§3　条件概率

1. 条件概率与乘法公式
2. 全概率公式
3. 贝叶斯(Bayes)公式

条件概率

在事件A发生条件下，考虑事件B发生的条件概率$P(B|A)$.

引例　两台车床加工同种机械零件共100个，现从中任取一个，

	合格品	次品	总计
第一台	35	5	40
第二台	50	10	60
总　计	85	15	100

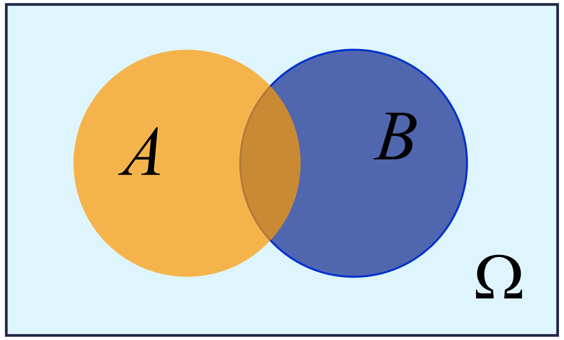
A表示取到零件是第一台生产；

B表示取到合格品；

AB表示？

$B|A$表示？

引例　向正方形Ω内随机投点(如图)，A表示事件“点落在圆形区域A内”，B表示事件“点落在圆形区域B内”，则在已知A发生条件下B发生的条件概率为



$$P(B|A)=\frac{AB\text{的面积}}{A\text{的面积}}$$

$$=\frac{AB\text{的面积}/\Omega\text{的面积}}{A\text{的面积}/\Omega\text{的面积}}$$

$$=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

条件概率

定义 设E为一试验，A，B为E中两事件，且 $P(A)>0$，

则称 $\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为事件A发生的条件下事件B发生的**条件概率**，

记作 $P(B\mid A)$，即

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

条件概率也是概率，具有概率的性质

- 非负性 $P(B|A)\geq 0$
- 规范性 $P(\Omega|A)=1$
- 可列可加性 $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\middle|A\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i|A)$
- $P(\varnothing|A)=0$
- $P(\overline{B}|A)=1-P(B|A)$
- $P((B_1-B_2)|A)=P(B_1|A)-P(B_1B_2|A)$
- $P((B_1\cup B_2)|A)=P(B_1|A)+P(B_2|A)-P(B_1B_2|A)$

乘法公式

用条件概率求积事件的概率

$$P(AB)=P(A)P(B|A)\quad (当P(A)>0时)$$

$$P(AB)=P(B)P(A|B)\quad (当P(B)>0时)$$

推广

$$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB)\quad (当P(AB)>0时)$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})\quad (当P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0时)$$

例 袋中有5只球, 2只白球, 3只黑球, 现依次取两球且放回, (1) 求第二次取白球的概率；(2)若已知第一次取到白球的条件下, 求第二次取到白球的概率.

放回抽样

解 设A表示事件“第一次取到白球”， $n_A=2\times5=10,$

B表示事件“第二次取到白球”， $n_B=5\times2=10.$

$$n=5^2=25.$$

AB表示事件“两次都取到白球”， $n_{AB}=2\times2=4$

$$P(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{2}{5} \qquad P(B)=\frac{n_B}{n}=\frac{2}{5}$$

$$P(AB)=\frac{4}{25} \qquad P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{2}{5}$$

注意区分AB与 $B\mid A$.

例 袋中有5只球,2只白球,3只黑球,现依次取两球且不放回,(1)求第二次取白球的概率；(2)若已知第一次取到白球的条件下,求第二次取到白球的概率.

