



概率论与数理统计

刘明姬

liumj@jlu.edu.cn



课程简介

概率论与数理统计

是研究随机现象统计规律性的数学学科.

概率论

是理论基础, 从数量关系角度研究随机现象的特征、性质.

数理统计

是应用, 以概率论为理论基础, 对试验或观测到的数据, 进行整理、分析和推断, 对研究对象的性质和统计规律性作出合理的估计与判断.



第一章 随机事件及其概率

- 1 随机试验 随机事件
- 2 随机事件的概率
- 3 条件概率
- 4 事件的独立性
- 5 伯努利(Bernoulli)概型



§1 随机试验与随机事件

1. 随机试验与随机事件
2. 随机事件的关系和运算



必然现象和随机现象

引例 取球试验

试验1 袋中装有10个相同的红球，任取一个，所取到的球什么颜色？

必然现象



试验2 袋中装有10个相同的球，5个红色5个白色，任取一个，所取到的球什么颜色？

随机现象



必然现象 在一定条件下必然会发生的现象.

随机现象 在相同的条件下，可能发生也可能不发生的现象。大量重复呈现统计规律性.

概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科.

随机试验

引例 取球试验

袋中装有10个相同的球，5个红色5个白色，任取一个，所取到的球什么颜色？

通常用字母 E 表示随机试验(简称试验).



随机试验的特点

- (1) 可重复性 试验可以在相同条件下重复进行;
- (2) 可观测性 试验结果具有多种可能性，在试验之前所有可能结果明确;
- (3) 随机性 每次试验结果不确定.

样本点 随机试验最基本的结果，记为 ω .

样本空间 所有基本结果的集合， $\Omega = \{\omega\}$.



例 写出下列随机试验的样本空间

E_1 抛一枚硬币，观察正面H、反面T出现的情况.

E_2 将一枚硬币抛掷三次，观察正、反面出现的情况.

E_3 将一枚硬币抛掷三次，观察正面出现的次数.

E_4 掷一颗骰子，观察出现的点数.

E_5 生产一大批产品，直到有10件正品为止，记录生产产品的总件数.

E_6 检查一大批灯泡的寿命(单位h).



随机事件

随机事件 样本空间的子集, 是由若干样本点构成的集合, 记为 A, B, C 等.

事件发生 当事件 A 所包含的样本点有一个出现, 就说事件 A 发生了, 否则就说事件 A 未发生.

基本事件 由一个样本点组成的事件.

必然事件 样本空间 Ω , 每次试验必然发生.

不可能事件 空集 \emptyset , 每次试验都不可能发生.

例 E_4 掷一颗骰子, 观察出现的点数.

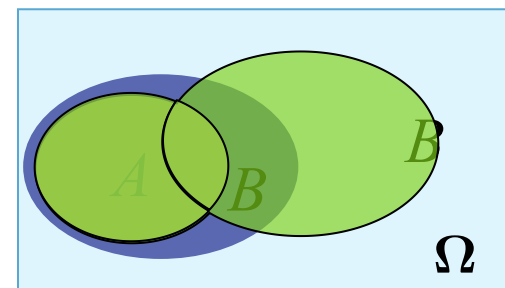
“出现偶数点”的事件可表示为 $A=\{2, 4, 6\}$,

“出现奇数点”的事件可表示为 $B=\{1, 3, 5\}$,

“出现的点数不超过3”的事件表示为 $C=\{1, 2, 3\}$.



随机事件的关系与运算



包含

$$A \subset B$$

A 发生必导致 B 发生

相等

$$A = B$$
$$A \subset B \text{ 且 } B \subset A$$

A 、 B 同一事件

并(和)

$$A \cup B$$

A 与 B 至少有一个发生

交(积)

$$A \cap B = AB$$

A 与 B 同时发生

差

$$A - B$$

A 发生, B 不发生

互不相容
(互斥)

$$AB = \Phi$$

A 、 B 不能同时发生.

