第三章　二维随机变量及其分布

1. 二维随机变量
2. 边缘分布及随机变量的独立性
3. 条件分布
4. 二维随机变量函数的分布
5. n维随机变量

一维随机变量不足以将随机试验的的结果完全描述，有必要考虑多维随机变量.

例　某地区学龄儿童发育状况，同时观察学龄儿童的身高和体重.

例　炮弹在平面上的随机落点，需要横坐标和纵坐标同时确定.

例　天气情况需要考虑气温，气压，降水量，风力等因素.

§1　二维随机变量

1. 二维随机变量及其分布函数
2. 二维离散型随机变量及其概率分布
3. 二维连续型随机变量及其概率密度

二维随机变量及其分布函数

回顾 一维随机变量

分布函数 $F(x)=P\{X\le x\}(-\infty<x<+\infty)$

性质

1. 对任意实数x，$0\le F(x)\le 1$.

2. $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0,$

   $F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1.$

3. 对任意$x_1<x_2$，有 $P\{x_1<X\le x_2\}=F(x_2)-F(x_1)$.

4. $F(x)$ 是单调不减函数.

5. $F(x)$是右连续的，即 $F(x+0)=F(x)$.

二维随机变量及其分布函数

设随机试验E的基本空间为Ω，X和Y是定义在Ω上的两个随机变量，由它们构成的向量(X, Y)叫做二维随机变量.

二元函数

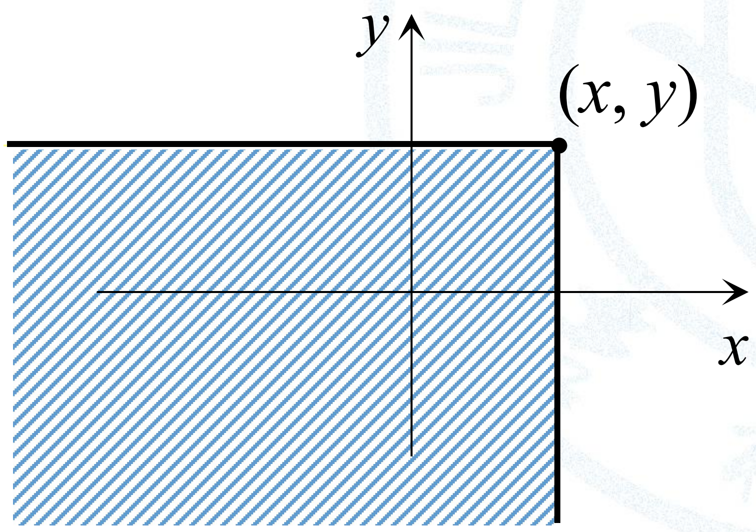
$$F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}$$

称为二维随机变量 (X, Y) 的分布函数, 或称为X与Y的联合分布函数.

分布函数的几何意义

如果用平面上的点(x, y)表示二维随机变量(X, Y)的一组可能的取值, 则 $F(x, y)$ 表示(X, Y) 的取值落入以(x, y) 为顶点左下方的无界矩形域内的概率.

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}$$



分布函数的性质

1. $0 \le F(x,y) \le 1, \quad F(-\infty,-\infty)=0, \quad F(+\infty,+\infty)=1.$

对任意固定的 x, 有 $F(x,-\infty)=0,$

对任意固定的 y, 有 $F(-\infty,y)=0.$

2. $F(x, y)$是变量x 和 y 的单调不减函数.

固定x, 对任意的 $y_1 < y_2$, $\quad F(x, y_1) \le F(x, y_2),$

固定y, 对任意的 $x_1 < x_2$, $\quad F(x_1, y) \le F(x_2, y).$

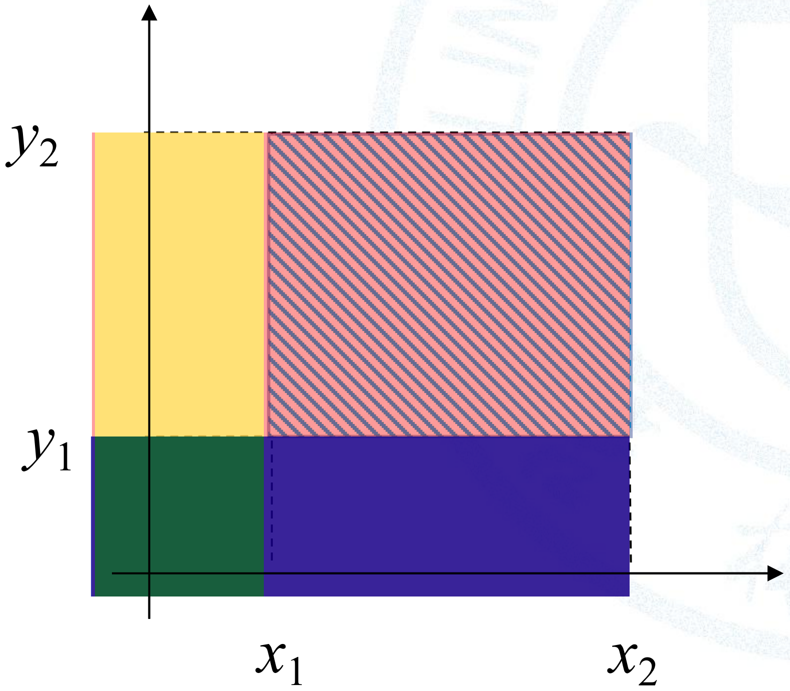
3. $F(x, y)$关于 x 和 y 右连续.

$$F(x+0, y) = F(x, y), \qquad F(x, y+0) = F(x, y).$$

4. (X, Y)**落在矩形区域** $x_1 < X \le x_2,\ y_1 < Y \le y_2$**上的概率为**

$$P\{x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\}$$

$$= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \ \ge 0$$



二维离散型随机变量

回顾 一维离散型随机变量

分布律(概率分布)

$$P\{X=x_k\}=p_k, k=1,2,\cdots$$

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

且 1) $p_k \geq 0;$

2) $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$

定义　若二维随机变量(X, Y)所有可能取的值是有限对或可列无穷多对，则称(X, Y)为**二维离散型随机变量**.

设二维离散型随机变量(X, Y)所有可能取值为 $(x_i, y_j), i, j = 1, 2, \cdots,$ 则称

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \cdots$$

为二维离散型随机变量(X, Y) 的**概率分布**, 或称为随机变量X与Y的**联合概率分布** 或 **联合分布律.**

且 1) $p_{ij} \geq 0, i, j = 1, 2, \cdots;$　　2) $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1.$

(X, Y)的分布律

$X \backslash Y$	y_1	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
x_i	p_{i1}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

二维离散型随机变量(X, Y)的分布函数为

$$F(x, y) = \sum_{x_i \le x} \sum_{y_j \le y} p_{ij}.$$

例 掷两颗骰子，观察出现的点数，第一颗骰子出现的点数记为X，两颗骰子最大的点数记为Y，试求X与Y的联合分布律.

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
2	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
3	0	0	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
4	0	0	0	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
5	0	0	0	0	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{6}{36}$

例　在一只口袋中装有3个黑球和2个白球，从该口袋中取球两次，每次任取一个球，**取后不放回**. 令

$$X=\begin{cases}0, & \text{第一次取出白球,}\\ 1, & \text{第一次取出黑球,}\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}0, & \text{第二次取出白球,}\\ 1, & \text{第二次取出黑球,}\end{cases}$$

试求(X,Y)的联合分布律及分布函数.

解　$p_{00}=P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0\mid X=0\}=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{10},$

$X \backslash Y$	0	1
0	1 / 10	3/ 10
1	3/ 10	3/ 10

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0\text{或}y<0,\\ 1/10, & 0\le x<1, 0\le y<1,\\ 4/10, & 0\le x<1, y\ge 1\text{或}x\ge 1, 0\le y<1,\\ 1, & x\ge 1, y\ge 1.\end{cases}$$

总结 $p_{ij}=P\left\{X=x_i\,,\ Y=y_j\right\}$ **的求法**　**1.古典概型计算；2.利用乘法公式.**

二维连续型随机变量

回顾 一维连续型随机变量

概率密度函数

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

性质

1. $f(x)\geq 0$.
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$.
3. 对任意实数a, $b\,(a<b)$，$P\{a<X\leq b\}=F(b)-F(a)=\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x.$
4. $\boldsymbol{F(x)}$**处处连续.**
5. 如果$f(x)$ 在点x 处连续，则有$F'(x)=f(x)$.
6. 对任意实数$a, P\{X=a\}=0.$

二维连续型随机变量及其概率密度

定义 设二维随机变量(X, Y)的分布函数为$F(x, y)$, 如果存在非负函数$f(x, y)$, 使对任意x, y有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

则称(X, Y) 为二维连续型随机变量.

$f(x, y)$ 为二维连续型随机变量(X, Y) 的概率密度, 或X和Y 的联合概率密度.

概率密度的性质

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

1. $f(x,y)\geq 0.$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1.$

3. 在 $f(x,y)$的连续点处有 $f(x,y)=\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}.$

4. 设G为xoy面上一个区域，点(X, Y)落在G内的概率为

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

几何意义

例 设二维随机变量(X, Y)的分布函数为

$$F(x,y) = A\left(B + \arctan\frac{x}{2}\right)\left(C + \arctan\frac{y}{3}\right)$$

(1)求A, B, C;(2)求密度函数$f(x, y)$.

例 设二维随机变量(X, Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} k\mathrm{e}^{-(3x+4y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

(1)求常数 k；(2)求分布函数$F(x, y)$；(3)求$P\{X+Y<1\}$.

解 (1)由$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1.$ ，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} ke^{-(3x+4y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=k\int_{0}^{+\infty} e^{-3x}\mathrm{d}x\int_{0}^{+\infty} e^{-4y}\mathrm{d}y=\frac{k}{12},$$

则有$k=12$.

例 设二维随机变量(X, Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} ke^{-(3x+4y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

(1)求常数 k; (2)求分布函数$F(x, y)$; (3)求$P\{X+Y<1\}$.

(2) 当 $x>0, y>0$时

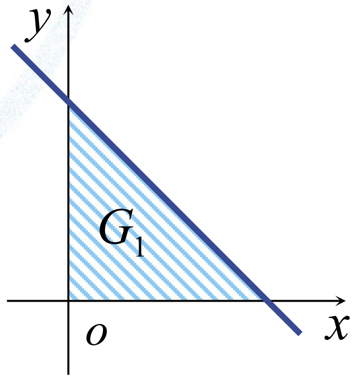
$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_{0}^{x}\int_{0}^{y} 12e^{-(3u+4v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \;=(1-e^{-3x})(1-e^{-4y})$$

$$F(x,y)=\begin{cases} (1-e^{-3x})(1-e^{-4y}), & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

(3) 以G表示区域$\{(x,\ y)|\ x+y<1\}$, 则有

$$P\{X+Y<1\}=P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_{G} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\iint\limits_{G_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{1-x} 12e^{-(3x+4y)}\mathrm{d}y=1-4e^{-3}+3e^{-4}.$$



例 设二维随机变量(X, Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} k\mathrm{e}^{-(3x+4y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

(1)求k; (2)求分布函数$F(x, y)$; (3)求$P\{X>Y\}$.

