可解格子模型の分配関数と対称多項式

茂木康平　(東京海洋大学　海洋工学部)*

概　要

近年、可解格子模型の分配関数と対称多項式の対応に基づく、対称多項式の組合せ論的表現論の研究が発展している。本稿ではまず、代表的な可解格子模型である6頂点模型の波動関数と対称多項式の対応及び、5頂点模型への退化について議論する。また、この対応に基づくGrothendieck多項式のCauchy公式、Littlewood公式などの量子逆散乱法による導出について述べる。最後にボソン模型やFelderhof模型に関する話題について触れる。

1. はじめに

1次元量子可積分系は量子力学の誕生間もない頃の1931年、Bethe [1]によって行われたHeisenberg XXX模型の導入と、現在では座標Bethe仮設法と呼ばれる手法による波動関数の構成に起源を発する。その後、2次元可解格子模型との対応や、量子逆散乱法(代数的Bethe仮設法)[2, 3, 4, 5]により、R行列(局所Boltzmann重率) が最も基本的な構成要素であることが認識されるようになり、その後の量子群の表現論の誕生、発展の礎となった[6, 7]。

R行列が最も基本的な構成要素であるのは確かであるが(近年の四面体方程式の研究[8, 9, 10, 11]もあり、そうとも言い切れないかもしれないが)、一方で、量子可積分系や可解格子模型は元々、「解ける」多体系として導入された統計物理的対象である。統計物理や場の理論における最も重要な研究対象は分配関数であり、近年の数理物理の進展においても最も重要な役割を果たしている。可解格子模型の分野でも、1980年代には無限系の基底状態の分配関数とアフィンリー環の指標との対応[12, 13]、1990年代にはドメイン壁分配関数と呼ばれるクラスの分配関数から交代符号行列の数え上げ母関数が導出されることが見出された[14, 15, 16, 17, 18, 19]。また、古典可積分系のτ関数との関係[20, 21, 22, 23] も見出されているが、分配関数の持つ数学的意味はまだ汲み尽くされていないように思われる。

その最も大きな理由は分配関数が大域的対象であり、計算が煩わしくて解析が困難、組合せ論、表現論の対象との関係が仮に予想できたとしてもその証明の糸口が全く見えなさそうだ、ということにあると思われるが近年、量子可積分系や量子情報理論の研究により発展してきた代数解析的手法、統計物理的手法を組合せ論と融合することによって、分配関数との対応に基づく対称多項式の研究が進展している。また、数え上げ幾何や保型関数論などの研究分野で導入されている組合せ論的対象の中には分配関数と事実上同一のものがあったり、分配関数を積極的に使う動きが近年あり、Hecke代数が絡む代数分野において今後、重要な役割を果たすことが期待される。本稿ではこの研究の一端(主に[24, 25, 26]に基づく)について解説する。

まず、2節で6頂点模型、3節で波動関数を導入し、対称多項式との対応を与える。また、量子群のパラメータを0にした5頂点模型の極限で、波動関数に対応する対称多

*〒 135-0044　東京都江東区越中島 2-1-6　東京海洋大学　海洋工学部　流通情報工学科 kmoteg0@kaiyodai.ac.jp 本研究は科研費[課題番号:基盤研究(C)16K05468 および 研究活動スタート支援15H06218]の助成を受けたものである。

項式がGrassmann多様体のGrothendieck多項式で与えられることをみる。4節で波動関数と対称多項式の対応に関して、行列積の手法とドメイン壁分配関数に関する結果を組み合わせた証明を与える。このうち、ドメイン壁分配関数に関して必要な結果の証明は5節で与える。6節で、スカラー積の解析によるGrothendieck多項式に関するCauchy公式、Littlewood公式、直交性の導出のアイデアを述べる。7節で親戚の模型であるボソン模型とGrothendieck多項式の関係、8節でべき根の量子群の模型であるFelderhof模型とSchur多項式の対応及び、双対Cauchy公式への応用について簡単に触れる。

なお、本研究内容は主に堺和光氏(東京理科大学)との共同研究に基づく。

2. 6頂点模型

可解格子模型で最も基本的な構成要素は、表現空間W_aのテンソル積$W_a \otimes W_b$に作用するR行列$R(u)$であり、Yang-Baxter関係式

$$R_{ab}(u_1/u_2)R_{ac}(u_1)R_{bc}(u_2) = R_{bc}(u_2)R_{ac}(u_1)R_{ab}(u_1/u_2) \in \mathrm{End}(W_a \otimes W_b \otimes W_c), \quad (1)$$

を満たす。W_aとして複素2次元ベクトル空間をとる。最も代表的なR行列の1つとして、現在では$U_q(sl_2)$ R行列 [6, 7] とも呼ばれているもの

$$R_{ab}(u) = \begin{pmatrix} u-t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t(u-1) & (1-t)u & 0 \\ 0 & 1-t & u-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u-t \end{pmatrix}, \quad (2)$$

がある。ここで、tが量子群のパラメータ、uがスペクトルパラメータに対応する。W_aの正規直交基底$\{|0\rangle_a, |1\rangle_a\}$と双対正規直交基底$\{{}_a\langle 0|, {}_a\langle 1|\}$を用い、$R$行列の行列要素を${}_a\langle\gamma|{}_b\langle\delta|R_{ab}(u)|\alpha\rangle_a|\beta\rangle_b = [R(u)]_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$と表すと、$R$行列(2)は行列成分では具体的に

$$ {}_a\langle 0|{}_b\langle 0|R_{ab}(u)|0\rangle_a|0\rangle_b = u-t, \quad (3)$$
$$ {}_a\langle 0|{}_b\langle 1|R_{ab}(u)|0\rangle_a|1\rangle_b = t(u-1), \quad (4)$$
$$ {}_a\langle 0|{}_b\langle 1|R_{ab}(u)|1\rangle_a|0\rangle_b = (1-t)u, \quad (5)$$
$$ {}_a\langle 1|{}_b\langle 0|R_{ab}(u)|0\rangle_a|1\rangle_b = 1-t, \quad (6)$$
$$ {}_a\langle 1|{}_b\langle 0|R_{ab}(u)|1\rangle_a|0\rangle_b = u-1, \quad (7)$$
$$ {}_a\langle 1|{}_b\langle 1|R_{ab}(u)|1\rangle_a|1\rangle_b = u-t, \quad (8)$$

で与えられる。また、$\alpha, \beta, \gamma, \delta$が$\alpha+\beta=\gamma+\delta$を満たさないとき、$[R(u)]_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}=0$である。この性質をice ruleや、total spin保存条件などという。更に、Pauliのspin演算子σ^+, σ^-を、基底に

$$\sigma^+|1\rangle = |0\rangle,\ \sigma^+|0\rangle = 0,\ \langle 0|\sigma^+ = \langle 1|,\ \langle 1|\sigma^+ = 0, \quad (9)$$
$$\sigma^-|0\rangle = |1\rangle,\ \sigma^-|1\rangle = 0,\ \langle 1|\sigma^- = \langle 0|,\ \langle 0|\sigma^- = 0, \quad (10)$$

と作用する演算子として定義する。

Yang-Baxter関係式(1)は「RRR型」のYang-Baxter関係式であるが、次の「RLL型」のYang-Baxter関係式

$$R_{ab}(u_1/u_2)L_{aj}(u_1)L_{bj}(u_2) = L_{bj}(u_2)L_{aj}(u_1)R_{ab}(u_1/u_2) \in \mathrm{End}(W_a \otimes W_b \otimes V_j), \quad (11)$$

を満たすL演算子も、転送行列が可換な保存量の族を成すという意味での量子可積分性を保つため、数学的にも良い性質があると期待される。L演算子は表現空間のテンソル積$W_a \otimes V_j$に作用するが、2次元可解格子模型と1次元量子可積分系の対応から、空間Wは補助空間、Vは量子空間と呼ばれる。表現空間Vは必ずしもWと同じである必要はないが、ここではVとして、Wと同じく複素2次元ベクトル空間をとる。

RLL関係式(11)でRとして$U_q(sl_2)$行列(2)をとり、L演算子が未知であるとすると、RLL関係式をL演算子に関する方程式とみなすことができる。連立1次双次方程式を解くことにより、次の形のL演算子

$$L_{aj}(u) = \begin{pmatrix} au+b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & atu+b & (1-t)cu & 0 \\ 0 & (1-t)d & eu+f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & eu+tf \end{pmatrix}, \tag{12}$$

が解であることがわかる [25]。但し、ここで、a, b, c, d, e, fは関係式

$$(1-t)cd+af-be=0,\ (t^2-t)cd+t^2af-be=0, \tag{13}$$

を満たす定数(スペクトルパラメータに依らない)である。$t \neq 1$を仮定すると、関係式(13)は更に

$$cd+af=0,\ tcd+be=0, \tag{14}$$

に簡約化される。

V_jの正規直交基底$\{|0\rangle_j, |1\rangle_j\}$と双対正規直交基底$\{{}_j\langle 0|, {}_j\langle 1|\}$を用い、$L$演算子の行列要素${}_a\langle\gamma|{}_j\langle\delta|L_{aj}(u)|\alpha\rangle_a|\beta\rangle_j = [L(u)]^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}$は

$${}_a\langle 0|{}_j\langle 0|L_{aj}(u)|0\rangle_a|0\rangle_j = au+b, \tag{15}$$
$${}_a\langle 0|{}_j\langle 1|L_{aj}(u)|0\rangle_a|1\rangle_j = atu+b, \tag{16}$$
$${}_a\langle 0|{}_j\langle 1|L_{aj}(u)|1\rangle_a|0\rangle_j = (1-t)cu, \tag{17}$$
$${}_a\langle 1|{}_j\langle 0|L_{aj}(u)|0\rangle_a|1\rangle_j = (1-t)d, \tag{18}$$
$${}_a\langle 1|{}_j\langle 0|L_{aj}(u)|1\rangle_a|0\rangle_j = eu+f, \tag{19}$$
$${}_a\langle 1|{}_j\langle 1|L_{aj}(u)|1\rangle_a|1\rangle_j = eu+ft. \tag{20}$$