互逆(对立)

$$\bar{A} = B$$

A 、 B 中有且只有一个发生

$$A \cup B = \Omega \text{ 且 } AB = \Phi$$



运算规律

交换律

$$A \cup B = B \cup A \quad AB = BA$$

结合律

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (AB)C = A(BC)$$

分配律

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \quad A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$$

对偶律

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \bar{B} \quad \overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad \overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i \quad \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i$$

吸收律

$$\text{若 } A \subset B, A \cup B = B, AB = A.$$

差化积

$$A - B = A\bar{B} = A - AB$$

逆

$$\overline{\bar{A}} = A$$

运算顺序

逆交并差, 括号优先.



例 某 A, B, C 为试验 E 的三个事件, 表示下列事件

- (1) A 与 B 发生 , C 不发生 ,
- (2) A, B, C 中至少有一个发生 ,
- (3) A, B, C 不多于两个发生 ,
- (4) A, B, C 中至少有两个发生.



例 某工人加工三个零件, 设 A_i 表示事件 “第*i* 个零件是合格品” ($i=1, 2, 3$), 试用 A_1, A_2, A_3 表示下列事件

- (1) 只有第一个零件是合格品;
- (2) 只有一个零件是合格品;
- (3) 至少有一个零件是合格品;
- (4) 最多有一个零件是合格品;
- (5) 3个零件都是合格品;
- (6) 至少有一个零件是不合格品.

- 解**
- (1) $A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$
 - (2) $A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$
 - (3) $C = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \quad \bar{C} = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$
 - (4) $D = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \cup B$
 $= \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \cup A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$
或 $D = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_2 \bar{A}_3$.
 - (5) $E = A_1 A_2 A_3$
 - (6) $F = \overline{A_1 A_2 A_3} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3$



例 设 A, B, C 是同一试验 E 的三个事件, 化简 $(A \cup B)(B \cup C)$.

例 化简 $\overline{(\overline{AB} \cup C)\overline{AC}}$.

解 原式 $= \overline{\overline{AB} \cup C \cup AC}$
 $= \overline{\overline{AB} \overline{C}} \cup AC$
 $= (A \cup B)\overline{C} \cup AC$
 $= A\overline{C} \cup B\overline{C} \cup AC$
 $= A(\overline{C} \cup C) \cup B\overline{C}$
 $= A\Omega \cup B\overline{C} = A \cup B\overline{C}$



随机试验与随机事件

1. 随机试验与随机事件
2. 随机事件的关系和运算



§2 随机事件的概率

1. 频率
2. 概率
3. 古典概型
4. 几何概型



概率的定义

频率

设 A 为试验 E 中的一个事件,把试验 E 在相同条件下重复进行 n 次,如果事件 A 发生的次数为 n_A ,则称 n_A 为事件 A 在 n 次试验中发生的**频数**.

称比值 $\frac{n_A}{n}$ 为事件 A 发生的**频率**,记为 $f_n(A)$,即 $f_n(A) = \frac{n_A}{n}$.



频率的性质

(1) **非负性**

对于任意事件 A ,有 $0 \leq f_n(A) \leq 1$;

(2) **规范性**

对于必然事件 Ω , $f_n(\Omega) = 1$;

(3) **有限可加性**

对于两两互不相容的事件 A_1, A_2, \dots, A_m ,有

(即当 $i \neq j$ 时,有 $A_i A_j = \emptyset, i, j = 1, 2, \dots, m$),
$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) = \sum_{i=1}^m f_n(A_i).$$

频率稳定性的实例

掷硬币实验 掷一枚硬币观察正面向上的次数

试验者	抛掷次数	正面朝上的次数	正面朝上的频率
德摩根	2048	1061	0.5181
蒲 丰	4040	2048	0.5069
费歇尔	10000	4979	0.4979
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005



频率具有随机波动性；

随着试验次数增加，频率呈现稳定性.

频率具有稳定性 试验次数 $n \rightarrow \infty$, 频率 $f_n(A)$ 稳定地在某一常数 p 附近摆动.

