_1^n - 2U_0^n + U_{N_x-1}^n\right).$$

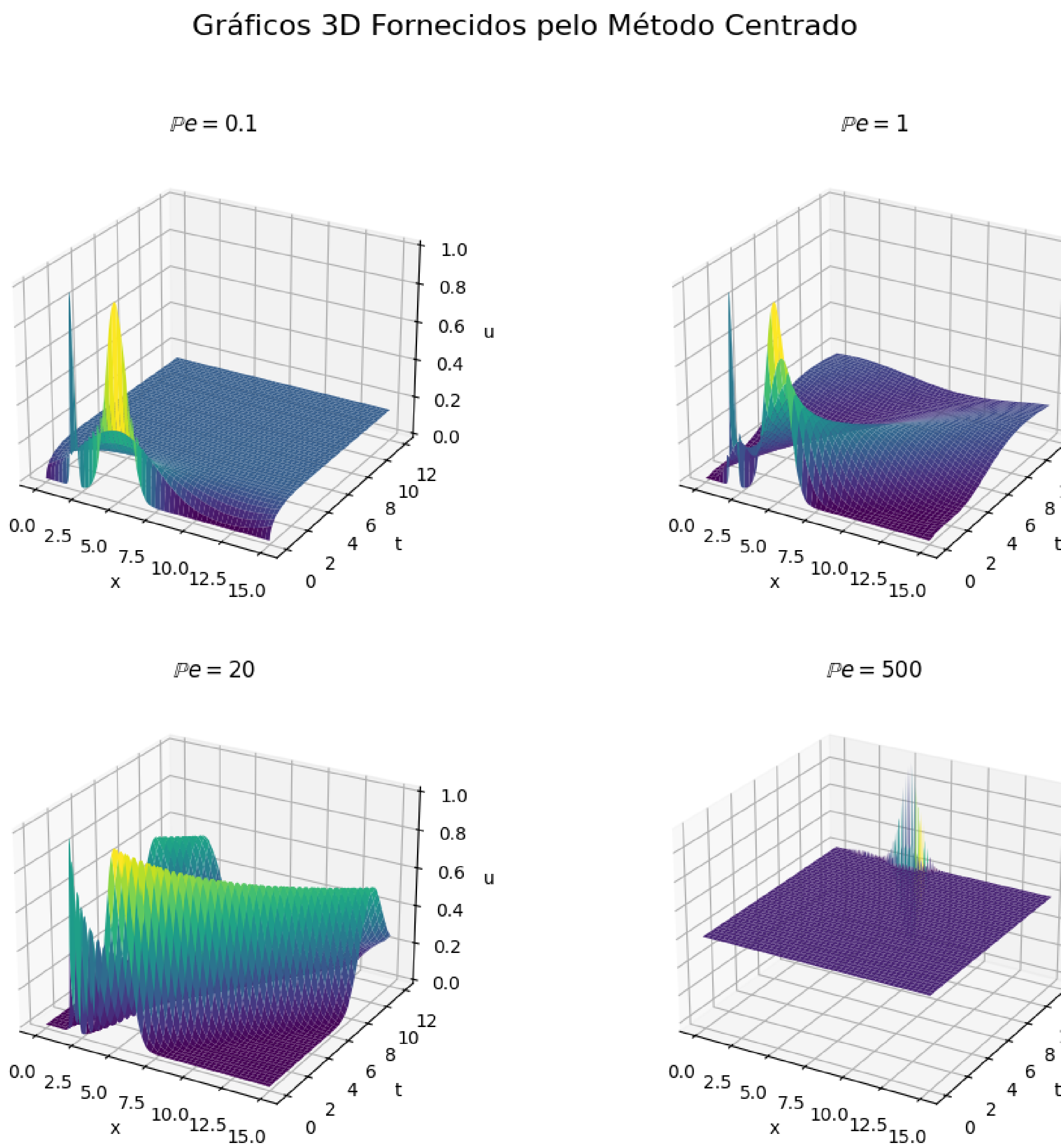
- $j = 1, \ldots, N_x - 2$:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right) + \frac{\Delta t}{\mathbb{P}e\Delta x^2}\left(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n\right).$$

- $j = N_x - 1$:

$$U_{N_x-1}^{n+1} = U_{N_x-1}^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(U_0^n - U_{N_x-2}^n\right) + \frac{\Delta t}{\mathbb{P}e\Delta x^2}\left(U_0^n - 2U_{N_x-1}^n + U_{N_x-2}^n\right).$$

Para os detalhes da implementação deste método em Python, vide seu código fonte no arquivo `codigo-T3-MNED.ipynb`. Os gráficos gerados pela implementação seguem abaixo.



