第四章　随机变量的数字特征

随机变量的概率分布反映了随机变量的统计规律性，但是在实际问题中,要确定一个随机变量的分布并不容易．在许多情况下，并不需要求出随机变量的分布,只须知道从不同角度反映随机变量取值特征的若干个数字就够了,这些数字就称为**随机变量的数字特征**.

随机变量的平均取值 —— 数学期望(均值)

随机变量取值平均偏离均值的情况 —— 方差

描述两个随机变量间的某种关系的数值

—— 协方差与相关系数

引例　考虑大学生综合素质测评.

科目	A同学	B同学
专业课	98	90
数学基础课	90	93
文体活动	80	90
社会服务	70	98

§1　数学期望

1.　数学期望的概念

2.　随机变量函数的数学期望

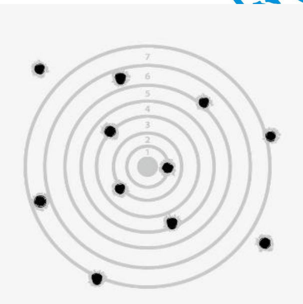
3.　数学期望的性质

数学期望的概念

引例 一名射击运动员每次射中的环数X是一个随机变量，其概率分布为

X	6	7	8	9	10
P	0.1	0.1	0.1	0.3	0.4

求该运动员的平均成绩.



解 设该运动员共射击 n次，命中6, 7, 8, 9, 10环的次数分别记作 $n_1,n_2,n_3,n_4,n_5(n_1+n_2+n_3+n_4+n_5=n)$，$n$次射击命中的总环数

$$6n_1+7n_2+8n_3+9n_4+10n_5$$

平均成绩为

$$6\frac{n_1}{n}+7\frac{n_2}{n}+8\frac{n_3}{n}+9\frac{n_4}{n}+10\frac{n_5}{n}$$

$$\approx 6\times0.1+7\times0.1+8\times0.1+9\times0.3+10\times0.4=8.8$$

随机变量的均值是以概率作为权数的加权平均值，即随机变量X的取值与其对应概率值的乘积.

定义 设离散型随机变量X的分布律为

X	$x_1 \quad x_2 \cdots x_k \cdots$
P	$p_1 \quad p_2 \cdots p_k \cdots$

则称

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$ (假设此级数绝对收敛)

为 X 的数学期望(或均值).

设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，则称

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x$$ (假设此积分绝对收敛)

为X 的数学期望(或均值).

本质 —— 加权平均 ,它是一个数，不再是随机变量 .

几种常见分布类型随机变量的数学期望

(0－1)分布

设X服从参数为p的(0－1)分布，$E(X)=p.$

解 X的分布律为

X	0	1
P	$1-p$	p

$$E(X)=0\times(1-p)+1\times p=p.$$

二项分布

设 $X \sim B(n, p)$，$E(X)=np$.

解 X 的分布律为 $p_k = P\{X=k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k=0,1,2,\cdots,n$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n} k p_k = \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\big(n-1-(k-1)\big)!} p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)}$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} \quad = np(p+1-p)^{n-1}$$

$$= np .$$

几何分布

设 $X\sim$ 参数为 p 的几何分布，$E(X)=\dfrac{1}{p}$.

解 X 的分布律 $P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p, k=1,2,\cdots,n,\cdots$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}k(1-p)^{k-1}p$$

$$=p\frac{1}{(1-(1-p))^2}$$

$$=\frac{1}{p}.$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}x^k=\frac{1}{1-x}(|x|<1)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty}x^k\right)'=\sum_{k=1}^{+\infty}kx^{k-1}$$

$$=\frac{1}{(1-x)^2}$$

泊松分布

设 $X \sim \pi(\lambda)$，$E(X) = \lambda$ ．

解 X 的分布律为 $p_k = P\{X = k\} = \dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$$

$$= \lambda \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \lambda \mathrm{e}^{-\lambda} \mathrm{e}^{\lambda} = \lambda .$$

常见离散型随机变量的数学期望

分布	概率分布	期望
参数为**p** 的 **(0-1)**分布	$P\{X=1\}=p, P\{X=0\}=1-p$	p
$B(n,p)$	$P\{X=k\}=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ $k=0,1,2,\cdots,n$	np
$\pi(\lambda)$	$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}, k=0,1,2,\cdots$	λ
参数为 **p** 的 几何分布	$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}$ $k=1,2,\cdots,n,\cdots$	$\dfrac{1}{p}$

均匀分布

设X在 $[a, b]$上服从均匀分布，$E(X)=\dfrac{a+b}{2}$.