解 (1)由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} ke^{-(3x+4y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=k\int_{0}^{+\infty} e^{-3x}\mathrm{d}x\int_{0}^{+\infty} e^{-4y}\mathrm{d}y=\frac{k}{12},$$

则有$k=12$.

$$f(x,y)=\begin{cases}12\mathrm{e}^{-(3x+4y)}, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

(2) 当 $x>0, y>0$时

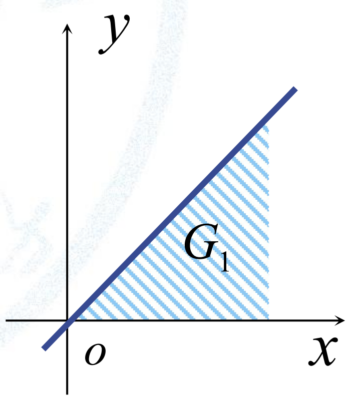
$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_{0}^{x}\int_{0}^{y}12\mathrm{e}^{-(3u+4v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=(1-\mathrm{e}^{-3x})(1-\mathrm{e}^{-4y})$$

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-3x})(1-\mathrm{e}^{-4y}), & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

(3) 以G表示区域$\{(x,y)\mid x>y\}$, 则有

$$P\{X>Y\}=P\{(X,Y)\in G\}=\iint_{G}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{G_1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{0}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{0}^{x}12\mathrm{e}^{-(3x+4y)}\mathrm{d}y=\frac{4}{7}.$$



例 设随机变量(X, Y)的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} kxy, 0\le x\le 1, 0\le y\le 1, \\ 0, \quad 其他. \end{cases}$$

其中k为常数. 求（1）常数k；(2) $P\{Y\le X\}$; (3) $F(x, y)$.

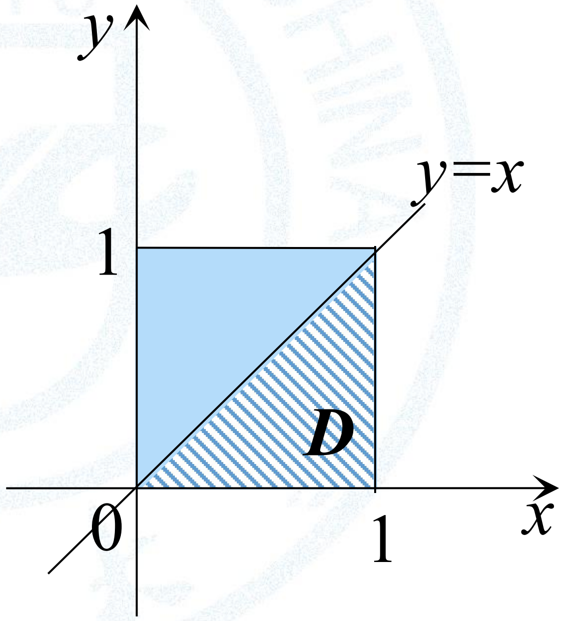
解（1）由$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$,

即$1=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 kxy\mathrm{d}x=\dfrac{k}{4}$.　　故$k=4$.

(2) 令$D=\{(x,y)|\, y\le x 且 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$

$$P\{Y\le X\}=\iint\limits_{y\le x} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x 4xydy=\int_0^1 2x^3dx=\frac{1}{2}$$



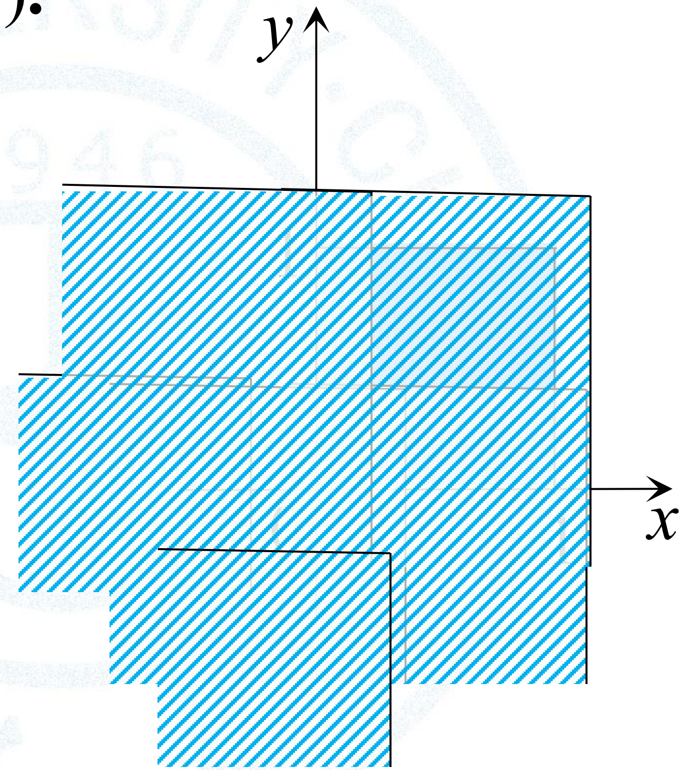
例 设随机变量(X, Y)的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} kxy, 0\le x\le 1, 0\le y\le 1, \\ 0, \quad \text{其他}. \end{cases}$$

其中k为常数. 求(1) 常数k；(2) $P\{Y\le X\}$；(3) $F(x,y)$.

(3) $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$

$$=\begin{cases} 0, & x<0 \text{ 或 } y<0 \\ \int_0^x\int_0^y 4uvdudv = x^2y^2, & 0\le x<1,\ 0\le y<1, \\ \int_0^x\int_0^1 4uvdudv = x^2, & 0\le x<1,\ y\ge 1, \\ \int_0^1\int_0^y 4uvdudv = y^2, & x\ge 1,\ 0\le y<1, \\ 1, & x\ge 1,\ y\ge 1, \end{cases}$$



二维均匀分布

设D为 xoy 面上的有界区域, 其面积为A , 如果二维随机变量(X, Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A}, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

则称(X, Y)在区域D上服从均匀分布.

注 若(X, Y)服从区域D上的均匀分布, 则任意子区域G_1, 设G_1的面积为 A_1, 则

$$P\{(X,Y)\in G_1\}=\frac{A_1}{A}.$$

(1) D为是矩形区域$a \le x \le b, c \le y \le d$，则有

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)(d-c)}, & a \le x \le b, c \le y \le d, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

(2) D为是圆形区域 $x^2+y^2 \le R^2$，则有

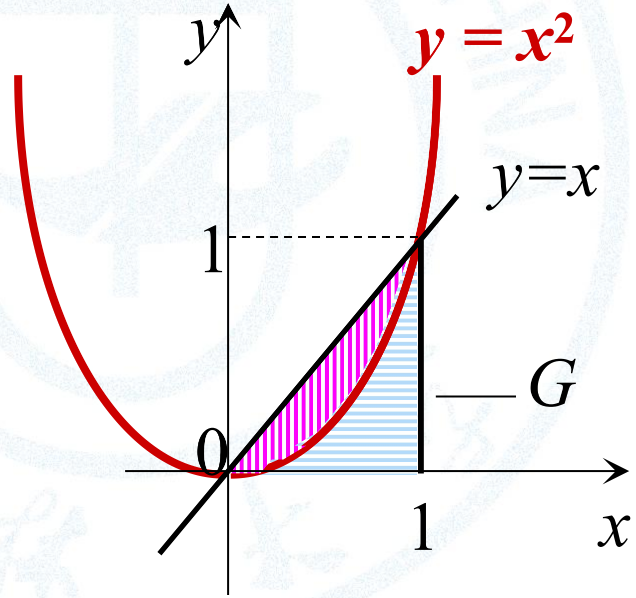
$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{\pi R^2}, & x^2+y^2 \le R^2, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

例 设(X, Y)服从区域 G 上的均匀分布, 其中

$$G=\{(x,y)\mid 0\le y\le x, 0\le x\le 1\}.$$

求(1) $f(x, y)$; (2) $P\{Y>X^2\}$.

解 (1) $f(x,y)=\begin{cases}2, & 0\le y\le x, 0\le x\le 1,\\ 0, & 其他\end{cases}$



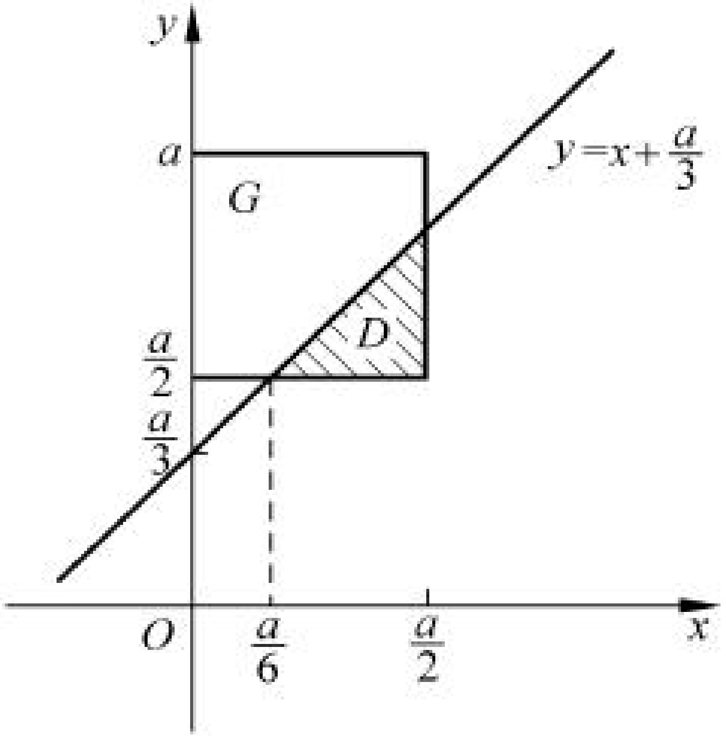
(2) $P\{Y>X^2\}$

$$=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} 2dy=\frac{1}{3}$$

例 设在区间$(0, a)$的中点两边随机地选取两点，求两点的距离小于a/3的概率.

解 $\Omega = \{(x,y) \mid 0 < x < \frac{a}{2}, \frac{a}{2} < y < 1\}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4}{a^2}, & 0 < x < \dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2} < y < a, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$



$$P\{Y - X < \frac{a}{3}\} = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_{\frac{a}{6}}^{\frac{a}{2}} \mathrm{d}x \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{3}+x} \frac{4}{a^2} \mathrm{d}y = \frac{2}{9}$$

二维正态分布

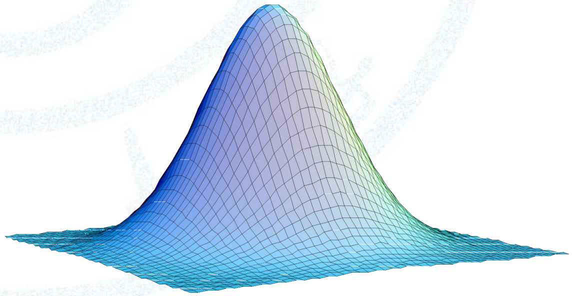
设二维随机变量(X, Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$$

其中$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho\ (\sigma_1>0,\sigma_2>0,-1<\rho<1)$ 均为常数，则称(X, Y)服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 的二维正态分布,

记作$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$.



