

Le calcul
Réduction et résolution
Exemples en Scheme et en ML

Vincent Cognet

Sainte Marguerite, le 27 avril 2020

Table des matières

1 Le λ-calcul et la réduction	9
1.1 Définition, champ lexical et syntaxique	9
1.1.1 Analyse lexicale avec ocamllex	9
1.1.2 Analyse syntaxique avec menhir	10
1.1.3 Implémentation du parsing en mode <i>récursif descendant</i>	11
1.2 Représentation en ML	13
1.3 La β -réduction faible avec appel par valeur	17
1.4 La récursivité et le point fixe	18
1.5 <i>Church</i> encoding. Les entiers et les booléens en λ -calcul	22
1.5.1 Les entiers <i>Church</i>	22
1.5.2 Les booléens	24
1.5.3 La fonction factorielle	24
1.6 La notation de <i>de Bruijn</i>	25
1.7 Le λ -calcul simplement typé	27
2 L'interprétation	29
2.1 Introduction	29
2.2 Un interpréteur MiniScheme avec OCAML	29
2.2.1 L'évaluation	29
2.2.2 Les étapes Read, Eval, Print	31
2.2.3 Liaison lexicale vs liaison dynamique	32
2.2.4 Gestion de l'environnement	33
2.3 Un interpréteur LISP avec le nouvel interpréteur MiniScheme	35
2.4 L'auto-interprétation de l'interpréteur	36
2.4.1 La tour de Babel	36
2.4.2 Réification et réflexion	37
3 La compilation	45
3.1 Compilation des λ -termes en termes applicatifs	45
3.2 Compilation du LISP vers une machine abstraite	49
4 La résolution	53
4.1 Représentation des termes finis	53
4.2 La substitution	55
4.3 Filtrage et réécriture	56

4.3.1	Le filtrage	56
4.3.2	La réécriture et l'arithmétique de Peano	57
4.4	L'unification des termes	59
4.5	Un mini PROLOG	61
4.6	Quelques exemples de programmation en PROLOG	62
4.6.1	Les entiers naturels	62
4.6.2	Les additions de Peano	62
4.6.3	La base généalogique	63
4.7	L'algorithme de complétion de Knuth-Bendix	63
4.7.1	Confluence et paires critiques	63
4.7.2	Terminaison	65
4.7.3	Complétion de Knuth-Bendix	65
5	La calculabilité	67
5.1	Les fonctions récursives	67
5.2	La machine de Turing	69
5.3	La thèse de Church	71
6	Annexes / Divers	73
6.1	Quelques fonctions sur les listes	73
6.2	Les listes mutables	73
6.3	Les listes infinies ou <i>streams</i>	74
6.4	Le module Graphics d'OCAML, les fractales	76
6.5	Utilisation de METAFONT	79
6.6	The boxes	81
6.7	Les modules OCAML. Modélisation d'un monoïde	82
6.8	La machine à pile	83
6.8.1	Certification avec le langage COQ	84
6.9	Machine Learning and Neural Networks	85
6.9.1	Introduction	85
6.9.2	Un peu de théorie	85
6.9.3	Calcul matriciel	86
6.9.4	Fonctions d'activation	87
6.10	Les nombres premiers. L'algorithme RSA	88
6.11	Approximation du nombre π	92
6.11.1	La méthode des polygones	93
6.11.2	La série alternée de Leibniz	95
6.11.3	La loi des grands nombres	96
6.11.4	Le produit de Wallis	96
6.11.5	L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$	97
6.12	Poésies	98
6.13	L'irrationalité de $\sqrt{2}$	98
6.14	Démonstration non constructive	98
6.15	L'hyperbole $xy = 1$	99
6.16	L'exponentielle	99
6.17	Les fonctions $\sin \frac{1}{x}$ et $x \cdot \sin \frac{1}{x}$	100

6.18 Srivanasa Ramanujan	100
6.19 L'alphabet grec. Extraits du nouveau testament	101

Introduction

Aristote considérait les mathématiques comme une discipline, non pas tant de la vérité, que de la beauté. [2]

What is mathematics ? Mathematics as an expression of the human mind reflects the active will, the contemplative reason, and the desire for aesthetic perfection. [14]

C'est sous cet angle de l'esthétique que j'ai voulu modestement décrire ici quelques concepts des fondements mathématiques de l'informatique.

Qu'est-ce que le **calcul** ? Il est difficile d'en donner une définition abstraite. Essayons cependant de décrire l'action de calculer, le processus du calcul.

Nous identifions deux processus bien distincts appelés la **réduction** et la **RÉSOLUTION**. La réduction est l'action de réduire séquentiellement une expression en une autre expression plus simple au moyen de règles de réécriture. Lorsque plus aucune règle ne s'applique, l'expression calculée est alors en forme *normale*. Cette forme normale correspondra à la *valeur* de notre calcul.

$$(3 + 8) + (4 - 9) * 2 \rightsquigarrow 11 - 5 * 2 \rightsquigarrow 11 - 10 \rightsquigarrow 1$$

Ce processus de réduction soulève deux difficultés essentielles :

- La terminaison. Est-ce que le processus termine en un nombre fini d'étapes ?
- La confluence. Si le processus termine, est-ce que l'expression aboutit à une forme normale unique ?

La fonction mathématique usuelle est peu adaptée à une étude du processus du calcul. Car elle repose en fait sur une définition en *extension* : une fonction mathématique est la description d'une relation d'un ensemble de départ face à son ensemble d'arrivée.

Pour modéliser notre processus de calcul, il nous faut une définition en *intension*, c'est-à-dire avec des règles de calcul explicites. Fondé sur cette idée, le λ -calcul a été créé par Alonzo Church dans les années 1930. Il est maintenant utilisé comme socle de tout langage fonctionnel. Même s'il est rudimentaire et basé sur un mécanisme simple de réécriture, nous verrons qu'il permet d'exprimer toutes les fonctions calculables. Sa *puissance* de calcul est similaire aux machines de Turing ou aux fonctions μ -récursives de Gödel. Nous l'étudierons en détails.

L'autre processus de calcul est la résolution. Nous l'utilisons chaque fois que nous devons résoudre une équation. En résolvant $x^2 + 2x - 15 = 0$, nous souhaitons que notre processus soit *complet*, c'est-à-dire que nous calculions l'ensemble des valeurs possibles $\{-5; 3\}$. Nous étudierons également ce mécanisme, et en particulier l'algorithme d'unification.

Chapitre 1

Le λ -calcul et la réduction

1.1 Définition, champ lexical et syntaxique

Le λ -calcul est un système formel très rudimentaire. Il n'utilise que peu de moyens : le symbole λ , des variables et des parenthèses. Il n'a qu'une seule règle de calcul, la β -réduction, qui modélise le passage d'un argument à une fonction.

Définition 1. Un λ -terme est défini par induction de la manière suivante :

- Une variable x est un λ -terme.
- Une abstraction $\lambda x.terme$ est un λ -terme.
- Une application ($terme_1\ terme_2$) est un λ -terme.

Exemple de lambda terme :

$$(\lambda x.xy)(xzu)$$

Voici le champ lexical des λ -termes :

	λ	LAMBDA
	:	POINT
token =	$[a - z][a - z\ 0 - 9]$	VARIABLE
	'(PARLEFT
)'	PARRIGHT

Voici la grammaire des λ -termes, en utilisant les terminaux définis avant :

```
terme ::= | VARIABLE
          | PARLEFT terme terme PARRIGHT
          | LAMBDA VARIABLE . terme
```

Nous utiliserons ocamllex et menhir, qui est la version moderne de ocamlyacc, pour l'analyse lexical et syntaxique des termes du λ -calcul.

1.1.1 Analyse lexicale avec ocamllex

Nous définissons ici le champ lexical des différents *tokens* (*lémènes*) du λ -calcul.

```
(* file: lambdalexical.mll *)
{
```

```

open Lambdagrammar (* Assumes the parser file is "lambdagrammar.mly" *)
}
let texte = ['a'-'z'] ['a'-'z' '0'-'9']*
rule token = parse
| "lambda"    { LAMBDA }
| '.' { POINT }
| texte as varia { VARIABLE (varia) }
| '(' { PARLEFT }
| ')' { PARRIGHT }
| _ { token lexbuf }
| eof { raise End_of_file }

```

La compilation de ce fichier .mll va générer une fonction dont le nom est celui de la règle (ici `token`). Cette fonction prend comme argument le type `lexbuf` et rend le type `token`.

`lexbuf` est un type de données abstrait défini dans le module Lexing qui permet de mémoriser la chaîne ou le fichier en cours d'analyse.

```
val token : Lexing.lexbuf -> token
```

1.1.2 Analyse syntaxique avec menhir

Nous définissons ici la grammaire du λ -calcul. Nous retrouvons les constructeurs du type ML associés à chacune des règles de la grammaire. Ces constructeurs seront présenté dans la section qui suit.

```

/* file: lambdagrammar.mly */
%{
open Terme
%}

%token <string> VARIABLE
%token LAMBDA PARLEFT PARRIGHT POINT
%token NEWLINE

%start exp
%type <Terme.terme> exp

%% /* Grammar rules and actions follow */
exp:      VARIABLE { Var($1) }
| PARLEFT exp exp PARRIGHT { App($2, $3) }
| LAMBDA VARIABLE POINT exp { Lam($2, $4) }
;
%%
```

Plus exactement, nous avons modifié cette grammaire *naïve* pour la rendre non ambiguë et assurer l'associativité à gauche des λ -applications. En effet :

$$MNOP = (((MN)O)P)$$

```

%%

line: exp NEWLINE { $1 }

;

exp: LAMBDA VARIABLE POINT exp      { Lam($2, $4) }
     | app {$1}
;

app: atome {$1}
     | app atome { App($1, $2) }
;

atome: PARLEFT exp PARRIGHT {$2}
      | VARIABLE {Var($1)}
;
%%
```

Nous obtenons ainsi :

```

$ ./lambda.out
>> m n o p
App(App(App(Var "m" ,Var "n" ),Var "o" ),Var "p" )

>> lambda f . (lambda x . f(x x)) (lambda x. f(x x))
Lam("f",App(Lam("x",App(Var "f" ,App(Var "x" ,Var "x" ))),
            Lam("x",App(Var "f" ,App(Var "x" ,Var "x" )))))
```

La compilation de ce fichier `.mly` va générer une fonction dont le nom est celui de l'axiome de notre grammaire (ici `exp`). Cette fonction prend deux arguments : la fonction de l'analyseur lexical qui génère les tokens et l'input. Elle rend le type des expressions utilisées comme actions dans la grammaire.

```
val exp : (Lexing.lexbuf -> token) -> Lexing.lexbuf -> Terme.terme
```

Si le langage analysé n'est pas reconnu par la grammaire, l'exception `Parse_error` est levée.

1.1.3 Implémentation du parsing en mode *récursif descendant*

Si nous voulons nous passer d'un outil tel que ocamllex ou menhir, nous pouvons très facilement implémenter un parser de manière récursive en partant depuis la racine (l'axiome des règles de notre grammaire) et en appelant de manière récursive les règles suivantes en fonction du caractère lu.

On modifiera légèrement la grammaire comme ci-dessous pour faciliter le travail.

```

exprule ::= | VARIABLE
          | PARLEFT parrule
          | NEWLINE
parrule ::= | LAMBDA lambdarule
           | apprule
lambdarule ::= VARIABLE POINT exprule PARRIGHT
apprule ::= exprule exprule PARRIGHT
```

Cela imposera cependant la saisie systématique des λ -termes avec des parenthèses autour des abstractions et des applications. De même, nous n'aurons plus la facilité syntaxique de l'associativité à gauche des applications et de l'associativité à droite du corps des abstractions. Je ne sais pas si une telle grammaire peut être conçue pour une analyse en mode récursif descendant. Je pense que non (après m'être un peu cassé les cheveux là-dessus...)

Voici le code associé.

```

exception Fin
exception Erreur of string

let _ =
  let lexbuf = Lexing.from_channel stdin in

  let rec exprule courant =
    match courant with
    | VARIABLE(x) -> Var(x)
    | PARLEFT -> parrule (lexana lexbuf)
    | NEWLINE -> raise Fin
    | _ -> raise (Erreur "exprule")

  and parrule courant =
    match courant with
    | LAMBDA -> lambdarule courant
    | _ -> apprule courant

  and apprule courant =
    let op1 = exprule courant in
    let op2 = exprule (lexana lexbuf) in
    let suivant = lexana lexbuf in (* consume PARRIGHT*)
    match suivant with
    | PARRIGHT -> App(op1, op2)
    | _ -> raise (Erreur "apprule")

  and lambdarule courant =
    let var = lexana lexbuf in
    let _ = lexana lexbuf in (* consume POINT *)
    let corps = exprule(lexana lexbuf) in
    let _ = lexana lexbuf (* consume PARRIGHT *) in
    match var with
    | VARIABLE(x) -> Lam(x, corps)
    | _ -> raise (Erreur "lambdarule")

  in (betaNormalPrint (exprule (lexana lexbuf)); flush stdout)

```

1.2 Représentation en ML

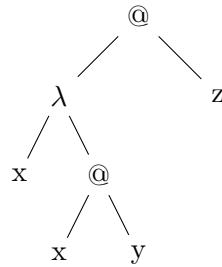
```
type terme =
| Var of string
| App of terme * terme
| Lam of variable * terme
```

Un terme du λ -calcul est donc un type ML composé, avec les constructeurs *Var*, *App* et *Lam*.

Par exemple, le terme $\lambda x.(xy)z$ est représenté par la structure :

```
App ((Lam ("x", (App ((Var "x"), (Var "y"))))), (Var "z")))
```

C'est un peu verbeux. Voici cependant sa représentation sous la forme d'un arbre syntaxique. Le symbole @ représente ici l'application.



Pour dessiner cet arbre, nous utilisons le très bon package TIKZ qui permet facilement de représenter les arbres avec une syntaxe très simple.

```
\node{@}
child { node {\$\\lambda \$}
  child { node {x} }
  child { node {@}
    child { node {x} }
    child { node {y} }
  }
}
}
child { node {z} };
```

On implémente deux fonctions CAML qui permettent d'afficher une expression de type λ -terme en code LATEX ou en code TIKZ.

La fonction `varLibres` retourne les variables libres (ie. non liées) d'un λ -terme.

```
let rec varLibres lambdaTerm =
  match lambdaTerm with
  | Var x -> [ x ]
  | App (n, m) -> union (varLibres n) (varLibres m)
  | Lam (x, m) -> remove x (varLibres m)
```

Par exemple : $(\lambda x.yxw)(\lambda u.uv) \mapsto y, w, v$

```
let exemple = App (Lam ("x", App (Var("y"), App (Var("x"), Var("w")))),
Lam ("u", App (Var ("u"), Var ("v")))) ;;
varLibres exemple ;;
- : variable list = ["y"; "w"; "v"]
```

Définition 2. Un *redex* ou *radical* est un terme de la forme $(\lambda x.M)N$

On a déjà distingué deux formes possibles sur les λ -termes : les *abstractions* $\lambda x.M$ et les *applications* (MN) . Un *redex* qui est de la forme $(\lambda x.M)N$ est la rencontre d'une abstraction et d'une application. Voici son implémentation.

ML	SCHEME
<code>(function x -> M) N</code>	<code>((lambda (x) M) N)</code>
<code>let x = N in M</code>	<code>(let ((x N)) M)</code>
<code>M where x = N</code>	

La dernière syntaxe `M where x = N` a disparu en OCAML. C'est dommage car elle est très élégante. Nous essayerons de la reprendre pour notre interpréteur maison MiniML.

Définition 3. La β -réduction est une opération de substitution. Elle consiste à substituer dans le redex $(\lambda x.M)N$ les occurrences libres de x dans M par l'argument N . On la formalise par la notation suivante :

$$((\lambda x.M)N) \rightarrow_{\beta} M[x \leftarrow N]$$

Nous pouvons la décrire par les quatre règles d'inférence ci-dessous :

$$\begin{aligned} (\text{redex}) &: \frac{}{((\lambda x.M)N) \rightarrow M[x \leftarrow N]} \\ (\text{abstraction}) &: \frac{M \rightarrow M_1}{\lambda x.M \rightarrow (\lambda x.M_1)} \quad (1) : \frac{M \rightarrow M_1}{(MN) \rightarrow (M_1N)} \quad (2) : \frac{N \rightarrow N_1}{(MN) \rightarrow (MN_1)} \end{aligned}$$

Pour l'implémentation, nous nous sommes appuyés sur le code de l'excellent livre *Programmer avec Scheme* de Jacques Chazarain [3]. Nous avons adapté son code SCHEME en OCAML. En comparant les deux versions, on s'aperçoit finalement que la version OCAML, même si un peu plus concise que la version SCHEME grâce l'utilisation du *pattern matching*, reste très proche de l'original SCHEME.

La fonction `substituer` permet de substituer la variable `var` par le terme `terme` dans l'expression `exp`.

```
let rec substituer exp var terme =
  match exp with
  | Var x -> if x = var then terme else exp
  | App (n, m) -> App ((substituer n var terme), (substituer m var terme))
  | Lam (x, m) -> (* pas d'occurrence libre on en fait rien *)
    if not (mem var (varLibres exp))
    then exp
    else (* si capture on renomme *)
    if mem x (varLibres terme)
    then
      (let newV = renomme x (varLibres terme) in
```

```

let newCorps = substituer m x (Var newV)
in Lam (newV, (substituer newCorps var terme)))
else Lam (x, (substituer m var terme))

```

Avant de substituer une variable par une autre, nous devons nous assurer qu'il n'y aura pas de phénomène de capture, ie. nous assurer qu'une variable libre ne deviendra pas liée, après substitution. Dans l'exemple suivant, la variable x qui était libre dans (zx) se retrouve capturée par λ

$$\lambda x.(xy)[y \leftarrow (zx)] = \lambda x.(x(zx))$$

Pour éviter cela, il faut avant substitution opérer un renommage de la variable liée :

$$\lambda x_1.(x_1y)[y \leftarrow (zx)] = \lambda x_1.(x_1(zx))$$

Ce renommage est appelé α -conversion. On dit que deux termes M et N sont équivalents modulo α . On écrira $M =_{\alpha} N$

```

(** renommer var *)
let renomme var listeVar =
  let rec renommeAux j =
    let varj = var ^ (string_of_int j)
    in if mem varj listeVar then renommeAux (j + 1) else varj
  in renommeAux 0

```

La fonction `reduc1Normale` réduit le terme en appliquant la stratégie de réduction normale, c'est-à-dire en commençant la réduction par le redex extérieur, plus précisément le plus à gauche des extérieurs.

```

let rec reduc1Normale terme =
  match terme with
  | Var x -> raise IRREDUCTIBLE
  | Lam (x, m) -> Lam (x, (reduc1Normale m))
  | App (n, m) ->
    if estRedex terme
    then betaReducRedex terme
    else
      try App ((reduc1Normale n), m)
      with IRREDUCTIBLE -> App (n, (reduc1Normale m))

```

Enfin, nous avons une fonction `fullReduc` qui permet d'itérer l'opération de β -réduction jusqu'à trouver la forme normale, ou boucler s'il n'y a pas de forme formale. On lui impose donc maximum 1000 réductions¹ Elle prend en argument la méthode (ie. la stratégie de réduction) à utiliser.

```

let rec fullReduc terme methode =
  let rec loop terme iter =
    try

```

1. La fonction STOP de mon toplevel sous Eclipse ne marche pas...

```

let newterme = methode terme in
  if (newterme = terme || iter = 0) then newterme
  else loop newterme (iter - 1)
with IRREDUCTIBLE -> terme
in loop terme 1000

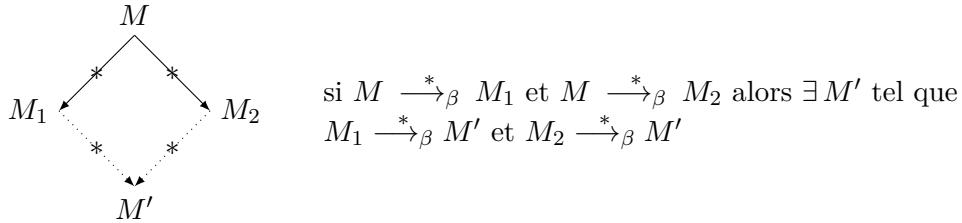
let betaNormal t = fullReduc t reduc1Normale

```

Théorème 1. *La réduction normale appliquée à un terme normalisable aboutit toujours à la forme irréductible du terme.*

Nous avons en plus le théorème suivant (plus précisément son corollaire) qui nous assure que toutes les réductions d'un λ -terme (qui terminent) aboutissent au même terme irréductible.

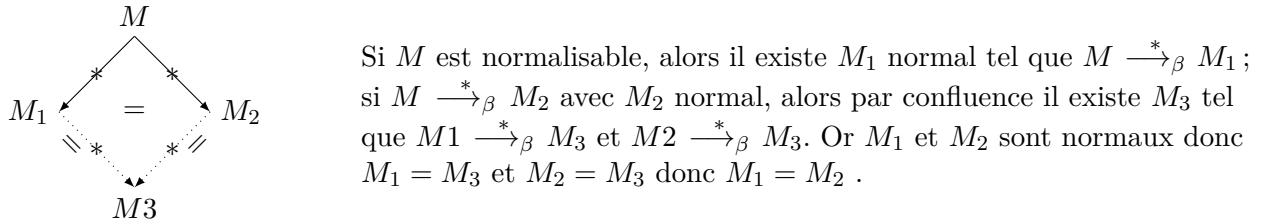
Théorème 2. *Théorème de Church-Rosser : la β -réduction est confluente.*



Théorème 3. *Corollaire du théorème de Church-Rosser*

*Si M est normalisable, il existe un unique terme normal, noté \overline{M} tel que $M \xrightarrow{*_{\beta}} \overline{M}$*

Un corollaire ne devrait pas nécessiter de preuve car supposée évidente. La voici cependant :



```

let t1 = App (Lam ("x",App (Lam ("y", App (Var ("x"), Var ("y"))), Var ("u"))), Var ("z")) ;;
# fullReduc t1 ;;
--> ((lambda x . ((lambda y . (xy))u))z)
--> ((lambda y . (zy))u)
--> (zu)
- : unit -> unit = <fun>

```

$$(\lambda x.(\lambda y.xy)u)z \xrightarrow{\beta} (\lambda y.zy)u \xrightarrow{\beta} (zu)$$

$(\lambda x.(\lambda y.xy)u)z$	$(\lambda y.zy)u$	(zu)
<pre> graph TD Root1[@] --> Lambda1[\lambda] Root1 --> Z1[z] Root1 --> SubRoot1[@] Lambda1 --> X1[x] Lambda1 --> SubRoot2[@] Lambda1 --> SubLambda1[\lambda] SubRoot2 --> Y1[y] SubRoot2 --> SubSubRoot1[@] SubLambda1 --> Z1[y] SubSubRoot1 --> X2[x] SubSubRoot1 --> Y2[y] </pre>	<pre> graph TD Root2[@] --> Lambda2[\lambda] Root2 --> U2[u] Root2 --> SubRoot2[@] Lambda2 --> Y2[y] Lambda2 --> SubRoot3[@] Lambda2 --> SubLambda2[\lambda] SubRoot3 --> Z2[z] SubRoot3 --> Y3[y] </pre>	<pre> graph TD Root3[@] --> Z3[z] Root3 --> U3[u] </pre>

Voici un exemple de terme qui ne termine pas et qui enflé.

$$(\lambda x. xxx)(\lambda x. xxx) \rightarrow_{\beta} (\lambda x. xxx)(\lambda x. xxx)(\lambda x. xxx) \rightarrow_{\beta} (\lambda x. xxx)(\lambda x. xxx)(\lambda x. xxx)(\lambda x. xxx) \rightarrow_{\beta} \dots$$

1.3 La β -réduction faible avec appel par valeur

Dans un langage fonctionnel comme SCHEME ou ML, il est important de noter que contrairement au λ -calcul, le corps de la lambda n'est pas évalué. On parle de β -réduction faible. Autrement dit, la règle suivante n'est pas utilisée :

$$(\text{abstraction}) : \frac{M \rightarrow M_1}{\lambda x. M \rightarrow (\lambda x. M_1)}$$

Nous pourrons utiliser cette absence d'évaluation du corps des lambda expressions pour geler l'évaluation de nos expressions : `(delay exp) = (lambda () exp)`

L'appel par valeur signifie que les arguments sont évalué en premier. Les règles d'inférence appliquées sont donc dans cet ordre :

$$(1) : \frac{N \rightarrow N_1}{(MN) \rightarrow (MN_1)} \quad (2) : \frac{M \rightarrow M_1}{(MN) \rightarrow (M_1N)} \quad (3) : \frac{}{((\lambda x.M)N) \rightarrow M[x \leftarrow N]}$$

Voici la fonction ML qui implémente cet ordre :

```

let rec reduc1Valeur terme =
  match terme with
  | Var x -> raise IRREDUCTIBLE
  | Lam (x, m) -> raise IRREDUCTIBLE
  | App (n, m) ->
      (try App (n, (reduc1Valeur m))
       with
        | IRREDUCTIBLE ->
            (try App ((reduc1Valeur n), m)
             with
              | IRREDUCTIBLE ->
                  (try App ((reduc1Valeur n), (reduc1Valeur m))
                   with
                     | IRREDUCTIBLE -> raise IRREDUCTIBLE
                     | _ -> m)
               with
                 | IRREDUCTIBLE -> raise IRREDUCTIBLE
                 | _ -> n)
         with
           | IRREDUCTIBLE -> raise IRREDUCTIBLE
           | _ -> m)

```

```

with
| IRREDUCTIBLE ->
  (try betaReducRedex terme
   with | NOTREDEX -> raise IRREDUCTIBLE)))

```

Par exemple, nous aurons les réductions successives suivantes :

- réduction normale, qui aboutit toujours à la forme irréductible

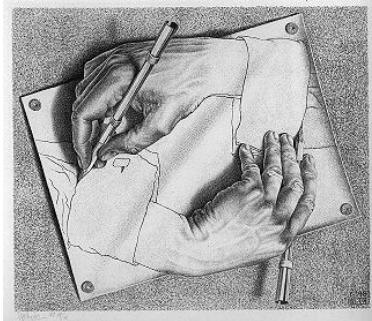
$$(\lambda x.y)((\lambda x.xx)(\lambda x.xx)) \rightarrow_{\beta} y$$

- réduction par valeur

$$\begin{aligned}
 (\lambda x.y)((\lambda x.xx)(\lambda x.xx)) &\rightarrow_{\beta} (\lambda x.y)((\lambda x.xx)(\lambda x.xx)) \\
 &\rightarrow_{\beta} (\lambda x.y)((\lambda x.xx)(\lambda x.xx)) \\
 &\rightarrow_{\beta} (\lambda x.y)((\lambda x.xx)(\lambda x.xx)) \\
 &\rightarrow_{\beta} \dots
 \end{aligned}$$

1.4 La récursivité et le point fixe

What else is a loop but a way of representing an endless process in a finite way ? [7]



$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

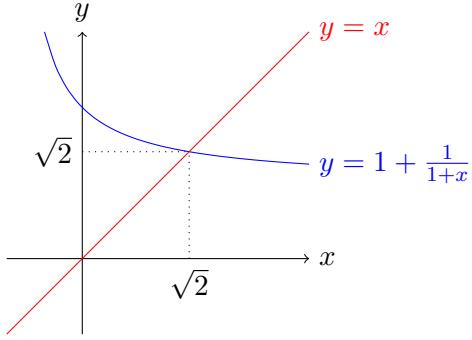
En analyse, le point fixe d'une fonction f est sa valeur x telle que $f(x) = x$

Cela permet de définir x en fonction de lui-même.