解 X的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x=\int_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x=\frac{a+b}{2}$$

指数分布

设 X 服从参数为 λ 的指数分布，$E(X)=\lambda$.

解 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x \;=\int_{0}^{+\infty}\lambda x e^{-\lambda x}\mathrm{d}x$$

$$=-\int_{0}^{+\infty} x\,\mathrm{d}e^{-\lambda x} \quad =1/\lambda .$$

正态分布

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$E(X) = \mu$.

解 X 的概率密度为 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{令}\frac{x-\mu}{\sigma}=t}{=\!=\!=\!=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma t + \mu) \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t + \mu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t \quad = \mu .$$

常见连续型随机变量的数学期望

分布	概率密度	期望
区间(a,b)上的均匀分布	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$
参数为λ 的指数分布	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$	$\dfrac{1}{\lambda}$
$N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ

例 设X服从 柯西(Cauchy)分布，概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},\qquad -\infty<x<+\infty$$

求其数学期望.

解 $$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\pi(1+x^2)}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)}dx^2$$

无穷积分发散， 故 X 的数学期望不存在!

注 不是所有的随机变量都有数学期望

例 设一个游戏，袋中有相同的球20个，10红10白，记红球10分，白球5分. 随机取球10个，分值相加，奖惩如下

分	100	95	90	85	80	75	70	65	60	55	50
奖	50	30	20	10	-3	-5	-3	10	20	30	50

游戏对参玩者有利否.

解 设X表示取到红球数， $P\{X=k\}=\dfrac{C_{10}^{k}C_{10}^{10-k}}{C_{20}^{10}}, k=0,1,\cdots,10.$

总分值为 $10k+5(10-k)=50+5k,$

设Y表示奖金额， $E(Y)=-1.12.$

X	5	4或6	3或7	2或8	1或9	0或10
Y	-5	-3	10	20	30	50
P	34.37%	47.74%	15.59%	2.191%	0.108%	0.001%

随机变量函数的数学期望

随机变量的函数的数学期望

设已知随机变量X的分布，随机变量 Y 是随机变量 X 的函数:$Y=g(X)$，求Y 的数学期望.

随机变量的函数的数学期望的求法

- 先求随机变 量 Y 的分布,再求数学期望;
- 直接求解法.

定理 设随机变量Y是 X 的函数 $Y=g(X)$,

(1)若X为**离散型**随机变量 ,概率分布为 $p_k=P\{X=x_k\}$, $k=1,2,\cdots$

如果 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$ 绝对收敛，则随机变量 Y 的数学期望是

$$E(Y)=E\big(g(X)\big)=\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k.$$

(2)若X为**连续型**随机变量，其概率密度为$f(x)$,

如果广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，则随机变量 Y 的数学期望是

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$$

例 某摊贩出售某种小商品，每销售一件可赚15元，据以往资料，每天的销售量X是随机变量，其分布律为

X	0	1	2	3
P	0.4	0.3	0.2	0.1

求一天的平均利润.

例 设X的分布律为

X	-2	-1	0	$1/2$	1
P	$1/6$	$1/3$	$1/4$	$1/12$	$1/6$

求 $E(X^2), E(aX+b)$.

解 $$E(X^2)=(-2)^2\times\frac{1}{6}+(-1)^2\times\frac{1}{3}+0^2\times\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{12}+1^2\times\frac{1}{6}=\frac{19}{16}$$

$$E(aX+b)=(-2a+b)\times\frac{1}{6}+(-a+b)\times\frac{1}{3}+b\times\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}a+b\right)\times\frac{1}{12}+(a+b)\times\frac{1}{6}=-\frac{11}{24}a+b.$$

例 设 $X \sim N(0,1)$,求 $Y=X^2$ 的数学期望.

解 $$E(Y)=E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \mathrm{d}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x \right)$$

$$=1$$

例 设国际市场每年对我国某种商品的需求量是一个随机变量X(单位t),服从[2000,4000]上的均匀分布.已知该商品每售出1t可赚外汇3万美元，但若销售不出，则每吨需仓储费用1万美元.试问外经贸每年应组织多少货源才能使收益最大.

