
Equações Elípticas

Trabalho 1

SME0202 Métodos Numéricos em Equações Diferenciais

Cody Stefano Barham Setti – 4856322

Ian de Holanda Cavalcanti Bezerra – 13835412

25 de Abril de 2025

0 PVC de Interesse

Para o domínio retangular $\Omega = [0, 1] \times [-1, 1]$, queremos resolver a seguinte equação de convecção-difusão anisotrópica em regime estacionário:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = c \frac{\partial u}{\partial y}.$$

com condição de Dirichlet $u(0, y) = u(1, y) = 0$ em seus bordos verticais, de Robin no bordo superior e de Neumann no inferior, conforme a figura abaixo.

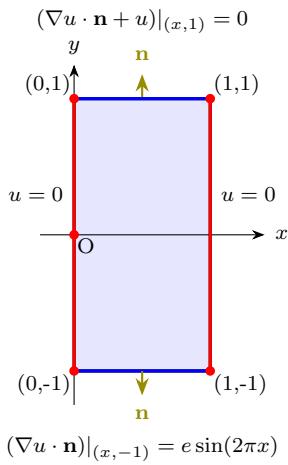


Figura 1: Domínio $\Omega = [0, 1] \times [-1, 1]$ com suas condições de contorno

Para $c = 4\pi^2 - 3$, tal problema de valor de contorno (PVC) possui solução analítica

$$u(x, y) = e^{-y} \sin(2\pi x).$$

Entretanto, elaboraremos um esquema para solucioná-la numericamente.

1 Solução Numérica e Seu Gráfico

1.1 Discretização do Domínio (Geração da Malha)

Primeiramente, para discretizar o domínio, utilizaremos uma malha uniforme, com espaçamento h em ambas as direções. Logo, o eixo-x do domínio torna-se o conjunto discreto $\{0, h, 2h, \dots, 1-h, 1\}$,

de $N_x = \frac{1}{h} + 1$ pontos, e o eixo-y torna-se o conjunto discreto $\{-1, -1+h, -1+2h, \dots, 1-h, 1\}$, de $N_y = \frac{1-(-1)}{h} + 1 = \frac{2}{h} + 1$ pontos. Portanto, no total, o domínio será composto de $N_x \times N_y$ pontos.

Todavia, vale salientar que, como as laterais do domínio são de Dirichlet, por mais que a malha terá $N_x \times N_y$ pontos, teremos apenas $N := (N_x - 2) \times N_y$ incógnitas.

1.2 Discretização do PVC (Construção do Sistema Linear)

Agora que esta clara a disposição dos pontos da malha (e quais deles são incógnitas), está claro que transformaremos nosso PVC em um sistema linear de dimensões

$$A_{N \times N} U_{N \times 1} = F_{N \times 1},$$

lembrando que $N := (N_x - 2) \times N_y$.

1.2.1 Pontos Interiores

Primeiramente, para os pontos interiores de nosso domínio, a partir de um estêncil de 5 pontos em formato de cruz, temos uma discretização conveniente para a EDP, que nos produz, para cada ponto interior, uma respectiva equação linear.

Mais precisamente, já que queremos uma precisão de ordem 2, aproximaremos as derivadas segundas por uma diferença centrada de 3 pontos, ao passo que, para a derivada primeira, basta uma diferença centrada de 2 pontos. Logo, teremos as equações lineares:

$$\frac{U_{i+1j} - 2U_{ij} + U_{i-1j}}{h^2} + 3 \left(\frac{U_{ij+1} - 2U_{ij} + U_{ij-1}}{h^2} \right) = c \left(\frac{U_{ij+1} - U_{ij-1}}{2h} \right).$$

Logo, isolando as incógnitas do lado esquerdo da equação,

$$\left(\frac{3}{h^2} + \frac{c}{h} \right) U_{ij-1} + \left[U_{i-1j} - \frac{8}{h^2} U_{ij} + \frac{1}{h^2} U_{i+1j} \right] + \left(\frac{3}{h^2} - \frac{c}{2h} \right) U_{ij+1} = 0.$$

