Le calcul
La réduction et la résolution
Exemples en Scheme, Ocaml, Coq et Agda

Ἀγεωμέτρητος μηδε εἰσίτω

Vincent Cognet

Sainte-Marguerite, le 27 avril 2020

https://github.com/cogtoto

Table des matières

Chapitre 1

Au commencement, Gn 1.1 et Jn 1.1

Ἐν ἀρχῄ *Aristote considérait les mathématiques comme une discipline, non pas tant de la vérité, que de la beauté.* [1]

What is mathematics ? Mathematics as an expression of the human mind reflects the active will, the contemplative reason, and the desire for aesthetic perfection. [21]

C'est sous cet angle de l'esthétique que je décrirai ici quelques concepts des fondements mathématiques [1] de l'informatique.

Qu'est-ce que le **calcul** ? Il est difficile d'en donner une définition abstraite. Essayons cependant de décrire l'action de calculer, le processus du calcul.

Nous identifions deux processus bien distincts appelés la **réduction** et la **résolution**. La réduction est l'action de réduire séquentiellement une expression en une autre plus simple au moyen de règles de réécriture. Lorsque plus aucune règle ne s'applique, l'expression calculée est alors en forme *normale*. Cette forme normale correspondra à la *valeur* de notre calcul.
$(3+8)+(4-9)*2 \rightsquigarrow 11-5*2 \rightsquigarrow 11-10 \rightsquigarrow 1$

Ce processus de réduction soulève deux difficultés essentielles :
- La terminaison. Est-ce-que le processus termine en un nombre fini d'étapes ?
- La confluence. Si le processus termine, est-ce-que l'expression aboutit à une forme normale unique ?

La fonction mathématique usuelle est peu adaptée à une étude du processus du calcul. Car elle repose en fait sur une définition en *extension* : une fonction mathématique est la description d'une relation d'un ensemble de départ face à son ensemble d'arrivée.

Pour modéliser notre processus de calcul, il nous faut une définition en *intension*, c'est-à-dire avec des règles de calcul explicites. Fondé sur cette idée, le λ-calcul a été créé par Alonzo Church dans les années 1930. Il est maintenant utilisé comme socle de tout langage fonctionnel. Même s'il est rudimentaire et basé sur un mécanisme simple de réécriture, nous verrons qu'il permet d'exprimer toutes les fonctions calculables. Sa *puissance* de calcul est similaire aux machines de Turing ou aux fonctions μ-récursives de Gödel. Nous l'étudierons en détails.

L'autre processus de calcul est la résolution. Nous l'utilisons chaque fois que nous devons résoudre

1. **μανθάνω** : *j'apprends* **τὸ μάθημα** : *l'étude* **τὰ μαθηματικά** : *les mathématiques, l'étude par excellence*

une équation. En résolvant $x^2 + 2x - 15 = 0$, nous souhaitons que notre processus soit *complet*, c'est-à-dire que nous calculions l'ensemble des valeurs possibles $\{-5; 3\}$. Nous étudierons également ce mécanisme, et en particulier l'algorithme d'unification.

Enfin, nous aborderons la correspondance bluffante de la programmation fonctionnelle avec la logique. C'est la correspondance de Curry-Howard.
Avec un langage de programmation typé comme OCAML où tout terme a un type, nous pouvons considérer un terme comme étant la preuve (ou plutôt une des preuves possibles) de son type. Le mécanisme strict de typage nous assure de la cohérence du terme avec son type. Nous avons alors le rapprochement suivant :

terme	preuve
type	proposition

Nous sommes ici dans une logique constructive, démontrer une proposition revient à exhiber une preuve, c'est-à-dire un terme ayant pour type la proposition. Ainsi, le principe du tiers-exclus $P \vee \neg P$ ne peut être ici démontré.

Le type faux est un type inhabité, donc nous le définissons sans constructeur : `type faux = |`

Nous pouvons par exemple prouver le théorème du modus tollens :

```
let modus_tollens (hfq:'q->faux) (hpq:'p->'q) (hp:'p) = hfq (hpq hp)
```

Le type de cette expression est `('q -> faux) -> ('p -> 'q) -> 'p -> faux`

Dans un langage proposant un système de types plus évolué comme COQ, le faux peut être exprimé par le type $\forall p : P, p$. Ce type est également inhabité. Supposer le faux permettra de démontrer n'importe quelle proposition.

```
Theorem faux : forall P:Prop, P.
Admitted.

Theorem absurdité : 1=2.
Proof.
    exact (faux (1=2)).
Qed.
```

La correspondance de Curry-Howard montre toute son étendue dans le calcul des constructions, qui considère les types comme des termes de premier ordre et permet ainsi de modéliser des types dépendants. COQ et AGDA implémentent ce formalisme.

Nous en montrerons plusieurs exemples significatifs avec les langages COQ et AGDA. Ces exemples permettront de mettre en évidence de manière claire la frontière entre le calcul et le raisonnement.

Bonne lecture !

Chapitre 2

Le λ-calcul et la réduction

2.1 Définition, champ lexical et syntaxique

Le λ-calcul est un système formel très rudimentaire. Il n'utilise que peu de moyens : le symbole λ, des variables et des parenthèses. Il n'a qu'une seule règle de calcul, la β-réduction, qui modélise le passage d'un argument à une fonction.

Définition 1. *Un λ-terme est défini par induction de la manière suivante :*
- *Une variable x est un λ-terme.*
- *Si t est un λ-terme, l'abstraction $\lambda x.t$ est un λ-terme.*
- *Si t_1 et t_2 sont des λ-termes, l'application $(t_1\ t_2)$ est un λ-terme.*

Voici le champ lexical des λ-termes :

$$\text{token} = \begin{array}{l|ll} & \lambda & \texttt{LAMBDA} \\ & \text{'.'} & \texttt{POINT} \\ & [a-z][a-z\ 0-9]\ * & \texttt{VARIABLE} \\ & \text{'('} & \texttt{PARLEFT} \\ & \text{')'} & \texttt{PARRIGHT} \end{array}$$

Voici la grammaire des λ-termes, en utilisant les terminaux définis avant :

$$\textit{terme} ::= \begin{array}{|l} \texttt{VARIABLE} \\ \texttt{PARLEFT}\ \textit{terme}\ \ \textit{terme}\ \texttt{PARRIGHT} \\ \texttt{LAMBDA}\ \texttt{VARIABLE}\ .\ \textit{terme} \end{array}$$

Nous utiliserons ocamllex et menhir, qui est la version moderne de ocamlyacc, pour l'analyse lexical et syntaxique des termes du λ-calcul.

2.1.1 Analyse lexicale avec ocamllex

Nous définissons ici le champ lexical des différents *tokens* (*léxèmes*) du λ-calcul.

```
(* file: lambdalexical.mll *)
{
open Lambdagrammar (* Assumes the parser file is "lambdagrammar.mly" *)
}
```

```
let texte = ['a'-'z'] ['a'-'z' '0'-'9']*
rule token = parse
| "lambda"  { LAMBDA }
| '.' { POINT }
| texte as varia  { VARIABLE (varia) }
| '('    { PARLEFT }
| ')'    { PARRIGHT }
| _      { token lexbuf }
| eof    { raise End_of_file }
```

La compilation de ce fichier `.mll` va générer une fonction dont le nom est celui de la règle (ici `token`). Cette fonction prend comme argument le type `lexbuf` et rend le type `token`.

`lexbuf` est un type de données abstrait défini dans le module Lexing qui permet de mémoriser la chaîne ou le fichier en cours d'analyse.

```
val token :  Lexing.lexbuf  -> token
```

2.1.2 Analyse syntaxique avec menhir

Nous définissons ici la grammaire du λ-calcul. Nous retrouvons les constructeurs du type ML associés à chacune des règles de la grammaire. Ces constructeurs seront préenté dans la section qui suit.

```
/* file: lambdagrammar.mly */
%{
open Terme
%}

%token <string> VARIABLE
%token LAMBDA PARLEFT PARRIGHT POINT
%token NEWLINE

%start exp
%type <Terme.terme> exp

%% /* Grammar rules and actions follow */
exp:      VARIABLE  { Var($1) }
| PARLEFT exp exp PARRIGHT    { App($2, $3)}
| LAMBDA VARIABLE POINT exp    { Lam($2, $4) }
;
%%
```

Plus exactement, nous avons modifié cette grammaire *naïve* pour la rendre non ambiguë et assurer l'associativité à gauche des λ-applications. En effet :

$$MNOP = (((MN)O)P)$$

```
%%
line:  exp NEWLINE { $1 }
;

exp: LAMBDA VARIABLE POINT exp    { Lam($2, $4) }
     | app {$1}
;

app:  atome {$1}
     | app atome { App($1, $2) }
;

atome: PARLEFT exp PARRIGHT {$2}
       | VARIABLE {Var($1)}
;
%%
```

Nous obtenons ainsi :

```
$ ./lambda.out
>> m n o p
App(App(App(Var "m" ,Var "n" ),Var "o" ),Var "p" )

>> lambda f . (lambda x . f(x x)) (lambda x. f(x x))
Lam("f",App(Lam("x",App(Var "f" ,App(Var "x" ,Var "x" ))),
        Lam("x",App(Var "f" ,App(Var "x" ,Var "x" )))))
```

La compilation de ce fichier `.mly` va générer une fonction dont le nom est celui de l'axiome de notre grammaire (ici `exp`). Cette fonction prend deux arguments : la fonction de l'analyseur lexical qui génère les tokens et l'input. Elle rend le type des expressions utilisées commes actions dans la grammaire.

```
val exp :   (Lexing.lexbuf  -> token) -> Lexing.lexbuf -> Terme.terme
```

Si le langage analysé n'est pas reconnu par la grammaire, l'exception `Parse_error` est levée.

2.1.3 Implémentation du parsing en mode *récursif descendant*

Si nous voulons nous passer d'un outil tel que ocamlyacc ou menhir, nous pouvons très facilement implémenter un parser de manière récursive en partant depuis la racine (l'axiome des règles de notre grammaire) et en appelant de manière récursive les régles suivantes en fonction du caractère lu.

On modifiera légèrement la grammaire comme ci-dessous pour faciliter le travail.

exprule	::=	| `VARIABLE`
		| `PARLEFT` *parrule*
		| `NEWLINE`
parrule	::=	| `LAMBDA` *lambdarule*
		| *apprule*
lambdarule	::=	`VARIABLE` `POINT` *exprule* `PARRIGHT`
apprule	::=	*exprule* *exprule* `PARRIGHT`

Cela imposera cependant la saisie systématique des λ-termes avec des parenthèses autour des abstractions et des applications. De même, nous n'aurons plus la facilité syntaxique de l'associativité à gauche des applications et de l'associativité à droite du corps des abstractions. Je ne sais pas si une telle grammaire peut être conçue pour une analyse en mode récursif descendant. Je pense que non (après m'être un peu cassé les cheveux là-dessus...).

Voici le code associé.

```
exception Fin
exception Erreur of string

let _ =
  let lexbuf = Lexing.from_channel stdin in

  let rec exprule courant =
    match courant with
    | VARIABLE(x) -> Var(x)
    | PARLEFT -> parrule (lexana lexbuf)
    | NEWLINE -> raise Fin
    | _ ->  raise (Erreur "exprule")

    and parrule courant =
        match courant with
        | LAMBDA -> lambdarule courant
        | _ -> apprule courant

    and apprule courant =
        let op1 = exprule courant in
         let op2 = exprule (lexana lexbuf) in
        let suivant = lexana lexbuf in (* consume PARRIGHT*)
        match suivant with
          | PARRIGHT ->  App(op1, op2)
          | _ -> raise (Erreur "apprule")

    and lambdarule courant =
        let var = lexana lexbuf in
        let _ = lexana lexbuf in  (* consume POINT *)
        let corps = exprule(lexana lexbuf) in
        let _ =  lexana lexbuf (* consume PARRIGHT *) in
        match var with
          | VARIABLE(x) -> Lam(x, corps)
          | _ -> raise (Erreur "lambdarule")

    in (betaNormalPrint (exprule (lexana lexbuf)); flush stdout)
```

2.2 Représentation en Ocaml

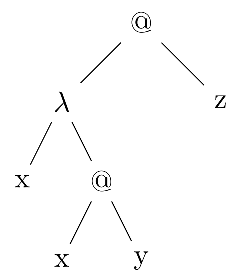
```
type terme =
| Var of string
| App of terme * terme
| Lam of variable * terme
```

Un terme du λ-calcul est donc un type ML composé, avec les constructeurs Var, App et Lam.

Par exemple, le terme $\lambda x.(xy)z$ est representé par la structure :

`App ((Lam ("x", (App ((Var "x"), (Var "y"))))), (Var "z"))`

C'est un peu verbeux. Voici cependant sa représentation sous la forme d'un arbre syntaxique. Le symbole @ représente ici l'application.



Pour dessiner cet arbre, nous utilisons le très bon package TIKZ qui permet facilement de représenter les arbres avec une syntaxe très simple.

```
\node{@}
child { node {$\lambda $}
    child { node {x} }
    child { node {@}
        child { node {x} }
        child { node {y} }
        }
    }
child { node {z} };
```

On implémente deux fonctions OCAML qui permettent d'afficher une expression de type λ-terme en code LaTeX ou en code TIKZ.

La fonction `varLibres` retourne les variables libres (ie. non liées) d'un λ-terme.

```
let rec varLibres lambdaTerm =
  match lambdaTerm with
  | Var x -> [ x ]
  | App (n, m) -> union (varLibres n) (varLibres m)
  | Lam (x, m) -> remove x (varLibres m)
```

Par exemple : $(\lambda x.yxw)(\lambda u.uv) \longmapsto y, w, v$

```
let exemple = App (Lam ("x", App (Var("y"), App (Var("x"),Var("w")))),
Lam ("u", App (Var ("u"), Var ("v")))) ;;
varLibres exemple ;;
- : variable list = ["y"; "w"; "v"]
```

Définition 2. *Un redex ou radical est un terme de la forme* $(\lambda x.M)N$

On a déjà distingué deux formes possible sur les λ-termes : les *abstractions* $\lambda x.M$ et les *applications* (MN). Un *redex* qui est de la forme $(\lambda x.M)N$ est la rencontre d'une abstraction et d'une application. Voici son implémentation.

ML	SCHEME
`(function x -> M) N`	`((lambda (x) M) N)`
`let x = N in M`	`(let ((x N)) M)`
`M where x = N`	

La dernière syntaxe `M where x = N` a disparu en OCAML. C'est dommage car elle est très élégante. Nous essayerons de la reprendre pour notre interprète maison MINIML.

Définition 3. *La β-réduction est une opération de substitution. Elle consiste à substituer dans le redex $(\lambda x.M)N$ les occurrences libres de x dans M par l'argument N. On la formalise par la notation suivante :*

$$((\lambda x.M)N) \rightarrow_\beta M[x \leftarrow N]$$

Nous pouvons la décrire par les quatre règles d'inférence ci-dessous :

$$(\textbf{redex}) : \frac{}{((\lambda x.M)N) \rightarrow M[x \leftarrow N]}$$

$$(\textbf{abstraction}) : \frac{M \rightarrow M_1}{\lambda x.M \rightarrow (\lambda x.M_1)} \quad (\textbf{1}) : \frac{M \rightarrow M_1}{(MN) \rightarrow (M_1 N)} \quad (\textbf{2}) : \frac{N \rightarrow N_1}{(MN) \rightarrow (MN_1)}$$

Pour l'implémentation, nous nous sommes appuyés sur le code de l'excellent livre *Programmer avec Scheme* de Jacques Chazarain [4]. Nous avons adapté son code SCHEME en OCAML. En comparant les deux versions, on s'aperçoit finalement que la version OCAML, même si un peu plus concise que la version SCHEME grâce l'utilisation du *pattern matching*, reste très proche de l'original SCHEME.

La fonction `substituer` permet de substituer la variable `var` par le terme `terme` dans l'expression `exp`.

```
let rec substituer exp var terme =
  match exp with
  | Var x -> if x = var then terme else exp
  | App (n, m) -> App ((substituer n var terme), (substituer m var terme))
  | Lam (x, m) -> (* pas d'occurence libre on en fait rien *)
      if not (mem var (varLibres exp))
      then exp
      else (* si capture on renome *)
      if mem x (varLibres terme)
      then
        (let newV = renomme x (varLibres terme) in
```

```
        let newCorps = substituer m x (Var newV)
        in Lam (newV, (substituer newCorps var terme)))
    else  Lam (x, (substituer m var terme))
```

Avant de substituer une variable par une autre, nous devons nous assurer qu'il n'y aura pas de phénomène de capture, ie. nous assurer qu'une variable libre ne deviendra pas liée, après substitution. Dans l'exemple suivant, la variable x qui était libre dans (zx) se retrouve capturée par la lambda.

$$\lambda x.(xy)[y \leftarrow (zx)] = \lambda x.(x(zx))$$

Pour éviter cela, il faut avant substitution opérer un renommage de la variable liée :

$$\lambda x_1.(x_1 y)[y \leftarrow (zx)] = \lambda x_1.(x_1(zx))$$

Ce renommage est appelé α-conversion. On dit que deux termes M et N sont équivalents modulo α. On écrira $M =_\alpha N$

```
(** renommer var *)
let renomme var listeVar =
  let rec renommeAux j =
    let varj = var ^ (string_of_int j)
    in if mem varj listeVar then renommeAux (j + 1) else varj
  in renommeAux 0
```

La fonction `reduc1Normale` réduit le terme en appliquant la stratégie de réduction normale, c'est-à-dire en commencant la réduction par le redex extèrieur, plus précisément le plus à gauche des extèrieurs.

```
let rec reduc1Normale terme =
   match terme with
   | Var x -> raise IRREDUCTIBLE
   | Lam (x, m) -> Lam (x, (reduc1Normale m))
   | App (n, m) ->
   if estRedex terme
    then betaReducRedex terme
    else
      try App ((reduc1Normale n), m)
      with IRREDUCTIBLE   -> App (n, (reduc1Normale m))
```

Enfin, nous avons une fonction `fullReduc` qui permet d'itérer l'opération de β-réduction jusqu'à trouver la forme normale, ou boucler s'il n'y a pas de forme formale. On lui impose donc maximum 1000 réductions. Elle prend en argument la méthode (ie. la stratégie de réduction) à utiliser.

```
let rec fullReduc terme methode  =
  let rec loop terme  iter =
  try
   let newterme = methode terme in
    if (newterme = terme || iter = 0) then newterme
```

```
    else loop newterme (iter - 1)
  with IRREDUCTIBLE -> terme
  in loop terme 1000

let betaNormal t = fullReduc t reduc1Normale
```

Théorème 1. *La réduction normale appliquée à un terme normalisable aboutit toujours à la forme irréductible du terme.*

Nous avons en plus le théorème suivant (plus précisément son corollaire) qui nous assure que toutes les réductions d'un λ-terme (qui terminent) aboutissent au même terme irréductible.

