§3 参数的区间估计

参数点估计是用样本算得的一个值去估计未知参数. 但是点估计值仅仅是未知参数的一个近似值，它没有反映出这个近似值的误差范围，使用起来把握不大.

区间估计正好弥补了点估计的这个缺陷 .

定义 设总体 X 的分布中含有一个未知参数 θ，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 X 的样本．如果对于给定常数 $\alpha(0<\alpha<1)$，统计量 $\theta_1=\theta_1(X_1, X_2,\ldots, X_n)$ 与 $\theta_2=\theta_2(X_1, X_2,\ldots, X_n)$ 满足

$$P\{\theta_1<\theta<\theta_2\}=1-\alpha,$$

则称 $1-\alpha$ 为**置信度(置信水平)**,

随机区间 (θ_1, θ_2) 是 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的**置信区间**,

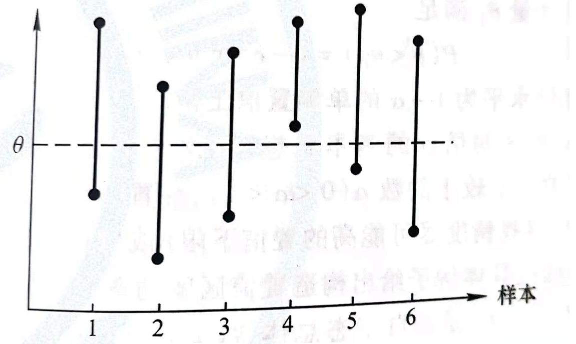
分别称 θ_1 与 θ_2 为 θ 的**置信下限**与**置信上限**.

含义 随机区间(θ_1, θ_2)以$1-\alpha$的概率包含着θ .

即对每一个样本值$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 可求得一个具体的区间

$$(\theta_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \theta_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)),$$

若重复抽样100次,得100个不同区间,那么包含θ的有 $100(1-\alpha)$ 个.



注 可靠性高(置信度$1-\alpha$ 尽可能大);

精度高(置信区间的长度$\theta_2-\theta_1$ 尽可能小).

α确定后, 置信区间选取方法不唯一, 常选最小的一个.

求未知参数θ的置信区间的一般方法

(1)明确问题,确定所求未知参数θ及置信度1- α.

构造样本X_1, X_2, … , X_n的样本函数,仅包含未知参数θ,不含有其他未知参数,且其分布已知,

$$T = T(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta).$$

(2)对于给定的置信度$1-\alpha$,根据T的分布,找到两个常数a和b,使得

$$P\{a < T(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta) < b\} = 1-\alpha.$$

(3)等价变形

$$P\{\theta_1(X_1, X_2, \cdots, X_n) < \theta < \theta_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)\} = 1-\alpha.$$

得到θ的一个置信度为1-α 的置信区间(θ_1, θ_2).

主要讨论总体为正态分布的情况,否则样本容量很大时,根据中心极限定理,可以近似为正态分布.

回顾正态总体的统计量分布

设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，从总体X中抽取样本 $X_1,X_2,\cdots X_n$，样本均值为 $\bar{X}$，样本方差为 S^2 .

1. $u=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

2. $t=\dfrac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

3. $\chi^2=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$

4. $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

设总体 $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ ，总体 $Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，**$X$与$Y$**独立，$X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 与 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 分别来自 **X** 与 **Y** 相互独立的样本，样本均值分别为$\bar{X}$和 $\bar{Y}$,样本方差分别为S_1^2,S_2^2 .

5\. $$u=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1{}^2}{n_1}+\frac{\sigma_2{}^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

6\. 当$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$时,

$$t=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2),\text{其中}S_W=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1{}^2+(n_2-1)S_2{}^2}{n_1+n_2-2}}.$$

7\. $$F=\frac{n_2}{n_1}\cdot\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{\sum_{i=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2}\sim F(n_1,n_2)$$

8\. $$F=\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\cdot\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$