Cette simple expression $x = f(x)$ est finalement très étrange et déroutante. C'est la force de la récursivité : $x = f(f(f(f(f(\dots(x)\dots))))))$

Un exemple est la valeur $\sqrt{2}$ exprimée sous forme d'une fraction continue, expression trouvée je crois par Euler. Je la décris ci-dessous pour le plaisir d'écrire (et lire) de belles formules mathématiques en L^AT_EX[11]

$$\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} - 1 = 1 + \frac{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{2} + 1} = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$$



$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}$$

En posant $f(x) = 1 + \frac{1}{1+x}$, la résolution de l'équation $x = f(x)$ nous permet de calculer la valeur de $\sqrt{2}$. Nous utilisons aussi le fait que $\sqrt{2}$ est un point fixe attractif de notre fonction f . C'est-à-dire qu'il existe un *voisinage* de $\sqrt{2}$ tel que la suite $x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \dots$ converge vers $\sqrt{2}$

En CAML, la fonction qui itère cette fraction continue peut être codée comme suit. Nous partons ici de $x_0 = 1$. La fraction continue converge très rapidement.

```
let rec square2 iter =
  if (iter = 1) then 1.
  else 1. +. (1. /. (1. +. square2 (iter - 1)));
val square2 : int -> float = <fun>

# square2 30 ;;
- : float = 1.4142135623730951

# sqrt 2. ;;
- : float = 1.41421356237309512.
```

En λ -calcul, nous avons un combinateur² qui nous permet de calculer le point fixe de n'importe quel λ -terme. Ce combinateur s'appelle Y . Il est défini par

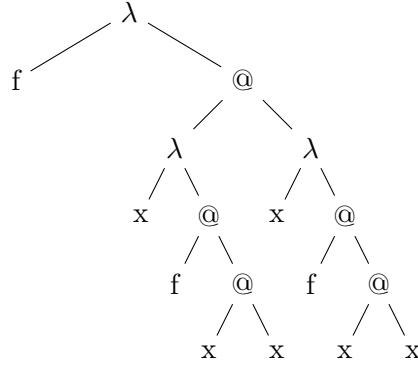
$$Y = \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$$

Ce n'est pas le seul combinateur de point fixe. Voici un autre dû à Turing :

$$\Theta = (\lambda x.\lambda y.(y(xxy))) (\lambda x.\lambda y.(y(xxy)))$$

Voici l'arbre syntaxique de Y :

2. Un combinateur est un λ -terme comprenant uniquement des variables liées



Quel que soit le terme M , nous aurons $(YM) =_{\beta} M(YM)$

Essayons ceci avec notre fonction `fullReduc` en OCAML. Réduisons YM :

$$\begin{aligned}
 & \lambda f.(\lambda x.(f(xx)))(\lambda x.(f(xx)))M \\
 \rightarrow_{\beta} & (\lambda x.(M(xx)))(\lambda x.(M(xx))) \\
 \rightarrow_{\beta} & (M(\lambda x.(M(xx))))(\lambda x.(M(xx))) \triangleright [2] \\
 \rightarrow_{\beta} & (MM(\lambda x.(M(xx))))(\lambda x.(M(xx))) \\
 \rightarrow_{\beta} & (MMM(\lambda x.(M(xx))))(\lambda x.(M(xx))) \\
 \rightarrow_{\beta} & (MMMM(\lambda x.(M(xx))))(\lambda x.(M(xx))) \\
 \rightarrow_{\beta} & \dots
 \end{aligned}$$

La deuxième β -réduction est bien égale à $M(YM)$. Nous voyons ici le mécanisme d'appel récursif à M .

Détaillons cela avec une fonction exprimée en pseudo-code d'un λ -calcul étendu. Nous nous inspirons pour cela du très bon article de wikipedia https://en.wikipedia.org/wiki/Lambda_calculus.

Soit $M = (\lambda f \lambda n. (if\ n = 0\ then\ 1\ else\ n * f(n - 1)))$

$$\begin{aligned}
 (YM)\ 4 & \rightarrow_{\beta} M(YM)\ 4 \\
 & \rightarrow_{\beta} (\lambda f \lambda n. (if\ n = 0\ then\ 1\ else\ n * f(n - 1)))(YM)\ 4 \\
 & \rightarrow_{\beta} (\lambda n. (if\ n = 0\ then\ 1\ else\ n * ((YM)(n - 1))))\ 4 \\
 & \rightarrow_{\beta} (if\ 4 = 0\ then\ 1\ else\ 4 * ((YM)\ (4 - 1))) \\
 & \rightarrow_{\beta} 4 * ((YM)\ 3) \\
 & \rightarrow_{\beta} 4 * (M(YM)\ 3) \\
 & \vdots \\
 & \rightarrow_{\beta} 4 * 3 * 2 * 1
 \end{aligned}$$

Ici encore, nous avons utilisé la stratégie de β -réduction normale. Mais avec une réduction par valeur, le terme en argument (YM) aura été réduit indéfiniment en $M(M(M(M(M\dots YM)\dots)))$, sans réduire le redex Mx

En utilisant notre programme OCAML, voyons cela avec en prenant $M = \lambda a.(\lambda b.b)$:

```
# betaNormal ym ;;
```

$$\begin{aligned}
 & (\lambda f.(\lambda x.(f(xx))\lambda x.(f(xx)))\lambda a.\lambda b.b) \\
 \rightarrow_{\beta} & (\lambda x.(\lambda a.\lambda b.b(xx))\lambda x.(\lambda a.\lambda b.b(xx))) \triangleright [2] \\
 \rightarrow_{\beta} & (\lambda a.\lambda b.b(\lambda x.(\lambda a.\lambda b.b(xx))\lambda x.(\lambda a.\lambda b.b(xx)))) \triangleright [3] \\
 \rightarrow_{\beta} & \lambda b.b
 \end{aligned}$$

```

# betaValeur ym ;;
          ( $\lambda f.(\lambda x.(f(xx))\lambda x.(f(xx)))\lambda a.\lambda b.b$ )
 $\rightarrow_{\beta}$  ( $\lambda x.(\lambda a.\lambda b.b(xx))\lambda x.(\lambda a.\lambda b.b(xx))$ )  $\triangleright[2]$ 
 $\rightarrow_{\beta}$  ( $\lambda a.\lambda b.b(\lambda x.(\lambda a.\lambda b.b(xx))\lambda x.(\lambda a.\lambda b.b(xx)))$ )  $\triangleright[3]$ 
 $\rightarrow_{\beta}$  ( $\lambda a.\lambda b.b(\lambda a.\lambda b.b(\lambda x.(\lambda a.\lambda b.b(xx))\lambda x.(\lambda a.\lambda b.b(xx))))$ )
 $\rightarrow_{\beta}$  ( $\lambda a.\lambda b.b(\lambda a.\lambda b.b(\lambda a.\lambda b.b(\lambda x.(\lambda a.\lambda b.b(xx))\lambda x.(\lambda a.\lambda b.b(xx))))))$ )
 $\rightarrow_{\beta}$  ( $\lambda a.\lambda b.b(\lambda a.\lambda b.b(\lambda a.\lambda b.b(\lambda a.\lambda b.b(\lambda x.(\lambda a.\lambda b.b(xx))\lambda x.(\lambda a.\lambda b.b(xx)))))))$ )

```

Les étapes $\triangleright[2]$ et $\triangleright[3]$ sont bien les mêmes sur les deux stratégies. Puis la β -réduction par valeur va continuer à réduire l'argument (YM), là où la β -réduction normale va d'abord réduire le redex Mx

Avec la réduction par valeur, il nous faut donc utiliser un autre combinateur de point fixe³ que nous appelerons Z

$$Z = \lambda f.(\lambda x.f(\lambda v.xxv))(\lambda x.f(\lambda v.xxv))$$

On constate que Z est η -équivalent à Y . Nous rappelons la définition suivante :

Définition 4. *Les termes $(\lambda x.Mx)$ et M sont η -équivalents. On écrira $(\lambda x.Mx) =_{\eta} M$*
En ML, nous pouvons par exemple dire que `let g x = f x` est η -équivalent à `let g = f`

Appliquons à nouveau notre exemple avec ce combinateur Z appliqué à $M = \lambda a.\lambda b.b$:

```
# betaValeur zm ;;
```

```

(( $\lambda f.((\lambda x.(f(\lambda v.((xx)v))))(\lambda x.(f(\lambda v.((xx)v)))))(\lambda a.(\lambda b.b))$ )
 $\rightarrow_{\beta}$  (( $\lambda x.((\lambda a.(\lambda b.b))(\lambda v.((xx)v))))(\lambda x.((\lambda a.(\lambda b.b))(\lambda v.((xx)v))))$ )
 $\rightarrow_{\beta}$  (( $\lambda a.(\lambda b.b))(\lambda v.(((\lambda x.((\lambda a.(\lambda b.b))(\lambda v.((xx)v))))(\lambda x.((\lambda a.(\lambda b.b))(\lambda v.((xx)v))))))v$ )))
 $\rightarrow_{\beta}$  ( $\lambda b.b$ )

```

Nous avons le même résultat et les même étapes de réduction avec `betaNormal zm ;;`

En SCHEME, nous pourrons implémenter ce combinateur Z :

```

(define Z
  (lambda(f)
    (lambda (x) (lambda(v) ((f (x x) v))))
    (lambda (x) (lambda(v) ((f (x x) v)))))))

```

En ML, le typage ne nous permettra pas de coder un combinateur comme Y ou Z .

Essayons cependant d'écrire :

```

# let rec fix f = f (fix f) ;;
val fix : ('a -> 'a) -> 'a = <fun>

let factabs fact = function
| 0 -> 1
| n -> n * fact (n - 1) ;;

```

3. Nous insistons là-dessus car nous rappelons que les interprètes MiniScheme et MiniML que nous implémenterons utiliseront la β -réduction faible par valeur.

```

val factabs : (int -> int) -> int -> int = <fun>
# (fix factabs) 5 ;;
Stack overflow during evaluation (looping recursion?).

```

ML est bien un langage *strict* : les arguments d'une fonction sont évalués en premier comme on l'a vu dans la β -réduction faible avec appel par valeur.

Pour éviter la boucle infinie $f(f \dots (f(fix f)) \dots)$, une astuce que j'ai pu lire est d'introduire une variable supplémentaire :

```

# let rec fix f x = f (fix f) x ;;
val fix : (('a -> 'b) -> 'a -> 'b) -> 'a -> 'b = <fun>
# (fix factabs) 5 ;;
- : int = 120

```

Ici aussi, le mécanisme de la “ η -expansion” est utilisé. Je suis surpris cependant de voir que `fix` prenant deux arguments est correctement évalué lors de son appel (`fix f`). Je ne peux reproduire cela en SCHEME :

```

(define factabs
  (lambda (f)
    (lambda (n)
      (if (eq? n 0)
          1
          (* n (f (- n 1)))))))

(define y
  (lambda (f x)
    (f (y f) x)))

(y factabs 5)
=> y: arity mismatch; the expected number of arguments does not match
   expected: 2
   given: 1

```

1.5 *Church* encoding. Les entiers et les booléens en λ -calcul

1.5.1 Les entiers *Church*

Les entiers peuvent être représentés de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
0 &\equiv \lambda f. \lambda x. x \\
1 &\equiv \lambda f. \lambda x. fx \\
2 &\equiv \lambda f. \lambda x. f(fx) \\
3 &\equiv \lambda f. \lambda x. f(f(fx))
\end{aligned}$$

La fonction successeur se définira $SUCC \equiv \lambda n. \lambda f. \lambda x. f(nfx)$. Avec notre représentation ML :

```
Lam("n", Lam("f", Lam("x", App(Var "f", App(App(Var "n", Var "f"), Var "x")))))
```

Exécutons avec la stratégie normale, puis avec la stratégie de réduction faible par valeur :

```
# betaNormalPrint (App(succ, un)) ;;
```

$$\begin{aligned} & (\lambda n. \lambda f. \lambda x. (f((nf)x)) \lambda f. \lambda x. (fx)) \\ \rightarrow_{\beta} & \lambda f. \lambda x. (f((\lambda f. \lambda x. (fx)f)x)) \\ \rightarrow_{\beta} & \lambda f. \lambda x. (f(\lambda x. (fx)x)) \\ \rightarrow_{\beta} & \lambda f. \lambda x. (f(fx)) \\ & \text{Exception : IRREDUCTIBLE.} \end{aligned}$$

```
# betaValeurPrint (App(succ, un)) ;;
```

$$\begin{aligned} & (\lambda n. \lambda f. \lambda x. (f((nf)x)) \lambda f. \lambda x. (fx)) \\ \rightarrow_{\beta} & \lambda f. \lambda x. (f((\lambda f. \lambda x. (fx)f)x)) \\ & \text{Exception : IRREDUCTIBLE.} \end{aligned}$$

Nous n'aboutissons pas au terme $\lambda f. \lambda x. (f(fx))$ avec la stratégie par valeur. Nous voyons que le corps de la lambda n'est pas évalué. Je suis cependant surpris car je pensais cette stratégie (même si appelée *faible*) parvenait à calculer la forme normale.

Nous pouvons écrire en OCAML la fonction qui convertit des entiers vers les terms *Church* :

```
let rec int2Church = function
| 0 -> Lam("f", Lam("x", Var "x"))
| n -> App(succ, int2Church (n-1))

# betaNormal (int2Church 3) ;;

\begin{aligned}
& (\lambda n. \lambda f. \lambda x. (f((nf)x)) (\lambda n. \lambda f. \lambda x. (f((nf)x)) (\lambda n. \lambda f. \lambda x. (f((nf)x)) \lambda f. \lambda x. x))) \\
\rightarrow_{\beta} & \lambda f. \lambda x. (f(((\lambda n. \lambda f. \lambda x. (f((nf)x)) (\lambda n. \lambda f. \lambda x. (f((nf)x)) \lambda f. \lambda x. x))f)x)) \\
\rightarrow_{\beta} & \lambda f. \lambda x. (f((\lambda f. \lambda x. (f(((\lambda n. \lambda f. \lambda x. (f((nf)x)) \lambda f. \lambda x. x)f)x))f)x)) \\
\rightarrow_{\beta} & \lambda f. \lambda x. (f(\lambda x. (f(((\lambda n. \lambda f. \lambda x. (f((nf)x)) \lambda f. \lambda x. x)f)x))x)) \\
\rightarrow_{\beta} & \lambda f. \lambda x. (f(f(((\lambda n. \lambda f. \lambda x. (f((nf)x)) \lambda f. \lambda x. x)f)x))) \\
\rightarrow_{\beta} & \lambda f. \lambda x. (f(f((\lambda f. \lambda x. (f((\lambda f. \lambda x. x)f)x))f)x))) \\
\rightarrow_{\beta} & \lambda f. \lambda x. (f(f(\lambda x. (f((\lambda f. \lambda x. x)f)x))x))) \\
\rightarrow_{\beta} & \lambda f. \lambda x. (f(f(f((\lambda f. \lambda x. x)f)x)))) \\
\rightarrow_{\beta} & \lambda f. \lambda x. (f(f(f(f(\lambda x. xx))))) \\
\rightarrow_{\beta} & \lambda f. \lambda x. (f(f(fx))) \\
& \text{Exception : IRREDUCTIBLE.}
\end{aligned}

```

L'addition peut être exprimée par le combinateur $\lambda m. \lambda n. \lambda f. \lambda x. m f (n f x) x$

La multiplication peut être exprimée par le combinateur $\lambda m. \lambda n. \lambda f. \lambda x. m (n f) x$

Le prédecesseur peut être exprimé par le combinateur $\lambda n. \lambda f. \lambda x. n (\lambda g. \lambda h. h (g f)) (\lambda u. x) (\lambda u. u)$

Après avoir défini les termes `succ` et `pred`, nous pouvons écrire les deux fonctions suivantes qui “jonglent” entre les entiers ML et les entiers Church.

```
let int2Church n =
  let rec aux = function
    | 0 -> Lam("f", Lam("x", Var "x"))
```

```

| n -> App(succ, aux (n-1))
in betaNormal (aux n)

let rec church2Int  terme =
  match terme with
  | Lam("f", Lam("x", Var "x")) -> 0
  | _ -> 1 + church2Int (betaNormal(App(pred, terme)))

# church2Int (int2Church 10);;
- : int = 10

```

Egalement, nous pouvons représenter directement en ML les entiers *Church* sous forme de fonctionnelles :

```

let zero f x = x
let un f x = f x
let deux f x = f (f x)

let succ n f x = f (n f x)
let add n m f x = n f (m f x)

let to_int n = n (function k -> k + 1) 0
let rec to_church = function  | 0 -> zero  | n -> succ (to_church (n-1))

#to_int (add deux (succ (to_church 5))) ;;
- : int = 8

```

1.5.2 Les booléens

Nous pourrons les représenter de la façon suivante. On y ajoute le prédictat IsZero.

$$\begin{aligned}
\text{true} &\equiv \lambda a. \lambda b. a \\
\text{false} &\equiv \lambda a. \lambda b. b \\
\text{and} &\equiv \lambda p. \lambda q. p \ q \ p \\
\text{or} &\equiv \lambda p. \lambda q. p \ p \ q \\
\text{not} &\equiv \lambda p. p (\lambda a. \lambda b. b) (\lambda a. \lambda b. a) = \lambda p. p \text{ false true} \\
\text{if} &\equiv \lambda p. \lambda a. \lambda b. p \ a \ b \\
\text{IsZero} &\equiv \lambda n. n (\lambda x. \text{false}) \text{ true}
\end{aligned}$$

1.5.3 La fonction factorielle

Nous pouvons l'exprimer de manière assez simple. La difficulté est de manipuler toujours les applications avec un seul argument, en version *curryfiées*. Nous appliquons le combinateur *Y* associé à la stratégie de réduction normale. Attention à ne pas réduire telle quelle la fonction **fact**. La réduction serait infinie comme on l'a vu précédemment. Seul la présence d'un argument permet d'aboutir à la forme normale.

Cette forme normale constitue notre *valeur* (au sens d'un langage interprété).

```

let fact =
  App (y,
    (Lam ("f",
      (Lam ("n",
        (App ((App ((App (si, (App (isZero, (Var "n"))))), un)),
          (App ((App (mult, (Var "n"))),
            (App ((Var "f"), (App (pred, (Var "n")))))))))))))
# church2Int (betaNormal (App(fact, int2Church 4)));;
- : int = 24

```

Nous n'afficherons pas les réductions ici. Le calcul de la factorielle de 3 nécessite 705 β -réductions. La factorielle de 5 en nécessite plus de 28000...

1.6 La notation de *de Bruijn*

*What's in a name? That which we call a rose
By any other name would smell as sweet.*[15]

Citation reprise par Xavier Leroy dans son excellent cours au collège de France

Le mécanisme de capture d'une variable libre par une lambda, qui nous oblige à faire de manière fastidieuse du renommage ponctuel de variables, est dû au fait qu'il y a un partage possible entre les noms des variables libres et des variables liées.

Pour éviter cela, nous pouvons utiliser une autre représentation du λ -terme. Le principe est de nommer les variables liées par un indice indiquant la profondeur de leurs liens (ou autrement dit la hauteur de leurs liaisons).

L'arbre syntaxique sera alors défini par :

1. les feuilles qui correspondent à des variables libres ou liées, représentées par un indice
2. le noeud unaire λ
3. le noeud binaire $@$

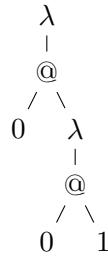
```

type tbruijn =
| Va of int
| La of tbruijn
| Ap of tbruijn * tbruijn

```

Soit le terme $M = \lambda x.x(\lambda y.yx)$, indiquons en exposant la hauteur de la liaison de chaque variable liée : $M = \lambda x.x^0(\lambda y.y^0x^1)$

FIGURE 1.1 – Représentation du terme $\lambda x.x(\lambda y.yx)$



Pour les variables libres, nous pouvons aussi utiliser un indice pour les nommer. Soit un ensemble de variables libres $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ nous les nommerons en ajoutant à leur indice i la profondeur jusqu'à la racine. Les indices des variables libres seront donc toujours supérieur à ceux des variables liées sur leurs branches. Cependant, avec cette notation une même variable libre avec plusieurs occurrences dans un terme pourra avoir des indices différents.

Nous avons maintenant une représentation *canonique* : deux termes sont α -équivalents si et seulement si leurs représentations en de de Bruijn sont égales.

