
Problemas de Valor Inicial

Trabalho 2

SME0202 Métodos Numéricos em Equações Diferenciais

Cody Stefano Barham Setti – 4856322

Ian de Holanda Cavalcanti Bezerra – 13835412

11 de Junho de 2025

0 PVI's, Soluções Numéricas e Caos

Neste trabalho, resolvemos numericamente dois problemas de valor inicial. O primeiro decorre da modelagem de um pêndulo simples, e, conforme nossa intuição, admite uma função periódica como solução. Já o segundo, que decorre da modelagem do pêndulo duplo, por mais que, à primeira vista, não aparente ser algo muito mais complicado que o pêndulo simples, admite, de forma geral, uma solução errática, nada periódica, muito mais complexa. Não só isso, como também pequenas perturbações neste segundo PVI levam a soluções completamente diferentes da original, um fenômeno matemático que leva o nome de 'caos'.

1 Pêndulo Simples

O primeiro PVI considerado foi

$$\begin{cases} q''(t) + \sin(q(t)) = 0, \\ q(0) = q_0, \\ q'(0) = 0. \end{cases}$$

O valor inicial $q'(0) = 0$ foi escolhido a fim de que a EDO assumisse a solução analítica

$$q(t) = 2 \arcsin \left\{ \sin \left(\frac{q_0}{2} \right) \operatorname{sn} \left[K \left(\sin^2 \left(\frac{q_0}{2} \right) \right) - t; \sin^2 \left(\frac{q_0}{2} \right) \right] \right\},$$

onde $\operatorname{sn}(\cdot; \cdot)$ é a função elíptica de Jacobi e $K(\cdot)$ a integral elíptica completa de primeira ordem. Tal solução analítica foi uma referência muito conveniente para estudar a consistência dos métodos numéricos utilizados.

Por falar-se nos métodos numéricos, a EDO em sua forma apresentada, uma EDO de segunda ordem, não é compatível com eles. Antes de aplicá-los, a EDO deve ser convertida a um sistema equivalente de EDOs de primeira ordem: se definirmos $u_1(t) := q(t)$ e $u_2(t) := q'(t)$, então, teremos o sistema equivalente

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} u_2(t) \\ \sin(u_1(t)) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad \text{ou, de forma mais enxuta,} \quad \begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{u}(0) = \boldsymbol{\eta} \end{cases}$$

Note que este sistema é autônomo, isto é, \mathbf{f} não depende diretamente de t . De toda forma, agora sim estamos em condições de aplicar nossos métodos numéricos.

1.1 Métodos Numéricos

Foram implementados três métodos numéricos para resolver o sistema de EDOs de primeira ordem equivalentes ao PVI do pêndulo simples:

- **Euler Explícito:** um método de passo único, explícito e de ordem de convergência 1;
- **RK4 Clássico:** um método tipo Runge-Kutta de 4 estágios, cuja tabela de Butcher é dada abaixo

0	0			
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0		
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	
1	0	0	1	0
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

- **Euler Implícito:** um método muito similar ao ‘Euler Explícito’, entretanto, implícito, e, portanto, de estabilidade superior. Vale ressaltar que o método de Newton para resolução de sistemas não lineares foi utilizado de forma auxiliar.

Vide o arquivo `codigo-T2-MNED.ipynb` para os detalhes de nossa implementação de cada método.

1.2 Resolução Numérica do Pêndulo Simples

Vê-se no gráfico abaixo a evolução temporal fornecida por cada método para a posição angular $q(t)$ do pêndulo simples. Elegemos $q_0 = \frac{\pi}{4}$ rad, um tempo final de 26 s e uma discretização temporal $h = 0.01$ s.