频率稳定性的实例

Dewey G. 统计了约438023个英语单词中各字母出现的频率，发现各字母出现的频率不同。

A: 0.0788	B: 0.0156	C: 0.0268	D: 0.0389	E: 0.1268	F: 0.0256
G: 0.0187	H: 0.0573	I: 0.0707	J: 0.0010	K: 0.0060	L: 0.0394
M: 0.0244	N: 0.0706	O: 0.0776	P: 0.0186	Q: 0.0009	R: 0.0594
S: 0.0634	T: 0.0987	U: 0.0280	V: 0.0102	W: 0.0214	X: 0.0016
Y: 0.0202	Z: 0.0006				



键盘设计、密码破译的依据



概率的统计定义

频率的稳定值

在相同条件下重复进行 n 次试验,如果当随 n 增大时,事件 A 发生的频率稳定地在某一常数 p 附近摆动,则称 p 为事件 A 的**概率**,记作 $P(A)$.

概率的公理化定义

设 Ω 是随机试验 E 的样本空间, 如果对于 Ω 中的每一事件 A , 有唯一实数 $P(A)$ 和它对应, 且这一事件的函数 $P(A)$ 满足下面的三条公理,

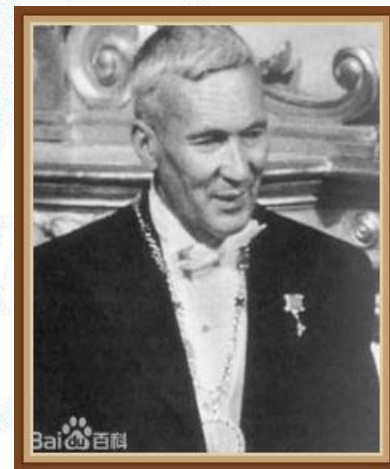
(1) **非负性** 对于任意事件 A , $P(A) \geq 0$;

(2) **规范性** 对于必然事件 Ω , $P(\Omega) = 1$;

(3) **可列可加性** 对于两两互不相容的事件 A_1, A_2, \dots ,
(即当 $i \neq j$ 时, 有 $A_i A_j = \Phi, i, j = 1, 2, \dots$)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

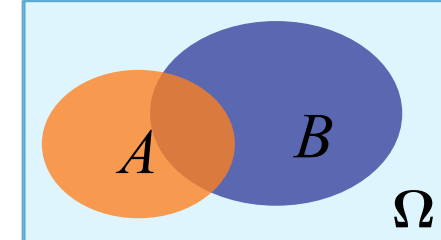
称 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**.



柯尔莫哥洛夫



概率的性质



1. $P(\emptyset) = 0.$

2. 设 A_1, A_2, \dots, A_n 两两互斥,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i). \quad \text{有限可加性}$$

3. $P(\bar{A}) = 1 - P(A).$

4. 若 $A \subset B$, 则 $P(B - A) = P(B) - P(A)$, 且 $P(A) \leq P(B).$

5. 对任一事件 A , $P(A) \leq 1.$

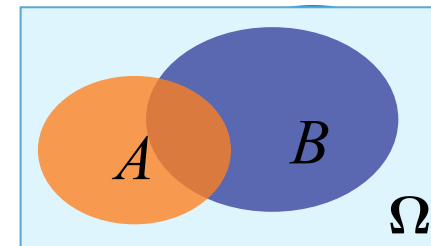
6. 对任意两个事件 A 与 B , 有

$$P(B - A) = P(B) - P(AB). \quad \text{减法公式}$$

7. 对任意两个事件 A 与 B , 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB), \quad \text{加法公式}$$

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B).$$



推广

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

加法公式的一般形式 右端共有 $2^n - 1$ 项.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)$$



例 设 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$, $P(AB) = P(AC) = \frac{1}{8}$, $P(BC) = 0$,
求 $P(\bar{A})$, $P(B - A)$, $P(B \cup C)$, $P(A \cup B \cup C)$.

解
$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$P(B - A) = P(B - AB) = P(B) - P(AB) = \frac{1}{3} - \frac{1}{8} = \frac{5}{24}$$

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(BC) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 0 = \frac{2}{3}$$

由 $BC \supseteq ABC$, 有 $0 \leq P(ABC) \leq P(BC) = 0$,

由加法公式 $P(A \cup B \cup C)$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) = \frac{3}{4}.$$



例 设 A 和 B 是同一试验 E 的两个随机事件, 且 $P(\bar{A}) = 0.5$,
 $P(\bar{A}B) = 0.2, P(B) = 0.4$, 求 $P(AB), P(A - B), P(A \cup B), P(\bar{A}\bar{B})$.