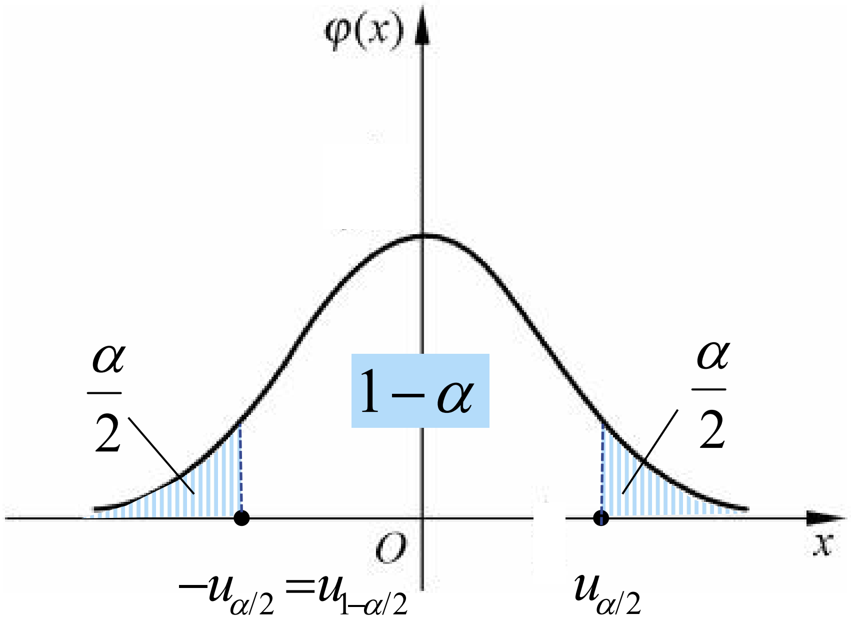
§4 正态总体均值与方差的区间估计

1. 单个正态总体均值与方差的区间估计
2. 两个正态总体均值差与方差比的区间估计
3. 单侧置信区间

单个正态总体均值和方差的区间估计

设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，从总体X中抽取样本 $X_1,X_2,\cdots X_n$, 样本均值为$\bar{X}$, 样本方差为S^2.

4.1 设σ^2已知，求μ 的置信度为1- α 的置信区间



设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，从总体X中抽取样本 $X_1,X_2,\cdots X_n$，样本均值为 $\bar{X}$，样本方差为 S^2.

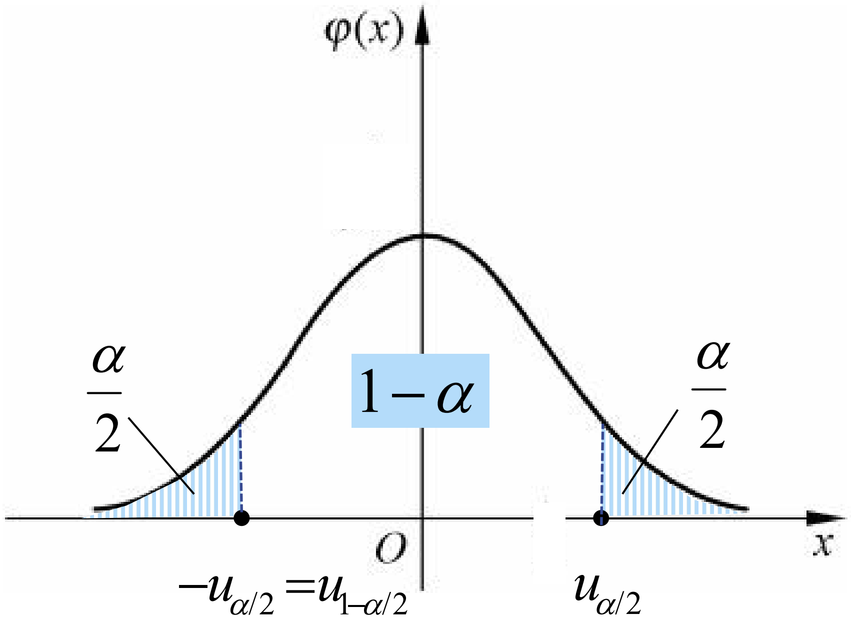
4.1 设σ^2已知，求μ 的置信度为1- α 的置信区间

$$\boxed{\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}},\quad \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right).}$$

