Trabalho #3 - Equações Parabólicas e Hiperbólicas

1. Conhecimentos Preliminares

A modelagem precisa da interação entre processos advectivos e difusivos é um dos desafios mais comuns e complexos na aproximação numérica de equações diferenciais parciais. Isso se deve à frequência e diversidade desses problemas, além de sua estreita ligação com questões de perturbação singular e com a teoria da camada limite. Outro motivo é que os algoritmos e técnicas numéricas aplicados à sua análise diferem significativamente nos casos de equações parabólicas e hiperbólicas.

Considere u uma propriedade material, como calor, entalpia ou de concentração de uma solução. Assuma que u é conservada e pode mudar apenas através de trocas entre partículas materiais ou por fontes externas. Por meio de suposições que simplificam o problema, com base na Lei de Conservação para u, e considerando a Lei de Fick (ou Lei de Fourier se u é temperatura), pode-se escrever a relação:

$$u_t + a u_x = \kappa u_{xx} + f, \tag{1}$$

onde $\kappa > 0$ é o coeficiente de difusão, f é o termo fonte, e a é a velocidade.

A equação (1) é conhecida como equação unidimensional de advecção-difusão. O lado esquerdo representa o transporte de u na direção horizontal. Por outro lado, o primeiro termo do lado direito representa o transporte por difusão. O balanço entre advecção e difusão é caracterizado pelo número de Péclet, $\mathbb{P}e$, definido por

$$\mathbb{P}e = \frac{|a|L}{\kappa},$$

onde L representa o comprimento característico. Para $\mathbb{P}e \gg 1$ a advecção será dominante, e caso $\mathbb{P}e \ll 1$ a difusão será dominante. Com a introdução de variáveis adimensionais que levam ao surgimento de $\mathbb{P}e$, e considerando o termo fonte nulo, a equação (1) pode ser escrita na forma:

$$u_t + u_x = \frac{1}{\mathbb{P}e} u_{xx}.$$

A equação (1) é parabólica; se $\kappa = 0$ ela será hiperbólica; caso $0 < \kappa \ll 1$, isto é, se $\mathbb{P}e \gg 1$, aspectos hiperbólicos emergem. Informações adicionais e desenvolvimentos detalhados podem ser encontrados em [1, 2]. Este tipo de equação ocorre com frequência em simulação de escoamentos transiente em dutos, na difusão de quantidade de movimento, energia ou vorticidade, por exemplo.

Referências

[1] K. W. Morton. *Numerical Solution of Convection-Diffusion Problems*. Oxford University Computing Laboratory, Oxford , UK, 1996.

[2] P. Wesseling. *Principles of Computacional Fluid Dynamics*. Springer, 2001.

2. Especificações sobre o trabalho

2.1 Tarefas

Para facilitar as análises, a equação pode ser trabalhada na sua forma adimensional

$$u_t + u_x = \frac{1}{\mathbb{P}e} u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq 15, \tag{2}$$

com condições de contorno periódicas, para $0 \leq t \leq 12$ e com condição inicial:

$$u(x,0) = \exp(-20(x-2)^2) + \exp(-(x-5)^2).$$

Para atender aos requisitos desta atividade, você deverá:

1. Discretizar o problema dado por (2) aplicando diferenças progressivas no tempo e centradas no espaço, e implementar o método resultante com Δx pequeno o suficiente para que a curva tenha aspecto suave e espaçamento temporal que satisfaça $\Delta t < \min\left\{\frac{\Delta x^2}{2\mathbb{P}e^{-1} + \Delta x}, \Delta x\right\}$, considerando três casos distintos:

   $$\text{(I) } \mathbb{P}e \ll 1, \qquad \text{(II) } \mathbb{P}e = 1, \qquad \text{(III) } \mathbb{P}e \gg 1.$$

   Construa gráficos tridimensionais que relacione as variáveis u, t e x em cada uma das três situações. Um exemplo da configuração deste gráfico pode ser observado na Figura 1.

   Sugestões: Para o caso (I), com a finalidade de poupar tempo de execução, é interessante considerar $\mathbb{P}e$ na ordem de 10^{-1} (exemplos: 0.1, 0.15, 0.23). Para o caso (III), $\mathbb{P}e$ pode ser tomado na ordem de dezenas, centenas ou até milhares.

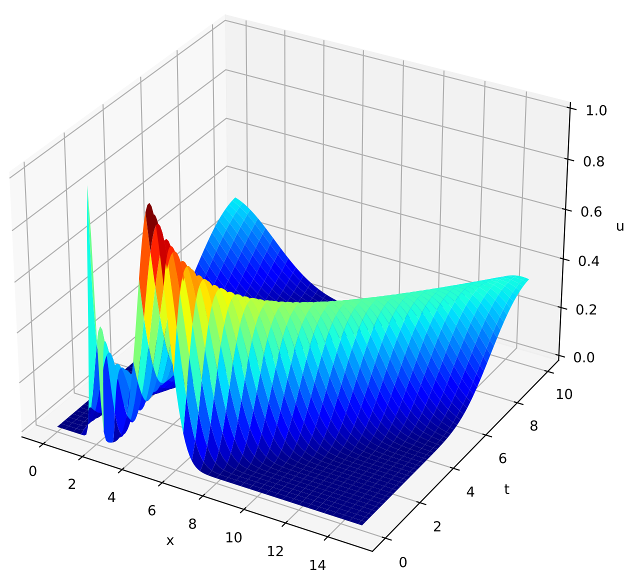

Figura 1: Exemplo gráfico tridimensional para um valor $\mathbb{P}e > 1$.