例 设 A 和 B 是同一试验 E 的两个随机事件, 证明

$$\underline{1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B}) \leq P(AB) \leq P(A \cup B)}.$$

证 因为 $AB \subset A \subset (A \cup B)$,所以

$$P(AB) \leq P(A \cup B).$$

又 $1 - P(AB) = P(\overline{AB}) = P(\bar{A} \cup \bar{B}) \leq P(\bar{A}) + P(\bar{B})$, 得

$$1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B}) \leq P(AB).$$



古典概型



排列组合有关知识复习

加法原理：完成一件事情有 n 类方法，第 i 类方法中有 m_i 种具体的方法，则完成这件事情共有 $\sum_{i=1}^n m_i$ 种不同的方法.

乘法原理：完成一件事情有 n 个步骤，第 i 个步骤中有 m_i 种具体的方法，则完成这件事情共有 $\prod_{i=1}^n m_i$ 种不同的方法.



组合 从 n 个不同的元素中取出 m 个 (不放回地) 组成一组 ,

不同的分法共有 $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

排列 从 n 个不同的元素中取出 m 个 (不放回地) 按一定的次序排成

一排 , 不同的排法共有 $A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$.

全排列 $A_n^n = n!$

可重复排列 从 n 个不同的元素中可重复地取出 m 个排成一排, 不同的排法有 n^m .



分类分组 n 个元素分 m 类，第 i 类中有 k_i 个相同的元素，
且 $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$ ，不同的排法共有

$$C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_2} \cdots C_{k_m}^{k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_m!}.$$



古典概型

(有限等可能)

设随机试验 E 具有下列特点

- (1) 基本事件的个数有限;
- (2) 每个基本事件等可能性发生.

则称 E 为古典(等可能)概型

古典概型中概率的计算公式

$$P(A) = \frac{A \text{ 包含的基本事件个数}}{\Omega \text{ 包含的基本事件总数}} = \frac{k}{n}$$



例 将一枚硬币抛掷三次, 求事件“恰有一次出现正面”的概率.

解 设 H 表示事件“出现正面”, T 表示事件“出现反面”,
 A 表示事件“恰有一次出现正面”.

$$\Omega = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\},$$

$$A = \{HTT, THT, TTH\}$$



例 将一颗匀称的骰子抛掷两次, 求(1)两次出现的点数之和等于8的概率; (2)两次出现的点数相同的概率.

解 设 (i, j) 表示事件“第一次出现 i 点, 第二次出现 j 点”.

$$\Omega = \{(i, j) \mid i, j = 1, 2, \dots, 6\} \quad n=36$$

设 A 表示事件“两次出现的点数之和等于8”,
 B 表示事件“两次出现的点数相同”. 则

$$A = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}, \quad P(A) = \frac{5}{36}$$

$$B = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}, \quad P(B) = \frac{6}{36}$$



例 设某一箱子装有同种类型的电子元件100个，其中有95个合格品，5个不合格品。从箱子中任取4个电子元件，问其中恰有1个不合格品的概率是多少？

解 设 A 表示“取出的4个元件中恰有1个不合格品”

基本事件总数为 $n = C_{100}^4$

摸球问题
产品随机抽样问题

A 所包含的基本事件数为 $k = C_5^1 C_{95}^3$

则由古典概率得

$$P(A) = \frac{C_5^1 C_{95}^3}{C_{100}^4} = 0.176$$



例 某人在箱子上锁好了一把锁后，将两把钥匙和另外3把形状大小大致一样的钥匙放在了一起，过了很长时间要打开箱子却忘记了哪两把钥匙能开锁，就拿起5把钥匙逐次试开，求他在3次内能打开这把锁的概率。

解 设 A 表示“三次内打开锁”

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{3 \times 2 \times 1}{5 \times 4 \times 3} = 0.9$$