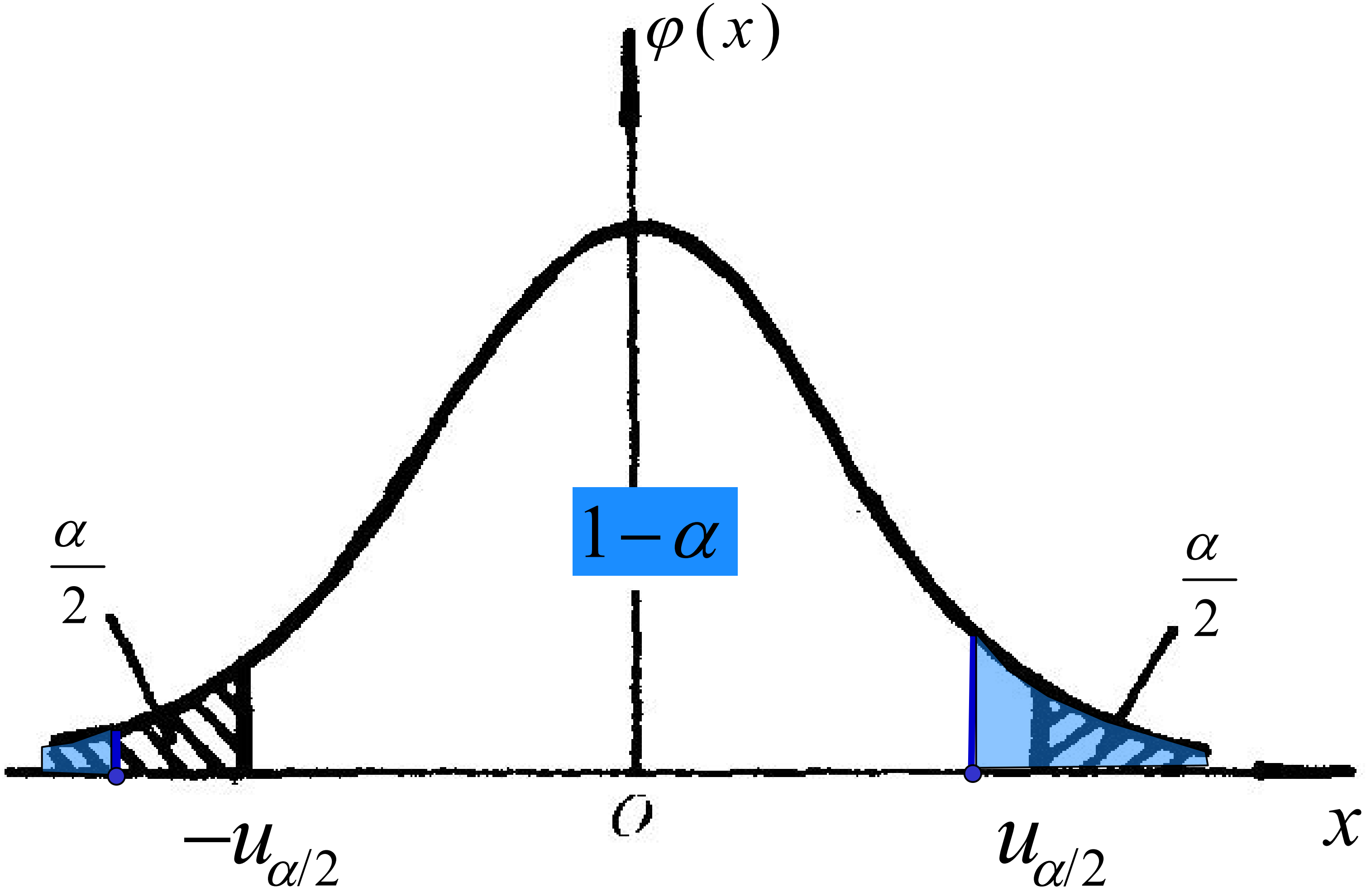
推导 $$u=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

$$P\left\{-u_{\frac{\alpha}{2}}<\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<u_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=1-\alpha$$

$$P\left\{\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}<\mu<\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=1-\alpha$$



$$P\left\{-u_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < u_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1-\alpha$$



$$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}},\quad \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right).$$

置信区间的中点 $\bar{X}$

置信区间的长度 $l=2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}$

给定α时,l与$\sqrt{n}$成反比,为使$l\le\varepsilon$,

$$n\ge\left(2u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^2.$$

例 某车间生产的螺杆直径服从正态分布 $N(\mu, 0.09)$，今随机地从中抽取5只测得直径值为

$$22.3，21.5，22.0，21.8，21.4.$$

求 μ 的置信水平为0.95置信区间.

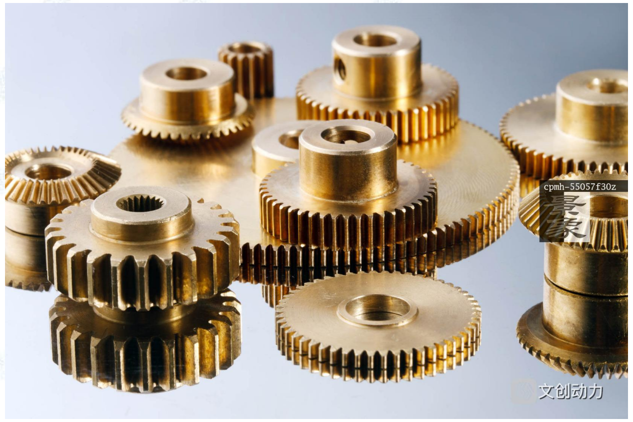
解 $n=5,\quad \bar{x}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}x_i=21.8$. 已知 $\sigma=0.3,\ \alpha=0.05$，查表得 $u_{\alpha/2}=1.96$

μ 的置信水平为0.95置信区间

$$\boxed{\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}},\quad \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right)}$$

$$=\left(21.8-\frac{0.3}{\sqrt{5}}\times 1.96,\quad 21.8+\frac{0.3}{\sqrt{5}}\times 1.96\right)$$