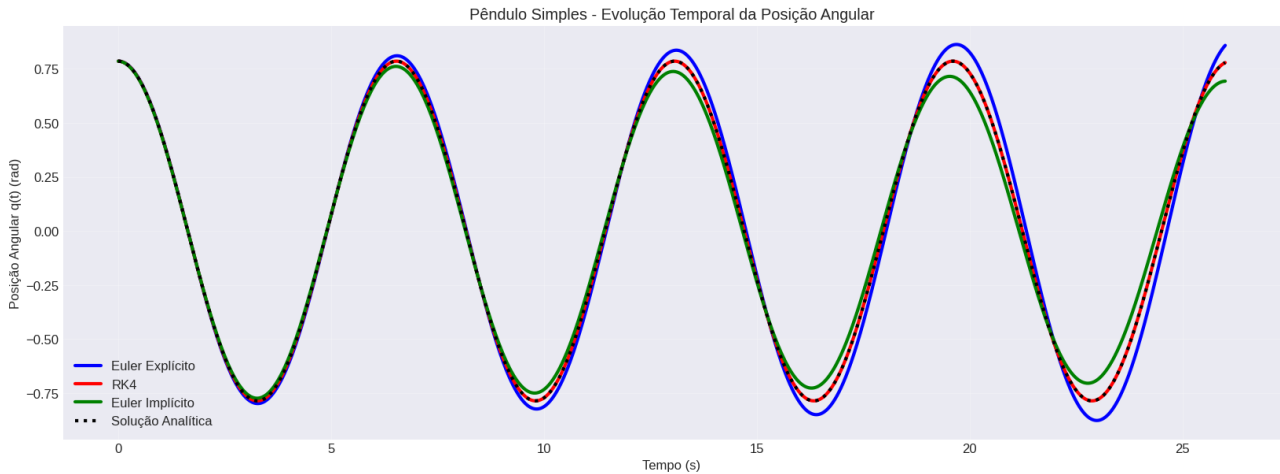


Figura 1: Evolução temporal de $q(t)$ conforme cada método

Como esperado, a solução fornecida pelo método RK4 – em vermelho – de ordem de convergência esperada 4, assemelha-se muito mais à solução de referência do que as fornecidas pelos métodos ‘Euler Explícito’ – em azul – e ‘Euler Implícito’ – em verde – ambos de ordem esperada 1. A discrepância entre soluções é mais saliente nos tempos mais avançados, onde o acúmulo de erros é maior.

1.3 Ordem de Convergência

Abaixo, na figura da esquerda, temos um gráfico clássico de análise de ordem de convergência, onde o eixo x representa o tamanho de passo temporal e o eixo y o erro cometido, ambos em escala logarítmica. Calcular o erro cometido da aplicação destes métodos ao sistema do pêndulo simples foi fácil, já que temos em mãos a solução analítica: o erro foi tomado como sendo a distância máxima entre o valor da solução numérica e da exata em cada ponto da malha (a métrica induzida pela norma infinito para funções limitadas) durante um intervalo de 10 s, ao invés do original de 26 s.

Por sua vez, na figura da direita, temos a ordem de convergência observada na transição entre malhas consecutivas. Dito de forma mais detalhada, dado duas malhas consecutivas, a mais grosseira de tamanho de passo h_1 e erro e_1 e a mais refinada de passo h_2 e erro e_2 , a ordem de convergência observada na passagem da malha 1 para a malha 2 é $p_{\text{obs.}} = \log\left(\frac{e_1}{e_2}\right) / \log\left(\frac{h_1}{h_2}\right)$.

