# Trabalho #2 - Problemas de Valor inicial

## 1. Informações Preliminares

O estudo de sistemas oscilantes, como pêndulos simples e duplos, é essencial para a Física, pois fornece bases para compreender fenômenos complexos em áreas como mecânica clássica, eletromagnetismo e até mesmo física quântica. Esses sistemas, caracterizados por forças restauradoras dependentes da posição, exibem movimentos periódicos que servem como modelos simplificados para analisar dinâmicas não lineares, caos e estabilidade.

### 1.1 Pêndulo Simples

O pêndulo simples é um exemplo de oscilador harmônico simples quando sofre pequenos deslocamentos em relação a sua posição de equilíbrio. Considere um pêndulo simples composto por uma partícula de massa $m$ presa a uma haste rígida, inextensível e de massa desprezível, com comprimento $L$. O sistema oscila em um plano vertical, sujeito apenas à força gravitacional, e seu movimento é descrito pelo ângulo $\theta(t)$ formado entre a haste e a direção vertical no instante $t$, conforme ilustrado na Figura 1. Ao aplicar as Leis de Newton, desprezar forças dissipativas (como atrito e resistência do ar), e considerar comprimento e acelaração da gravidade convenientes, obtém-se a equação diferencial que rege o movimento do pêndulo, dada por:

$$q''(t) + \sin(q(t)) = 0. \tag{1}$$

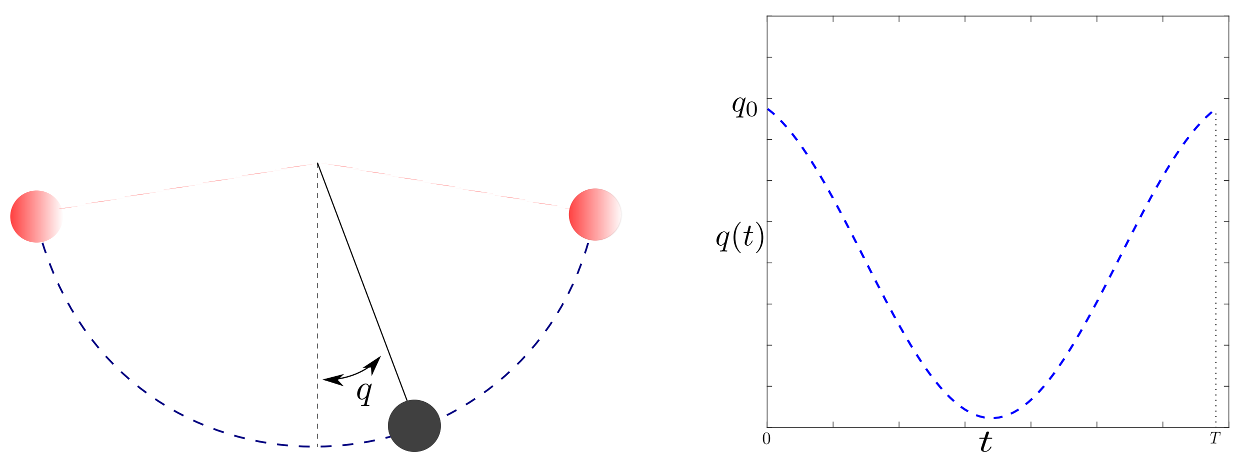


Figura 1: Representação geométrica do movimento periódico de um pêndulo como objeto (à esquerda); e como função periódica (à direita).

A equação diferencial de segunda ordem em (1) pode ser transformada em um sistema de equações diferenciais de primeira ordem pela substituição $q'(t) = p(t)$, conforme disposição apresentada em aula (Slide #5 sobre Problemas de Valor Inicial).

Sejam as condições iniciais

$$q(0) = q_0 \quad \text{e} \quad p(0) = q'(0) = 0,$$

onde o ângulo $q_0$ é a amplitude inicial da oscilação.