$$=(21.537,\quad 22.063).$$

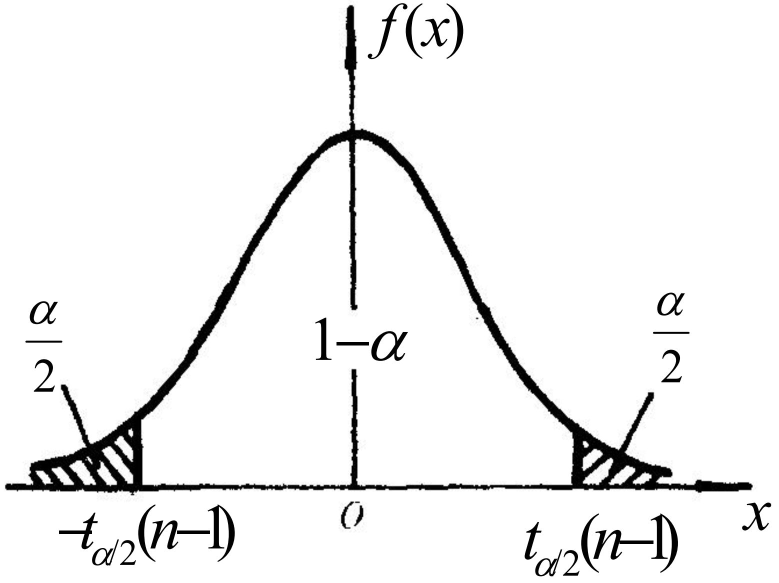


4.2 设σ^2未知，求μ的置信度为1- α的置信区间

$$\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\quad \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right).$$

推导 由于S^2是σ^2的无偏估计，因此用S^2代替σ^2，有

$$t=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1).$$



$$P\left\{-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}<t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}=1-\alpha,$$

$$P\left\{\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\mu<\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}=1-\alpha$$

例 某车间生产的螺杆直径服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，今随机地从中抽取5只测得直径值为

$$22.3，21.5，22.0，21.8，21.4.$$

求 μ 的置信水平为0.95置信区间；

解 $n=5,\quad \overline{x}=21.8.\ s^2=\frac{1}{5-1}\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2=0.135, s=0.367,$

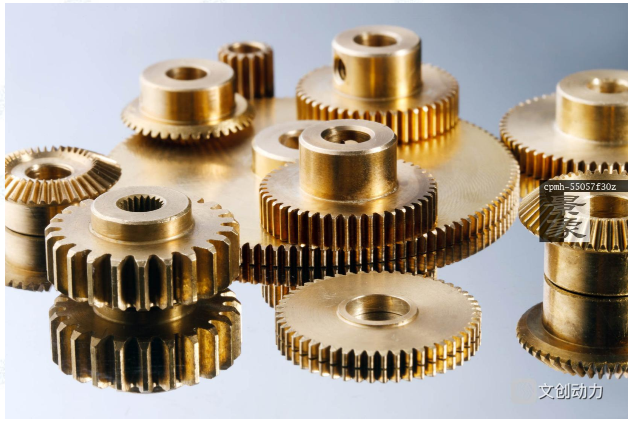
查表得 $t_{\alpha/2}(5-1)=t_{0.025}(4)\ =2.7764$

因此 μ 的0.95置信区间为

$$\left(\overline{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\quad \overline{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$$

$$=\left(21.8-\frac{0.367}{\sqrt{5}}\times 2.7764,\quad 21.8+\frac{0.367}{\sqrt{5}}\times 2.7764\right)$$

$$=(21.345,\quad 22.255).$$



4.3 设 μ 已知, 求 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

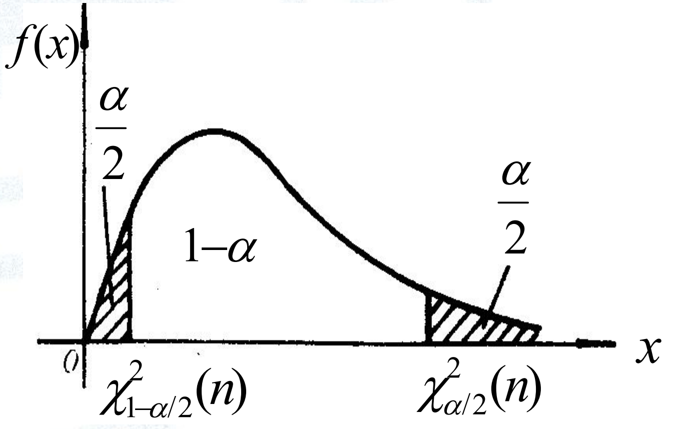
$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}, \quad \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)} \right).$$

推导

$$\chi^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n).$$

$$P\left\{ \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n) < \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n) \right\} = 1-\alpha,$$

$$P\left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)} < \sigma^2 < \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)} \right\} = 1-\alpha$$



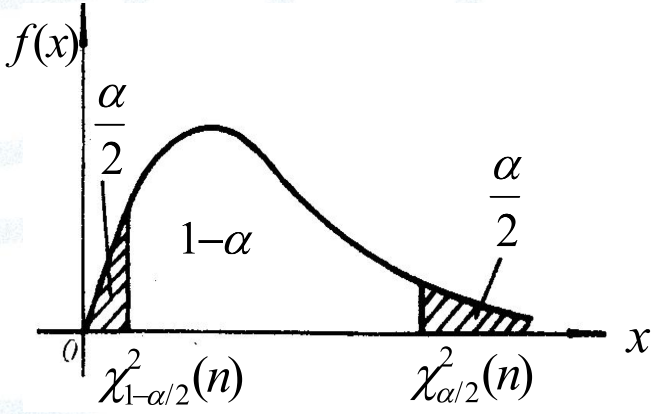
4.4 设 μ 未知, 求 σ^2 的置信度为$1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\quad \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right).$$