Voici une fonction d'implémentation t2b transformant des termes en termes de de Bruijn.

```

let reste s = int_of_string(sub s 1 ((String.length s)-1)) ;;

let add_env var env =
  (var,0)::map (fun pp -> (fst(pp),(1 + snd(pp)))) env ;;

let t2b terme =
  let l = varLibres terme in
  let rec terme_to_bruijn t env hauteur =
    match t with
    | Var x -> if (mem x l) then Va((reste x) + hauteur) else Va(assoc x env)
    | App (n1, n2) -> Ap (terme_to_bruijn n1 env hauteur, terme_to_bruijn n2 env hauteur)
    | Lam (x, c) -> La (terme_to_bruijn c (add_env x env) (hauteur+1) )
  in terme_to_bruijn terme [] 0

let decalage d t =
  let rec aux p = function
  | Ap (t1,t2) -> Ap (aux p t1, aux p t2)
  | La (t) -> La (aux (p+1) t)
  | Va (i) when i<p -> Va(i)
  | Va(i) -> Va (i+d)
  in aux 0 t

let beta_b (La u) t =
  let rec aux p = function
  | Ap (u1,u2) -> Ap (aux p u1, aux p u2)
  | La (v) -> La (aux (p+1) v)
  | Va (i) when i=p -> decalage p t (*on rend t décalé de la profondeur d'abstr p*)
  in aux 0 t
  
```

```

| Va (i) when i<p -> Va (i) (*i est lié, on la rend tel quel *)
| Va (i) -> Va (i-1) (* on décrémente la variable libre car la betareduc supprime une lamdda
in aux 0 u ;;

let rec normale_bruijn = function
| Va x -> raise IRREDUCTIBLE
| La n -> La (normale_bruijn n)
| Ap (La n, m) -> beta_b (La n) m
| Ap (n,m) -> try Ap (normale_bruijn n, m)
with IRREDUCTIBLE -> Ap (n, normale_bruijn m)

let rec reduc_bruijn t =
  try reduc_bruijn (normale_bruijn t)
  with IRREDUCTIBLE -> t

```

1.7 Le λ -calcul simplement typé

Implémentation

Un contexte, ou environnement de typage, Γ est un ensemble de paires de la forme (x, τ) où x est une variable et τ un type. Un jugement de typage est un triplet $\Gamma \vdash t : \tau$

Le terme t sera bien typé dans Γ par les règles de jugement suivantes :

$$\begin{aligned}
&\text{si } (x, \tau) \in \Gamma, \text{ alors } \Gamma \vdash x : \tau \\
&\text{si } \Gamma \cup (x, \tau_1) \vdash u : \tau_2, \text{ alors } \Gamma \vdash \lambda x : \tau_1. u : \tau_1 \rightarrow \tau_2 \\
&\text{si } \Gamma \vdash u : \tau_1 \rightarrow \tau_2 \text{ et } \Gamma \vdash v : \tau_1, \text{ alors } \Gamma \vdash uv : \tau_2
\end{aligned}$$

Afin de jouer avec ce λ -calcul typé, nous introduisons la constante de type `Int`.

```

type ltype =
| Int
| Vart of string
| Fleche of ltype*ltype

```

De même, nous enrichissons notre définition de terme avec le constructeur `Const of int` et la fonction binaire `Plus`

```

type terme =
| Var of string
| App of terme * terme
| Lam of string * terme
| Const of int
| Plus of terme * terme

```

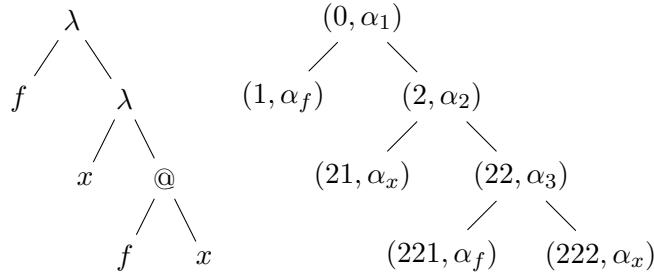
Inférence de type d'un terme t

Prenons l'exemple du terme $\text{apply} \equiv \lambda f. \lambda x. fx$

L'algorithme d'inférence se déroule en quatre temps.

- Assignation préliminaire de types ou variables de types à chaque sous-terme de l'expression.

Pour cela, nous parcourons l'arbre du terme en y affectant à chaque variable liée une variable de type, ainsi qu'à chaque sous-terme. Ce parcours nous rend en sortie une liste comprenant l'occurrence et la variable de type associée α_i



- Collecte des contraintes avec la fonction $T : \text{terme} \mapsto \text{type}$

- Pour une abstraction : $e = \lambda x. e_1 \rightsquigarrow T(e) = T(x) \rightarrow T(e_1)$
- Pour une application : $e = e_1 e_2 \rightsquigarrow T(e_1) = T(e_2) \rightarrow T(e)$
- Pour l'application de l'addition : $e = e_1 + e_2 \rightsquigarrow T(e) = T(e_1) = T(e_2) = \text{int}$

```
utop# t ;;
- : terme = Lam ("f", Lam ("x", App (Var "f", Var "x")))
```

```
utop# hm t ;;
- : (ltype * ltype) list =
[(Vart "alpha_1", Fleche (Vart "alpha_f", Vart "alpha_2"));
 (Vart "alpha_f", Vart "alpha_f");
 (Vart "alpha_2", Fleche (Vart "alpha_x", Vart "alpha_3"));
 (Vart "alpha_x", Vart "alpha_x");
 (Vart "alpha_f", Fleche (Vart "alpha_x", Vart "alpha_3"));
 (Vart "alpha_f", Vart "alpha_f"); (Vart "alpha_x", Vart "alpha_x")]
```

- Unification de ces contraintes afin de trouver la substitution la plus générale si l'expression

est typable. Dans le cas contraire, échec. Nous utilisons l'algorithme d'unification que nous détaillerons dans un chapitre suivant.

- Nous appliquons cette substitution à la variable de type initialement affectée au terme t , à l'étape 1.

```
- : ltype = Fleche (Fleche (Vart "alpha_x", Vart "alpha_3"),
                      Fleche (Vart "alpha_x", Vart "alpha_3"))
```

Le code

Chapitre 2

L'interprétation

2.1 Introduction

Nous avons vu que le λ -calcul utilise la réduction, basée sur un mécanisme de substitution. Les langages interprétés que nous allons implémenter n'utilisent pas ce mécanisme de substitution, mais font appel un environnement qui permet de représenter les paires variable/valeur. A l'application d'une fonction, cet environnement est étendu avec les nouvelles paires variable/valeur des arguments de la fonction.

Nous perdons donc le côté pur du λ -calcul qui se suffit à lui-même pour dérouler ses calculs. L'interpréte ne pourra évaluer son expression qu'en présence d'un environnement. Un interpréte est ainsi une fonction `eval` telle que `(eval π env) ↦ valeur`

Nous reprenons ici un peu du code de l'excellent blog : <https://bernsteinbear.com/blog/lisp>.

Par rapport au code du blog cité, nous faisons deux changements majeurs. Le premier est d'utiliser à nouveau les outils d'analyseur lexical et syntaxique `ocamllex` et `ocamlyacc`. Le second sera d'utilisé des listes mutables, afin de pleinement refléter toutes les capacités de Scheme qui n'est pas un langage fonctionnel *pur*.

Une fois cet interpréte réalisé, nous l'utiliserons pour implémenter un nouvel interpréte avec quelques variantes : liaison *dynamique* et *statique*, évaluation *stricte* et *paresseuse* et enfin un interpréte par *continuation*, avant de conclure sur une tour de babel avec capacité de réification et réflexion de notre mét-interpréte. C'est comme une quête philosophique...

Pour ces différentes variantes, nous nous inspirons de notre bible sur le langage LISP : *LISP In Small Pieces* de Christian Queinnec. [13]

2.2 Un interpréte MiniScheme avec OCAML

2.2.1 L'évaluation

Le λ -calcul repose sur un mécanisme de substitution permettant de réduire les termes et aboutir à une forme normale. En programmation fonctionnelle, au lieu de réduire un terme, on l'évaluera. Un terme non fermé ne pourra être évalué que dans un environnement où ses variables libres ont une liaison. Nous avons les définitions suivantes :

- Une *liaison* est un couple (x, v) où x est une variable et v est une valeur.

- Un *environnement* est une liste de liaison
- Une *fermeture* est un couple (M, ρ) où M est un terme et ρ un environnement comportant une liaison pour chaque variable libre de M .
- Une *valeur* est une fermeture (M, ρ) avec M de forme normale.

On formalise l'évaluation par la règle de jugement $\rho \vdash M \rightarrow v$. Elle exprime que dans l'environnement ρ , le terme M a pour valeur v .

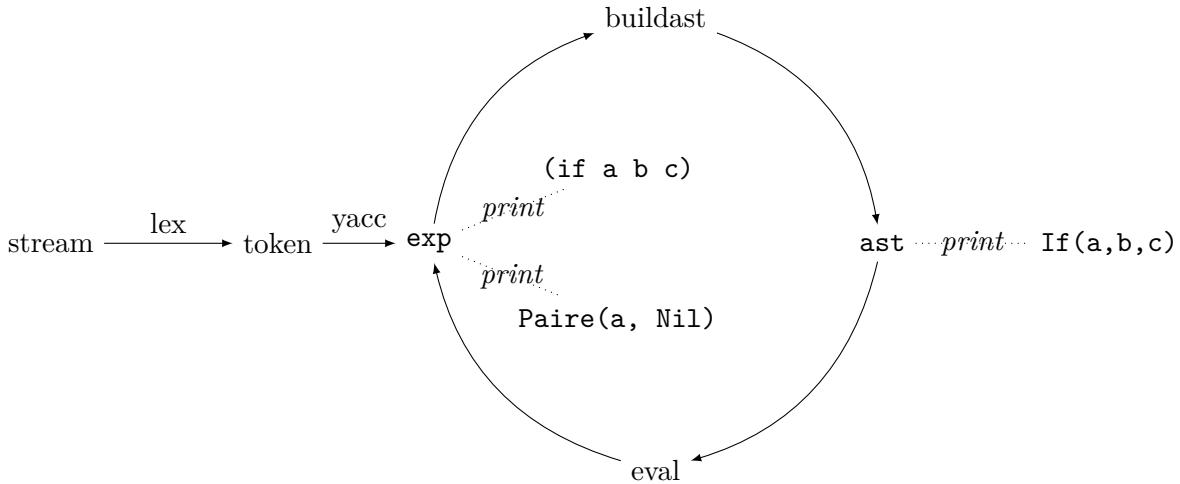
La règle d'évaluation de l'appel par valeur se formalise ainsi comme suit :

$$(App_v) : \frac{\rho \vdash M \rightarrow (\lambda x M', \rho') \quad \rho \vdash N \rightarrow v \quad (x, v); \rho' \vdash M' \rightarrow v'}{\rho \vdash MN \rightarrow v'}$$

L'évaluation de M' le corps de la lambda se fait dans l'environnement ρ' augmenté d'une liaison due du passage de paramètre. C'est la caractéristique de la liaison lexicale. Pour une liaison dynamique, l'évaluation du corps de la lambda se fera dans l'environnement courant ρ

Dans le cadre d'une implémentation en ML, l'erreur à ne pas faire (et que j'ai malheureusement faite initialement) et de représenter la valeur d'une évaluation avec un type différent de l'expression à évaluer. La puissance de Lisp repose sur cette uniformité entre programme et valeur. Nous utiliserons cette caractéristique pour implémenter un interpréteur Lisp en Lisp.

Voici la séquence du code, depuis le stream en entrée de l'analyseur lexical jusqu'à la sortie de l'évaluateur `eval`. J'ai fait le choix d'avoir une représentation intermédiaire `ast` permettant de modéliser l'arbre syntaxique, et de faciliter le processus d'évaluation.



Voici le code OCAML des type abstrait `exp`, `ast` et `env` :

```

type exp =
| Boolean of bool
| Symbole of string
| Mot of string
| Entier of int
| Nil
| Paire of exp ref * exp ref
| Closure of string list * ast list * (env ref)

```

```

and ast =
| Atom of exp
| Var of string
| If of ast * ast * ast
| Cond of (ast * ast) list
| And of ast list
| Or of ast list
| Call of ast * ast list
| Call0 of ast      (* procedure sans argument *)
| Lambda of string list * ast list
| Let of (string * ast) list * ast list
| Letrec of (string * ast) list * ast list
| Define of string * ast
| Begin of ast list
| Apply of ast * ast list
| Quote of exp
and env = (string * exp) list

```

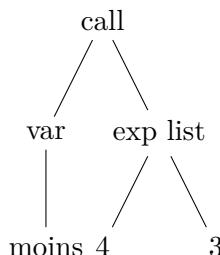
2.2.2 Les étapes Read, Eval, Print

L’interpréte présente trois étapes que l’on décrit souvent avec l’acronyme *REPL* : Read, Eval, Print, Loop

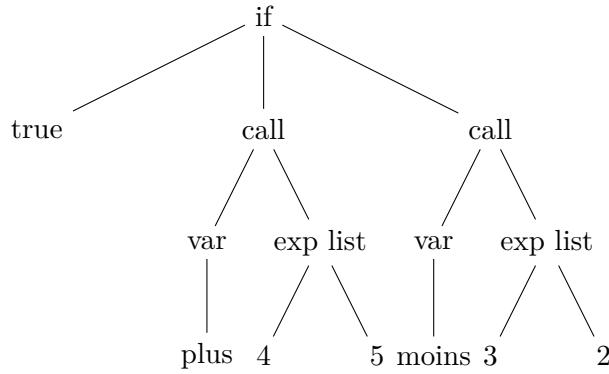
L’étape *READ* sera effectuée avec les moteurs ocamllex et ocmalyacc. Cette étape va lire la saisie clavier et construire l’arbre syntaxique des expressions SCHEME.

Voici quelques exemples d’arbres syntaxiques générés avec Yacc. Ces arbres syntaxiques sont à nouveau dessinés avec le package Tikz et nous avons développé une petite fonction qui parcourt l’expression et génère le code Tikz.

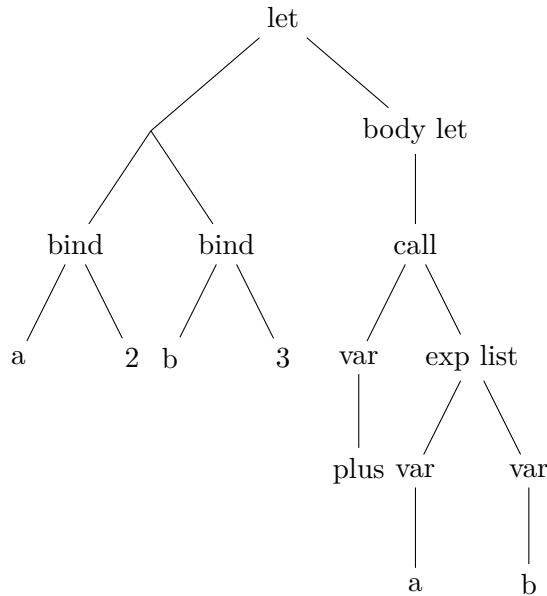
(moins 4 3)



(if #t (plus 4 5) (moins 3 2))



Et enfin une expression let (let ((a 2) (b 3)) (plus a b))



L'étape *EVAL* va parcourir l'arbre syntaxique de l'expression, traiter cette expression et en exprimer une valeur modélisée avec le type `value`

La fonction `eval` est une fonction prenant comme arguments une expression de type `ast` et un environnement. Elle retourne une valeur de type `exp`. Voici sa signature :

`val eval : ast -> env -> exp = <fun>`

L'étape *PRINT* n'est autre que la fonction d'affichage finale de l'interprète. Une fois cette étape finie, l'interprète boucle sur l'étape initiale *READ*

2.2.3 Liaison lexicale vs liaison dynamique

Nous allons utiliser ici la liaison lexicale (statique), et non dynamique. Cela nous impose de capturer l'environnement existant au moment de la définition de la fonction. Plus précisément, l'environnement est capturé par l'évaluation de la lambda, évaluation dont la valeur est appelée une *closure* ou *fermeture*.

`Lambda (parametres, expression) -> Closure (parametres, expression, env)`

Dans le cas de la liaison dynamique, la fonction est appliquée en utilisant l'environnement courant, et non pas son environnement de définition. Donc pas besoin de fermeture.

A ma connaissance, la liaison statique est maintenant utilisée dans la plupart des langages fonctionnels. En SCHEME et ML, nous pouvons voir dans l'exemple ci-dessous que l'évaluation de la définition de la lambda `inc_x` capture la valeur de `x`.

SCHEME	ML
<pre>> (define x 1) > (define inc_x (lambda () (+ x 1))) > (inc_x) 2 > (let ((x 100)) (inc_x)) 2</pre>	<pre># let x = 1;; # let inc_x = function () -> x+1 ;; # inc_x ();; - : int = 2 # let x = 100 in inc_x () ;; - : int = 2</pre>

2.2.4 Gestion de l'environnement

Comme indiqué en préambule, plusieurs choix sont possibles pour la modélisation de l'environnement. Le choix le plus simple est une représentation par une liste de paires *variable* ↔ *value*. Ce choix peut être fait en OCAML par le type natif `list` ou en utilisant le type concret `Paire of Symbole * lobject`

La principale difficulté est la représentation de fonctions récursives, comme en exemple la factorielle ci-dessous :

```
(define fact
  (lambda (n)
    (if (eq? n 0)
        1
        (* n (fact (- n 1))))))
```

Nous devons capturer l'environnement existant au moment de la définition de la fonction. Cet environnement existant ne contient pas déjà la définition de `fact`.

Il y a trois possibilités pour traiter ce problème de représentation d'un environnement *récursif*.

1. Utiliser une structure de liste qui permet à l'environnement capturé lors de la cloture de la lambda de boucler sur lui-même. La matérialisation de cette boucle ne peut à ma connaissance qu'être réalisée par un type liste *mutable*.

Comment construire un environnement qui contient la fonction que l'on est en train de définir ?

```
envRec = (fac, <lambda corps>, envRec) :: env
```

C'est une équation de point fixe...

On remarquera également que le `letrec` de SCHEME peut être sémantiquement remplacé par un `let` associé de `set!` Et de la même manière, nous pouvons faire cette opération en ML, avec l'unique nuance est que le `let` temporaire représente bien une fonction pour que la cohérence des types soit assurée.

```
SCHEME
(letrec ((f e))
  corps)
```

```

==>
(let ((f 'any))
  (let ((f-aux e))
    (set! f f-aux)
    corps))

(let ((fact 'any))
  (let ((f-aux (lambda (n) (if (eq? n 0) 1 (* n (fact (- n 1)))))))
    (set! fact f-aux))
  (fact 5))

```

OCAML

```

let fact = ref (function x -> x) in
  let aux n = if n=0 then 1 else n * !fact (n - 1) in
    fact:= aux ; !fact 5

```

2. Dans le cas de fonction récursive, ne plus nous reposer sur l'environnement mais, comme en λ -calcul, utiliser un combinateur de point fixe qui permet de calculer le point fixe de notre fonction, sans avoir à la nommer.

Nous allons utiliser ce procédé dans l'implémentation ML de notre interpréteur Scheme.

Nous rappelons ci-dessous un exemple de combinateur implémenté en SCHEME, et comment il peut être utilisé.

```

(define Y
  (lambda(f)
    (let ((g (lambda (h) (lambda(x) ((f (h h) x))))))
      (g g)))

(define F*
  (lambda (f)
    (lambda (n)
      (if (eq? n 0)
          1
          (* n (f (- n 1)))))))

(define fact (Y F*))

```

3. La troisième approche est de modéliser l'environnement par une fonction, et non plus une liste d'association. La consultation de l'environnement consiste à appliquer la fonction env qui le représente.

Considérons l'expression (letrec ((x1 e1) ... (xn en)) corps) qui, on le rappelle, est équivalente à ((lambda (x1 ... xn) corps) e1 ... en)

L'environnement capturé envRec au moment de la définition de la lambda doit correspondre à l'environnement étendu aux xi dont les valeurs sont données par l'évaluation des ei de la lambda dans cet environnement envRec C'est nécessaire afin que les ei puissent faire appel à des références récursives des xi.

Nous avons ainsi (et à nouveau) une équation de point fixe :

$$\begin{aligned} \text{envRec}(x_i) &= \text{eval}(e_i, \text{envRec}) \\ \text{envRec}(x_i) &= \text{env}(x_i) \text{ si } x_i \notin \text{letrec} \end{aligned}$$

2.3 Un interprète LISP avec le nouvel interpréteur MiniScheme ...

La mise en abyme

Pour obtenir cet effet, suivez-moi, j'invente un personnage de romancier, que je pose en figure centrale ; et le sujet du livre, si vous voulez, c'est précisément la lutte entre ce que lui offre la réalité et ce que, lui, prétend en faire. [6]

Les Faux-monnayeurs. André Gide

K
Exode 3, 14. La Septante



FIGURE 2.1 – Gumpp

LISP mis en abyme

C'est ici un exercice assez classique. Nous avons fait le choix d'un interprète avec liaison dynamique. Nous aurons ainsi l'évaluation suivante retournant 13 et non 10.

```
((evaluate
'(let ((a 1))
  (let ((f (lambda (b) (+ b a))))
    (let ((a 3)) (f 10)))
  )) env)
```

En outre, il n'est pas nécessaire d'avoir un mécanisme de point fixe ou d'environnement récursif pour l'appel d'une fonction récursive. C'est l'un des avantages de la liaison dynamique.

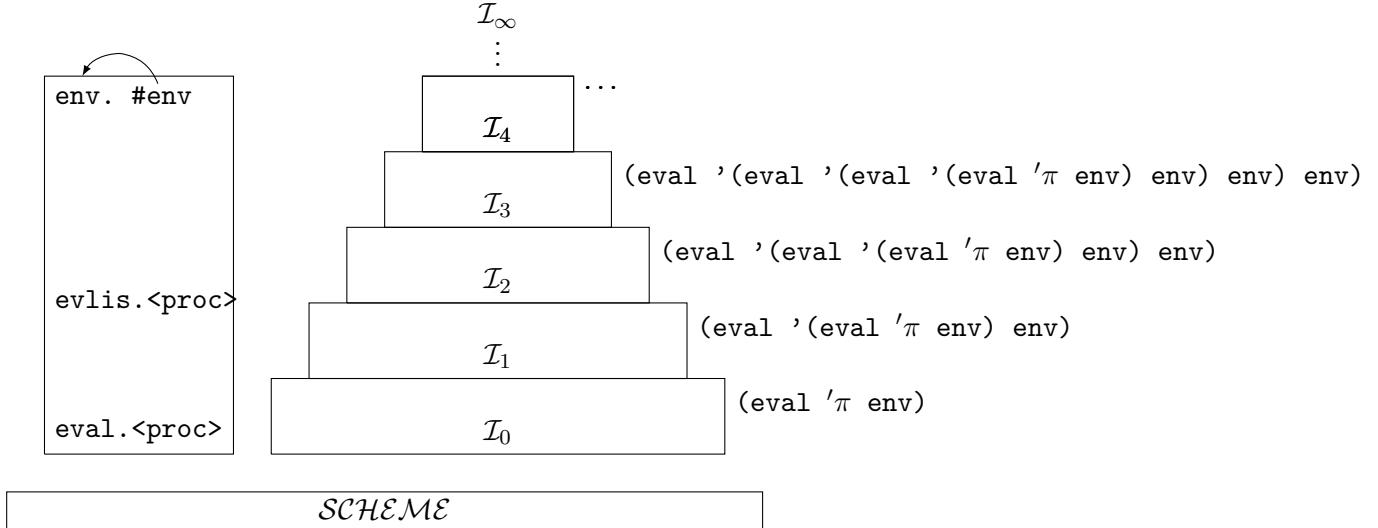
```
((evaluate
'(let ((fact (lambda (n) (if (= n 0) 1 (* n (fact (- n 1)))))))
  (fact 6)))
  env)
```

2.4 L'auto-interprétation de l'interprète

En rendant explicite la procédure `eval` et ses acolytes `evlis`, `invoke`, ... dans l'environnement `env`, la procédure `evaluate` pourra être évaluée par elle-même. Le premier argument évalué de la fonction est le symbole `env`. Ce symbole devra être contenu dans l'environnement `env`, c'est-à-dire dans lui-même...

Nous avons $(\text{eval }'(\text{eval }'\pi \text{ env}) \text{ env}) \equiv (\text{evaluate }'\pi \text{ env})$

2.4.1 La tour de Babel



```
((evaluate (quote ((evaluate (quote ((evaluate (quote ((evaluate (quote (
(lambda (x y) (+ x y)) (fact 5) (fact 6) )))
env)))) env))) env)))
```

L'environnement

L'environnement doit contenir la valeur du symbole `env`. Il doit faire référence à lui-même. Seule une liste mutable peut modéliser cette boucle infinie.

```
> env ; affichage de l'environnement récursif avec DrRacket
#0=((env . #0#)
  (not . #<procedure:...interpreter2.scm:15:17>)
  (= . #<procedure:...interpreter2.scm:16:15>)
  (* . #<procedure:...interpreter2.scm:17:17>)
  (- . #<procedure:...interpreter2.scm:18:17>)
  (+ . #<procedure:...interpreter2.scm:19:17>)
  (atom? . #<procedure:...interpreter2.scm:20:19>)
  (boolean? . #<procedure:...interpreter2.scm:21:22>)
  (number? . #<procedure:...interpreter2.scm:22:21>)
  (cons . #<procedure:...interpreter2.scm:23:18>)
  (car . #<procedure:...interpreter2.scm:24:17>)
```

```
(cdr . #<procedure:...interpreter2.scm:25:17>)
(pair? . #<procedure:...interpreter2.scm:34:19>)
(apply . #<procedure:...interpreter2.scm:36:22>)
(fact . #<procedure:...interpreter2.scm:46:20>)
(lookup . #<procedure:...interpreter2.scm:53:21>)
(eprogn . #<procedure:...interpreter2.scm:63:21>)
(evlis . #<procedure:...interpreter2.scm:74:20>)
(invoker . #<procedure:...interpreter2.scm:85:14>)
(extend . #<procedure:...interpreter2.scm:94:18>)
(mapcar . #<procedure:...interpreter2.scm:105:18>)
(mapcadre . #<procedure:...interpreter2.scm:113:19>)
(evallet . #<procedure:...interpreter2.scm:121:6>)
(evaluate . #<procedure:...interpreter2.scm:128:16>))
```

2.4.2 Réification et réflexion

La *réification* est le fait de rendre concrète une chose abstraite. Dans le cas de notre tour de Babel, réifier un objet du langage d'implémentation le rendra accessible au langage implémenté. On peut citer l'exemple de la fonction `eval` rendant accessible dans Scheme le processus d'évaluation. `(eval 'π) = π`

L'autre exemple que nous implémenterons est la réification de la continuation courante, mis à disposition par la fonction `call/cc`. Cette fonction prend en argument une lambda avec un seul paramètre qui récupère la continuation courante de l'expression en cours d'évaluation.

```
E = (e1 e2 ... (call/cc (lambda (k) ei)) ... en)
```

Si `ei` ne fait pas appel à `k`, alors `ei` est évaluée normalement, ainsi que `E`. Dans le cas contraire, `k` est appelée, liée à la continuation courante. Le résultat de `ei` est ainsi rendue à cette continuation capturée (`e1 ... [] ... en`). Autrement écrit `k = (lambda(v) (e1 ... v ... en))`

```
(+ 5 (call/cc (lambda (k) (* 2 (k 8))))) = 12
```

L'environnement `global-env` partagé avec les différents interprètes \mathcal{I}_i de notre tour de babel est aussi considéré comme un environnement réifié. L'environnement du langage d'implémentation est ici mis à disposition aux langages implémentés.