例 设二维随机变量(X, Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2+y^2)},-\infty<x,y<+\infty,\quad (X,Y)\sim N(0,0,\sigma^2,\sigma^2,0)$$

设 $G=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le\sigma^2\}$, 求 $P\{(X,Y)\in G\}$.

解 $$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_G \frac{1}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}r\mathrm{d}r=1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$$

§2 边缘分布及随机变量的独立性

1. 边缘分布及随机变量的独立性
2. 二维离散型随机变量的边缘概率分布及独立性
3. 二维连续型随机变量的边缘概率密度及独立性

边缘分布

设二维随机变量(X, Y)的分布函数为$F(x, y)$，记随机变量X的分布函数为$F_X(x)$，随机变量Y的分布函数为$F_Y(y)$，分别称为二维随机变量(X, Y)关于X和关于Y的边缘分布函数.

关于X 的边缘分布函数为

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{X \le x, Y < +\infty\} = F(x, +\infty)$$

关于Y的边缘分布函数为

$$F_Y(y) = P\{Y \le x\} = P\{X < +\infty, Y \le x\} = F(+\infty, y).$$

注 已知联合分布可以求得边缘分布；反之则不能唯一确定.

随机变量的独立性

设(X, Y)是二维随机变量，若对于任意的实数x, y，$\{X \le x\}$与$\{Y \le y\}$相互独立，则

$$P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\} P\{Y \le y\}.$$

定义 若二维随机变量(X, Y)的分布函数为$F(x, y)$，关于X和Y的边缘分布函数分别为$F_X(x)$、$F_Y(y)$，如果对于任意实数x, y，都有

$$F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

则称随机变量X与Y是相互独立的.

例　设二维随机变量(X, Y)的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}\dfrac{k}{2}-e^{-x}-e^{-y}+e^{-(x+y)}, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求1)常数k；2)关于X和关于Y的边缘分布函数, 并判断X与Y是否独立；

3) $P\{1<X\le 2, 4<Y\le 7\}$.

二维离散型随机变量的边缘概率分布

二维离散型随机变量的边缘概率分布

设(X, Y)的联合分布律为 $P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij} \quad (i,j=1,2,\cdots)$

则

$$P\{X=x_i\}=P\{X=x_i, Y<+\infty\}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=p_{i\bullet}\,.$$

同理 $P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=p_{\bullet j}\,.$

定义 随机变量X和Y的概率分布

$$P\{X=x_i\}=p_{i\bullet} \quad (i=1,2,\cdots),$$

$$P\{Y=y_j\}=p_{\bullet j} \quad (j=1,2,\cdots),$$

分别称为(X, Y)关于X和关于Y的边缘概率分布或边缘分布律.

$X \backslash Y$	y_1	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$P\{X=x_i\}=p_{i\bullet}$
x_1	p_{11}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	p_{i1}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$P\{Y=y_j\}=p_{\bullet j}$	$p_{\bullet 1}$	$\cdots$	$p_{\bullet j}$	$\cdots$	1

二维离散型随机变量的独立性

二维离散型随机变量的独立性

二维离散型随机变量(X, Y)，X与Y相互独立的充要条件是

对于任意i, j，都有联合分布律等于边缘分布律的乘积，即

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\}, \quad i, j = 1, 2, \cdots$$

亦即

$$p_{ij} = p_{i\bullet}p_{\bullet j}, \quad i, j = 1, 2, \cdots$$

例 在一只口袋中装有3个黑球和2个白球，从该口袋中取球两次，每次任取一个球，**取后不放回**. 令

$$X=\begin{cases}0, & \text{第一次取出白球,}\\ 1, & \text{第一次取出黑球,}\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}0, & \text{第二次取出白球,}\\ 1, & \text{第二次取出黑球,}\end{cases}$$

试求(X, Y)的边缘分布律并判断X与Y其是否独立.

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\bullet}$
0	1 / 10	3/ 10	2/ 5
1	3/ 10	3/ 10	3/ 5
$p_{\bullet j}$	2/ 5	3/ 5	1

即关于X和Y的边缘分布律

X	0	1
P	2 / 5	3 / 5

Y	0	1
P	2 / 5	3 / 5

$$p_{00}=\frac{1}{10}\neq\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=p_{0\bullet}p_{\bullet 0},$$ 故X与Y不相互独立.

例 在一只口袋中装有3个黑球和2个白球，从该口袋中取球两次，每次任取一个球，**取后放回**. 令

$$X=\begin{cases}0, & \text{第一次取出白球,}\\ 1, & \text{第一次取出黑球,}\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}0, & \text{第二次取出白球,}\\ 1, & \text{第二次取出黑球,}\end{cases}$$

试求(X, Y)的联合分布律及分布函数.

解

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\bullet}$
0	4/25	6/25	2/5
1	6/25	9/25	3/5
$p_{\bullet j}$	2/5	3/5	1

由 $p_{ij}=p_{i\bullet}p_{\bullet j}$，$i, j=0,1$，故$X$与$Y$相互独立.

例 设A, B是两个随机事件，$P(A)=\dfrac{1}{4}, P(B\mid A)=\dfrac{1}{3}, P(A\mid B)=\dfrac{1}{2}$,

$$X=\begin{cases}1, & A\text{发生},\\ 0, & A\text{不发生};\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生},\\ 0, & B\text{不发生}.\end{cases}$$

(1) 求二维随机变量(X, Y)的概率分布；(2) 求关于X和关于Y的边缘概率分布；

(3) 判断X与Y是否相互独立.

二维连续型随机变量的边缘概率密度

设二维随机变量(X, Y)的分布函数$F(x, y)$，联合概率密度为$f(x, y)$，则关于X的边缘分布函数

$$F_X(x) = F(x,+\infty) = \int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}u$$

$$f_X(x) = F_X'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

定义 称

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x \quad (-\infty < y < +\infty).$$

分别为(X, Y)关于X和关于Y的**边缘概率密度**.

注 已知联合分布可以求得边缘分布；反之则不能唯一确定.

二维连续型随机变量的独立性

二维连续型随机变量的独立性

对于二维连续型随机变量(X, Y), X与Y相互独立的充要条件是对任意实数x, y, 联合概率密度等于边缘概率密度的乘积, 即

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y).$$

例 设二维随机变量(X, Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}12\mathrm{e}^{-(3x+4y)}, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

(4)判断X与Y是否相互独立.

$$f_X(x)=\begin{cases}3\mathrm{e}^{-3x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}4\mathrm{e}^{-4y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

例 设二维随机变量(X, Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+\dfrac{1}{3}xy, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 2, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

判断X与Y是否相互独立.

解

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases} \displaystyle\int_0^2 (x^2+\frac{1}{3}xy)dy=2x^2+\frac{2}{3}x, & 0\le x\le 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 (x^2+\frac{1}{3}xy)dx=\frac{1}{6}y+\frac{1}{3}, & 0\le y\le 2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

显然X与Y不相互独立.

例 设$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，求关于$X$和$Y$的边缘密度.

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]},(-\infty<x,y<+\infty)$$

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},-\infty<x<+\infty$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}},-\infty<y<+\infty$$

注 联合分布可唯一确定边缘分布，关于X和Y的边缘分布均为一维正态分布，与ρ无关；反之则不然.

例 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$, X与Y相互独立的充要条件是 $\rho=0$.

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},\ f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

证 充分性 设$\rho=0$，$f(x,y)=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$

即 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$, 故X与Y相互独立.

必要性 设X与Y相互独立，即对任意x, y有 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$,即

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

特别地，令 $x=\mu_1, y=\mu_2$，得

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}$$

从而有$\rho=0$.

二维正态分布结论

1. 设 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ ，则 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$,

即关于X、Y的边缘密度分别为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},-\infty<x<+\infty$$

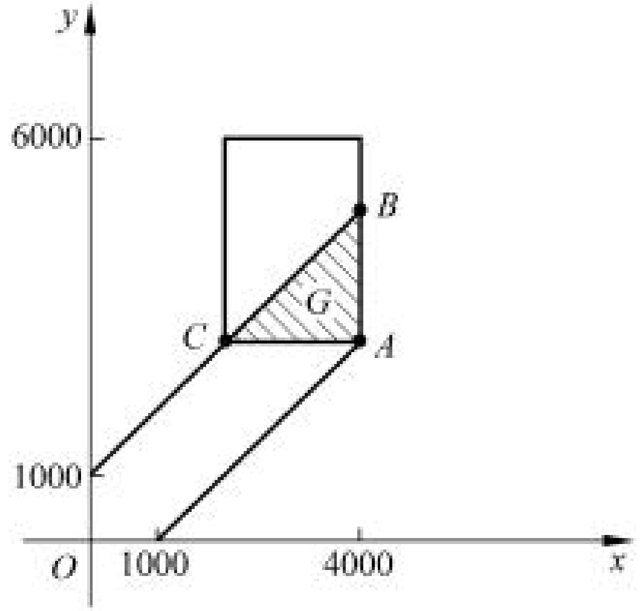
$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}},-\infty<y<+\infty$$

2. $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$, X与Y相互独立的充要条件是 $\rho=0$.

例 设国际市场上甲种产品需求量$X \sim U(2000,4000)$, 乙种产品需求量$Y \sim U(3000,6000)$, 单位t, 且两种产品的需求量相互独立. 求两种产品需求量相差不超过1000t的概率.

解 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2000}, & 2000<x<4000,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{3000}, & 3000<y<6000,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{6}\times 10^{-6}, & 2000<x<4000,3000<y<6000,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$



$$P\{|X-Y|\le 1000\}=\iint \frac{1}{6}\times 10^{-6}\,dxdy$$

$$=\frac{1}{6}\times 10^{-6}\times\frac{1}{2}\times 2000\times 2000=\frac{1}{3}$$

边缘分布

关于X的边缘分布函数 $F_X(x)=F(x,+\infty)$

关于Y的边缘分布函数 $F_Y(y)=F(+\infty,y)$

离散型

关于X的边缘分布律 $P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=p_{i\bullet}$

关于Y的边缘分布律 $P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=p_{\bullet j}$

连续型

关于X的边缘概率密度 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$

关于Y的边缘概率密度 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$

二维随机变量(X, Y), X与Y相互独立

对任意实数x, y, $$F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y).$$

离散型随机变量

对于任意i, j, $$p_{ij} = p_{i\bullet}p_{\bullet j},\quad i, j = 1, 2, \cdots$$

连续型随机变量

对任意实数x, y, $$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y).$$

例　已知随机变量X, Y的概率分布, 且 X与Y独立, 求(X, Y)的概率分布.