不放回抽样

解 设A表示事件“第一次取到白球”, $n_A = C_2^1 C_4^1 = 8,$

B表示事件“第二次取到白球”, $n_B = C_2^1 C_1^1 + C_3^1 C_2^1 = 8$

$$n = C_5^1 C_4^1 = 20.$$

AB表示事件“两次都取到白球”, $n_{AB} = C_2^1 C_1^1 = 2$

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{2}{5} \qquad P(B) = \frac{n_B}{n} = \frac{2}{5}$$

$$P(AB) = \frac{1}{10} \qquad P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1}{4}$$

例 某人在箱子上锁好了一把锁后,将两把钥匙和另外3把形状大小大致一样的钥匙放在了一起,过了很长时间要打开箱子却忘记了哪两把钥匙能开锁,就拿起5把钥匙逐次试开,求他在3次内能打开这把锁的概率.

解 设A 表示"三次内打开锁",

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{3\times 2\times 1}{5\times 4\times 3}=0.9$$

又解 设A_i 表示"第i次打开锁",

例　袋子中装有a个白球, b个黑球, 每次任取一球观察颜色后放回, 同时再放入同颜色的球c个, 连续进行四次, 求第一、二次取白球, 第三、四次取黑色的概率.

传染病模型

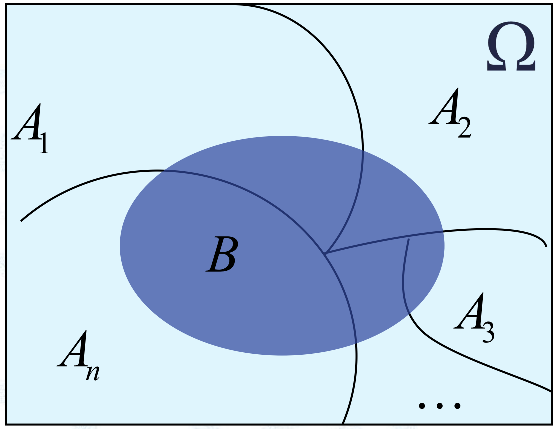
全概率公式

全概率公式

设$A_1, A_2, \cdots, A_n$为Ω 中的事件,满足

（1） $A_i A_j = \Phi, i \neq j, i, j = 1,2,\cdots,$

（2） $\bigcup_i A_i = \Omega.$



称$A_1, A_2, \cdots, A_n$为Ω 的一个(有限)分割 或完全事件组.

如果$P(A_i) > 0(i = 1, 2, \cdots, n)$, $B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i B$, $(A_i B)(A_j B) = \varnothing$.

全概率公式 $$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)$$

例　袋中有5只球, 2只白球, 3只黑球, 依次不放回的取两球, 求第二次取白球的概率.

解　设B表示事件“第一次取到白球”,

A表示事件“第二次取到白球”,

由全概率公式有

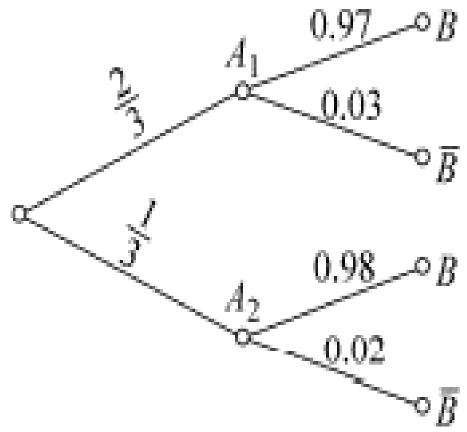
$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})$$

$$=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{2}{5}.$$

例　两台车床加工同样的零件，第一台出现废品的概率是0.03，第二台出现废品的概率是0.02，加工出来的零件放在一起，并且已知第一台加工的零件比第二台加工的零件多一倍，求任意取出的零件是合格品的概率.