La *réflexion* peut être vue comme l'opération inverse de la réification. Elle permet la mise à disposition dans le langage d'implémentation un objet du langage implémenté. Comme exemple, citons la fonction `quote` qui n'évalue pas son argument et le rend tel quel. `quote` est une primitive du langage Scheme dans le sens où il n'est pas possible de redéfinir cette fonction avec les autres éléments du langage. Avec l'implémentation de l'interpréteur \mathcal{I}_R permettant les opérations de réflexion et réification, cela deviendra possible.

Pour faire court, la réflexion est une opération d'abstraction ; la réification est l'application d'une abstraction. Ce sont ainsi deux opérations réciproques. Voici ce que nous donne pour information la définition du terme *abstraction* recherché dans notre dictionnaire.

Définition 5. *L'abstraction désigne le produit de l'opération qui consiste à isoler par la pensée une ou plusieurs qualités d'un objet concret pour en former une représentation intellectuelle*

réification	program vers data	((reifier-to-cloture proc) (cdr e) r k)
réflexion	data vers program	(cloture-to-reifier (lambda (e r k) exp))

L'interprète par continuation

La fonction d'évaluation sera enrichie pour prendre trois arguments, le programme π à évaluer, l'environnement ρ et la continuation κ

$$(\text{eval } \pi \rho \kappa) \rightsquigarrow \text{valeur}$$

Nous reprenons ici le code de l'excellent article *a Simple Reflective Interpreter* [16]. La fonction **evaluate** implémente un interprète Lisp en mode CPS de manière très naturelle. La valeur ajoutée de l'article est la modélisation des fonctions. Trois types sont disponibles et distinguées par un tag dans l'environnement.

1. Les fonctions utilisateurs (**cloture (parl) exp env**)
2. Les fonctions réifiées (**reifier (e r k) exp**)
3. Les fonctions primitives (**primitive nom**)

L'application d'une fonction utilisateur se fait de manière classique par une évaluation du corps de la lambda sur un environnement étendu aux nouvelles liaisons entre paramètres et arguments préalablement évalués.

Une fonction réifiée prend trois paramètres **e**, **r** et **k**.

- **e** est lié à la liste des arguments non évalués de l'application.
- **r** est lié à l'environnement de l'interprète évaluant l'application.
- **k** est lié à la continuation de l'interprète évaluant l'application.

Ainsi, nous avons un contrôle *complet* de la fonction réifiée : contrôle du corps de la fonction et des arguments non encore évalués par l'interprète sous-jacent, mais aussi la possibilité d'accéder à l'environnement et à la continuation courante. En bref, no limit, on peut tout définir...

Les fonctions **callcc** et **quote** seront très simplement codées de la manière suivante :

```
(define callcc (cloture-to-reifier (lambda (e r k) ((evaluate (car e) r id) k))))
(define quote (cloture-to-reifier (lambda (e r k) (k (car e)))))
```

Dès le niveau 1 de notre tour, c'est-à-dire lorsque la fonction **evaluate** n'est plus évaluée par Scheme mais par elle-même, les formes spéciales **if**, **quote**, **begin**, **define** sont représentées par des fonctions réifiées. La fonction d'évaluation peut ainsi être réduite à son strict minimum :

```
(define evaluate
  (lambda (e r k)
    ((if (pair? e)
        (if (equal? (car e) 'lambda)
            eval-abstraction
            eval-application)
        (if (or (number? e) (string? e) (boolean? e))
            eval-constante
            eval-variable))
     e r k)))
```

La fonction `openloop` peut être lancée à volonté et peut créer une succession de nouveaux étages dans notre tour de babel. Comme dans l'épisode biblique du livre de la Genèse[1], la faculté d'avoir un langage commun permet la construction d'une tour de hauteur potentiellement infinie. Nous nous retrouvons nous-même grisés par cette tour *dont la tête touche les cieux* (). Nous citons ici la Septante (LXX).

L'enthousiasme de pouvoir monter dans les étages doit cependant être tempéré. Le fait d'être à l'étage $n + 1$ n'apporte rien par rapport à l'étage n . L'application `eval` est idempotente car $\forall \pi (\text{eval } \pi) = (\text{eval } (\text{eval } \pi))$. Autrement dit, la valeur `(eval ' π)` est un point fixe de `eval`.

11

1. , .
- (...)
9. , . *Toute la terre avait alors une même parole ; il y avait une seule langue pour tous. À cause de cela, ce lieu fut appelé Babel (confusion), parce que là le Seigneur confondit les langues de toute la terre.*

En pratique, malheureusement dès le niveau 3 de notre tour, les temps d'évaluation deviennent abominablement longs sur notre interpréteur maison implémenté en OCAML. Plusieurs minutes sont requises pour le calcul de la factorielle de cinq au niveau 3 de la tour. C'est un peu plus rapide avec DrRacket, mais pas tellement. Le poids des sous-couches d'interprétation est lourd. Dieu ne nous disperse pas ici par la confusion des langages, mais par la limitation de notre puissance de calcul Θ .

Voici le code complet de l'interpréteur au niveau 1. La fonction d'évaluation n'utilise pas ici les réifications des fonctions `if`, `quote`, `begin`.

```
(define evaluate
  (lambda (e r k)
    ((if (not (pair? e))
        (if (or (or (number? e) (string? e)) (boolean? e))
            eval-constante
            eval-variable)
        (if (equal? (car e) 'quote)
            eval-quote
            (if (equal? (car e) 'if)
                eval-if
                (if (equal? (car e) 'begin)
                    eval-begin
                    (if (equal? (car e) 'define)
                        eval-assign
                        (if (equal? (car e) 'lambda)
                            eval-abstraction
                            eval-application)))))))
      e r k )))

(define eval-constante
  (lambda (e r k)
    (k e)))
```



FIGURE 2.2 – Bruegel

```

(define eval-quote
  (lambda (e r k)
    (k (cadr e)))))

(define eval-variable
  (lambda (e r k)
    (get-pair e r
      (lambda (success-pair)
        (k (cdr success-pair)))
      (lambda ()
        (wrong "symbol not bound " e)))))

(define eval-if
  (lambda (e r k)
    (evaluate (cadr e) r
      (lambda (v)
        (if v
          (evaluate (caddr e) r k)
          (evaluate (cadddr e) r k))))))

(define eval-assign
  (lambda (e r k)
    (evaluate (caddr e) r
      (lambda (v)
        (get-pair (cadr e) r
          (lambda (success-pair)
            (begin
              (set-cdr! success-pair v)
              (k (void)) )))
          (lambda ()
            (begin
              (set-cdr! global-env (cons (car global-env)(cdr global-env)))
              (set-car! global-env (cons (cadr e) v))
              (k (void)))))))))

(define eval-define
  (lambda (e r k)
    (evaluate (caddr e) r
      (lambda (v)
        (update! (cadr e) r v))))))

(define eval-abstraction
  (lambda (e r k)
    (k (make-function (cadr e) (caddr e) r)))))

(define get-pair
  (lambda (id r success failure)
    (find-pair id r
      success
      (lambda ()
        (find-pair
          id global-env success failure) ))  )))

(define find-pair
  (lambda (elt alist success failure)

```

```

( (lambda (assq-result)
  (if assq-result
      (success assq-result)
      (failure)) )
  (assq elt alist) ) ) )

(define make-function
  (lambda (varl corps r)
    (list 'closure varl corps r)))

(define eval-application
  (lambda (e r k)
    (evaluate (car e) r
      (lambda (proc)
        (if (equal? (car proc) 'reifier)
            ((reifier-to-cloture proc) (cdr e) r k)
            (evlis (cdr e) r
              (lambda (args)
                (apply-procedure proc args k)))))))

(define evlis
  (lambda (e r k)
    (if (null? e)
        (k '())
        (evaluate (car e) r
          (lambda (v)
            (evlis (cdr e) r
              (lambda (w)
                (k (cons v w)))))))))

(define eval-begin
  (lambda (e r k)
    (eprogn (cdr e) r k)))

(define eprogn
  (lambda (e r k)
    (if (null? (cdr e))
        (evaluate (car e) r k)
        (evaluate (car e) r (lambda (v)
          (eprogn (cdr e) r k))))))

(define extend
  (lambda (env variables values)
    (if (or (null? variables) (null? values))
        env
        (cons (cons (car variables) (car values))
          (extend env (cdr variables) (cdr values))))))

(define apply-procedure
  (lambda (proc args k)
    (if (equal? (car proc) 'closure)
        (eprogn (list (caddr proc))
          (extend (cadddr proc) (cadr proc) args)
          k)
        (k (apply-primitive (cadr proc) args)))))


```

```

(define apply-primitive
  (lambda (name args)
    (if (equal? name 'car)
        (car (car args))
        (if (equal? name 'or)
            (or (car args) (cadr args)))
        (if (equal? name 'cdr)
            (cdr (car args)))
        (if (equal? name 'cons)
            (cons (car args) (cadr args)))
        (if (equal? name 'set-car!)
            (set-car! (car args) (cadr args)))
        (if (equal? name 'set-cdr!)
            (set-cdr! (car args) (cadr args)))
        (if (equal? name 'memq)
            (memq (car args) (cadr args)))
        (if (equal? name 'assq)
            (assq (car args) (cadr args)))
        (if (equal? name '=)
            (= (car args) (cadr args)))
        (if (equal? name '+)
            (+ (car args) (cadr args)))
        (if (equal? name '-')
            (- (car args) (cadr args)))
        (if (equal? name '*)
            (* (car args) (cadr args)))
        (if (equal? name 'null?)
            (null? (car args)))
        (if (equal? name 'not)
            (not (car args)))
        (if (equal? name 'symbol?)
            (symbol? (car args)))
        (if (equal? name 'list)
            args
            (if (equal? name 'pair?)
                (pair? (car args)))
            (if (equal? name 'read)
                (if (null? args) (read) (read (car args))))
            (if (equal? name 'eof-object?)
                (eof-object? (car args)))
            (if (equal? name 'close-input-port)
                (close-input-port (car args)))
            (if (equal? name 'newline)
                (newline)))
            (if (equal? name 'equal?)
                (equal? (car args) (cadr args)))
            (if (equal? name 'write)
                (write (car args)))
            (if (equal? name 'display)
                (display (car args)))
            (if (equal? name 'load)
                (load (car args)))
            (if (equal? name 'number?)
                (number? (car args)))
            (if (equal? name 'string?)
                (string? (car args)))))))

```



```
(lambda ()  
  (begin  
    (set-car! global-env (cons 'global-env global-env ))  
    (openloop "i0 " "i0 "))))
```

Chapitre 3

La compilation

3.1 Compilation des λ -termes en termes applicatifs

Il existe un formalisme appelé *Logique Combinatoire* qui permet de construire un calcul sans variables liées. C'est surprenant, mais ces variables liées qui sont introduites par abstraction puis éliminées par application ne sont finalement pas essentielles pour le calcul.

Comment traduire une abstraction en termes applicatifs ? Nous allons définir une traduction $M \mapsto M_{@}$, ainsi qu'une traduction en sens inverse $A \mapsto A_{\lambda}$.

L'idée est de partir sur les règles de traduction suivantes :

$$\begin{aligned} [\lambda x.x] &= I \\ [\lambda x.M] &= KM \quad (x \notin M) \\ [\lambda x.MN] &= S[\lambda x.M][\lambda x.N] \quad (x \in M, N) \end{aligned}$$

où $[T]$ représente le λ -terme T sans lambda abstraction.

Nous serions tentés de vouloir faire directement la traduction en utilisant ces règles. Il nous faut cependant passer par un opérateur d'abstraction $A \mapsto [x].A$ qui permettra de "supprimer" toutes les lambdas en profondeur dans le λ -terme, puis seulement ensuite, nous pourrons utiliser les trois règles ci-dessous :

$$\begin{aligned} [x].x &\equiv I \\ [x].A &\equiv KA \quad (x \notin A) \\ [x].AB &\equiv S([x].A)([x].B) \quad (x \in A, B) \end{aligned}$$

Les combinatoires I, K et S sont définis comme ceci :

$$\begin{aligned} I &= \lambda x.x \\ K &= \lambda xy.x \\ S &= \lambda xyz.xz(yz) \end{aligned}$$

Et voici la définition de la traduction des λ -termes en termes applicatifs.

$$\begin{aligned} (x)_{@} &\equiv x \\ (PQ)_{@} &\equiv (P)_{@}(Q)_{@} \\ (\lambda x.M)_{@} &\equiv [x].(M)_{@} \end{aligned}$$

Dans la définition de notre type applicatif `ski`, nous incluons aussi notre opérateur $[x].A$ avec le constructeur `Op`.

```

type ski =
| Varia of string
| I
| K
| S
| Appl of ski*ski
| Op of string * ski ;;

exception SkiExec

let rec lambda_ski = function
| Lam(x, t) -> lambda_ski_op (Op(x, lambda_ski t))
| Var(x) -> Varia(x)
| App(m,n) -> Appl(lambda_ski m, lambda_ski n)
and lambda_ski_op = function
| Op(x,Varia y) when x=y -> I
| Op(x, t) when not (mem x (var t)) -> Appl(K, t)
| Op(x, Appl(m, n)) when (mem x (var m)) || (mem x (var n))
    -> Appl(Appl(S, (lambda_ski_op (Op(x,m)))), (lambda_ski_op (Op(x,n)))))
| _ -> raise SkiErreur

```

A titre d'exemple, traduisons notre combinateur y en termes applicatifs :

```

utop # print_ski (lambda_ski y) ;;
((S((S((S(KS))((S(KK))I))))(K((SI)I))))((S((S(KS))((S(KK))I))))(K((SI)I)))

```

Une fois le code compilé, son exécution sera réalisée avec les règles de réécriture :

$$\begin{array}{rcl}
Ix & \longrightarrow & x \\
Kxy & \longrightarrow & x \\
Sxyz & \longrightarrow & xz(yz)
\end{array}$$

Voici une première version de l'exécution de ces règles de réécriture. Ce code un est peu bourrin car on appelle la fonction tant que le terme n'est pas réduit.

```

let rec exec_aux = function
| Appl(I, x) -> exec_aux x
| Appl(Appl(K, x), y) -> exec_aux x
| Appl(Appl(Appl(S,x),y),z) -> Appl(Appl(exec_aux x, exec_aux z), Appl(exec_aux y,exec_aux z))
| Appl(x,y) -> Appl(exec_aux x, exec_aux y)
| Varia x -> Varia x
| I -> I
| K -> K
| S -> S
| _ -> raise SkiErreur
and exec t =
let r = exec_aux t in
  if r=t then r else exec_aux r

```

Voici une version plus élégante qui retourne la forme réduite.

```
let rec ski_norm m =
  match m with
  | S | K | I -> m
  | Varia x -> m
  | Appl (m0, m1) ->
    match ski_norm m0 with
    | I -> ski_norm m1
    | Appl (K, m') -> m'
    | Appl (Appl (S, m3), m2) -> ski_norm (Appl (Appl (m3, m1), Appl (m2, m1)))
    | autre -> Appl (autre, ski_norm m1);;
```

La traduction en sens inverse $A \mapsto A_\lambda$ se fait naturellement par la fonction ML ci-dessous :

```
let rec ski_lambda = function
  | I -> Lam("x", Var "x")
  | K -> Lam("x", Lam("y", Var "x"))
  | S -> Lam("x", Lam("y", Lam("z", App(App(Var "x", Var "z"), App(Var "y", Var "z")))))
  | Varia(x) -> Var(x)
  | Appl(m,n) -> App(ski_lambda m,ski_lambda n)
  | _ -> raise SkiErreur
```

Utilisons l'exemple de la factorielle, exemple complexe car il comporte les représentations en λ -termes du combinateur Y , de la condition *if-then-else*, des entiers *Church* ainsi que les opérations *plus*, *moins*, *mult*.¹

```
print_terme (betaNormal (ski_lambda (exec (lambda_ski (App(fact, trois)))))) ;;
z.z0.z (z (z (z (z z0) ) ) ) ) - : unit = ()
```

Nous avons les deux propriétés suivantes que nous ne démontrerons pas.

1. Si $A \xrightarrow{\beta}^* B$, alors $A_\lambda \xrightarrow{\beta}^* B_\lambda$

2. $(M@)_\lambda \xrightarrow{\beta}^* M$

Cependant, nous aurons parfois $M \xrightarrow{\beta} N$ sans que $M@ \xrightarrow{\beta} N@$

Par exemple $SK \xrightarrow{\beta}^* 0$ mais SK est irréductible pour $\xrightarrow{\beta}$

```
utop # betaNormalPrint sk ;;
[1] -> x.y.z.x z (y z)  x.y.x
[2] -> y.z.x.y.x z (y z)
[3] -> y.z.y.z (y z)
[4] -> y.z.z
- : unit -> unit = <fun>

utop # exec (Appl(S,K)) ;;
- : ski = Appl (S, K)
```

1. Ce résultat est obtenu après quelques minutes...

D'autre part, on n'a pas nécessairement $(A_\lambda)@ =_@ A$.
Par exemple $(K_\lambda)@ \equiv S(KK)I$ ne se réduit pas en K .

```
utop # exec (lambda_ski k) ;;
- : ski = Appl (Appl (S, Appl (K, K)), I)

betaNormalPrint (App(App(s, App (k, k)), i)) ;;
[1] -> x.y.z.x z (y z) (x.y.x x.y.x) x.x
[2] -> y.z.x.y.x x.y.x z (y z) x.x
[3] -> z.x.y.x x.y.x z (x.x z)
[4] -> z.y.x.y.x z (x.x z)
[5] -> z.x.y.x (x.x z)
[6] -> z.y.x.x z
[7] -> z.y.z
- : unit -> unit = <fun>
```

On peut constater que $(SKK)x \xrightarrow{*_\beta} x$, donc le terme SKK joue le même rôle que la constante I .

```
let skk = Appl(Appl(S,K),K) ;;
exec (Appl(skk, Varia "x")) ;;
- : ski = Varia "x"
```

ou plus directement en CAML :

```
utop #
let k x y = x
and s x y z = (x z (y z))
  in (s k k) "toto" ;;
- : string = "toto "
```

La base combinatoire $\{S, K\}$ suffit donc au λ -calcul. Une base à un seul élément existerait même...

La correspondance de Curry-Howard

Dans un λ -calcul typé, les types des combinatoires K et S correspondent aux deux axiomes des systèmes hilbertiens :

$$\begin{aligned} S : (\phi \Rightarrow (\chi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow ((\phi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\phi \Rightarrow \psi)) \\ K : \phi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \phi) \end{aligned}$$

L'inférence de type OCAML nous donne en effet $k : 'a \rightarrow 'b \rightarrow 'a$ et
 $s : ('a \rightarrow 'b \rightarrow 'c) \rightarrow ('a \rightarrow 'b) \rightarrow 'a \rightarrow 'c$

<i>logique combinatoire</i>	<i>système hilbertien</i>
type	formule
application (App)	modus ponens
combinatoires S et K	noms des axiomes S et K
type des combinatoires S et K	axiomes S et K
variable	nom d'une hypothèse
type d'une variable	hypothèse

L'unique règle d'inférence, la règle du modus ponens, est ainsi modélisée par l'application

$$(App) : \frac{\phi \Rightarrow \psi \quad \phi}{\psi}$$

Dans le système hilbertien, il n'y a pas de règle d'introduction (I_{\Rightarrow}) : $\frac{[\phi] \quad \chi}{\phi \Rightarrow \chi}$ qui équivale à une abstraction $\lambda x^\phi.y^\psi$

Le modus ponens et les axiomes permettent de simuler (I_{\Rightarrow}) de la même façon que l'abstraction du λ -calcul est simulée à l'aide des constantes S et K en logique combinatoire.

3.2 Compilation du LISP vers une machine abstraite

La machine SECD

La machine SECD inventée par Landin est une machine abstraite utilisant quatre composants :

- S, la pile ou *stack* permettant de stocker les résultats intermédiaires puis le résultat final
- E, l'environnement d'exécution
- C, le code
- D, le dump permettant de stocker les valeurs courantes S,E,C le temps d'un calcul local d'une fonction

Nous devons implémenter deux fonctions.

La fonction de compilation `compile` qui prend en argument une expression LISP, un environnement de compilation et l'accumulateur du code compilé. Nous ferons travailler la fonction `compile` sur la syntaxe abstraite pour plus de facilité.

La fonction d'exécution `exe s e c d` prend en arguments les quatre composantes de la machine abstraite.

La compilation $C : exp \rightsquigarrow \text{code}$

```
c \rightsquigarrow CONST(c)
n \rightsquigarrow ACCESS(n)
(+ a1 a2) \rightsquigarrow C(a1); C(a2); ADD
(- a1 a2) \rightsquigarrow C(a1); C(a2); SUB
(= a1 a2) \rightsquigarrow C(a1); C(a2); CMP
((lambda (v1...vn) body) e1...en) \rightsquigarrow NIL; C(v1); ARG; ... C(vn); ARG; CLOSURE(C(body); RTS); JSR
```

La table de transition de la machine SECD

état avant				état après			
S	E	C	D	S	E	C	D
s	e	CONST(<i>cst</i>); <i>c</i>	d	<i>cst.s</i>	e	c	d
<i>n₂.n₁.s</i>	e	ADD; <i>c</i>	d	(<i>n₁ + n₂</i>). <i>s</i>	e	c	d
<i>n₂.n₁.s</i>	e	SUB; <i>c</i>	d	(<i>n₁ - n₂</i>). <i>s</i>	e	c	d
<i>n₂.n₁.s</i>	e	CMP; <i>c</i>	d	(<i>n₁ = n₂</i>). <i>s</i>	e	c	d
s	e	ACCESS(<i>n</i>); <i>c</i>	d	<i>e(n).s</i>	e	c	d
construction d'une liste d'arguments							
<i>s</i>	e	NIL; <i>c</i>	d	[]	e	c	d
<i>v₁.v₂.s</i>	e	ARG; <i>c</i>	d	<i>v₁@v₂.s</i>	e	c	d
la conditionnelle							
<i>v.s</i>	e	BRANCH(<i>c₁, c₂</i>); <i>c</i>	d	<i>s</i>	e	<i>c₁; c</i>	d
<i>v.s</i>	e	BRANCH(<i>c₁, c₂</i>); <i>c</i>	d	<i>s</i>	e	<i>c₂; c</i>	d
le traitement d'une clôture							
<i>s</i>	e	CLOSURE(<i>f</i>); <i>c</i>	d	CLOS(<i>f, e</i>)	e	c	d
application d'une lambda avec les instructions JSR, RTS							
CLOS(<i>f, e₀</i>). <i>args.s</i>	e	JSR; <i>c</i>	d	[]	<i>args :: e₀</i>	<i>f</i>	ENVEXE(<i>s, e, c</i>). <i>d</i>
<i>v.s</i>	e	RTS; <i>c</i>	ENVEXE(<i>s₁, e₁, c₁</i>). <i>d</i>	<i>v.s₁</i>	<i>e₁</i>	<i>c₁</i>	<i>d</i>

L'implémentation en OCAML

```

let rec compile envc exp codesuivant =
  match exp with
  | Atom (Entier n) -> CONST n :: codesuivant
  | Var s -> ACCESS (adresse s envc) :: codesuivant
  | Call (f, args) -> compile_call envc f args codesuivant
  | Let (decl,expl) -> compile_let envc decl expl codesuivant
  | If (cond, exp1, exp2) -> compile_if envc cond exp1 exp2 codesuivant
  | Lambda (parl, bodyl) -> compile_lambda envc parl bodyl codesuivant
  | _ -> raise (Erreur "compile")

and compile_lambda envc parl bodyl codesuivant =
  (CLOSURE ((compile (parl::envc) (hd bodyl) [RTS])) ) :: codesuivant

and compile_if envc cond exp1 exp2 codesuivant =
  let code_si = compile envc exp1 codesuivant
  and code_sanon = compile envc exp2 codesuivant
  in compile envc cond ( BRANCH(code_si, code_sanon) :: codesuivant )

and compile_call envc f args codesuivant =
  match f with
  | Var "+" -> compile_app envc args (ADD :: codesuivant)
  | Var "-" -> compile_app envc args (SUB :: codesuivant)
  | Var "=" -> compile_app envc args (CMP :: codesuivant)
  | _ -> compile_larg envc args (compile envc f (JSR :: codesuivant))

and
compile_app envc args codesuivant =
  if args = [] then codesuivant
  else compile envc (hd args) (compile_app envc (tl args) codesuivant)

and compile_let envc decl expl codesuivant =
  let lvar = map fst decl

```

```

in let lexp = map snd decl
in compile envc (Call(Lambda(lvar, expl),lexp)) codesuivant
and compile_larg envc lexp codesuivant =
let rec aux lexp codesuivant =
  match lexp with
  | [] -> codesuivant
  | a::b -> aux b (compile envc a (ARG::codesuivant))
  in NIL::(aux lexp codesuivant)

let rec exe s e c d =
  if (List.length c) = 0 then hd s
  else
    match (hd c) with
    | ADD -> let Entier(n2) = hd (hd s) and Entier(n1) = hd (hd (tl s)) in
      exe ([Entier(n1+n2)]:: (tl (tl s))) e (tl c) d
    | SUB -> let Entier(n2) = hd (hd s) and Entier(n1) = hd (hd (tl s)) in
      exe ([Entier(n1-n2)]:: (tl (tl s))) e (tl c) d
    | CMP -> let Entier(n2) = hd (hd s) and Entier(n1) = hd (hd (tl s)) in
      exe ([Booleen(n1=n2)]:: (tl (tl s))) e (tl c) d
    | CONST n -> exe ([Entier n]::s) e (tl c) d
    | NIL -> exe ([]::s) e (tl c) d
    | ARG -> let v1 = hd s
      in let v2 = hd (tl s)
      in exe ((v1 @ v2)::(tl (tl s))) e (tl c) d
    | ACCESS sy -> exe ([lire_env sy e]::s) e (List.tl c) d
    | BRANCH(code_si, code_sinon) ->
      let v = hd (hd s) in
        if (v = Booleen(true)) then exe (tl s) e (code_si @ (tl c)) d
        else exe (tl s) e (code_sinon @ (tl c)) d
    | CLOSURE(fonc) -> exe ([CLOS(fonc,e)]::s) e (tl c) d
    | JSR -> let CLOS(corsps, e0) = hd (hd s) in
      let larg = hd (tl s) in
      exe [] (larg::e) corps ((ENVEXE(tl (tl s), e, (tl c))))::d
    | RTS -> let ENVEXE(s1, e1, c1) = hd s
      and v = hd s in
      exe (v::s1) e1 c1 (tl d)

```


Chapitre 4

La résolution

4.1 Représentation des termes finis

Nous reprenons ici le très bon formalisme du livre de *Lalement* [10].