2 Método *Upwind* e Curvas de Nível

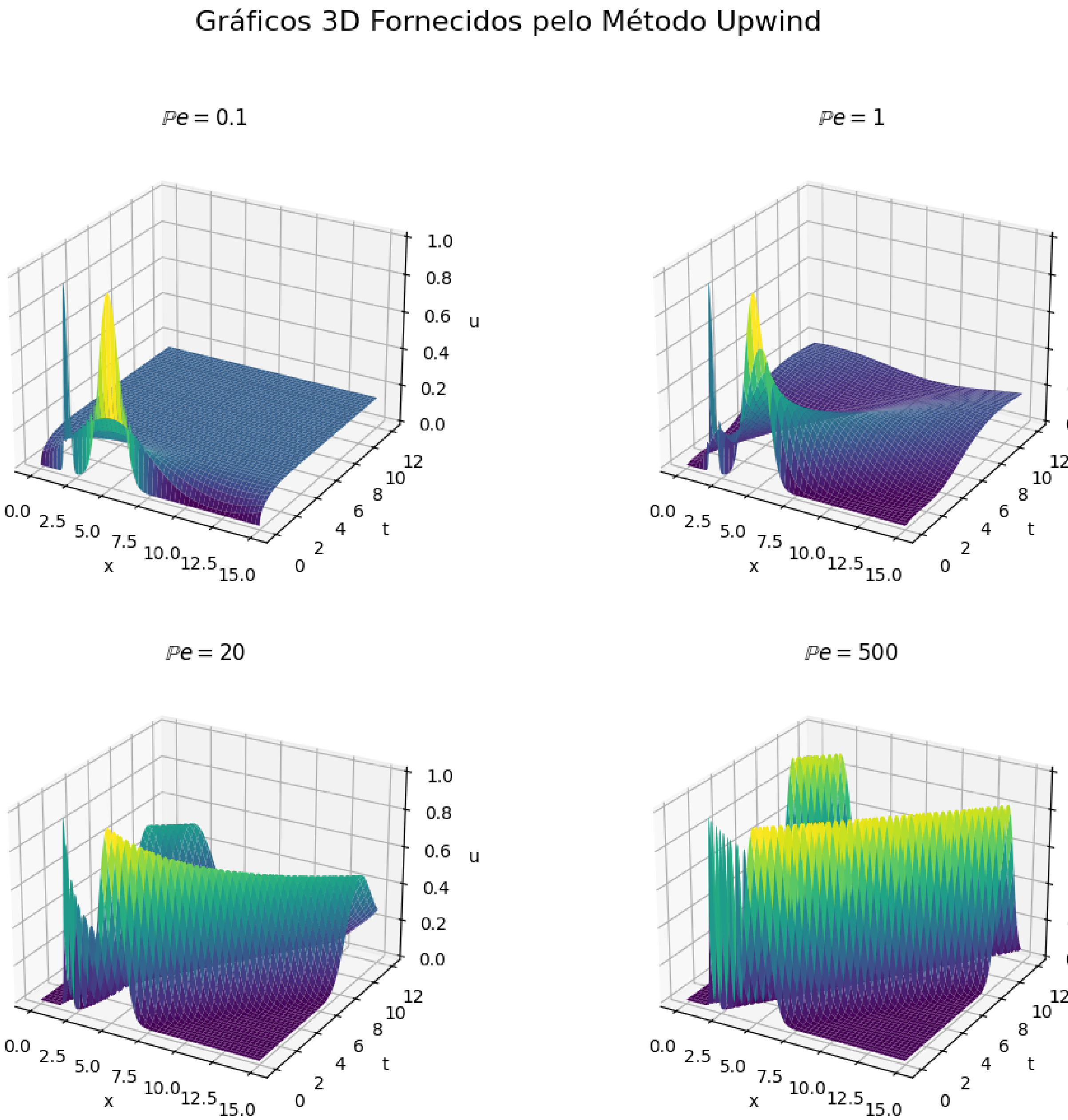
(a) A equação de advecção-difusão de interesse é dada por