次節ではL演算子から波動関数と呼ばれるクラスの分配関数を導入し、(14)を満たすL演算子(12)の波動関数と対称多項式の対応を与える。

3. 波動関数と対称多項式

局所的なL演算子からより大域的な対象を、量子逆散乱法[2, 3, 4, 5]の記法を用いて構成する。まず、モノドロミー行列$T_a(u)$を、L演算子を同一の補助空間に関して掛け合わせたものとして定義する。

$$T_a(u) = L_{aM}(u)\cdots L_{a1}(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}_a \in \mathrm{End}(W_a \otimes V_1 \otimes \cdots \otimes V_M). \tag{21}$$

モノドロミー行列の行列要素

$$A(u) =_a \langle 0|T_a(u)|0\rangle_a, \tag{22}$$
$$B(u) =_a \langle 0|T_a(u)|1\rangle_a, \tag{23}$$
$$C(u) =_a \langle 1|T_a(u)|0\rangle_a, \tag{24}$$
$$D(u) =_a \langle 1|T_a(u)|1\rangle_a, \tag{25}$$

は量子空間 $V_1 \otimes \cdots \otimes V_M$ に作用する $2^M \times 2^M$ 行列である。V の基底のうち、$|0\rangle$ を粒子が無い状態 (空孔)、$|1\rangle$ を粒子のある状態であるとみなすと、ice rule により、B 演算子 1 つは量子空間の粒子が 1 個生成する役割を果たすことがわかる。従って B 演算子を N 回、真空と呼ばれる粒子のない状態 $|\Omega\rangle := |0^M\rangle := |0\rangle_1 \otimes \cdots \otimes |0\rangle_M$ に作用させた状態

$$|\psi(\{u\}_N)\rangle = B(u_N) \cdots B(u_1)|\Omega\rangle, \tag{26}$$

は N 粒子状態となる。この状態 (26) は off-shell Bethe ベクトルと呼ばれることが多い。ここで、「off-shell」とは、スペクトルパラメータ u_j $(j = 1, \dots, N)$ 達の間に Bethe 方程式と呼ばれる拘束条件を課していないという意味である。Bethe 方程式をスペクトルパラメータに課すことにより、(26) は Hamiltonian などの母関数である転送行列 $t(u) := \mathrm{Tr}_a T_a(u) = A(u) + D(u)$ の固有ベクトルとなる。

次に波動関数を、off-shell Bethe ベクトル $|\psi(\{u\}_N)\rangle$ と粒子の配位ベクトル $|x_1 \cdots x_N\rangle = \prod_{j=1}^N \sigma_{x_j}^- |\Omega\rangle$ $(1 \le x_1 < \cdots < x_N \le M)$ の内積

$$\langle x_1 \cdots x_N|\psi(\{u\}_N)\rangle = \langle x_1 \cdots x_N|B(u_N) \cdots B(u_1)|\Omega\rangle, \tag{27}$$

として定義する。

L 演算子を 1 つ定める毎に、波動関数が定まることに注意する。L 演算子 (12), (14) に対し、波動関数 (27) が次の u_j $(j = 1, \dots, N)$ に関する対称多項式で与えられることを次節で証明する。

定理 1

L 演算子 (12), (14) に対し、波動関数 (27) は次の u_j $(j = 1, \dots, N)$ に関する対称多項式

$$\begin{aligned}\langle x_1 \cdots x_N|\psi(\{u\}_N)\rangle =& \prod_{j=1}^N \frac{(1-t)cu_j(au_j+b)^M}{eu_j+f} \prod_{1\le j<k\le N} \frac{tu_j - u_k}{u_j - u_k} \\ &\times \sum_{\sigma \in S_N} \prod_{\substack{1\le j<k\le N \\ \sigma(j)>\sigma(k)}} \frac{u_{\sigma(k)} - tu_{\sigma(j)}}{tu_{\sigma(k)} - u_{\sigma(j)}} \prod_{j=1}^N \left(\frac{eu_{\sigma(j)}+f}{au_{\sigma(j)}+b} \right)^{x_j},\end{aligned} \tag{28}$$

で与えられる。

(28) の右辺の表示では一見、u_j が対称変数になっていることを見るのは難しいが、これは左辺 $\langle x_1 \cdots x_N|\psi(\{u\}_N)\rangle = \langle x_1 \cdots x_N|B(u_N) \cdots B(u_1)|\Omega\rangle$ を $u_1, \dots, u_N$ の関数とみなし、B 演算子が互いに可換 $[B(u_j), B(u_k)] = 0$ であることに注意すると、u_j に関して対称であることがわかる。

L 演算子 (12) のパラメータ a, b, c, d, e, f は拘束条件 (14) を満たす必要がある。特に次の特殊化 $a=1, b=t\beta, c=1, d=1, e=-\beta^{-1}, f=-1$ が重要であると思われる。L 演算子を行列表示で具体的に書くと、

$$L_{aj}(u)=\begin{pmatrix} u+t\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t(u+\beta) & (1-t)u & 0 \\ 0 & 1-t & \beta^{-1}u-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta^{-1}u-t \end{pmatrix}, \tag{29}$$

であるが、このときの波動関数 (28) は

$$\begin{aligned}\langle x_1\cdots x_N|\psi(\{u\}_N)\rangle=&\prod_{j=1}^{N}\frac{(1-t)u_j(u_j+t\beta)^M}{-\beta^{-1}u_j-1}\prod_{1\le j<k\le N}\frac{tu_j-u_k}{u_j-u_k}\\ &\times\sum_{\sigma\in S_N}\prod_{\substack{1\le j<k\le N\\ \sigma(j)>\sigma(k)}}\frac{u_{\sigma(k)}-tu_{\sigma(j)}}{tu_{\sigma(k)}-u_{\sigma(j)}}\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{-\beta^{-1}u_{\sigma(j)}-1}{u_{\sigma(j)}+t\beta}\right)^{x_j},\end{aligned}\tag{30}$$

となるが、更に量子群のパラメータ t を $t=0$ とおくことにより、Grothendieck 多項式で表されることがわかる。

$$\begin{aligned}\langle x_1\cdots x_N|\psi(\{u\}_N)\rangle=&\prod_{j=1}^{N}\frac{u_j^{M+1}}{-\beta^{-1}u_j-1}\prod_{1\le j<k\le N}\frac{-u_k}{u_j-u_k}\\ &\times\sum_{\sigma\in S_N}\prod_{\substack{1\le j<k\le N\\ \sigma(j)>\sigma(k)}}\frac{-u_{\sigma(k)}}{u_{\sigma(j)}}\prod_{j=1}^{N}(-\beta^{-1}-u_{\sigma(j)}^{-1})^{x_j}\\ =&\prod_{j=1}^{N}\frac{u_j^{M}}{-\beta^{-1}u_j-1}\prod_{1\le j<k\le N}\frac{1}{u_k-u_j}\\ &\times\sum_{\sigma\in S_N}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{j=1}^{N}u_j^j\prod_{\substack{1\le j<k\le N\\ \sigma(j)>\sigma(k)}}\frac{u_{\sigma(k)}}{u_\sigma(j)}\prod_{j=1}^{N}(-\beta^{-1}-u_{\sigma(j)}^{-1})^{x_j}\\ =&\frac{\prod_{j=1}^{N}u_j^M(-\beta^{-1}u_j-1)^{-1}}{\prod_{1\le j<k\le N}(u_k-u_j)}\det{}_N(u_j^k(-\beta^{-1}-u_j^{-1})^{x_k})\\ =&(-\beta)^{-N(N-1)/2}\prod_{j=1}^{N}u_j^M G_\lambda(\boldsymbol{z};\beta).\end{aligned}\tag{31}$$

ここで、$G_\lambda(\boldsymbol{z};\beta)$ は Grassmann 多様体 $Gr(M,N)$ の β-Grothendieck 多項式であり [27, 28, 29, 30, 31, 32]、次の行列式表示を持つ。

$$G_\lambda(\boldsymbol{z};\beta)=\frac{\det_N(z_j^{\lambda_k+N-k}(1+\beta z_j)^{k-1})}{\prod_{1\le j<k\le N}(z_j-z_k)}.\tag{32}$$

波動関数と Grothendieck 多項式の対応 (31) において、Grothendieck 多項式の対称変数 $\boldsymbol{z}=\{z_1,\dots,z_N\}$ と、波動関数を構成する B 演算子のスペクトルパラメータ $u_1,\dots,u_N$ は、関係 $z_j=-\beta^{-1}-u_j^{-1},\ j=1,\dots,N$ で結ばれている。また、Young 図形 $\lambda=$

$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{Z}^N$ $(M-N \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_N \geq 0)$ は、波動関数を構成する粒子の配位ベクトル $|x_1 \cdots x_N\rangle$ $(1 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_N \leq M)$ から変換 $\lambda_j = x_{N-j+1} - N + j - 1$, $j = 1, \dots, N$ によって得られる。

この波動関数と Grothendieck 多項式の対応を更に調べると、excited Young 図形 [30] と呼ばれる、Schubert calculus において導入された組合せ論の対象は、波動関数にゼロでない寄与をする内部状態と事実上同等であることがわかる。可解格子模型の言葉で記述する利点としては、上でみたように、量子群のパラメータを $t=0$ とした極限の波動関数として Grothendieck 多項式が出現することが理解される点や、代数解析的手法、統計物理的手法を導入して解析することが可能になる点が挙げられる。また、BCD 型 Grassmann 多様体の K 理論的構造層の多項式代表である K 理論的 Schur Q, P 関数の excited Young 図形による記述 [30] も、L 演算子に加えて反射方程式を満たすある K 行列を更に導入し、境界条件を変更することによって実現される波動関数に読み替えることができることに注意しておく。

定理 1 を証明する前に、同様の対応関係を以下、列挙する。定理 1 の対応と共に、後々 Grothendieck 多項式の Cauchy 公式や直交性を導出するのに用いられる。