Les symboles de constante `true`, `158`, les symboles de fonctions unaires `not`, `+`, les symboles de fonctions binaires `or`, etc. constituent la signature Σ du langage. Si f est d'arité $n \geq 1$, alors f est un symbole fonctionnel, et si f est d'arité 0, f est un symbole de constante. Nous ajoutons à Σ un ensemble X de symboles de variables.

L'ensemble des termes $T_{\Sigma \cup X}$ est défini de la manière suivante :

- si $c \in \Sigma$ et c d'arité 0, alors $c \in T_{\Sigma \cup X}$
- si $f \in \Sigma$ et f d'arité $n \geq 1$ avec $M_1, \dots, M_n \in T_{\Sigma \cup X}$, alors $fM_1 \dots M_n \in T_{\Sigma \cup X}$
- si $x \in X$, alors $x \in T_{\Sigma \cup X}$

Nous pouvons représenter les termes en OCAML avec le type abstrait suivant :

```
type terme =
| Var of string
| Func of string * terme list
```

En fait, quasiment tous les objets que nous manipulerons pourront être modélisés par des termes. Prenons l'exemple suivant pour définir le *type* des entiers naturels à partir de la signature $\Sigma = \{0, S\}$. Les symboles O et S sont respectivement d'arité 0 et 1. Nous avons ainsi :

$$T_\Sigma = \{0, S0, SS0, SSS0, \dots\}$$

En OCAML, nous pourrons écrire :

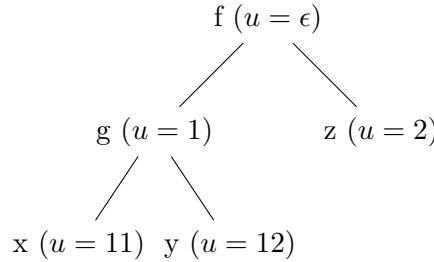
```
type nat = Zero | S of nat
```

En Prolog :

```
nat(zero).
nat(s(X)) :- nat(X)
```

Les termes se représentent naturellement sous forme d'arbres.

Prenons par exemple le terme `Func("f", [Func("g", [Var "x"; Var "y"]); Var "z"])`. Il sera représenté par l'arbre ci-dessous annoté de ses occurrences $u \in \mathcal{O}(M)$:



Pour tout terme M , on définit :

- L'ensemble $\mathcal{O}(M)$ des occurrences de M
- Le symbole $M(u)$ en u pour $u \in \mathcal{O}(M)$
- Le sous-terme $M|_u$ de M en u , pour $u \in \mathcal{O}(M)$

Dans le cas où $M = c \in \Sigma$, alors $\mathcal{O}(M) = \{\epsilon\}$, $M(\epsilon) = c$, $M|_\epsilon = c$

Dans le cas où $M = fM_1 \dots M_n$, alors :

$$\mathcal{O}(M) = \{\epsilon\} \cup \bigcup_{i=1}^n i.\mathcal{O}(M_i)$$

Avec les égalités suivantes pour les sous-termes $M|_\epsilon = f$ et $M|_{i.u} = M_i|_u$
et de manière équivalente pour les symboles $M(\epsilon) = f$ et $M(i.u) = M_i(u)$

Nous implémentons cela avec un peu de difficulté pour les conversions `string` vers `int` nécessaire à la manipulation des occurrences u . On considère ici qu'un arbre ne peut avoir plus de 9 fils, donc un seul digit permet de définir le numéro du noeud associé.

```

open String

let rec occurrences i terme =
  match terme with
  | Var _ | Func(_, []) -> [i]
  | Func (_, m) -> [i] @ occur_liste 1 i m
and occur_liste c i lterme =
  match lterme with
  | [] -> []
  | a::b -> (occurrences (int_of_string((string_of_int(i)^^(string_of_int c)))) a)
    @ occur_liste (c+1) i b

let reste s =
  if (length s) <= 1 then "0"
  else sub s 1 ((length s) -1)

let string_of_char = String.make 1 ;;

let rec cut i terme =
  match terme with
  | Var _ | Func(_, []) when i=0 -> terme

```

```

| Func(f, lt) -> if i=0 then terme
    else subterme (int_of_string(string_of_char((string_of_int i).[0])))
        (int_of_string(reste (string_of_int i)))
    lt
| _ -> raise Impossible
and subterme i u ltermes =
  match ltermes with
  | hd::tl -> if (i=1) then cut u hd else subterme (i-1) u tl
  | [] -> raise Impossible

```

Nous pouvons aussi définir l'opération de *greffe* à une occurrence u donnée. Nous utiliserons l'écriture $M[N]_u$ pour signifier que le terme M reçoit à l'occurrence u son greffon N .

```

let rec greffe i terme greffon =
  match terme with
  | Var _ | Func(_, []) when i=0 -> greffon
  | Func(f, lt) -> if i=0 then greffon
    else Func(f, greffeltermes (int_of_string(string_of_char((string_of_int i).[0])))
        (int_of_string(reste (string_of_int i))))
    lt
    greffon)
  | _ -> raise Impossible
and greffeltermes i u ltermes greffon =
  match ltermes with
  | hd::tl -> if (i=1) then (greffe u hd greffon)::tl
    else hd::(greffeltermes (i-1) u tl greffon)
  | [] -> raise Impossible

```

4.2 La substitution

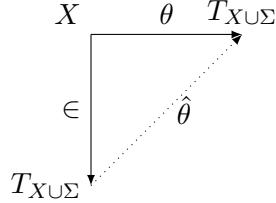
Une substitution est une application $\theta : X \rightarrow T_{X \cup \Sigma}$

Le domaine de substitution est l'ensemble des variables de X telles que $\theta(x) \neq x$. On dit aussi que l'application θ est l'identité *presque* partout, i.e sauf sur une partie finie de X . Considérons le domaine de $\theta = \{x_1, \dots, x_n\}$, alors θ est représenté par l'ensemble des couples (variable, terme) $\{(x_1, \theta(x_1)), \dots, (x_n, \theta(x_n))\}$

Nous avons par induction :

- $\hat{\theta}c = c$, si $c \in \Sigma$ d'arité 1
- $\hat{\theta}(fM_1 \dots M_n) = f(\hat{\theta}M_1 \dots \hat{\theta}M_n)$, si $f \in \Sigma$ d'arité n
- $\hat{\theta}x = \theta(x)$ si $x \in X$

La fonction θ s'étend ainsi en une fonction $\hat{\theta}$ (mais que nous appellerons aussi θ) de $T_{X \cup \Sigma} \rightarrow T_{X \cup \Sigma}$. $\hat{\theta}$ est l'unique fonction telle que $\forall x \in X, \hat{\theta}x = \theta(x)$



Voici un exemple d'implémentation de la substitution en OCAML :

```
let valeur_subst sigma var =
  try assoc var sigma
  with Not_found -> var

let rec substituer terme sigma =
  match terme with
  | Var(x) -> (valeur_subst sigma terme)
  | Func(f, []) -> Func(f, [])
  | Func(f, args) -> Func(f, (map (function t -> (substituer t sigma)) args))
```

4.3 Filtrage et réécriture

4.3.1 Le filtrage

Soient deux termes M et M' appartenant à T_X , le filtrage consiste à trouver une substitution σ telle que $\sigma M = M'$. Autrement dit, il faut trouver les valeurs à donner aux variables de M pour que celui-ci soit égal M' .

On appelle M le *pattern* et M' l'*instance*. Nous implémentons cela comme ci-dessous :

```
type terme =
  | Var of string
  | Func of string * terme list

exception Impossible

let rec filtre_termes lt1 lt2 sigma =
  match (lt1, lt2) with
  | ([], _) -> sigma
  | (_, []) -> sigma
  | _ ->
    begin
      let sigma1 = filtre (hd(lt1)) (hd(lt2)) sigma in
      filtre_termes (tl(lt1)) (tl(lt2)) sigma1
    end
and filtre m n sigma =
  match (m, n) with
  | (Func(f, _), Func(g, _)) when f <> g -> raise Impossible
  | (Var(x), n) ->
```

```

begin
try let var_val = assoc (Var(x)) sigma in
    if var_val = n then sigma else raise Impossible
with Not_found -> (Var(x), n)::sigma
end
| (Func(f,f1), Func(g,g1)) -> filtre_termes f1 g1 sigma
| _ -> raise Impossible

let f1 = Func("f", [Var "x"; Func("g", [Var "y"; Var "z"]); Func("h", [Var "x"])]);;
let f2 = Func("f", [Func("a", []); Func("g", [Func("h", [Var "x"]); Func("b", [])]); Func("h",
imprime_sigma (filtre f1 f2 []) ;;
=>>>
z <-> b
y <-> (h x )
x <-> a
- : unit = ()

```

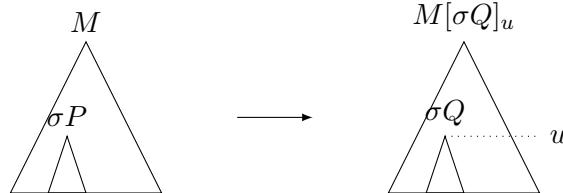
4.3.2 La réécriture et l'arithmétique de Peano

Le mécanisme de réécriture, très simple à comprendre conceptuellement, est un peu plus difficile à formaliser proprement.

Un système de *réécriture* est composé d'une signature Σ et d'un ensemble de règles \mathcal{R} représenté par des couples $(P, Q) \in T_\Sigma[X] \times T_\Sigma[X]$.

Les couples (P, Q) sont notés $P \rightarrow Q$

Si nous avons un filtre σ tel que $\sigma P = M|_u$, alors le terme M se réécrit en un terme $M[\sigma Q]_u$ par l'application de la règle $P \rightarrow Q$ à l'occurrence $u \in \mathcal{O}(M)$



CAML est «déjà» une machine à faire du filtrage et de la réécriture. L'application d'une fonction P à son argument Q est modélisé par le redex $(\lambda mP)Q \rightarrow \theta P$ où m est le pattern et θ le filtre de m vers Q , c'est-à-dire $\theta m = Q$.

Il est ainsi simple de programmer en OCAML une fonction de réécriture. Appliquons cela sur l'arithmétique de Peano.

Peano a reconstruit la théorie des entiers à partir de la fonction successeur. On se donne uniquement le symbole S d'arité 1 et le symbole de constante 0. Les entiers sont les termes de la forme $0, S0, SS0, SSS0\dots$. Nous pouvons implémenter cela en OCAM avec le type abstrait `peano`

```

type peano =
| Zero
| Succ of peano
| Plus of peano * peano

```

```

| Mult of peano * peano

let un = Succ Zero ;;
let deux = Succ (Succ Zero) ;;
let trois = Succ (Succ (Succ Zero)) ;;

```

Puis nous avons les quatre règles de réécriture suivante :

$$\begin{aligned}
(r_1) \quad (+ x 0) &\rightarrow x \\
(r_2) \quad (+ x (S y)) &\rightarrow (S (+x y)) \\
(r_3) \quad (* x 0) &\rightarrow 0 \\
(r_4) \quad (* x (S y)) &\rightarrow (+ y (*x y))
\end{aligned}$$

Ces quatre règles sont implémentées par la fonction `réduire` ci-dessous :

```

let rec reduire = function
| Plus (p, Zero) -> reduire p
| Plus (p1, (Succ p2)) -> Succ (reduire ((Plus (reduire p1, reduire p2)))) )
| Mult (p, Zero) -> Zero
| Mult (p1, (Succ p2))
    -> reduire (Plus (reduire p1, reduire ((Mult (reduire p1, reduire p2)))) ))
| _ as p -> p

let rec peano_entier = function
| Zero -> 0
| Succ p -> 1 + (peano_entier p)
| any -> peano_entier (reduire any)

peano_entier (Plus (Mult(deux, trois), trois));;

```

Essayons maintenant d'implémenter le mécanisme de réécriture en utilisation le type *terme* que nous avons précédemment présenté, ainsi que la fonction de filtrage `filtre` et la fonction du substitution `substituer`.

Nous avons fait simple avec cette méthode naïve qui utilise les trois fonctions ci-dessous :

- La première `rewrite` utilise la fonction `filtre` pour chercher une substitution égalisant notre *terme* avec la partie gauche de la règle de substitution. Si cette substitution est trouvée, la fonction retourne la partie droite de la règle appliquée à la substitution. Dans le cas contraire, la fonction est appelée récursivement sur l'ensemble des arguments du terme.
- La seconde `rewriteall` déroule l'ensemble des règles représentées par une liste de paires (l, r) tant que la réécriture ne modifie pas le terme.
- La troisième `rewrite_bourrin` itère la fonction précédente tant que l'on peut réduire le terme. Désolé pour cette méthode bourrin, mais ça fonctionne...

```

let rec rewrite t l r =
match t with
| Var(_) | Func(_, []) -> t
| Func(f, listet) ->
    try let subst = filtre l t [] in

```

```

    substituer r subst
    with Impossible -> Func(f, map (function t -> (rewrite t l r)) listet)
and rewriteall lregles t =
  match lregles with
  | [] -> t
  | (l,r) ::reste ->
    let t1 = (rewrite t l r) in
      if t1=t then rewriteall reste t
      else t1
and rewrite_bourrin t lregles =
  let t1 = rewriteall lregles t in
  if t1=t then t
  else rewrite_bourrin t1 lregles

```

Les quatre règles de Peano sont modélisées de la façon suivante :

```

let peano = [
(Func("+", [Var "x"; Func("0", [])]), Var "x") ;
(Func("+", [Var "x"; Func("S", [Var "y"])])], Func("S", [Func("+", [Var "x"; Var "y"])])) ;
(Func("*", [Var "x"; Func("0", [])]), Func("0", [])) ;
(Func("*", [Var "x"; Func("S", [Var "y"])])], Func("+", [Var "x"; Func("*", [Var "x"; Var "y"])]))
]
```

Nous pouvons ainsi calculer la valeur 16 :

```

let un = Func("S", [Func("0", [])]) ;;
let deux = Func("+", [un; un]) ;;
let quatre = Func("*", [deux;deux]) ;;
let seize = Func("*", [quatre;quatre]) ;;

rewrite_bourrin seize peano ;;

```

4.4 L'unification des termes

Un interprète PROLOG peut être considéré comme une machine à unifier.

Définissons d'abord l'opération d'unification de deux termes. Un unificateur de deux termes t_1 et t_2 est une substitution σ telle que $\sigma t_1 = \sigma t_2$

Soit E , un système d'équations, on peut définir des transformations $E_1 \rightarrow_t E_2$ entre systèmes d'équations. On note le symbole \perp qui représente un système sans solution. Résoudre E_0 consiste à appliquer une suite de transformations $E_0 \rightarrow_* E_n$ de sorte que E_n soit en forme résolue, ou bien $E_n = \perp$

Nous avons six types de transformations possibles :

décomposition	$E \cup \{fM_1 \dots M_r = fN_1 \dots N_r\} \rightarrow E \cup \{M_1 = N_1, \dots, M_r = N_r\}$
effacement	$E \cup \{M = M\} \rightarrow E$
élimination	$E \cup \{x = M\} \rightarrow E[x := M] \cup \{x = M\}$ si $M \notin X, x \notin var(M)$
inversion	$E \cup \{M = x\} \rightarrow E \cup \{x = M\}$ si $M \notin X$
conflit	$E \cup \{fM = gM\} \rightarrow \perp$ si $f \neq g$
cycle	$E \cup \{x = M\} \rightarrow \perp$ si $x \in var(M)$

La difficulté de cet algorithme est sa condition d'arrêt. Si aucune règle ne peut plus s'appliquer sur les éléments du système d'équations, alors l'algorithme doit s'arrêter et son résultat est la substitution unifiant les deux termes initiaux. Avec une seule fonction parcourant le système d'équations, représentés en OCAML par le type `(term * term) list`, je pense que ce n'est pas possible. Je me suis là aussi un peu cassé les cheveux. Voici mon code avec deux fonctions :

```
let rec unifier equation =
  match equation with
  | (Var(x), Var(y)) -> if x=y then [] else [(Var(x), Var(y))]
  | (Func(f1, l1), Func(f2, l2)) -> if f1 = f2 && List.length l1 = List.length l2
    then unifierliste (List.combine l1 l2)
    else raise Impossible
  | (Func(m, n), Var(x)) -> unifier (Var(x), Func(m, n))
  | (Var(x), Func(m, n)) -> if (mem (Var(x)) (listavar (Func(m, n)))) then raise Impossible
    else [(Var(x), Func(m, n))]
and unifierliste = function
  | [] -> []
  | (x, y)::t ->
    let t2 = unifierliste t in
    let t1 = unifier ((substituer x t2), (substituer y t2)) in
    t1 @ t2
```

On retrouve dans la fonction `unifier`, qui travaille uniquement sur une paire de terme, les différentes règles de l'algorithme. La fonction `unifierliste` va unifier sa première paire en utilisant la substitution trouvée dans le reste de l'équation. C'est un bel exemple de récursivité qui nous dépasse très souvent... Ce bout de code vient du site de l'université de Cornell.

Voici un autre exemple moins proche de l'algorithme présenté.

```
let unifier t1 t2 =
  let rec unificateur t1 t2 =
    match (t1, t2) with
    | (Var(x), _) ->
      begin
        if t1 = t2 then []
        else if (mem t1 (listavar t2)) then raise Impossible
        else [(t1, t2)]
      end
    | (_, Var(x)) -> unificateur t2 t1
    | (Func(x, l1), Func(y, l2)) -> if x<>y then raise Impossible
```

```

else (unifliste l1 l2 [])
and unifliste l1 l2 sigma =
  match (l1, l2) with
  | ([] , _) -> sigma
  | (h1::t1, h2::t2) ->
    begin
      let sigma1 = (unificateur h1 h2) in
      unifliste (map (function terme -> (substituer terme sigma1)) t1)
        (map (function terme -> (substituer terme sigma1)) t2)
        (compose_subst sigma sigma1)
    end
  | _ -> raise Impossible
in unificateur t1 t2

```

4.5 Un mini PROLOG

```

let question() =
begin
  print_string "\n autre solution 1/2 (1=oui, 2=non) ? :" ;
  if read_int()= 1 then false else true
end

let autre_solution lvar lvaleur =
  if lvaleur <> [] then (affiche_solution lvar lvaleur ; question())
  else false

let prolog but lregles =
  let lvar_but = listevar but in
  let rec prouveli lbuts lvaleur =
    match lbuts with
    | [] -> autre_solution lvar_but lvaleur
    | h::t ->
      some (fun regle -> try
        let regle_bis = (renomme regle) in
        let sigma1 = unifier h (hd regle_bis) in
        prouveli
          (sublis sigma1 ((lhypotheses regle_bis) @ t))
          (sublis sigma1 lvaleur)
        with Impossible -> false)
      lregles
    in
    prouveli [but] lvar_but

```

4.6 Quelques exemples de programmation en PROLOG

4.6.1 Les entiers naturels

Définissons en PROLOG le type des entiers naturels avec la fonction `nat` d'arité 1, la fonction `s` d'arité 1 et la constante 0. Nous avons ainsi les 2 règles :

$$\begin{aligned} nat(0) &\Leftarrow \\ nat(s(x)) &\Leftarrow nat(x) \end{aligned}$$

```
-----  
let nat = [ [Func("nat", [Func("0", [])])] ;  
           [Func("nat", [Func("s", [Var("X")])]) ; Func("nat", [Var("X")])] ] ;;  
let but = Func("nat", [Var("X")]) ;;  
  
prolog but nat ;;  
-----  
vincent@HP-Notebook:~/workspace vsodium$ ./prolog.byte  
X <-> 0  
autre solution 1/2 (1=oui, 2=non) ? :1  
X <-> (s 0 )  
autre solution 1/2 (1=oui, 2=non) ? :1  
X <-> (s(s 0 ))  
autre solution 1/2 (1=oui, 2=non) ? :1  
X <-> (s(s(s 0 )))  
autre solution 1/2 (1=oui, 2=non) ? :2  
vincent@HP-Notebook:~/workspace vsodium$
```

4.6.2 Les additions de Peano

Nous pouvons modéliser les additions avec l'arithmétique de Peano en utilisant les deux propositions suivantes :

$$\begin{aligned} add(x, 0, x) &\Leftarrow \\ add(x, s(y), s(z)) &\Leftarrow add(x, y, z) \end{aligned}$$

Puis demandons à notre mini Prolog de résoudre l'équation $add(x, y, s(s(0)))$

```
(* les entiers de peano *)  
let peano = [ [Func("add", [Var("x"); Func("0", []); Var("x")])] ;  
             [Func("add", [Var("x"); Func("S", [Var("y")]); Func("S", [Var("z")])]) ;  
              Func("add", [Var("x"); Var("y"); Var("z")])] ] ;;  
  
let but1 = Func("add", [Var("x") ; Var("y") ; Func("S", [Func("S", [Func("S", [Func("0", [])])])])]) ;  
  
vincent@HP-Notebook:~/vsodium$ ./prolog.byte  
x <-> (S(S(S 0 ))) y <-> 0  
autre solution 1/2 (1=oui, 2=non) ? :1  
x <-> (S(S 0 )) y <-> (S 0 )
```

```

autre solution 1/2 (1=oui, 2=non) ? :1
x <-> (S 0 ) y <-> (S(S 0 ))
autre solution 1/2 (1=oui, 2=non) ? :1
x <-> 0 y <-> (S(S(S 0 )))
autre solution 1/2 (1=oui, 2=non) ? :1
vincent@HP-Notebook:~/vsc$
```

4.6.3 La base généralogique

```

(* généralogie *)
let grecs = [ [Func("mere", [Func("gaia", []);Func("chronos", []) ] ) ] ;
              [Func("mere", [Func("rhea", []);Func("zeus", []) ] ) ] ;
              [Func("mere", [Func("rhea", []);Func("hades", []) ] ) ] ;
              [Func("pere", [Func("zeus", []);Func("pollux", []) ] ) ] ;
              [Func("pere", [Func("ourance", []);Func("chronos", []) ] ) ] ;
              [Func("pere", [Func("chronos", []);Func("zeus", []) ] ) ] ;
              [Func("pere", [Func("zeus", []);Func("helene", []) ] ) ] ;
              [Func("pere", [Func("zeug", []);Func("castor", []) ] ) ] ;
              [Func("pere", [Func("gaia", []);Func("chronos", []) ] ) ] ;
              [Func("parent", [Var("x"); Var("y")]) ; Func("pere", [Var("x"); Var("y")]) ] ;
              [Func("parent", [Var("x"); Var("y")]) ; Func("mere", [Var("x"); Var("y")]) ] ;
              [Func("gd-parent", [Var("i"); Var("k")]) ; Func("parent", [Var("i"); Var("j")]) ;
               Func("parent", [Var("j"); Var("k")]) ] ;
              [Func("frere", [Var("y"); Var("z")]) ; Func("parent", [Var("x"); Var("y")]) ;
               Func("parent", [Var("x"); Var("z")])]
            ] ;;

let but = Func("gd-parent", [Func("chronos", []); Var("x")]) ;;
```

vincent@HP-Notebook:~/vsc\$./prolog.byte

```

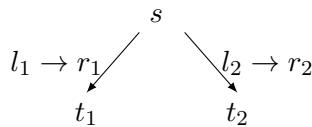
x <-> pollux
autre solution 1/2 (1=oui, 2=non) ? :1
x <-> helene
autre solution 1/2 (1=oui, 2=non) ? :1
```

4.7 L'algorithme de complétion de Knuth-Bendix

4.7.1 Confluence et paires critiques

Le lemme de Newman nous dit qu'un système de réécriture noethérien (qui termine) est confluent ssi il est localement confluent.