Uma solução para a equação (1), sob as condições iniciais dadas, pode ser expressa na forma:

$$q(t) = 2\arcsin\left\{\sin\left(\frac{q_0}{2}\right)\operatorname{sn}\left[K\left(\sin^2\left(\frac{q_0}{2}\right)\right) - t;\ \sin^2\left(\frac{q_0}{2}\right)\right]\right\}. \tag{2}$$

Desenvolvimento detalhado que resulta nessa solução está disponível em [1, 2]. Na equação (2), as expressões $\operatorname{sn}(\cdot\,;\,\cdot)$ e $K(\cdot)$ são, respectivamente, a função elíptica de Jacobi e a integral elíptica completa de primeira ordem. Em MATLAB/Octave e em Python, existem as correspondentes:

- $\operatorname{sn}(u;m)$: ellipj(u,m);
- $K(m)$: ellipke(m) (MATLAB) e ellipk(m) (Python).

Em anexo, seguem os arquivos "RefSolution.m"e "RefSolution.py"que podem ser usados para gerar soluções de referência. Como argumentos de entrada dessa função, basta informar um ângulo inicial $q_0$ (observe que essa solução analítica exige que $q'(0) = 0$ seja uma condição fixa) e um vetor de tempos, para obter como saídas os resultados $p(t)$ e $q(t)$.

### 1.2 Pêndulo Duplo

No pêndulo duplo, o movimento de cada pêndulo afeta diretamente o outro devido ao acoplamento entre eles. Essa interação altera as trajetórias individuais e permite a transferência de energia entre os dois sistemas. Neste novo sistema, ilustrado na Figura 2, as coordenadas de cada pêndulo podem ser definidas em termos dos ângulos conjugados $q_1$ e $q_2$, e das componentes cartesianas correspondentes $x_1$, $y_1$, $x_2$, e $y_2$. Tais componentes podem ser obtidas pelas equações:

$$x_1 = \sin(q_1), \qquad y_1 = -\cos(q_1) \tag{3}$$

$$x_2 = x_1 + \sin(q_2), \qquad y_2 = y_1 - \cos(q_2) \tag{4}$$

As equações de movimento, obtidas via formalismo lagrangiano, revelam um sistema acoplado não linear. De posse da formulação Lagrangiana, e utilizando unidades normalizadas ($m = L = g = 1$), o Hamiltoniano $H$ é derivado a partir dos momentos conjugados $p_1$ e $p_2$, associados a $q_1$ e $q_2$, na forma:

$$H = \frac{p_1^2 + 2p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos(q_1 - q_2)}{2\left[1 + \sin^2(q_1 - q_2)\right]} - 2\cos(q_1) - \cos(q_2).$$

A partir do Hamiltoniano $H$, obtemos as equações de movimento no espaço de fase:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

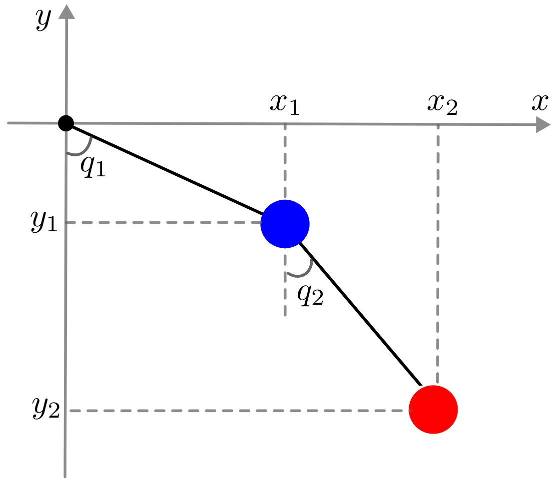


Figura 2: Representação geométrica do movimento periódico de um pêndulo duplo como objeto.

As equações de movimento tornam-se então:

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{p_1 - p_2\cos(q_1 - q_2)}{2 - \cos^2(q_1 - q_2)}, \tag{5}$$

$$\frac{dq_2}{dt} = \frac{2p_2 - p_1\cos(q_1 - q_2)}{2 - \cos^2(q_1 - q_2)}, \tag{6}$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -A_1 + A_2 - 2\sin q_1, \tag{7}$$

$$\frac{dp_2}{dt} = A_1 - A_2 - \sin q_2, \tag{8}$$

onde:

$$A_1 = \frac{p_1 p_2 \sin(q_1 - q_2)}{1 + \sin^2(q_1 - q_2)},$$

$$A_2 = \frac{[p_1^2 + 2p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos(q_1 - q_2)]\sin(q_1 - q_2)\cos(q_1 - q_2)}{[1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^2}.$$

Um desenvolvimento mais completo do estudo de um pêndulo duplo, incluindo exemplos e comparações, pode ser encontrado em [3].