Théorème 2. *Théorème de Church-Rosser : la β-réduction est confluente.*

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dl, "*"'] \arrow[dr, "*"] & \\
M_1 \arrow[dr, dotted, "*"'] & & M_2 \arrow[dl, dotted, "*"] \\
& M' &
\end{tikzcd}$$

si $M \xrightarrow{*}_\beta M_1$ et $M \xrightarrow{*}_\beta M_2$ alors $\exists\, M'$ tel que $M_1 \xrightarrow{*}_\beta M'$ et $M_2 \xrightarrow{*}_\beta M'$

Théorème 3. *Corollaire du théorème de Church-Rosser*
Si M est normalisable, il existe un unique terme normal, noté $\overline{M}$ tel que $M \xrightarrow{*}_\beta \overline{M}$

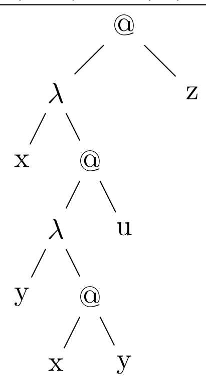
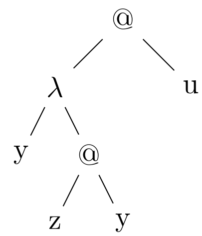
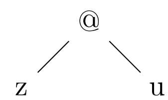
Un corollaire ne devrait pas nécessiter de preuve car supposée évidente. La voici cependant :

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dl, "*"'] \arrow[dr, "*"] & \\
M_1 \arrow[dr, dotted, "* \, ="'] \arrow[rr, phantom, "="] & & M_2 \arrow[dl, dotted, "= \, *"] \\
& M3 &
\end{tikzcd}$$

Si M est normalisable, alors il existe M_1 normal tel que $M \xrightarrow{*}_\beta M_1$; si $M \xrightarrow{*}_\beta M_2$ avec M_2 normal, alors par confluence il existe M_3 tel que $M1 \xrightarrow{*}_\beta M_3$ et $M2 \xrightarrow{*}_\beta M_3$. Or M_1 et M_2 sont normaux donc $M_1 = M_3$ et $M_2 = M_3$ donc $M_1 = M_2$.

```
let t1 = App (Lam ("x",App (Lam ("y", App (Var ("x"), Var ("y"))),Var ("u"))), Var ("z")) ;;
# fullReduc t1 ;;
--> ((lambda x . ((lambda y . (xy))u))z)
--> ((lambda y . (zy))u)
--> (zu)
- : unit -> unit = <fun>
```

$$(\lambda x.(\lambda y.xy)u)z \rightarrow_\beta (\lambda y.zy)u \rightarrow_\beta (zu)$$

$(\lambda x.(\lambda y.xy)u)z$	$(\lambda y.zy)u$	(zu)
		

Voici un exemple de terme qui ne termine pas et qui enfle.

$$(\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx) \to_\beta (\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx) \to_\beta (\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx) \to_\beta \dots$$

Nous pouvons programmer facilement en OCAML le terme $\Omega \equiv \Delta\Delta \equiv (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$ qui n'a pas de forme normale.

```
type terme = | Lam : (terme -> terme) -> terme ;;
let app t1 t2 = match t1 with | Lam f -> f t2 ;;
let delta = Lam (fun x -> (app x x)) in app delta delta ;;
```

2.3 Démonstration de la confluence du λ-calcul

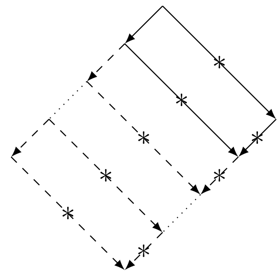
Comment prouver que le λ-calcul est bien confluent ? C'est-à-dire que pour tout terme M, si $M \twoheadrightarrow M_1$ et $M \twoheadrightarrow M_2$, alors il existe M_3 tel que $M_1 \twoheadrightarrow M_3$ et $M_2 \twoheadrightarrow M_3$.

La démonstration pose quelques difficultés techniques.

1. Il est difficile de raisonner par cas sur une relation $\twoheadrightarrow$ qui est la cloture transitive et réflexive de la réduction en une étape $\to$
2. La réduction en une étape $\to$ n'a pas la propriété du diamant. Nous la rappelons : pour tout terme M, si $M \to M_1$ et $M \to M_2$, alors il existe M_3 tel que $M_1 \to M_3$ et $M_2 \to M_3$.

   En effet, soit R un redex qui se reduit en R', le terme $(\lambda x.xx)R \to RR$ ou bien $(\lambda x.xx)R \to (\lambda x.xx)R'$. Il faudra une ou deux étapes pour arriver à $R'R'$.
3. On démontre facilement (par étude de cas sur la structure du λ-terme) la faible confluence de la relation β, ç-à-d si $M \to M_1$ et $M \to M_2$, alors il existe M_3 tel que $M_1 \twoheadrightarrow M_3$ et $M_2 \twoheadrightarrow M_3$. Cependant la confluence faible n'implique pas la confluence si la relation n'est pas noetherienne. C'est le cas du lambda calcul qui n'est pas fortement normalisant... Considérons $\Omega \equiv (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$, nous avons une chaîne de réduction infinie $\Omega \to \Omega \to \dots$
4. Cependant, nous pourrons démontrer plus facilement la propriété du parallélogramme : pour tout terme M, si $M \to M_1$ et $M \twoheadrightarrow M_2$, alors il existe M_3 tel que $M_1 \twoheadrightarrow M_3$ et $M_2 \twoheadrightarrow M_3$.

   Cette propriété du parallélogramme qui semble plus faible que la confluence lui est en fait équivalente. Cela s'explique par le diagramme suivant :



5. L'idée de la démonstration est simple : supposons $M \stackrel{\Delta}{\to} M_1$ où Δ est un redex de M. Si dans la réduction $M \twoheadrightarrow M_2$, on garde la trace de ce qui se passe sur Δ, alors en réduisant tous les résidus de M_2, on obtiendra M_3.

2.3.1 La restriction Λ' du λ-calcul

Pour tracer les redex uniquement à réduire, on introduit Λ', une restriction du λ-calcul.

Λ' est définie de manière inductive comme ci-dessous comme le λ-calcul avec en addition l'expression $((\lambda_i x.M)N)$ pour $i \in \mathbb{N}$ Ainsi, nous marquons par un indice i le redex que nous voulons tracer. Nous définissons également la réduction β' qui contient la réduction β et y ajoute $(\lambda_i x.M)N \to M[x := N]$

Enfin, nous ajoutons la fonction ϕ qui réduit uniquement les redex indicés, et non les autres.

$$\phi((\lambda_i x.P)Q) \equiv \phi(P)[x := \phi(Q)]$$

Nous utilisons les notations $M \xrightarrow{||} N$ et $M \xrightarrow{\phi} N$

Le pouvoir réducteur de β' est le même que β. En outre, on a la propriété suivante : si $M \stackrel{\beta'}{\twoheadrightarrow} N$, alors $\phi(M) \xrightarrow{\beta} \phi(N)$

2.3.2 La démonstration

Nous présentons ici la démonstration détaillée dans [3].

1. Hypothèses : $M \stackrel{\beta}{\twoheadrightarrow} N$ et $M \stackrel{\beta}{\to} M'$
2. Cherchons à prouver qu'il existe N' tel que $N \stackrel{\beta}{\twoheadrightarrow} N'$ et $M' \stackrel{\beta}{\twoheadrightarrow} N'$
3. M' est le résultat de la contraction du redex Δ dans M. Soit $\tilde{M} \in \Lambda'$ obtenu de M en indexant Δ. Alors, $\tilde{M} \stackrel{||}{\to} M$ et $\tilde{M} \stackrel{\phi}{\to} M'$
4. Nous obtenons, l'existence d'un $\tilde{N}$ par $\tilde{M} \stackrel{\beta'}{\twoheadrightarrow} \tilde{N}$
5. Nous obtenons aussi l'existence d'un N' tel que $\tilde{N} \stackrel{\phi}{\twoheadrightarrow} N'$ et $N \stackrel{\beta}{\twoheadrightarrow} N'$
6. Nous avons de même $M' \stackrel{\beta}{\twoheadrightarrow} N'$
7. Nous avons bien trouvé notre terme confluent N' $\square$

2.3.3 Un exemple

1. Soit $M \equiv (\lambda x.xx)((\lambda y.z)w)$, nous avons $M \xrightarrow{\beta} N' \equiv (\lambda x.xx)z$ et $M \xrightarrow{\beta} N \equiv ((\lambda y.z)w)((\lambda y.z)w)$
2. Cherchons N' tel que $N \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} N'$ et $M' \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} N'$
3. Soit le redex Δ de M tel que $\Delta \equiv ((\lambda y.z)w)$, alors $\tilde{M} \equiv (\lambda x.xx)((\lambda_1 y.z)w)$ Nous avons $\tilde{M} \xrightarrow{\phi} M' \equiv (\lambda x.xx)z$
4. $\tilde{N}$ est obtenu de la même manière que N, mais en marquant les résidus de Δ : $\tilde{N} \equiv ((\lambda_1 y.z)w)((\lambda_1 y.z)w)$
5. Nous réduisons maintenant les résidus de $\tilde{N}$ pour obtenir $\tilde{N} \overset{\phi}{\twoheadrightarrow} zz$
   Aussi, nous avons bien également $N \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} zz$
6. Nous avons également $M' \equiv (\lambda x.xx)z \xrightarrow{\beta} zz$
7. Ainsi $N' \equiv zz$

2.3.4 La β-réduction parallèle

Une autre méthode de démonstration de la confluence repose sur l'introduction d'une nouvelle relation $\beta_{||}$. Cette relation va permettre la réduction simultanée de plusieurs redex du λ-terme.

Définition 4. *La $\beta_{||}$ réduction repose sur les 4 règles suivantes :*

1. $x \Rightarrow_\beta x$
2. $\lambda x.M \Rightarrow_\beta \lambda x.M', si\ M \Rightarrow_\beta M'$
3. $MN \Rightarrow_\beta M'N',\ si\ M \Rightarrow_\beta M'\ et\ N \Rightarrow_\beta N'$
4. $(\lambda x.M)N \Rightarrow_\beta M'[x := N'],\ si\ M \Rightarrow_\beta M'\ et\ N \Rightarrow_\beta N'$

On peut démontrer par induction que cette relation $\beta_{||}$ respecte la propriété du diamant : si $M \Rightarrow M_1, M_2$, alors $\exists N$ tel que $M_1, M_2 \Rightarrow N$.

Cependant, nous allons encore plus simplement montrer qu'il existe un M^* tel que si $M \Rightarrow N \forall N$, alors $N \Rightarrow M^*$. Ce M^* sera indépendant de N. L'idée est que le terme M^* sera obtenu en réduisant simultanément tous les redex présents dans M.

Soit la fonction $\mathcal{G}$, tel que

$$\mathcal{G}(x) = x \tag{2.1}$$
$$\mathcal{G}(\lambda x.M) = \lambda x.(\mathcal{G}(M)) \tag{2.2}$$
$$\mathcal{G}(MN) = \mathcal{G}(M)\mathcal{G}(N),\ si\ M \neq \lambda x.M_1 \tag{2.3}$$
$$\mathcal{G}((\lambda x.M)N) = \mathcal{G}(M)[x := \mathcal{G}(N)] \tag{2.4}$$

Nous pouvons montrer que si $M \Rightarrow_\beta N, \forall N$, alors $N \Rightarrow_\beta \mathcal{G}(M)$. Par induction sur la relation $M \Rightarrow_\beta N$:

1. si $M \equiv x$, alors $N \equiv x \equiv \mathcal{G}(x)$
2. si $M \equiv \lambda x.M_1$, alors $N \equiv \lambda x.N_1$, avec $M_1 \Rightarrow_\beta N_1$. Par récurrence, $M_1 \Rightarrow_\beta \mathcal{G}(M_1)$, donc $M \Rightarrow_\beta \lambda x.\mathcal{G}(M)_1 \equiv \mathcal{G}(\mathcal{M})$

3. si $M \equiv (M_1 M_2) \Rightarrow_\beta N$, alors $N \equiv N_1 N_2$ avec $M_1 \Rightarrow_\beta N_1$ et $M_2 \Rightarrow_\beta N_2$, alors nous avons $N_1 N_2 \Rightarrow_\beta \mathcal{G}(N_1)\mathcal{G}(N_2) \equiv \mathcal{G}(M)$
4. si $M \equiv ((\lambda x.M_1)M_2) \Rightarrow_\beta N$, alors 2 sous-cas à considérer :
   si $N \equiv (\lambda x.N_1)N_2$, alors $N \Rightarrow_\beta \mathcal{G}(M_1)[x := \mathcal{G}(M_2)] \equiv \mathcal{G}(M)$
   si $N \equiv N_1[x := N_2]$, alors $N \Rightarrow_\beta \mathcal{G}(M_1)[x := \mathcal{G}(M_2)] \equiv \mathcal{G}(M)$

2.4 La β-réduction faible avec appel par valeur

Dans un langage fonctionnel comme SCHEME ou ML, il est important de noter que contrairement au λ-calcul, le corps de la lambda n'est pas évalué. On parle de β-réduction faible. Autrement dit, la règle suivante n'est pas utilisée :

$$(\textbf{abstraction}) : \frac{M \to M_1}{\lambda x.M \to (\lambda x.M_1)}$$

Nous pourrons utiliser cette absence d'évaluation du corps des lambda expressions pour geler l'évaluation de nos expressions : `(delay exp) = (lambda () exp)`

L'appel par valeur signifie que les arguments sont évalué en premier. Les règles d'inférence appliquées sont donc dans cet ordre :

$$(\mathbf{1}) : \frac{N \to N_1}{(MN) \to (MN_1)} \quad (\mathbf{2}) : \frac{M \to M_1}{(MN) \to (M_1 N)} \quad (\mathbf{3}) : \frac{}{((\lambda x.M)N) \to M[x \leftarrow N]}$$

Voici la fonction ML qui implémente cet ordre :

```
let rec reduc1Valeur terme =
  match terme with
  | Var x -> raise IRREDUCTIBLE
  | Lam (x, m) -> raise IRREDUCTIBLE
  | App (n, m) ->
      (try App (n, (reduc1Valeur m))
       with
       | IRREDUCTIBLE ->
           (try App ((reduc1Valeur n), m)
            with
            | IRREDUCTIBLE ->
                (try betaReducRedex terme
                 with | NOTREDEX -> raise IRREDUCTIBLE)))
```

Par exemple, nous aurons les réductions successives suivantes :

— réduction normale, qui aboutit toujours à la forme irréductibre

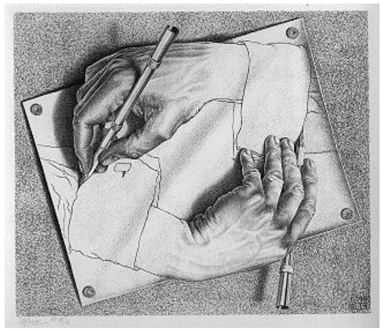
$$(\lambda x.y)((\lambda x.xx)(\lambda x.xx)) \to_\beta y$$

— réduction par valeur

$$\begin{array}{rcl} (\lambda x.y)((\lambda x.xx)(\lambda x.xx)) & \to_\beta & (\lambda x.y)((\lambda x.xx)(\lambda x.xx)) \\ & \to_\beta & (\lambda x.y)((\lambda x.xx)(\lambda x.xx)) \\ & \to_\beta & (\lambda x.y)((\lambda x.xx)(\lambda x.xx))) \\ & \to_\beta & \dots \end{array}$$

2.5 Récursivité et points fixes

What else is a loop but a way of representing an endless process in a finite way ? [10]



$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}$

2.5.1 Le point fixe du λ-calcul

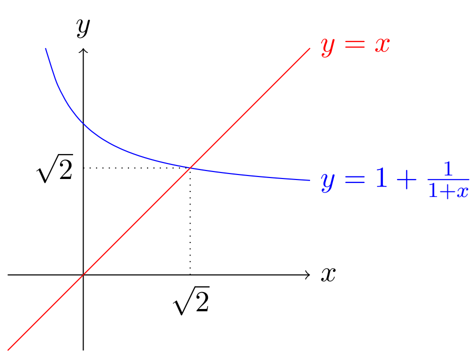
En analyse, le point fixe d'une fonction f est sa valeur x telle que $f(x) = x$

Cela permet de définir x en fonction de lui-même.

Cette simple expression $x = f(x)$ est finalement très étrange et déroutante. C'est la force de la récursivité : $x = f(f(f(f(f(f \ldots (x) \ldots))))))$

Un exemple est la valeur $\sqrt{2}$ exprimée sous forme d'une fraction continue, expression trouvée je crois par Euler. Je la décris ci-dessous pour le plaisir d'écrire (et lire) de belles formules mathématiques en LaTeX[15]

$$\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} - 1 = 1 + \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$



$$\boxed{\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}$$

En posant $f(x) = 1 + \frac{1}{1+x}$, la résolution de l'équation $x = f(x)$ nous permet de calculer la valeur de $\sqrt{2}$. Nous utilisons aussi le fait que $\sqrt{2}$ est un point fixe attractif de notre fonction f. C'est-à-dire qu'il existe un *voisinage* de $\sqrt{2}$ tel que la suite $x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \ldots$ converge vers $\sqrt{2}$

En OCAML, la fonction qui itère cette fraction continue peut être codée comme suit. Nous partons ici de $x_0 = 1$. La fraction continue converge très rapidement.

```
let rec square2 iter =
  if (iter = 1) then 1.
  else  1. +. ( 1. /. ( 1. +. square2 (iter - 1)));;
val square2 : int -> float = <fun>
```

```
# square2 30 ;;
- : float = 1.4142135623730951

# sqrt 2. ;;
- : float = 1.41421356237309512.
```

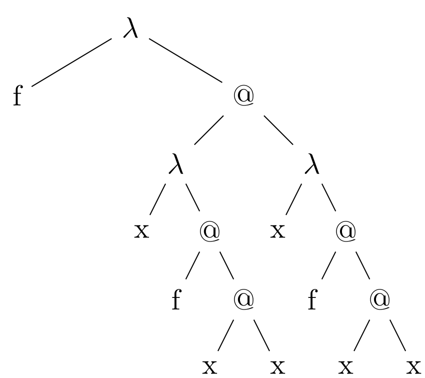
En λ-calcul, de manière très surprenante, il s'avère que tout terme a un point fixe ! Nous avons un combinateur [1] qui nous permet de calculer le point fixe de n'importe quel λ-terme. Ce combinateur s'appelle Y . Il est défini par

$$Y = \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$$

Ce n'est pas le seul combinateur de point fixe. Voici un autre dû à Turing :

$$\Theta = (\lambda x.\lambda y.(y(xxy)))(\lambda x.\lambda y.(y(xxy)))$$

Voici l'arbre syntaxique de Y :



Quel que soit le terme M, nous aurons $(YM) =_\beta M(YM)$

Essayons ceci avec notre notre fonction `fullReduc` en CAML. Réduisons YM :

$$\begin{aligned}
&\lambda f.(\lambda x.(f(xx)))(\lambda x.(f(xx)))M \\
&\to_\beta (\lambda x.(M(xx)))(\lambda x.(M(xx))) \\
&\to_\beta (M(\lambda x.(M(xx)))(\lambda x.(M(xx)))) \triangleright [2] \\
&\to_\beta (MM(\lambda x.(M(xx)))(\lambda x.(M(xx)))) \\
&\to_\beta (MMM(\lambda x.(M(xx)))(\lambda x.(M(xx)))) \\
&\to_\beta (MMMM(\lambda x.(M(xx)))(\lambda x.(M(xx)))) \\
&\to_\beta \ldots
\end{aligned}$$

La deuxième β-réduction est bien égale à $M(YM)$ Nous voyons ici le mécanisme d'appel récursif à M.

Détaillons cela avec une fonction exprimée en pseudo-code d'un λ-calcul étendu. Nous nous inspirons pour cela du très bon article de wikipedia https://en.wikipedia.org/wiki/Lambda_calculus.

1. Un combinateur est un λ-terme comprenant uniquement des variables liées

Soit $M = (\lambda f \lambda n.(if\ n = 0\ then\ 1\ else\ n * f(n-1)))$

$$\begin{array}{lll}
(YM)\ 4 & \to_\beta & M(YM)\ 4 \\
 & \to_\beta & (\lambda f \lambda n.(if\ n = 0\ then\ 1\ else\ n * f(n-1)))(YM)\ 4 \\
 & \to_\beta & (\lambda n.(if\ n = 0\ then\ 1\ else\ n * ((YM)(n-1))))\ 4 \\
 & \to_\beta & (if\ 4 = 0\ then\ 1\ else\ 4 * ((YM)\ (4-1))) \\
 & \to_\beta & 4 * ((YM)\ 3) \\
 & \to_\beta & 4 * (M(YM)\ 3) \\
 & \vdots & \\
 & \to_\beta & 4 * 3 * 2 * 1
\end{array}$$

Ici encore, nous avons utilisé la stratégie de β-réduction normale. Mais avec une réduction par valeur, le terme en argument (YM) aura été réduit indéfiniment en $M(M(M(M(M \ldots YM) \ldots)))$, sans réduire le redex Mx

En utilisant notre programme OCAML, voyons cela avec en prenant $M = \lambda a.(\lambda b.b)$:

```
# betaNormal ym ;;
```

$$\begin{array}{lll}
 & (\lambda f.(\lambda x.(f(xx))\lambda x.(f(xx)))\lambda a.\lambda b.b) & \\
\to_\beta & (\lambda x.(\lambda a.\lambda b.b(xx))\lambda x.(\lambda a.\lambda b.b(xx))) & \triangleright[2] \\
\to_\beta & (\lambda a.\lambda b.b(\lambda x.(\lambda a.\lambda b.b(xx))\lambda x.(\lambda a.\lambda b.b(xx)))) & \triangleright[3] \\
\to_\beta & \lambda b.b &
\end{array}$$

```
# betaValeur ym ;;
```

$$\begin{array}{lll}
 & (\lambda f.(\lambda x.(f(xx))\lambda x.(f(xx)))\lambda a.\lambda b.b) & \\
\to_\beta & (\lambda x.(\lambda a.\lambda b.b(xx))\lambda x.(\lambda a.\lambda b.b(xx))) & \triangleright[2] \\
\to_\beta & (\lambda a.\lambda b.b(\lambda x.(\lambda a.\lambda b.b(xx))\lambda x.(\lambda a.\lambda b.b(xx)))) & \triangleright[3] \\
\to_\beta & (\lambda a.\lambda b.b(\lambda a.\lambda b.b(\lambda x.(\lambda a.\lambda b.b(xx))\lambda x.(\lambda a.\lambda b.b(xx))))) & \\
\to_\beta & (\lambda a.\lambda b.b(\lambda a.\lambda b.b(\lambda a.\lambda b.b(\lambda x.(\lambda a.\lambda b.b(xx))\lambda x.(\lambda a.\lambda b.b(xx)))))) & \\
\to_\beta & (\lambda a.\lambda b.b(\lambda a.\lambda b.b(\lambda a.\lambda b.b(\lambda a.\lambda b.b(\lambda x.(\lambda a.\lambda b.b(xx))\lambda x.(\lambda a.\lambda b.b(xx))))))) &
\end{array}$$

Les étapes $\triangleright[2]$ et $\triangleright[3]$ sont bien les mêmes sur les deux stratégies. Puis la β-réduction par valeur va continuer à réduire l'argument (YM), là où la β-réduction normale va d'abord réduire le redex Mx

Avec la réduction par valeur, il nous faut donc utiliser un autre combinateur de point fixe [2] que nous appelerons Z

$$Z = \lambda f.(\lambda x.f(\lambda v.xxv))(\lambda x.f(\lambda v.xxv))$$

On constate que Z est η-équivalent à Y. Nous rappelons la définition suivante :

Définition 5. *Les termes $(\lambda x.Mx)$ et M sont η-équivalents. On écrira $(\lambda x.Mx) =_\eta M$*

En Coq, le lemme suivant se démontre par l'utilisation simple de la tactique `reflexivity` *car l'expression* `fun x => f x` *se réduit en* `f`*.*

```
Lemma eta : forall (A B:Type) (f:A->B), f = fun x => f x.
reflexivity.
Qed.
```

2. Nous insistons là-dessus car nous rappelons que les interprètes MiniScheme et MiniML que nous implémenterons utiliseront la β-réduction faible par valeur.