La situation générale se présente comme cela :



La confluence locale sera assurée si nous trouvons un terme t tel que $t_1 \xrightarrow{*} t \xleftarrow{*} t_2$

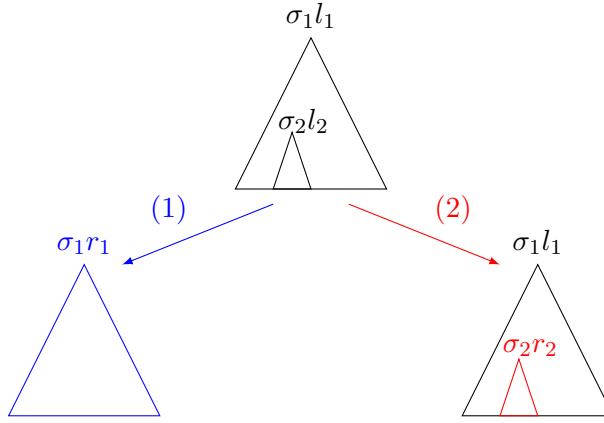
Nous avons ainsi 2 règles $l_1 \rightarrow r_1$ et $l_2 \rightarrow r_2$. Cela donne par définition de la réécriture :

$$s|_{p_1} = \sigma_1 l_1 \text{ avec } t_1 = s[\sigma_1 r_1]_{p_1}$$

$$s|_{p_2} = \sigma_2 l_2 \text{ avec } t_2 = s[\sigma_2 r_2]_{p_2}$$

On montre facilement (de manière visuelle) que nous pouvons trouver $t_1 \xrightarrow{*} t \xleftarrow{*} t_2$ lorsque p_1 et p_2 ne se chevauchent pas. Et lorsqu'il y a chevauchement, on peut également trouver $t_1 \xrightarrow{*} t \xleftarrow{*} t_2$ si la position de $\sigma_2 l_2$ dans l_1 est une variable.

Sinon, il y a un chevauchement *critique* :



Posons $\theta = \sigma_1 \cup \sigma_2$, l'unificateur principal de σ_1 et σ_2 . Nous appellerons la paire des deux termes en bleu et rouge une *paire critique* $\langle \theta r_1, (\theta l_1)[\theta r_2]_p \rangle$. Si deux règles génèrent une paire critique, on dit qu'elles se superposent. L'existence de paires critiques est un signe d'ambiguïté du système de réécriture.

Si ces paires critiques sont joignable, le système de réécriture est alors localement confluent.

Théorème 4 (Knuth-Bendix). *Un système de réécriture noethérien est confluent si ses paires critiques sont joignables.*

```
let superpose l1 l2 =
let rec super l1 l2 occ =
  match occ with
  | a:::b ->
  begin
    try
      let t = cut a l1 in
      match t with
      | Var _ -> raise Impossible
      | _ -> let sigma = unifier ((cut a l1), l2)
                in (a, sigma)
      with Impossible -> super l1 l2 b
    end
  | [] -> raise Impossible
```

```

in super l1 l2 (occurrences 0 l1)

let rec cp (l1,r1) (l2,r2) =
  let (oc, sigma) = superpose l1 l2 in
  ((substituer r1 sigma), (greffe oc (substituer l1 sigma) (substituer r2 sigma))) ;;

```

4.7.2 Terminaison

Indécidabilité de la terminaison dans le cas "général"

Soient a_1, a_2, a_3, \dots une numérotation de tous les algorithmes. On définit la fonction suivante : $diag(i)$ si a_i termine alors boucler, sinon s'arrêter

Pour tout i , $diag(i)$ termine ssi a_i ne termine pas. Mais il y a un a_j tel que $diag = a_j$. Nous avons donc $diag(j)$ termine ssi a_j ne termine pas, ce qui donne a_j termine ssi a_j ne termine pas.

Système de réécriture noethérien

Un système de réécriture est noethérien si et seulement s'il existe un ordre bien fondé \succ sur l'ensemble des termes tel que

- i) $\sigma P \succ \sigma Q$ pour toute règle $(P, Q) \in \mathcal{R}$ et toute substitution σ
- ii) $M_i \succ M'_i$ entraîne $fM_1 \dots M_i \dots M_n \succ fM_1 \dots M'_i \dots M_n$

On dit que \succ est clos par substitution, et qu'il est compatible avec Σ . En pratique, on utilise une fonction externe $h : T_\Sigma[X] \rightarrow \mathbb{N}$ et la relation d'ordre $>$ sur \mathbb{N} .

Pour un terme t et une variable x , on note $|t|$ le cardinal de t et $|t|_x$ le nombre d'occurrences de x dans t . On définit un ordre strict \succ sur $T[X]$ par :

$$s > t \Leftrightarrow |s| > |t| \text{ et } \forall x \in X, |s|_x |t|_x$$

4.7.3 Complétion de Knuth-Bendix

Nous pourrons ici nous référer au livre très didactique *Term Rewriting and All That*[5]

```

let rec super_liste l1 l2 occ =
  match occ with
  | a::b ->
    begin
      try
        let t = cut a l1 in
        match t with
        | Var _ -> raise Impossible
        | _ -> let sigma = unifier ((cut a l1), l2)
                  in (a, sigma)
        with Impossible -> super_liste l1 l2 b
      end
    | [] -> raise Impossible

```

```

let superpose_liste (l1,r1) (l2,r2) =
let rec superpose_liste_aux l1 l2 occ = (* rend liste des occurences et substitution *)
  if alpha_equiv (l1,r1) (l2,r2) then
    try
      let (oc, sigma) = super_liste l1 (rename l2 l1) (remove 0 occ) (* retire 0 car occurence
      in
      begin
        print_string "superposition à l'occurrence "; print_int oc ; print_string "\n" ;
        print_string "sur le termes l1 :" ; imprime l1 ; print_string "\n" ;
        print_string "sur le terme l2 :" ; imprime l2 ; print_string "\n" ;
        print_string "avec la substitution :"; imprime_sigma sigma; print_string "\n" ;
        (oc, sigma)::superpose_liste_aux l1 l2 (remove oc occ)
      end
      with Impossible -> []
    else
      try
        let (oc, sigma) = super_liste l1 (rename l2 l1) occ
        in
        begin print_string "superposition à l'occurrence "; print_int oc ; print_string "\n" ;
          print_string "sur le terme l1 :" ; imprime l1 ; print_string "\n" ;
          print_string "sur le terme l2 :" ; imprime l2 ; print_string "\n" ;
          print_string "avec la substitution :"; imprime_sigma sigma; print_string "\n" ;
          (oc, sigma)::superpose_liste_aux l1 l2 (remove oc occ)
        end
        with Impossible -> []
      in superpose_liste_aux l1 l2 (occurrences l1) ;;

```

Chapitre 5

La calculabilité

5.1 Les fonctions récursives

Commençons par définir les fonctions récursives *primitives* telles que formalisées par Gödel.

Un ensemble E de fonctions numériques de \mathbb{N}^p dans \mathbb{N} est dit :

- i) clos par composition si pour tout $h, g_1, \dots, g_p \in E$, si on définit f par

$$f(n) = h(g_1(n), \dots, g_p(n))$$

alors $f \in E$

- ii) clos par récursion primitive si pour tout $h, g \in E$, si on définit f par

$$\begin{aligned} f(0, n) &= g(n) \\ f(m + 1, n) &= h(f(m, n), m, n) \end{aligned}$$

alors $f \in E$

Les fonctions de base sont la constante $0 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, le successeur $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, les projections $pr_k^i : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$

Les fonctions récursives primitives sont les éléments du plus petit ensemble E contenant les fonctions de base et clos par composition et récursion primitive.

La quasi totalité des fonctions est récursive primitive. Considérons par exemple l'addition.

$$\begin{aligned} 0 + y &= y \\ s(x) + y &= s(x + y) \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\begin{aligned} +(0, y) &= g(y) \text{ avec } g = pr_1^1(y) \\ +(s(x), y) &= h(+((x, y), x, y)) \text{ avec } h = s \circ pr_3^1 \end{aligned}$$

Voici un opérateur de récursion primitive en ML

```
let rec_prim g h =
let rec f m n =
  if m=0 then g n
  else h (f (m-1) n) (m-1) n
in f
```

Nous pouvons ainsi exprimer la fonction `add` :

```
let s n = n+1 ;;
let pr_11 n = n ;;
let pr_31 x y z = x ;;
let g y = pr_11 y ;;
let h x y z = s (pr_31 x y z);;

let add = rec_prim g h ;;

utop # add 5 8 ;;
- : int = 13
```

Toute fonction récursive primitive peut s'écrire avec une simple boucle `for`. Le nombre d'itérations est déterminé ; il ne dépend pas d'une condition d'évaluation du programme. Ainsi, nous pouvons code de la manière suivante :

```
let add x y =
  let r = ref (g y) in
  (for i=1 to x do r := h !r i y done ;
   !r
  )
```

Existe-t'il des fonctions caculables qui ne sont pas primitives récursives ? La réponse est oui. Notamment toute fonction qui ne termine pas (boucle `while` infinie) ne pourra s'écrire en fonction récursive primitive. Il est cependant beaucoup plus complexe d'identifier des fonctions qui terminent et qui soient non récursives primitives. La fonction d'*Ackermann* est traditionnellement donnée en exemple, bien que cette fonction n'a pas de réalité pratique...

La fonction d'Ackermann A est définie sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par :

$$\begin{aligned} A(0, p) &= p + 1 \text{ pour } p \geq 0 \\ A(n, 0) &= A(n-1, 1) \text{ pour } n \geq 1 \\ A(n, p) &= A(n-1, A(n, p-1)) \text{ si } n \geq 1, p \geq 1 \end{aligned}$$

```
let rec ack = function
| (0,p) -> p+1
| (n,0) -> ack (n-1, 1)
| (n,p) -> ack (n-1, ack (n, p-1))
```

La fonction d'Ackermann croît très rapidement, en particulier $n \rightarrow A(n, n)$ croît plus rapidement que nimporte quelle fonction polynôme ou exponentielle.

Gödel a ainsi introduit un troisième critère permettant d'étendre le scope de définition des fonctions numériques au-delà des fonctions récursives primitives. C'est le critère de clôture par minimisation totale.

Nous dirons qu'un ensemble E de fonctions numériques est clos par minimisation si pour tout $g \in E$, tel que pour chaque n , il existe p tel que $g(n, p) = 0$, si on définit f par

$$f(n) = \min\{p \in \mathbb{N}; g(n, p) = 0\}$$

alors $f \in E$. On notera $f = \mu p[g(., p) = 0]$.

Les *fonctions récursives* sont les éléments du plus petit ensemble de fonctions numériques contenant les fonctions de base et clos par composition, récursion primitive et minimisation totale.

5.2 La machine de Turing

Une machine de Turing est un automate à état (*state machine*) qui a la capacité de lire puis d'enregistrer un caractère sur une bande de longueur infinie.

La machine change d'état sur la base de trois éléments : l'état courant, le caractère lu de la bande et une table externe de transition. La table de transition est externe à la bande et elle est statique. L'action résultante est un changement potentiel d'état, une écriture de caractère sur la bande et un déplacement à droite ou à gauche de la tête de lecture.

Nous implémentons cela avec le concept de *box* présenté dans le chapitre précédent. La lambda va encapsuler l'état courant, la position de la tête de lecture, la bande et la table de transition. La table de transition est modélisée par une a-liste d'a-listes. La première a-liste permet de faire matcher l'état courant. La seconde a-liste permet de faire matcher le caractère lu. Ces deux informations combinées fournissent le triplet de sortie (`état_suivant`, `caractère_écrit`, `direction`)

```
let matable = [ ("q0" , [ (">", ("q1", "X", "G")) ;
                           ("<", ("q0", "<", "D")) ;
                           (" ", ("q2", " ", "G")) ;
                           ("X", ("q0", "X", "D")) ]) ;
                ("q1" , [ (">", ("q1", ">", "G")) ;
                           ("<", ("q0", "X", "D")) ;
                           (" ", ("qf", "non", "G")) ;
                           ("X", ("q1", "X", "G")) ]) ;
                ("q2" , [ (">", ("q2", ">", "G")) ;
                           ("<", ("qf", "non", "G")) ;
                           (" ", ("qf", "oui", "G")) ;
                           ("X", ("q2", "X", "G")) ]) ;
            ] ;;
```

Cette table de transition va nous permettre de vérifier le bon parenthésage d'une expression en entrée fournie sur la bande représentée par une liste `let mabande = [" "; "<"; ">"; " "]`

L'état `q0` va rechercher une parenthèse `>` en allant vers la droite.

L'état `q1` va rechercher une parenthèse `<` en allant vers la gauche.

L'état `q2` va rechercher une parenthèse `>` en allant vers la gauche.

Les parenthèses matchées sont remplacées par le caractère `X`. Le passage à l'état final `qf` est accompagné par l'écriture `oui` ou `non` sur la bande suivant si l'expression est ou non correctement parenthésée.

```
let make_turing table état0 position0 bande0 =
  let état = ref état0 in
  let position = ref position0 in
  let bande = ref bande0 in
```

```

let fct_transition state input = assoc input (assoc state table) in
let lire () = nth !bande !position in
let déplacer = function
  | "G" -> if (!position = 0) then (bande := " " :: !bande) else (position := !position - 1)
  | "D" ->
    begin
      position := !position + 1 ;
      if ((lire ()) = " ") then (bande := !bande @ (" " :: []))
    end
  | _ -> raise Erreur
in
let rec liste_tail liste pos =
  match pos with
  | 0 -> liste
  | n -> liste_tail (tl liste) (pos - 1)
in
let rec liste_tete liste pos =
  match pos with
  | 0 -> []
  | n -> (hd liste) :: liste_tete (tl liste) (pos - 1)
in
let écrire symb =
  bande := (liste_tete !bande !position) @ (symb :: []) @ (liste_tail (tl !bande) !position)
in
fun instruction ->
  match instruction with
  | "executer" ->
    let (e, s, d) = fct_transition !état (lire ()) in
    begin
      écrire s ;
      déplacer d;
      état := e ;
      if (!état = "qf") then raise Final
    end
  | "reset" -> begin état := état0 ; bande := bande0; position := position0 end
  | "affiche" ->
    begin print_string "état:" ; print_string !état ;
      print_string " position:"; print_int !position ;
      print_string " lire:"; print_string (lire ()) ;
      print_string " bande: " ; print_liste !bande
    end
  | _ -> raise Erreur
let executer_turing turing trace =
  let rec iterer () =

```

```

        turing "executer" ; if trace then turing "affiche"; iterer ()
in
begin
  turing "reset" ;
try
  iterer ()
with Final -> turing "affiche"
end

```

Voici le résultat sur l'expression <>

```

# let turing_par = make_turing matable etatinit posinit [" "; "<"; ">"; " "];;
# executer_turing turing_par true ;;

etat:q0  position:2  lire:>  bande:  <>
etat:q1  position:1  lire:<  bande:  <X
etat:q0  position:2  lire:X  bande:  XX
etat:q0  position:3  lire:   bande:  XX
etat:q2  position:2  lire:X  bande:  XX
etat:q2  position:1  lire:X  bande:  XX
etat:q2  position:0  lire:   bande:  XX
etat:qf  position:0  lire:   bande:  ouiXX

```

Et voici le résultat sur l'expression <<><>

```

# let turing_par = make_turing matable etatinit posinit [" "; "<"; "<"; ">"; "<"; ">"; " "];;
# executer_turing turing_par true ;;

etat:q0  position:2  lire:<  bande:  <<><>
etat:q0  position:3  lire:>  bande:  <<><>
etat:q1  position:2  lire:<  bande:  <<X><
etat:q0  position:3  lire:X  bande:  <XX><
etat:q0  position:4  lire:<  bande:  <XX><
etat:q0  position:5  lire:>  bande:  <XX><
etat:q1  position:4  lire:<  bande:  <XX<X
etat:q0  position:5  lire:X  bande:  <XXXX
etat:q0  position:6  lire:   bande:  <XXXX
etat:q2  position:5  lire:X  bande:  <XXXX
etat:q2  position:4  lire:X  bande:  <XXXX
etat:q2  position:3  lire:X  bande:  <XXXX
etat:q2  position:2  lire:X  bande:  <XXXX
etat:q2  position:1  lire:<  bande:  <XXXX
etat:qf  position:0  lire:   bande:  nonXXXX

```

5.3 La thèse de Church

Théorème 5. *Thèse de Church : toute fonction effectivement calculable est récursive.*

Théorème 6. *Thèse forte de Church : si une fonction f est calculable par un algorithme, alors celui-ci est effectivement transformable en une machine de Turing calculant f*

Théorème 7. *Pour $f : \mathbb{N}^p \rightarrow \mathbb{N}$, les propriétés (i) f est λ -définissable et (ii) f est récursive sont équivalentes.*

Chapitre 6

Annexes / Divers

6.1 Quelques fonctions sur les listes

SCHEME	OCAML
(define (somme l) (if (null? l) 0 (+ (car l) (somme (cdr l)))))	let rec somme l = match l with [] -> 0 hd::tl -> hd + somme(tl)
f car (f car (... (f car acc)...)) (define (foldright f acc l) (if (null? l) acc (f (car l) (foldright f acc (cdr l)))))	f hd (f hd (... (f hd acc)...)) let rec foldright f acc l = match l with [] -> acc hd::tl -> f hd (foldright f acc tl)
f (... (f (f acc car) car)...) car) (define (foldleft f acc l) (if (null? l) acc (foldleft f (f (car l) acc) (cdr l))))	f (... (f (f acc hd) hd)...) hd let rec foldleft f acc l = match l with [] -> acc hd::tl -> foldleft f (f acc hd) tl
(foldleft * 1 '(1 2 3 4)) -> 24	# foldleft (*) 1 [1;2;3;4] ;; - : int = 24

6.2 Les listes mutables

En SCHEME, nous avons les fonctions `set-car!` et `set-cdr!` qui nous permettent de modifier physiquement le car et le cdr d'un doublet. Nous pouvons par exemple définir la liste circulaire `(a b c a b c ...)`

```
(define maliste (list 'a 'b 'c))  
(set-cdr! (cddr maliste) maliste)  
maliste  
-> #0= (a b c . #0#)
```

L'affichage de la liste infine provient de l'interprète DrRacket.

Essayons de reproduire cela en OCAML (de manière intuitive et sûrement très maladroite...)

```
exception Listenulle
type liste = Nil | Cons of int ref * liste ref ;;

let set_car d v =
  match d with
  | Nil -> raise Listenulle
  | Cons(car,cdr) -> car:=v  ;;

let set_cdr d v =
  match d with
  | Nil -> raise Listenulle
  | Cons(car,cdr) -> cdr:=v ;;

let  cdr l =
  match l with
  | Nil -> raise Listenulle
  | Cons(tete, reste) when !reste <> Nil -> reste

let maliste = Cons(ref 1 , ref ( Cons (ref 2, ref ( Cons (ref 3, ref Nil))) ))
set_cdr (!cdr !(cdr maliste)) maliste ;;

# maliste;;
- : liste =
Cons ({contents = 1},
{contents =
  Cons ({contents = 2},
  {contents =
    Cons ({contents = 3},
    {contents =
      Cons ({contents = 1},
      {contents =
        Cons ({contents = 2},
        {contents =
          Cons ({contents = 3},
          ...
          ...}})}}}}})
```

6.3 Les listes infinies ou *streams*

Les *streams* sont des listes infinies.

Pour pouvoir les représenter, nous utilisons le fait que le corps d'une lambda n'est pas évalué, comme nous l'avons vu en λ -calcul avec la stratégie de β -réduction faible. Une lambda `fun() -> 2*2`

\(\lambda - : \text{unit} \rightarrow \text{int} = \text{fun}\) est en fait considérée comme une *valeur*. Seul son appel provoquera l'évaluation de la lambda `(fun() -> 2*2) ()` \(\lambda - : \text{int} = 4\)

Un *stream* sera ainsi représenté comme une liste, mais dont le `cdr` ne pointera plus directement sur une liste, mais sera une fonction dont le corps sera la liste. L'évaluation du `cdr` est ainsi retardé.

```
type 'a stream = Cons of 'a * (unit -> 'a stream) ;;
let hd (Cons (h, _)) = h ;;
let tl (Cons (_, tf)) = tf () ;;

let rec from n = Cons (n, fun () -> from (n+1));;
let entiers = from 0 ;;
let rec take n s =
  if n=0 then []
  else hd s ::: take (n-1) (tl s) ;;

# take 30 entiers
- : int list =
[0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20;
 21; 22; 23; 24; 25; 26; 27; 28; 29]
```

Nous pouvons aussi modéliser la fraction continue représentant $\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\dots}}} \end{aligned}$$

Voici le code OCAML. Je n'ai pas trouvé manière plus élégante pour exprimer le stream.

```
let rec square2 iter =
  if (iter = 1) then 1.
  else
    1. +. (1. /. (1. +. square2 (iter - 1)))

let rec racine2cons n = Cons(square2 n, fun () -> racine2cons (n+1))

let rec racine2stream = racine2cons 1
  in take 10 racine2stream ;;

- : float list =
[1.; 1.5; 1.4; 1.4166666666666674; 1.4137931034482758; 1.41428571428571437;
 1.41420118343195256; 1.41421568627450989; 1.41421319796954315;
 1.41421362489486957]
```

Nous voyons la convergence très rapide de la fraction continue.

Cependant, le calcul OCAML est très inefficace, car chaque nouvel élément de la liste recalcule la totalité de la fraction continue en passant par la fonction `square2 iter`. Si nous essayons par

exemple de calculer les 10000 premiers éléments du stream, cela prend sur ma machine une dizaine de seconde.

En utilisant le module `Lazy` d'OCAML, nous pouvons utiliser le mécanisme de *mémoisation*. Les valeurs du stream ne seront pas recalculées au 2ème appel.

```
open Lazy;;
let racine2_10000 = take 10000 racine2stream (* environ 10 secondes à chaque appel *)

let racine2_10000_lazy = lazy (take 10000 racine2stream) ;;
let racine2_force = force racine2_10000_lazy ;; (* uniquement long au 1er appel *)
```

6.4 Le module `Graphics` d'OCAML, les fractales

Nous allons ici présenter tres brièvement le module `Graphics`. Je reprends le code de Xavier Leroy tiré de son livre *le langage CAML* [17].

```
open Graphics ;;

Graphics.open_graph "";
Graphics.set_window_title "THE WINDOW" ;;

type etat = { mutable x : float; mutable y : float;
              mutable visee : float; mutable levee : bool };;
let crayon = { x = 0.0; y = 0.0; visee = 0.0; levee = false };;
let fixe_crayon b = crayon.levee <- b;; 

let pi_sur_180 = let pi = 4.0 *. (atan 1.0) in pi /. 180.0

let tourne angle = crayon.visee <- (crayon.visee +. angle *. pi_sur_180) ;;

let zero_x = float_of_int ((size_x ()) / 2);;
let zero_y = float_of_int ((size_y ()) / 2);;

let vide_ecran () =
  set_color white;
  fill_rect 0 0 (size_x ()) (size_y ());
  set_color black;
  crayon.x <- zero_x;
  crayon.y <- zero_y;
  crayon.visee <- 0.0;
  crayon.levee <- false;
  moveto (round crayon.x) (round crayon.y);;

let avance d =
```

```

let dx = d *. cos (crayon.visee)
and dy = d *. sin (crayon.visee) in
crayon.x <- crayon.x +. dx;
crayon.y <- crayon.y +. dy;
if crayon.levee then moveto (round crayon.x) (round crayon.y)
else lineto (round crayon.x) (round crayon.y);;

let rec motif n c =
  if n = 0 then avance c
  else
    begin
      motif (n -1) (c /. 3.0);
      tourne 60.0;
      motif (n -1) (c /. 3.0);
      tourne (-120.0);
      motif (n -1) (c /. 3.0);
      tourne 60.0;
      motif (n -1) (c /. 3.0)
    end;;
done;;
```

let flocon n c =
 for i = 1 to 3
 do
 motif n c; tourne (-120.0)
done;;;

flocon 1 100.0; flocon 2 100.0; flocon 3 100.0; flocon 4 100.0;

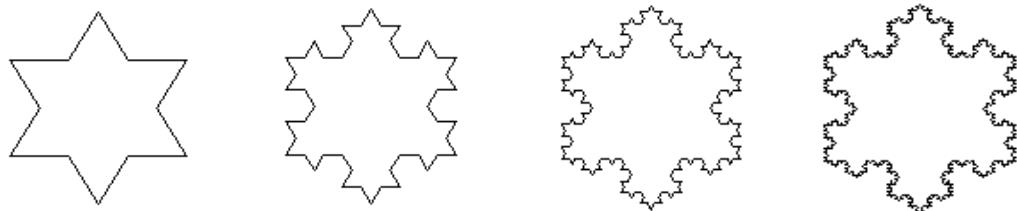


FIGURE 6.1 – Les côtes de la Bretagne



Les objets fractales ont une propriété surprenante : ils ont une aire finie, mais un périmètre infini. A l'itération n , le périmètre de notre flocon est de $3 \cdot (\frac{4}{3})^n$. Et nous avons bien entendu $\lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot (\frac{4}{3})^n = \infty$

La longueur des côtes de la Bretagne est-elle aussi infinie ? *L'Atlantique ronge nos côtes.* [8]

L'ensemble de Mandelbrot

l'ensemble de Mandelbrot est une fractale définie comme l'ensemble des points c du plan complexe pour lesquels la suite des nombres complexes définie comme ci-dessous est **bornée**.