定理 2

L 演算子 (12), (14) に対し、以下の波動関数は次の u_j $(j=1,\dots,N)$ に関する対称多項式

$$\langle\Omega|C(u_1)\cdots C(u_N)|x_1\cdots x_N\rangle = \prod_{j=1}^{N}\frac{(1-t)d(eu_j+f)^M}{au_j+b}\prod_{1\leq j<k\leq N}\frac{u_j-tu_k}{u_j-u_k} \times \sum_{\sigma\in S_N}\prod_{\substack{1\leq j<k\leq N\\ \sigma(j)>\sigma(k)}}\frac{tu_{\sigma(k)}-u_{\sigma(j)}}{u_{\sigma(k)}-tu_{\sigma(j)}}\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{au_{\sigma(j)}+b}{eu_{\sigma(j)}+f}\right)^{x_j}, \tag{33}$$

$$\langle 1\cdots M|B(u_1)\cdots B(u_N)|\overline{x_1}\cdots\overline{x_N}\rangle = \prod_{j=1}^{N}\frac{(1-t)cu_j(atu_j+b)^M}{eu_j+tf}\prod_{1\leq j<k\leq N}\frac{u_j-tu_k}{t(u_j-u_k)} \times \sum_{\sigma\in S_N}\prod_{\substack{1\leq j<k\leq N\\ \sigma(j)>\sigma(k)}}\frac{tu_{\sigma(k)}-u_{\sigma(j)}}{u_{\sigma(k)}-tu_{\sigma(j)}}\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{eu_{\sigma(j)}+tf}{atu_{\sigma(j)}+b}\right)^{\overline{x_j}}, \tag{34}$$

$$\langle\overline{x_1}\cdots\overline{x_N}|C(u_N)\cdots C(u_1)|1\cdots M\rangle = \prod_{j=1}^{N}\frac{(1-t)d(eu_j+tf)^M}{atu_j+b}\prod_{1\leq j<k\leq N}\frac{tu_j-u_k}{t(u_j-u_k)} \times \sum_{\sigma\in S_N}\prod_{\substack{1\leq j<k\leq N\\ \sigma(j)>\sigma(k)}}\frac{u_{\sigma(k)}-tu_{\sigma(j)}}{tu_{\sigma(k)}-u_{\sigma(j)}}\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{atu_{\sigma(j)}+b}{eu_{\sigma(j)}+tf}\right)^{\overline{x_j}}, \tag{35}$$

で与えられる。
但し、ここで、真空状態と充満状態を以下のように定める。

$$|\Omega\rangle := |0^M\rangle := |0\rangle_1 \ \otimes \cdots \otimes |0\rangle_M, \tag{36}$$

$$\langle\Omega| := \langle 0^M| := {}_1\langle 0| \otimes \cdots \otimes {}_M\langle 0|, \tag{37}$$

$$\langle 1\cdots M| := \langle 1^M| := {}_1\langle 1| \otimes \cdots \otimes {}_M\langle 1|, \tag{38}$$

$$|1\cdots M\rangle := |1^M\rangle := |1\rangle_1 \ \otimes \cdots \otimes |1\rangle_M. \tag{39}$$

また、空孔によりラベル付けをするため、配位ベクトル

$$|x_1\cdots x_N\rangle = \prod_{j=1}^{N} \sigma_{x_j}^{-}(|0\rangle_1 \otimes \cdots \otimes |0\rangle_M), \tag{40}$$

$$\langle x_1\cdots x_N| = ({}_1\langle 0| \otimes \cdots \otimes {}_M\langle 0|) \prod_{j=1}^{N} \sigma_{x_j}^{+}, \tag{41}$$

に加え、空孔配位ベクトル

$$|\overline{x_1}\cdots \overline{x_N}\rangle = \prod_{j=1}^{N} \sigma_{x_j}^{+}(|1\rangle_1 \otimes \cdots \otimes |1\rangle_M), \tag{42}$$

$$\langle \overline{x_1}\cdots \overline{x_N}| = ({}_1\langle 1| \otimes \cdots \otimes {}_M\langle 1|) \prod_{j=1}^{N} \sigma_{x_j}^{-}, \tag{43}$$

を導入した。ここで、空孔座標 $\overline{x_1},\dots,\overline{x_N}$ は $1 \le \overline{x_1} < \overline{x_2} < \cdots < \overline{x_N} \le M$ を満たす。

4. 行列積表示

今節の行列積の手法と次節のドメイン壁分配関数の解析を組み合わせて定理 1 を証明する。証明の方針としてまず、波動関数が $\langle x_1\cdots x_N|\psi(\{u\}_N)\rangle$

$$\langle x_1\cdots x_N|\psi(\{u\}_N)\rangle = K \sum_{\sigma\in S_N} \prod_{\substack{1\le j<k\le N \\ \sigma(j)>\sigma(k)}} \frac{u_{\sigma(k)} - t u_{\sigma(j)}}{t u_{\sigma(k)} - u_{\sigma(j)}} \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{e u_{\sigma(j)} + f}{a u_{\sigma(j)} + b} \right)^{x_j}, \tag{44}$$

の形で表されることを行列積の手法 [33, 34, 35] により示す。ここで、因子 K は粒子の配位ベクトル $x_1,\dots,x_N$ に依らない量である。次に、次節のドメイン壁分配関数の表示と組み合わせることにより、この表示 (44) の因子 K が

$$K = \prod_{j=1}^{N} \frac{(1-t) c u_j (a u_j + b)^M}{e u_j + f} \prod_{1\le j<k\le N} \frac{t u_j - u_k}{u_j - u_k}, \tag{45}$$

で表されることを示すことにより、証明を完了する。

この節では波動関数 $\langle x_1\cdots x_N|\psi(\{u\}_N)\rangle = \langle x_1\cdots x_N| \prod_{j=1}^{N} B(u_j)|\Omega\rangle$ を、行列積表示を用いて書き直す。はじめに、波動関数を次の形に書き直す。

$$\langle x_1\cdots x_N| \prod_{j=1}^{N} B(u_j)|\Omega\rangle = \mathrm{Tr}_{W^{\otimes N}} \left[Q \langle x_1\cdots x_N| \prod_{a=1}^{N} T_a(u_a)|\Omega\rangle \right]. \tag{46}$$

ここで$Q=|1^N\rangle\langle 0^N|$は補助空間$W_1\otimes\cdots\otimes W_N$にする演算子である。また、トレースも補助空間に関して取る。

次に、モノドロミー行列を、「横型」の$T_a(u_a)\in\mathrm{End}(W_a\otimes V_1\otimes\cdots\otimes V_M)$から「縦型」のもの

$$\mathcal{T}_j(\{u\}_N):=\prod_{a=1}^{N}L_{aj}(u_a)\in\mathrm{End}(W^{\otimes N}\otimes V_j), \tag{47}$$

に変更する (有限温度における量子転送行列の類似)。この縦型のモノドロミー行列$\mathcal{T}_j(\{u\}_N)$の成分

$$\mathcal{T}_j(\{u\}_N):=\begin{pmatrix}\mathcal{A}_N(\{u\}_N) & \mathcal{B}_N(\{u\}_N)\\ \mathcal{C}_N(\{u\}_N) & \mathcal{D}_N(\{u\}_N)\end{pmatrix}_j, \tag{48}$$

のうち、$\mathcal{A}_N(\{u\}_N)$と$\mathcal{C}_N(\{u\}_N)$を用いて波動関数(46)が

$$\begin{aligned}\langle x_1\cdots x_N|\psi(\{u\}_N)\rangle&=\mathrm{Tr}_{W^{\otimes N}}\left[Q\langle x_1\cdots x_N|\prod_{j=1}^{M}\mathcal{T}_j(\{u\}_N)|\Omega\rangle\right]\\&=\mathrm{Tr}_{W^{\otimes N}}\left[Q\mathcal{A}_N^{M-x_N}\mathcal{C}_N\mathcal{A}_N^{x_N-x_{N-1}-1}\ldots\mathcal{C}_N\mathcal{A}_N^{x_2-x_1-1}\mathcal{C}_N\mathcal{A}_N^{x_1-1}\right],\end{aligned} \tag{49}$$

と書き表すことができる。

表示(49)から(44)に持っていくために、成分$\mathcal{A}_N$と$\mathcal{C}_N$の間の交換関係式を導出する。まず、縦の長さが1異なる演算子$\mathcal{A}_{n+1}(\{u\}_{n+1})$、$\mathcal{C}_{n+1}(\{u\}_{n+1})$と$\mathcal{A}_n(\{u\}_n)$、$\mathcal{C}_n(\{u\}_n)$の間に次の漸化式が成り立つことがわかる。

$$\mathcal{A}_{n+1}(\{u\}_{n+1})=\begin{pmatrix}au_{n+1}+b & 0\\ 0 & eu_{n+1}+f\end{pmatrix}\otimes\mathcal{A}_n(\{u\}_n)+\begin{pmatrix}0 & 0\\ (1-t)d & 0\end{pmatrix}\otimes\mathcal{C}_n(\{u\}_n), \tag{50}$$

$$\mathcal{C}_{n+1}(\{u\}_{n+1})=\begin{pmatrix}0 & (1-t)cu_{n+1}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\otimes\mathcal{A}_n(\{u\}_n)+\begin{pmatrix}atu_{n+1}+b & 0\\ 0 & eu_{n+1}+ft\end{pmatrix}\otimes\mathcal{C}_n(\{u\}_n), \tag{51}$$

また、$n=1$(初期条件)の場合はL演算子の定義より、

$$\mathcal{A}_1=\begin{pmatrix}au_1+b & 0\\ 0 & eu_1+f\end{pmatrix},\quad \mathcal{C}_1=\begin{pmatrix}0 & (1-t)cu_1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{52}$$

であることもわかる。漸化式(50)、(51)及び初期条件(52) を用いて、次の補題をnに関して帰納的に証明することができる。

補題3

$\mathcal{A}_n$と$\mathcal{C}_n^{(j)}$の間に次の代数関係式が成立するような$\mathcal{C}_n$の分解$\mathcal{C}_n=\sum_{j=1}^{n}\mathcal{C}_n^{(j)}$が存在

する。

$$\mathcal{C}_n^{(j)}\mathcal{A}_n=\frac{eu_j+f}{au_j+b}\mathcal{A}_n\mathcal{C}_n^{(j)}, \tag{53}$$

$$(\mathcal{C}_n^{(j)})^2=0, \tag{54}$$

$$\mathcal{C}_n^{(j)}\mathcal{C}_n^{(k)}=\frac{(eu_j+f)(au_k+b)(u_j-tu_k)}{(au_j+b)(eu_k+f)(tu_j-u_k)}\mathcal{C}_n^{(k)}\mathcal{C}_n^{(j)}, \quad (j\neq k). \tag{55}$$