Ou de manière similaire en AGDA *:*

```
eta : (A B : Set) -> (f : A -> B) -> (λ x -> f x) \equiv f
eta A B f = refl
```

Appliquons à nouveau notre exemple avec ce combinateur Z appliqué à $M = \lambda a.\lambda b.b$:
`# betaValeur zm ;;`

$$
\begin{array}{ll}
 & ((\lambda f.((\lambda x.(f(\lambda v.((xx)v))))(\lambda x.(f(\lambda v.((xx)v))))))(\lambda a.(\lambda b.b))) \\
\to_\beta & ((\lambda x.((\lambda a.(\lambda b.b))(\lambda v.((xx)v))))(\lambda x.((\lambda a.(\lambda b.b))(\lambda v.((xx)v))))) \\
\to_\beta & ((\lambda a.(\lambda b.b))(\lambda v.(((\lambda x.((\lambda a.(\lambda b.b))(\lambda v.((xx)v))))(\lambda x.((\lambda a.(\lambda b.b))(\lambda v.((xx)v)))))v))) \\
\to_\beta & (\lambda b.b)
\end{array}
$$

Nous avons le même résultat et les même étapes de réduction avec `betaNormal zm ;;`
En SCHEME, nous pourrons implémenter ce combinateur Z :

```
(define Z
 (lambda(f)
   (lambda (x) (lambda(v) ((f (x x) v))))
   (lambda (x) (lambda(v) ((f (x x) v))))))
```

En ML, le typage ne nous permettra pas de coder un combinateur comme Y ou Z.
Essayons cependant d'écrire :

```
# let rec fix f = f (fix f) ;;
val fix : ('a -> 'a) -> 'a = <fun>

let factabs fact = function
  | 0 -> 1
  | n -> n * fact (n - 1) ;;

val factabs : (int -> int) -> int -> int = <fun>
# (fix factabs) 5 ;;
Stack overflow during evaluation (looping recursion?).
```

ML est bien un langage *strict* : les arguments d'une fonction sont évalués en premier comme on l'a vu dans la β-réduction faible avec appel par valeur.

Pour éviter la boucle infinie $f(f \ldots (f(fixf)) \ldots)$, une astuce que j'ai pu lire est d'introduire une variable supplémentaire :

```
# let rec fix f x = f (fix f) x ;;
val fix : (('a -> 'b) -> 'a -> 'b) -> 'a -> 'b = <fun>
# (fix factabs) 5 ;;
- : int = 120
```

Ici aussi, le mécanisme de la "η-expansion" est utilisé. Reproduisons cela en SCHEME :

```
(define factabs
  (lambda (f)
    (lambda (n)
      (if (eq? n 0)
          1
          (* n (f (- n 1)))))))

(define fix
  (lambda (f) (lambda (x) ((f (fix f)) x))))

((fix factabs) 5)
=> 120
```

2.5.2 La diagonale de Cantor

A la différence du λ-calcul où tout terme a un point fixe, la recherche de point fixe peut amener à des situations paradoxales. Voyons cela avec le théorème de Cantor.

Ce théorème nous dit qu'il n'y a pas de fonction surjective $f : \mathbb{N} \to (\mathbb{N} \to \mathbb{B})$. Autrement dit, le cardinal des parties de $\mathbb{N}$ est strictement plus grand que le cardinal de $\mathbb{N}$. Démontrons cela.
Soient $X_0, X_1, \ldots, X_n$ les parties de $\mathbb{N}$
Soit $f(m, n) = true$ si $m \in X_n$ et $false$ sinon.
Soit $g : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ la fonction sans point fixe telle que $g(false) = true$ et $g(true) = false$.
Considérons la fonction $h : \mathbb{N} \to \mathbb{B}$ telle que $h(x) = g(f(x, x))$ Supposons f surjective donc $\exists a, f(a) = h \Leftrightarrow f(a, a) = h(a) = g(f(a, a))$ Cela est impossible car g n'admet pas de point fixe par définition.

Ainsi f n'est pas surjective. $\square$

Voici la représentation matricielle de la fonction $f(x, y)$. Les valeurs $true$ et $false$ sont représentées par 1 et 0. La colonne est la valeur de x et la ligne est la valeur de y.

$$
\begin{array}{cc}
\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \end{matrix} & \\
\begin{bmatrix}
\mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\
0 & \mathbf{0} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
1 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\
1 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \dots \\
 & & & & & \vdots & & & \ddots
\end{bmatrix} & \begin{matrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ \end{matrix}
\end{array}
\Rightarrow_{g(f(x,x))}
\begin{array}{cc}
\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \end{matrix} & \\
\begin{bmatrix}
\mathbf{0} & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\
0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
1 & 0 & \mathbf{0} & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\
1 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 1 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \mathbf{0} & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \dots \\
 & & & & & \vdots & & & \ddots
\end{bmatrix} & \begin{matrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ \end{matrix}
\end{array}
$$

Voici la démonstration formelle en COQ.

```
Require Import Bool.
```

```
Section Cantor.

Lemma negb_prop : ∀ a :bool, negb a =a → False.
Proof.
    intros.
    unfold negb in H.
    induction a. inversion H. inversion H.
Qed.

Definition surjective {X :Type} (f : nat → X) : Prop := ∀ y, ∃ x, f x = y.

Theorem cantor : ¬ ∃ f : nat → nat → bool, surjective f.
Proof.
    intros [f SURJ].
    pose (g := fun b ⇒ negb b ).
   soit h la diagonalisation négative de la mort
    pose (h := fun x ⇒ g (f x x)).
   on applique l'hypothèse de surjection de f sur h
    destruct (SURJ h) as [x B].
    assert (C : h x = f x x).
    {
        rewrite B. reflexivity.
    }
    unfold h in C.
    unfold g in C.
    apply negb_prop in C.
    assumption.
Qed.

End Cantor.
```

Nous pourrons nous reférer à l'ouvrage de Jean-Yves Girard, *Le Point Aveugle* [8]

En AGDA, qui ne possède pas un langage de tactiques permettant de construire le terme, nous devons nous-même construire la preuve. Mais cela peut se faire très élégamment grâce à la belle syntaxe procurée par ce langage.[18, Program = Proof]

```
cong-app : \forall {A : Set } {B : A → Set } {f g : (x : A) → B x} →
           f \equiv g → (x : A) → f x \equiv g x
cong-app refl x = refl

surj : {A B : Set} → (f : A → B) → Set
surj  {A} {B} f =  (b : B) → Σ A (λ a → (f a)  b)

g : Bool → Bool
g false = true
g true = false

lemme : (a : Bool) → a \equiv g a → False
lemme true = λ ()
```

```
lemme false = λ ()

cantor : (f : Nat → Nat → Bool) → surj f → False
cantor f sur = fxxhx x (cong-app hyp x)
  where
  fxxhx : (x : Nat) → f x x \equiv g (f x x) → False
  fxxhx x = lemme (f x x)
  h : Nat → Bool
  h x = g (f x x) -- h la diagonalisation négative de la mort
  x : Nat
  x = fst (sur h)
  hyp : f x \equiv h     -- on applique l'hypothèse de la surjection sur h
                       -- donc il existe un x tq f x = h
  hyp = snd (sur h)
```

La construction ci-dessus appliquée sur le λ-calcul permet de mettre en évidence de manière constructive que tout λ-terme a un point fixe. Considérons la fonction $f \equiv \lambda xy.xy$, l'application xy dénote $x \in y$. Soit g une fonction quelconque dont on recherche un point fixe. Considérons $h \equiv \lambda x.g(f(xx)) = \lambda x.g(xx)$, alors hh est le point fixe recherché car :

$$hh = (\lambda x.g(xx))(\lambda x.g(xx)) = g(\lambda x.g(xx)(\lambda x.g(xx))) = g(hh)$$

2.5.3 Le point fixe logique et le théorème d'incomplétude de Gödel

Il y a une similitude forte entre le point fixe du λ-calcul et le point fixe *logique*. Voyons cela.

Nous ne décrirons pas le mécanisme de codage. Nous utiliserons les fonctions suivantes :

$\ulcorner t \urcorner : terme \rightarrow terme$	la fonction qui donne le code syntaxique d'un terme
$\#t : terme \rightarrow \mathbb{N}$	la fonction qui donne le code numérique d'un terme
$\overline{n} : \mathbb{N} \rightarrow terme$	la fonction qui transforme un code numérique en code syntaxique

On notera ainsi $\ulcorner t \urcorner$, le terme $\overline{n}$ si $\#t = n$.

Théorème 4 (Le point fixe logique)**.** *Soit T une théorie permettant de définir toutes les fonctions récursives. Soit ψ une formule quelconque avec une variable libre. Il existe une proposition ϕ telle que*

$$T \vdash \phi \leftrightarrow \psi(\ulcorner \phi \urcorner)$$

Démonstration. Soit la fonction diagonale $d : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par : $d(n) = \#\chi_n(\overline{n})$ où χ_n est telle que $\#\chi = n$. Ainsi d est une fonction récursive et donc définissable dans notre théorie T. On a donc :

$$T \vdash \forall y(\delta(\overline{n}, y)) \leftrightarrow y = \overline{d(n)}$$

Soit la formule α telle que $\alpha(x) = \exists y(\delta(x, y) \wedge \psi(y))$, alors notre point fixe est $\phi = \alpha(\ulcorner \alpha \urcorner)$
En effet :

$$
\begin{aligned}
T \vdash \phi &\leftrightarrow \alpha(\ulcorner \alpha \urcorner) \\
&\leftrightarrow \exists y\ (\delta(\ulcorner \alpha \urcorner, y) \wedge \psi(y)) \\
&\leftrightarrow \exists y\ (y = \ulcorner \alpha(\ulcorner \alpha \urcorner) \urcorner \wedge \psi(y)) \\
&\leftrightarrow \psi(\ulcorner \alpha(\ulcorner \alpha \urcorner) \urcorner) \\
&\leftrightarrow \psi(\ulcorner \phi \urcorner)
\end{aligned}
$$

□

La similitude avec le point fixe du λ-calcul est directe :

$$
\begin{array}{c|c}
\phi \leftrightarrow \psi(\ulcorner \phi \urcorner) & p = fp \\
\delta(x, y) & \lambda x.xx \\
\exists y(\delta(x, y) \wedge \psi(y)) & \lambda x.f(xx) \\
\phi \equiv \alpha(\ulcorner \alpha \urcorner) & p \equiv (\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))
\end{array}
$$

Théorème 5 (Indécidabilité de l'arithmétique)**.** *Soit T une théorique consistance telle que toutes les fonctions récursives y soient T-définissables, alors T est essentiellement indécidable.*

Démonstration. Soit la formule $th(\ulcorner x \urcorner)$ telle que :

$$T \vdash th(\ulcorner x \urcorner) \text{ ssi } x \text{ est un théorème de } T$$
$$T \vdash \neg th(\ulcorner x \urcorner) \text{ ssi } x \text{ n'est pas un théorème de } T$$

Reprenons le thèorème du point fixe : $T \vdash \phi \leftrightarrow \psi(\ulcorner \phi \urcorner)$ et appliquons le à la fonction $\neg th$.

Nous avons alors l'existence d'un point fixe G tel que

$$T \vdash G \leftrightarrow \neg th(\ulcorner G \urcorner)$$

Nous avons la contradiction suivante : $T \vdash G$ ssi $T \vdash th(\ulcorner G \urcorner)$ par définition de th et $T \vdash G$ ssi $T \vdash \neg th(\ulcorner G \urcorner)$ par construction de G □

Théorème 6 (Gödel, incomplétude de l'arithmétique)**.** *Toute théorie consistante et telle que toutes les fonctions récursives y soient définissables est incomplète.*

2.5.4 L'indécidabilité de la β-conversion

Ce théorème repose encore sur l'existence d'un point fixe. Sa démonstration est ainsi toujours similaire au théorème d'incomplétude de Gödel ou au théorème de Rice.

Théorème 7 (point fixe du *lambda*-calcul)**.** *Pour tout λ-terme F, il existe un point fixe X tel que $F\ulcorner X \urcorner = X$*

Démonstration. Considérons les fonctions récursives App et Num telles que $App(\#M, \#N) = \#MN$ et $Num(n) = \#\ulcorner M \urcorner$. Et considérons les fonctions λ-équivalentes **App** et **Num**.

Alors, $\mathbf{App}\ulcorner M \urcorner \ulcorner N \urcorner = \ulcorner MN \urcorner$ et $\mathbf{Num}\ulcorner n \urcorner = \ulcorner\ulcorner n \urcorner\urcorner$

Soit $W \equiv \lambda x.F(\mathbf{App}\ x\ (\mathbf{Num}\ x))$, alors notre point fixe est $X \equiv W\ulcorner W \urcorner$

En effet,

$$\begin{aligned} X = W\ulcorner W \urcorner &= F(\mathbf{App}\ulcorner W \urcorner(\mathbf{Num}\ulcorner W \urcorner)) \\ &= F\ulcorner W\ulcorner W \urcorner\urcorner \\ &= F\ulcorner X \urcorner \end{aligned}$$

□

Définition 6 (Ensembles récursivement séparables)**.** *Deux ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont récursivement séparables ssi il existe un ensemble récursif $\mathcal{C}$ tel que $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ et $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \varnothing$*

Définition 7 (Clôture d'un ensemble de λ-termes par β-conversion)**.** *Soit Λ l'ensemble des λ-termes. Considérons $\mathcal{A} \subset \Lambda$, $\mathcal{A}$ est clos par égalité closed under equality si :*

$$\forall M, N \in \Lambda, (M \in \mathcal{A} \text{ et } M =_\beta N) \Rightarrow N \in \mathcal{A}$$

Théorème 8 (Indécidabilité de la β-conversion)**.** *Soient deux ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ clos par β-conversion, alors $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ne sont pas récursivement séparables.*

Démonstration. Soient $M_\mathcal{A} \in \mathcal{A}$ et $M_\mathcal{B} \in \mathcal{B}$. Supposons l'existence de $\mathcal{C}$, un ensemble récursif et tel que $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ et $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \varnothing$

Soit F la λ-fonction caractéristique de l'ensemble récursif $\mathcal{C}$, nous avons alors :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} \Rightarrow F\ulcorner M \urcorner = \ulcorner 0 \urcorner \\ M \notin \mathcal{C} \Rightarrow F\ulcorner M \urcorner = \ulcorner 1 \urcorner \end{aligned}$$

Définissons $G \equiv \lambda x.\text{si zero}(Fx) \text{ alors } M_\mathcal{B} \text{ sinon } M_\mathcal{A}$

D'après le théorème du point fixe, il existe X tel que $G\ulcorner X \urcorner = X$, nous avons alors la contradiction suivante :

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{C}, G\ulcorner X \urcorner = X = M_\mathcal{B} \Rightarrow X \notin \mathcal{C} \\ X \notin \mathcal{C}, G\ulcorner X \urcorner = X = M_\mathcal{A} \Rightarrow X \in \mathcal{C} \end{aligned}$$

□

2.6 Encoding. Les entiers *Church* et les booléens en λ-calcul

2.6.1 Les entiers *Church*

Les entiers peuvent être représenté de la manière suivante :

$$\begin{aligned} &0 \equiv \lambda f.\lambda x.x \\ &1 \equiv \lambda f.\lambda x.fx \\ &2 \equiv \lambda f.\lambda x.f(fx) \\ &3 \equiv \lambda f.\lambda x.f(f(fx)) \end{aligned}$$

La fonction successeur se définira $SUCC \equiv \lambda n.\lambda f.\lambda x.f(nfx)$ Avec notre représentation ML :
`Lam("n", Lam("f", Lam("x",App(Var "f", App(App(Var "n", Var "f"), Var "x")))))`
Exécutons avec la stratégie normale, puis avec la stratégie de réduction faible par valeur :
`# betaNormalPrint (App(succ, un)) ;;`

$$
\begin{array}{ll}
 & (\lambda n.\lambda f.\lambda x.(f((nf)x))\lambda f.\lambda x.(fx)) \\
\to_\beta & \lambda f.\lambda x.(f((\lambda f.\lambda x.(fx)f)x)) \\
\to_\beta & \lambda f.\lambda x.(f(\lambda x.(fx)x)) \\
\to_\beta & \lambda f.\lambda x.(f(fx)) \\
 & \textit{Exception} : \textit{IRREDUCTIBLE}.
\end{array}
$$

`# betaValeurPrint (App(succ, un)) ;;`

$$
\begin{array}{ll}
 & (\lambda n.\lambda f.\lambda x.(f((nf)x))\lambda f.\lambda x.(fx)) \\
\to_\beta & \lambda f.\lambda x.(f((\lambda f.\lambda x.(fx)f)x)) \\
 & \textit{Exception} : \textit{IRREDUCTIBLE}.
\end{array}
$$

Nous n'aboutissons pas au terme $\lambda f.\lambda x.(f(fx))$ avec la stratégie par valeur. Nous voyons que le corps de la lambda n'est pas évalué. Je suis cependant surpris car je pensais cette stratégie (même si appelée *faible*) parvenait à calculer la forme normale.