X	0	1	2
P	1/2	1/3	1/6

Y	0	1	2
P	1/3	1/3	1/3

例 设二维随机变量(X, Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} xe^{-x(1+y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

判断X与Y是否相互独立.

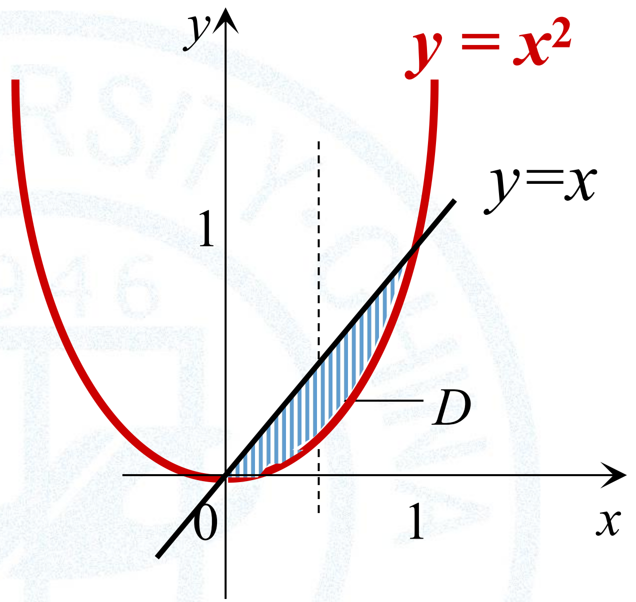
解 $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y = \begin{cases} \int_0^{+\infty} xe^{-x(1+y)}dy = e^{-x}, & x>0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x = \begin{cases} \int_0^{+\infty} xe^{-x(1+y)}dx = \dfrac{1}{(1+y)^2}, & y>0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

显然X与Y不相互独立.

例 设(X, Y)在由曲线$y=x^2$与$y=x$围成的区域$\boldsymbol{D}$上服从均匀分布，判断X与Y是否独立.

解 $S_D=\int_0^1 (x-x^2)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{6}.$



$$f(x,y)=\begin{cases}6, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

当 $0<x<1$时，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{x^2}^{x} 6\mathrm{d}y=6(x-x^2).$$

$x\le 0$或$x\ge 1$时，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=0.$$

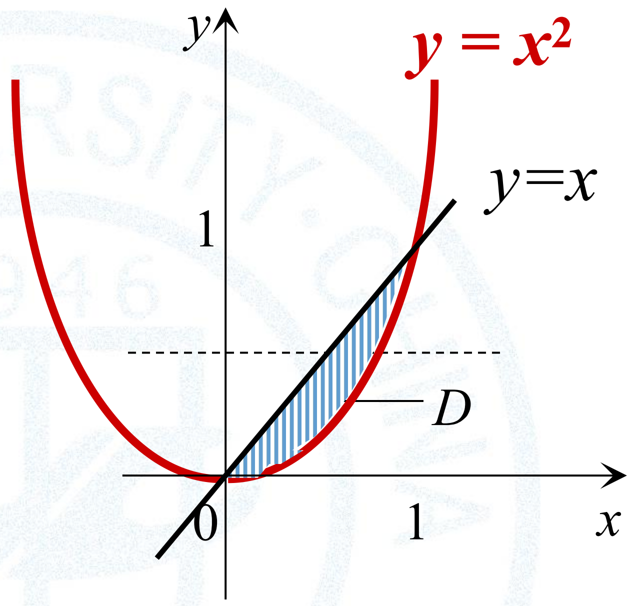
例 设(X, Y)在由曲线$y=x^2$与$y=x$围成的区域$\boldsymbol{D}$上服从均匀分布，判断X与Y是否独立.

解

$$f_X(x)=\begin{cases}6(x-x^2), & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

同理

$$f_Y(y)=\begin{cases}6(\sqrt{y}-y), & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$



例　设随机变量X和Y相互独立，X在区间(0,2)上服从均匀分布，Y的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y}, & y>0, \\ 0, & y\le 0. \end{cases} \qquad f_X(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}, & 0<x<2, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

求(1) $P\{-1<X<1,0<Y<2\}$; (2) $P\{X+Y>1\}$.

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases} \frac{1}{2}e^{-y}, & 0<x<2,y>0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

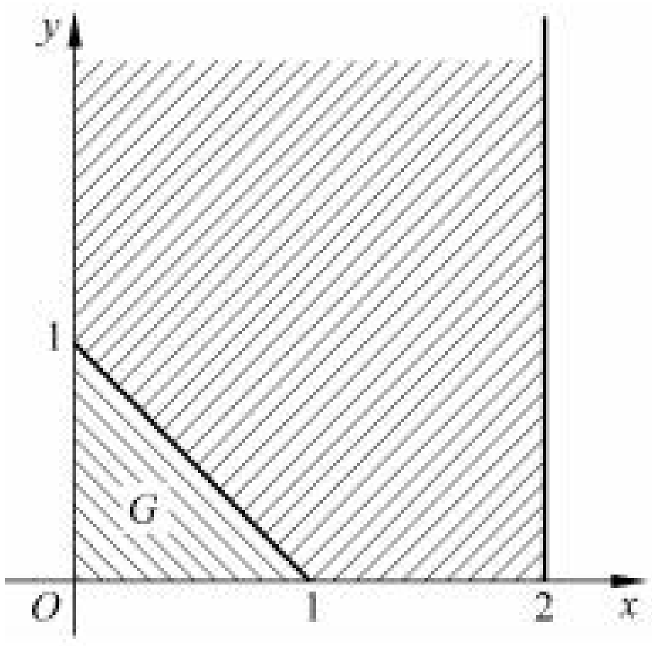
解　(1) $P\{-1<X<1,0<Y<2\}=\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{2}f(x,y)dy$

$$=\int_{-1}^{1}f_X(x)dx\int_{0}^{2}f_Y(y)dy \quad =\int_{0}^{1}\frac{1}{2}dx\int_{0}^{2}e^{-y}dy \quad =\frac{1}{2}(1-e^{-2})$$

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-y}, & 0<x<2, y>0,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求(2) $P\{X+Y>1\}$.

解 $$P\{X+Y>1\}=1-P\{X+Y\le 1\}$$



$$=1-\iint\limits_{X+Y\le 1}\frac{1}{2}e^{-y}dxdy$$

$$=1-\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{1}{2}e^{-y}dy$$

$$=1-\int_0^1\frac{1}{2}(1-e^{x-1})dx$$

$$=1-\frac{1}{2e}$$

	二维随机变量 (X, Y)	一维随机变量 X
分布函数	$F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}$	$F(x)=P\{X\le x\}$
离散型 分布律	$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots$ 且 $p_{ij}\ge 0,\ \sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}p_{ij}=1.$	$P\{X=x_k\}=p_k,\quad k=1,2,\cdots$ 且 $p_k\ge 0$，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k=1$
连续型 概率密度函数	$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\mathrm{d}v\mathrm{d}u$	$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$
	$f(x,y)\ge 0.$	$f(x)\ge 0.$
	$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1.$	$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$
	$f(x,y)=\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}.$	$F'(x)=f(x).$
	$P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_{G}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$	$P\{a<X\le b\}=\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x$

§4 条件分布

1. 离散型随机变量的条件分布
2. 连续型随机变量的条件分布

离散型随机变量的条件分布

设二维离散型随机变量(X, Y)的概率分布为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, \quad i, j=1,2,\cdots,$$

关于X和Y的概率分布分别为 $P\{X=x_i\}=p_{i\bullet}, P\{Y=y_i\}=p_{\bullet j}$,

对固定的i, 若$p_{i\bullet}>0$, 称

$$P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i, Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}} \qquad j=1,2,\cdots$$

为在条件 $X=x_i$ 下，随机变量Y 的条件概率分布.

显然 1) $P\{Y=y_j \mid X=x_i\} \geq 0;$

2) $\sum\limits_{j=1}^{\infty} P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}=1.$

对固定的i, 若$p_{i\bullet}>0$, 称

$$P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}},\ j=1,2\cdots$$

为在条件 $X=x_i$ 下，随机变量Y 的条件概率分布.

对固定的j, 若 $p_{\bullet j}>0$, 称

$$P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}},\quad i=1,2,\cdots$$

为在条件$Y=y_j$ 下，随机变量X 的条件概率分布.

乘法公式

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=P\{Y=y_j\}P\{X=x_i \mid Y=y_j\}.$$

例　已知(X, Y)的分布律，求X=0条件下Y的分布律.

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\cdot}$
0	1/10	3/10	2/5
1	3/10	3/10	3/5
$p_{\cdot j}$	2/5	3/5	1

解

Y	0	1
$P\{Y=j\|X=0\}$	1/4	3/4

例 一射手射击，击中目标两次为止，击中目标的概率为$p\,(0<p<1)$. 设X表示首次击中目标所进行的射击次数，Y表示总共进行射击次数，试求X和Y的联合分布律及条件分布律. 记$q=1-p$.

解 $$P\{X=m,Y=n\}=p^2q^{n-2},\quad m=1,2,\cdots,n-1;n=2,3,\cdots.$$

$$P\{X=m\}=\sum_{n=m+1}^{+\infty}P\{X=m,Y=n\}=p^2\sum_{n=m+1}^{+\infty}q^{n-2}=p^2\frac{q^{m-1}}{1-q}=pq^{m-1},\qquad m=1,2,\cdots.$$

$$P\{Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}P\{X=m,Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}p^2q^{n-2}=(n-1)p^2q^{n-2},\quad n=2,3\cdots.$$

当$n=2,3\cdots$时，$$P\{X=m|Y=n\}=\frac{p^2q^{n-2}}{(n-1)p^2q^{n-2}}=\frac{1}{n-1},\quad m=1,2,\cdots,n-1.$$

当$m=1,2,\cdots,n-1$时，$$P\{Y=n|X=m\}=\frac{p^2q^{n-2}}{pq^{m-1}}=pq^{n-m-1},\quad n=m+1,m+2,\cdots.$$

连续型随机变量的条件分布

连续型随机变量的条件分布

$$P\{X=x_i \mid Y=y_j\} \qquad f_{X|Y}(x \mid y) \qquad F_{X|Y}(x \mid y)$$

$$P\{X \le x \mid Y=y\} = \frac{P\{X \le x, Y=y\}}{P\{Y=y\}}$$

注 当X为连续型时，条件分布不能用$P\{X \le x \mid Y=y\}$来定义.