例 袋中有 a 只白球， b 只红球，每次任取一只，取后不放回，进行 $k+1$ ($k+1 \leq a+b$)次，求最后一次取到白球(记为事件 A)的概率。

$$P(A) = \frac{A_a^1 A_{a+b-1}^k}{A_{a+b}^{k+1}} = \frac{a}{a+b}$$

摸球问题
抽签问题



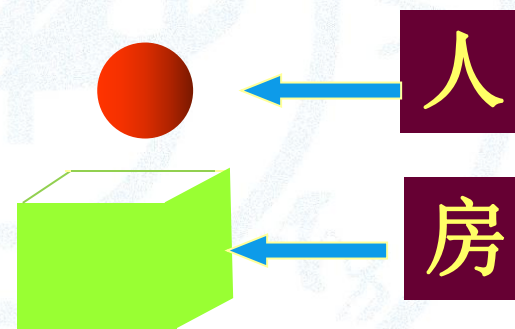
例 将 n 个人随机地分配到 $N(n \leq N)$ 个房间，试求(1)每个房间至多有一人的概率；(2)某指定的 n 个房间各有一人的概率。

解 设 A 表示“每个房间至多有一人”，
 B 表示“某指定的 n 个房间各有一人”，

$$P(A) = \frac{A_N^n}{N^n}$$

$$P(B) = \frac{n!}{N^n}$$

分房问题





例 某年级10名大学生2003年出生，求(1)至少两人同生日的概率；(2)至少有一人在10月1日出生的概率。

解 设 A 表示“至少两人同生日”，

B 表示“至少至少有一人在10月1日出生”

$$P(A) = 1 - \frac{A_{365}^r}{365^r},$$

$$P(A) = 1 - \frac{A_{365}^{10}}{365^{10}},$$

$$P(B) = 1 - \frac{364^{10}}{365^{10}}.$$

人数	概率
20	0.411
22	0.467
23	0.507
24	0.538
40	0.891
50	0.970
60	0.994





例 将15名新生(其中有3名特长生)随机地分配到三个班级去, 其中一班4名, 二班5名, 三班6名. 求(1) 每一个班级各分到一名特长生的概率; (2) 求3名特长生分到一个指定班级的概率; (3) 3名特长生分到同一个班级的概率.

解 基本事件总数为 $n = C_{15}^4 C_{11}^5 C_6^6 = \frac{15!}{4! 5! 6!}.$

分组分配问题

(1) 设 A 表示事件“每一个班级各分到一名特长生”,

$$A \text{ 所包含的基本事件为 } n_A = \frac{3!12!}{3!4!5!}, \quad P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{24}{91} = 0.2637$$

(2) 设 B 表示事件“3名特长生都分到二班”,

$$B \text{ 所包含的基本事件数 } n_B = \frac{12!}{4! 2! 6!}, \quad P(B) = \frac{n_B}{n} = \frac{2}{91} = 0.2198$$



例 设某城市共有 N 辆汽车，车牌号码从1到 N ，有一个人将他所遇到的该城市的 n 辆汽车的车牌号码(可能有重复的号码)全部抄下来，假设每辆汽车被遇到的机会相同，求抄到的最大号码恰好为 $k(1 \leq k \leq N)$ 的概率.

解 这种抄法可以看作是从 N 个不同的号码中允许重复地抽取 n 个号码的排列，共有 N^n 种可能的取法,这是基本事件的总数.

车牌号码不大于 k 的取法共有 k^n 种，
而号码不大于 $k-1$ 的取法共有 $(k-1)^n$ 种，

因此最大车牌号码正好是 k 的取法共有 $k^n - (k-1)^n$ 种.

设 A 表示事件“抄到的最大车牌号码正好为 k ”，则有

$$P(A) = \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n}$$



例 从1, 2, ..., 10这十个数字中任取三个, 问大小在中间的数字恰好为5的概率是多少?

解 设 A 表示事件“取出的三个数字大小在中间的数字恰好为5”.

随机取数问题

$$n = C_{10}^3$$

$$k = C_4^1 C_1^1 C_5^1$$

$$P(A) = \frac{C_4^1 C_1^1 C_5^1}{C_{10}^3} = \frac{1}{6}$$



例 在0 , 1 , ... , 9这十个整数中无重复地任取4个排成一行 , 试求所取到的4个数字能排成四位偶数的概率.