Nous pouvons écrire en OCAML la fonction qui convertit des entiers vers les terms *Church* :

```
let rec int2Church = function
  | 0 -> Lam("f", Lam("x", Var "x"))
  | n -> App(succ, int2Church (n-1))
```

`# betaNormal (int2Church 3) ;;`

$$
\begin{array}{ll}
 & (\lambda n.\lambda f.\lambda x.(f((nf)x))(\lambda n.\lambda f.\lambda x.(f((nf)x))(\lambda n.\lambda f.\lambda x.(f((nf)x))\lambda f.\lambda x.x))) \\
\to_\beta & \lambda f.\lambda x.(f(((\lambda n.\lambda f.\lambda x.(f((nf)x))(\lambda n.\lambda f.\lambda x.(f((nf)x))\lambda f.\lambda x.x))f)x)) \\
\to_\beta & \lambda f.\lambda x.(f((\lambda f.\lambda x.(f(((\lambda n.\lambda f.\lambda x.(f((nf)x))\lambda f.\lambda x.x)f)x))f)x)) \\
\to_\beta & \lambda f.\lambda x.(f(\lambda x.(f(((\lambda n.\lambda f.\lambda x.(f((nf)x))\lambda f.\lambda x.x)f)x))x)) \\
\to_\beta & \lambda f.\lambda x.(f(f(((\lambda n.\lambda f.\lambda x.(f((nf)x))\lambda f.\lambda x.x)f)x))) \\
\to_\beta & \lambda f.\lambda x.(f(f((\lambda f.\lambda x.(f((\lambda f.\lambda x.xf)x))f)x))) \\
\to_\beta & \lambda f.\lambda x.(f(f(\lambda x.(f((\lambda f.\lambda x.xf)x))x))) \\
\to_\beta & \lambda f.\lambda x.(f(f(f((\lambda f.\lambda x.xf)x)))) \\
\to_\beta & \lambda f.\lambda x.(f(f(fx))) \\
 & \textit{Exception} : \textit{IRREDUCTIBLE}.
\end{array}
$$

L'addition peut être exprimée par le combinateur $\lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.mf(nfx)x$

La multiplication peut être exprimée par le combinateur $\lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.m(nf)x$

Le prédecesseur peut être exprimé par le combinateur $\lambda n.\lambda f.\lambda x.n\ (\lambda g.\lambda h.h\ (g\ f))\ (\lambda u.x)\ (\lambda u.u)$

Après avoir défini les termes `succ` et `pred`, nous pouvons écrire les deux fonctions suivantes qui "jonglent" entre les entiers ML et les entiers Church.

```
let int2Church n =
  let rec aux = function
  | 0 -> Lam("f", Lam("x", Var "x"))
```

```
  | n -> App(succ, aux (n-1))
  in betaNormal (aux n)

let rec church2Int  terme =
  match terme with
  | Lam("f", Lam("x", Var "x")) -> 0
  | _ -> 1 + church2Int (betaNormal(App(pred, terme)))

# church2Int (int2Church 10);;
- : int = 10
```

Egalement, nous pouvons représenter directement en ML les entiers *Church* sous forme de fonctionnelles :

```
let zero f x = x
let un f x = f x
let deux f x = f (f x)

let succ n f x = f (n f x)
let add n m f x = n f (m f x)

let to_int n = n (function k -> k + 1) 0
let rec to_church = function  | 0 -> zero  | n -> succ (to_church (n-1))

#to_int (add deux (succ (to_church 5))) ;;
- : int = 8
```

2.6.2 Les booléens

Nous pourrons les représenter de la façon suivante. On y ajoute le prédicat IsZero.

$$
\begin{array}{ll}
\text{true} & \equiv \lambda a.\lambda b.a \\
\text{false} & \equiv \lambda a.\lambda b.b \\
\text{and} & \equiv \lambda p.\lambda q.p\ q\ p \\
\text{or} & \equiv \lambda p.\lambda q.p\ p\ q \\
\text{not} & \equiv \lambda p.p\ (\lambda a.\lambda b.b)\ (\lambda a.\lambda b.a) = \lambda p.p\,\text{false}\,\text{true} \\
\text{if} & \equiv \lambda p.\lambda a.\lambda b.p\ a\ b \\
\text{IsZero} & \equiv \lambda n.n\ (\lambda x.\,\text{false})\ \ \text{true}
\end{array}
$$

2.6.3 La fonction factorielle

Nous pouvons l'exprimer de manière assez simple. La difficulté est de manipuler toujours les applications avec un seul argument, en version *curryfiées*. Nous appliquons le combinateur Y associé à la stratégie de réduction normale. Attention à ne pas réduire telle quelle la fonction `fact`. La réduction serait infinie comme on l'a vu précedemment. Seul la présence d'un argument permet d'aboutir à la forme normale.

Cette forme normale constitue notre *valeur* (au sens d'un langage interprété).

```
let fact =
  App (y,
    (Lam ("f",
       (Lam ("n",
          (App ((App ((App (si, (App (isZero, (Var "n"))))), un)),
             (App ((App (mult, (Var "n"))),
                (App ((Var "f"), (App (pred, (Var "n")))))))))))))))

# church2Int (betaNormal (App(fact, int2Church 4)));;
- : int = 24
```

Nous n'afficherons pas les réductions ici. Le calcul de la factorielle de 3 nécessite 705 β-réductions. La factorielle de 5 en nécessite plus de 28000...

2.7 La notation de *de Bruijn*

What's in a name ? That which we call a rose
By any other name would smell as sweet.[22]
Citation reprise par Xavier Leroy dans son excellent cours au collège de France

Le mécanisme de capture d'une variable libre par une lambda, qui nous oblige à faire de manière fastidieuse du renommage ponctuel de variables, est dû au fait qu'il y a un partage possible entre les noms des variables libres et des variables liées.

Pour éviter cela, nous pouvons utiliser une autre représentation du λ-terme. Le principe est de nommer les variables liées par un indice indiquant la profondeur de leurs liens (ou autrement dit la hauteur de leurs liaisons).

L'arbre syntaxique sera alors défini par :

1. les feuilles qui correspondent à des variables libres ou liées, représentées par un indice
2. le noeud unaire λ
3. le noeud binaire @

```
type tbruijn =
  | Va of int
  | La of tbruijn
  | Ap of tbruijn * tbruijn
```

Soit le terme $M = \lambda x.x(\lambda y.yx)$, indiquons en exposant la hauteur de la liaison de chaque variable liée : $M = \lambda x.x^0(\lambda y.y^0x^1)$

Figure 2.1 – Représentation du terme $\lambda x.x(\lambda y.yx)$

```
   λ
   |
   @
  / \
 0   λ
     |
     @
    / \
   0   1
```

Pour les variables libres, nous pouvons aussi utiliser un indice pour les nommer. Soit un ensemble de variables libres $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ nous les nommerons en ajoutant à leur indice i la profondeur jusqu'à la racine. Les indices des variables libres seront donc toujours supérieur à ceux des variables liées sur leurs branches. Cependant, avec cette notation une même variable libre avec plusieurs occurences dans un terme pourra avoir des indices différents.

Nous avons maintenant une représentation *canonique* : deux termes sont α-équivalents si et seulement si leurs représentations en de de Bruijn sont égales.

Voici une fonction d'implémentation `t2b` transformant des termes en termes de de Bruijn.

```
let reste s = int_of_string(sub s 1 ((String.length s)-1)) ;;

let add_env var env =
  (var,0)::map (fun pp -> (fst(pp),(1 + snd(pp)))) env ;;

let t2b terme =
  let l = varLibres terme in
  let rec terme_to_bruijn t env hauteur =
  match t with
  | Var x -> if (mem x l) then Va((reste x) + hauteur) else Va(assoc x env)
  | App (n1, n2) -> Ap (terme_to_bruijn n1 env hauteur, terme_to_bruijn n2 env hauteur)
  | Lam (x, c) -> La (terme_to_bruijn c (add_env x env) (hauteur+1) )
  in terme_to_bruijn terme [] 0

let decalage d t =
  let rec aux p = function
  | Ap (t1,t2) -> Ap (aux p t1, aux p t2)
  | La (t) -> La (aux (p+1) t)
  | Va (i) when i<p -> Va(i)
  | Va(i) -> Va (i+d)
  in aux 0 t

let beta_b (La u) t =
  let rec aux p = function
  | Ap (u1,u2) -> Ap (aux p u1, aux p u2)
  | La (v) -> La (aux (p+1) v)
  | Va (i)  when i=p -> decalage p t (*on rend t décalé de la profondeur d'abstr p*)
```

```
  | Va (i)  when i<p -> Va (i) (*i est lié, on la rend tel quel *)
  | Va (i) -> Va (i-1) (* on décrèmente la variable libre car la betareduc supprime une lamdda
  in aux 0 u ;;

let rec normale_bruijn  = function
  | Va x -> raise IRREDUCTIBLE
  | La n -> La (normale_bruijn n)
  | Ap (La n, m) -> beta_b (La n) m
  | Ap (n,m) -> try Ap (normale_bruijn  n, m)
  with IRREDUCTIBLE -> Ap (n, normale_bruijn  m)

let rec reduc_bruijn t =
  try reduc_bruijn (normale_bruijn t)
  with IRREDUCTIBLE -> t
```

Représenter l'ensemble des variables (libres et liées) par un indice de profondeur rend le terme très peu lisible. La représentation la plus commode semble finalement être d'utiliser la notation de *de Bruijn* pour les variables liées et continuer à nommer les variables libres par des lettres.

Cela impose dans la définition inductive du terme de distinguer les variables libres des variables liées.

Par exemple en COQ :

```
Inductive terme : Set :=
  | bvar : nat -> terme
  | fvar : string -> terme
  | abs  : terme -> terme
  | app  : terme -> terme -> terme.
```

2.8 La normalisation par évaluation

Comment normaliser un terme du λ-calcul en utilisant le méchanisme d'évaluation du langage d'implémentation ? L'idée va être de refléter (*reflect*) le terme dans le langage d'implémentation, de l'évaluer, puis de le réifier *reify* en λ-calcul.

Chapitre 3

Le λ-calcul simplement typé et les Pure Type Systems

3.1 Le λ-calcul simplement typé

3.1.1 Présentation

Un terme comme $\lambda x.xx$ n'a pas de sens en mathématiques. Comment x peut être à la fois un argument et la fonction qu'on lui applique ? Le λ-calcul typé introduit des types simples permettant de distinguer les fonctions des variables.

Un contexte, ou environnement de typage Γ, est un ensemble de paires de la forme (x, τ) où x est une variable et τ un type. Un jugement de typage est un triplet $\Gamma \vdash t : \tau$

Le terme t sera bien typé dans Γ par les règles de jugement suivantes :

$$\text{si } (x, \tau) \in \Gamma, \text{ alors } \Gamma \vdash x : \tau$$
$$\text{si } \Gamma \cup (x, \tau_1) \vdash u : \tau_2, \text{ alors } \Gamma \vdash \lambda x{:}\tau_1.u \ : \ \tau_1 \to \tau_2$$
$$\text{si } \Gamma \vdash u : \tau_1 \to \tau_2 \text{ et } \Gamma \vdash v : \tau_1, \text{ alors } \Gamma \vdash uv : \tau_2$$

3.1.2 Implémentation en Agda

Représentation des types et des termes

Pour les types, nous avons deux constructeurs, un pour les types de variable et un pour les types des abstractions : le type flèche de la forme $T_1 \to T_2$.

```
data type : Set where
  typ_var : String → type
  typ_arrow : type → type → type
```

Pour les termes, nous utilisons la *locally namless representation* Les variables liées sont représentées par les indices de *de Bruijn* et les variables libres par des chaînes de caractères.

```
data terme : Set where
  bvar : Nat → terme
  fvar : String → terme
  abs : terme → terme
  app : terme → terme → terme

-- t1 = λ x. λ y. (y x)
t1 : terme
t1 = abs (abs (app (bvar 0) (bvar 1)))
```

Opening

L'*opening* remplace un indice par un terme. Cela correspond à la substitution d'une variable liée, telle qu'appliquée lors de la β-réduction.

```
open-rec : Nat → terme → terme → terme
open-rec k u (bvar i) = if (i == k) then u else (bvar i)
open-rec k u (fvar x) = fvar x
open-rec k u (abs t) = abs (open-rec (suc k) u t)
open-rec k u (app t1 t2) = app (open-rec k u t1) (open-rec k u t2)

-- open
op : terme → terme → terme
op t u = open-rec 0 u t

-- op (λ (1 0) 0) y   λ (y 0) y
demo-open : (op (app (abs (app (bvar 1) (bvar 0))) (bvar 0)) (fvar "y"))  (app (abs (app (fvar
demo-open =  refl
```

La sémantique

Nous définissons la sémantique de la réduction avec appel par valeur.

```
data valeur : terme → Set where
  v_abs : (t : terme) → valeur (abs t)
  v_nat : (n : Nat) → valeur (bvar n)
  v_var : (x : String) → valeur (fvar x)

data __ : terme → terme → Set where
  red-beta : (t1 t2 : terme) → valeur t2 → (app (abs t1) t2)  (op t1 t2)
  red-app-1 : (t1 t1' t2 : terme) → t1  t1' → (app t1 t2)  (app t1' t2)
  red-app-2 : (t1 t2 t2' : terme) → t2  t2' → (app t1 t2)  (app t1 t2')
```

La gestion de l'environnement et du contexte

Le typage

If E and F are two contexts, then $E \,\&F$ denotes their concatenation. If x is a variable and T is a type, then $(x\ T)$ denotes a singleton environment where x is bound to T. In particular, $E\ \&x\ T$ denotes a context E extended with a binding from x to T. The empty environment is called *empty*.

The ternary predicate *binds* holds when a given binding is present in an environment.

```
Fixpoint binds (x:string) (T:typ) (E:ctx) {struct E} : Prop :=
  match E with
  | [] => False
  | (v,t) :: r => (x=v /\ T=t) \/ binds x T r
end.

Compute binds "v1" (typ_var "entier") e1.
Compute e1.

Theorem b1 : binds "v1" (typ_var "entier") e1.
Proof.
  simpl.
  left.
  auto.
Qed.

Reserved Notation "E |= t ~: T" (at level 69).

Inductive typing : ctx -> terme -> typ -> Prop :=
  | typing_var : forall E x T,
      binds x T E ->
      E |= (fvar x) ~: T
  | typing_abs : forall  E U T t1,
      forall x,
        (E & [(x , U)] |= t1 ^ x ~: T) ->
      E |= (abs t1) ~: (typ_arrow U T)
  | typing_app : forall S T E t1 t2,
      E |= t1 ~: (typ_arrow S T) ->
      E |= t2 ~: S ->
      E |= (app t1 t2) ~: T

where "E |= t ~: T" := (typing E t T).
```

Théorème de préservation

Nous définissons le théorème de préservation du type.

```
Definition preservation_statement := forall E t t' T,
  E |= t ~: T ->
```

```
  t --> t' ->
  E |= t' ~: T.
```

Théorème de la progression

Le théorème de la progression nous dit que si un terme ne se réduit plus, alors c'est une *valeur*.

```
Definition progress_statement := forall t T,
  nil |= t ~: T ->
     valeur t
  \/ exists t', t --> t'.
```

La substitution

```
Fixpoint mem  (x:string) (l:list string) : bool :=
 match l with
 | nil => false
 | h::t => if h=?x then true else mem x t
 end.

Fixpoint union (l1 l2: list string) : list string :=
  match l1 with
    | a1::r1 => if mem a1 l2 then union r1 l2
                else  a1 :: (union r1 l2)
    | nil => l2
    end.

Fixpoint fv (t : terme) {struct t} : list string :=
  match t with
  | bvar i    => nil
  | fvar x    => [x]
  | abs t1    => (fv t1)
  | app t1 t2 => (union (fv t1) (fv t2))
  end.

Fixpoint subst (z : string) (u : terme) (t : terme) {struct t} : terme :=
  match t with
  | bvar i    => bvar i
  | fvar x    => if x =? z then u else (fvar x)
  | abs t1    => abs (subst z u t1)
  | app t1 t2 => app (subst z u t1) (subst z u t2)
  end.

Notation "[ z ~> u ] t" := (subst z u t) (at level 68).

Lemma demo_subst1:  ["Y" ~> "Z"] (abs (app 0 "Y")) = (abs (app 0 "Z")).
Proof.
```

```
  simpl.
  auto.
Qed.
```

3.1.3 Inférence de type

Pour présenter un système d'inférence de type, nous introduisons la constante de type `Int` à notre λ-calcul simplement typé.

```
type ltype =
| Int
| Vart of string
| Fleche of ltype*ltype
```

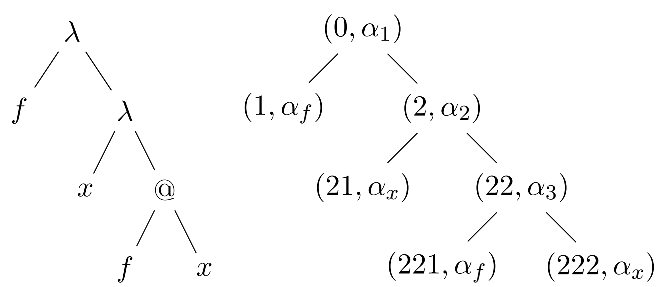
De même, nous enrichissons notre définition de terme avec le constructeur `Const of int` et la fonction binaire `Plus`

```
type terme =
  | Var of string
  | App of terme * terme
  | Lam of string * terme
  | Const of int
  | Plus of terme * terme
```

Prenons l'exemple du terme `apply` $\equiv \lambda f.\lambda x.fx$

L'algorithme d'inférence se déroule en quatre temps.

1. Assignation préliminaire de types ou variables de types à chaque sous-terme de l'expression. Pour cela, nous parcourons l'arbre du terme en y affectant à chaque variable liée une variable de type, ainsi qu'à chaque sous-terme. Ce parcours nous rend en sortie une aliste comprenant l'occurence et la variable de type associée α_i



2. Collecte des contraintes avec la fonction T : terme $\mapsto$ type
   — Pour une abstraction : $e = \lambda x.e_1 \leadsto T(e) = T(x) \to T(e_1)$
   — Pour une application : $e = e_1 e_2 \leadsto T(e_1) = T(e_2) \to T(e)$
   — Pour l'application de l'addition : $e = e_1 + e_2 \leadsto T(e) = T(e_1) = T(e_2) =$ `int`

```
utop#  t ;;
- : terme = Lam ("f", Lam ("x", App (Var "f", Var "x")))
```

```
utop# hm t ;;
- : (ltype * ltype) list =
[(Vart "alpha_1", Fleche (Vart "alpha_f", Vart "alpha_2"));
 (Vart "alpha_f", Vart "alpha_f");
 (Vart "alpha_2", Fleche (Vart "alpha_x", Vart "alpha_3"));
 (Vart "alpha_x", Vart "alpha_x");
 (Vart "alpha_f", Fleche (Vart "alpha_x", Vart "alpha_3"));
 (Vart "alpha_f", Vart "alpha_f"); (Vart "alpha_x", Vart "alpha_x")]
```

3. Unification de ces constraintes afin de trouver la substitution la plus générale si l'expression est typable. Dans le cas contraire, échec. Nous utilisons l'algorithme d'unification que nous détaillerons dans un chapitre suivant.
4. Nous appliquons cette substitution à la variable de type initialement affectée au terme t, à l'étape 1.

```
- : ltype = Fleche (Fleche (Vart "alpha_x", Vart "alpha_3"),
                    Fleche (Vart "alpha_x", Vart "alpha_3"))
```

3.2 Les *Pure Type Systems*

3.2.1 Introduction

Le λ-calcul simplement typé que nous nommons $\lambda_\rightarrow$ ne permet de représenter des fonctions que des termes vers les termes. De manière générale, nous souhaiterions pouvoir modéliser :
— Fonction des termes vers les termes
— Fonction des types vers les termes pour permettre le polymorphisme
— Fonction des types vers les types pour avoir des constructeurs de type
— Fonction des termes vers les types pour avoir des types dépendants
Nous reprenons ici le très bon formalisme de Barendregt [2]

Définition 8. *La syntaxe est la suivante :*

$$\mathcal{T} ::= V \mid C \mid \mathcal{T} \mid \mathcal{T} \mid \lambda V : \mathcal{T}.\mathcal{T} \mid \Pi V : \mathcal{T}.\mathcal{T}$$

C *est l'ensemble des deux constantes :* $*$ *et* $\square$
V *est un ensemble fini de variables*
λ *est l'opération d'abstraction*
Π *est l'opérateur produit permettant de matérialiser le type dépendant*

Il n'y a donc pas de distinction entre les termes et les types. Chaque terme est typé, chaque type est typé, avec un système pyramidal infini.

Nous utiliserons le formalisme *à la Church*. Chaque terme est annoté de son type, contrairement au λ-calcul simplement typé *à la Curry* que nous avons présenté précedemment où les termes étaient libres de type et un mécanisme d'inférence de type permettait ensuite d'associer à chaque terme un type.