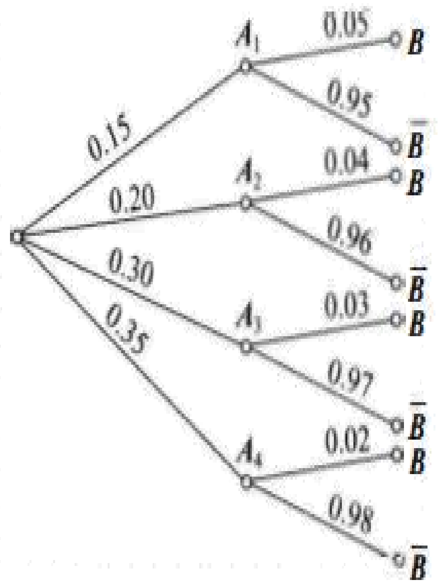
解　设 A_i 表示事件"取到第 i 台加工的零件"，$i=1, 2$，

B 表示事件"恰好取到合格品"，



例　某车间有四个班组生产同一种产品，其产量分别占总产量的15%、20%、30%、35%，次品率分别为0.05、0.04、0.03、0.02，现从全部产品中任取一件，问恰好取到次品的概率是多少？

解　设A_i表示事件“取到第i组的产品”，i=1, 2, 3, 4，
B表示事件“恰好取到次品”，



$$P(B)=\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B\mid A_i)$$

$$=0.15\times0.05+0.2\times0.04+0.3\times0.03+0.35\times0.02$$

$$=0.0315$$

贝叶斯公式

设Ω为试验E的基本空间, B为任一事件, $A_1, A_2, \cdots, A_n$为Ω的一个划分, 且$P(A_i)>0$, $i=1,2\cdots n$, 如果$P(B)>0$, 则

$$P(A_j \mid B)=\frac{P(A_j)P(B \mid A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)}, \quad j=1,2,\cdots,n.$$ 贝叶斯公式

其中 $P(A_i)$ —— 先验概率

它是由以往的经验得到的,它是事件 B 的原因.

$P(A_i \mid B)$ —— 后验概率

它是得到了信息 — B 发生后, 再对导致 B发生的原因发生的可能性大小重新加以评估.

例 某车间有四个班组生产同一种产品,其产量分别占总产量的 15%、20%、30%、35%,次品率分别为0.05、0.04、0.03、0.02,现从全部产品中任取一件,问(1)恰好取到次品的概率是多少?
(2)此次品由哪个班组生产的可能性最大?

解 设 A_i 表示事件“取到第i 组的产品”, $i=1, 2, 3, 4$,
B 表示事件“恰好取到次品”,

(1) $$P(B)=\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B\mid A_i)$$

$$=0.15\times0.05+0.2\times0.04+0.3\times0.03+0.35\times0.02=0.0315$$

(2) $$P(A_1\mid B)=\frac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{P(B)}=\frac{0.15\times0.05}{0.0315}=0.2381$$

$$P(A_2\mid B)=0.2540,\qquad P(A_3\mid B)=\boxed{0.2857,}\qquad P(A_4\mid B)=0.2222.$$

例　在电报通讯中，发送端发出的信号是由“· ”和“–”两种信号组合的序列．由于受到随机干扰，接收端收到的是“· ”、“–”和“不清”三种信号．假设发送“· ”、“–”的概率分别为0.6和0.4；在发“· ”时，收到“· ”、“–”和“不清”的概率分别为0.7、0.1和0.2；在发“–”时，收到“· ”、“–”和“不清”的概率分别为0.1、0.8和0.1．求

(1) 接收到“· ”、“–”和“不清”的概率；

(2) 在接收到“不清”的条件下，问发送信号是“·”或“–”的概率各为多少？

解　设A_1和A_2分别表示事件发送“· ”和“–”，

B_1表示收到“· ”，B_1 表示收到“–”，B_3表示收到“不清”．

(1)　$P(B_1)=P(A_1)P(B_1\mid A_1)+P(A_2)P(B_1\mid A_2)=0.6\times 0.7+0.4\times 0.1=0.46$

同理　$P(B_2)=0.38$　　$P(B_3)=0.16$

例 在电报通讯中，发送端发出的信号是由“· ”和“–”两种信号组合的序列．由于受到随机干扰，接收端收到的是“· ”、“–”和“不清”三种信号．假设发送“· ”、“–”的概率分别为0.6和0.4；在发“· ”时，收到“· ”、“–”和“不清”的概率分别为0.7、0.1和0.2；在发“–”时，收到“· ”、“–”和“不清”的概率分别为0.1、0.8和0.1．求