# Referências


[1] A. Beléndez, C. Pascual, D. I. Méndez, T. Beléndez, and C. Neipp. Exact solution for the nonlinear pendulum. *Rev. Bras. Ensino Fís.*, 29(4):645–648, 2007.

[2] K. Johannessen. An analytical solution to the equation of motion for the damped nonlinear pendulum. *European Journal of Physics*, 35:035014 (13pp), 2014.

[3] S. R. Oliveira. Deterministic chaos: A pedagogical review of the double pendulum case. *Rev. Bras. Ensino Fís.*, 46, 2024.

## 2. Especificações sobre o trabalho

### 2.1 Tarefas

#### 2.1.1 Pêndulo Simples

Resolva o problema do pêndulo simples disposto na equação (1) como um sistema de duas EDO's de primeira ordem, tal como está definido no slide #5 sobre Problemas de Valor Inicial. Como valores iniciais, no tempo $t = 0$, considere que o pêndulo parte do repouso com $q_0 = \frac{\pi}{4}$.

Nesta etapa, você deverá:

1. implementar o método Euler explícito, o método clássico de Runge-Kutta de 4ª ordem e o método Euler implícito (resolvendo o sistema pelo método de Newton).
2. resolver o problema com todos os métodos implementados e produzir gráficos da posição angular com relação ao tempo (escolha um tempo final maior que 10 e menor do que 40 para gerar estes resultados);
3. fazer gráficos de ordem de convergência temporal para cada um dos métodos. Use a função de referência fornecida para computar os erros, e utilize pelo menos 5 malhas diferentes para capturar o comportamento assintótico do erro, e verificar se ele está tendendo a zero com a ordem esperada;
4. plotar um retrato de fase (velocidade angular $\times$ posição angular) para as soluções obtidas por cada um dos métodos implementados (utilize um valor para o tempo final que achar interessante). Um exemplo de retrato de fase pode ser observado na Figura 3.

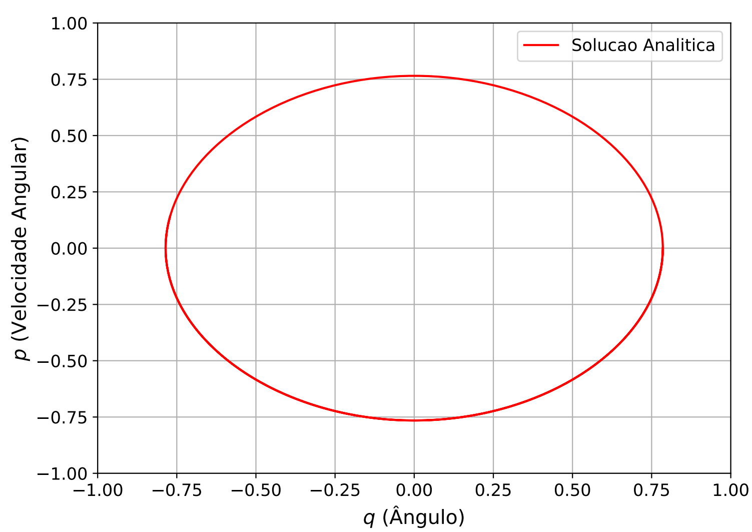


Figura 3: Retrato de fase construído a partir da solução de referência fornecida.

### 2.1.1 Pêndulo Duplo

Resolva o problema do pêndulo duplo a partir da formulação descrita para as equações dos movimentos e observe o comportamento caótico das trajetórias produzidas.

Nesta etapa, você deverá:

1. Resolver o sistema de EDO's de primeira ordem, constituído pelas equações (5) a (8), pelo método de Runge-Kutta de ordem 4.