Vale salientar duas coisas:

1. Para os pontos interiores da forma $(i, 1)$ e $(i, N_y - 1)$, haverão índices que passam dos limites de indexação das incógnitas. Entende-se que, para tais pontos, os termos de índices fora de escopo devem ser tomados como sendo nulos, o que corresponde às condições de contorno de Dirichlet $u(x, -1) = u(x, 1) = 0$.
2. Ademais, os índices da forma bidimensional (i, j) são utilizados apenas por conveniência, já que remetem claramente ao formato do domínio. Entretanto, para a montagem do sistema linear, eles são, na realidade, reindexados com um único índice k , seguindo a ordem natural de ordenação da malha, isto é, dados i, j , o respectivo k terá valor $k = (i - 1)N_y + j$.

1.2.2 Bordo Superior

Os pontos da malha no bordo superior, isto é, da forma (i, N_y) , também têm valor desconhecido. Determinamo-nos por meio da condição de Robin

$$(\nabla u \cdot \mathbf{n} + u) |_{(x, 1)} = 0, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Isto é,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + u = 0, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Ou, mais simplesmente,

$$\frac{\partial u}{\partial y} + u = 0, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Portanto, novamente, para obter convergência de ordem 2, discretizaremos tal ED por uma diferença **progressiva** para $\frac{\partial u}{\partial y}$ utilizando 3 pontos:

$$\frac{3U_{ij} - 4U_{ij+1} + U_{ij+2}}{2h} + U_{ij} = 0.$$

Reorganizando os índices em ordem crescente,

$$\left(\frac{3}{2h} + 1\right)U_{ij} - \frac{4}{2h}U_{ij+1} + \frac{1}{2h}U_{ij+2} = 0.$$

1.2.3 Bordo Inferior

Os pontos da malha no bordo inferior, aqueles da forma $(i, 1)$, por fim, também têm valor desconhecido. Determinemo-nos pela condição de Neumann

$$(\nabla u \cdot \mathbf{n})|_{(x,-1)} = e \sin(2\pi x), \quad \forall x \in [0, 1].$$

Isto é,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = e \sin(2\pi x), \quad \forall x \in [0, 1].$$

Ou, mais simplesmente,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e \sin(2\pi x), \quad \forall x \in [0, 1].$$

Portanto, novamente, para obter convergência de ordem 2, discretizaremos tal ED por uma diferença **regressiva** para $\frac{\partial u}{\partial y}$ utilizando 3 pontos:

$$\frac{3U_{ij} - 4U_{ij-1} + U_{ij-2}}{2h} = -e \sin(2\pi x_{ij}).$$

Reorganizando os índices em ordem crescente,

$$\frac{1}{2h}U_{ij-2} - \frac{4}{2h}U_{ij-1} + \frac{3}{2h}U_{ij} = -e \sin(2\pi x_{ij}).$$

Vale salientar que apenas para esses pontos as respectivas componentes do termo independente são não nulas, assumindo o valor $-e \sin(2\pi x_{ij})$.

1.3 Gráfico da Solução Numérica

Com a discretização descrita acima, tomando-se um passo $h = 0.01$, chegamos na solução numérica mostrada na figura a seguir:

Solução Numérica ($h=0.01$)

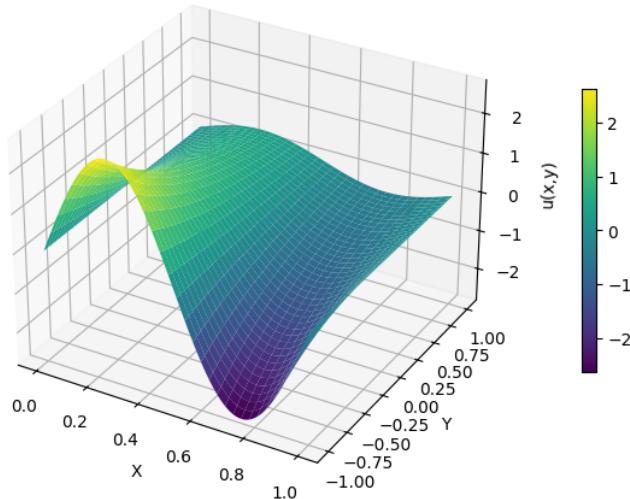


Figura 2:

2 Solução Exata e Análise dos Erros na Aproximação

2.1 Gráfico da Solução Exata

Avaliando-se os valores exatos da função-solução do PVC nos mesmos pontos do domínio utilizados para construir-se a malha da solução numérica, obtemos a figura a seguir:

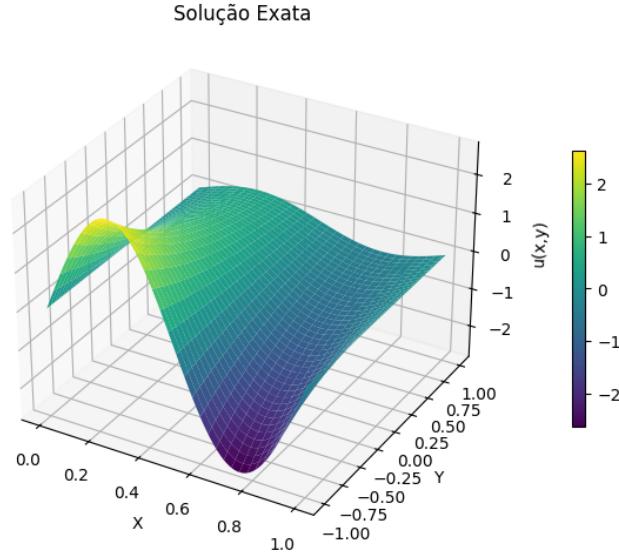


Figura 3:

2.2 Análise dos Erros na Aproximação

Agora, com tanto a solução numérica, quanto a exata em mãos, basta calcularmos a diferença absoluta entre seus valores em cada ponto da malha que sai de imediato o *heat-map* abaixo, identificando as regiões do domínio onde a aproximação é mais e menos fidedigna:

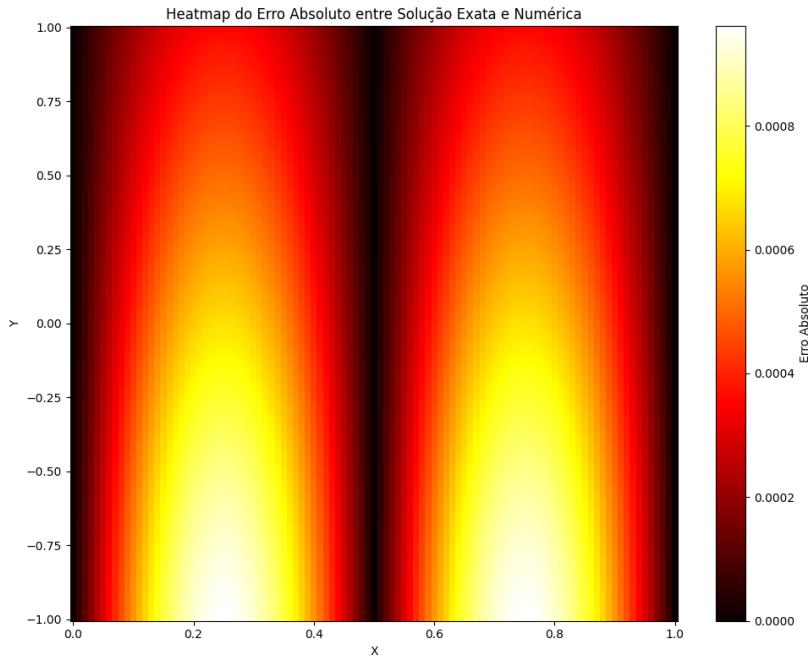


Figura 4:

Claramente, a região de maior erro é onde a temperatura da chapa varia mais violentamente. Isso é natural de se esperar, pois os valores da função nessa região é maior, com isso é natural esperar

que o erro absoluto aumente, hipotetizamos que o erro relativo seja similar em todo o domínio.