			0
			2
4			4
			6
			8



例 在1 , 2 , ... , 100这100个整数中任取1个 , 试求所取到的整数能被6或8整除的概率.

解 设 A 表示“所取到的整数能被6整除”,
 B 表示“所取到的整数能被8整除”,

$$P(A) = \frac{16}{100}, \quad P(B) = \frac{12}{100}, \quad P(AB) = \frac{4}{100},$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{24}{100}.$$



几何概型



几何概型

如果一个随机试验相当于从直线、平面或空间的某一区域 Ω 上任取一点，所取的点落在区域中任意两个度量(长度、面积、体积)相等的子区域内的可能性是相等的，而与其形状和位置等无关，则称此试验为几何概型。

对于任何有度量的子区域 $A \subset \Omega$ ，以 A 表示事件“任取一点落在区域 A 内”。

几何概型中概率的计算公式

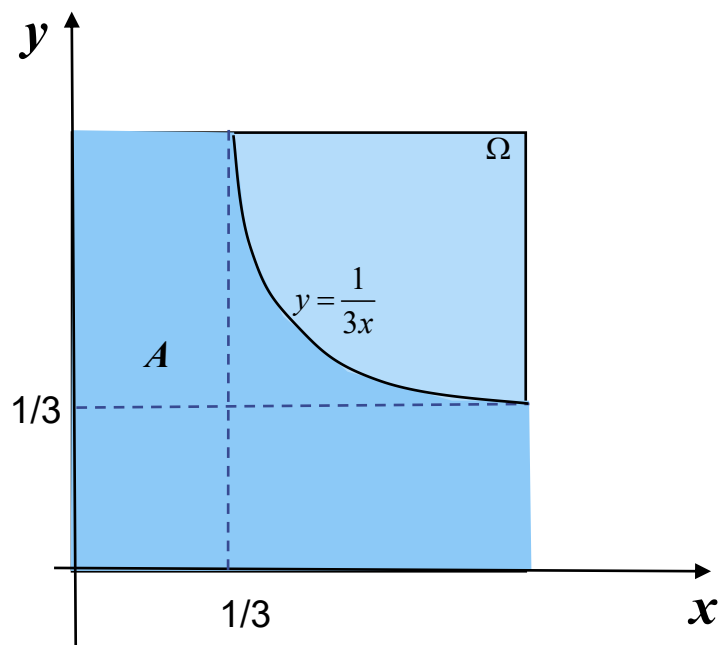
$$P(A) = \frac{A \text{ 的度量}}{\Omega \text{ 的度量}}$$



例 设 x 和 y 是任意两个小于1的正数, 求 $xy < \frac{1}{3}$ 的概率.

$$\Omega = \{(x, y) | 0 < x < 1, 0 < y < 1\} \quad S = 1$$

$$A = \{(x, y) | (x, y) \in \Omega \text{ 且 } xy < \frac{1}{3}\}$$



$$S_A = \int_{1/3}^1 \frac{1}{3x} dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \ln 3$$

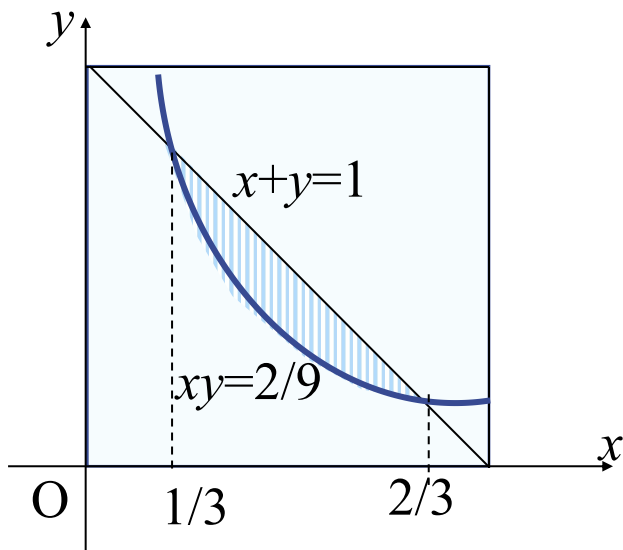


例 任取两个不大于1的正数, 试求其积大于 $\frac{2}{9}$, 且其和不大于1的概率.