補題3をnに関する帰納法で示す。$n=1$の場合、(52) から$\mathcal{A}_1$が対角的で、関係式が成立することを直接確かめることができる。次に、nの場合に代数関係式が成立することを仮定する。更に$\mathcal{A}_n$が対角化可能であることを仮定し、対応する対角行列を$\mathscr{A}_n=G_n^{-1}\mathcal{A}_nG_n$と表す。この対角化に伴い、$\mathcal{C}_n$に$G_n$を随伴的に作用させ、$\mathscr{C}_n=G_n^{-1}\mathcal{C}_nG_n$、$\mathscr{C}_n=\sum_{j=1}^n\mathscr{C}_n^{(j)}$を定義する。代数関係式が基底の選び方に依らないことに注意すると、帰納法の仮定より、$\mathscr{A}_n$と$\mathscr{C}_n^{(j)}$に関しても同様の代数関係式が成立することがわかる。

この仮定を基に、$n+1$でも成立することを示す。まずG_{n+1}を帰納的に構成する。(50) より、$\mathcal{A}_{n+1}$が下三角ブロック行列であり、対角成分が$\mathcal{A}_n$で表されることに注意すると、G_{n+1}が

$$G_{n+1}=\begin{pmatrix}G_n & 0\\ G_nH_n & G_n\end{pmatrix}, \tag{56}$$

で表されるとして良い。上の仮定では$2n\times 2n$行列H_nが未知であり、その具体的な形をこれから決定する。nに関する帰納法より、次の式を得る。

$$\begin{aligned}&G_{n+1}^{-1}\mathcal{A}_{n+1}G_{n+1}\\ &=\begin{pmatrix}(au_{n+1}+b)\mathscr{A}_n & 0\\ (eu_{n+1}+f)\mathscr{A}_nH_n+(1-t)d\mathscr{C}_n-(au_{n+1}+b)H_n\mathscr{A}_n & (eu_{n+1}+f)\mathscr{A}_n\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{57}$$

この行列が対角であるためには

$$(eu_{n+1}+f)\mathscr{A}_nH_n+(1-t)d\mathscr{C}_n-(au_{n+1}+b)H_n\mathscr{A}_n=0, \tag{58}$$

が満たされなければならない。この関係式を用い、$\mathscr{A}_n$と$\mathscr{C}_n^{(j)}$が (53) と同じ関係式を満たすことに注意すると、H_nが

$$H_n=\mathscr{A}_n^{-1}\sum_{j=1}^n\frac{au_j+b}{c(u_j-u_{n+1})}\mathscr{C}_n^{(j)}, \tag{59}$$

と表されることがわかる。こうして$\mathcal{A}_{n+1}$より、G_{n+1}を用いて対角行列$\mathscr{A}_{n+1}$を求めることができた。

$$\mathscr{A}_{n+1}=\begin{pmatrix}(au_{n+1}+b)\mathscr{A}_n & 0\\ 0 & (eu_{n+1}+f)\mathscr{A}_n\end{pmatrix}. \tag{60}$$

残りは$\mathscr{C}_{n+1}^{(j)}$を求め、関係式(53)–(55)が$n+1$で成立することを示せば良い。(51)、(56)と (59) を組み合わせ、関係式 (54) と (55) を挿入することにより、$\mathscr{C}_n^{(j)}$と$\mathscr{A}_n$を用いて

$\mathscr{C}_{n+1}$ が $\mathscr{C}_{n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} \mathscr{C}_{n+1}^{(j)}$

$$\mathscr{C}_{n+1}^{(j)} = \begin{cases} \dfrac{1}{u_j - u_{n+1}} \begin{pmatrix} (u_j - tu_{n+1})(au_{n+1}+b)\mathscr{C}_n^{(j)} & 0 \\ 0 & (tu_j - u_{n+1})(eu_{n+1}+f)\mathscr{C}_n^{(j)} \end{pmatrix} \\ \text{for } 1 \le j \le n \\ \\ \begin{pmatrix} 0 & (1-t)cu_{n+1}\mathscr{A}_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ for } j = n+1 \end{cases}, \tag{61}$$

と表されることがわかる。最後に、$\mathscr{A}_n$ と $\mathscr{C}_n^{(j)}$ が関係式 (53)–(55) を満たすという仮定及び、$\mathscr{A}_n$ と $\mathscr{C}_n^{(j)}$ を用いた明示式 $\mathscr{A}_{n+1}$ (60) と $\mathscr{C}_{n+1}^{(j)}$ (61) より、代数関係式 (53)–(55) と同じ関係式を $\mathscr{A}_{n+1}$ と $\mathscr{C}_{n+1}^{(j)}$ が満たすことを示すことで、帰納法による補題3の証明を完了する。

補題3の代数関係式 (53)、(54) と (55) を用いることにより、波動関数の行列積表示 (49) を次のように書き直すことができる。

$$\langle x_1 \cdots x_N | \psi(\{u\}_N) \rangle = K \sum_{\sigma \in S_N} \prod_{\substack{1 \le j < k \le N \\ \sigma(j) > \sigma(k)}} \frac{u_{\sigma(k)} - tu_{\sigma(j)}}{tu_{\sigma(k)} - u_{\sigma(j)}} \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{eu_{\sigma(j)} + f}{au_{\sigma(j)} + b} \right)^{x_j}. \tag{62}$$

ここで S_N は位数 N の対称群を表し、因子 K は

$$K = \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{au_j + b}{eu_j + f} \right)^j \mathrm{Tr}_{W^{\otimes N}} \left[Q \mathcal{A}_N^{M-N} \mathcal{C}_N^{(N)} \ldots \mathcal{C}_N^{(1)} \right], \tag{63}$$

と表される。

定理1の証明を完結させるのに必要なことは因子 K の具体的な表示を決定することである。(63) の右辺を直接求めるのは困難であるが、次節のドメイン壁分配関数に関する定理5を用いて決定することができる。

補題4
因子 K は

$$K = \prod_{j=1}^{N} \frac{(1-t)cu_j(au_j+b)^M}{eu_j + f} \prod_{1 \le j < k \le N} \frac{tu_j - u_k}{u_j - u_k}, \tag{64}$$

で与えられる。

補題4を以下の議論で示す。まず、K はその定義 (63) より、粒子の配位ベクトルの情報 $x_1, \ldots, x_N$ に依存しないことがわかる。そのため、$\langle x_1 \cdots x_N | \psi(\{u\}_N) \rangle$ をある特定の配位ベクトル $\langle x_1 \cdots x_N |$ の場合に対して決定さえすれば、(62) より K を定めることができる。$x_j = j, j = 1, \ldots, N$ の時の波動関数 $\langle 1 \cdots N | \psi(\{u\}_N) \rangle$ を以下のようにして求めることができる。まず、波動関数 $\langle 1 \cdots N | \psi(\{u\}_N) \rangle$ のグラフ表示より、$N \times M$ 格子の

内、右側の $N \times (M-N)$ 格子の内部スピンは凍りつき、波動関数 $\langle 1 \cdots N|\psi(\{u\}_N)\rangle$ の計算は事実上、ドメイン壁分配関数 $Z_N(\{u\}_N)$ の計算に帰着することがわかる。

$$\langle 1 \cdots N|\psi(\{u\}_N)\rangle = Z_N(\{u\}_N)\prod_{j=1}^{N}(az_j+b)^{M-N}, \tag{65}$$

$$Z_N(\{u\}_N) = \langle 1 \cdots N|B_N(u_1)\cdots B_N(u_N)|\Omega\rangle, \tag{66}$$

$$B_N(u) = {}_a\langle 0|L_{aN}(u)\cdots L_{a1}(u)|1\rangle_a. \tag{67}$$

次節証明するドメイン壁分配関数 $Z_N(\{u\}_N)$ に関する評価である (69) を (65) に代入して整理すると、

$$\begin{aligned}\langle 1 \cdots N|\psi(\{u\}_N)\rangle =& \prod_{j=1}^{N}\frac{(1-t)cu_j(au_j+b)^M}{eu_j+f}\prod_{1\le j<k\le N}\frac{tu_j-u_k}{u_j-u_k} \\ &\times \sum_{\sigma\in S_N}\prod_{\substack{1\le j<k\le N\\ \sigma(j)>\sigma(k)}}\frac{u_{\sigma(k)}-tu_{\sigma(j)}}{tu_{\sigma(k)}-u_{\sigma(j)}}\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{eu_{\sigma(j)}+f}{au_{\sigma(j)}+b}\right)^j,\end{aligned} \tag{68}$$

が得られる。(62) で $x_j=j$, $j=1,\dots,N$ とおいたものと (68) を比較することにより、K が (64) で与えられることがわかる。

5. ドメイン壁分配関数

今節では、定理1の証明を完成させるのに必要である、次のドメイン壁分配関数 $Z_N(\{u\}_N)$ に関する以下の表示を証明する。

定理5

ドメイン壁分配関数 $Z_N(\{u\}_N)$ は次の表示を持つ。

$$\begin{aligned}Z_N(\{u\}_N) =& \prod_{j=1}^{N}(1-t)cu_j\prod_{1\le j<k\le N}\frac{tu_j-u_k}{u_j-u_k} \\ &\times \sum_{\sigma\in S_N}\prod_{\substack{1\le j<k\le N\\ \sigma(j)>\sigma(k)}}\frac{u_{\sigma(k)}-tu_{\sigma(j)}}{tu_{\sigma(k)}-u_{\sigma(j)}}\prod_{j=1}^{N}(au_{\sigma(j)}+b)^{N-j}\prod_{j=1}^{N}(eu_{\sigma(j)}+f)^{j-1}.\end{aligned} \tag{69}$$

証明すべきはこの定理自体ではなく、量子空間 V_j, $j=1,\dots,N$ に非等質パラメータ w_j を入れてできる次の L 演算子

$$L_{aj}(u,w_j) = \begin{pmatrix} au+bw_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & atu+bw_j & (1-t)cu & 0 \\ 0 & (1-t)dw_j & eu+fw_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & eu+tfw_j \end{pmatrix}, \tag{70}$$