解 设y为供货源量，Y为收益,

$$Y=g(X)=\begin{cases}3y, & X\geq y,\\ 3X-(y-X), & X<y.\end{cases}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx=\frac{1}{2000}\int_{2000}^{4000}g(x)dx$$

$$=\frac{1}{2000}\int_{2000}^{y}(4x-y)dx+\frac{1}{2000}\int_{y}^{4000}3ydx=\frac{1}{1000}(-y^2+7000y-4\times10^6)$$

$y=3500$时，收益达最大.

定理 设随机变量Z是 X、Y 的函数$Z=g(X, Y)$，

(1) 若(X, Y)为二维离散型随机变量，联合分布律为

$$p_{ij}=P\{X=x_i, Y=y_j\}, \quad i,j=1,2,\cdots$$

如果$\sum\limits_{j=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}$ 绝对收敛，则随机变量Z 的数学期望是

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}$$

(2) 若(X,Y)为二维连续型随机变量,联合概率密度为$f(x, y)$，

如果$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 绝对收敛，则随机变量Z 的数学期望是

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例 设(X, Y)的联合密度为 $f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & 其它. \end{cases}$

求 $E(X)$、 $E(XY)$.

解 $$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty} xe^{-(x+y)}\mathrm{d}y=1.$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty} xye^{-(x+y)}\mathrm{d}y=1.$$

例 设(X, Y)的联合密度为 $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, |y|<x, \\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

求 $E(X)$、$E(Y)$、$E(XY)$.

解 $$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{-x}^{x} x\mathrm{d}y=\frac{2}{3}.$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{-x}^{x} y\mathrm{d}y=0.$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{-x}^{x} xy\mathrm{d}y=0.$$

例 设 $(X,Y)\sim N(0,0,1,1,0)$，求 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的数学期望

解 $$E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{x^2+y^2}\,f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{x^2+y^2}\,\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{0}^{2\pi}\left(\int_{0}^{+\infty}r\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}r\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

例 设$X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(0,1)$, X, Y相互独立，求$E(\max\{X, Y\})$.

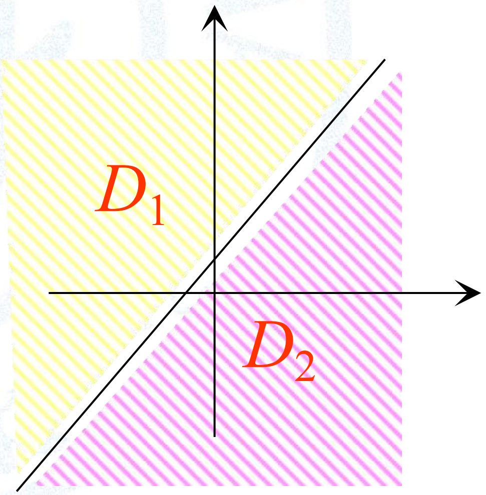
解 $$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$E(\max\{X,Y\}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \max\{x,y\} f(x,y)\,dxdy$$

$$= \iint_{D_1} \max\{x,y\} f(x,y)\,dxdy + \iint_{D_2} \max\{x,y\} f(x,y)\,dxdy$$

$$= \iint_{D_1} y \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dxdy + \iint_{D_2} x \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dxdy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx \int_x^{+\infty} y e^{-\frac{y^2}{2}}dy + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy \int_y^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$



$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx \int_x^{+\infty} y e^{-\frac{y^2}{2}}dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

数学期望的性质

数学期望的性质

设 C 为常数,$E(X)$ 和 $E(Y)$ 都存在.

性质1 $E(C)=C$

性质2 $E(CX)=CE(X)$

性质3 $E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$

注 $E(X+C)=E(X)+C$

$$E(aX+bY+C)=aE(X)+bE(Y)+C$$

性质4 若X与Y相互独立，则 $E(XY)=E(X)E(Y)$.

性质4 若X与Y相互独立，则 $E(XY)=E(X)E(Y)$.

证 只对连续型加以证明.

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)\mathrm{d}y$$

$$=E(X)E(Y).$$

注 若$E(XY)=E(X)E(Y)$，X,Y不一定独立.

反例 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, & -1<x<1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}, & -1<y<1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$, 即随机变量X,Y不相互独立。

但 $E(X)=\int_{-1}^{1}x\dfrac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}dx=0;\quad E(XY)=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}xy\dfrac{1}{\pi}dxdy=0;$

$E(XY)=E(X)E(Y)=0.$

例 设(X, Y)的联合密度为$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & 其它. \end{cases}$

求 $E(X)$、$E(XY)$.