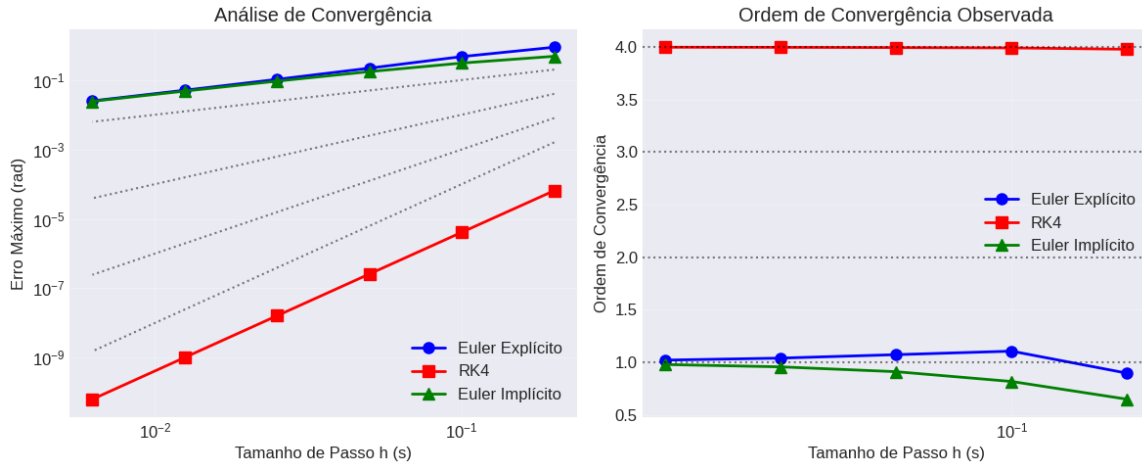


Figura 2: Erro máximo em função do passo de tempo para cada método.

Como esperado, a ordem de convergência encontrada para os métodos ‘Euler Explícito’ e ‘Euler Implícito’ foi aproximadamente 1, e, para o método RK4, aproximadamente 4.

1.4 Retrato de Fase

A seguir, o retrato de fase de cada método, considerando-se um intervalo de 50 s.

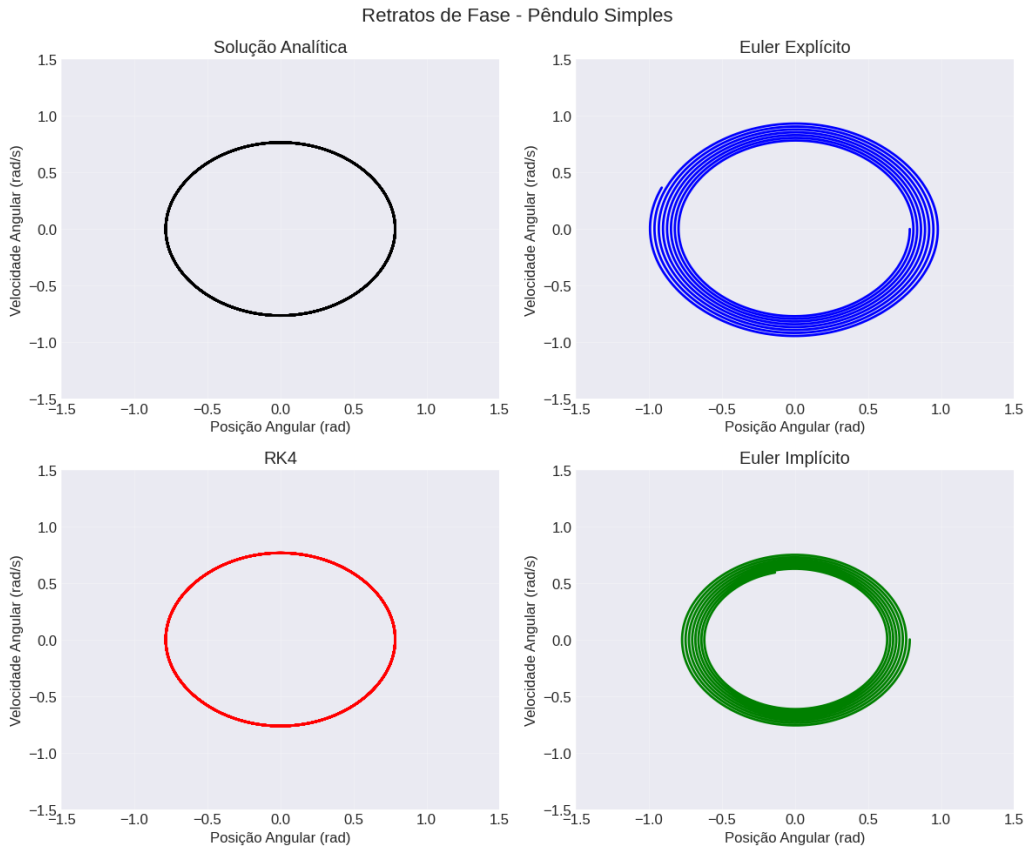


Figura 3: Retrato de fase (q, p) para cada método numérico.