より構成されるより一般的なドメイン壁分配関数 $Z_N(\{u\}_N|\{w\}_N)$

$$Z_N(\{u\}_N|\{w\}_N) = \langle 1 \cdots N|B(u_1|\{w\}_N)\cdots B(u_N|\{w\}_N)|\Omega\rangle, \tag{71}$$

$$B(u|\{w\}_N) = {}_a\langle 0|L_{aN}(u,w_N)\cdots L_{a1}(u,w_1)|1\rangle_a, \tag{72}$$

に関して成立する以下の表示である。

定理 6
一般化されたドメイン壁分配関数 $Z_N(\{u\}_N|\{w\}_N)$ は以下の表示を持つ。

$$\begin{aligned}&Z_N(\{u\}_N,\{w\}_N)\\ =&\prod_{j=1}^{N}(1-t)cu_j\prod_{1\le j<k\le N}\frac{tu_j-u_k}{u_j-u_k}\\ &\times\sum_{\sigma\in S_N}\prod_{\substack{1\le j<k\le N\\ \sigma(j)>\sigma(k)}}\frac{u_{\sigma(k)}-tu_{\sigma(j)}}{tu_{\sigma(k)}-u_{\sigma(j)}}\prod_{1\le j<k\le N}(au_{\sigma(j)}+bw_k)\prod_{1\le k<j\le N}(eu_{\sigma(j)}+fw_k).\end{aligned}\tag{73}$$

定理 5 は定理 6 で、非等質パラメータ w_j を $w_j=1,\ j=1,\dots,N$ とした極限として直ちに得られる。

非等質パラメータを量子空間にも入れて分配関数を一般化した上で、漸化式を構成して解く手法を Izergin-Korepin 流解析 [36, 37] という。相関関数の研究でも使われる技術であることに注意する。この手法によって定理 6 を証明する。証明の方針としてはまず、一般化された分配関数 $Z_N(\{u\}_N|\{w\}_N)=\langle 1\cdots N|B(u_1|\{w\}_N)\cdots B(u_N|\{w\}_N)|\Omega\rangle$ を $w_1,\dots,w_N$ に関する多項式であるとみなし、グラフ表示を用いて次の補題で示される性質を分配関数が満たすことを示す。補題の性質を満たす $w_1,\dots,w_N$ の多項式は唯一存在するが、次にこれらの性質を (73) の右辺の多項式が満たすことを示すことにより、証明が完了する。

補題 7
一般化されたドメイン壁分配関数 $Z_N(\{u\}_N|\{w\}_N)$ は以下の性質を満たす。
(1) $Z_N(\{u\}_N|\{w\}_N)$ **は** w_N **に関して** $N-1$ **次の多項式である。**
(2) $Z_N(\{u\}_N|\{w\}_N)$ **は** $u_j,\ j=1,\dots,N$ **に関して対称である。**
(3) $Z_1(u_1|w_1)=(1-t)cu_1$ **が成立する。**
(4) $Z_N(\{u\}_N|\{w\}_N)$ **の** N **に関する次の漸化式が成立する。**

$$\begin{aligned}Z_N(\{u\}_N|\{w\}_N)|_{w_N=-au_N/b}=&(1-t)ca^{N-1}u_N\prod_{j=1}^{N-1}(tu_j-u_N)\prod_{j=1}^{N-1}(eu_N+fw_j)\\ &\times Z_{N-1}(\{u\}_{N-1}|\{w\}_{N-1}).\end{aligned}\tag{74}$$

補題の性質 (1),(2),(3),(4) を次の多項式

$$\begin{aligned}&F_N(\{u\}_N,\{w\}_N)\\ =&\prod_{j=1}^{N}(1-t)cu_j\prod_{1\le j<k\le N}\frac{tu_j-u_k}{u_j-u_k}\\ &\times\sum_{\sigma\in S_N}\prod_{\substack{1\le j<k\le N\\ \sigma(j)>\sigma(k)}}\frac{u_{\sigma(k)}-tu_{\sigma(j)}}{tu_{\sigma(k)}-u_{\sigma(j)}}\prod_{1\le j<k\le N}(au_{\sigma(j)}+bw_k)\prod_{1\le k<j\le N}(eu_{\sigma(j)}+fw_k),\end{aligned}\tag{75}$$

が満たすことがわかる。例えば (4) は、$w_N = -au_N/b$ と置くことにより、(75) の和のうち、$\sigma(N) = N$ を満たさない σ は必ず $\prod_{1\le j<k\le N}(au_{\sigma(j)} + bw_k)$=0 となるので、$\sigma(N) = N$ を満たす σ のみ考えれば良いことを踏まえると、(74) を $F_N(\{u\}_N, \{w\}_N)$ が満たすことがわかる。従って分配関数 $Z_N(\{u\}_N|\{w\}_N)$ が多項式 $F_N(\{u\}_N, \{w\}_N)$ によって与えられることが示された。

最後に、分配関数 $Z_N(\{u\}_N|\{w\}_N)$ に関しては以下の行列式表示 [36, 37] の方がより有名であることに注意して、本節を終える。

定理 8

一般化されたドメイン壁分配関数 $Z_N(\{u\}_N|\{w\}_N)$ は以下の行列式表示を持つ。

$$\begin{aligned} Z_N(\{u\}_N|\{w\}_N) =& \frac{\prod_{j=1}^N (1-t)cu_j \prod_{j,k=1}^N (au_j + bw_k)(eu_j + fw_k)}{\prod_{1\le j<k\le N}(u_j - u_k)(w_k - w_j)} \\ &\times \det_N \left(\frac{1}{(au_j + bw_k)(eu_j + fw_k)} \right). \end{aligned} \tag{76}$$

6. Grothendieck 多項式の Cauchy 公式、Littlewood 公式、直交性

前節まで、波動関数と呼ばれるクラスの分配関数が対称多項式を与えることを見てきた。今節では、他のクラスの分配関数の量子逆散乱法による解析を組み合わせることにより、対称多項式の種々の公式の導出、証明をどうやって行うかに関するアイデアを述べる (詳細については [24])。今節と次節では、論文の記法 [24] に合わせるため、R 行列や L 演算子を以下のものとして採用する。

$$R(u) = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & u - u^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix}, \tag{77}$$

$$L(u) = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\beta^{-1}u - u^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta^{-1}u \end{pmatrix}. \tag{78}$$

(77)、(78) はそれぞれ (2)、(29) を対称化し、$t = 0$ としたものと基本的に等価である。L 演算子 (78) より構成される波動関数と Grothendieck 多項式の対応は以下である。

$$\langle x_1 \cdots x_N | B(u_1) \cdots B(u_N) | \Omega \rangle = (-\beta^{-1})^{N(N-1)/2} \prod_{j=1}^N u_j^{M-1} G_\lambda(\boldsymbol{z}; \beta), \tag{79}$$

$$\langle \Omega | C(u_1) \cdots C(u_N) | x_1 \cdots x_N \rangle = (-\beta^{-1})^{N(N-1)/2} \prod_{j=1}^N u_j^{M-1} G_{\lambda^\vee}(\boldsymbol{z}; \beta). \tag{80}$$

ここで、u_j と z_j の対応は $z_j = -\beta^{-1} - u_j^{-2}$ である。また、粒子の配位 $x = (x_1, \dots, x_N)$ は Young 図形 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ $(M - N \ge \lambda_1 \ge \cdots \ge \lambda_N \ge 0)$ 、$\lambda^\vee = (\lambda_1^\vee, \dots, \lambda_N^\vee)$ $(M - N \ge \lambda_1^\vee \ge \cdots \ge \lambda_N^\vee \ge 0)$ に $\lambda_j = x_{N-j+1} - N + j - 1$、$\lambda_j^\vee = M - N + j - x_j$ の

ルールで翻訳される。Young 図形 $\lambda^\vee$ は $N\times(M-N)$ 長方形の Young 図形の Young 図形 λ の補完部分に相当する。

次に off-shell Bethe ベクトル $B(v_1)\cdots B(v_N)|\Omega\rangle$ と $\langle\Omega|C(u_1)\cdots C(u_N)$ の内積である、スカラー積と呼ばれる分配関数

$$\langle\Omega|C(u_1)\cdots C(u_N)B(v_1)\cdots B(v_N)|\Omega\rangle, \tag{81}$$

を導入する。スカラー積は 1 次元量子可積分系や可解確率過程の相関関数などの物理量の研究で基礎となる分配関数であるが、このスカラー積は次の行列式表示を持つ [22, 38, 24]。

定理 9
Off-shell Bethe ベクトルのスカラー積 $\langle\Omega|C(u_1)\cdots C(u_N)B(v_1)\cdots B(v_N)|\Omega\rangle$ に関して、以下の行列式を用いた以下の表示が成立する。

$$\begin{aligned}&\langle\Omega|C(u_1)\cdots C(u_N)B(v_1)\cdots B(v_N)|\Omega\rangle\\ &=\prod_{1\le j<k\le N}\frac{1}{(u_j^2-u_k^2)(v_k^2-v_j^2)}\mathrm{det}_N Q(\{u\}_N|\{v\}_N).\end{aligned} \tag{82}$$

但し、Q は行列成分が

$$Q(\{u\}_N|\{v\}_N)_{jk}=\frac{u_j^M(-\beta^{-1}v_k-v_k^{-1})^M v_k^{2(N-1)}-v_k^M(-\beta u_j-u_j^{-1})^M u_j^{2(N-1)}}{v_k/u_j-u_j/v_k}, \tag{83}$$

で与えられる $N\times N$ 行列である。

定理 9 を証明する一つの手法として、ドメイン壁分配関数の解析と同様にして、量子空間に非等質パラメータを導入して模型を一般化し、そのスカラー積の行列式表示を、中間スカラー積 [39] と呼ばれる分配関数を更に導入し、それを off-shell のままで Izergin-Korepin 流に解析することによって証明する方法がある。定理 9 は R 行列が $t=0$ である場合の L 演算子一般に対して成り立つと思われる。また、R 行列が $t=-1$ の場合に対応する L 演算子のスカラー積の行列式表示は [40] で証明を与えている。

波動関数と Grothendieck 多項式の対応 (79)、(80) 及び、off-shell Bethe ベクトルのスカラー積の行列式表示 (82) を用いて、Grothendieck 多項式の Cauchy 公式をこれから導出する。まず、恒等行列の配位ベクトルによる分解

$$\sum_{\{x\}}|x_1\cdots x_N\rangle\langle x_1\cdots x_N|=\mathrm{Id}, \tag{84}$$