解 $f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, x>0, \\ 0, \quad x\le 0, \end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y}, y>0, \\ 0, \quad y\le 0, \end{cases}$

可见X与Y独立. $E(XY)=E(X)E(Y)=1.$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty} xe^{-(x+y)}\mathrm{d}y=1.$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty} xye^{-(x+y)}\mathrm{d}y=1.$$

例 设X和Y将是两个相互独立的随机变量，其概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-(y-2)}, & y>2,\\ 0, & y\le 2,\end{cases}$$

求随机变量 $Z=XY$的数学期望.

解

$$E(Z)=E(XY)=E(X)E(Y)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 2x^2\mathrm{d}x\int_2^{+\infty} y e^{-(y-2)}\mathrm{d}y=\frac{2}{3}\times 3=2$$

例 柯西-施瓦茨(Cauchy-Schwarz)不等式

设 X，Y 是两个随机变量，$E(X^2), E(Y^2)$都存在，则

$$[E(XY)]^2 \le E(X^2)E(Y^2).$$

证明 对任意实数t，令

$$g(t) = E[(X + tY)^2] = E(X^2 + 2tXY + t^2Y^2)$$

$$= E(X^2) + 2tE(XY) + t^2E(Y^2).$$

由于$g(t) \ge 0$，故

$$\Delta = 4[E(XY)]^2 - 4E(X^2)E(Y^2) \le 0.$$

例 一颗骰子掷三次，求出现的点数之和X的数学期望.

解 设第i次出现的点数为X_i，$i=1,2,3$,

$$P\{X_i=k\}=\frac{1}{6},k=1,2,\cdots,6.$$

$$E(X_i)=\frac{1+2+\cdots+6}{6}=\frac{7}{2},$$

$$E(X)=E(\sum_{i=1}^{3}X_i)=\sum_{i=1}^{3}E(X_i)=3\times\frac{7}{2}=\frac{21}{2}.$$

例 将n个球随机的放入N个空盒子中$(N \geq n)$，设每个球落入各个盒子的可能性相同，且每个盒子都可以容纳n个球，求有球的盒子数 X的数学期望.

解 令随机变量 $X_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{个盒子有球}, \\ 0, & \text{第}i\text{个盒子无球}. \end{cases}$ $i = 1, 2, \cdots, N.$

则 $X = \sum_{i=1}^{N} X_i$

例 一民航机场的送客汽车载有20位旅客，自机场开始，沿途有10个车站.假设每个旅客在各站下车是等可能的，且各旅客是否下车相互独立.如果到达一个车站没有旅客下车，就不停车.以X个表示停车次数，求$E(X)$.

解 设 $X_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{个车站有旅客下车},\\ 0, & \text{第}i\text{个车站没有旅客下车}.\end{cases}$ $i=1,2,\cdots,10.$

则 $X=\sum_{i=1}^{10}X_i$

X_i	0	1
P	$\left(\frac{9}{10}\right)^{20}$	$1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}$

$$E(X)=E(\sum_{i=1}^{10}X_i)=\sum_{i=1}^{10}E(X_i)$$

$$=10\left[1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}\right]\approx 8.784$$


竭诚奉献

§2 方差

1. 方差及其计算公式

2. 方差的性质

3. 随机变量的标准化

方差及其计算公式

定义 设随机变量 X，如果 $E\{[X-E(X)]^2\}$ 存在，称之为随机变量 X 的**方差**，记作

$$D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}$$

称 $\sqrt{D(X)}$ 为 X 的**均方差**或**标准差**，记作 $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$

注 描述随机变量 X 与数学期望的平均偏离程度,是一个数值.

计算 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

若 X 为离散型随机变量， $D(X)=\sum_{k=1}^{\infty}[x_k-E(X)]^2p_k$

若 X 为连续型随机变量， $D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2f(x)\mathrm{d}x$

例　股票的未来价格是随机变量，一般投资者由未来价格的期望来判定未来收益，而由方差来判定投资的风险. 设有甲乙两种股票，今年的价格都是10元，一年后甲乙价格的分布列如下表：

X(元)	8	12	15
P	0.4	0.5	0.1

Y(元)	6	8.6	23
P	0.3	0.5	0.2

试比较买这两种股票时的投资风险.

解　$E(X)=8\times 0.4+12\times 0.5+15\times 0.1=10.7(\text{元})$　　$E(Y)=10.7(\text{元})$,

$$E(X^2)=8^2\times 0.4+12^2\times 0.5+15^2\times 0.1=120.1(\text{元})$$

$$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=5.61(\text{元})\qquad D(Y)=30.09(\text{元})$$

尽管两种股票一年后价格期望值相同，但购买甲股票的投资风险较小.