推导 $$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1).$$

$$P\left\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}=1-\alpha,$$

$$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}<\sigma^2<\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right\}=1-\alpha,$$



例 从正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 中抽取容量为5的样本，其观测值为

$$1.86 \quad 3.22 \quad 1.46 \quad 4.01 \quad 2.64$$

(1)已知 $\mu=3$，求 σ^2 的置信度为0.95置信区间；

(2)如果 μ 未知，求 σ^2 的置信度为0.95置信区间.

解 $n=5,\quad \alpha=0.05$

(1)已知 $\mu=3$， 查表得 $\chi^2_{1-\alpha/2}(n)=\chi^2_{0.975}(5)=0.831$

$$\chi^2_{\alpha/2}(n)=\chi^2_{0.025}(5)=12.833$$

由已知数据算得 $\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\mu)^2=4.8693$. 因此 σ^2 的0.95置信区间为

$$\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)},\ \frac{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right)=\left(\frac{4.8693}{12.833},\ \frac{4.8693}{0.831}\right)=(0.379,\quad 5.860).$$

例 从正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 中抽取容量为5的样本，其观测值为

$$1.86 \qquad 3.22 \qquad 1.46 \qquad 4.01 \qquad 2.64$$

(1)已知 $\mu=3$，求 σ^2 的0.95置信区间；

(2)如果 μ 未知，求 σ^2 的0.95置信区间.

解 $n=5, \quad \alpha=0.05$

(2) μ 未知， 查表得 $\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.975}(4)=0.484,$

$$\chi^2_{\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.025}(4)=11.143,$$

由已知数据算得 $\bar{x}=2.64, (n-1)s^2=4.2141$，因此 σ^2 的0.95置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)=\left(\frac{4.2141}{11.143}, \frac{4.2141}{0.484}\right)=(0.378, \quad 8.707).$$

两个正态总体均值差和方差比的区间估计

设总体 $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，总体 $Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，**$X$与$Y$**独立, $X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 与 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 分别来自 **X** 与 **Y** 相互独立的样本，样本均值分别为$\overline{X}$和 $\overline{Y}$,样本方差分别为 S_1^2,S_2^2 .

5.1 求 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

1) 当σ_1^2和σ_2^2均已知时

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}-u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},\quad \overline{X}-\overline{Y}+u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

推导

$$u=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1).$$

对于给定的置信度$1-\alpha$，查表得 $u_{\frac{\alpha}{2}}$，使

$$P\left\{\frac{\left|\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)\right|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}<u_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=1-\alpha$$

$$P\left\{\bar{X}-\bar{Y}-\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}u_{\frac{\alpha}{2}}<\mu_1-\mu_2<\bar{X}-\bar{Y}+\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=1-\alpha$$

例 设总体 $X \sim N(\mu_1,4)$，总体 $Y \sim N(\mu_2,6)$，分别独立地从这两个总体中抽取样本, 样本容量依次为16和24，样本均值依次为16.9和15.3，求两个总体均值差$\mu_1-\mu_2$ 的置信度为0.95的置信区间.

解 由 $n_1=16$，$n_2=24$，$\bar{x}=16.9$，$\bar{y}=15.3$，$\sigma_1^2=4$，$\sigma_2^2=6$，$\alpha=0.05$，

查附表得 $u_{a/2}=u_{0.025}=1.96$,从而 $\mu_1-\mu_2$ 置信度为 0.95 的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}-u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},\quad \bar{X}-\bar{Y}+u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

$$=\left(16.9-15.3-1.96\times\sqrt{\frac{4}{16}+\frac{6}{24}},\quad 16.9-15.3+1.96\times\sqrt{\frac{4}{16}+\frac{6}{24}}\right)=(0.214,\quad 2.986).$$

2) 当$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知时

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}-t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},\ X-\bar{Y}+t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right).$$

其中 $S_w=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$

推导

$$t=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t\left(n_1+n_2-2\right).$$

$$P\left\{\frac{\left|(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)\right|}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}<t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\right\}=1-\alpha$$

例 为了估计磷肥对某种农作物增产的作用，选20块条件大致相同的地块进行对比试验．其中10块地施磷肥，另外10块地不施磷肥，得到单位面积的产量(kg)如下：

施磷肥：	620	570	650	600	630	580	570	600	600	580
不施磷肥：	560	590	560	570	580	570	600	550	570	550

设施磷肥的地块单位面积产量$X \sim N\left(\mu_1,\sigma^2\right)$，不施磷肥的地块单位面积产量$Y \sim N\left(\mu_2,\sigma^2\right)$，求$\mu_1-\mu_2$ 的置信度为0.95的置信区间．