解 $\Omega = \{(x, y) | 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ $S = 1$

设 A 表示事件 “两数之积大于 $\frac{2}{9}$, 之和不大于1”,

$$A = \{(x, y) | (x, y) \in \Omega \text{ 且 } xy > \frac{2}{9}, x + y \leq 1\}$$



$$S_A = \int_{1/3}^{2/3} \left(1 - x - \frac{2}{9x}\right) dx = \frac{1}{6} - \frac{2}{9} \ln 2$$

$$P(A) = \frac{S_A}{S} = \frac{1}{6} - \frac{2}{9} \ln 2$$

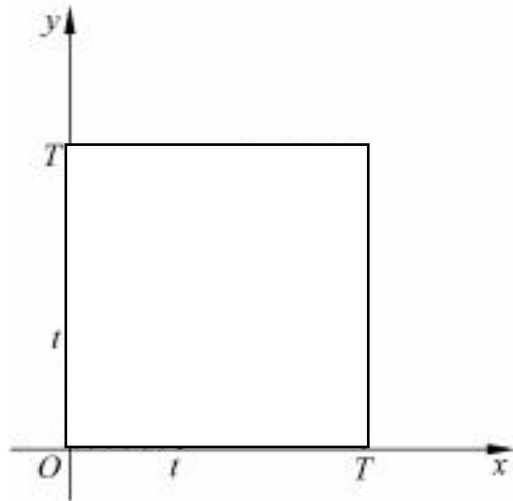


例(会面问题) 甲、乙两人约定在0到T(单位: h)这段时间内在某处会面, 先到者等候另一个人 $t(t \leq T)$ 后即可离去. 如果每一个人可在指定的这段时间内的任一时刻到达并彼此独立, 求两人能会面的概率.

解 设 x 表示甲到达时刻, y 表示乙到达时刻,

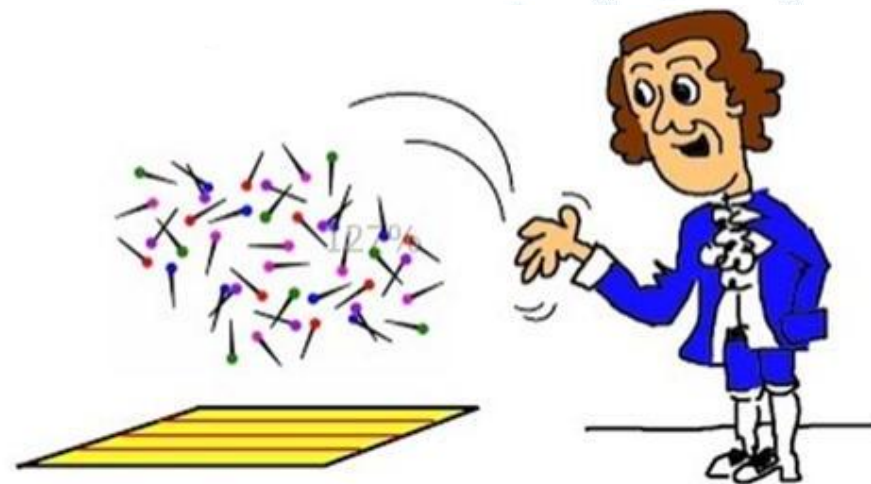
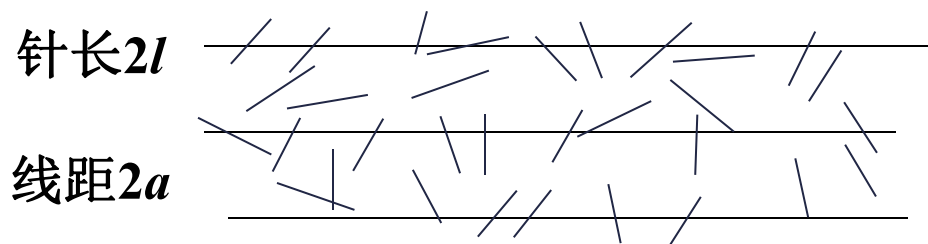
$$\Omega = \{(x, y) | 0 < x < T, 0 < y < T\}$$