几种常见分布类型随机变量的方差

(0－1)分布

设X服从参数为p的(0－1)分布, $E(X)=p, D(X)=p(1-p)$.

解 X 的分布律为

X	0	1
P	$1-p$	p

$$E(X^2)=0^2\times(1-p)+1^2\times p=p,$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=p-p^2=p(1-p).$$

二项分布

设 $X \sim B(n, p)$， $E(X)=np, D(X)=np(1-p)$ ．

解 $P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, k=0,1,2,\cdots,n$

$$E\left(X^2\right)=\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = np\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1+1)(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}(1-p)^{n-k}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}(k-1)C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}+np\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$=np(n-1)p+np$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=n(n-1)p^2+np-n^2p^2=np(1-p).$$

泊松分布

设 $X \sim \pi(\lambda)$，$E(X)=\lambda, D(X)=\lambda$.

解 $p_k = P\{X=k\} = \dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$ $k=0,1,2,\cdots$

$$E[X^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} (k-1+1)\frac{\lambda^{k-1}\mathrm{e}^{-\lambda}}{(k-1)!}$$

$$= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)\frac{\lambda^{k-1}\mathrm{e}^{-\lambda}}{(k-1)!} + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}\mathrm{e}^{-\lambda}}{(k-1)!} = \lambda^2 + \lambda,$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

几何分布

设 $X\sim$ 参数为 p 的几何分布，$E(X)=\dfrac{1}{p}, D(X)=\dfrac{1-p}{p^2}$.

解 $P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p, k=1,2,\cdots,n,\cdots$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}x^k=\frac{1}{1-x}(|x|<1)$$

$$E\left(X^2\right)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2(1-p)^{k-1}p \quad =\frac{2-p}{p^2}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}kx^{k-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}kx^{k}=\frac{x}{(1-x)^2}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=\frac{2-p}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}k^2x^{k-1}=\frac{1+x}{(1-x)^3}$$

均匀分布

设X在 $[a, b]$上服从均匀分布，$E(X)=\dfrac{a+b}{2}, D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$

解

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x=\frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$

指数分布

设 X 服从参数为 θ 的指数分布，$E(X)=\lambda, D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$.

解

$$f(x)=\begin{cases}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty} x^2 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\lambda^2},$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{\lambda^2}.$$

正态分布

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$.

解 $$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty < x < +\infty$$

$$D(X)=E[X-E(X)]^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{令\frac{x-\mu}{\sigma}=t}\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

$$=\sigma^2$$

常见离散型随机变量的方差

分布	概率分布	方差
参数为p 的(0-1)分布	$P\{X=1\}=p, P\{X=0\}=1-p$	$p(1-p)$
$B(n,p)$	$P\{X=k\}=C_n^k p^k (1-p)^{n-k},$ $k=0,1,2,\cdots,n$	$np(1-p)$
$\pi(\lambda)$	$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k=0,1,2,\cdots$	λ
参数为 p 的几何分布	$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}$ $,k=1,2,\cdots,n,\cdots$	$\dfrac{1-p}{p^2}$

常见连续型随机变量的方差

分布	概率密度	方差
区间(a,b)上的均匀分布	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
参数为λ 的指数分布	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
$N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	σ^2

方差的性质

性质1 设 C 为常数，则 $D(C)=0$.

证 $$D(C)=E[C-E(C)]^2=E(C-C)^2=E(0)=0$$

性质2 $D(CX)=C^2D(X)$

证 $$D(CX)=E[CX-E(CX)]^2=E\{C^2[X-E(X)]^2\}=C^2D(X)$$

性质3 $D(X+C)=D(X)$

证 $$D(X+C)=E[X+C-E(X+C)]^2=E[X+C-E(X)+E(C)]^2$$

$$=E[X-E(X)]^2=D(X)$$

性质4 若X与Y相互独立，$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$

证 $D(X\pm Y)=E\{[X\pm Y-E(X\pm Y)]^2\}=E\{[X-E(X)]\pm[Y-E(Y)]\}^2$

$=E\{[X-E(X)]^2\pm 2[X-E(X)][Y-E(Y)]+[Y-E(Y)]^2\}$

$=E[X-E(X)]^2+E[Y-E(Y)]^2\pm 2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$

$=D(X)+D(Y)\pm 2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$

若X与Y相互独立， $E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}=0$

则 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y).$

注 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$

性质5 随机变量X的方差$D(X)=0$的充分必要条件是

X以概率1取常数$C=E(X)$, 即$P\{X=C\}=1$

注 $D(X)=0 \not\Longrightarrow X$恒取常数

随机变量的标准化

设随机变量X的期望$E(X)$、方差$D(X)$都存在，且$D(X)>0$，则称

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$$

为 X 的标准化随机变量.