(1) 接收到“· ”、“–”和“不清”的概率；

(2) 在接收到“不清”的条件下，问发送信号是“·”或“–”的概率各为多少？

(1) $P(B_1)=0.46,\ P(B_2)=0.38,\ P(B_3)=0.16.$

(2) $$P(A_1 \mid B_3)=\frac{P(A_1)P(B_3 \mid A_1)}{P(B_3)}=\frac{0.6\times 0.2}{0.16}=0.75$$

$$P(A_2 \mid B_3)=\frac{P(A_2)P(B_3 \mid A_2)}{P(B_3)}=\frac{0.4\times 0.1}{0.16}=0.25$$

例 现阶段我国机场对入境的旅客进行核酸检测,检测其是否携带新冠病毒.假设入境的旅客中携带新冠病毒的比例为3%,核酸检测的正确率为95%(即对携带新冠病毒者其核酸检测结果是阳性的概率为0.95,对不携带新冠病毒者其核酸检测结果是阴性的概率为0.95).留学生小李回国入境时接受了新冠病毒检测.(1)求小李核酸检测结果为阳性的概率?(2)如果小李的核酸检测结果为阳性,求小李确实携带新冠病毒的概率?

解 设A表示检测结果为阳性,C表示携带新冠病毒,

$$P(C)=0.03,\quad P(A\mid C)=0.95, P(\bar{A}\mid\bar{C})=0.95,\quad P(A\mid\bar{C})=1-P(\bar{A}\mid\bar{C})=0.05,$$

(1) $P(A)=P(C)P(A\mid C)+P(\bar{C})P(A\mid\bar{C})=0.03\times0.95+0.97\times0.05=0.077.$

(2) $P(C\mid A)=\dfrac{P(C)P(A\mid C)}{P(C)P(A\mid C)+P(\bar{C})P(A\mid\bar{C})}=\dfrac{0.03\times0.95}{0.03\times0.95+0.97\times0.05}=0.37.$

例 将根据以往的临床记录, 关于某种诊断癌症的实验, A表示实验反应为阳性, C表示被诊断者患有癌症, 且 $P(A|C)=0.95, P(\bar{A}|\bar{C})=0.95$, 现对自然人群普查, 设被实验的人患有癌症的概率为0.005, 即$P(C)$=0.005,求$P(C|A)$.

事件的独立性

例 袋中有5只球，2只白球，3只黑球，现依次取两球，(1)求第二次取白球的概率，(2)若已知第一次取到白球的条件下，求第二次取到白球的概率.

放回抽样

不放回抽样

解 设A表示“第一次取到白球”，B表示“第二次取到白球”，

放回抽样：

$$P(A)=\frac{2}{5},\quad P(B)=\frac{2}{5},$$

$$P(AB)=\frac{4}{25},$$

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{2}{5}.$$

不放回抽样：

$$P(A)=\frac{2}{5},\quad P(B)=\frac{2}{5},$$

$$P(AB)=\frac{1}{10},$$

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{4}.$$

事件的独立性

定义 设A、B是试验E的两个随机事件，如果

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则称事件A与事件B**相互独立**.

注1. 事件A与B相互独立的充分必要条件

$$P(B|A)=P(B),\qquad P(A)>0.$$

$$P(A|B)=P(A),\qquad P(B)>0.$$

2. 若事件A与B相互独立，则 A与$\overline{B}$，B与$\overline{A}$，$\overline{A}$与$\overline{B}$均独立.

2. 若事件A与B相互独立, 则 A与$\overline{B}$, B与$\overline{A}$, $\overline{A}$与$\overline{B}$均独立.

仅证 A与$\overline{B}$独立 $\Rightarrow A$与B独立.

事实上, $P(AB) = P(A) - P(A\overline{B})$

$$= P(A) - P(A)P(\overline{B})$$

$$= P(A)[1 - P(\overline{B})]$$

$$= P(A)P(B)$$

同理,可证明其他结论.