L'environnement de type Γ est défini par :

$$\Gamma ::= \emptyset \mid \Gamma, x : \mathcal{T}$$

Nous avons les règles de réduction suivantes :

$$\frac{}{(\lambda x : A.B)\ C \to_\beta B[C/x]}$$

$$\frac{B \to_\beta B'}{\lambda x : A.B \to_\beta \lambda x : A.B'}$$

$$\frac{A \to_\beta A'}{\lambda x : A.B \to_\beta \lambda x : A'.B}$$

$$\frac{B \to_\beta B'}{\Pi x : A.B \to_\beta \Pi x : A.B'}$$

$$\frac{A \to_\beta A'}{\Pi x : A.B \to_\beta \Pi x : A'.B}$$

Nous avons les règles de typage suivantes.

$$\frac{}{\vdash * : \square} \quad \text{(Axiom)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : s \quad x \text{ does not occur in } \Gamma}{\Gamma, x : A \vdash x : A} \quad \text{(Start)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : B \quad \Gamma \vdash C : s}{\Gamma, x : C \vdash A : B} \quad \text{(Weakening)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash C : \Pi x : A.B \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash Ca : B[a/x]} \quad \text{(Application)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : B \quad B =_\beta B' \quad \Gamma \vdash B' : s}{\Gamma \vdash A : B'} \quad \text{(Conversion)}$$

Soit la paire $(s1, s2)$, nous avons les deux règles ci-dessous :

$$\frac{\Gamma \vdash A : s_1 \quad \Gamma, x : A \vdash B : s_2}{\Gamma \vdash \Pi x : A.B : s_2} \quad \text{(Product)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : s_1 \quad \Gamma, x : A \vdash b : B \quad \Gamma, x : A \vdash B : s_2}{\Gamma \vdash \lambda x : A.b : \Pi x : A.B} \quad \text{(Abstraction)}$$

Le système PTS respecte les propriétés suivantes :

1. La propriété de Church-Rosser : $M \to_\beta N$ et $M \to_\beta N'$ alors il existe N'' tel que $N \to_\beta^* N''$ et $N' \to_\beta^* N''$

2. La propriété de réduction : $\Gamma \vdash M : T$ et $M \to_\beta M'$ alors $\Gamma \vdash M' : T$

3. L'unicité des types : $\Gamma \vdash A : B$ et $\Gamma \vdash A : B'$ alors $B =_\beta B'$

Pour pouvoir éprouver notre système PTS, nous ajoutons les constantes suivantes à notre environnement Γ

$$\Gamma = \{(* : \Box);\ (\text{nat} : *);\ (O : nat);\ (\text{succ} : \Pi x : \text{nat}.\text{nat})\}$$

Voici quelques exemples interprétés par OCAML ci-dessous. Nous avons simplifié l'affichage du type $\Pi x : A.B$ par $A \to B$ si x n'est pas une variable libre de B.

Nous utilisons pour l'affichage OCAML les caractères UTF-8 : `λ, π, →`

```
(*  Polymorphisme   *)
let id = Lam("A", C "*", Lam("x", V "A", V "x")) ;;
let id_nat = App(id, C "nat") ;;
let zero = App(id_nat, C "O") ;;

id = λA:*.λx:A.x
id nat = λA:*.λx:A.x nat

print_terme (typage id env0)
πA:*.A→A

print_terme (reduc id_nat) ;;
λx:nat.x

print_terme zero ;;
λA:*.λx:A.x nat O
print_terme zero ;;
print_terme (typage zero env0) ;;
nat

print_terme (fullReduc zero) ;;
O

(* Les entiers *)
let entiers = Prod ("X", C "*",  Prod ("x", V "X", Prod ("y", Prod ("z", V "X", V "X"), V "X"))
utop # print_terme entiers;;
```

```
πX:*.(X→((X→X)→X))

let zero =  Lam("X", C "*", Lam("x", V "X", Lam ("y", Prod("z", V "X", V "X"), V "x")))

let succ = Lam ("n", entiers, Lam ("X", C "*", Lam ("x", V "X", Lam ("y", Prod("z", V "X", V "X
               App(V "y", App (App(App(V "n", V "X"), V "x"), V "y") )))))

utop # print_terme (fullReduc trois) ;;
λX:*.λx:X.λy:(X→X).y (y (y x) )

(*twice*)
utop # print_terme twice ;;
λA:*.λf:(A→A).λa:A.f (f a)

utop # print_terme (typage twice env0) ;;
πA:*.((A→A)→(A→A))

let plus2  = App(App(twice, entiers), succ) ;;
print_terme (fullReduc (App(plus2, trois))) ;
λX:*.λx:X.λy:(X→X).y (y (y (y (y x) ) ) )
```

Le type produit pourra être défini de la manière suivante :

Si U et V sont des types, alors

$$U \times V = \Pi X.(U \to V \to X) \to X$$

$$< u, v >= \lambda X : *.\lambda x : (U \to V \to X).xuv$$

Prenons par exemple le couple d'entiers $< 100, 101 >$, nous le modélisons par

```
let prod_100_101 =
  Lam("X", C "nat",
    Lam("x", Prod("z", C "nat",
:w
     (Prod ("w", C "nat", V "X" ))),App (App (V "x", N 100), N 101))) ;;
print (typage prod_100_101 env0) ;;
πX:nat.((nat→(nat→X))→X)
```

Les projections sont définies par

$$\pi^1 t = t\ U(\lambda x : U.\lambda y : V.x) \text{ et } \pi^2 t = t\ U(\lambda x : U.\lambda y : V.y)$$

```
let proj1 =
  Lam("t", (typage prod_uv env0),
    App(App(V "t", V "U"), Lam ("x", V "U", Lam ("y", V "V", V "x"))))
 in print (fullReduc (App (proj1, prod_100_101)))

let proj2 =
  Lam("t", (typage prod_uv env0),
    App(App(V "t", V "U"), Lam ("x", V "U", Lam ("y", V "V", V "y"))))
in print (fullReduc (App (proj2, prod_uv)))
```

3.2.2 MiniCoq

Nous nous éloignons de la simplicité du *Pure Type System* en surchargeant notre terme algébrique des types suivants :

- Le type `Nat` avec ses constructeurs `0` et `S`
- Le type de l'égalité `Eq` avec son unique constructeur `Eq_refl`
- Le type `And` avec son unique constructeur `Conj` et ses fonctions `Proj1` et `Proj2`. L'affichage du type `And` se fera avec les caractères `/\`
- Le type `Or` avec ses constructeurs `Or_introl` et `Or_intror` et sa fonction `Case`. L'affichage de ce type se fera avec les caractères `\/`
- Le type `False` sans constructeur, mais avec la fonction `False_ind(t1,t2)` qui se réduit en `t1` si le type de `t2` est égal à `False` (*ex falso quodlibet*)

Démontrons le théorème simple décrit en Coq comme ci-dessous.

```
Theorem imp : ∀ (a b c : Prop), ((a→b) ∧ (a→c)) → a→ (b∧c).
Proof.
  intros a b c H.
  intro Ha.
  split.
  destruct H as (H1 & H2).
  apply H1. assumption.
  destruct H as (H1 & H2).
  apply H2. assumption.
Qed.
```

Nous pouvons représenter la preuve du théorème avec la dérivation suivante :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)]}{A \Rightarrow B}\ \textit{destruct } H \textit{ as } (H1, H2) \qquad [A]}{B}\ \textit{apply } H1 \qquad \dfrac{\dfrac{[(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)]}{A \Rightarrow C}\ \textit{destruct } H \textit{ as } (H1, H2) \qquad [A]}{C}\ \textit{apply } H2}{B \wedge C}\ \textit{split}}{A \Rightarrow (B \wedge C)}\ \textit{intros } Ha}{((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \wedge C))}\ \textit{intros a b c H}$$

Avec notre système PTS, nous codons cela de la manière suivante :

```
let imp = Prod("A", C "Type", Prod ("B", C "Type", Prod ("C", C "Type",
              Prod ("z", And(Prod("x", V "A", V "B"), Prod ("y", V "A", V "C")),
                    Prod ("w", V "A", And (V "B", V "C"))))))
in print imp ;;
> πA:Type.πB:Type.π:Type.((A→B)/\(A→C)→(A→B/\C))

let preuve_imp_pts =
 Lam("A", Type,
   Lam("B", Type,
     Lam("C", Type,
      Lam("h", And(Prod("x", V "A", V "B"), Prod("y", V "A", V "C")),
       Lam ("x", V "A", Conj (App(Proj1 (V "h"), V "x"), App(Proj2 (V "h"), V "x")))))))
in (print preuve_imp_pts; print_string "\n"; print (check preuve_imp_pts env0))  ;;
```

```
> λA:Type.λB:Type.λC:Type.λh:(A→B)/\(A→C).λx:A.conj((proj1(h) x),(proj2(h) x))
  πA:Type.πB:Type.πC:Type.((A→B)/\(A→C)→(A→B/\C))
```

Nous retrouvons en OCAML la dualité entre le type produit `*` et le ∧ logique, ainsi qu'entre la flèche fonctionnelle `->` et l'implication logique ⇒. OCAML infère correctement le type (théorème) depuis le terme (la preuve).

```
let preuve_imp_ocaml = function h -> (function x -> ((fst h) x, (snd h) x)) ;;
val preuve_imp_ocaml : ('a -> 'b) * ('a -> 'c) -> 'a -> 'b * 'c
```

Voici un autre exemple très simple illustrant le type ∧ et les fonctions de construction `And` et de projections `Proj1/2`

```
Theorem et_refl : ∀ (a b :Prop), a∧b → b∧a .
Proof.
 intros a b H.
 split.
 destruct H as [Ha Hb].
 assumption.
 destruct H as [Ha Hb].
 assumption.
Qed.
Print et_refl.
```

```
let preuve_et_refl =
  Lam("A", Type,
    Lam("B", Type,
     Lam("h", And(V "A", V "B"), Conj(Proj2 (V "h"), Proj1 (V "h")))))
  in ( print preuve_et_refl ; print_string "\n"; print(check preuve_et_refl env0)) ;;
> λA:Type.λB:Type.λh:A/\B.conj(proj2(h) ,proj1(h))
  πA:Type.πB:Type.(A/\B→B/\A)
```

Ou tout simplement en OCAML avec l'inférence de type :

```
utop # let preuve_et_refl = function h -> (snd h, fst h) ;;
val preuve_et_refl : 'a * 'b -> 'b * 'a = <fun>
```

3.2.3 Le ∨ logique

```
Theorem or_elim : ∀ (a b c :Prop), (a→c)->(b→c)->(a∨b)->c.
Proof.
  intros a b c h1 h2 h3.
  destruct h3 as [ha | hb].
  apply h1. exact ha.
  apply h2. exact hb.
Qed.
```

```
(* fonction générée en COQ *)
 or_elim =
 fun (a b c : Prop) (h1 : a -> c) (h2 : b -> c) (h3 : a \/ b) =>
 match h3 with
  | or_introl ha => h1 ha
  | or_intror hb => h2 hb
 end
     : forall a b c : Prop, (a -> c) -> (b -> c) -> a \/ b -> c

(* fonction OCAML *)
let preuve_or_elim =
  Lam("A", Type,
    Lam("B", Type,
      Lam ("C", Type,
        Lam("h1", Prod("x", V "A", V "C"),
          Lam("h2", Prod("y", V "B", V "C"),
            Lam("h3", Or(V "A", V "B"),
              Case(V "h3", V "h1", V "h2")))))))
  in (print preuve_or_elim ; print_newline() ;
      print (check preuve_or_elim env0)) ;;
> λA:Type.λB:Type.λC:Type.λh1:(A→C).λh2:(B→C).λh3:A\/B.case(h3, h1, h2)
  πA:Type.πB:Type.πC:Type.((A→C)→((B→C)→(A\/B→C)))
```

En OCaml, nous introduisons le type algébrique ci-dessous pour matérialiser le `or` logique

```
type ('a, 'b) ou = Left of 'a | Right of 'b

let or_elim = fun h1 h2 h3 ->
 match h3 with
  | Left a -> h1 a
  | Right b -> h2 b ;;
val or_elim : ('a -> 'b) -> ('c -> 'b) -> ('a, 'c) ou -> 'b = <fun>
```

3.2.4 L'égalité

Prouvons que $\forall n \in \texttt{Nat}, (\lambda n.2\ n) = 2$

```
let th = Prod("n", Nat, Eq(Nat, App(cst2, V "n"), S (S O) ))
  in print th;;
> πn:nat.eq(nat, (λn:nat.2 n), 2)

let proof = Lam("n", Nat, Eq_refl(Nat, App(cst2, V "n"))) in
  (print proof ; print_newline() ;
   print (check proof env0) ; print_newline() ;
   print (fullReduc (check proof env0)))  ;;
> λn:nat.eq _refl(nat, (λn:nat.2 n))
  πn:nat.eq(nat, (λn:nat.2 n), (λn:nat.2 n))
  (nat→eq(nat, 2, 2))
```

Rappelons la règle de conversion ci-dessous :

$$\frac{\Gamma t : A \quad \Gamma B : s \quad A =_\beta B}{\Gamma t : B}$$

Ainsi, un terme peut avoir plusieurs types.
La preuve `λn:nat.eq _refl(nat, (λn:nat.2 n))` est preuve de :

— `πn:nat.eq(nat, (λn:nat.2 n), (λn:nat.2 n))`
— `πn:nat.eq(nat, (λn:nat.2 n), 2)`
— `(nat→eq(nat, 2, 2))`

Nous constatons que la preuve n'exhibe pas le process calculatoire de la β-réduction. Le théorème est ici prouvé par calcul et non par raisonnement. Ces considérations philosophiques sont bien développées par Henri Poincaré[19]

3.2.5 Le faux

```
let exf = Lam ("x", False, I) (* ex falso quodlibet *)
  in (print exf ; print_newline() ; print (check exf env0)) ;;
> λx:False.I
  (False→True)
```

Voici un exemple simple manipulant la négation et la fonction d'induction du faux.

Theorem *implication* : ∀ (*A B* :Prop), ¬*A*∨*B* → (*A*→*B*) .
Proof.
  intros.
  destruct *H* as [*H1*|*H2*].
  contradiction.
  assumption.
Qed.

Print *implication*.

```
implication =
 fun (A B : Prop) (H : ~ A \/ B) (H0 : A) =>
  match H with
  | or_introl H1 => False_ind B (H1 H0)
  | or_intror H2 => H2
  end
   : forall A B : Prop, ~ A \/ B -> A -> B
```

Avec notre implémentation OCAML, cela donne :

```
let preuve_impl =
  Lam("A", Type,
    Lam("B", Type,
      Lam("H", Or(App(non, V "A"), V "B"),
        Lam("H0", V "A",
          Case (V "H",
                Lam("x", Prod("w", V "A", False), False_ind(V "B", App(V "x", V "H0"))),
```

```
                Lam ("y", V "B", V "y"))))))
in  (print preuve_impl ; print_newline() ;
     print (fullReduc (check preuve_impl env0))) ;;
> λA:Type.λB:Type.λH:(λP:Type.~P A)\/B.λH0:A.case(H, λx:~A.false_ind(B,(x H0)), λy:B.y)
  πA:Type.πB:Type.(~A\/B→(A→B))
```

Dans un langage comme OCAML, le type `faux` est un type sans constructeur. Il est *inhabité*. La preuve de la règle du modus tollens s'écrira de la manière suivante :

```
type faux = | ;;

let modus_tollens (hfq:'q->faux) (hpq:'p->'q) (hp:'p) =
  hfq (hpq hp)
```

Voici le même théorème en COQ :

```
Theorem modus_tollens: forall (p q:Prop), (q->False)-> (p->q) -> (p->False).
Proof.
  intros p q Hfq Hpq Hp.
        generalize (Hpq Hp).
        exact Hfq.
Qed.
```

Nous pouvons décrire le *ex falso quodlibet* en OCAML comme suit :

```
type faux = | ;;
type vrai = I ;;

let exfalsoquodlibet = fun (f:faux) ->  I;;
```

En COQ, le pattern matching sur un type n'ayant aucun constructeur permet de définir une fonction retournant un terme de n'importe quel type.

Considérons par exemple la fonction f de type $False \to 2 = 3$:

```
Definition f := fun (x:False) =>
   match x return 2=3 with end.
```

Cette fonction f, est à mon sens, l'expression peu élégante de la correspondance de Curry-Howard. Une fonction ne pouvant matcher son argument peut retourner un type non habité...

En OCAML, je ne pense pas que la syntaxe nous permet d'écrire qu'un pattern matching ne retourne rien, nous pouvons cependant boucler indéfiniment :

```
type faux = | ;;
type farfelu = | ;;
let rec f (x:faux):farfelu = f x  ;;
val f : faux -> farfelu = <fun>
```

Erreur de ma part, après recherche, nous pouvons bien écrire en OCAML un pattern matching qui ne retourne rien avec le '.' comme ci-dessous :

```
let f (x:faux) : farfelu = match x with _ -> . ;;
val f : faux -> farfelu = <fun>
```

3.2.6 Le point fixe

Nous surchargeons notre terme algébrique de l'opérateur de point fixe `Y of terme` qui se réduit en `Y t` $\rightsquigarrow\!\!\triangleright$ `t (Y t)`

```
let multF =
  Lam ("f", Prod("w",Nat, Nat),
   Lam ("n", Nat, Lam ("m", Nat,
        IfThenElse(Egal(V "n",O), O, Add (V "m", App(App (V "f", Sub1 (V "n")), V "m"))))))

let mult = Y multF ;;

let facF = Lam("f", Prod ("z", Nat, Nat),
             Lam ("n", Nat,
              IfThenElse(Egal(V "n", O), S O, (App(App(mult, V "n"), App(V "f", Sub1 (V "n"))

let fac = Y facF  ;;

print (fullReduc (App(fac, S (S (S (S (S O))))))) ;;
> 120
```

3.2.7 La logique classique

Sous l'angle de la correspondance de Curry-Howard, notre système se base sur la logique intuitionniste. C'est-à-dire que toute proposition a une preuve constructive. Autrement dit, le type correspondant à la proposition est habité par un terme de notre système PTS. Avec cette logique nous ne pouvons prouver certains théorèmes comme la loi de Peirce $((A \to B) \to A) \to A$

Pour cela nous devons ajouter l'axiome du tiers-exclus $A \vee \neg A$. Voici comment la loi de Pierce se déduit avec l'axiome du tiers-exclus. En COQ, cela donne :

`Axiom` *classic* : ∀ *P* : `Prop`, *P*\/~*P*.
`Theorem` *Peirce* : ∀ *A* *B* :`Prop`, ((*A*→*B*)->*A*)->*A*.
`Proof`.
  `intros`.
  `assert` (*A*\/~*A*) `by` (`apply` *classic*).
  `destruct` *H0* `as` [*H1* | *H2*].
  `exact` *H1*.
  `apply` *H* .
  `intros`.
  contradiction.
`Qed`.

`Print` *Peirce*.

```
 Peirce =
  fun (A B : Prop) (H : (A -> B) -> A) =>
  let H0 : A \/ ~ A := classic A in
  match H0 with
  | or_introl H1 => H1
```

```
  | or_intror H2 => H (fun H1 : A => False_ind B (H2 H1))
  end
    : forall A B : Prop, ((A -> B) -> A) -> A
```

Voici notre implémentation dans notre MiniCoq. Nous créons un environnement `env_classic` surchargé par le terme `tiers-exclus` de type $A \vee \neg A$. Nous trichons un peu car le type devrait être polymorphe et donc de la forme $\forall P :$ `Type`$, P \vee \neg P$, mais je ne vois pas comment ensuite appliquer cet axiome à une variable `A`. Comment Coq gère `let H0 : A \/ ~ A := classic A` ?

```
let env_classic = [("tiers-exclus",  Or(V "A", App(non, V "A")))] ;;

let proof_peirce =
  Lam("A", Type,
    Lam("B", Type,
      Lam ("H", Prod("x", Prod("y", V "A", V "B"), V "A"),
        Case(C "tiers-exclus",
             Lam("zz", V "A", V "zz"),
             Lam("yy", V "A", App(V "H", Lam("H1", V "A", False_ind(V "B", App(V "yy", V "H1"))
  in (print proof_peirce; print_newline();
    print (check proof_peirce env_classic)) ;;
> λA:Type.λB:Type.λH:((A→B)→A).case(tiers-exclus,
                                    λzz:A.zz,
                                    λyy:A.(H λH1:A.false_ind(B,(yy H1))))
  πA:Type.πB:Type.(((A→B)→A)→A)
```

Ainsi, le tiers-exclus n'est pas démontrable en logique classique. Cependant, on peut démontrer en logique intuitionniste qu'il n'est pas vrai que le tiers-exclus soit faux. C'est-à-dire que l'on ne peut démontrer P, mais $\neg\neg P$

Il est surprenant de constater que "nier deux fois" est équivalent à "affirmer" en logique classique, mais est plus faible en logique intuitionniste.

Voici la démonstration en Coq.

```
Section excluded_middle.
Variables A : Prop.
Theorem il_n_est_pas_vrai_que_le_tiers_exclus_est_faux : ¬ ¬ (~A ∨ A).
Proof.
  unfold not.
  intro H.
  apply H.
  left.
  intro H1.
  apply H.
  right.
  assumption.
Qed.
End excluded_middle.
```

Chapitre 4

L'interprétation

4.1 Introduction

Nous avons vu que le λ-calcul utilise la réduction, basée sur un mécanisme de substitution. Les langages interprétés que nous allons implémenter n'utilisent pas ce mécanisme de substitution, mais font appel un environnement qui permet de représenter les paires variable/valeur. A l'application d'une fonction, cet environnement est *étendu* avec les nouvelles paires variable/valeur des arguments de la fonction.