显然，$E(X^*) = 0,\ D(X^*) = 1$

例 设$X \sim B(n,p)$，求$D(X)$.

解一 公式法.

解二 引入随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$,

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第}\, i\, \text{次试验事件}\, A\, \text{发生} \\ 0, & \text{第}\, i\, \text{次试验事件}\, \overline{A}\, \text{发生} \end{cases}$$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$, 相互独立，且 $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$D(X_i) = p(1-p), i = 1, 2, \cdots, n.$$

故 $D(X) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = np(1-p).$

例 设 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 相互独立，$X \sim N(-3,1), Y \sim N(2,1)$ ，求 $D(X-2Y+7), D(XY)$.

例 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，并且具有相同的期望 μ 与方差 σ^2，$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，求 $E(\bar{X})$，$D(\bar{X})$，$\bar{X}^*$.

解

$$E(\bar{X})=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu=\mu$$

$$D(\bar{X})=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$$

$$\bar{X}^*=\frac{\bar{X}-E(\bar{X})}{\sqrt{D(\bar{X})}}=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

例 已知X, Y相互独立, 且均服从$N(0,0.5)$, 求$E(|X-Y|)$.

解 $X \sim N(0,0.5), Y \sim N(0,0.5)$

$E(X-Y)=0, D(X-Y)=1$ 故 $Z=X-Y \sim N(0,1)$

$$E(|X-Y|)=E(|Z|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}z\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\mathrm{d}z=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

例 已知 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} Ax^2+Bx, & 0<x<1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ 其中 A,B 是常数，且 $E(X)=0.5$.求(1) A,B； (2) 设 $Y=X^2$, 求 $E(Y)$, $D(Y)$.

解 (1)

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 (Ax^2+Bx)\mathrm{d}x=1 \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x(Ax^2+Bx)\mathrm{d}x=\frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A=-6, \\ B=6 \end{cases}$$

(2) $$E(Y)=E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2(-6x^2+6x)\mathrm{d}x=3/10.$$

$$E(Y^2)=E(X^4)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 f(x)dx=\int_0^1 x^4(-6x^2+6x)\mathrm{d}x=1/7.$$

$$D(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=\frac{37}{700}.$$

§3 协方差与相关系数

1. 协方差

2. 相关系数

协方差

定义 称 $E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$为X与Y的**协方差**，记作

$$\operatorname{Cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

注 $\operatorname{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

$$\operatorname{Cov}(X,X)=D(X)$$

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\operatorname{Cov}(X,Y)$$

协方差性质

性质1 $\operatorname{Cov}(X,Y)=\operatorname{Cov}(Y,X)$

性质2 $\operatorname{Cov}(aX,bY)=ab\operatorname{Cov}(X,Y)$

性质3 $\operatorname{Cov}(X+Y,Z)=\operatorname{Cov}(X,Z)+\operatorname{Cov}(Y,Z)$

例 设 $X \sim N(0,1), Y = X^2$，求 $\operatorname{Cov}(X,Y)$.

解 因为 $X \sim N(0,1)$， $E(X) = 0$.

$$E(Y) = E(X^2) = D(X) + E^2(X) = 1.$$

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X^3)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = 0.$$

相关系数

定义 若$D(X)>0, D(Y)>0$，$\text{Cov}(X,Y)$存在，则称

$$\rho_{XY}=\frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

为 X 与 Y 的**相关系数.**

若 $\rho_{XY}=0$，称 X,Y**不相关.**

注 $$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\text{Cov}(X,Y)$$
$$=D(X)+D(Y)\pm 2\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$$

相关系数的性质

性质1 $|\rho_{XY}| \le 1.$

证 由柯西—施瓦兹不等式

$$\left([E(XY)]^2 \le E(X^2)E(Y^2)\right)$$

$$[\mathrm{Cov}(X,Y)]^2 = \left\{E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}\right\}^2$$

$$\le E\left\{[X-E(X)]^2\right\}E\left\{[Y-E(Y)]^2\right\}$$

$$= D(X)D(Y)$$

因此 $|\mathrm{Cov}(X,Y)| \le \sqrt{D(X)D(Y)}$

$$|\rho_{XY}| = \left|\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}\right| \le 1.$$

性质2 若 X 与 Y 相互独立，则 $\rho_{XY} = 0$.