を用いて、スカラー積を分解し、

$$\begin{aligned}&\langle\Omega|C(u_1)\cdots C(u_N)B(v_1)\cdots B(v_N)|\Omega\rangle\\ &=\sum_{1\le x_1<\cdots<x_N\le M}\langle\Omega|C(u_1)\cdots C(u_N)|x_1\cdots x_N\rangle\langle x_1\cdots x_N|B(v_1)\cdots B(v_N)|\Omega\rangle,\end{aligned} \tag{85}$$

波動関数と Grothendieck 多項式の対応 (79)、(80) を (85) の右辺に代入すると、Grothendieck 多項式 $G_\lambda(\boldsymbol{z};\beta)$ と $G_{\lambda^\vee}(\boldsymbol{z};\beta)$ の積を、$\lambda\subseteq L^N$, $L=M-N$ を満たす Young 図形 λ 全

てに関して足し上げる形に化ける。一方でスカラー積はそれ自身、行列式表示 (82) を持っているので、2通りのスカラー積の評価を組み合わせることにより、以下を得る。

定理10
Grothendieck 多項式に関して以下の Cauchy 公式が成立する。

$$\sum_{\lambda\subseteq L^N} G_\lambda(\boldsymbol{z};\beta)G_{\lambda^\vee}(\boldsymbol{w};\beta)$$
$$=\prod_{1\le j<k\le N}\frac{1}{(z_j-z_k)(w_k-w_j)}\mathrm{det}_N\left[\frac{z_j^{L+N}(1+\beta w_k)^{N-1}-w_k^{L+N}(1+\beta z_j)^{N-1}}{z_j-w_k}\right], \quad (86)$$

ここで、Young 図形 $\lambda^\vee=(\lambda_1^\vee,\dots,\lambda_N^\vee)$ は Young 図形 $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_N)$ より、$\lambda_j^\vee=L-\lambda_{N+1-j}$ で与えられる。

　更に、波動関数のスカラー積の行列式表示 (定理9) で、Bethe ベクトル $\langle\Omega|C(u_1)\cdots C(u_N)$ のスペクトルパラメータ u_j の極限 $u_j\to\infty, j=1,\dots,N$ を取ることにより、Grothendieck 多項式の (重み付き)Littlewood 公式を得る。

定理11
Grothendieck 多項式に関して、以下の Littlewood 公式が成立する。

$$\sum_{\lambda\subseteq(M-N)^N}(-\beta)^{\sum_{j=1}^N\lambda_j}G_\lambda(\boldsymbol{z};\beta)=\prod_{1\le j<k\le N}\frac{1}{z_k-z_j}\mathrm{det}_N V^{(M)}. \quad (87)$$

ここで、$V^{(M)}$ は行列成分が

$$V_{jk}^{(M)}=\sum_{m=0}^{j-1}(-1)^m(-\beta)^{j-N}\binom{M}{m}(1+\beta z_k)^{m-j+N-1}\quad(1\le j\le N-1),$$
$$V_{Nk}^{(M)}=-\sum_{m=\max(N-1,1)}^{M}(-1)^m\binom{M}{m}(1+\beta z_k)^{m-1}, \quad (88)$$

で与えられる $N\times N$ 行列である。
$\beta=-1$ では、Bethe ベクトル $\langle\Omega|C(u_1)\cdots C(u_N)$ で $u_j\to\infty$, $j=1,\dots,N$ を取ることは、周期 TASEP (totally asymmetric simple exclusion process) と呼ばれる確率過程の定常状態をとるということに対応するので、物理的には、Grothendieck 多項式の Littlewood 公式は、TASEP の off-shell Bethe ベクトルと定常状態の内積の足し上げに関する行列式表示という解釈ができる。

　最後に、Grothendieck 多項式の直交性に関してコメントして今節を終える。Bethe 状態の完全性を仮定すると、on-shell Bethe ベクトルによる恒等行列の分解

$$I=\sum_{\{u\}_N}\frac{B(u_1)\cdots B(u_N)|\Omega\rangle\langle\Omega|C(u_1)\cdots C(u_N)}{\langle\Omega|C(u_1)\cdots C(u_N)B(u_1)\cdots B(u_N)|\Omega\rangle}, \quad (89)$$

が成立する。ここで和は、Bethe 方程式を満たすあらゆる $M!/N!(M-N)!$ ケの Bethe 根の組 $\{u\}$ に関して和を取るという意味である。配位ベクトルに関する自明な直交性

$\langle x_1 \cdots x_N | x'_1 \cdots x'_N \rangle = \prod_{j=1}^N \delta_{x_j x'_j}$ にこの分解を挿入することで、以下の式

$$\sum_{\{u\}_N} \frac{\langle x_1 \cdots x_N | B(u_1) \cdots B(u_N) | \Omega \rangle \langle \Omega | C(u_1) \cdots C(u_N) | x'_1 \cdots x'_N \rangle}{\langle \Omega | C(u_1) \cdots C(u_N) B(u_1) \cdots B(u_N) | \Omega \rangle} = \prod_{j=1}^N \delta_{x_j x'_j}, \qquad (90)$$

を得るが、左辺に波動関数と Grothendieck 多項式の対応 (79), (80) とノルム $\langle \Omega | C(u_1) \cdots C(u_N) B(u_1) \cdots B(u_N) | \Omega \rangle$ に関する因子化公式を代入することにより、Grothendieck 多項式の直交性として表すことができる。この直交性は Schur 多項式の直交性の拡張に当たる (詳細については [25]。同変の場合への拡張は [67])。この直交性の和では Bethe 方程式の根が必要となるが、Bethe 方程式を定める多項式は、Grassmann 多様体の量子 K 理論の定義イデアルに対応するという解釈が与えられる。

7. ボソン模型

前節では R 行列 (77) に対し、「RLL」型の Yang-Baxter 関係式を満たす、2 次元複素ベクトル空間のテンソル積に作用する L 演算子 (78) について考えた。今度は、量子空間を無限次元 Boson Fock 空間 $\mathcal{F}$ に取り替える。正規直交基底をボソンの占有数 n によって $|n\rangle$ $(n = 0, 1, \ldots, \infty)$ と表す。 Boson Fock 空間 $\mathcal{F}$ の生成元 ϕ、$\phi^\dagger$、N と π はそれぞれ消滅、生成、数、真空射影演算子という意味を持ち、$\mathcal{F}$ への具体的な作用は

$$\phi|0\rangle = 0, \quad \phi|n\rangle = |n-1\rangle, \quad \phi^\dagger|n\rangle = |n+1\rangle, \quad N|n\rangle = n|n\rangle, \quad \pi|n\rangle = \delta_{n\,0}|n\rangle, \quad (91)$$

で定義される。この代数はある t-boson 代数の $t = 0$ 極限として得られる代数とみなすことができるが、この boson 代数の演算子を用いた「RLL」の Yang-Baxter 関係式

$$R_{ab}(u/v)\mathcal{L}_{aj}(u)\mathcal{L}_{bj}(v) = \mathcal{L}_{bj}(v)\mathcal{L}_{aj}(u)R_{ab}(u/v) \in \mathrm{End}(W_a \otimes W_b \otimes \mathcal{F}_j), \qquad (92)$$

の解 [41]

$$\mathcal{L}_{aj}(v) = \begin{pmatrix} v^{-1} - \beta v \pi_j & \phi_j^\dagger \\ \phi_j & v \end{pmatrix}, \qquad (93)$$

が知られている。以前と同様にして量子逆散乱法の通常の手続きを実行し、L 演算子よりモノドロミー行列

$$\mathcal{T}_a(v) = \mathcal{L}_{aM-1}(v) \cdots \mathcal{L}_{a0}(v) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}(v) & \mathcal{B}(v) \\ \mathcal{C}(v) & \mathcal{D}(v) \end{pmatrix}_a, \qquad (94)$$

更に、off-shell Bethe ベクトル

$$|\Psi(\{v\}_N)\rangle = \prod_{j=1}^N \mathcal{B}(v_j)|\Omega\rangle, \quad \langle \Psi(\{v\}_N)| = \langle \Omega| \prod_{j=1}^N \mathcal{C}(v_j), \qquad (95)$$

を導入する。これら off-shell Bethe ベクトルと Boson Fock 空間のテンソル積 $\otimes_{j=0}^{M-1} \mathcal{F}_j$ の基底 $|\{n\}_M\rangle := \otimes_{j=0}^{M-1} |n_j\rangle_j$, $n_j = 0, 1, \ldots, \infty$ とその双対 $\langle \{n\}_M| := \otimes_{j=0}^{M-1} {}_j\langle n_j|$ の内積として定義される boson 波動関数 $\langle \{n\}_{M,N} | \Psi(\{v\}_N)\rangle$、$\langle \Psi(\{v\}_N) | \{n\}_{M,N}\rangle$ も Grothendieck 多項式で表すことができる。

今度は、bosonの配位$\{n\}_{M,N}=\{n_0,n_1,\dots,n_{M-1}\}$ $(n_0+n_1+\cdots+n_{M-1}=N)$ とYoung図形$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_N)$ $(M-1\geq\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_N\geq 0$、$\lambda_1\leq M-1)$は次の関係$\lambda=((M-1)^{n_{M-1}},\dots,1^{n_1},0^{n_0})$で対応することにまず注意する。この対応の下、次が成立する[25]。

定理12

Boson L演算子(93)より構成される波動関数$\langle\{n\}_{M,N}|\Psi(\{v\}_N)\rangle$、$\langle\Psi(\{v\}_N)|\{n\}_{M,N}\rangle$はGrothendieck多項式と次の対応がある。

$$\langle\{n\}_{M,N}|\Psi(\{v\}_N)\rangle=\prod_{j=1}^{N}(v_j^{-1}-\beta v_j)^{M-1}G_\lambda(z_1,\dots,z_N;\beta), \tag{96}$$

$$\langle\Psi(\{v\}_N)|\{n\}_{M,N}\rangle=\prod_{j=1}^{N}(v_j^{-1}-\beta v_j)^{M-1}G_{\lambda^\vee}(z_1,\dots,z_N;\beta). \tag{97}$$