$$u_t + u_x = \frac{1}{\mathbb{P}e} u_{xx}$$

Portanto, neste caso, a velocidade de escoamento a é positiva, isto é $a > 0$. Nessas condições, o método *upwind* dita que discretizamos u_t por

$$\frac{U_j^t - U_{j-1}^t}{\Delta x} \; .$$

O restante do algoritmo é completamente análogo ao FTCS, logo, sua exposição é omitida. Mais do que isso, na realidade, aproveitamos tal similaridade para agregá-los no mesmo *solver*. Basta apenas um parâmetro adicional para permitir flexibilidade no calculo do termo u_t (via diferenças centradas ou via diferenças progressivas). Novamente, para maiores detalhes sobre tal *solver*, vide seu código fonte, no arquivo `codigo-T3-MNED.ipynb`.



O que acontece com o método centrado quando $\mathbb{P}e$ ***é da ordem de centenas? Acontece o mesmo com o método* upwind*? (...) Caso haja diferença, explique o motivo.***

Resposta: O método FTCS é sabidamente incondicionalmente instável para a resolução da equação de advecção:

$$u_t + au_x = 0.$$

Portanto, como, para $\mathbb{P}e \gg 1$, a advecção domina nossa EDP de interesse, é natural de se esperar que o método FTCS não convirja à solução real nessas condições. Portanto, seu gráfico patológico não nos preocupa. O método *upwind*, por sua vez, deve atender ao seguinte critério para ser estável na resolução da equação de advecção:

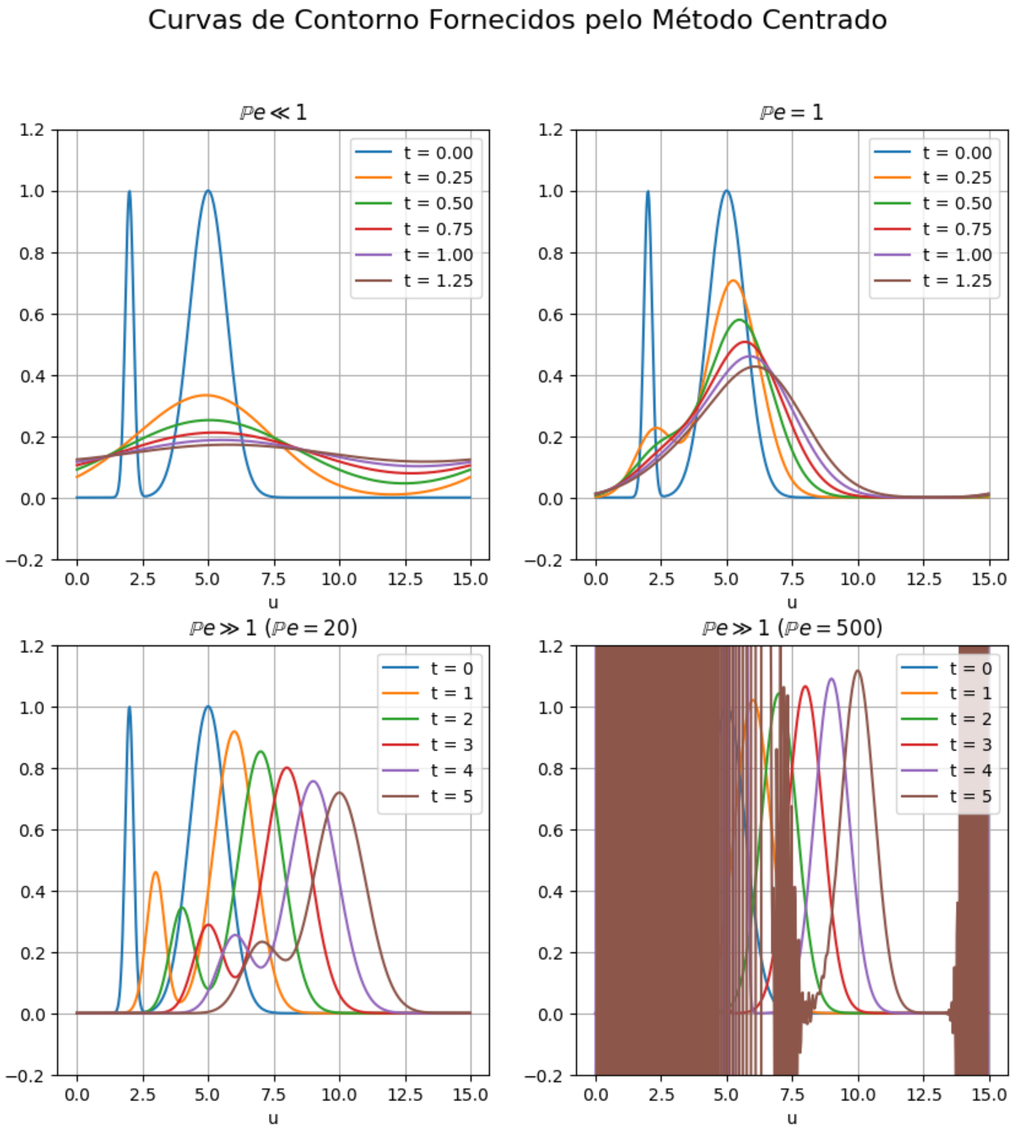
$$\Delta t \leq a\Delta x.$$

Para nossa EDP em particular, isso se reduz a

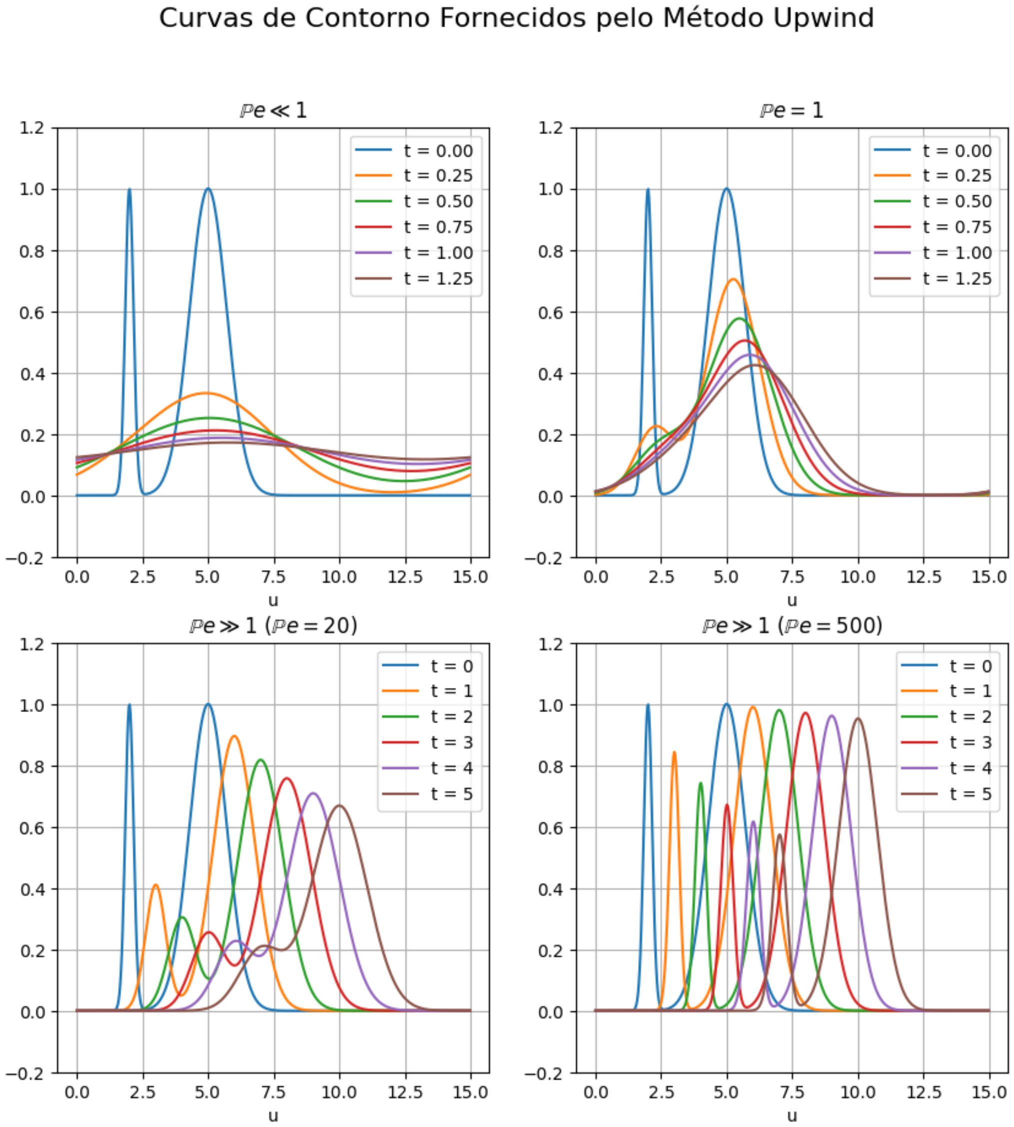
$$\Delta t \leq \Delta x.$$

Esta condição foi explicitamente exigida na implementação dos métodos. Logo, esperamos que sua solução no contexto de $\mathbb{P}e \gg 1$ seja razoável, por mais que o método é notório por ser exageradamente dissipativo.

(b) A seguir, u em função de x – para 6 instantes de tempo distintos e igualmente espaçados – conforme a solução numérica