3. 若 $P(A)>0, P(B)>0$, 则事件 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 相互独立与 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 互不相容不能同时成立.

$$P(AB)=P(A)P(B)>0$$

$$P(AB)=P(\Phi)=0$$

4. 必然事件 Ω 和不可能事件 Φ 与任何事件都是独立的.

$$P(A\Omega)=P(A)=P(A)\cdot 1 \qquad P(A)P(\Omega)=P(A)\cdot 1$$

$$P(A\Phi)=P(\Phi)=0=P(A)\cdot 0 \qquad P(A)P(\Phi)=P(A)\cdot 0$$

5. 事件是否相互独立需由问题实际意义来判断.

例 A与B相互独立, $P(A)=0.4, P(B)=0.7$ ，求 $P(A-B)$.

解

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$
$$=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$$
$$=0.4+0.7-0.4\times 0.7=0.82$$

$$P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$$
$$=P(A)-P(A)P(B)$$
$$=0.4-0.4\times 0.7=0.12$$

$$P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})=0.4\times 0.3=0.12$$

例　两人分别独立地向同一目标各射击一次，甲命中率为0.9，乙命中率为0.8，求目标被击中的概率.

解　设A_1表示事件“甲击中目标”；A_2表示事件“乙击中目标”；B表示事件“目标被击中”.

则$B = A_1 \cup A_2$. 又A_1与A_2相互独立，于是

$$P(B) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2)$$

$$= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) = 0.9 + 0.8 - 0.9 \times 0.8 = 0.98$$

另解　$\overline{B} = \overline{A_1}\,\overline{A_2}$,

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) = 1 - 0.1 \times 0.2 = 0.98$$

三个事件的独立性

定义 设A、B、C为三个事件, 如果

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

$$P(AC)=P(A)P(C),$$

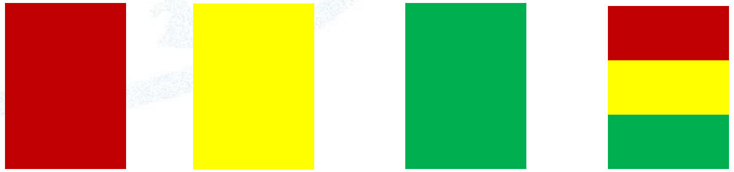
$$P(BC)=P(B)P(C),$$

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C),$$

则称事件A、B、C 相互独立.

注 1. 三个事件相互独立, 必两两相互独立, 但反之不然.

例　设有4张同样的卡片, 1张涂有红色, 1张涂有黄色, 1张涂有绿色, 1张涂有红、黄、绿三种颜色. 从这4张卡片中任取1张卡片, 用A, B, C分别表示事件“取出的卡片上涂有红色”,“取出的卡片上涂有黄色”,“取出的卡片上涂有绿色”, 考虑事件的独立性.



n个事件的独立性

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为n个事件, 如果对于任意正整数 $k(2 \le k \le n)$ 及这n个事件中的任意 $k(k \le n)$ 个事件 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_k}$, 都有

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})$$

则称n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立.

注 若事件 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 相互独立, 则

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1) P(A_2) \cdots P(A_n)$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1}) P(\overline{A_2}) \cdots P(\overline{A_n})$$

例 某一系统中的一个元件正常工作的概率叫做该元件的可靠性,由若干个元件组成的系统正常工作的概率叫做该系统的可靠性. 设有3个元件,每个元件的可靠性均为 $r(0<r<1)$,且各元件是否正常工作是相互独立的,试求由这3个元件按(1)串联(2)并联而成的系统的可靠性.

解 设A_i表示事件"第i个元件正常工作"($i=1,2,3$),

A 表示事件"串联系统正常工作", $A=A_1A_2A_3$,

B 表示事件"并联系统正常工作". $B=A_1\cup A_2\cup A_3$.