设 $\varepsilon > 0$, 若

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} P\{X \le x \mid y-\varepsilon < Y \le y+\varepsilon\} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{P\{X \le x, y-\varepsilon < Y \le y+\varepsilon\}}{P\{y-\varepsilon < Y \le y+\varepsilon\}}$$

存在, 则称此极限为在$Y=y$条件下X的条件分布函数, 记为 $F_{X|Y}(x \mid y)$.

$$F_{X|Y}(x|y) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{P\{X\le x, y-\varepsilon<Y\le y+\varepsilon\}}{P\{y-\varepsilon<Y\le y+\varepsilon\}}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{F(x,y+\varepsilon)-F(x,y-\varepsilon)}{F_Y(y+\varepsilon)-F_Y(y-\varepsilon)}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\dfrac{F(x,y+\varepsilon)-F(x,y)}{\varepsilon}+\dfrac{F(x,y)-F(x,y-\varepsilon)}{\varepsilon}}{\dfrac{F_Y(y+\varepsilon)-F_Y(y)}{\varepsilon}+\dfrac{F_Y(y)-F_Y(y-\varepsilon)}{\varepsilon}}$$

$$=\frac{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}}{\dfrac{\mathrm{d}F_Y(y)}{\mathrm{d}y}}=\frac{\int_{-\infty}^{x} f(u,y)\mathrm{d}u}{f_Y(y)}=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(u,y)}{f_Y(y)}\mathrm{d}u,$$

如果在点(x, y)处, $f(x, y)$连续, 边缘概率密度$f_Y(y)$连续, 当$f_Y(y)>0$, 有

$$F_{X|Y}(x \mid y)=\int_{-\infty}^{x} \frac{f(u, y)}{f_Y(y)} \mathrm{d} u,$$

在$Y=y$的条件下, X的条件概率密度为 $f_{X|Y}(x \mid y)=\dfrac{f(x, y)}{f_Y(y)}$.

类似地，当$f_X(x)>0$, 在$X=x$的条件下, Y的条件分布函数为

$$F_{Y|X}(y|x)=\int_{-\infty}^{y} \frac{f(x, v)}{f_X(x)} \mathrm{d} v$$

在$X=x$的条件下Y的条件概率密度为 $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x, y)}{f_X(x)}$.

例 设二维随机变量(X, Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} xe^{-x(1+y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

求 $f_{X|Y}(x\mid y), f_{Y|X}(y\mid x)$及$P\{Y>1 \mid X=3\}$

$$f_X(x)=\begin{cases} \int_0^{+\infty} xe^{-x(1+y)}dy=e^{-x}, & x>0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

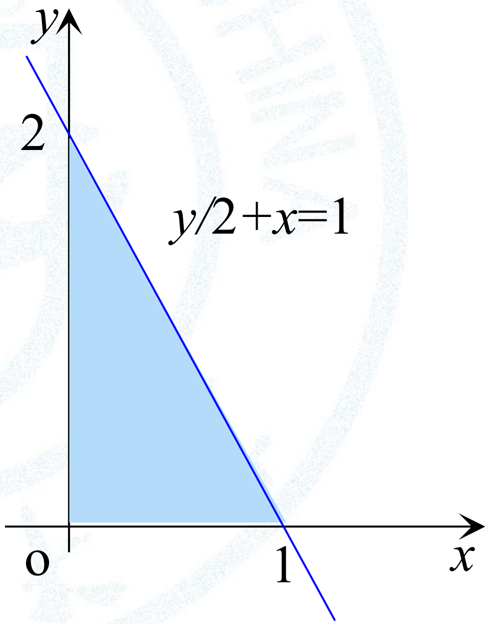
$$f_Y(y)=\begin{cases} \int_0^{+\infty} xe^{-x(1+y)}dx=\dfrac{1}{(1+y)^2}, & y>0, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

例 设二维随机变量(X, Y)在平面上由X轴, Y轴以及直线 $x+\frac{y}{2}=1$ 所围成的三角形域上服从均匀分布, 求 $f_{X|Y}(x|y)$.

解

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_0^{1-\frac{y}{2}} 1\mathrm{d}x=1-\frac{y}{2}, & 0<y<2,\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$



当$0<y<2$时,

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{2}{2-y}, & 0<x<1-\dfrac{y}{2},\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$

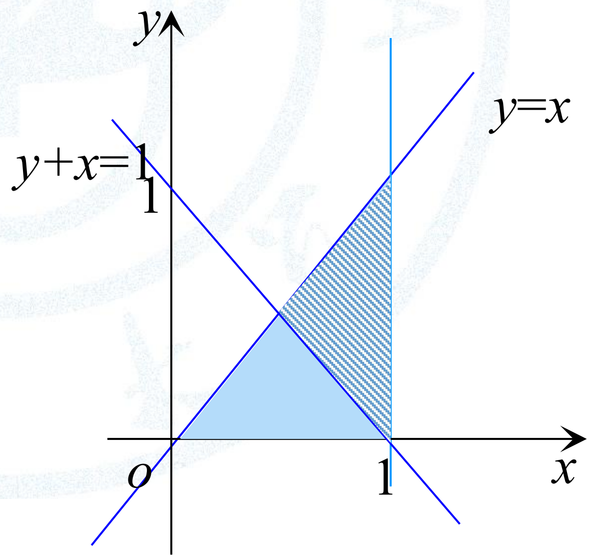
例 设随机变量X在区间(0, 1)上服从均匀分布, 在条件$X=x(0<x<1)$下, 随机变量Y在区间$(0, x)$内服从均匀分布. 求(1)X和Y的联合概率密度; (2)Y的概率密度; (3)$P\{X+Y>1\}$.

解 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ $\quad f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<y<x,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

$$1)\ f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<y<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$2)\ f_Y(y)=\begin{cases}\displaystyle\int_y^1\frac{1}{x}dx=-\ln y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$3)\ P\{X+Y>1\}=\int_{\frac{1}{2}}^1 dx\int_{1-x}^x\frac{1}{x}dy=1-\ln 2$$



§4　二维随机变量的函数的分布

1. 二维离散型随机变量的函数的分布
2. 二维连续型随机变量的函数的分布

设(X, Y)是二维随机变量，$z=g(x, y)$是二元函数，若当(X, Y)取值(x, y)时，随机变量Z取值为$z=g(x, y)$，则称Z是X、Y的函数，记作

$Z=g(X, Y)$.

问题 已知随机变量(X, Y)的概率分布，$g(x, y)$为已知的二元函数，求$Z=g(X, Y)$的概率分布.

二维离散型随机变量函数的分布

二维离散型随机变量的函数的概率分布

方法 当(X, Y)为二维离散随机变量时，Z为一维离散随机变量，其取值为 $z_k = g(x_{i_k}, y_{j_k})$

其概率分布

$$P\{Z=z_k\} = P\left\{ \bigcup_{g(x_{i_k}, y_{j_k})=z_k} \{X=x_{i_k}, Y=y_{j_k}\} \right\}$$

$$= \sum_{g(x_{i_k}, y_{j_k})=z_k} P\{X=x_{i_k}, Y=y_{j_k}\}$$

$$k = 1, 2, \cdots$$

例 设二维随机变量(X, Y)的概率分布如表所示, 求 $X+Y, Y/X$ 的概率分布.

$X \backslash Y$	-1	0
-1	1/4	1/4
1	1/6	1/8
2	1/8	1/12

解 根据联合概率分布

P	1/4	1/4	1/6	1/8	1/8	1/12
(X, Y)	(-1, -1)	(-1, 0)	(1, -1)	(1, 0)	(2, -1)	(2, 0)
$X+Y$	-2	-1	0	1	1	2
Y/X	1	0	-1	0	-1/2	0

$X+Y$	-2	-1	0	1	2
P	1/4	1/4	1/6	1/4	1/12

Y/X	-1	-1/2	0	1
P	1/6	1/8	11/24	1/4

例 设X与Y相互独立，$X\sim\pi(\lambda_1), Y\sim\pi(\lambda_2)$，求$Z=X+Y$的分布.

解 $Z=X+Y$的可取值为0，1，2，…，对任意正整数k，

$$P\{Z=k\}=P\{X+Y=k\}=P\left(\bigcup_{i=0}^{k}\{X=i,Y=k-i\}\right)$$

$$=\sum_{i=0}^{k}P\{X=i,Y=k-i\}=\sum_{i=0}^{k}P\{X=i\}P\{Y=k-i\}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i e^{-\lambda_1}}{i!}\frac{\lambda_2^{k-i}e^{-\lambda_2}}{(k-i)!}=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}\cdot\frac{1}{k!}$$

$$=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$

注 两个独立的服从泊松分布的随机变量之和仍然服从泊松分布，即

$$Z=X+Y\sim\pi(\lambda_1+\lambda_2)$$

注 两个具有可加性的离散分布

1. 设 $X \sim B(n_1, p)$, $Y \sim B(n_2, p)$, 且独立, 则

$$X + Y \sim B(n_1 + n_2, p).$$

2. 设 $X \sim \pi(\lambda_1), Y \sim \pi(\lambda_2)$, 且独立, 则

$$X + Y \sim \pi(\lambda_1 + \lambda_2).$$

例 设X与Y相互独立且服从同一分布,已知X的分布律为

$$P\{X=i\}=\frac{1}{3}, i=1,2,3.$$

又设M=**max**(X, Y), N=**min**(X, Y) , 求M, N的概率分布.

解 (X, Y)联合概率分布为

$X \backslash Y$	1	2	3
1	1/9	1/9	1/9
2	1/9	1/9	1/9
3	1/9	1/9	1/9

M	1	2	3
P	1/9	1/3	5/9

N	1	2	3
P	5/9	1/3	1/9

例　已知随机变量X, Y, XY的分布, 求(X, Y)的分布.

X	0	1	2
P	1/2	1/3	1/6

Y	0	1	2
P	1/3	1/3	1/3

XY	0	1	2	4
P	7/12	1/3	0	1/12

二维连续型随机变量函数的分布

二维连续型随机变量函数的分布

方法 分布函数法

当(X, Y)为连续型随机变量，且$f(x,y)$已知时，

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = P\{g(X,Y) \le z\} = \iint_{D_z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中$D_z = \{(x,y) \mid g(x,y) \le z\}$，

则概率密度为

$$f_Z(z) = \frac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}z}$$

例 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 并且都服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$, 求 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的分布.

解 $$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<+\infty$$

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

由分布函数法

当 $z\le 0$ 时, 有

$$F_Z(z)=P\{\sqrt{X^2+Y^2}\le z\}=P(\phi)=0$$

当 $z>0$ 时，有

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{\sqrt{X^2+Y^2}\le z\}$$

$$=\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le z} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le z}\frac{1}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^z\frac{1}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}r\mathrm{d}r=1-\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}.$$

综上所述 $F_Z(z)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$

从而 Z 的概率密度为 $f_Z(z)=F'_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{z}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$

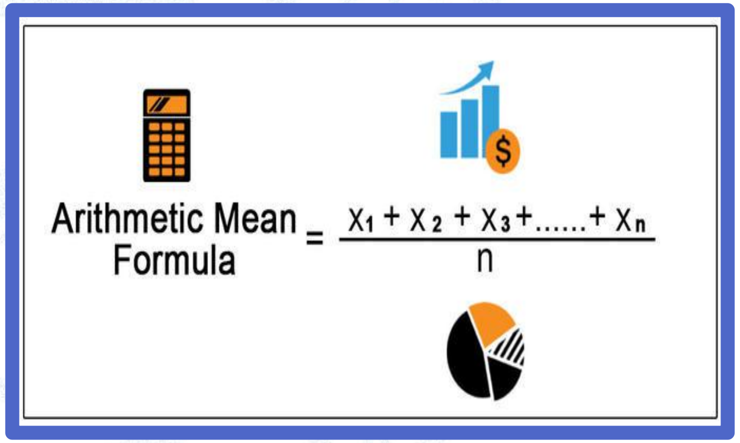
$Z=X+Y$的分布

二维连续型随机变量之和的分布

设(X,Y)为二维连续型随机变量，$f(x,y)$为其联合概率密度，考虑 $Z=X+Y$ 的概率密度函数.