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = z_n^2 + c \end{cases}$$

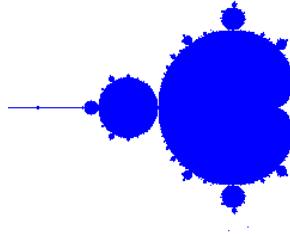
Voir le bon article https://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot

On montre que si la suite des modules des z_n est strictement supérieure à 2 pour un certain indice alors, cette suite est croissante à partir de cet indice, et elle tend vers l'infini. Donc notre test d'appartenance à l'ensemble s'arrêtera au-delà de la valeur 2.

Pour estimer la convergence, nous nous arrêterons à la valeur z_{300} . Nous utilisons également l'hypothèse que l'ensemble de Mandelbrot se situe dans le plan complexe $(-2.00 : 0.50), (-1.25 : 1.25)$

```
open Complex ;; (* {re=2.; im=4.} *)  
  
let appartient c =  
  let rec loop n z =  
    if (n > 300) then true  
    else if ((norm2 z) > 4.) then false  
    else loop (n+1) (add c (mul z z))  
  in loop 0 c  
  
#load "/home/vincent/.opam/ocaml-base-compiler/lib/graphics/graphics.cma" ;;  
#require "graphics" ;;  
open Graphics ;;  
Graphics.open_graph " 500x200+0-0" ;;  
Graphics.set_window_title "Mandelbrot" ;;  
Graphics.set_color Graphics.blue;;  
  
let mandelbrot () =  
  for i = (-200) to 50  
  do  
    for j=(-125) to 125  
    do  
      if (appartient {re=((float_of_int i)/.100.); im=((float_of_int j)/.100.)})  
      then plot (200+i) (200+j)  
    done  
  done
```

FIGURE 6.2 – L’ensemble de Mandelbrot

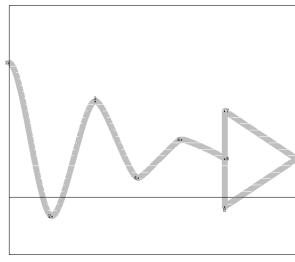


6.5 Utilisation de METAFONT

METAFONT est un langage créé par D. Knuth [9]. Il permet le design de nouvelles fontes de manière très élégante sous forme d'équations. La programmation se fait principalement de manière déclarative.

Je me suis amusé ici à créer le symbole \curvearrowright que j'ai souvent utilisé dans cet article, principalement dans la section sur le λ -calcul.

FIGURE 6.3 – \curvearrowright



Voici le bout de code qui a permis de définir ce symbole :

```
%file name: beta.mf

beginchar("D",15pt#,10pt#,3pt#);
% proportion ligne vs triangle 3/4 1/4
prop:=3/4;

y1=h-d; y2=1/5h-d; y3=4/5h-d;
y4=2/5h-d; y5=3/5h-d; y6=1/2h-d;
y7=3/4h-d; y8=1/4h-d; y9=h/2-d;

x1=0; x2=1/5*prop*w; x3=2/5*prop*w;
x4=3/5*prop*w; x5=4/5*prop*w; x6=prop*w;
x7=x8=x6; x9=w;

pickup pencircle scaled 0.3pt;
draw z1{right}..tension 6..z2{right}..tension 5..z3{right}
```

```

..tension 4..z4{right}..tension 4..z5{right}..tension 3..z6;
draw z7--z8--z9--cycle;
labels(range 1 thru 9);
endchar;
end

```

Nous avons également représenté notre fractale  avec le langage METAFONT. Cela s'écrit très facilement, car le langage de Knuth permet l'utilisation de macros récursives.

```

%file name: snow.mf
%mode_setup;
%shape for the character S

i:=1;

def dessine(expr debut, fin) =
z[i]:=debut;
z[i+1]=1/3[debut, fin];
z[i+2]= (z[i+1]-z[i]) rotated 60 shifted z[i+1];
z[i+3] = 2/3[debut, fin] ;
z[i+4] = fin ;
pickup pencircle scaled 0.1pt;
draw z[i]--z[i+1]--z[i+2]--z[i+3]--z[i+4];
i:=i+5;
enddef;

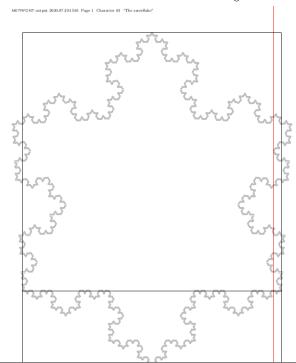
def motif (expr debut, fin, n) =
if (n=1):dessine(debut,fin) else:
motif(debut, 1/3[debut,fin], n-1) ;
motif(1/3[debut,fin],
(1/3[debut,fin] - debut) rotated 60 shifted (1/3[debut,fin]), n-1) ;
motif((1/3[debut,fin] - debut) rotated 60 shifted (1/3[debut,fin]),
(1/3[debut,fin] -debut) shifted (1/3[debut,fin]), n-1) ;
motif((1/3[debut,fin] - debut) shifted (1/3[debut,fin]), fin, n-1) ;
fi;
enddef;

beginchar("S",15pt#,15pt#,5pt#); "The snowflake" ;
motif((0,0), (w/2,h),4);
motif((w/2,h), (w,0),4);
motif((w,0), (0,0),4);
endchar;
end

```

Voici le résultat :

FIGURE 6.4 –



6.6 The boxes

Nous avons vu comment représenter un environnement comme une liste d'associations avec des paires `variable.valeur`. Une autre méthode est d'utiliser le principe de *box* qui encapsule la valeur dans une lambda. La *box* est une lambda qui prend une valeur à sa création. Puis elle réagit à deux messages qui permettent respectivement d'afficher la valeur capturée ou de la modifier avec la procédure `set!`

Voici l'implémentation en Scheme :

```
(define (box value)
  (lambda (msg)
    (case msg
      ("get" value)
      ("set" (lambda (new-value) (set! value new-value))))))

(define (make-box value)
  (box value))

(define maboite (make-box 4))
(maboite "get")
((maboite "set") 5)
```

En CAML, nous pouvons rédiger le code ci-dessous :

```
exception Erreur

let box value0 =
  let value = ref value0 in
  fun message ->
    match message with
    | "get" -> (fun any -> print_int !value)
    | "set" -> (fun newvalue -> (value := newvalue ; print_int !value ))
    | "reset"-> (fun any -> (value := value0 ; print_int !value))
```

```
| _ -> raise Erreur
```

```
let maboite = box 5 ;;
(maboite "get") 0 ;;
(maboite "set") 1976 ;;
(maboite "get") 0 ;;
(maboite "reset") 0 ;;
```

6.7 Les modules OCAML. Modélisation d'un monoïde

Un monoïde est une structure algébrique qui possède une loi de composition interne associative et un élément neutre. Représentons cette structure en OCAML, en définissant un module. Nous reprenons ici l'excellent article <https://blog.derniercri.io/observons-une-premiere-structure-algebrique-appliquee-a-linformatique-le-monoide/>

```
module type MONOID =
sig
  type t
  val ( <+> ) : t -> t -> t
  val neutral : t
end

module String_monoid : MONOID with type t = string =
struct
  type t = string
  let ( <+> ) = (^)
  let neutral = ""
end

String_monoid.("abc" <+> "def" <+> neutral)
-> String_monoid.t = "abcdef"
```

En algèbre, un morphisme (ou homomorphisme) est une application entre deux structures algébriques de même espèce.

Pour les monoïdes, un morphisme est une application $f : (M, *, e) \rightarrow (M', \star, e')$, entre deux monoïdes $(M, *, e)$ et (M', \star, e') qui vérifie :

- $\forall (g, h) \in M^2, f(g * h) = f(g) \star f(h)$
- $f(e) = e'$

```
#load "Str.cma"

let count  t =  split (regexp " ") t    |> List.length ;;

let pageA = "Hello World"
let pageB = "Foo bar "
```

```

let pageC = "0 Caml " ;;

count String_monoid.(pageA <+> pageB <+> pageC) ;;
count(String_monoid.(pageA)) + count(String_monoid.(pageB)) + count(String_monoid.(pageC));;

```

Nous avons ici utilisé l'opérateur `|>` défini comme suit `let (|>) x f = f x`

Cette fonction `count` est ainsi un morphisme entre le monoïde `String_monoid` et le monoïde des entiers (avec `+` comme fonction de composition interne et `0` comme élément neutre)

6.8 La machine à pile

Nous utilisons l'implémentation ci-dessous pour la représentation des piles sous formes de listes mutables.

```

type 'a pile = 'a list ref;;
let empiler x p = p := x :: !p ;;

exception Vide ;;

let depiler p =
  match !p with
  | [] -> raise Vide
  | x::t -> p:=t ; x ;;

let sommet p =
  match !p with
  | [] -> raise Vide
  | x::t -> x ;;

```

La machine à pile exécutera les instructions suivantes :

```
["EMPILER"; "nombre"], ["ADD"], ["SUB"], ["MUL"], ["STOP"]
```

La lecture d'une instruction est réalisée par la fonction `fetch`. Cette fonction parcourt de manière linéaire le code représenté par un *array*. Chaque `fetch` incrémente la variable `pc` qui représente le *program counter*.

```

exception Erreur ;;

let executer code =
  let pc = ref 0 in
  let pile = ref [] in
  let fetch code =
    begin
      pc := !pc + 1 ;
      Array.get code (!pc - 1)
    end
    in
  let rec exec () =

```

```

let instr = fetch code in
match instr with
| ["EMPILER"; n] -> ( empiler (int_of_string n) pile ; exec () )
| ["ADD"] -> let v2 = depiler pile in let v1 = depiler pile in
    ( empiler (v1 + v2) pile ; exec () )
| ["SUB"] -> let v2 = depiler pile in let v1 = depiler pile in
    ( empiler (v1 - v2) pile ; exec () )
| ["MUL"] -> let v2 = depiler pile in let v1 = depiler pile in
    ( empiler (v1 * v2) pile ; exec () )
| ["STOP"] -> print_int (sommet pile)
| _ -> raise Erreur
in exec ()

```

Voici l'exécution de la machine à pile :

```

let code = [| ["EMPILER"; "10"] ; ["EMPILER"; "15"] ; ["ADD"] ;
            ["EMPILER"; "4"] ; ["MUL"] ; ["STOP"] |] ;;

# executer code ;;
# 100- : unit = ()

```

6.8.1 Certification avec le langage COQ

```

Coq <
  Inductive binop : Set := Plus | Fois .
binop is defined
binop_rect is defined
binop_ind is defined
binop_rec is defined
binop_sind is defined

Coq < Inductive exp : Set :=
  | Const : nat -> exp
  | Binop : binop -> exp -> exp -> exp.
exp is defined
exp_rect is defined
exp_ind is defined
exp_rec is defined
exp_sind is defined

Coq < Definition binopDenote (b: binop): nat->nat->nat :=
  match b with
  | Plus => plus
  | Fois => mult
  end .
binopDenote is defined

Coq < Fixpoint expDenote (e:exp) : nat :=

```

```

match e with
| Const n => n
| Binop b e1 e2 => (binopDenote b) (expDenote e1) (expDenote e2)
end.

expDenote is defined
expDenote is recursively defined (guarded on 1st argument)

Coq <
  Eval compute in (expDenote (Const 5)).
= 5
: nat

```

6.9 Machine Learning and Neural Networks

6.9.1 Introduction

Nous implémentons en R un réseau de neurones réduit à sa plus simple expression. Il n'aura que deux couches de neurones. Le langage R est ici commode pour ses opérations natives sur les matrices. Nous pourrons voir ensuite comme transposer ce code en OCAML.

Nous entraînerons notre NN sur la base du jeu de test MNIST. Le "training set" contient 60000 exemples, et le "test set" 10000 exemples. Nous pourrons nous documenter plus précisément avec l'excellent ouvrage de François Chollet [4].

6.9.2 Un peu de théorie

Soit les 150 observations suivantes représentées par la matrice $X_{150,784}$ (ou tensor 2 dimensions) comprenant 150 lignes pour les 150 observations et 784 colonnes pour les 784 features des observations.

2 matrices de poids $W_{32,150}^1$ et $W_{10,32}^2$ sont utilisées.

- 1er layer de 32 neurones
- 2nd layer de 10 neurones

La sortie $OUTPUT_{150,10}$ est une matrice de 150 lignes avec les 10 colonnes représentant les 10 features que l'on cherche à reconnaître.

Voici le schéma simplifié du NN à 2 couches :

$$X \longrightarrow \otimes W^1 \rightarrow Z^1 \rightarrow \sigma \rightarrow LAYER^1 \longrightarrow \otimes W^2 \rightarrow Z^2 \rightarrow \sigma \rightarrow \hat{Y} \gg LOSS(\hat{Y}, Y)$$

6.9.3 Calcul matriciel

Cela donne le calcul matriciel ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{cccc} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,784} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,784} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{150,1} & x_{150,2} & \cdots & x_{150,784} \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{cccc} camlw_{1,1}^1 & w_{1,2}^1 & \cdots & w_{1,32}^1 \\ w_{2,1}^1 & w_{2,2}^1 & \cdots & w_{2,32}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{784,1}^1 & w_{784,2}^1 & \cdots & w_{784,32}^1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc} z_{1,1}^1 & z_{1,2}^1 & \cdots & z_{1,32}^1 \\ z_{2,1}^1 & z_{2,2}^1 & \cdots & z_{2,32}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{150,1}^1 & z_{150,2}^1 & \cdots & z_{150,32}^1 \end{array} \right) \\
 & \sigma \left(\begin{array}{cccc} z_{1,1}^1 & z_{1,2}^1 & \cdots & z_{1,32}^1 \\ z_{2,1}^1 & z_{2,2}^1 & \cdots & z_{2,32}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{150,1}^1 & z_{150,2}^1 & \cdots & z_{150,32}^1 \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{cccc} w_{1,1}^2 & w_{1,2}^2 & \cdots & w_{1,10}^2 \\ w_{2,1}^2 & w_{2,2}^2 & \cdots & w_{2,n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{32,1}^2 & w_{32,2}^2 & \cdots & w_{32,10}^2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc} z_{1,1}^2 & z_{1,2}^2 & \cdots & z_{1,10}^2 \\ z_{2,1}^2 & z_{2,2}^2 & \cdots & z_{2,10}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{150,1}^2 & z_{150,2}^2 & \cdots & z_{150,10}^2 \end{array} \right) \\
 & \sigma \left(\begin{array}{cccc} z_{1,1}^2 & z_{1,2}^2 & \cdots & z_{1,10}^2 \\ z_{2,1}^2 & z_{2,2}^2 & \cdots & z_{2,10}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{150,1}^2 & z_{150,2}^2 & \cdots & z_{150,10}^2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc} \hat{y}_{1,1} & \hat{y}_{1,2} & \cdots & \hat{y}_{1,10} \\ \hat{y}_{2,1} & \hat{y}_{2,2} & \cdots & \hat{y}_{2,10} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{y}_{150,1} & \hat{y}_{150,2} & \cdots & \hat{y}_{150,10} \end{array} \right) \\
 LOSS(Y, \hat{Y}) &= \sum \left(\begin{array}{cccc} \hat{y}_{1,1} & \hat{y}_{1,2} & \cdots & \hat{y}_{1,10} \\ \hat{y}_{2,1} & \hat{y}_{2,2} & \cdots & \hat{y}_{2,10} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{y}_{150,1} & \hat{y}_{150,2} & \cdots & \hat{y}_{150,10} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{cccc} y_{1,1} & y_{1,2} & \cdots & y_{1,10} \\ y_{2,1} & y_{2,2} & \cdots & y_{2,10} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{150,1} & y_{150,2} & \cdots & y_{150,10} \end{array} \right)^2
 \end{aligned}$$

$$Z_1 = X.W_1$$

$$LAYER_1 = \sigma(Z_1)$$

$$Z_2 = LAYER_1 * W_2$$

$$\hat{Y} = \sigma(Z_2)$$

$$LOSS = (\hat{Y} - Y)^2$$

Calculons la dérivée de la fonction *LOSS* en fonction de W^1

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta LOSS}{\delta W_1} &= \frac{\delta LOSS}{\delta \hat{Y}} \cdot \frac{\delta \hat{Y}}{\delta Z_2} \cdot \frac{\delta Z_2}{\delta LAYER_1} \cdot \frac{\delta LAYER_1}{\delta Z_1} \cdot \frac{\delta Z_1}{\delta W_1} \\
 &= 2(\hat{Y} - Y) \cdot \sigma'(Z_2) \cdot W_2 \cdot \sigma'(Z_1) \cdot X
 \end{aligned}$$

$2(\hat{Y} - Y)$ est une matrice de dimension $(150, 10)$

$\sigma'(Z_2)$ est une matrice de dimension $(150, 10)$

W_2 est une matrice de dimension $(32, 10)$

$\sigma'(Z_1)$ est une matrice de dimension $(150, 32)$

X est une matrice de dimension $(150, 784)$

Le calcul matriciel qui sera fait est $t(X) * \{(2(\hat{Y} - Y) \cdot \sigma'(Z_2) * t(W^2) \cdot \sigma'(Z^1)\}$, où $*$ est le produit matriciel et $.$ le produit d'Hadamard. Le résultat donne une matrice de dimension $(784, 32)$ qui est de même dimension que W_1

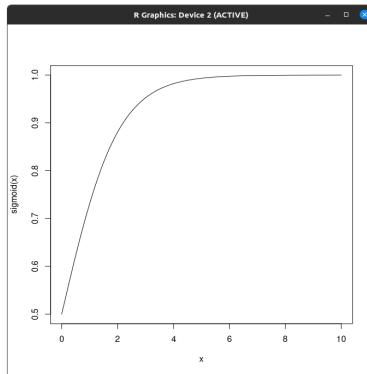
$$\begin{aligned}
 t(150, 784) * \{(150, 10) \cdot (150, 10) * t(32, 10) \cdot (150, 32)\} &= (784, 150) * \{(150, 10) * (10, 32) \cdot (150, 32)\} \\
 &= (784, 150) * (150, 32) \\
 &= (784, 32)
 \end{aligned}$$

6.9.4 Fonctions d'activation

Pour la fonction d'activation, ici appelée σ , nous utiliserons pour la première couche la fonction $relu(x) = \max(0, x)$

Pour la seconde couche, nous utiliserons la fonction sigmoid $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$

FIGURE 6.5 – La fonction sigmoid



Voici le code en R :

```
# the activation function
sigmoid <- function(x) {
  1.0 / (1.0 + exp(-x))
}

x=seq(0,10,0.1)
plot(x, sigmoid(x), type="l")

# the derivative of the activation function
sigmoid_derivative <- function(x) {
  sigmoid(x) * (1.0 - sigmoid(x))
}
```

Calculons la dérivée de la fonction $LOSS$ en fonction de W^2

$$\frac{\delta LOSS}{\delta W_2} = \frac{\delta LOSS}{\delta \hat{Y}} \cdot \frac{\delta \hat{Y}}{\delta Z_2} \cdot \frac{\delta Z_2}{\delta W_2} \quad (6.1)$$

$$= 2(\hat{Y} - Y) \cdot \sigma'(Z_2) \cdot LAYER_1 \quad (6.2)$$

$2(\hat{Y} - Y)$ est une matrice de dimension $(150, 10)$

$\sigma'(Z_2)$ est une matrice de dimension $(150, 10)$

$LAYER_1$ est une matrice de dimension $(150, 32)$

Le calcul matriciel qui sera fait est $t(LAYER_1) * (2(\hat{Y} - Y) \cdot \sigma'(Z_2))$, où $*$ est le produit matriciel et . le produit d'Hadamard. Le résultat donne une matrice de dimension $(32, 10)$ qui est de même dimension que W_2

$$t(150, 32) * (150, 10). (150, 10) = (32, 150) * (150, 10) = (32, 10)$$

6.10 Les nombres premiers. L'algorithme RSA

- Le crible d'Erathostène (Ἐρατοσθένης)
- Leur répartition
- Les nombres premiers jumeaux
- La constante de Brun
- La fonction zéta
- Le produit eulérien et sa convergence avec la suite harmonique
- Le petit théorème de Fermat
- La fonction *indicatrice* d'Euler
- L'algorithme RSA

Le crible

```

type 'a stream = Cons of 'a * (unit -> 'a stream) ;;
let hd (Cons (h, _)) = h ;;
let tl (Cons (_, tf)) = tf () ;;

let rec take n s =
  if n=0 then []
  else hd s :: take (n-1) (tl s)

let rec entiers x = Cons(x, fun() -> entiers(x+1))

let rec filtre m (Cons(x,l)) =
  if x mod m = 0 then filtre m (l())
  else Cons(x, fun() -> (filtre m (l())))

let rec crible (Cons(x,l)) = Cons(x, fun() -> crible(filtre x (l())))

let premiers = crible(entiers 2) ;;
utop # take 100 premiers ;;
- : int list =
[2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71;
 73; 79; 83; 89; 97; 101; 103; 107; 109; 113; 127; 131; 137; 139; 149; 151;
 157; 163; 167; 173; 179; 181; 191; 193; 197; 199; 211; 223; 227; 229; 233;
 239; 241; 251; 257; 263; 269; 271; 277; 281; 283; 293; 307; 311; 313; 317;
 331; 337; 347; 349; 353; 359; 367; 373; 379; 383; 389; 397; 401; 409; 419;
 421; 431; 433; 439; 443; 449; 457; 461; 463; 467; 479; 487; 491; 499; 503;
 509; 521; 523; 541]

```

Le produit d'Euler aka le produit eulérien

La fonction zéta est égale au produit eulérien

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_i^{-s}} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{p_i^s}{p_i^s - 1}$$

Exemple pour $s = 1$ avec la suite harmonique

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{7}} \cdot (\dots) \\ &= \frac{2.3.5.7.11.13.17.19...}{1.2.4.6.10.12.16.18...} \end{aligned}$$

Démontrons cela

$$\zeta(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

Divisons par 2

$$\frac{\zeta(1)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \frac{1}{16} + \dots$$

La différence de ces 2 équations donne :

$$\zeta(1) \cdot (1 - \frac{1}{2}) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \dots$$

Divisons par 3

$$\frac{1}{3} \cdot (1 - \frac{1}{2}) \cdot \zeta(1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{27} + \frac{1}{33} + \frac{1}{39} + \dots$$

La différence donne :

$$(1 - \frac{1}{3}) \cdot (1 - \frac{1}{2}) \cdot \zeta(1) = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \dots$$

Divisons par 5

$$\frac{1}{5} \cdot (1 - \frac{1}{3}) \cdot (1 - \frac{1}{2}) \cdot \zeta(1) = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{35} + \frac{1}{55} + \dots$$

La différence donne :

$$(1 - \frac{1}{5}) \cdot (1 - \frac{1}{3}) \cdot (1 - \frac{1}{2}) \cdot \zeta(1) = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \dots$$

Nous pouvons poursuivre sur le principe du crible d'Erathostène

$$\dots (1 - \frac{1}{5}) \cdot (1 - \frac{1}{3}) \cdot (1 - \frac{1}{2}) \cdot \zeta(1) = 1$$

D'où :

$$\begin{aligned} \zeta(1) &= \frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})\dots} \\ \zeta(1) &= \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \dots} \\ \zeta(1) &= \frac{2.3.5.7.11.13.17.19...}{1.2.4.6.10.12.16.18...} \end{aligned}$$

Le numérateur est le produit de l'ensemble des nombres premiers. Le dénominateur est le produit de l'ensemble des nombres premiers moins 1.