$$A = \{(x, y) | (x, y) \in \Omega \text{ 且 } |x - y| \leq t\}$$

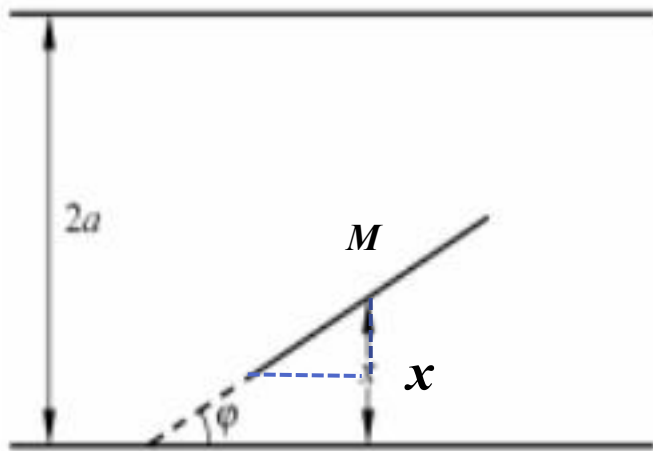


$$P(A) = \frac{S_{\text{阴影}}}{S} = \frac{T^2 - (T - t)^2}{T^2}$$

例 (蒲丰投针问题) 在平面上画有等距离的平行线，平行线间的距离为 $2a$ ($a>0$). 向该平面任意投掷一枚长为 $2l$ ($l<a$) 的圆柱形的针，求此针与任一平行线相交的概率.

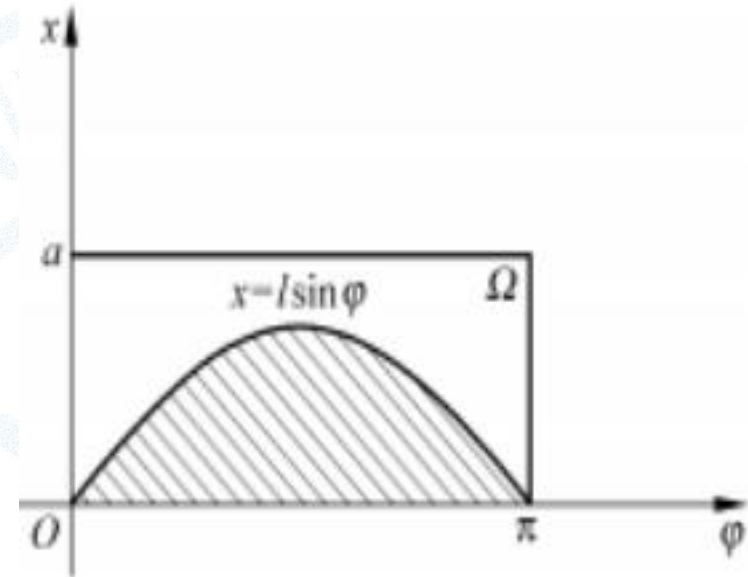


例 (蒲丰投针问题) 在平面上画有等距离的平行线，平行线间的距离为 $2a$ ($a > 0$). 向该平面任意投掷一枚长为 $2l$ ($l < a$) 的圆柱形的针，求此针与任一平行线相交的概率.



$$\Omega \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq x \leq a.$$

$$A \quad x \leq l \sin \varphi.$$



$$p = \frac{\int_0^{\pi} l \sin \varphi d\varphi}{a\pi} = \frac{2l}{a\pi}$$



George-Louis Leclerc de Buffon

法国数学家、自然科学家

几何概型的开创者

1777年给出了第一个几何概型的例子——蒲丰投针

$$p = \frac{2l}{a\pi}$$

$$\text{若 } p \approx \frac{n}{N}, \quad \pi \approx \frac{2lN}{an}.$$