ここで、スペクトル変数v_jとGrothendieck多項式の対称変数z_jには$z_j^{-1}=v_j^{-2}-\beta$の対応がある。また、$\lambda^\vee=(\lambda_1^\vee,\lambda_2^\vee,\dots,\lambda_N^\vee)$ $(M-1\geq\lambda_1^\vee\geq\cdots\geq\lambda_N^\vee\geq 0)$はYoung図$\lambda$と$\lambda_j^\vee=M-1-\lambda_{N+1-j}$の対応で結ばれる。

本節で述べたboson L演算子より構成される可解模型は、TAZRP (totally asymmetric zero-range process)と呼ばれる可解確率過程である。また、t-boson代数の模型の$t=0$極限とみなせる。tが一般の模型に関しても、確率過程や代数構造への興味などから様々な研究が近年行われている(例えば[42, 43, 44, 45])。

8. Felderhof模型、双対Cauchy公式、Tokuyama公式

最後にFelderhof模型について触れる。近年、次の形

$$L_{aj}(z,t)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&t&1&0\\0&(t+1)z&z&0\\0&0&0&z\end{pmatrix}, \tag{98}$$

で与えられるL演算子より構成される波動関数が、Schur多項式のWeyl公式の変形に当たるTokuyama公式を自然に実現することが見出された[46]。このL演算子は「RLL」型のYang-Baxter関係式を満たすが、この時のR行列は

$$R_{ab}(z,t)=\begin{pmatrix}1+tz&0&0&0\\0&t(1-z)&t+1&0\\0&(t+1)z&z-1&0\\0&0&0&z+t\end{pmatrix}, \tag{99}$$

で与えられる。このR行列(98)、L演算子(99)や「RLL」型のYang-Baxter関係式は、実はより一般的なR行列と、それの満たす「RRR」型のYang-Baxter関係式を特殊化(してゲージ変換)したものに相当する。Felderhof模型や色付き頂点模型とも呼ばれ[47]、また、その一般化されたR行列は1のべき根の量子群より構成できることが知られている[48, 49, 50]。L演算子(98)のパラメータtは量子群のパラメータではなく、べき根の有限次元表現を構成する際に自由に入れることのできるパラメータに相

当している。パラメータが各表現に付随しているとみなすと、R 行列は表現空間のテンソル積に作用するため、最低2つの自由に動けるパラメータを入れることができる。パラメータ t は補助空間に付随している自由パラメータとみなすことができる。また、L 演算子 (98) は一般化 R 行列で、量子空間に入っている自由パラメータを潰したものとみることができる。量子空間に (の) 自由パラメータを入れた (残した)L 演算子から factorial Schur 関数が出現することが [51, 52] で示されているが、この自由パラメータが factorial パラメータに対応している。

Felderhof 模型について1点注意すべきことを述べる。2節で扱った6頂点模型では R 行列の行列成分 R_{00}^{00} と R_{11}^{11} が等しいことより、B 演算子は互いに可換であった。これに対し、Felderhof 模型では R_{00}^{00} と R_{11}^{11} が等しくない。これに対応して、B 演算子は可換ではない。

$$(1+tz_1/z_2)B(z_1)B(z_2) = B(z_2)B(z_1)(z_1/z_2+t). \tag{100}$$

特に、$t=-1$ で B 演算子は反可換になる。このため、波動関数を扱うとき際には、作用させる B 演算子のスペクトルパラメータの並びに注意しなければならない。

波動関数と Schur 多項式の対応が [46] において見出された。

定理 13

Felderhof 模型の波動関数 $\langle x_1\cdots x_N|B(z_1)\cdots B(z_N)|\Omega\rangle$ は Schur 多項式を用いて

$$\langle x_1\cdots x_N|B(z_1)\cdots B(z_N)|\Omega\rangle = \prod_{1\le j<k\le N}(z_j+tz_k)s_\lambda(\{z\}_N), \tag{101}$$

と表すことができる。Young 図形 $\lambda_j, j=1,\dots,N$ は粒子の配位 $x_j, j=1,\dots,N$ と $\lambda_j = x_{N-j+1}-N+j-1$, $j=1,\dots,N$ の対応で結ばれる。

論文 [46] では更に、定理 13 と波動関数の strict Gelfand-Tsetlin パターン (内部スピン状態) による特徴付けを合わせたものとして、Schur 多項式の Weyl 公式の変形である Tokuyama 公式 [53, 54] を導出されることが見出された。Felderhof 模型が Schur 多項式の Tokuyama 公式の自然な実現を与えているのである。また、この対応の factorial Schur 関数への拡張 [51] や、Yang-Baxter 関係式の p 進体版への拡張 [55](metaplectic ice [56, 57]) が最近発見されており、興味深い。

Felderhof 模型の双対波動関数 $\langle 1\cdots M|B(z_1)\cdots B(z_N)|\overline{x_1}\cdots\overline{x_N}\rangle$ に関しては最近、次の結果を得た [58]。

定理 14

Felderhof 模型の双対波動関数 $\langle 1\cdots M|B(z_1)\cdots B(z_N)|\overline{x_1}\cdots\overline{x_N}\rangle$ は Schur 多項式を用いて

$$\langle 1\cdots M|B(z_1)\cdots B(z_N)|\overline{x_1}\cdots\overline{x_N}\rangle = t^{N(M-N)}\prod_{1\le j<k\le N}(z_j+tz_k)s_{\overline{\lambda}}\left(\left\{\frac{z}{t}\right\}_N\right), \tag{102}$$

と表すことができる。Young 図形 $\overline{\lambda_j}, j=1,\dots,N$ は空孔の配位 $\overline{x_j}, j=1,\dots,N$ と $\overline{\lambda_j}=\overline{x_{N-j+1}}-N+j-1$, $j=1,\dots,N$ の対応で結ばれる。また、Schur 多項式の対称変数は、$\left\{\frac{z}{t}\right\}_N = \left\{\frac{z_1}{t},\dots,\frac{z_N}{t}\right\}$ で与えられる。

論文 [58] で、定理 14 と双対波動関数の strict Gelfand-Tsetlin パターンによる特徴付けを合わせ、Schur 多項式の双対 Tokuyama 公式と呼ぶべき公式を導出したことを報告する。

最後に、Felderhof 模型のドメイン壁分配関数

$$\langle 1 \cdots M | B(z_1) \cdots B(z_M) | \Omega \rangle, \tag{103}$$

と波動関数、双対波動関数と Schur 多項式の対応である定理 13、14 を組み合わせることにより、Schur 多項式の双対 Cauchy 公式が導出されることをみて本節を終える。まず、(101) または (102) で $M = N$ とおくと、$M \times M$ ドメイン壁分配関数が

$$\langle 1 \cdots M | B(z_1) \cdots B(z_M) | \Omega \rangle = \prod_{1 \le j < k \le M} (z_j + t z_k), \tag{104}$$

と完全に因子化されることがわかる。後はスカラー積から Cauchy 公式を得るのと基本的に同じで、恒等行列の分解

$$\sum_{\{x\}} | x_1 \cdots x_N \rangle \langle x_1 \cdots x_N | = \mathrm{Id}, \tag{105}$$

を B 演算子の間に差し込めば良い。即ち、

$$\begin{aligned}
&\langle 1 \cdots M | B(z_1) \cdots B(z_M) | \Omega \rangle \\
&= \sum_{\{x\}} \langle 1 \cdots M | B(z_1) \cdots B(z_{M-N}) | x_1 \cdots x_N \rangle \langle x_1 \cdots x_N | B(z_{M-N+1}) \cdots B(z_M) | \Omega \rangle \\
&= \sum_{\{x\}} \langle 1 \cdots M | B(z_1) \cdots B(z_{M-N}) | \overline{x_1} \cdots \overline{x_{M-N}} \rangle \langle x_1 \cdots x_N | B(z_{M-N+1}) \cdots B(z_M) | \Omega \rangle,
\end{aligned} \tag{106}$$

に波動関数及び双対波動関数の Schur 多項式による表示 (101)、(102) を代入し、(104) と合わせることにより、

$$\sum_{\lambda \subseteq (M-N)^N} s_{\overline{\lambda}}\left(\frac{\boldsymbol{z}}{t}\right) s_\lambda(\overline{\boldsymbol{z}}) = \prod_{j=1}^{M-N} \prod_{k=M-N+1}^{M} \left(\frac{z_j}{t} + z_k\right), \tag{107}$$

$\overline{\boldsymbol{z}} = \{z_{M-N+1}, \ldots, z_M\}$, $\boldsymbol{z} = \{z_1, \ldots, z_{M-N}\}$ を得るが、これは Schur 多項式の双対 Cauchy 公式に他ならない [46] ($\boldsymbol{z}$ を $t\boldsymbol{z}$ にスケールする)。可解格子模型の分配関数を利用したこの議論により、双対 Cauchy 公式は factorial Schur 多項式にも拡張されている [51]。

9. 終わりに

本稿では可解格子模型の分配関数と対称多項式との対応及び、それに基づく対称多項式の研究の一端を紹介した。これまでに挙げてきた文献に加え、他の文献のリストの一部を以下に挙げる [59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78]。例えば有限系ではなく、半無限系の波動関数の量子逆散乱法による Hall-Littlewood 多項式やその一般化の研究が行われている [64, 70, 71]。これは半無限系を解析する代表

的な手法である頂点演算子法[79, 80, 81, 82, 83, 84] と思想的に似ていると思われるが、現在のところ両者の手法の関係は明確でないと思われる。また、Grothendieck 多項式が6頂点模型を退化させた5頂点模型の波動関数として出現することを本稿で説明したが、これはSchubert calculusにおけるexcited Young図形[30]と等価である。この他にも数え上げ幾何と量子可積分系との対応、例えばGromov-Witten不変量の母関数のcylindric Young図による記述[85] の可解模型の分配関数としての解釈や、R行列の幾何学的構成[62, 66, 67, 86, 87]がなされている。Schubert calculus [88, 89, 90] を含む数え上げ幾何や、代数的組合せ論、特殊関数論などの世界で導入された組合せ論的対象の「可解格子模型表現」を見出し、量子可積分系の世界で発展してきた代数解析的手法を持ち込み、解析することで新たな等式を発見、証明することは興味深い研究テーマであると思われる。

この他にも、量子群のべき根の模型であるFelderhof模型の波動関数が、p進体の保型表現論における多重Dirichlet級数のnonmetaplectic極限に相当する[57] ことがわかってきており、またp進版のYang-Baxter関係式が最近[55] 見つかっている。Felderhof模型は高次元表現や楕円表現などがあり、これも保型表現の対象とつながっているかもしれないと想像される。いずれもHecke代数を基礎とする量子可積分系、Schubert calculus、保型表現論の間の関連を見出していく作業は今後、重要であると思われる。

参考文献

[1] Bethe H, *Z. Phys.* **71** (1931) 205.