Os métodos numéricos implementados produziram retratos de fase coerentes com a teoria. O RK4, ao menos na escala acima, possui retrato muito similar ao fornecido pela solução de referência. No entanto, o ‘Euler Explícito’, notório por sua baixa precisão, mostra um aumento progressivo na energia do sistema, ao passo que o ‘Euler Implícito’ mostra uma perda progressiva de energia, ambos fisicamente incondizentes com o pêndulo simples, um sistema sabidamente conservativo.

2 Pêndulo Duplo

O segundo PVI considerado, que advém da modelagem de um pêndulo duplo (com unidades normalizadas $m = L = g = 1$), foi o seguinte

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \frac{u_3 - u_4 \cos(u_1 - u_2)}{2 - \cos^2(u_1 - u_2)} \\ \frac{2u_4 - u_3 \cos(u_1 - u_2)}{2 - \cos^2(u_1 - u_2)} \\ -A_1 + A_2 - 2 \sin(u_1) \\ A_1 - A_2 - \sin(u_2) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \boldsymbol{\eta},$$

onde $A_1 := \frac{u_3 u_4 \sin(u_1 - u_2)}{1 + \sin^2(u_1 - u_2)}$ e $A_2 := \frac{[u_3^2 + 2u_4^2 - 2u_3 u_4 \cos(u_1 - u_2)] \sin(u_1 - u_2) \cos(u_1 - u_2)}{[1 + \sin^2(u_1 - u_2)]^2}$.

2.1 Resolução Via RK4

Vide o arquivo `relatorio-T2-MNED.ipynb` para a resolução do PVI fornecido pelo pêndulo duplo via o método RK4. Vale ressaltar que o tamanho de passo escolhido na discretização foi $h = 0.005$ s e o estado inicial escolhido para o sistema foi $\boldsymbol{\eta} = \left[\frac{2\pi}{3} \frac{\pi}{4} 0 0\right]^t$.

Ademais, o `solver rk4()` implementado para a tarefa 1.2 foi reaproveitado. Apenas mudamos o valor inicial fornecido a ele e a função $\mathbf{f}(\mathbf{u}(t), t)$, que agora é correspondente ao sistema de pêndulo duplo, não ao de pêndulo simples.

2.2 Evolução Temporal do Pêndulo Duplo

O método RK4, dada a condição inicial descrita acima, forneceu o seguinte trajeto para o segundo pêndulo, durante o intervalo $[0 \text{ s}, 150 \text{ s}]$:

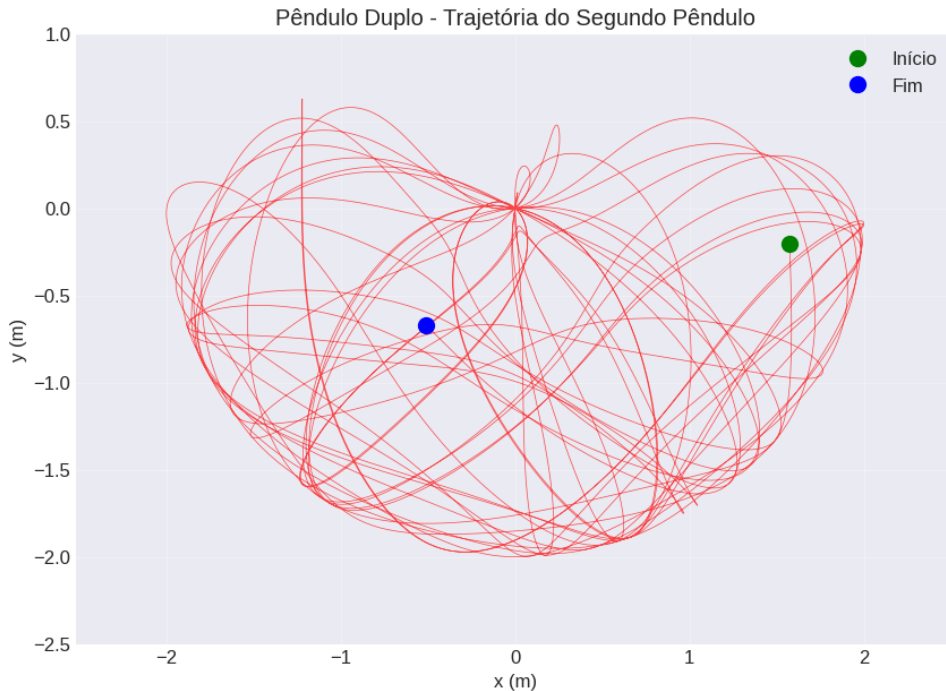


Figura 4: Trajetória $(x_2(t), y_2(t))$ do segundo pêndulo para condições iniciais $\boldsymbol{\eta}$

3 Experimentos com o Pêndulo Duplo

3.1 Comportamento do Pêndulo Conforme Sua Proximidade ao Equilíbrio

Para o primeiro experimento, alteramos o estado inicial do sistema para

$$\boldsymbol{\eta}' = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

um estado bem mais próximo do equilíbrio, e recalculamos a trajetória do segundo pêndulo. Agora, como vê-se na figura abaixo, da esquerda, sua trajetória é quase periódica, em contraste à trajetória anterior, apresentada novamente, na figura da direita.

Vale ressaltar que o eixo x dos gráficos está em escalas muito dísparas.