Nous perdons donc le côté pur du λ-calcul qui se suffit à lui-même pour dérouler ses calculs. L'interprète ne pourra évaluer son expression qu'en présence d'un environnement. Un interprète est ainsi une fonction `eval` telle que `(eval` π `env)` $\leadsto$ `valeur`

Nous reprenons ici un peu du code de l'excellent blog : `https://bernsteinbear.com/blog/lisp`.

Par rapport au code du blog cité, nous faisons deux changements majeurs. Le premier est d'utiliser à nouveau les outils d'analyseur lexical et syntaxique **ocamllex** et **ocamlyacc**. Le second sera d'utilisé des listes mutables, afin de pleinement refléter toutes les capacités de Scheme qui n'est pas un langage fonctionnel *pur*.

Une fois cet interprète réalisé, nous l'utiliserons pour implémenter un nouvel interprète avec quelques variantes : liaison *dynamique* et *statique*, évaluation *stricte* et *paresseuse* et enfin un interprète par *continuation*, avant de conclure sur une tour de babel avec capacité de réification et réflection de notre méta-interpète. C'est comme une quête philosophique...

Pour ces diffèrentes variantes, nous nous inspirons de notre bible sur le langage LISP : *LISP In Small Pieces* de Christian Queinnec. [20]

4.2 Un interprète MiniScheme avec Ocaml

4.2.1 L'évaluation

Le λ-calcul repose sur un mécanisme de substitution permettant de réduire les termes et aboutir à une forme normale. En programmation fonctionnelle, au lieu de réduire un terme, on l'évaluera. Un terme non fermé ne pourra être évalué que dans un environnement où ses variables libres ont une liaison. Nous avons les définitions suivantes :

— Une *liaison* est un couple (x, v) où x est une variable et v est une valeur.

— Un *environnement* est une liste de liaison

— Une *fermeture* est un couple (M, ρ) où M est un terme et p un environnement comportant une liaison pour chaque variable libre de M.
— Une *valeur* est une fermeture (M, p) avec M de forme normale.

On formalise l'évaluation par la règle de jugement $\rho \vdash M \to v$. Elle exprime que dans l'environnement ρ, le terme M a pour valeur v.

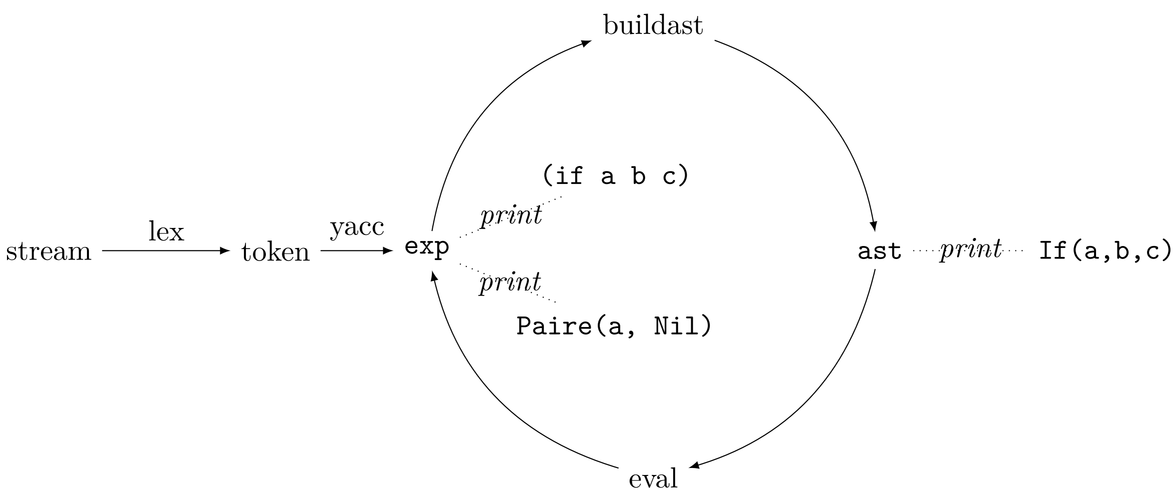
La règle d'évaluation de l'appel par valeur se formalise ainsi comme suit :

$$(App_v) : \frac{\rho \vdash M \to (\lambda x M^{'}, \rho^{'}) \qquad \rho \vdash N \to v \qquad (x, v); \rho^{'} \vdash M^{'} \to v^{'}}{\rho \vdash MN \to v^{'}}$$

L'évaluation de $M^{'}$ le corps de la lambda se fait dans l'environnement $\rho^{'}$ augmenté d'une liaison due du passage de paramètre. C'est la caractéristique de la liaison lexicale. Pour une liaison dynamique, l'évaluation du corps de la lambda se fera dans l'environnement courant ρ

Dans le cadre d'une implémentation en ML, l'erreur à ne pas faire (et que j'ai malheureusement faite initialement) est de représenter la valeur d'une évaluation avec un type différent de l'expression à évaluer. La puissance de Lisp repose sur cette uniformité entre programmme et valeur. Nous utiliserons cette caractéristique pour implémenter un interprète Lisp en Lisp.

Voici la séquence du code, depuis le stream en entrée de l'analyseur lexical jusqu'à la sortie de l'évaluateur `eval`. J'ai fait le choix d'avoir une représentation intermédiaire `ast` permettant de modéliser l'arbre syntaxique, et de faciliter le processus d'évaluation.



Voici le code OCAML des type abstrait `exp`, `ast` et `env` :

```
type exp =
| Booleen of bool
| Symbole of string
| Mot of string
| Entier of int
| Nil
| Paire of exp ref * exp ref
| Closure of string list * ast list * (env ref)
and ast =
```

```
| Atom of exp
| Var of string
| If of ast * ast * ast
| Cond of (ast * ast) list
| And of ast list
| Or of ast list
| Call of ast * ast list
| Call0 of ast    (* procedure sans argument *)
| Lambda of string list * ast list
| Let of (string * ast) list * ast list
| Letrec of (string * ast) list * ast list
| Define of string * ast
| Begin of ast list
| Apply of ast * ast list
| Quote of exp
and env = (string * exp) list
```

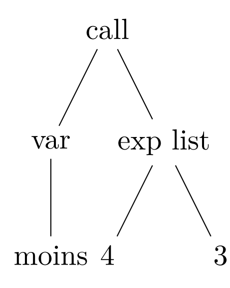
4.2.2 Les étapes Read, Eval, Print

L'interpréte présente trois étapes que l'on décrit souvent avec l'acronyme *REPL* : Read, Eval, Print, Loop

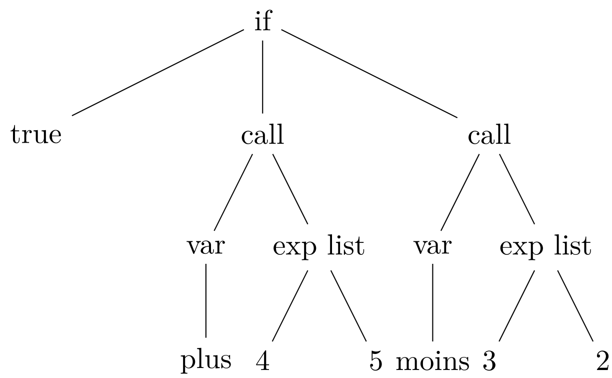
L'étape *READ* sera effectuée avec les moteurs ocamllex et ocmalyacc. Cette étape va lire la saisie clavier et construire l'arbre syntaxique des expressions SCHEME.

Voici quelques exemples d'arbres syntaxiques générés avec Yacc. Ces arbres syntaxiques sont à nouveau dessinés avec le package Tikz et nous avons développé une petite fonction qui parcourt l'expression et génère le code Tikz.

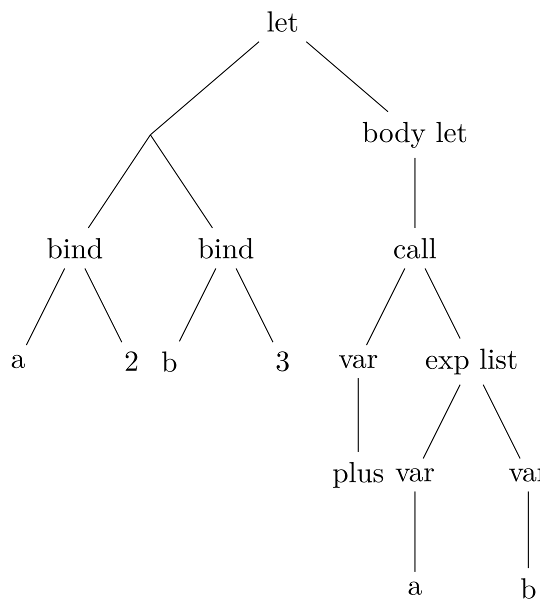
```
(moins 4 3)
```




```
(if #t (plus 4 5) (moins 3 2))
```



Et enfin une expression let `(let ((a 2) (b 3)) (plus a b))`



L'étape *EVAL* va parcourir l'arbre syntaxique de l'expression, traiter cette expression et en exprimer une valeur modélisée avec le type `value`

La fonction `eval` est une fonction prenant pour arguments une expression de type `ast` et un environnement. Elle retourne une valeur de type `exp`. Voici sa signature :

```
val eval : ast -> env -> exp = <fun>
```

L'étape *PRINT* n'est autre que la fonction d'affichage finale de l'interprète. Une fois cette étape finie, l'interprète boucle sur l'étape initiale *READ*

4.2.3 Liaison lexicale vs liaison dynamique

Nous allons utiliser ici la liaison lexicale (statique), et non dynamique. Cela nous impose de capturer l'environnement existant au moment de la définition de la fonction. Plus précisément, l'environnement est capturé par l'évaluation de la lambda, évaluation dont la valeur est appelée une *closure* ou *fermeture*.

```
Lambda (parametres, expression) -> Closure (parametres, expression, env)
```

Dans le cas de la liaison dynamique, la fonction est appliquée en utilisant l'environnement courant, et non pas son environnement de définition. Donc pas besoin de fermeture.

A ma connaissance, la liaison statique est maintenant utilisée dans la plupart des langages fonctionnels. En Scheme et Ocaml, nous pouvons voir dans l'exemple ci-dessous que l'évaluation de la définition de la lambda `inc_x` capture la valeur de `x` .

SCHEME	OCAML
`> (define x 1)`	`# let x = 1;;`
`> (define inc_x (lambda () (+ x 1)))`	`# let inc_x = function () -> x+1 ;;`
`> (inc_x)`	`# inc_x ();;`
`2`	`- : int = 2`
`> (let ((x 100)) (inc_x))`	`# let x = 100 in inc_x () ;;`
`2`	`- : int = 2`

4.2.4 Gestion de l'environnement

Comme indiqué en préambule, plusieurs choix sont possibles pour la modélisation de l'environnement. Le choix le plus simple est une représentation par une liste de paires *variable* $\leftrightarrow$ *value* Ce choix peut être fait en OCAML par le type natif `list` ou en utilisant le type concret `Paire of Symbole * lobject`

La principale difficulté est la représentation de fonctions récursives, comme en exemple la factorielle ci-dessous :

```
(define fact
 (lambda (n)
  (if (eq? n 0)
    1
    (* n (fact (- n 1))))))
```

Nous devons capturer l'environnement existant au moment de la définition de la fonction. Cet environnement existant ne contient pas déjà la définition de `fact`.

Il y a trois possibilités pour traiter ce problème de représentation d'un environnement *récursif*.

1. Utiliser une structure de liste qui permet à l'environnement capturé lors de la cloture de la lambda de boucler sur lui-même La matérialisation de cette boucle ne peut à ma connaissance qu'être réalisée par un type liste *mutable*.

   Comment construire un environnement qui contient la fonction que l'on est en train de définir ?

   ```
   envRec =  (fac, <lambda corps>, envRec) :: env
   ```

   C'est une équation de point fixe...

   On remarquera également que le `letrec` de SCHEME peut être sémantiquement remplacé par un `let` associé de `set!` Et de la même manière, nous pouvons faire cette opération en ML, avec l'unique nuance est que le `let` temporaire représente bien une fonction pour que la cohérence des types soit assurée.

   ```
   SCHEME
   (letrec ((f e))
     corps)
   ```

```
  ==>
 (let ((f 'any))
    (let ((f-aux e))
       (set! f f-aux)
       corps))

(let ((fact 'any))
      (let ((f-aux (lambda (n) (if (eq? n 0) 1 (* n (fact (- n 1)))))))
        (set! fact f-aux))
  (fact 5))

OCAML
let fact = ref (function x -> x) in
  let aux n = if n=0 then 1 else n * !fact (n - 1) in
   fact:= aux ; !fact 5
```

2. Dans le cas de fonction récursive, ne plus nous reposer sur l'environnement mais, comme en λ-calcul, utiliser un combinateur de point fixe qui permet de calculer le point fixe de notre fonction, sans avoir à la nommer.

   Nous allons utiliser ce procédé dans l'implémentation ML de notre interprète Scheme.

   Nous rappelons ci-dessous un exemple de combinateur implémenté en SCHEME, et comment il peut être utilisé.

```
(define Y
(lambda(f)
 (let ((g (lambda (h) (lambda(x) ((f (h h) x))))))
  (g g))))

(define F*
  (lambda (f)
    (lambda (n)
      (if (eq? n 0)
          1
          (* n (f (- n 1)))))))

 (define fact (Y F*))
```

3. La troisième approche est de modéliser l'environnement par une fonction, et non plus une liste d'association. La consultation de l'environnement consiste à appliquer la fonction `env` qui le représente.

   Considérons l'expression `(letrec ((x1 e1) ... (xn en)) corps)` qui, on le rappelle, est équivalente à `((lambda (x1 ... xn) corps) e1 ... en)`

   L'environnement capturé `envRec` au moment de la définition de la lambda doit correspondre à l'environnement étendu aux `xi` dont les valeurs sont données par l'évaluation des `ei` de la lambda dans cet environnement `envRec` C'est nécessaire afin que les `ei` puissent faire appel à des références récursives des `xi`.

Nous avons ainsi (et à nouveau) une équation de point fixe :

$$envRec(x_i) = eval(e_i, envRec)$$
$$envRec(x_i) = env(x_i) \ si \ x_i \notin letrec$$

4.3 Un interprète Lisp avec le nouvel interprète MiniScheme ...

La mise en abyme

Pour obtenir cet effet, suivez-moi, j'invente un personnage de romancier, que je pose en figure centrale ; et le sujet du livre, si vous voulez, c'est précisément la lutte entre ce que lui offre la réalité et ce que, lui, prétend en faire. [7]
Les Faux-monnayeurs. André Gide

Καὶ εἶπεν ὁ θεὸς πρὸς Μωυσῆν Ἐγώ εἰμι ὁ ὤν.
Exode 3, 14. La Septante

FIGURE 4.1 – Gumpp

Lisp mis en abyme

C'est ici un exercice assez classique. Nous avons fait le choix d'un interprète avec liaison dynamique. Nous aurons ainsi l'évaluation suivante retournant 13 et non 10.

```
((evaluate
'(let ((a 1))
  (let ((f (lambda (b) (+ b a))))
   (let ((a 3)) (f 10)))
)) env)
```

En outre, il n'est pas nécessaire d'avoir un mécanisme de point fixe ou d'environnement récursif pour l'appel d'une fonction récusrsive. C'est l'un des avantages de la liaison dynamique.

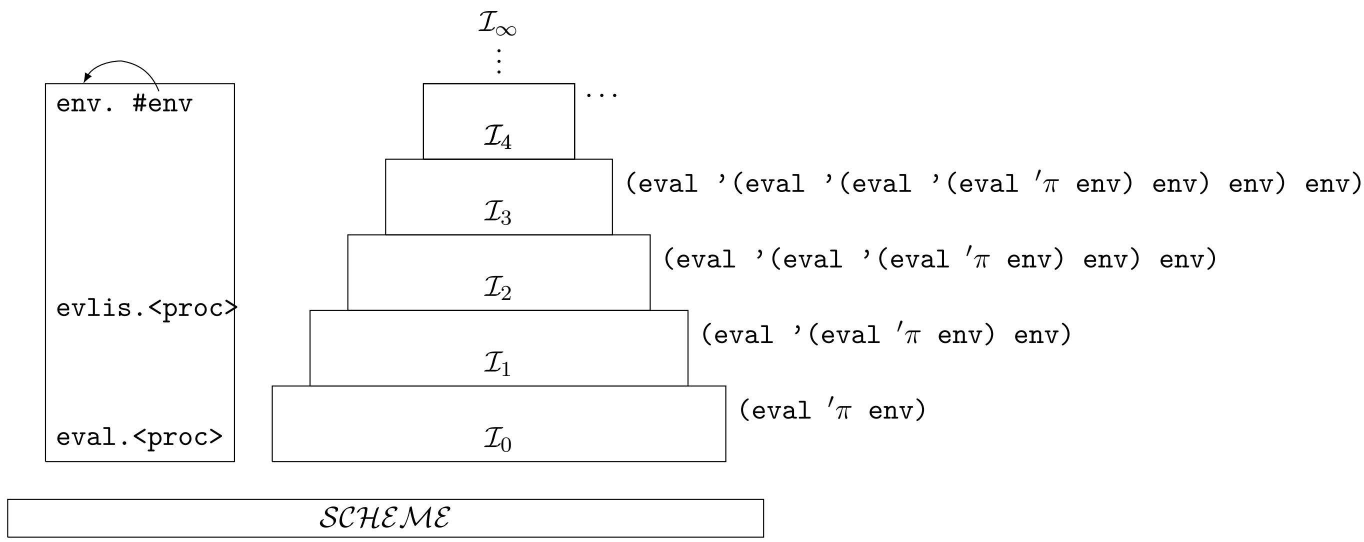
```
((evaluate
 '(let ((fact (lambda (n) (if (= n 0) 1 (* n (fact (- n 1)))))))
   (fact 6)))
 env)
```

4.4 L'auto-interprétation de l'interprète

En rendant explicite la procédure `eval` et ses acolytes `evlis, invoke, ...` dans l'environnement `env` , la procédure `evaluate` pourra être évaluée par elle-même. Le premier argument évalué de la fonction est le symbole `env`. Ce symbole devra être contenu dans l'environnement `env`, c'est-à-dire dans lui-même. . .

Nous avons `(eval '(eval '`π` env) env)` $\equiv$ `(evaluate '`π` env)`

4.4.1 La tour de Babel




```
((evaluate (quote ((evaluate (quote ((evaluate (quote ((evaluate (quote (
  (lambda (x y) (+ x y)) (fact 5) (fact 6) )))
         env))) env))) env))) env)
```

L'environnement

L'environnement doit contenir la valeur du symbole `env`. Il doit faire référence à lui-même. Seule une liste mutable peut modéliser cette boucle infinie.

```
> env ; affichage de l'environnement récursif avec DrRacket
#0=((env . #0#)
    (not . #<procedure:...interpreter2.scm:15:17>)
    (= . #<procedure:...interpreter2.scm:16:15>)
    (* . #<procedure:...interpreter2.scm:17:17>)
    (- . #<procedure:...interpreter2.scm:18:17>)
    (+ . #<procedure:...interpreter2.scm:19:17>)
    (atom? . #<procedure:...interpreter2.scm:20:19>)
    (boolean? . #<procedure:...interpreter2.scm:21:22>)
    (number? . #<procedure:...interpreter2.scm:22:21>)
    (cons . #<procedure:...interpreter2.scm:23:18>)
    (car . #<procedure:...interpreter2.scm:24:17>)
```

```
(cdr . #<procedure:...interpreter2.scm:25:17>)
(pair? . #<procedure:...interpreter2.scm:34:19>)
(apply . #<procedure:...interpreter2.scm:36:22>)
(fact . #<procedure:...interpreter2.scm:46:20>)
(lookup . #<procedure:...interpreter2.scm:53:21>)
(eprogn . #<procedure:...interpreter2.scm:63:21>)
(evlis . #<procedure:...interpreter2.scm:74:20>)
(invoke . #<procedure:...interpreter2.scm:85:14>)
(extend . #<procedure:...interpreter2.scm:94:18>)
(mapcar . #<procedure:...interpreter2.scm:105:18>)
(mapcadr . #<procedure:...interpreter2.scm:113:19>)
(evallet . #<procedure:...interpreter2.scm:121:6>)
(evaluate . #<procedure:...interpreter2.scm:128:16>))
```

4.4.2 Réification et réflexion

La *réification* est le fait de rendre concrète une chose abstraite. Dans le cas de notre tour de Babel, réifier un objet du langage d'implémentation le rendra accessible au langage implémenté. On peut citer l'exemple de la fonction `eval` rendant accessible dans Scheme le process d'évaluation. `(eval '`π`) =` π

L'autre exemple que nous implémenterons est la réification de la continuation courante, mis à disposition par la fonction `call/cc`. Cette fonction prend en argument une lambda avec un seul paramètre qui récupère la continuation courante de l'expression en cours d'évaluation.

```
E = (e1 e2 ... (call/cc (lambda (k) ei)) ... en)
```

Si `ei` ne fait pas appel à `k`, alors `ei` est évaluée normalement, ainsi que `E`. Dans le cas contraire, `k` est appelée, liée à la continuation courante. Le résultat de `ei` est ainsi rendue à cette continuation capturée `(e1 ... [] ... en)`. Autrement écrit `k = (lambda(v) (e1 ... v ... en))`

```
(+ 5 (call/cc (lambda (k) (* 2 (k 8)))))  = 12
```

L'environnement `global-env` partagé avec les différents interprètes $\mathcal{I}_i$ de notre tour de babel est aussi considéré comme un environnement réifié. L'environnement du langage d'implémentation est ici mis à disposition aux langages implémentés.