性质3 $|\rho_{XY}|=1$**的充分必要条件是存在常数** a, b**,使得**

$$P\{Y=a+bX\}=1.$$

证明 记$D(X)=\sigma_X^2>0, D(Y)=\sigma_Y^2>0,$ 取$b=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sigma_X^2},$

$$D\{Y-bX\}=D(Y)+b^2D(X)-2bCov(X,Y)=\sigma_Y^2+b^2\sigma_X^2-2bCov(X,Y)$$

$$=\sigma_Y^2-\frac{[Cov(X,Y)]^2}{\sigma_X^2}=\sigma_Y^2\left\{1-\frac{[Cov(X,Y)]^2}{\sigma_X^2\sigma_Y^2}\right\}=\sigma_Y^2\{1-\rho_{XY}^2\}$$

由此 $|\rho_{XY}|=1 \Leftrightarrow D\{Y-bX\}=0 \Leftrightarrow P\{Y-bX=a\}=1$ 常数 $a=E(Y-bX).$

$D(X)=0$的充要条件是X以概率1取常数$C=E(X)$, 即 $P\{X=C\}=1.$

注　1) ρ_{XY}表示X与Y线性相关程度.

2) $|\rho_{XY}|=1$表明X与Y之间以概率1存在线性关系.

$|\rho_{XY}|$ 较大，表明X与Y之间线性相关程度较好.

$|\rho_{XY}|$ 较小，表明X与Y之间线性相关程度较差.

3) 当$\rho_{XY}>0$，称X与Y正相关，随X增加Y也有增加趋势.

当 $\rho_{XY}<0$，称X与Y负相关，随X增加Y有减小趋势.

4) $\rho_{XY}=0$，X与Y不相关.

X,Y相互独立 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ X,Y不相关

相互独立就一般关系而言，不相关仅就线性关系而言.

4) $\rho_{XY}=0$， X与Y不相关.

X, Y相互独立 $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ X, Y不相关

相互独立就一般关系而言，不相关仅就线性关系而言.

5) 等价命题

X, Y不相关 $\rho_{XY}=0$

$Cov(X,Y)=0$

$E(XY)=E(X)E(Y)$

$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

6) $(X,Y)\sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, ρ即相关系数ρ_{XY},

X, Y相互独立 $\Longleftrightarrow$ X, Y不相关.

例 设 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$，求 ρ_{XY}.

解 $$\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(y-\mu_2)}{\sigma_2}-\rho\frac{(x-\mu_1)}{\sigma_1}\right]^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\text{令}\, t=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right), u=\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma_1 u\sigma_2(\sqrt{1-\rho^2}\,t+\rho u)\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma_1 u\sigma_2(\sqrt{1-\rho^2}t+\rho u)\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{dudt}$$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}u\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{du}\int_{-\infty}^{+\infty}t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{dt}+\frac{\sigma_1\sigma_2\rho}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}u^2\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{du}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{dt}$$

$$=\sigma_1\sigma_2\rho$$

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\rho$$

例 设二维随机变量 (X, Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	-1	0	1	$p_{i\cdot}$
-1	1 / 8	1 / 8	1 / 8	3 / 8
0	1 / 8	0	1 / 8	2 / 8
1	1 / 8	1 / 8	1 / 8	3 / 8
$p_{\cdot j}$	3 / 8	2 / 8	3 / 8	

判断1) X 与 Y 是否相关；2) X 与 Y 是否相互独立.

解 1)先求 (X, Y) 关于 X 和 Y 的边缘概率分布

$$E(X) = -1\times\frac{3}{8} + 0\times\frac{2}{8} + 1\times\frac{3}{8} = 0 = E(Y) \qquad E(XY) = \sum_{i,j} x_i y_j p_{ij} = 0$$

故 $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$， 因此 $\rho_{XY} = 0$ ，即 X 与 Y 不相关.

2)而 $P\{X=-1, Y=-1\} = \frac{1}{8}, P\{X=-1\}\,P\{Y=-1\} = \frac{3}{8}\times\frac{3}{8} = \frac{9}{64},$

所以 X 与 Y 不相互独立.