[2] Faddeev L D, Sklyanin E K and Takhtajan E K *Theor. Math. Phys.* **40** (1979) 194.

[3] Baxter R J *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, Academic Press, London (1982).

[4] Korepin V E, Bogoliubov N M and Izergin A G *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation functions*, Cambridge University Press, Cambridge (1993).

[5] 武部尚志 (関谷信寛 記)、可解格子模型と共形場理論の話題から、上智大学数学講究録 47 (2006).

[6] Drinfeld V *Sov. Math.-Dokl.* **32** (1985) 254.

[7] Jimbo M *Lett. Math. Phys.* **10** (1985) 63.

[8] Zamolodchikov A *Commun. Math. Phys.* **79** (1981) 489.

[9] Korepanov I G *Commun. Math. Phys.* **154** (1993) 85.

[10] Bazhanov V and Sergeev S *J. Phys. A* **39** (2006) 3295.

[11] Kuniba A, Okado M and Sergeev S *J. Phys. A* **48** (2015) 304001.

[12] Andrews G E, Baxter R J and Forrester P J *J. Stat. Phys.* **35** (1984) 193.

[13] Date E, Jimbo M, Kuniba A, Miwa T and Okado M *Lett. Math. Phys.* **17** (1989) 69.

[14] Bressoud D *Proofs and confirmations: The story of the alternating sign matrix conjecture*, MAA Spectrum, Mathematical Association of America, Washington, DC, (1999).

[15] Kuperberg G *Int. Math. Res. Not.* **3** (1996) 139.

[16] Kuperberg G *Ann. Math.* **156** (2002) 835.

[17] Okada S *J. Alg. Comb.* **23** (2001) 43.

[18] 岡田聡一、交代符号行列の数え上げとCauchy型行列式, Pfaffian、第49回代数学シンポジウム報告集原稿 (2004).

[19] 高崎金久、線形代数と数え上げ、日本評論社 (2012).

[20] Foda O, Wheeler M and Zuparic M *J. Stat. Mech.* (2009) P03017.

[21] Foda O, Wheeler M and Zuparic M *Nucl. Phys. B* **820** (2009) 649.

[22] Takasaki K KP and Toda tau functions in Bethe ansatz *New Trends in Quantum Integrable Systems* ed Feigin B, Jimbo M and Okado M (Singapore: World Scientific) (2010) p 373.

[23] 渡邊拓弥、筧三郎、ドメイン壁境界条件下での対称性付き 6 頂点模型の分配関数とタウ関数、応用力学研究所研究集会報告. 25AO-S2, (25), pp. 157-162, 2014-03.

[24] Motegi K and Sakai K *J. Phys. A: Math. Theor.* **46** (2013) 355201.

[25] Motegi K and Sakai K *J. Phys. A: Math. Theor.* **47** (2014) 445202.

[26] Motegi K in preparation.

[27] Lascoux A and Schützenberger M *C. R. Acad. Sci. Parix Sér. I Math* **295** (1982) 629.

[28] Fomin S and Kirillov A N *Proc. 6th Internat. Conf. on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, DIMACS* (1994) 183.

[29] Buch A S *Acta. Math.* **189** (2012) 37.

[30] Ikeda T and Naruse H *Adv. in Math.* **243** (2013) 22.

[31] Ikeda T and Shimazaki T *Math. Res. Lett.* **21** (2014) 333.

[32] McNamara P J *Electron. J. Combin.* **13** (2006) 71.

[33] Golinelli O and Mallick K *J. Phys. A:Math. Gen.* **39** (2006) 10647.

[34] Katsura H and Maruyama I *J. Phys. A:Math. Theor.* **43** (2010) 175003.

[35] 松枝宏明、量子系のエンタングルメントと幾何学 ホログラフィー原理に基づく異分野横断の数理、森北出版 (2016).

[36] Korepin V E *Commun. Math. Phys.* **86** (1982) 391.

[37] Izergin A *Sov. Phys. Dokl.* **32** (1987) 878.

[38] Bogoliubov N M *SIGMA* **5** (2009) 052.

[39] Wheeler M *Nucl. Phys. B* **852** (2011) 468.

[40] Motegi K and Sakai K arXiv:1507.06740.

[41] Bogoliubov N M and Nassar M *Phys. Lett. A* **234** (1997) 345.

[42] Sasamoto T and Wadati M *J. Phys. A: Math. Gen.* **31** (1998) 6057.

[43] Takeyama Y *Funckeilaj Ekvacioj* **57** (2014) 107.

[44] Takeyama Y *J. Phys. A: Math. Theor.* **47** (2014) 465203.

[45] Borodin A, Corwin I, Petrov L and Sasamoto T *Comp. Math.* **151** (2015) 1.

[46] Brubaker B, Bump D and Friedberg S *Commun. Math. Phys.* **308** (2011) 281.

[47] Felderhof B U *Physica* **65** (1973) 421.

[48] Murakami J *Infinite analysis, Adv. Ser. Math. Phys.* **16B** (1991) 765.

[49] Deguchi T and Akutsu Y *J. Phys. Soc. Jpn.* **62** (1993) 19.

[50] Foda O, Caradoc A D, Wheeler M and Zuparic M L *J. Stat. Mech.* **0703** (2007) P03010.

[51] Bump D, McNamara P and Nakasuji M *Comm. Math. Univ. St. Pauli* **63** (2014) 23.

[52] 中筋麻貴、Factorial Schur function に対する Tokuyama-type formula、数理研講究録 **1795** (2012) 88.

[53] Tokuyama T *J. Math. Soc. Japan* **40** (1988) 671.

[54] Okada S *J. Algebraic Comb.* **2** (1993) 155.

[55] Brubaker B, Buciuma V and Bump D arXiv:1604.02206.

[56] Brubaker B, Bump D, Chinta G, Friedberg S and Gunnells P E *Multiple Dirichlet series, L-functions and automorphic forms, vol 300 of Progr. Math.* Birkhäuser/Springer, New York, (2012) 65.

[57] Brubaker B, Bump B and Friedberg S Weyl Group Multiple Dirichlet Series: Type A

Combinatorial Theory, Annals of Mathematics Studies 175 Princeton University Press, Princeton, (2011).

[58] Motegi K arXiv:1606.08552.

[59] Bogoliubov N M *J. Phys. A* **38** (2005) 9415.

[60] Shigechi K and Uchiyama M *J. Phys. A* **38** (2005) 10287.

[61] Tsilevich N V *Funct. Anal. Appl.* **40** (2006) 207.

[62] Korff C and Stroppel C *Adv. in Math.* **225** (2010) 200.

[63] C. Korff *Commun. Math. Phys.* **318** (2013) 173.

[64] Borodin A arXiv:1410.0976.

[65] Korff C *Lett. Math. Phys.* **104** (2014) 771.

[66] Gorbounov V and Korff C arXiv:1402.2907.

[67] Gorbounov V and Korff C arXiv:1408.4718.

[68] Betea D, Wheeler M and Zinn-Justin P *J. Alg. Comb.* **42** (2015) 555.

[69] Betea D and Wheeler M *J. Comb. Th. Ser. A* **137** (2016) 126.

[70] Wheeler M and Zinn-Justin P *Adv. in Math.* **299** (2016) 543.

[71] Duval A and Pasquier V arXiv:1510.08709.

[72] Motegi K, Sakai K and Watanabe S arXiv:1512.07955.

[73] van Diejen J F and Emsiz E arXiv:1602.02152.

[74] Ivanov D *Multiple Dirichlet series, L-functions and automorphic forms, vol 300 of Progr. Math.* Birkhäuser/Springer, New York, (2012) 205.

[75] Brubaker B, Bump D, Chinta G, and Gunnells P E *Multiple Dirichlet series, L-functions and automorphic forms, vol 300 of Progr. Math.* Birkhäuser/Springer, New York, (2012) 93.

[76] Tabony, S.J.: *Deformations of characters, metaplectic Whittaker functions and the Yang-Baxter equation*, PhD. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, USA.

[77] Hamel A M and King R C *Elect. J. Comb.* **22** (2015) 2.

[78] Brubaker B and Schultz A *J. Alg. Comb.* **42** (2015) 917.

[79] Jimbo J and Miwa T *Algebraic Analysis of Solvable Lattice Models*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics vol. 85, AMS (1994).

[80] 中屋敷厚、「アフィン量子群の表現論と可解格子模型」、数理物理 95 予稿集、 (1995) pp95-117.

[81] 白石潤一、量子可積分系入門、別冊数理科学、サイエンス社、2003.

[82] 今野均、ELLIPTIC QUANTUM GROUPS AND INTEGRABLE SYSTEMS (楕円量子群と可積分系)、日本数学会 2000 年度秋季総合分科会無限可積分系セッション　特別講演原稿.

[83] 今野均、Elliptic QUANTUM GROUP: HOPF ALGEBROID STRUCTURE AND REPESENTATIONS (楕円量子群: Hopf algebroid 構造と表現)、日本数学会 2009 年度年会無限可積分系セッション　特別講演原稿.

[84] 桑野泰宏、2005 年度前期　神戸大学集中講義　講義メモ.

[85] Postnikov A *Duke Math. J.* **128** (2005) 473.

[86] Maulik D and Okounkov A arXiv:1211.1287.

[87] Rimanyi R, Tarasov V and Varchenko A arXiv:1411.0478.

[88] 池田岳、成瀬弘、現代のシューベルト・カルキュラス，特殊多項式論の視点から、数学 Vol. 63 (2011) No. 3 p.313-337.

[89] 前野俊昭、Schubert 多項式とその仲間たち、問題・予想・原理の数学 3、数学書房、2016.

[90] Kirillov A N *SIGMA* **12** (2016) 034.