La *réflection* peut être vue comme l'opération inverse de la réification. Elle permet la mise à disposition dans le langage d'implémentation un objet du langage implémenté. Comme exemple, citons la fonction `quote` qui n'évalue pas son argument et le rend tel quel. `quote` est une primitive du langage Scheme dans le sens où il n'est pas possible de redéfinir cette fonction avec les autre éléments du langage. Avec l'implémentation de l'interprète $\mathcal{I}_R$ permettant les opérations de réflection et réification, cela deviendra possible.

Pour faire court, la réflection est une opération d'abstraction ; la réification est l'application d'une abstraction. Ce sont ainsi deux opérations réciproques. Voici ce que nous donne pour information la définition du terme *abstraction* recherché dans notre dictionnaire.

Définition 9. *L'abstraction désigne le produit de l'opération qui consiste à isoler par la pensée une ou plusieurs qualités d'un objet concret pour en former une représentation intellectuelle*

réification	program vers data	`((reifier-to-cloture proc) (cdr e) r k)`
réflection	data vers program	`(cloture-to-reifier (lambda (e r k) exp))`

L'interprète par continuation

La fonction d'évaluation sera enrichie pour prendre trois arguments, le programme π à évaluer, l'environnement ρ et la continuation κ

$$\texttt{(eval } \pi\ \rho\ \kappa \texttt{)} \leadsto \texttt{ valeur}$$

Nous reprenons ici le code de l'excellent article *a Simple Reflective Interpreter* [23] La fonction `evaluate` implémente un interprète Lisp en mode CPS de manière très naturelle. La valeur ajoutée de l'article est la modélisation des fonctions. Trois types sont disponibles et distinguées par un tag dans l'environnement.

1. Les fonctions utilisateurs `(cloture (parl) exp env)`
2. Les fonctions réifiées `(reifier (e r k ) exp )`
3. Les fonctions primitives `(primitive nom )`

L'application d'une fonction utilisateur se fait de manière classique par une évaluation du corps de la lambda sur un environnement étendu aux nouvelles liaisons entre paramètres et arguments préalablement évalués.

Une fonction réifiée prend trois paramètres `e`, `r` et `k`.

— `e` est lié à la liste des arguments non évalués de l'application.
— `r` est lié à l'environnement de l'interprète évaluant l'application.
— `k` est lié à la continuation de l'interprète évaluant l'application.

Ainsi, nous avons un contrôle *complet* de la fonction réifiée : contrôle du corps de la fonction et des arguments non encore évalués par l'interprète sous-jacent, mais aussi la possibilité d'accéder à l'environnement et à la continuation courante. En bref, no limit, on peut tout définir. . .

Les fonctions `callcc` et `quote` seront très simplement codées de la manière suivante :

```
(define callcc (cloture-to-reifier (lambda (e r k) ((evaluate (car e) r id) k))))
(define quote (cloture-to-reifier (lambda (e r k) (k (car e) ))))
```

Dès le niveau 1 de notre tour, c'est-à-dire lorsque la fonction `evaluate` n'est plus évaluée par Scheme mais par elle-même, les formes spéciales `if, quote, begin, define` sont représentées par des fonctions réifiées. La fonction d'évaluation peut ainsi être réduite à son strict minimum :

```
(define evaluate
  (lambda (e r k)
    ((if (pair? e)
        (if (equal? (car e) 'lambda)
            eval-abstraction
            eval-application)
        (if (or (or (number? e) (string? e)) (boolean? e))
            eval-constante
            eval-variable))
     e r k )))
```

La fonction openloop peut être lancée à volonté et peut créer une succession de nouveaux étages dans notre tour de babel. Comme dans l'épisode biblique du livre de la Genèse[16], la faculté d'avoir un langage commun permet la construction d'une tour de hauteur potentiellement infinie. Nous nous retrouvons nous-même grisés par cette tour *dont la tête touche les cieux* (ἡ κεφαλὴ ἔσται ἕως τοῦ οὐρανοῦ). Nous citons ici la Septante (LXX).
L'enthousiasme de pouvoir monter dans les étages doit cependant être tempéré. Le fait d'être à l'étage $n+1$ n'apporte rien par rapport à l'étage n. L'application `eval` est idempotente car $\forall\pi$ `(eval '`π`)` $=$ `(eval (eval '`π`))`. Autrement dit, la valeur `(eval'`π`)` est un point fixe de `eval`.

FIGURE 4.2 – Bruegel

ΓΕΝΕΣΙΣ 11
1. Καὶ ἦν πᾶσα ἡ γῆ χεῖλος ἕν, καὶ φωνὴ μία πᾶσιν.
(...)
9. διὰ τοῦτο ἐκλήθη τὸ ὄνομα αὐτῆς Σύγχυσις, ὅτι ἐκεῖ συνέχεεν κύριος τὰ χείλη πάσης τῆς γῆς.
Toute la terre avait alors une même parole ; il y avait une seule langue pour tous.
À cause de cela, ce lieu fut appelé Babel (confusion), parce que là le Seigneur confondit les langues de toute la terre.

En pratique, malheureusement dès le niveau 3 de notre tour, les temps d'évaluation deviennent abominablement longs sur notre interprète maison implémenté en OCAML. Plusieurs minutes sont requises pour le calcul de la factorielle de cinq au niveau 3 de la tour. C'est un peux plus rapide avec DrRacket, mais pas tellement. Le poids des sous-couches d'interprétation est lourd. Dieu ne nous disperse pas ici par la confusion des langages, mais par la limitation de notre puissance de calcul ☺.

Voici le code complet de l'interprète au niveau 1. La fonction d'évaluation n'utilise pas ici les réifications des fonctions `if, quote, begin`.

```
(define evaluate
  (lambda (e r k)
    ((if (not (pair? e))
          (if (or (or (number? e) (string? e)) (boolean? e))
              eval-constante
              eval-variable)
          (if (equal? (car e) 'quote)
              eval-quote
              (if (equal? (car e) 'if)
               eval-if
                (if (equal? (car e) 'begin)
               eval-begin
               (if (equal? (car e) 'define)
                   eval-assign
                   (if (equal? (car e) 'lambda)
                       eval-abstraction
                       eval-application))))))
     e r k )))

(define eval-constante
  (lambda (e r k)
```

```
    (k e)))

(define eval-quote
  (lambda (e r k)
    (k (cadr e))))

(define eval-variable
  (lambda (e r k)
   (get-pair e r
   (lambda (success-pair)
    (k (cdr success-pair)))
    (lambda ()
    (wrong "symbol not bound " e)))))

(define eval-if
  (lambda (e r k)
    (evaluate (cadr e) r
              (lambda (v)
                (if v
                    (evaluate (caddr e) r k)
                    (evaluate (cadddr e) r k))))))

(define eval-assign
     (lambda (e r k)
       (evaluate (caddr e) r
                 (lambda (v)
                   (get-pair (cadr e) r
                             (lambda (success-pair)
                               (begin
                               (set-cdr! success-pair v)
                               (k (void)) ))
                             (lambda ()
                               (begin
                              (set-cdr! global-env (cons (car global-env)(cdr global-env)))
                              (set-car! global-env (cons (cadr e) v))
                              (k (void))))))))))

(define eval-define
  (lambda (e r k)
      (evaluate (caddr e) r
      (lambda (v)
      (update! (cadr e) r v)))))

(define eval-abstraction
  (lambda (e r k)
  (k (make-function (cadr e) (caddr e) r))))

(define get-pair
  (lambda (id r success failure)
    (find-pair id r
              success
              (lambda ()
                (find-pair
                   id global-env success failure) )) ))

(define find-pair
```

```
  (lambda (elt alist success failure)
    ( (lambda (assq-result)
        (if assq-result
            (success assq-result)
            (failure)) )
      (assq elt alist) ) ) )

(define make-function
  (lambda (varl corps r)
     (list 'cloture varl corps r)))

(define eval-application
  (lambda (e r k)
       (evaluate (car e) r
              (lambda (proc)
                (if (equal? (car proc) 'reifier)
                    ((reifier-to-cloture proc) (cdr e) r k)
                    (evlis (cdr e) r
                       (lambda (args)
                         (apply-procedure proc args k))))))))

(define evlis
  (lambda (e r k)
    (if (null? e)
        (k '())
        (evaluate (car e) r
                  (lambda (v)
                    (evlis (cdr e) r
                           (lambda (w)
                            (k (cons v w)))))))))

(define eval-begin
  (lambda (e r k)
    (eprogn (cdr e) r k)))

(define eprogn
  (lambda (e r k)
   (if (null? (cdr e))
       (evaluate (car e) r k)
       (evaluate (car e) r (lambda (v)
                             (eprogn (cdr e) r k))))))

(define extend
  (lambda (env variables values)
        (if (or (null? variables) (null? values))
            env
            (cons (cons (car variables) (car values))
                  (extend env (cdr variables) (cdr values))))))

(define apply-procedure
  (lambda (proc args k)
    (if (equal? (car proc) 'cloture)
        (eprogn (list (caddr proc))
                (extend (cadddr proc) (cadr proc) args)
                k)
        (k (apply-primitive (cadr proc) args)))))
```

```
(define apply-primitive
  (lambda (name args)
    (if (equal? name 'car)
        (car (car args))
     (if (equal? name 'or)
        (or (car args) (cadr args))
    (if (equal? name 'cdr)
        (cdr (car args))
    (if (equal? name 'cons)
        (cons (car args) (cadr args))
    (if (equal? name 'set-car!)
        (set-car! (car args) (cadr args))
    (if (equal? name 'set-cdr!)
        (set-cdr! (car args) (cadr args))
    (if (equal? name 'memq)
        (memq (car args) (cadr args))
    (if (equal? name 'assq)
        (assq (car args) (cadr args))
    (if (equal? name '=)
        (= (car args) (cadr args))
    (if (equal? name '+)
        (+ (car args) (cadr args))
    (if (equal? name '-)
        (- (car args) (cadr args))
    (if (equal? name '*)
        (* (car args) (cadr args))
    (if (equal? name 'null?)
        (null? (car args))
    (if (equal? name 'not)
        (not (car args))
    (if (equal? name 'symbol?)
        (symbol? (car args))
    (if (equal? name 'list)
        args
    (if (equal? name 'pair?)
        (pair? (car args))
    (if (equal? name 'read)
        (if (null? args) (read) (read (car args)))
    (if (equal? name 'eof-object?)
        (eof-object? (car args))
    (if (equal? name 'close-input-port)
        (close-input-port (car args))
    (if (equal? name 'newline)
        (newline)
    (if (equal? name 'equal?)
        (equal? (car args) (cadr args))
    (if (equal? name 'write)
        (write (car args))
    (if (equal? name 'display)
        (display (car args))
    (if (equal? name 'load)
        (load (car args))
    (if (equal? name 'number?)
        (number? (car args))
    (if (equal? name 'string?)
```

```
        (string? (car args))
    (if (equal? name 'boolean?)
        (boolean? (car args))
     "erreur apply primitive"))))))))))))))))))))))))))))))

(define mapper
  (lambda (f l)
    (if (null? l)
        '()
        (cons (f (car l)) (mapper f (cdr l))))))

(define primitive-identifiers
  (lambda ()
    '(placeholder car cdr cons + - * = set-car! set-cdr! memq assq null? equal? newline
      display read symbol? list pair? not load or number? string? boolean?)))

(define make-primitive
  (lambda (op)
    (list 'primitive op)))

(define reifier-to-cloture
  (lambda (reifier)
    (cons 'cloture (cdr reifier))))

(define cloture-to-reifier
  (lambda (cloture)
    (cons 'reifier (cdr cloture))))

(define make-reifier
  (lambda (formals body r)
    (list 'reifier formals body r)))

(define global-env '())

(define initialize-global-env
  (lambda ()
     (define global-env
      (extend global-env
          (primitive-identifiers)
          (mapper make-primitive
                  (primitive-identifiers))))))

(define openloop
  (lambda (read-prompt write-prompt)
    (begin
    (display read-prompt)
    (evaluate (read) '()
              (lambda (v)
                (begin
                (display write-prompt)
                (if (equal? v (void))
                  "rien a afficher"
                  (display v))
                (newline)
                (openloop read-prompt write-prompt)))))))
```

```
(define babel
  (lambda ()
      (begin
      (set-car! global-env (cons 'global-env global-env ))
      (openloop "i0 " "i0 "))))
```

Chapitre 5

La compilation

5.1 Compilation des λ-termes en termes applicatifs

Il existe un formalisme appelé *Logique Combinatoire* qui permet de construire un calcul sans variables liées. C'est surprenant, mais ces variables liées qui sont introduites par abstraction puis éliminées par application ne sont finalement pas essentielles pour le calcul.

Comment traduire une abstraction en termes applicatifs ? Nous allons définir une traduction $M \mapsto M_{@}$, ainsi qu'une traduction en sens inverse $A \mapsto A_{\lambda}$.

L'idée est de partir sur les règles de traduction suivantes :

$$\begin{array}{lcl} \lceil \lambda x.x \rceil & = & I \\ \lceil \lambda x.M \rceil & = & KM \quad (x \notin M) \\ \lceil \lambda x.MN \rceil & = & S\lceil \lambda x.M \rceil \lceil \lambda x.N \rceil \quad (x \in M, N) \end{array}$$

où $\lceil T \rceil$ représente le λ-terme T sans lambda abstraction.

Nous serions tentés de vouloir faire directement la traduction en utilisant ces règles. Il nous faut cependant passer par un opérateur d'abstraction $A \mapsto [x].A$ qui permettra de "supprimer" toutes les lambdas en profondeur dans le λ-terme, puis seulement ensuite, nous pourrons utiliser les trois règles ci-dessous :

$$\begin{array}{lcl} [x].x & \equiv & I \\ [x].A & \equiv & KA \quad (x \notin A) \\ [x].AB & \equiv & S([x].A)([x].B) \quad (x \in A, B) \end{array}$$

Les combinateurs I, K et S sont définis comme ceci :

$$\begin{array}{rcc} I & = & \lambda x.x \\ K & = & \lambda xy.x \\ S & = & \lambda xyz.xz(yz) \end{array}$$

Et voici la définition de la traduction des λ-termes en termes applicatifs.

$$\begin{array}{lcl} (x)_{@} & \equiv & x \\ (PQ)_{@} & \equiv & (P)_{@}(Q)_{@} \\ (\lambda x.M)_{@} & \equiv & [x].(M)_{@} \end{array}$$

Dans la définition de notre type applicatif `ski`, nous incluons aussi notre opérateur $[x].A$ avec le constructeur `Op`.

```
type ski =
| Varia of string
| I
| K
| S
| Appl of ski*ski
| Op of string * ski ;;

exception SkiExec

let rec lambda_ski = function
| Lam(x, t) -> lambda_ski_op (Op(x, lambda_ski t))
| Var(x) -> Varia(x)
| App(m,n) -> Appl(lambda_ski m, lambda_ski n)
and lambda_ski_op = function
| Op(x,Varia y) when x=y -> I
| Op(x, t) when not (mem x (var t)) -> Appl(K, t)
| Op(x, Appl(m, n))  when (mem x (var m)) || (mem x (var n))
    -> Appl(Appl(S, (lambda_ski_op (Op(x,m)))), (lambda_ski_op (Op(x,n))))
| _ -> raise SkiErreur
```

A titre d'exemple, traduisons notre combinateur y en termes applicatifs :

```
utop # print_ski (lambda_ski y) ;;
((S((S((S(KS))((S(KK))I)))(K((SI)I))))((S((S(KS))((S(KK))I)))(K((SI)I))))
```

Une fois le code compilé, son exécution sera réalisée avec les règles de réécriture :

$$\begin{array}{rcl} Ix & \longrightarrow & x \\ Kxy & \longrightarrow & x \\ Sxyz & \longrightarrow & xz(yz) \end{array}$$

Voici une première version de l'exécution de ces règles de réécriture. Ce code un est peu bourrin car on appelle la fonction tant que le terme n'est pas réduit.

```
let rec exec_aux = function
| Appl(I, x) -> exec_aux x
| Appl(Appl(K, x), y) -> exec_aux x
| Appl(Appl(Appl(S,x),y),z) -> Appl(Appl(exec_aux x, exec_aux z), Appl(exec_aux y,exec_aux z))
| Appl(x,y) -> Appl(exec_aux x, exec_aux y)
| Varia x -> Varia x
| I -> I
| K -> K
| S -> S
| _ -> raise SkiErreur
and  exec t =
let r = exec_aux t in
  if r=t then r else exec_aux r
```

Voici une version plus élégante qui retourne la forme réduite.

```
let rec ski_norm m =
match m with
| S | K | I -> m
| Varia x -> m
| Appl (m0, m1) ->
match ski_norm m0 with
| I -> ski_norm m1
| Appl (K, m') -> m'
| Appl (Appl (S, m3), m2) -> ski_norm (Appl (Appl (m3, m1), Appl (m2, m1)))
| autre -> Appl (autre, ski_norm m1);;
```

La traduction en sens inverse $A \mapsto A_\lambda$ se fait naturellement par la fonction ML ci-dessous :

```
let rec ski_lambda = function
| I -> Lam("x", Var "x")
| K -> Lam("x", Lam("y", Var "x"))
| S -> Lam("x", Lam("y", Lam("z", App(App(Var "x", Var "z"), App(Var "y", Var "z")))))
| Varia(x) -> Var(x)
| Appl(m,n) -> App(ski_lambda m,ski_lambda n)
| _ -> raise SkiErreur
```

Utilisons l'exemple de la factorielle, exemple complexe car il comporte les représentations en λ-termes du combinateur Y, de la condition *if-then-else*, des entiers *Church* ainsi que les opérations *plus, moins, mult.* [1]

```
print_terme (betaNormal (ski_lambda (exec (lambda_ski (App(fact, trois)))))) ;;
λz.λz0.z (z (z (z (z (z z0) ) ) ) ) - : unit = ()
```

Nous avons les deux propriétés suivantes que nous ne démontrerons pas.

1. Si $A \xrightarrow{*}_\beta B$, alors $A_\lambda \xrightarrow{*}_\beta B_\lambda$

2. $(M_@)_\lambda \xrightarrow{*}_\beta M$

Cependant, nous aurons parfois $M \longrightarrow_\beta N$ sans que $M_@ \longrightarrow_@ N_@$

Par exemple $SK \xrightarrow{*}_\beta 0$ mais SK est irréductible pour $\longrightarrow_@$

```
utop # betaNormalPrint sk ;;
[1] -> λx.λy.λz.x z (y z)  λx.λy.x
[2] -> λy.λz.λx.λy.x z (y z)
[3] -> λy.λz.λy.z (y z)
[4] -> λy.λz.z
- : unit -> unit = <fun>

utop # exec (Appl(S,K)) ;;
- : ski = Appl (S, K)
```

1. Ce résultat est obtenu après quelques minutes...

D'autre part, on n'a pas nécessairement $(A_\lambda)_@ =_@ A$.