元件备用系统寿命

生产线产品质量误差



均值的分布

二维连续型随机变量和的概率密度计算公式

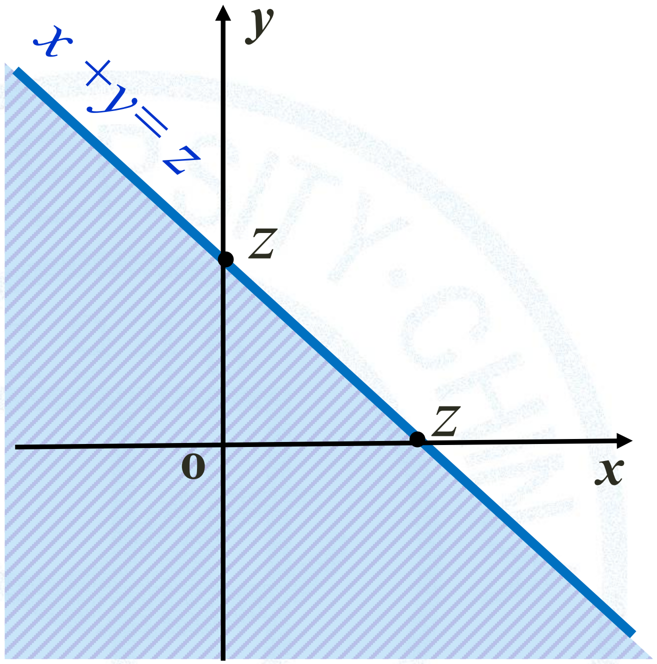
$$F_Z(z)=P\{Z\le z\} \quad =P\{X+Y\le z\}$$

$$=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$\underline{\underline{y=u-x}}\ \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} f(x,u-x)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,u-x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}u$$



则 $Z=X+Y$ 的概率密度为 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\mathrm{d}x$，

同理 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\mathrm{d}y$.

注 由$z=g(x,y)$,解出$y=h(x,z)$,

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,h(x,z))\left|\frac{\partial h}{\partial z}\right|\mathrm{d}x$$

$$Z=\frac{Y}{X} \qquad f_{Y/X}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,f(x,xz)\mathrm{d}x$$

$$Z=XY \qquad f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f(x,\frac{z}{x})\mathrm{d}x$$

例 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X \sim N(0,1), Y \sim N(0,1)$，求 $Z = X + Y$ 的概率密度.

$$Z = X + Y \sim N(0, 2).$$

解

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) \mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(z-x)^2}{2}} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x-\frac{z}{2})^2} \mathrm{d}x$$

$$\overset{t=x-z/2}{=\!=\!=} \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}} \sqrt{\pi} \quad = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2(\sqrt{2})^2}}.$$

正态分布结论

若随机变量 X 和 Y 相互独立，且 $X \sim N(0,1), Y \sim N(0,1)$，则

$$X + Y \sim N(0, 2).$$

若随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 则

$$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

$$c_1 X + c_2 Y \sim N(c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2, c_1^2 \sigma_1^2 + c_2^2 \sigma_2^2).$$

其中 c_1, c_2 为常数.

$$aX + b \sim N(a\mu_1 + b, a^2 \sigma_1^2).$$

一般公式

$Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\mathrm{d}y.$$

卷积公式

当X与Y相互独立时，$Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x \qquad \text{记为 } f_X * f_Y.$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y.$$

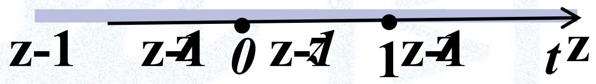
例 已知两个独立的随机变量X和Y都在(0,1)上服从均匀分布，求随机变量$Z=X+Y$的概率密度.

解 由X与Y相互独立，且

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases},\quad f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

利用卷积公式(代入换元法)

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f_Y(z-x)\mathrm{d}x$$



$$\overset{t=z-x}{=}\int_{z-1}^{z}f_Y(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}0, & z<0\ \text{或}\ z\geq 2\\ \int_0^z 1\mathrm{d}x=z & 0\leq z<1\\ \int_{z-1}^{1}1\mathrm{d}x=2-z, & 1\leq z<2\end{cases}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & 其他\end{cases},\quad f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1,\\ 0, & 其他\end{cases}.$$

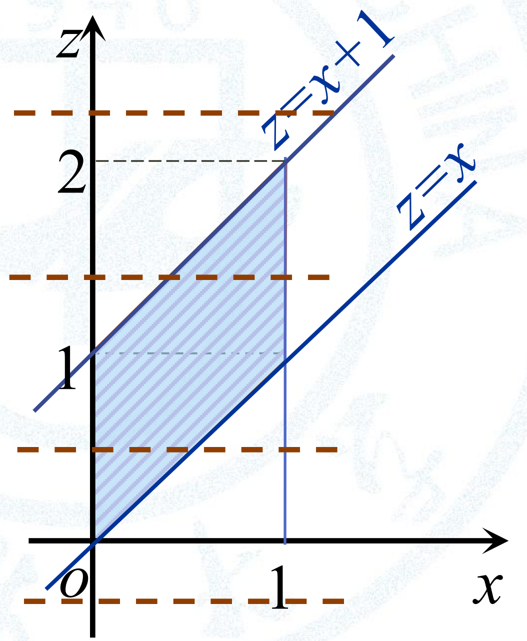
利用卷积公式（定限画图法）

$0<x<1,\ 0<z-x<1,$

即 $0<x<1, x<z<x+1.$

由 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x$

$$=\begin{cases}0, & z<0 \text{ 或 } z\geq 2\\ z, & 0\leq z<1\\ 2-z, & 1\leq z<2\end{cases}$$

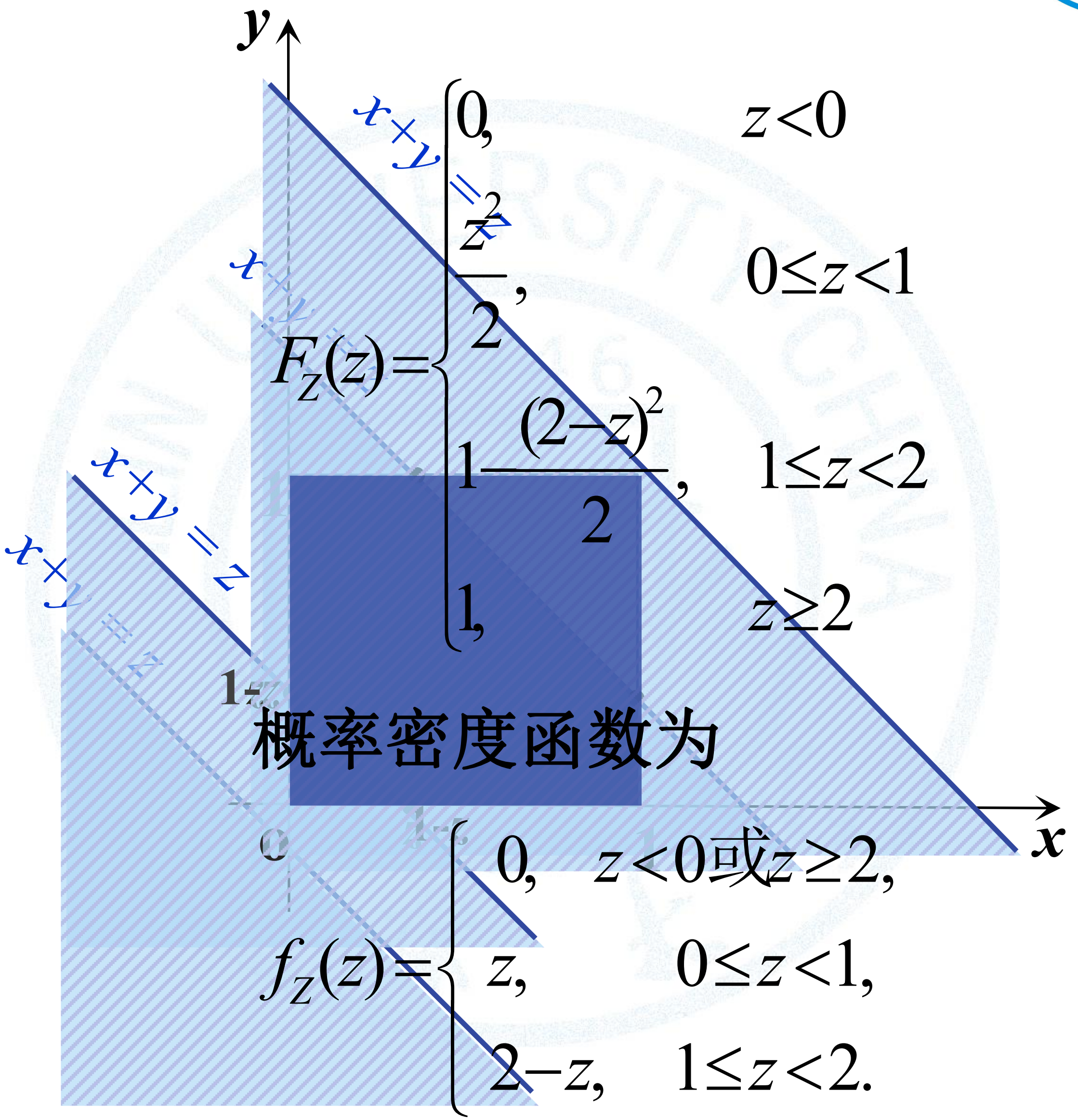


(X, Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

分布函数法

$$F_Z(z) = P\{X+Y\le z\}$$

$$= \iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



当 $z<0$ 时， $F_Z(z)=0$

当 $0\le z<1$ 时， $F_Z(z)=\dfrac{z^2}{2}$

当 $1\le z<2$ 时， $F_Z(z)=1-\dfrac{(2-z)^2}{2}$

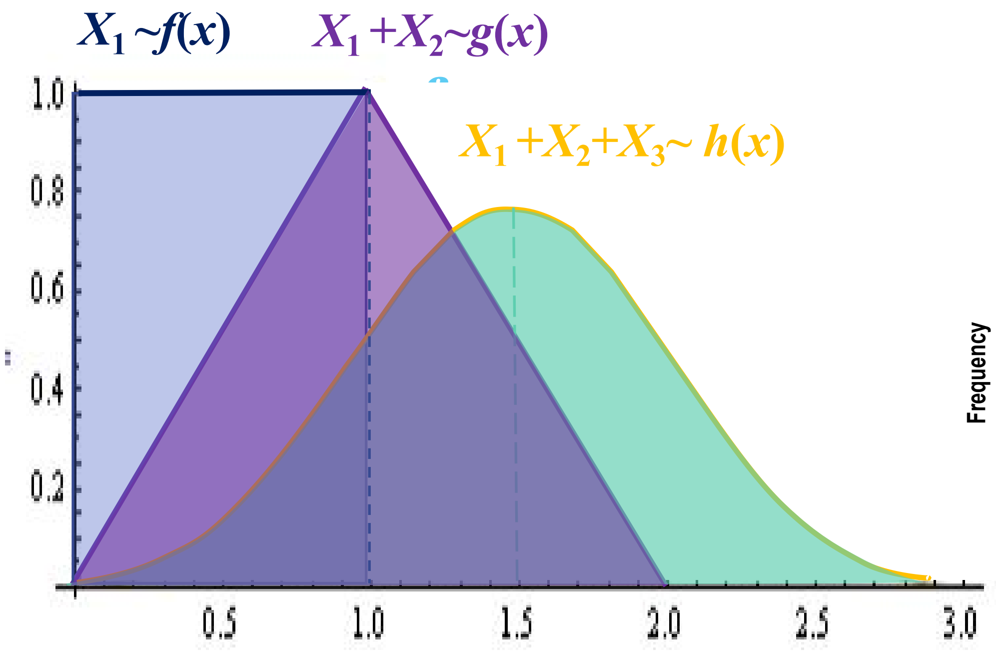
当 $2\le z$ 时， $F_Z(z)=1.$

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ \dfrac{z^2}{2}, & 0\le z<1\\ 1-\dfrac{(2-z)^2}{2}, & 1\le z<2\\ 1, & z\ge 2\end{cases}$$