解 由题设，两个正态总体的方差相等，但σ^2 未知，

$$n_1=10, n_2=10, \alpha=0.05, \bar{x}=600, \bar{y}=570, s_1^2=\frac{6400}{9}, s_2^2=\frac{2400}{9}$$

$$s_w=\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}=22$$

查表得 $t_{a/2}(n_1+n_2-2)=t_{0.025}(18)=2.1009$

因此$\mu_1-\mu_2$的置信度为**0.95**的置信区间为

$$\left(\bar{x}-\bar{y}-s_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}t_{a/2}(n_1+n_2-2),\quad \bar{x}-\bar{y}+s_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}t_{a/2}(n_1+n_2-2)\right)$$

$$=\left(600-570-22\times\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}\times 2.1009,\quad 600-570+22\times\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}\times 2.1009\right)$$

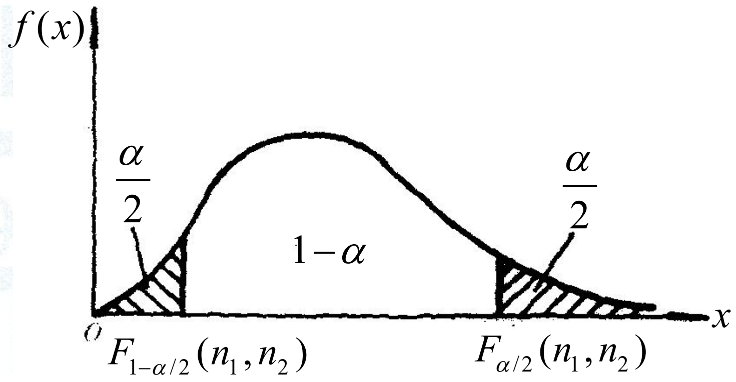
$$=(9,51).$$

5.2 求 σ_1^2/σ_2^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

1) 当 μ_1 和 μ_2 均已知时

推导

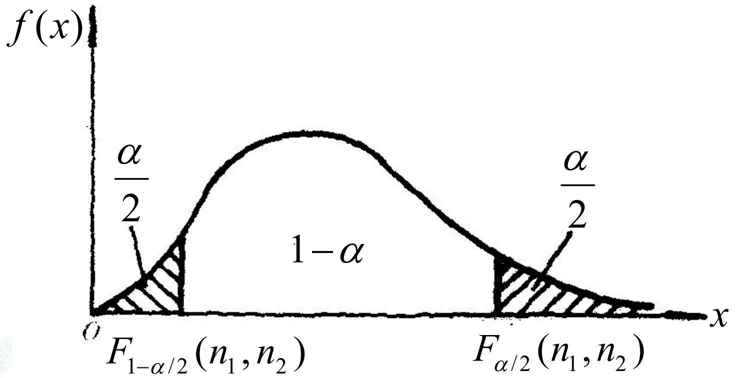
$$F=\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2}\cdot\frac{n_2\sigma_2^2}{n_1\sigma_1^2}\sim F(n_1,n_2)$$



对于给定的置信度 $1-\alpha$,

$$P\left\{F_{1-\alpha/2}(n_1,n_2)<\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2}\frac{n_2\sigma_2^2}{n_1\sigma_1^2}<F_{\alpha/2}(n_1,n_2)\right\}=1-\alpha$$

对于给定的置信度$1-\alpha$,



$$P\left\{F_{1-\alpha/2}(n_1,n_2)<\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2}\frac{n_2\sigma_2^2}{n_1\sigma_1^2}<F_{\alpha/2}(n_1,n_2)\right\}=1-\alpha$$

$$P\left\{\frac{n_2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1,n_2)}<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<\frac{n_2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1,n_2)}\right\}=1-\alpha$$

5.2 求 σ_1^2/σ_2^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

1) 当 μ_1 和 μ_2 均已知时

$$\left(\frac{n_2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1,n_2)},\ \frac{n_2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2}F_{\alpha/2}(n_2,n_1)\right)$$

推导

$$F=\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2}\cdot\frac{n_2\sigma_2^2}{n_1\sigma_1^2}\sim F(n_1,n_2)$$

例 设总体 $X \sim N(24, \sigma_1^2)$, 总体 $Y \sim N(20, \sigma_2^2)$.从总体 X 和 Y 中独立地抽得样本值如下

X：23，22，26，24，22，25；

Y：22，18，19，23，17.

求 σ_1^2/σ_2^2 的置信度为**0.95**的置信区间.

解 已知 $\mu_1=24,\ n_1=6;\ \mu_2=20$，$n_2=5$，$\sum_{i=1}^{6}(x_i-24)^2=14$ ，$\sum_{j=1}^{5}(y_j-20)^2=27.$

$\alpha=\mathbf{0.05}$． 查附表得 $F_{0.025}(6,5)=6.98$， $F_{0.025}(5,6)=5.99$.