(1) $P(A)=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=r^3$

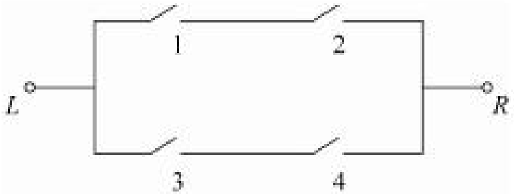
(2) $P(B)=P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=1-(1-r)^3$

$=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)=3r-3r^2+r^3$

例 已知电路图, 各继电器开合与否相互独立, 且每一继电器闭合的概率均为p, 求L到R为通路的概率.

解 设A_i表示事件"第i个元件正常工作"(i=1,2),

B 表示事件"L到R为通路".



$$P(B) = P(A_1A_2 \cup A_3A_4)$$

$$=2p^2 - p^4$$

例 若每个人的呼吸道中有感冒病毒的概率为0.002，求在有1500人(假设所有人相互独立)看电影的剧场中有感冒病毒的概率.

解 设A_i表示事件“第i个人带有感冒病毒”，$(i=1,2,\cdots,1500)$

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{1500})=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{1500})$$

$$=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_{1500})$$

$$=1-(1-0.002)^{1500}\approx 0.95$$

小概率事件的效应

例 甲乙丙三人同时独立地向同一目标进行射击,各打一发子弹,命中率依次为0.4,0.5,0.7.已知目标中一弹而被击毁的概率为0.2,中两弹而被击毁的概率为0.6,中三弹而被击毁的概率为0.8. (1)求目标被击毁的概率；(2)已知目标被击毁,求目标被击中两弹的概率.

解 设B表示目标被击毁, A_i表示目标被击中i弹,
H_i表示第i人击中，$i=1$，2，3.

例 设有三个事件A,B,C,其中$0<P(B)<1,0<P(C)<1$, 且事件B与C相互独立，证明$P(A|B)=P(A|BC)P(C)+P(A|B\overline{C})P(\overline{C})$.

$$P(A|B)P(B)=P(A|BC)P(C)P(B)+P(A|B\overline{C})P(\overline{C})P(B).$$

伯努利概型

伯努利概型

n 重伯努利(Bernoulli)试验概型

- 试验重复做 n 次
- 每次试验只有两个可能的结果：$A, \bar{A}$，且 $P(A) = p(0 < p < 1)$,
- 每次试验的结果与其他次试验无关，称这 n 次试验是相互独立的,

在n重伯努利概型中, 事件A发生k次的概率为

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0,1,2,\cdots,n$$

例 某人向一目标独立射击100次,每次命中率为0.1,求恰好击中两次和至少击中一次的概率.

解 这是一个100重伯努利概型, $p=0.1$

设 B_1 表示事件"恰好击中两次",

B_2 表示事件"至少击中一次",则

$$P(B_1)=P_{100}(2)=C_{100}^{2}0.1^{2}(1-0.1)^{100-2}=0.0016$$

$$P(B_2)=1-P_{100}(0)=1-(1-0.1)^{100}=0.99997$$

例 某车间有5台同类型的机床,每台机床配备的电动机功率为10kW,已知每台机床工作时,平均每小时实际开动12min,且各台机床开动与否是相互独立的. (1)3台机床同时工作的概率;
(2)如果为这5台机床提供30kW的电力,求这5台机床能正常工作的概率.

解(1) $P_5(3) = C_5^3 0.2^3 (1-0.2)^2 = 0.0512$

(2)正常工作意味着同时开动的机床不超过3台.

$$P\{k \le 3\} = \sum_{k=0}^{3} P_5(k) = \sum_{k=0}^{3} C_5^k 0.2^k (1-0.2)^k = 0.993$$

概率很小的随机事件在一次实验中实际上几乎不发生,这一原理称为**小概率事件的实际不可能原理**,又称为**实际推断原理**.

例 设在独立重复试验中,每次试验成功的概率为0.5,问需要进行多少次试验,才能使至少成功一次的概率不小于0.9?

解 $1-P_n(0)=1-(1-0.5)^n\geq 0.9$

即$0.5^n\leq 0.1$

$n\geq 3.3$

需要进行4次试验.