fornecida pelo **método FTCS**. Note que instantes mais distantes foram considerados para o caso $\mathbb{P}e \gg 1$.



A seguir, u em função de x – para 6 instantes de tempo distintos e igualmente espaçados – conforme a solução numérica fornecida pelo **método *upwind***. Note que instantes mais distantes foram considerados para o caso $\mathbb{P}e \gg 1$.



Comente as diferenças observadas, e explique porque as mudanças nas soluções ocorrem da forma que foram apresentadas.

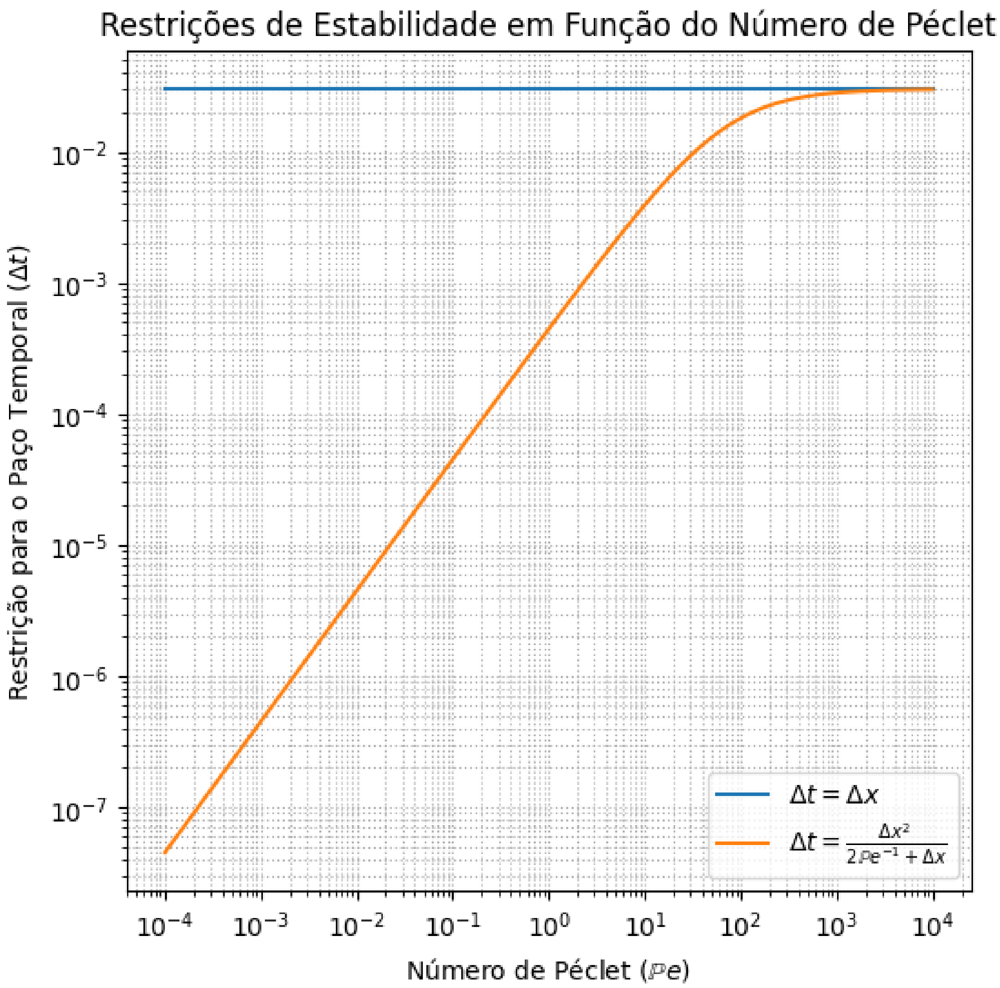
Resposta:

- $\mathbb{P}e \ll 1$: Com o passar do tempo, o principal fenômeno observado é a equalização na distribuição espacial de u. Isto é, o valor de u difunde-se no domínio espacial ao longo do tempo. Tal observação alinha-se com a previsão teórica de que, para $\mathbb{P}e \ll 1$, o comportamento predominante da EDP é o de difusão.
- $\mathbb{P}e = 1$: Nesta configuração, a distribuição espacial de u continua sofrendo difusão, por mais que em uma taxa menos acentuada. Todavia, simultaneamente, a distribuição espacial de u também é transladada, isto é, sofre advecção. Novamente, isto alinha-se com a previsão teórica de que, para $\mathbb{P}e = 1$, tanto o fenômeno de advecção, quanto o de difusão são notáveis.
- $\mathbb{P}e \gg 1$: Nesta configuração, ocorre advecção em grau acentuado. A difusão ainda não é negligenciável, mas isso é mais por culpa dos dois métodos usados do que a EDP. Primeiramente, como já discutido, o método FTCS falha em solucionar problemas fortemente advectivos, como vê-se nas curvas patológicas fornecidas para $\mathbb{P}e = 500$, o caso mais fortemente advectivo estudado.

Por sua vez, o método *upwind* possui baixa ordem de consistência (apenas primeira ordem). Seria necessário um tamanho de passo espacial irrazoavelmente pequeno para que seus erros (de natureza difusiva) afetassem pouco a solução que tal método fornece.

3 Análise das Restrições de Estabilidade

A seguir, um gráfico em escala logarítmica dos valores das restrições Δx e $\frac{\Delta x^2}{2\mathbb{P}e^{-1}+\Delta x}$ em função de $\mathbb{P}e$.



Indentifique a partir de qual valor de $\mathbb{P}e$, o valor de cada condição começa ser mais restritivo. Por que isso acontece e quais são as implicações disso no planejamento da escolha adequada de um método para resolver o problema diferencial?

Resposta: Para todo valor de $\mathbb{P}e$ sempre será o caso que

$$\frac{\Delta x^2}{2\mathbb{P}e^{-1} + \Delta x} < \Delta x.$$

Logo, de certa forma, considerar ambas as restrições é redundante. Pelo outro lado,

$$\lim_{\mathbb{P}e \to +\infty} \frac{\Delta x^2}{2\mathbb{P}e^{-1} + \Delta x} = \Delta x.$$

Portanto, a comparação entre essas restrições dá-nos uma boa noção da transição de um problema rígido, de difusão pura, quando $\mathbb{P}e \ll 1$ e, consequentemente, $\Delta t \approx \frac{\mathbb{P}e\Delta x^2}{2}$, um valor muito menor que Δx, mostrando como a escolha de métodos explícitos em tal condição é custosa, a um problema não-rígido, de advecção pura, quando $\mathbb{P}e \gg 1$ e, consequentemente, $\Delta t \approx \Delta x$, contexto no qual métodos explícitos são perfeitamente razoáveis.