Ademais, fizemos um gráfico do erro (com sinal, não valor absoluto) no mesmo formato tridimensional dos das soluções numérica e exata, apenas para tornar ainda mais fácil a localização das regiões do domínio onde um erro maior é cometido na aproximação. Vide-o abaixo:

Erro com sinal para $h=0.01$

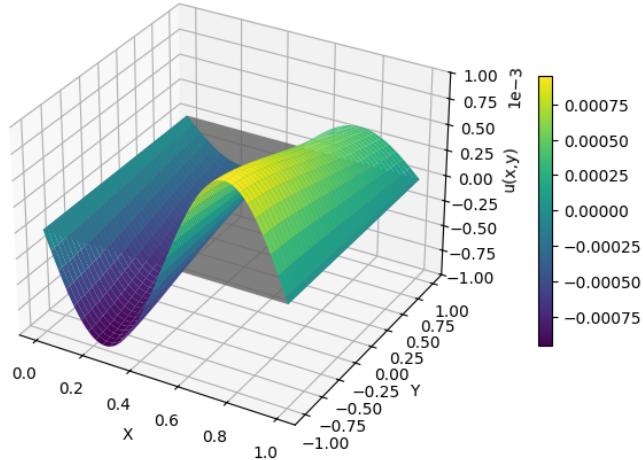


Figura 5:

Por curiosidade notamos também que na região côncava do domínio o erro com sinal é negativo e na região convexa o erro com sinal é positivo.

3 Análise de Convergência

Por fim, analisemos o erro global cometido para diferentes valores de espaçamento h , cada vez menores.

No caso, por erro global, já que temos a solução exata em mãos, entendemo-lo como sendo a média aritmética dos erros em cada ponto da malha (erros locais).

O decaimento do erro global é mostrado no gráfico abaixo:

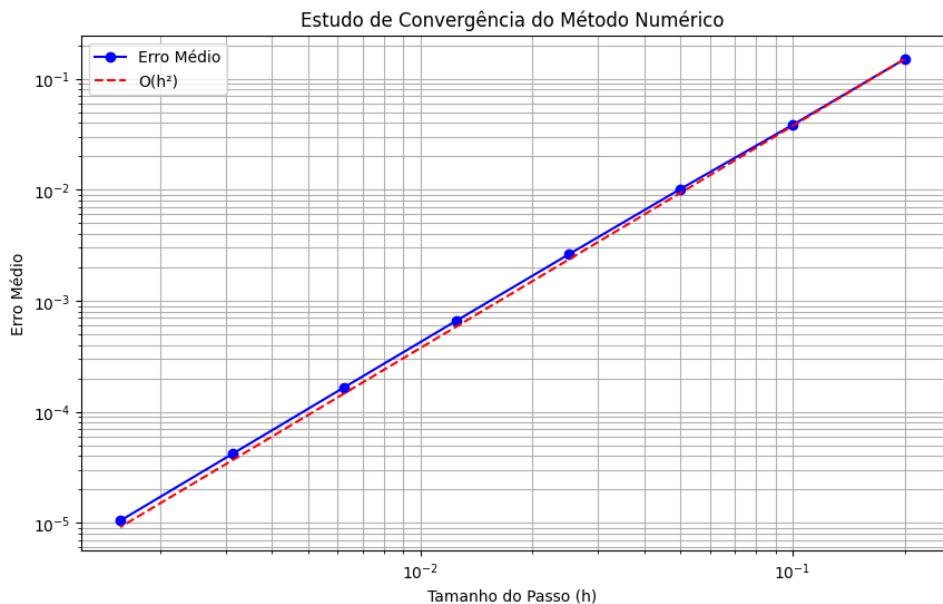


Figura 6:

Como esperado, a convergência à solução exata é praticamente de ordem 2.