2. Utilizar valores iniciais (em $t = 0$) que não descrevam uma posição de equilíbrio (os valores iniciais não podem ser simultaneamente nulos); isso pode ser realizado escolhendo-se $q_1(0)$ e $q_2(0)$ pertencentes ao intervalo aberto $(0, \pi)$. Apresente a trajetória do pêndulo que tem ângulo descrito por $q_2(t)$. Para produzir essa representação:

   (a) simule o sistema em um intervalo de tempo razoável (ex.: 0 a 50 segundos), com passo de tempo suficiente pequeno para garantir suavidade das curvas;

   (b) converta os ângulos para coordenadas cartesianas, conforme equações (3) e (4), para que a exibição ocorra em um plano $xy$;

   (c) apresente como resultado deste item, as trajetórias de $(x_2(t), y_2(t))$. Um exemplo do resultado esperado para este tipo de visualização, pode ser observado na Figura 4.

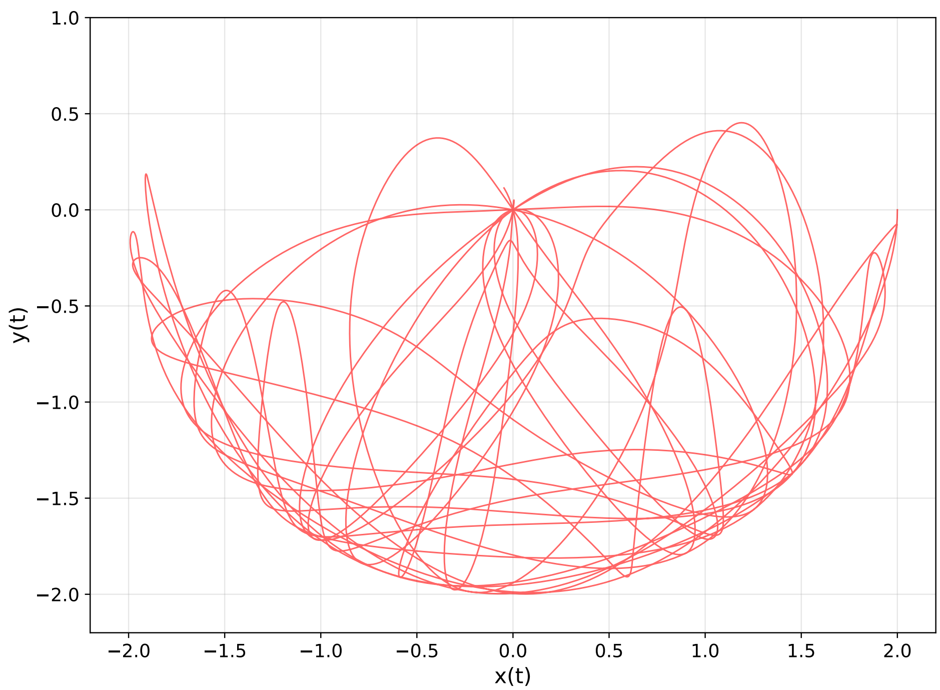


Figura 4: Exemplo de apresentação das trajetórias de um pêndulo.

3. Fazer dois experimentos:

   (a) No primeiro experimento, teste com condições inciais próximas do estado de equilíbro, ou seja, com valores menores de $q_1$ e $q_2$, e comente o que se observa para este tipo de caso;

   (b) No segundo experimento, escolha valores iniciais que produzem um comportamento caótico da trajetória dos pêndulos. Introduza uma pequena perturbação em alguma condição inicial (adicione um valor $10^{-2}$ em alguma delas, por exemplo) e compare os dois resultados testados neste experimento. Observe que, para condições iniciais parecidas, as trajetórias dos pêndulos podem ser bastante distintas; a animação em anexo é um exemplo disso.

Redigir um documento em PDF que contenha: breve relatório que inclua estratégias de implementação; os resultados solicitados com gráficos e comentários. Não se esqueça de se atentar à qualidade da escrita, à disposição do texto (justificado, com tipo e tamanho da fonte padronizados) e à legibilidade das imagens inseridas (lembre-se de incluir legendas caso haja mais de uma curva no mesmo plano). Inclua também, neste PDF, comentários que julgar necessários.