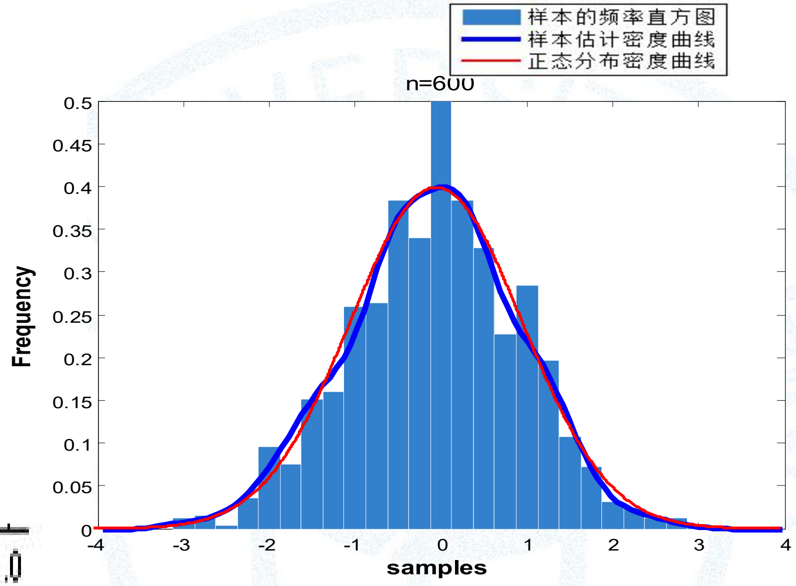
概率密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\text{或}z\ge 2,\\ z, & 0\le z<1,\\ 2-z, & 1\le z<2.\end{cases}$$

独立的随机变量之和的直观演示



区间(0, 1)上均匀分布和的密度曲线



大量两点分布和的随机模拟

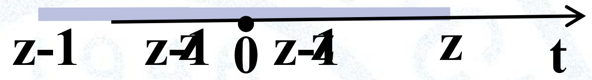
注 大量相互独立的随机变量之和一般都服从或近似服从正态分布.

例 已知 X 与 Y 是相互独立的随机变量，概率密度分别为

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\qquad f(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求 $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

解 (利用卷积公式)



$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f_Y(z-x)\mathrm{d}x\overset{t=z-x}{=}\int_{z-1}^{z}f_Y(t)\mathrm{d}t$$

$$=\begin{cases}0, & z<0\\ \int_0^z e^{-t}dt=1-e^{-z}, & 0\le z<1\\ \int_{z-1}^{z}e^{-t}\mathrm{d}t=(e-1)e^{-z}, & z\ge 1\end{cases}$$

例 已知 X 与 Y 是相互独立的随机变量, 概率密度分别为

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\qquad f(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

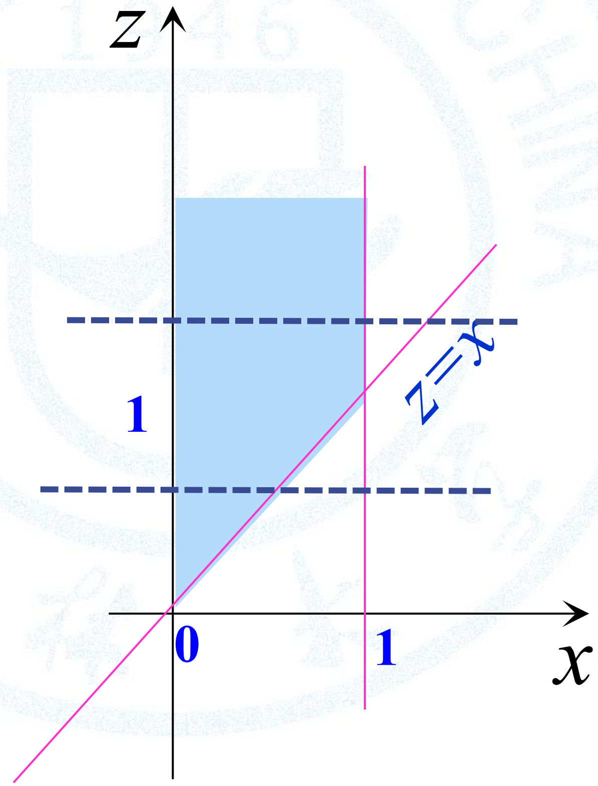
求 $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

$$0\le x\le 1, z-x>0$$

解 (利用卷积公式)

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}0, & z<0\\ \int_0^z e^{-(z-x)}dx=1-e^{-z}, & 0\le z<1\\ \int_0^1 e^{-(z-x)}\mathrm{d}x=(e-1)e^{-z}, & z\ge 1\end{cases}$$



解 分布函数法

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0\le x\le 1, y>0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$F_Z(z)=P\{X+Y\le z\} = \iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

当$z<0$时，$F_Z(z)=0$

当$0\le z<1$ 时，

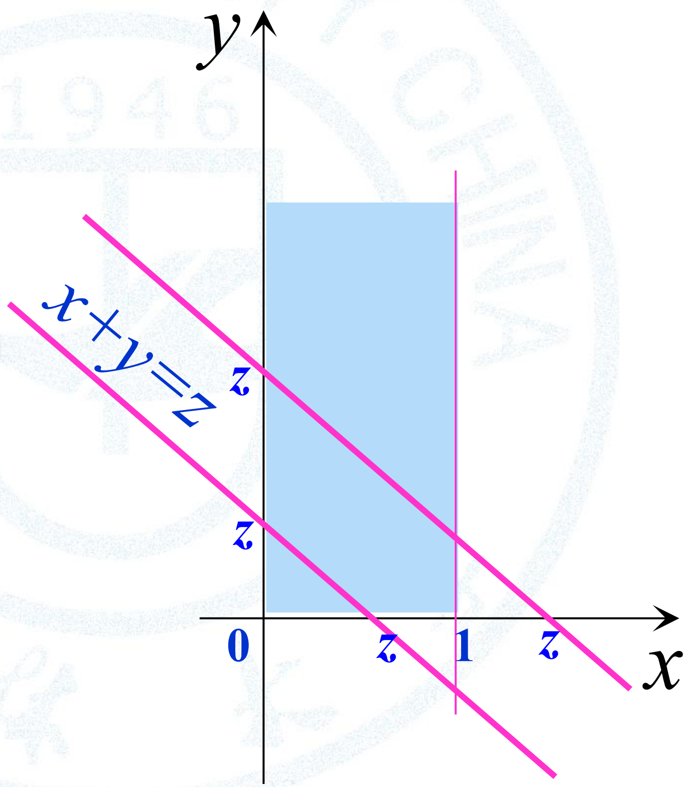
$$F_Z(z)=\int_0^z \mathrm{d}x\int_0^{z-x} e^{-y}\mathrm{d}y = z-1+e^{-z}$$

$$f(z)=F'(z)=1-e^{-z},$$

当$1\le z$ 时，

$$F_Z(z)=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{z-x} e^{-y}\mathrm{d}y = 1+(1-e)e^{-z}.$$

$$f(z)=F'(z)=(e-1)e^{-z}.$$



注　由$z=g(x,y)$，解出$y=h(x,z)$，

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,h(x,z))\left|\frac{\partial h}{\partial z}\right| \mathrm{d}x$$

$$Z=\frac{Y}{X} \qquad f_{Y/X}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x,xz)\mathrm{d}x$$

$$Z=XY \qquad f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f(x,\frac{z}{x})\mathrm{d}x$$

例 已知 (X, Y) 的联合概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<y<2x\\ 0, & 其他\end{cases}$

$Z=2X-Y$, 求 $f_Z(z)$.

解 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,2x-z)\mathrm{d}x$

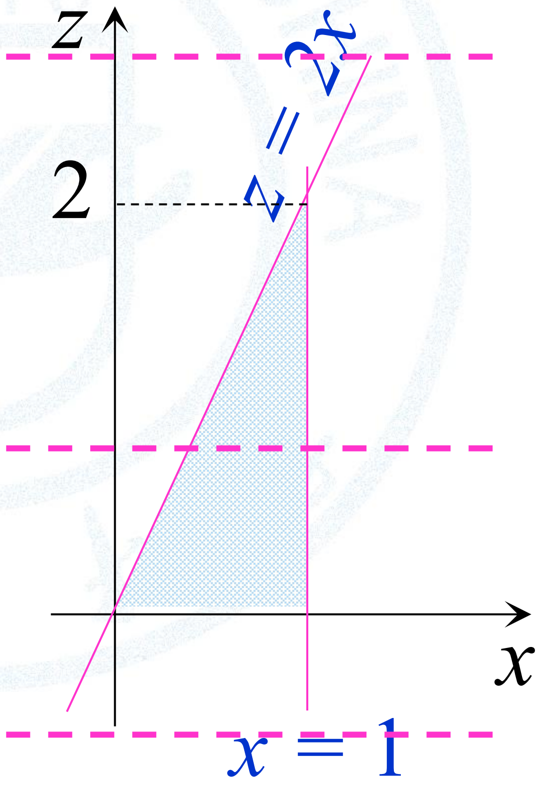
$$f(x,2x-z)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<2x-z<2x\\ 0, & 其他\end{cases}$$

当 $z<0$ 或 $z>2$, $f_Z(z)=0$.