从而可得 σ_1^2/σ_2^2 的置信度为**0.95**的置信区间为

$$\left(\frac{n_2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1,n_2)},\ \frac{n_2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2}F_{\alpha/2}(n_2,n_1)\right)=\left(\frac{5\times14}{6\times27\times6.98},\ \frac{5\times14\times5.99}{6\times27}\right)=(0.06,2.59).$$

2) 当 μ_1 和 μ_2 均未知时

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\quad \frac{S_1^2}{S_2^2}F_{\alpha/2}(n_2-1,n_1-1)\right)$$

推导 $F=\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\cdot\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$

$$P\left\{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)<\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\cdot\frac{S_1^2}{S_2^2}<F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\right\}=1-\alpha$$

$$P\left\{\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right\}=1-\alpha$$

例 从参数 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2$都未知的两正态总体$N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $N(\mu_2,\sigma_2^2)$中分别独立地抽取样本，它们的样本容量分别为$n_1=10$，$n_2=8$，样本方差分别为$s_1^2=3.6$，$s_2^2=2.8$，求二总体方差比σ_1^2/σ_2^2的置信度为0.95的置信区间.

解 这里$1-\alpha=0.95,\alpha=0.05$，查 F 分布表得

$$F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.025}(9,7)=4.82\quad F_{\alpha/2}(n_2-1,n_1-1)=F_{0.025}(7,9)=4.20$$

σ_1^2/σ_2^2 的置信度为0.95的置信区间为

$$\left(\frac{s_1^2}{s_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\quad \frac{s_1^2}{s_2^2}\cdot F_{\alpha/2}(n_2-1,n_1-1)\right)=\left(\frac{3.6}{2.8}\times\frac{1}{4.82},\quad\frac{3.6}{2.8}\times 4.20\right)=(0.27,5.42).$$

单侧置信区间

定义 设总体X的分布中含有未知参数θ，从总体X中抽取样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$,对于给定的概率$1-\alpha\left(0<\alpha<1\right)$，

如果统计量$\theta_1=\theta_1\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right)$ 满足$P\{\theta>\theta_1\}=1-\alpha$

则称随机区间$(\theta_1, +\infty)$为θ的置信度为$1-\alpha$的单侧置信区间,

θ_1称为置信度为 $1-\alpha$的单侧置信下限.

如果统计量$\theta_2=\theta_2\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right)$ 满足$P\{\theta<\theta_2\}=1-\alpha$

则称随机区间$(-\infty, \theta_2)$为θ的置信度为$1-\alpha$的单侧置信区间,

θ_2称为置信度为 $1-\alpha$的单侧置信上限.

考虑σ^2未知，置信度为1- α，求μ的单侧置信下限

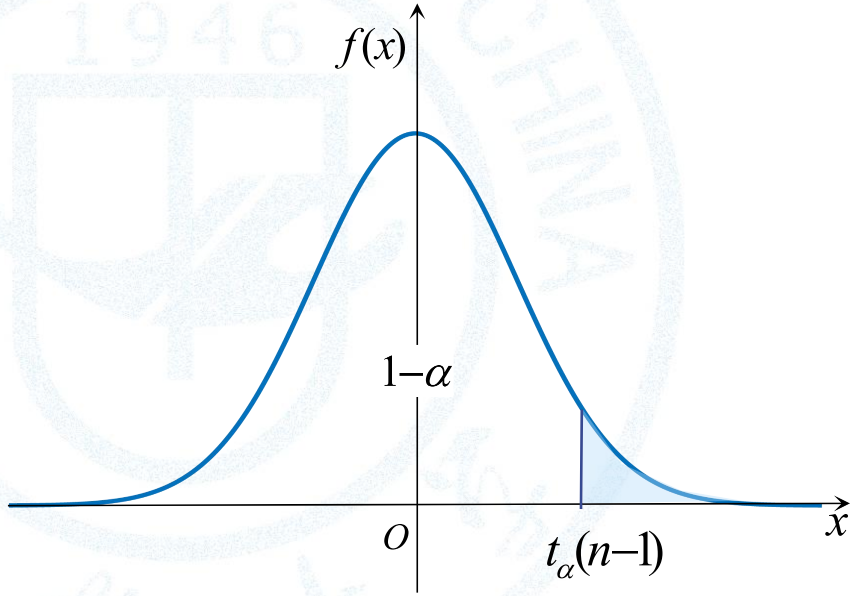
$$\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1),\quad +\infty\right).$$