例 设 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1, \\ 0, & \text{其它},\end{cases}$

验证 X 与 Y 不相关，但不相互独立.

解 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\pi}\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cos\theta\mathrm{d}r=0,$$

同理 $E(Y)=0,\ E(XY)=0.$ 于是 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$

因此 $\rho_{XY}=0$，即 X 与 Y 不相关.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

解 $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & |x|\le 1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & |y|\le 1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$$f_X(x)f_Y(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi^2}\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}, & |x|\le 1, |y|\le 1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$, 所以 X 与 Y 不相互独立.

随机变量的数字特征

- 随机变量的平均取值

数学期望(均值)　$E(X)$

- 随机变量取值平均偏离均值的情况

方差　$D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}=E(X^2)-[E(X)]^2$

- 描述两个随机变量间关系

协方差　$Cov(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}=E(XY)-E(X)E(Y)$

相关系数　$\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$

§4 矩

1. 原点矩和中心矩

2. 协方差矩阵

3. n维正态分布

原点矩和中心矩

存在性前提

X的k阶原点矩　　$E(X^k)$

X的k 阶中心矩　$E\{[X-E(X)]^k\}$

X与Y的 $k+l$ 阶混合原点矩　$E(X^k Y^l)$

X与Y的 $k+l$ 阶混合中心矩　$E\{[X-E(X)]^k [Y-E(Y)]^l\}$

注　$E(X)$是X的　1阶原点矩.

$D(X)$是X的　2阶中心矩.

$\mathrm{Cov}(X,Y)$ 是X与Y的2阶混合中心矩.

例 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,求X的2阶,3阶原点矩及3阶,4阶中心矩.

解 $E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$

$$E(X^3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(x-\mu+\mu)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$$

$$= -\sigma^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \mathrm{d}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} + \mu\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$$

$$= \sigma^2 2\int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x + \mu(\sigma^2+\mu^2)$$

$$= 2\mu\sigma^2 + \mu(\sigma^2+\mu^2) = \mu^3 + 3\mu\sigma^2.$$

$$E\{[X-E(X)]^3\}=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^3\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

令$t=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$ $$=\sigma^3\int_{-\infty}^{+\infty}t^3\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=0$$

$$E\{[X-E(X)]^4\}=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^4\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$$

令$t=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$ $$=\frac{\sigma^4}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^4\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=3\sigma^4.$$

协方差矩阵

定义 设二维随机变量(X_1, X_2)关于X_1和X_2的二阶中心矩和二阶混和中心矩

$$c_{ij}=E\{[X_i-E(X_i)][X_j-E(X_j)]\},\quad i,j=1,2$$

都存在，称

$$C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

对称矩阵

为二维随机变量(X_1, X_2)的协方差矩阵.

例 二维随机变量 $(X_1,X_2)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ 的协方差矩阵为

$$C=\begin{bmatrix} D(X_1) & \operatorname{cov}(X_1,X_2) \\ \operatorname{cov}(X_1,X_2) & D(X_2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

推广 若 $c_{ij}=\mathrm{cov}(X_i,X_j)=E\{[X_i-E(X_i)][X_j-E(X_j)]\},\quad i,j=1,2\ldots,n$

都存在,称矩阵

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

为n维随机变量$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ 的**协方差矩阵**

n维正态分布的概率密度

设 $X^T=(X_1,X_2, \ldots,X_n)$是一个$n$维随机向量,若其概率密度为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|C|^{1/2}}\exp\{-\frac{1}{2}(X-\mu)'C^{-1}(X-\mu)\}$$

则称X服从n元正态分布.

其中C是$(X_1,X_2, \ldots,X_n)$ 的协方差矩阵.

$|C|$是它的行列式，C^{-1} 表示C的逆矩阵，

n维正态分布的几个重要性质

性质1 n维随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$服从n维正态分布的充分必要条件是 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的任意线性组合 $k_1X_1+k_2X_2+\cdots+k_nX_n$ 都服从一维正态分布，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_n$为任意常数.

性质2 如果$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 服从 n 维正态分布，设 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$ 是 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$的线性函数，则 $(Y_1,Y_2,\cdots,Y_m)$也服从m维正态分布.

性质3 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$服从 n 维正态分布，则

$$X_1,X_2,\cdots,X_n \text{ 相互独立} \Longleftrightarrow X_1,X_2,\cdots,X_n \text{ 两两不相关.}$$