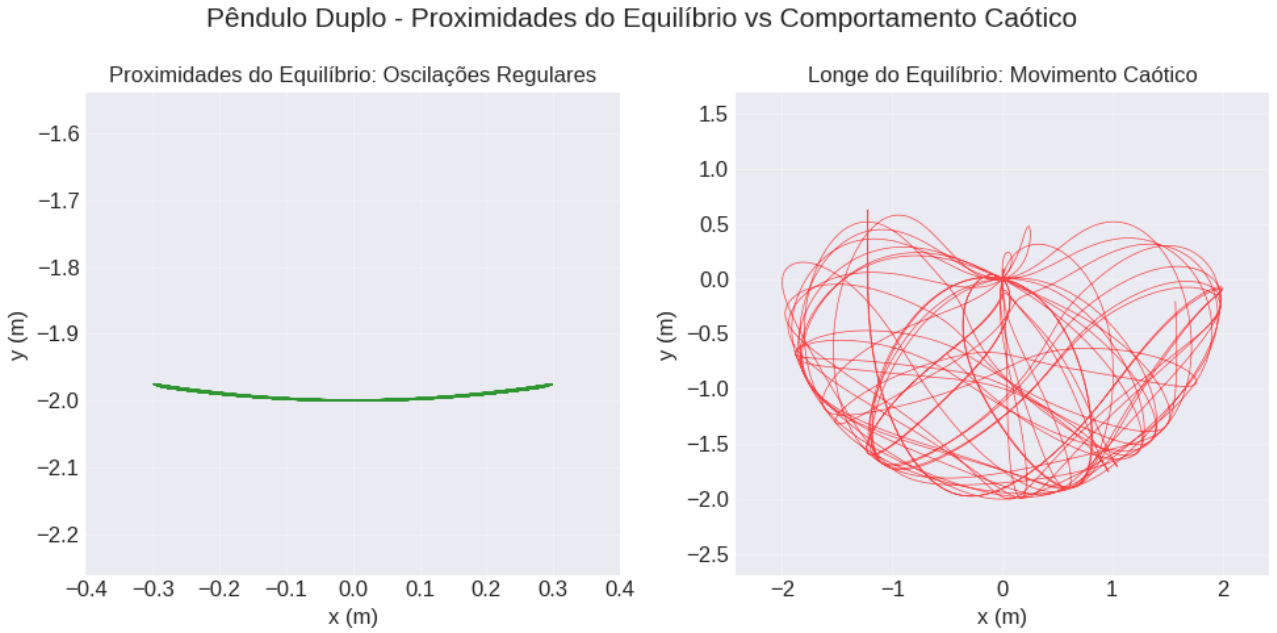


Figura 5: Trajetória do segundo pêndulo próximo (esq.) e longe (dir.) da condição de equilíbrio

3.2 Perturbações ao Pêndulo Duplo e Comportamento Caótico

Para concluir o trabalho, fizemos mais o seguinte experimento: perturbamos sutilmente a condição inicial longe do equilíbrio, $\boldsymbol{\eta}$, resultando na nova condição inicial

$$\boldsymbol{\eta}_{\text{pert.}} = \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} \frac{2\pi}{3} \\ \frac{\pi}{4} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.001 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Então, comparamos as trajetórias do segundo pêndulo em cada configuração. Como vê-se na figura abaixo, por mais que a perturbação é minúscula, a trajetória do sistema perturbado rapidamente diverge da trajetória do sistema original.

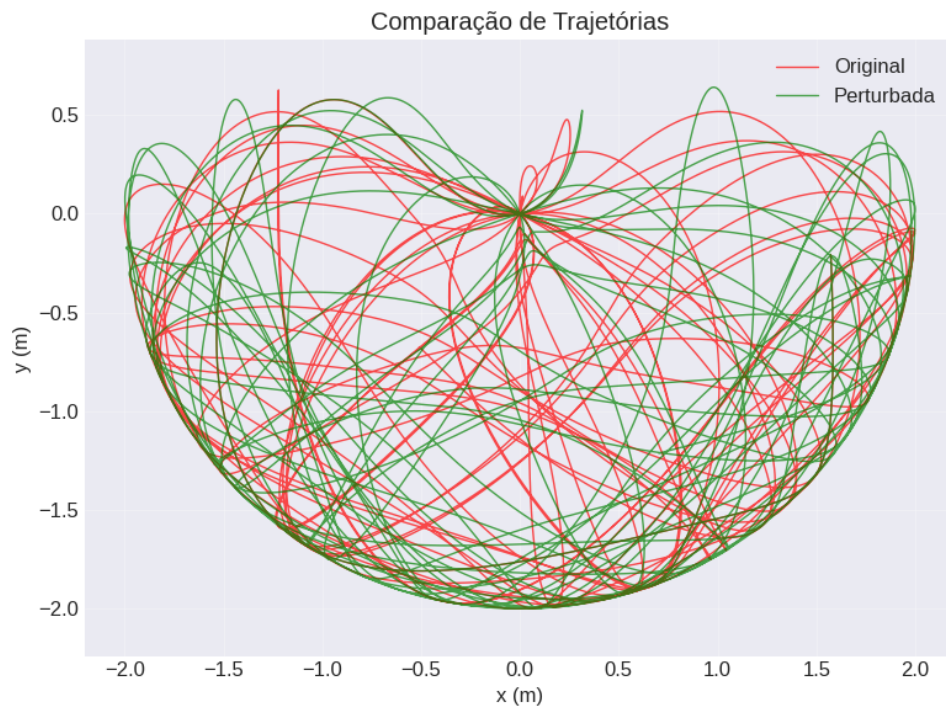


Figura 6: Trajetória do segundo pêndulo na configuração original e na perturbada

É possível demonstrar que, mesmo para perturbações infinitesimais, este padrão, de trajetórias completamente discrepantes, permanecerá. Um sistema dinâmico com tal propriedade, leva o nome de 'sistema caótico'. O pêndulo duplo é um sistema caótico.