推导

$$t=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1).$$

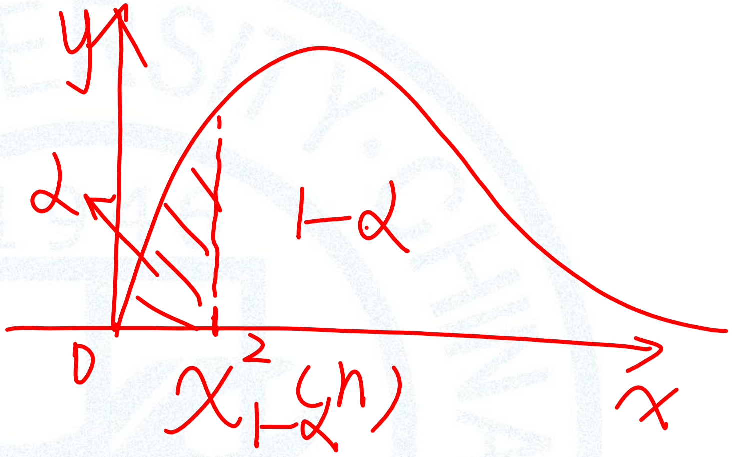
$$P\left\{\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}<t_\alpha(n-1)\right\}=1-\alpha,$$

$$P\left\{\mu>\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)\right\}=1-\alpha$$



考虑 μ 已知, 求 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的单侧置信上限

$$\left(0,\ \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi_{1-\alpha}^2(n)}\right).$$



推导

$$\chi^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n).$$

$$P\left\{\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2>\chi_{1-\alpha}^2(n)\right\}=1-\alpha,\quad P\left\{\sigma^2<\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi_{1-\alpha}^2(n)}\right\}=1-\alpha$$

例 从某批灯泡中随机地取5只作寿命试验．测得其寿命(单位：h)如下：

$$1050 \qquad 1100 \qquad 1120 \qquad 1250 \qquad 1280$$

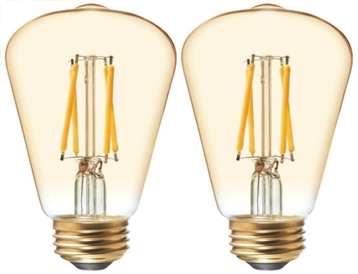
设灯泡的寿命服从正态分布，试求均值的置信度为0.95的单侧置信下限.

解 设灯泡寿命为$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，

本题中，$n=5, 1-\alpha=0.95, \alpha=0.05, \bar{x}=1160, s=99.75, t_\alpha(n-1)=t_{0.05}(4)$

μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间为

$$\boxed{\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1), \quad +\infty\right)}=\left(1160-\frac{99.78}{\sqrt{4}}\times 2.1318, +\infty\right)=(1065, +\infty)$$



亦即 μ 的0.95置信下限为1065.

附表 单个正态总体未知参数的置信区间

未知参数	条件	统计量及其分布	计算公式	置信区间
μ	σ^2已知	$u=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\sim N(0,1)$	$P\left\{-u_{\alpha/2}<\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<u_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha$	$(\bar{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2},\ \bar{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2})$
	σ^2未知	$t=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{n}\sim t(n-1)$	$P\left\{-t_{\alpha/2}(n-1)<\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}<t_{\alpha/2}(n-1)\right\}=1-\alpha$	$\left(\bar{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\ \bar{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right).$
σ^2	μ已知	$\chi^2=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$	$P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)<\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2<\chi^2_{\alpha/2}(n)\right\}=1-\alpha,$	$\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)},\ \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\right).$
	μ未知	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)<\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right\}=1-\alpha,$	$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\ \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right).$

附表 两个正态总体未知参数的置信区间

未知参数	条件	统计量及其分布	计算公式	置信区间
$\mu_1-\mu_2$	$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 已知	$u=\dfrac{\bar X-\bar Y}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}}\sim N(0,1)$	$P\left\{\dfrac{\lvert\bar X-\bar Y-(\mu_1-\mu_2)\rvert}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}<u_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha$	$(\bar X-\bar Y-u_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}},$ $\bar X-\bar Y+u_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}})$
	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 未知	$t=\dfrac{\bar X-\bar Y}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$ $S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$	$P\left\{\dfrac{\lvert\bar X-\bar Y-(\mu_1-\mu_2)\rvert}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}<t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\right\}$ $=1-\alpha$	$(\bar X-\bar Y-t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}},$ $\bar X-\bar Y+t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}})$
$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	μ_1,μ_2 已知	$F=\dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2}\cdot\dfrac{n_2\sigma_2^2}{n_1\sigma_1^2}\sim F(n_1,n_2)$	$P\left\{F_{1-\alpha/2}(n_1,n_2)<\dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2}\cdot\dfrac{n_2\sigma_2^2}{n_1\sigma_1^2}<F_{\alpha/2}(n_1,n_2)\right\}$ $=1-\alpha$	$(\dfrac{n_2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2}\dfrac{1}{F_{\alpha/2}(n_1,n_2)},$ $\dfrac{n_2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2}F_{\alpha/2}(n_2,n_1))$
	μ_1,μ_2 未知	$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(m-1,n-1)$	$P\left\{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)<\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\cdot\dfrac{S_1^2}{S_2^2}<F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\right\}$ $=1-\alpha$	$(\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\dfrac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},$ $\dfrac{S_1^2}{S_2^2}F_{\alpha/2}(n_2-1,n_1-1))$