2. Discretizar o mesmo problema, mas agora aplicando diferenças progressivas no tempo, centradas no espaço para as derivadas de segunda ordem $\mathbb{P}e^{-1}u_{xx}$, e estratégia Upwind de primeira ordem para o termo advectivo u_x, implementando o método resultante.

    (a) Estude o que acontece com ambas discretizações quando o número de Péclet é muito grande (equação se aproxima de uma equação de advecção linear) ou muito pequeno (equação se aproxima de uma equação de difusão). O que acontece com o método centrado quando $\mathbb{P}e$ é da ordem de centenas? Acontece o mesmo com o método Upwind? Teste mais de um valor de $\mathbb{P}e$ nessa faixa. Caso haja diferença, explique o motivo.

    (b) Inclua também um gráfico para cada caso que apresente u como função de x em 6 tempos distintos (incluindo a condição inicial), igualmente espaçados, nos quais seja possível observar nítida mudança no comportamento da solução. Um exemplo de gráficos esperados para esse estudo está disposto na Figura 2. Utilize os mesmos tempos em todos os resultados apresentados.

        Comente as diferenças observadas, e explique porque as mudanças nas soluções ocorrem da forma que foram apresentadas.

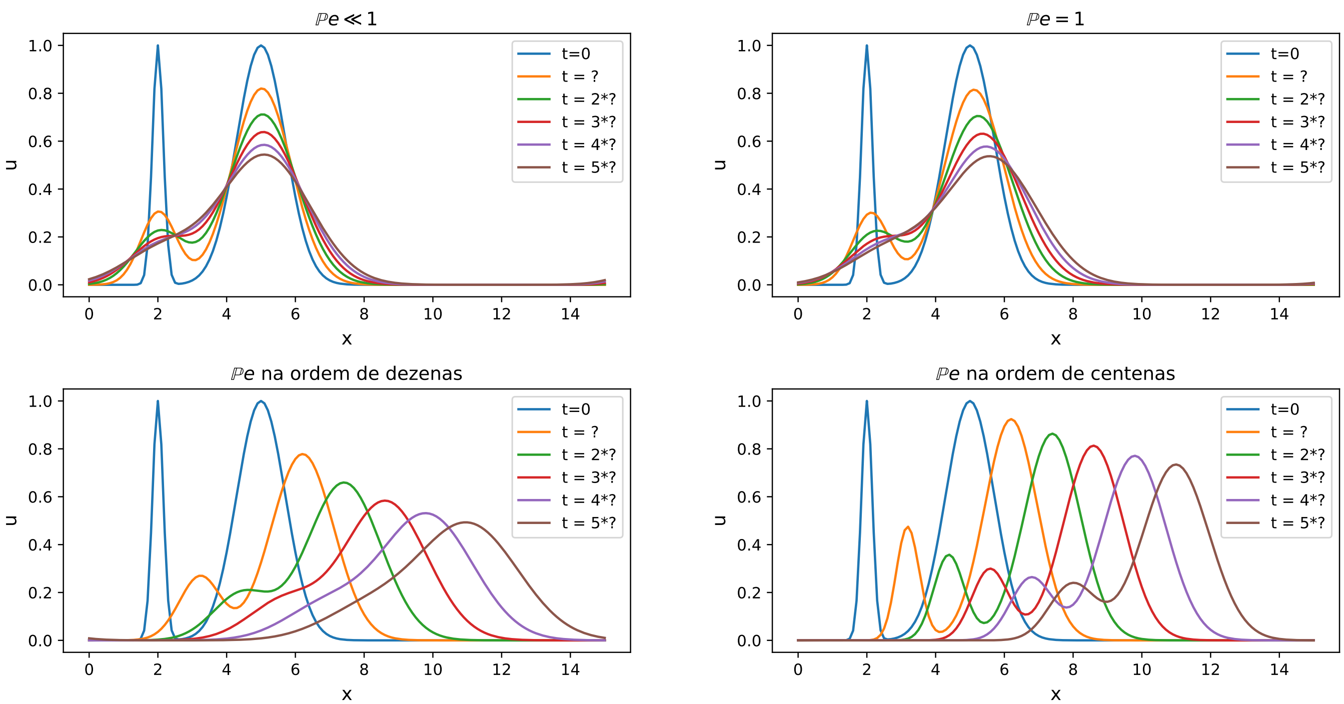

Figura 2: Exemplo gráfico que ilustra variação obtida para diferentes tempos, considerando diferentes valores de $\mathbb{P}e$.

3. Considerando a restrição $\Delta t < \min\left\{\frac{\Delta x^2}{2\mathbb{P}e^{-1}+\Delta x}, \Delta x\right\}$ imposta no primeiro item do trabalho, construa um gráfico simples, em escala logarítmica, dos valores das restrições apresentadas entre chaves com relação aos número de $\mathbb{P}e$. Identifique a partir de qual valor de $\mathbb{P}e$, o valor de cada condição começa a ser mais restritiva. Por que isso acontece e quais são as implicações disso no planejamento da escolha adequada de um método para resolver o problema diferencial? **Sugestão:** Use as condições de estabilidade estudadas para te ajudar a responder a essa pergunta.

Redija um documento em PDF que contenha: breve relatório que inclua estratégias de implementação; os resultados solicitados com gráficos e comentários. Não se esqueça de se atentar à qualidade da escrita, à disposição do texto (justificado, com tipo e tamanho da fonte padronizados) e à legibilidade das imagens inseridas (lembre-se de incluir legendas caso haja mais de uma curva no mesmo plano). Inclua também, neste PDF, comentários que julgar necessários.

Bom trabalho!