Exemple pour $s = 2$ avec la suite carrée

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{25}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{49}} \cdot (\dots)$$

Les nombres premiers jumeaux et la constante de Brun

La somme inverse des nombres premiers jumeaux. Il y en aurait une infinité. Cependant, cette somme converge vers la constante de Brun.

$$\text{Brun} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{13}\right) + \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{19}\right) + \left(\frac{1}{29} + \frac{1}{31}\right) + \dots$$

$$\text{Brun} \approx 1,90216$$

```

let inverse_sum n s =
  let rec aux n s acc =
    if n=0 then acc
    else aux (n-1) (tl s) (acc +. (1. /. (float_of_int (hd s))))
in aux n s 0.

let rec jumeaux (Cons(x, l)) =
  let suivant = hd (l()) in
  if suivant - x =2 then Cons(x, fun()=> (Cons(suivant, fun()=> (jumeaux (tl(l()))))))
  else jumeaux (l())

let jum = jumeaux premiers

utop # take 100 jum ;;
- : int list =
[3; 5; 11; 13; 17; 19; 29; 31; 41; 43; 59; 61; 71; 73; 101; 103; 107; 109; 137;
 139; 149; 151; 179; 181; 191; 193; 197; 199; 227; 229; 239; 241; 269; 271;
 281; 283; 311; 313; 347; 349; 419; 421; 431; 433; 461; 463; 521; 523; 569;
 571; 599; 601; 617; 619; 641; 643; 659; 661; 809; 811; 821; 823; 827; 829;
 857; 859; 881; 883; 1019; 1021; 1031; 1033; 1049; 1051; 1061; 1063; 1091;
 1093; 1151; 1153; 1229; 1231; 1277; 1279; 1289; 1291; 1301; 1303; 1319; 1321;
 1427; 1429; 1451; 1453; 1481; 1483; 1487; 1489; 1607; 1609]

# inverse_sum 20000 jum ;;
- : float = 1.37118156832708848

```

Avec les 10000 premières paires, nous sommes encore loin de 1,90216...

Le petit théorème de Fermat

Si p est premier et si a nest pas un multiple de p , alors $a^{p^1} \equiv 1 \pmod{p}$

Le théorème d'Euler

L'indicatrice d'Euler est une fonction, qui à tout entier naturel n non nul associe le nombre d'entiers compris entre 1 et n et premiers avec n . Cette fonction est nommée en anglais *Euler's totient function*

$$\begin{aligned} \varphi &: \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^* \\ n &\longmapsto \text{card}\{m \in \mathbb{N}^* \mid m \leq n \text{ et } m \text{ premier avec } n\} \end{aligned}$$

Le théorème d'Euler nous dit que $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$, si a est un entier premier à n . C'est une généralisation du petit théorème de Fermat.

Le théorème de Bezout

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, \exists u, v \in \mathbb{Z} \text{ tel que } ux + vy = \text{pgcd}(x, y)$$

L'inverse modulaire

Avec x et n premiers entre eux, en prenant u et v dans \mathbb{Z} tels que $ux + vn = 1$, on a :

$$\begin{aligned} u \cdot x &\equiv 1 \pmod{n} \\ u &\equiv x^{-1} \pmod{n} \end{aligned}$$

L'algorithme RSA

Soient $p > 1$ et $q > 1$ deux nombres premiers distincts, $n = pq$ leur produit, e un nombre premier avec $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$ et $d = e^{-1} \pmod{(p-1)(q-1)}$.

Pour tout entier positif $m < n$, on a $m^{ed} \equiv m \pmod{n}$

La clé publique est le couple $P = (n, e)$, la clé secrète est le couple $S = (n, d)$.

Raisonnement :

$ed \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}$, donc il existe k tel que $ed = 1 + k(p-1)(q-1)$.

Si m nest pas multiple de p ni de q , daprè le petit théorème de Fermat,

$$\begin{cases} m^{ed} = m^{1+k(p-1)(q-1)} = m(m^{p-1})^{k(q-1)} \equiv m \pmod{p} \\ m^{ed} = m^{1+k(p-1)(q-1)} = m(m^{q-1})^{k(p-1)} \equiv m \pmod{q} \end{cases}$$

et si m est un multiple de p , $m \equiv 0 \pmod{p}$ et $m^{ed} \equiv 0 \pmod{p}$ (de même avec q).

Lentier $u^{ed}m$ est donc un multiple de p et de q , qui sont premiers distincts, donc un multiple de leur produit $pq = n$

Donc, pour tout entier m , $m^{ed} \equiv m \pmod{n}$

Le code

```
open List
open Random

let p = 61 and q = 53 ;;
let n = p*q ;;
let phi = (p-1)*(q-1) ;; (* phi=3233 *)
let m = 65 ;;

let rec pgcd a b =
  if b = 0 then a
  else pgcd b (a mod b)
```

```

let rec calcule_e p q =
  let e = Random.int ((p-1)*(q-1))
    in if pgcd e ((p-1)*(q-1)) = 1 then e
      else calcule_e p q

let rec euclide a b =
  if b = 0 then ( a , 1 , 0 )
  else
  begin
    let (d', u', v') = euclide b (a mod b)
    in (d', v', u' - (a / b) * v' )
  end

let calcule_d p q e =
  let(_, u ,_) = euclide e (( p-1)*(q-1)) in
    u mod ((p-1)*(q-1))

let rec pow a m = function
| 0 -> 1 mod m
| 1 -> a mod m
| n ->
  let b = pow a m (n / 2) in
  b * b * (if n mod 2 = 0 then 1 else a) mod m
;;

let e = calcule_e p q ;;
let d = calcule_d p q e ;;

crypt (crypt m e n) d n;; 

let factor n =
  let rec aux n k l =
    if n < k/2 then l
    else if (n mod k) = 0 then aux (n/k) k (k::l)
    else if (k=2) then aux n 3 1
    else aux n (k+2) 1
  in rev (aux n 2 [])

```

6.11 Approximation du nombre π

Que j' aime à faire connaître ce nombre utile aux sages.
 3, 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5

Cerchons à approcher π par cinq méthodes :

- La loi des grands nombres. Nous faisons ici un tirage aléatoire de coordonnées (x, y) avec x et y compris entre -1 et 1 . Il y a π chances sur 4 que le tirage tombe dans le cercle de rayon

1.

- La série alternée de Leibniz

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \frac{\pi}{4}$$

- Le calcul numérique de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

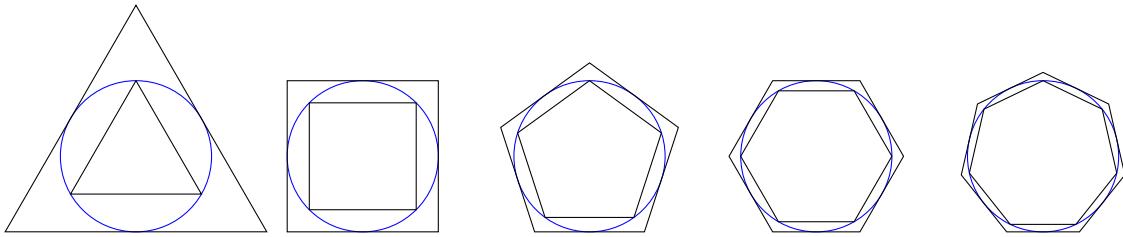
- Le produit de Wallis

$$\pi/2 = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10....}{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11....}$$

Ce produit s'écrira mieux sous la forme :

$$(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3}) \cdot (\frac{4}{2} \cdot \frac{4}{5}) \cdot (\frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7}) \cdot (\frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9}) \dots = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1}$$

- Les périmètres des polygones réguliers inscrits et circonscrits au cercle



6.11.1 La méthode des polygones

Pour calculer la valeur de π , il suffit de calculer pour n suffisamment grand les périmètres des polygones réguliers de n côtés inscrits et circonscrits à un cercle de diamètre $2R = 1$. Nous nous refererons à l'excellent ouvrage [12]. Cette approche est appelée en anglais *the method of exhaustion*.

Le périmètre du polygone inscrit sera nommé p_n . Le périmètre du polygone circonscrit sera p'_n . Comme $p_n < 2\pi R < p'_n$, on aura $p_n < \pi < p'_n$. Nous obtiendrons alors deux valeurs approchées de π , l'une par défaut, l'autre par excès.

Calcul de p_{2n} en fonction de p_n

Nous rappelons les deux définitions suivantes :

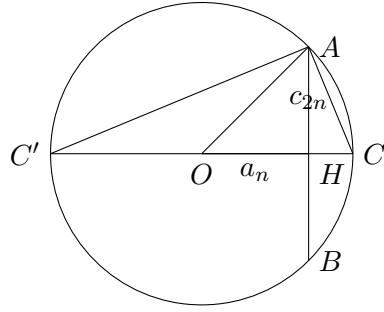
Définition 6. *Le rayon du polygone est le rayon du cercle circonscrit.*

Définition 7. *L'apothème du polygone est le rayon du cercle inscrit.*

Nous pouvons ainsi exprimer l'apothème en fonction du rayon par la formule $a = r \cos(\frac{\pi}{n})$ où n est le nombre de côté du polygone.

Soit $AB = c_n$ le côté du polygone régulier inscrit et $OH = a_n$ son apothème.

C est le milieu de l'arc AB . On a $AC = c_{2n}$



Dans le triangle rectangle ACC' :

$$\begin{aligned} AC^2 &= CC'.CH = CC'(OC - OH) \\ \Leftrightarrow c_{2n}^2 &= 2R - (R - a_n) \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} OH &= \sqrt{OA^2 - AH^2} \\ \Leftrightarrow a_n &= \sqrt{R^2 - \frac{c_n^2}{4}} \end{aligned}$$

Donc

$$c_{2n}^2 = R(2R - \sqrt{4R^2 - c_n^2})$$

Comme $c_n = \frac{p_n}{n}$, on obtient :

$$\frac{p_{2n}^2}{4n^2} = R(2R - \sqrt{4R^2 - \frac{p_n^2}{n^2}})$$

Soit pour $2R = 1$

$$p_{2n}^2 = 2n(n - \sqrt{n^2 - p_n^2})$$

En partant d'un carré inscrit ($n = 4$), nous avons $c_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et donc nous pouvons calculer les valeurs de $p_8, p_{16}, p_{32}, \dots$

Calcul de p'_n en fonction de p_n

Les polygones inscrits et circonscrits étant deux polygones semblables, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{p'_n}{p_n} &= \frac{R}{a_n} \\ \Leftrightarrow p'_n &= p_n \cdot \frac{R}{a_n} \\ \Leftrightarrow p'_n &= p_n \cdot \frac{2R}{\sqrt{4R^2 - c_n^2}} \\ \Leftrightarrow p'_n &= \frac{2nRp_n}{\sqrt{4n^2R^2 - p_n^2}} \end{aligned}$$

Soit pour $2R = 1$

$$p'_n = \frac{np_n}{\sqrt{n^2 - p_n^2}}$$

Les valeurs approchées de π par défaut, et par excès en fonction du nombre n de côtés :

$n = 4 \rightarrow 2.82843 < \pi < 4.00002$
 $n = 8 \rightarrow 3.06148 < \pi < 3.31372$
 $n = 16 \rightarrow 3.121446 < \pi < 3.18266$
 $n = 32 \rightarrow 3.136542 < \pi < 3.151722$
 $n = 64 \rightarrow 3.140274 < \pi < 3.144064$

Depuis la formule $p_{2n}^2 = 2n(n - \sqrt{n^2 - p_n^2})$ et sachant que $p_n = n.c_n$, nous pouvons en déduire :

$$c_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - c_n^2}}$$

Pour un carré de rayon 1, nous avons $c_4 = \sqrt{2}$. Ainsi $c_8 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$

De même, $c_{16} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$ et $c_{32} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}$

Comme formule générique, nous obtenons ainsi avec $n - 1$ racines imbriquées :

$$c_{2^n} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\dots}}}}}}$$

Quand n tend vers l'infini, le 2^n -gone tend vers le cercle. D'où :

$$2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\dots}}}}}} \rightarrow \pi \text{ quand } m \rightarrow \infty$$

Nous pourrons nous référer à [14]

6.11.2 La série alternée de Leibniz

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \frac{\pi}{4}$$

Nous pouvons coder cette somme infinie en utilisant un type *stream*.

```
type 'a stream = Cons of 'a * (unit -> 'a stream) ;;
let hd (Cons (h, _)) = h ;;
let tl (Cons (_, tf)) = tf () ;;

let rec sum n s acc =
  if n=0 then acc
  else sum (n-1) (tl s) (acc +. (hd s)) ;;
```

```

let rec take n s =
  if n=0 then []
  else hd s :: take (n-1) (tl s) ;;

let rec from i = Cons ((((-1.) ** i ) /. (2.*. i +. 1.)), fun () -> from (i +. 1.)) ;;
let leibniz = from 0. ;;

```

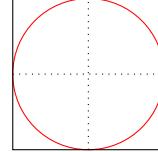
Cette série est belle, mais paresseuse. Elle converge très lentement vers $\frac{\pi}{4}$. Prenons les cinq millions premières valeurs de notre stream `leibniz`.

```
# 4. *. sum 5000000 leibniz 0. ;;
- : float = 3.14159245358977968
```

6.11.3 La loi des grands nombres

Sur un tirage aléatoire de coordonnées (x, y) avec x et y compris entre -1 et 1 , il y a π chances sur 4 que le tirage tombe dans le cercle de rayon 1 .

comme un jeu de fléchettes...



Le résultat des tirages est stocké sur notre liste "infinie". Nous effectuons cinq millions de tirage qui nous permettent d'obtenir une valeur approchée de π avec les deux premières décimales exactes.

```

let gen() =
let x = if Random.bool () then Random.float 1. else (-. Random.float 1.) in
let y = if Random.bool () then Random.float 1. else (-. Random.float 1.) in
if (x ** 2. +. y ** 2. <= 1.) then 1.0 else 0.0 ;;

let rec from i = Cons (gen(), fun () -> from (i + 1)) ;;

let rec sum n s acc =
if n=0 then acc
else sum (n-1) (tl s) (acc +. (hd s)) ;;

4. *. (sum 5000000 tirage 0. /. 5000000.) ;;
- : float = 3.142153

```

6.11.4 Le produit de Wallis

Pour introduire le produit infini de Wallis, nous partons du fait que tout polynôme de degré n s'écrivant $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ peut se décomposer en :

$$f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

Et en factorisant ce produit par $x_1.x_2 \dots x_n$, nous pouvons écrire :

$$f(x) = C\left(1 - \frac{x}{x_1}\right)\left(1 - \frac{x}{x_2}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_n}\right)$$

C est ici une constante égale à a_0 , que nous avons calculé en posant $x = 0$.

Euler aurait démontré que cette décomposition vraie pour les polynomes l'est également pour la fonction $\sin(x)$, et plus particulièrement $\sin(\pi x)$. Nous avons $\sin(\pi n) = 0 \forall n \in \mathbb{Z}$

$$\sin(\pi x) = \pi x \left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4^2}\right) \dots$$

Et donc pour $x = \frac{1}{2}$, nous avons :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{2^2 \cdot 1^2}\right)\left(1 - \frac{1}{2^2 \cdot 3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{2^2 \cdot 4^2}\right) \dots$$

Si nous écrivons

$$1 - \frac{1}{2^{2n} \cdot n^2} = \frac{(2n-1)(2n+1)}{2n \cdot 2n}$$

Nous obtenons le produit de Wallis :

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{4}{2} \cdot \frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7}\right) \cdot \left(\frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9}\right) \dots = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1}$$

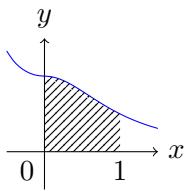
```
let rec from i = Cons ((4. *. i**2. ) /. (4. *. i**2. -. 1.)), fun () -> from (i +. 1.) ;;
let wallis = from 1. ;;
```

```
let rec mult n s acc =
  if n=0 then acc
  else mult (n-1) (tl s) (acc *. (hd s)) ;;
```

Le produit converge ici rapidement vers $\pi/2$. Nous multiplions les cinquantes premiers millions de notre liste infinie `wallis`.

```
utop #
2. *. mult 5000000 wallis 1. ;;
- : float = 3.14159249652297845
```

6.11.5 L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$



$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \frac{1}{1 + (\frac{i}{n})^2} = \frac{\pi}{4}$$

```

let f x = 1. /. (1. +. x**2.)

let rec somme n i acc =
  if i > n then (1./. n) *. acc
  else somme n (i +. 1.) (acc +. (f (i /. n))) ;;

utop #
4. *. somme 900000000. 0. 0. ;;
- : float = 3.14159265692298773

```

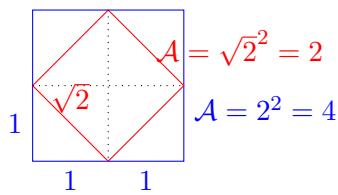
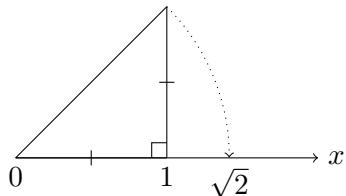
6.12 Poésies

Un soir t'en souvient-il ? Nous voguions en silence ;
 On nentendait au loin, sur londe et sous les cieux,
 Que le bruit des rameurs qui frappaient en cadence
 Tes flots harmonieux.

Les feuilles mortes se ramassent à la pelle
 Tu vois, je n'ai pas oublié...
 Les feuilles mortes se ramassent à la pelle,
 Les souvenirs et les regrets aussi

Agneau de Dieu, qui sauves les hommes,
 Agneau de Dieu, qui nous comptes et nous nommes,
 Agneau de Dieu, vois, prends pitié de ce que nous sommes.

6.13 L'irrationalité de $\sqrt{2}$



Démonstration par l'absurde

Considérons que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec la fraction $\frac{a}{b}$ étant réduite.
 Alors, nous avons $2 = \frac{a^2}{b^2} \Leftrightarrow a^2 = 2b^2$
 Donc a^2 est pair, et donc a est pair. Nous écrivons $a = 2r$.
 Cela donne $(2r)^2 = 2b^2 \Leftrightarrow 2r^2 = b^2$
 Donc b^2 est pair, et donc b est pair.
 Ainsi a et b sont pairs, ce qui contredit l'hypothèse initiale de la fraction réduite.

ndonc $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

6.14 Démonstration non constructive

Démontrons qu'il existe deux irrationnels a et b tels que a^b soit rationnel.

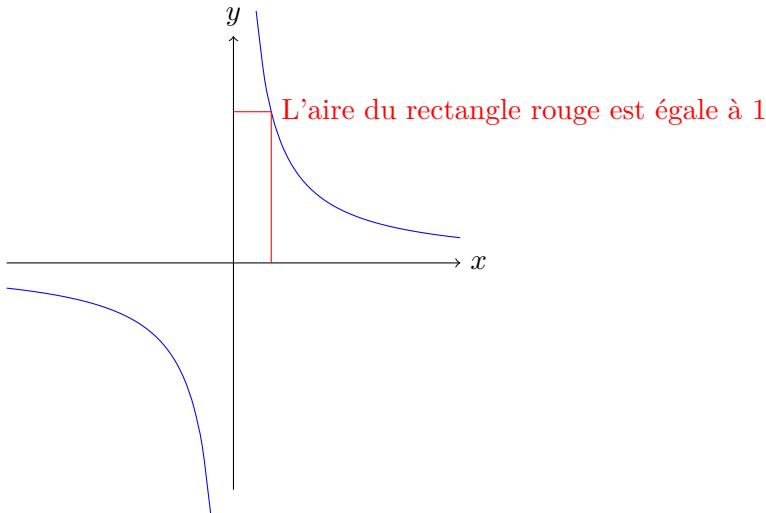
Considérons $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$

Si $\sqrt{3}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$ alors on pose $a = \sqrt{3}$ et $b = \sqrt{2}$

Sinon, on pose $a = \sqrt{3}^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{3}$, de sorte que $(\sqrt{3}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 3 \in \mathbb{Q}$

Mais laquelle des deux est la solution ? Faut-il abandonner le principe du *tiers exclus* de nos démonstrations mathématiques ?

6.15 L'hyperbole $xy = 1$

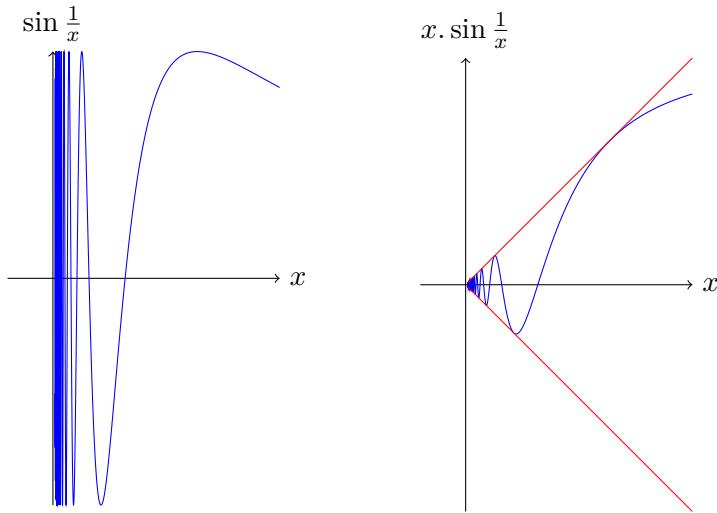


6.16 L'exponentielle

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

Nous avons ainsi : $e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$
Et également $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+n}\right)^n$

6.17 Les fonctions $\sin \frac{1}{x}$ et $x \cdot \sin \frac{1}{x}$



6.18 Srivanasa Ramanujan

Le mathématicien indien aurait découvert la très belle formule

$$3 = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + \dots}}}}$$

Posons $f(n) = n(n+2)$, et sachant que $n(n+2) = n\sqrt{1 + (n+1)(n+3)}$, nous avons :

$$\begin{aligned} f(n) &= n\sqrt{1 + f(n+1)} \\ &= n\sqrt{1 + (n+1)\sqrt{1 + f(n+2)}} \\ &= n\sqrt{1 + (n+1)\sqrt{1 + (n+2)\sqrt{1 + f(n+3)}}} \end{aligned}$$

```
let rec f n i =
  if i = 0 then 1.
  else n *. sqrt(1. +. (f (n +. 1.) (i-1)))

utop # f 1. 10 ;;
- : float = 2.99480026926620502
```

Nous pouvons définir la fonction d'affichage `f_latex` comme ci-dessous :

```
let rec f_latex n i =
  if i = 0 then "\ldots"
  else (string_of_int n)^ "\sqrt{1 + " ^ (f_latex (n + 1) (i-1))^ "}" ;;

print_string (f_latex 1 10) ;;
```

$$3 = 1 \sqrt{1 + 2 \sqrt{1 + 3 \sqrt{1 + 4 \sqrt{1 + 5 \sqrt{1 + 6 \sqrt{1 + 7 \sqrt{1 + 8 \sqrt{1 + 9 \sqrt{1 + 10 \sqrt{1 + \dots}}}}}}}}}}$$

6.19 L'alphabet grec. Extraits du nouveau testament

α	β	γ	δ	ϵ	ζ	η	θ	ι	κ	λ	μ	ν	ξ	o	π	ρ	σ	τ	v	ϕ	χ	ψ	ω
A	B	Γ	Δ	E	Z	H	Θ	I	K	Λ	M	N	Ξ	O	Π	R	Σ	T	Υ	Φ	X	Ψ	Ω



Ομεγα, , , , : : , , , .
Ειρενε υμιν!

Bibliographie

- [1] *Livre de la Genèse, Gn 11, 1-9.*
- [2] Badiou Alain. *Eloge des mathématiques.* Flammarion, 2015.
- [3] Jacques Chazarain. *Programmer avec Scheme : De la pratique à la théorie.* International Thomson Publ. France, 1996.
- [4] Francois Chollet and JJ Allaire. Deep learning with r, 2018.
- [5] Baader Franz. *Term Rewriting and All That.* Cambridge University Press, 1998.
- [6] André Gide. *Les faux monnayeurs.*
- [7] Douglas R Hofstadter et al. *Gödel, Escher, Bach : an eternal golden braid.* 1979.
- [8] Victor Hugo. *Les travailleurs de la mer.*
- [9] Donald Knuth. *The METAFONT Book.* Addison Wesley, 1992.
- [10] René Lalement. *Logique, réduction, résolution.* 1990.
- [11] Leslie Lamport. *LaTeX a document preparation system.* Addison-wesley, 1994.
- [12] C. Lebossé. *Géométrie plane.* Fernand Nathan, 1947.
- [13] Christian Queinnec. *Lisp in small pieces.* Cambridge University Press, 2003.
- [14] Courant Richard. *What is Mathematics ?* Oxford University Press, 1941.
- [15] William Shakespeare. *Romeo and Juliet.*
- [16] Daniel P. Friedman Stanley Jefferson. *A Simple Reflective Interpreter.* 1992.
- [17] Pierre Weis and Xavier Leroy. *Le langage Caml.* Dunod, 1999.