当 $0\le z<2$,

$$f_Z(z)=\int_{z/2}^{1}\mathrm{d}x=1-\frac{z}{2},$$

即 $f_Z(z)=\begin{cases}1-\dfrac{z}{2}, 0\le z<2\\ 0, \quad 其他,\end{cases}$



例 设随机变量 X与Y 相互独立, X的概率分布为 $P\{X=i\}=\frac{1}{3}, i=-1,0,1,$

Y的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1, \\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 设$Z=X+Y$, 求 (1)$P\{Z\le\frac{1}{2}\mid X=0\}$; (2)$f_Z(z)$.

$M=\max(X,Y)$与$N=\min(X,Y)$ 的分布

$$M=\max(X,Y), N=\min(X,Y)$$

设 X与Y 相互独立, 分布函数分别为$F_X(x), F_Y(y)$.

$$F_M(z)=P\{M\le z\}=P\{X\le z, Y\le z\}$$

$$=P\{X\le z\}P\{Y\le z\}$$

$$=F_X(z)F_Y(z).$$

$$F_N(z)=P\{N\le z\}=1-P\{N>z\}$$

$$=1-P\{X>z, Y>z\}=1-P\{X>z\}P\{Y>z\}$$

$$=1-[1-P\{X\le z\}][1-P\{Y\le z\}]$$

$$=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)].$$

例 系统L由相互独立的元件L_1, L_2组成，若两个元件寿命分别为X_1, X_2，且

$$f_{X_i}(x_i)=\begin{cases}\lambda_i \mathrm{e}^{-\lambda_i x_i}, & x_i>0,\\ 0, & 其它.\end{cases} \qquad F_{X_i}(x_i)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda_i x_i}, & x_i>0,\\ 0, & x_i\le 0.\end{cases}$$

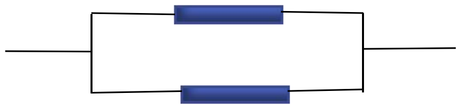
分别求在联接方式 **(1)**串联；**(2)**并联；**(3)** 备用(当L_1失效时，L_2工作)下，系统 L 的寿命X 的概率密度.

解 (1)串联 $Z=\min\{X_1, X_2\}$.

$$F_Z(z)=1-\prod_{i=1}^{2}(1-F_{X_i}(z))=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)z}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}(\lambda_1+\lambda_2)\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)z}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

(2)并联 $Z=\max\{X_1,X_2\}$.

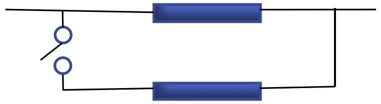


$$F_{X_i}(x_i)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda_i x_i}, & x_i>0,\\ 0, & x_i\le 0.\end{cases}$$

$$F_Z(z)=\prod_{i=1}^{2}F_{X_i}(z)=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 z})(1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 z}), & z>0,\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}\lambda_1\mathrm{e}^{-\lambda_1 z}+\lambda_2\mathrm{e}^{-\lambda_2 z}-(\lambda_1+\lambda_2)\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)z}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

(3) 备用 $Z = X_1 + X_2$



$$f_{X_i}(x_i) = \begin{cases} \lambda_i e^{-\lambda_i x_i}, & x_i > 0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x) f_{X_2}(z-x)\,\mathrm{d}x$$

当$z \le 0$时， $f_Z(z)=0$,

当$z > 0$时,

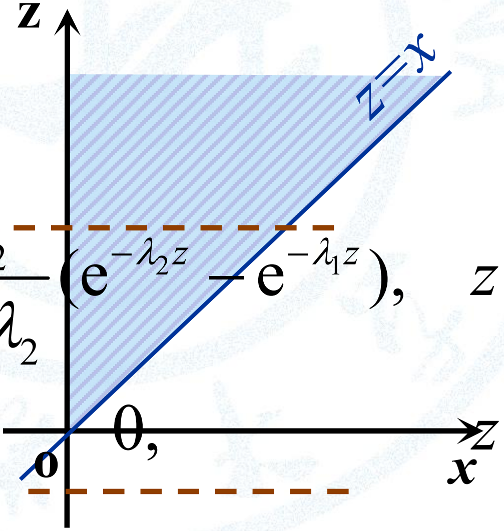
定限画图法

$x>0,\ z-x>0,$

$$f_Z(z)=\int_0^z \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \lambda_2 e^{-\lambda_2 (z-x)}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_2 z}\int_0^z e^{-(\lambda_1-\lambda_2)x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}(e^{-\lambda_2 z} - e^{-\lambda_1 z}).$$



$$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}(e^{-\lambda_2 z} - e^{-\lambda_1 z}), & z > 0 \\ 0, & z \le 0 \end{cases}$$

	二维随机变量(X, Y)	一维随机变量X
分布函数	$F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}$	$F(x)=P\{X\le x\}$
离散型 分布律	$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots$ 且 $p_{ij}\ge 0,\ \sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}p_{ij}=1.$	$P\{X=x_k\}=p_k,\quad k=1,2,\cdots$ 且 $p_k\ge 0$，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k=1$
连续型 概率密度函数	$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\mathrm{d}v\mathrm{d}u$ $f(x,y)\ge 0.$ $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1.$ $f(x,y)=\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}.$ $P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$	$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$ $f(x)\ge 0.$ $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$ $F'(x)=f(x).$ $P\{a<X\le b\}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

边缘分布

关于X的边缘分布函数 $F_X(x)=F(x,+\infty)$

关于Y的边缘分布函数 $F_Y(y)=F(+\infty,y)$

离散型

关于X的边缘分布律 $P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=p_{i\bullet}$

关于Y的边缘分布律 $P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=p_{\bullet j}$

连续型

关于X的边缘概率密度 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$

关于Y的边缘概率密度 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$

独立性　二维随机变量(X, Y), X与Y相互独立

对任意实数x, y,　$F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y).$

离散型随机变量

对于任意i, j,　$p_{ij}=p_{i\bullet}p_{\bullet j},\ i,j=1,2,\cdots$

连续型随机变量

对任意实数x, y,　$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y).$

§6　n维随机变量

n维随机变量

设随机试验E的基本空间为Ω, $X_1, X_2, \cdots, X_n$是定义在Ω上的n个随机变量,由它们构成的向量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$叫做n维随机向量或n维随机变量.

n维随机变量的分布函数

1. 对任意实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ，n元函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\}$$

称为n维随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的分布函数或随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$的联合分布函数.

n维离散型随机变量

2. 若n维随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$所有可能取的值是有限或可列无限个n元数组, 则称之为n维离散型随机变量.

其概率分布为

$$P\left\{X_1 = x_{i_1}, X_2 = x_{i_2}, \cdots, X_n = x_{i_n}\right\} = p_{i_1 i_2 \cdots i_n}, \quad i_1, i_2, \cdots i_n = 1, 2, \cdots, n.$$

n维连续型随机变量

3. 如果存在非负函数 $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, 使对任意的 $x_1, x_2, \ldots x_n$, 都有

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}f(t_1,t_2,\cdots,t_n)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n$$

称 $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ 为 ***n*维连续型随机变量**.

称 $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ 为 $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ 的**概率密度**或 $X_1, X_2, \ldots X_n$ 的**联合概率密度**.

n维随机变量的边缘分布函数

4. 如果已知n维随机变量$(X_1, X_2, \ldots X_n)$的分布函数为$F(x_1, x_2, \ldots x_n)$, $(X_1, X_2, \ldots X_n)$的k $(1 \le k < n)$ 维边缘分布函数 .

在 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$中保留相应的k个位置, 其他变量趋向于 $+\infty$, 其极限即为所求.

如关于X_1的边缘分布函数为

$$F_{X_1}(x_1) = F(x_1, +\infty, +\infty, \cdots, +\infty)$$

关于(X_1, X_2, X_3)的边缘分布函数为

$$F_{X_1X_2X_3}(x_1, x_2, x_3) = F(x_1, x_2, x_3, +\infty, \cdots, +\infty)$$

n维连续型随机变量的边缘概率密度

设n维连续型随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$具有概率密度 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,

则关于X_1的边缘概率密度为

$$f_{X_1}(x_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\cdots\mathrm{d}x_n$$

则关于(X_1,X_2,X_3)的边缘概率密度为

$$f_{X_1X_2X_3}(x_1,x_2,x_3)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_4\mathrm{d}x_5\cdots\mathrm{d}x_n$$

n维离散型随机变量的边缘概率分布

设n维离散型随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$具有概率分布

$$P\left\{X_1 = x_{i_1}, X_2 = x_{i_2}, \cdots, X_n = x_{i_n}\right\} = p_{i_1 i_2 \cdots i_n}$$

则关于X_1 的边缘概率分布(边缘分布律)为

$$P\left\{X_1 = x_{i_1}\right\} = \sum_{i_2=1}^{\infty}\sum_{i_3=1}^{\infty}\cdots\sum_{i_n=1}^{\infty} p_{i_1 i_2 \cdots i_n}$$

n维随机变量的独立性

5. 如果对于任意*n*个实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \cdots F_{X_n}(x_n)$$

则称随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立.

*n*维离散型随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$相互独立充要条件是

$$P\{X_1 = x_{i_1}, X_2 = x_{i_2}, \cdots, X_n = x_{i_n}\} = \prod_{j=1}^{n} P\{X_j = x_{i_j}\}$$

*n*维连续型随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$相互独立充要条件是

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \cdots f_{X_n}(x_n)$$

n维随机变量的独立性

6. 如果对于任意$m+n$个实数$x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_n$，有

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_n)=F_1(x_1,x_2\cdots x_m)F_2(y_1,y_2\cdots y_n)$$

其中F,F_1,F_2分别为$(X_1,X_2,\cdots,X_m,Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$以及$(X_1,X_2,\cdots,X_m)$和$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$的分布函数，则称***m*维随机变量**$(X_1,X_2,\cdots,X_m)$**和*n*维随机变量**$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$**相互独立**.

注 设$(X_1,X_2,\cdots,X_m)$和$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$是相互独立的,则$X_i\,(i=1,2,\cdots,m)$和$Y_j\,(j=1,2,\cdots,n)$相互独立.

如果h,g是连续函数，则随机变量$h(X_1,X_2,\cdots,X_m)$和$g(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$**相互独立**.

正态随机变量的结论

若**X**, **Y**相互独立, $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 则

$$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

推广 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, 2, \cdots, n$ 则

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)$$

若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, 2, \cdots, n$ 则

$$\sum_{i=1}^{n} c_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \sigma_i^2\right)$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 为常数.

n维随机变量的最值函数的分布

7. 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$是相互独立的, 分布函数分别为 $F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2), \cdots, F_{X_n}(x_n)$,

$M=\max\left(X_1, X_2, \cdots, X_m\right)$ 的分布函数为 $F_{\max}\left(z\right)=F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z)$

$N=\min\left(X_1, X_2, \cdots, X_m\right)$ 的分布函数为 $F_{\min}\left(z\right)=1-\prod_{i=1}^{n}\left[1-F_{X_i}(z)\right]$

设随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立且有相同分布函数$F\left(x\right)$, 则

$$F_{\max}\left(z\right)=\left[F(z)\right]^n \qquad F_{\min}\left(z\right)=1-\left[1-F(z)\right]^n$$