Par exemple $(K_\lambda)_@ \equiv S(KK)I$ ne se réduit pas en K.

```
utop # exec (lambda_ski k) ;;
- : ski = Appl (Appl (S, Appl (K, K)), I)

betaNormalPrint (App(App(s, App (k, k)), i)) ;;
[1] -> λx.λy.λz.x z (y z)  (λx.λy.x λx.λy.x)  λx.x
[2] -> λy.λz.λx.λy.x λx.λy.x z (y z)  λx.x
[3] -> λz.λx.λy.x λx.λy.x z (λx.x z)
[4] -> λz.λy.λx.λy.x z (λx.x z)
[5] -> λz.λx.λy.x (λx.x z)
[6] -> λz.λy.λx.x z
[7] -> λz.λy.z
- : unit -> unit = <fun>
```

On peut constater que $(SKK)x \xrightarrow{*}_\beta x$, donc le terme SKK joue le même rôle que la constante I.

```
let skk = Appl(Appl(S,K),K) ;;
exec (Appl(skk, Varia "x")) ;;
- : ski = Varia "x"
```

ou plus directement en OCAML :

```
utop #
let k x y = x
and s x y z = (x z (y z))
  in (s k k) "toto ";;
- : string = "toto "
```

La base combinatoire $\{S, K\}$ suffit donc au λ-calcul. Une base à un seul élément existerait même...

La correspondance de Curry-Howard

Dans un λ-calcul typé, les types des combinateurs K et S correspondent aux deux axiomes des systèmes hilbertiens :

$$S : (\phi \Rightarrow (\chi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow ((\phi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\phi \Rightarrow \psi))$$

$$K : \phi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \phi)$$

L'inférence de type OCAML nous donne en effet `k : 'a -> 'b -> 'a` et
`s : ('a -> 'b -> 'c) -> ('a -> 'b) -> 'a -> 'c`

logique combinatoire	*système hilbertien*
type	formule
application (**App**)	modus ponens
combinateurs S et K	noms des axiomes S et K
type des combinateurs S et K	axiomes S et K
variable	nom d'une hypothèse
type d'une variable	hypothèse

L'unique règle d'inférence, la règle du modus ponens, est ainsi modélisée par l'application

$$(App) : \frac{\phi \Rightarrow \psi \quad \phi}{\psi}$$

Dans le système hilbertien, il n'y a pas de règle d'introduction $(I_{\Rightarrow}) : \frac{[\phi] \quad \chi}{\phi \Rightarrow \chi}$ qui équivalait à une abstraction $\lambda x^{\phi}.y^{\psi}$

Le modus ponens et les axiomes permettent de simuler $(I_{\Rightarrow})$ de la même façon que l'abstraction du λ-calcul est simulée à l'aide des constantes S et K en logique combinatoire.

5.2 Compilation basique vers une machine à pile

Nous utilisons l'implémentation ci-dessous pour la représentation des piles sous formes de listes mutables.

```
type 'a pile = 'a list ref ;;
let empiler x p = p := x :: !p ;;

exception Vide ;;

let depiler p =
  match !p with
  | [] -> raise Vide
  |x::t -> p:=t ; x ;;

let sommet p =
  match !p with
  | [] -> raise Vide
  | x::t -> x  ;;
```

La machine à pile exécutera les instructions suivantes :
`["EMPILER"; "nombre"],["ADD"], ["SUB"], ["MUL"], ["STOP"]`

La lecture d'une instruction est réalisée par la fonction `fetch`. Cette fonction parcourt de manière linéaire le code représenté par un *array*. Chaque `fetch` incrémente la variable `pc` qui représente le *program counter*.

```
exception Erreur ;;

let executer code =
  let pc = ref 0 in
  let pile = ref [] in
  let fetch code  =
  begin
    pc := !pc + 1 ;
    Array.get code (!pc - 1)
```

```
  end
  in
  let rec exec () =
    let instr = fetch code in
    match instr with
    | ["EMPILER"; n] -> ( empiler (int_of_string n) pile ; exec () )
    | ["ADD"] -> let v2 = depiler pile in let v1 = depiler pile in
                ( empiler (v1 + v2) pile ; exec () )
    | ["SUB"] -> let v2 = depiler pile in let v1 = depiler pile in
                ( empiler (v1 - v2) pile ; exec () )
    | ["MUL"] -> let v2 = depiler pile in let v1 = depiler pile in
                ( empiler (v1 * v2) pile ; exec () )
    | ["STOP"] -> print_int (sommet pile)
    | _ -> raise Erreur
  in exec ()
```

Voici l'exécution de la machine à pile :

```
let code = [| ["EMPILER"; "10"] ;["EMPILER"; "15"] ; ["ADD"] ;
              ["EMPILER"; "4"] ; ["MUL"] ; ["STOP"] |] ;;

# executer code ;;
# 100- : unit = ()
```

5.2.1 Certification de la compilation avec le langage Coq

Quod erat demonstrandum.

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[r, "\text{sémantique du compilateur}"'] \arrow[d, "\text{sémantique du langage}"] & c \arrow[d, "\text{sémantique de la machine}"] \\
v_1 \arrow[r, dash, dashed, "\forall e, eval(e) = exe(compile\ e)", "v_1 = v_2"'] & v_2
\end{tikzcd}$$

```
Require Import Arith.
Require Import ZArith.
Require Import Bool.
```

```
Require Import List.

Inductive exp : Set :=
  | Const : nat → exp
  | Fois : exp → exp → exp
  | Plus : exp → exp → exp.

Fixpoint expEval (e :exp) : nat :=
  match e with
  | Const n ⇒ n
  | Fois e1 e2 ⇒ mult (expEval e1) (expEval e2)
  | Plus e1 e2 ⇒ plus (expEval e1) (expEval e2)
  end.

Inductive instr : Set :=
 | EMPILER : nat → instr
 | ADD : instr
 | MUL : instr
.

Definition programme := list instr.
Definition pile := list nat.

Definition instrExec (i :instr) (s : pile) : option pile :=
  match i with
  | EMPILER n ⇒ Some (n : : s)
  | ADD ⇒
     match s with
     | arg1 : : arg2 : : s' ⇒ Some (expEval (Plus (Const(arg1)) (Const(arg2))) : : s')
     | _ ⇒ None
     end
  | MUL ⇒
     match s with
     | arg1 : : arg2 : : s' ⇒ Some (expEval (Fois (Const(arg1)) (Const(arg2))) : :s')
     | _ ⇒ None
     end
  end.

Fixpoint progExec (p :programme) (s :pile) : option pile :=
  match p with
  | nil ⇒ Some s
  | i : : p' ⇒
      match instrExec i s with
      | None ⇒ None
      | Some s' ⇒ progExec p' s'
      end
  end.

Fixpoint compile (e :exp) : programme :=
  match e with
  | Const n ⇒ EMPILER n : : nil
```

```
  | Plus e1 e2 ⇒ compile e2 ++ compile e1 ++ ADD : : nil
  | Fois e1 e2 ⇒ compile e2 ++ compile e1 ++ MUL : : nil
  end .

Eval compute in (compile (Const 1999)) .
Eval compute in (compile (Fois (Plus (Const 1999) (Const 1)) (Const 5))) .
Eval compute in ( progExec (compile (Fois (Plus (Const 1999) (Const 1)) (Const 5))) nil) .

Lemma compile_correct_lemme : ∀ (e :exp) (p : programme) (s : pile),
                              progExec (compile e++p) s = progExec p (expEval e : :s)
 .
 induction e.
 intros.
 unfold compile.
 unfold expEval.
 unfold progExec at 1.
 simpl.
 fold progExec.
 reflexivity.

 intros.
 unfold compile. fold compile.
 unfold expEval. fold expEval.
 rewrite app_assoc_reverse.
 rewrite IHe2. rewrite app_assoc_reverse.
 rewrite IHe1.
 unfold progExec at 1. simpl. fold progExec. reflexivity.

 intros.
 unfold compile. fold compile.
 rewrite app_assoc_reverse. rewrite IHe2.
 rewrite app_assoc_reverse.
 unfold progExec at 1. simpl. fold progExec.
 rewrite IHe1.
 unfold progExec at 1. simpl. fold progExec. reflexivity.

 Qed.

Theorem compile_correct : ∀ e : exp, Some ((expEval e) : : nil) = (progExec (compile e) nil).
intros.
rewrite (app_nil_end (compile e)).
rewrite compile_correct_lemme.
reflexivity.
Qed.

Print compile_correct.
```

5.3 Compilation du Lisp vers une machine abstraite

La machine SECD

La machine SECD inventée par Landin est une machine abstraite utilisant quatre composants :
— S, la pile ou *stack* permettant de stocker les résultats intermédiaires puis le résultat final
— E, l'environnement d'éxecution
— C, le code
— D, le dump permettant de stocker les valeurs courantes S,E,C le temps d'un calcul local d'une fonction

Nous devons implémenter deux fonctions.

La fonction de compilation `compile` qui prend en argument une expression LISP, un environnement de compilation et l'accumulateur du code compilé. Nous ferons travailler la fonction `compile` sur la syntaxe abstraite pour plus de facilité.

La fonction d'éxecution `exe s e c d` prend en arguments les quatre composantes de la machine abstraite.

La compilation $C : exp \rightsquigarrow$ `code`

`c` $\rightsquigarrow$ `CONST`(c)
`n` $\rightsquigarrow$ `ACCESS`(n)
`(+ a1 a2)` $\rightsquigarrow$ $C(a_1); C(a_2);$ `ADD`
`(- a1 a2)` $\rightsquigarrow$ $C(a_1); C(a_2);$ `SUB`
`(= a1 a2)` $\rightsquigarrow$ $C(a_1); C(a_2);$ `CMP`
`((lambda (v1...vn) body) e1...en)` $\rightsquigarrow$ `NIL;` $C(v_1)$`;ARG;`$\ldots C(v_n)$`;ARG;CLOSURE(`$C(body)$`;RTS);JSR`

La table de transition de la machine SECD

état avant				**état après**			
S	E	C	D	S	E	C	D
s	e	`CONST`$(cst); c$	d	$cst.s$	e	c	d
$n_2.n_1.s$	e	`ADD`$; c$	d	$(n_1 + n_2).s$	e	c	d
$n_2.n_1.s$	e	`SUB`$; c$	d	$(n_1 - n_2).s$	e	c	d
$n_2.n_1.s$	e	`CMP`$; c$	d	$(n_1 = n_2).s$	e	c	d
s	e	`ACCESS`$(n); c$	d	$e(n).s$	e	c	d
construction d'une liste d'arguments							
s	e	`NIL`$; c$	d	$[\ ]$	e	c	d
$v_1.v_2.s$	e	`ARG`$; c$	d	$v_1 @ v_2.s$	e	c	d
la conditionnelle							
$v.s$	e	`BRANCH`$(c_1, c_2); c$	d	s	e	$c_1; c$	d
$v.s$	e	`BRANCH`$(c_1, c_2); c$	d	s	e	$c_2; c$	d
le traitement d'une clôture							
s	e	`CLOSURE`$(f); c$	d	`CLOS`(f, e)	e	c	d
application d'une lambda avec les instructions `JSR,RTS`							
`CLOS`$(f, e_0).largs.s$	e	`JSR`$; c$	d	$[\ ]$	$largs :: e_0$	f	`ENVEXE`$(s, e, c).d$
$v.s$	e	`RTS`$; c$	`ENVEXE`$(s_1, e_1, c_1).d$	$v.s_1$	e_1	c_1	d

L'implémentation en Ocaml

```
let rec compile envc exp codesuivant  =
  match exp with
  | Atom (Entier n) -> CONST n :: codesuivant
  | Var s -> ACCESS (adresse s envc) :: codesuivant
  | Call (f, args) -> compile_call envc f args codesuivant
  | Let (decl,expl) -> compile_let envc decl expl codesuivant
  | If (cond, exp1, exp2) -> compile_if envc cond exp1 exp2 codesuivant
  | Lambda (parl, bodyl) -> compile_lambda envc parl bodyl codesuivant
  | _ -> raise (Erreur "compile")

and compile_lambda envc parl bodyl codesuivant =
  (CLOSURE ((compile (parl::envc) (hd bodyl)  [RTS])) ) :: codesuivant

and compile_if envc cond exp1 exp2 codesuivant =
   let code_si = compile envc exp1 codesuivant
   and code_sinon = compile envc exp2 codesuivant
in compile envc cond ( BRANCH(code_si,  code_sinon) :: codesuivant )

and compile_call envc f args codesuivant  =
match f with
 | Var "+" -> compile_app  envc args  (ADD :: codesuivant)
 | Var  "-"  -> compile_app  envc args  (SUB :: codesuivant)
 | Var  "="  -> compile_app  envc args  (CMP :: codesuivant)
 | _ -> compile_larg envc args (compile envc f (JSR :: codesuivant))

and
compile_app envc args codesuivant =
  if args = [] then codesuivant
  else  compile envc (hd args) (compile_app envc (tl args) codesuivant)
and compile_let envc decl expl codesuivant =
  let lvar = map fst decl
  in let lexp = map snd decl
  in compile envc (Call(Lambda(lvar, expl),lexp)) codesuivant
and compile_larg envc lexp codesuivant =
  let rec aux lexp codesuivant =
    match lexp with
    | [] -> codesuivant
    | a::b -> aux b (compile envc a (ARG::codesuivant))
  in NIL::(aux lexp codesuivant)

let rec exe s e c d =
  if (List.length c) = 0 then hd s
  else
    match (hd c) with
  | ADD ->  let Entier(n2) = hd (hd s) and Entier(n1) = hd (hd (tl s)) in
              exe ([Entier(n1+n2)]:: (tl (tl s))) e (tl c) d
  | SUB ->  let Entier(n2) = hd (hd s) and Entier(n1) = hd (hd (tl s)) in
              exe ([Entier(n1-n2)]:: (tl (tl s))) e (tl c) d
  | CMP ->  let Entier(n2) = hd (hd s) and Entier(n1) = hd (hd (tl s)) in
                exe ([Booleen(n1=n2)]:: (tl (tl s))) e (tl c) d
  | CONST n ->  exe ([Entier n]::s)  e (tl c) d
  | NIL ->  exe ([]::s) e (tl c) d
  | ARG ->    let v1 = hd s
              in let v2 = hd (tl s)
```

```
            in  exe ((v1 @ v2)::(tl (tl s))) e (tl c) d
| ACCESS sy ->  exe ([lire_env sy e]::s) e (List.tl c) d
| BRANCH(code_si, code_sinon) ->
      let v = hd (hd s) in
            if (v = Booleen(true)) then exe (tl s) e (code_si @ (tl c)) d
            else exe (tl s) e ( code_sinon @ (tl c)) d
| CLOSURE(fonc) ->  exe ([CLOS(fonc,e)]::s) e (tl c) d
| JSR -> let CLOS(corps, e0) = hd (hd s) in
        let larg = hd (tl s) in
          exe [] (larg::e) corps ((ENVEXE(tl (tl s), e, (tl c)))::d)
| RTS -> let ENVEXE(s1, e1, c1) = hd d
        and v = hd s in
        exe (v::s1) e1 c1 (tl d)
```

Chapitre 6

La résolution

6.1 Représentation des termes finis

Nous reprenons ici le très bon formalisme du livre de *Lalement* [14].

Les symboles de constante `true`, `158`, les symboles de fonctions unaires `not`, `+`, les symboles de fonctions binaires `or`, etc. constituent la signature Σ du langage. Si f est d'arité $n \geq 1$, alors f est un symbole fonctionnel, et si f est d'arité 0, f est un symbole de constante. Nous ajoutons à Σ un ensemble X de symboles de variables.

L'ensemble des termes $T_{\Sigma \cup X}$ est défini de la manière suivante :

— si $c \in \Sigma$ et c d'arité 0, alors $c \in T_{\Sigma \cup X}$

— si $f \in \Sigma$ et f d'arité $n \geq 1$ avec $M_1, \ldots, M_n \in T_{\Sigma \cup X}$, alors $fM_1 ... M_n \in T_{\Sigma \cup X}$

— si $x \in X$, alors $x \in T_{\Sigma \cup X}$

Nous pouvons représenter les termes en Ocaml avec le type abstrait suivant :

```
type terme =
| Var of string
| Func of string * terme list
```

En fait, quasiment tous les objets que nous manipulerons pourront être modélisés par des termes.

Considérons nos termes préférés : les **entiers naturels**. D'après Kronecker, *God made the integers, all the work is the rest of man* (traduit ici de l'Allemand par Kleene[12])

Prenons l'exemple suivant pour définir le *type* des entiers naturels à partir de la signature $\Sigma = \{0, S\}$ Les symboles O et S sont respectivement d'arité 0 et 1. Nous avons ainsi :

$$T_\Sigma = \{0, S0, SS0, SSS0, ...\}$$

En Ocaml, nous pourrons écrire :

```
type entiers = Zero | S of entiers
```

En Prolog :

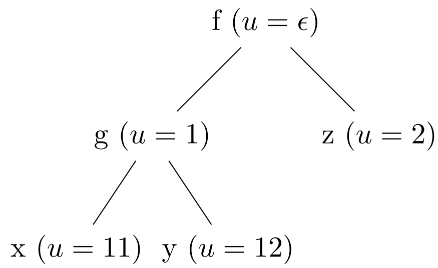
```
entiers(zero).
entiers(s(X)) :- entiers(X)
```

En Coq :

`Inductive` *entiers* : `Set` := *Zero* : *entiers* | *S* : *entiers* → *entiers* .

Les termes se représentent naturellement sous forme d'arbres.

Prenons par exemple le terme `Func("f", [Func("g", [Var "x"; Var "y"]); Var "z"])` Il sera représenté par l'arbre ci-dessous annoté de ses occurences $u \in \mathcal{O}(M)$:



Pour tout terme M, on définit :

— L'ensemble $\mathcal{O}(M)$ des occurences de M
— Le symbole $M(u)$ en u pour $u \in \mathcal{O}(M)$
— Le sous-terme $M|_u$ de M en u, pour $u \in \mathcal{O}(M)$

Dans le cas où $M = c \in \Sigma$, alors $\mathcal{O}(M) = \{\epsilon\}$, $M(\epsilon) = c$, $M|_\epsilon = c$

Dans le cas où $M = fM_1 \dots M_n$, alors :

$$\mathcal{O}(M) = \{\epsilon\} \cup \bigcup_{i=1}^{n} i.\mathcal{O}(M_i)$$

Avec les égalités suivantes pour les sous-termes $M|_\epsilon = f$ et $M|_{i.u} = M_i|_u$
et de manière équivalente pour les symboles $M(\epsilon) = f$ et $M(i.u) = M_i(u)$

Nous implémentons cela avec un peu de difficulté pour les conversions `string` vers `int` nécessaire à la manipulation des occurences u. On considère ici qu'un arbre ne peut avoir plus de 9 fils, donc un seul digit permet de définir le numéro du noeud associé.

```
open String

let rec occurences i terme  =
match terme with
|Var _ | Func(_, []) ->  [i]
|Func (_, m) ->  [i] @ occur_liste 1 i  m
and occur_liste  c  i lterme =
match lterme with
| [] -> []
| a::b -> (occurences (int_of_string((string_of_int(i)^(string_of_int c)))) a)
          @ occur_liste (c+1) i b

let reste s =
  if (length s) <= 1 then "0"
  else sub s 1 ((length s) -1)
```

```
let string_of_char = String.make 1 ;;

let rec cut i terme =
  match terme with
  | Var _ | Func(_, []) when i=0 -> terme
  | Func(f, lt) -> if i=0 then terme
                   else subterme (int_of_string(string_of_char((string_of_int i).[0])))
                                 (int_of_string(reste (string_of_int i)))
                                 lt
  | _ -> raise Impossible
and subterme i u ltermes =
  match ltermes with
  | hd::tl -> if (i=1) then  cut u hd else  subterme (i-1) u tl
  | [] -> raise Impossible
```

Nous pouvons aussi définir l'opération de *greffe* à une occurence u donnée. Nous utiliserons l'écriture $M[N]_u$ pour signifier que le terme M reçoit à l'occurence u son greffon N.

```
let rec greffe i terme greffon =
match terme with
| Var _ | Func(_, []) when i=0 -> greffon
| Func(f, lt) -> if i=0 then greffon
         else Func(f, greffeltermes (int_of_string(string_of_char((string_of_int i).[0])))
                               (int_of_string(reste (string_of_int i)))
                          lt
                          greffon)
| _ -> raise Impossible
and greffeltermes i u ltermes greffon =
match ltermes with
| hd::tl -> if (i=1) then  (greffe u hd greffon)::tl
            else hd::(greffeltermes (i-1) u tl greffon)
| [] -> raise Impossible
```

6.2 La substitution

Une substitution est une application $\theta : X \to T_{X \cup \Sigma}$

Le domaine de substitution est l'ensemble des variables de X telles que $\theta(x) \neq x$ On dit aussi que l'application θ est l'identité *presque* partout, i.e sauf sur une partie finie de X. Considérons le domaine de $\theta = \{x_1, ..., x_n\}$, alors θ est représenté par l'ensemble des couples (variable, terme) $\{(x_1, \theta(x_1)), ..., (x_n, \theta(x_n)\}$

Nous avons par induction :

— $\hat{\theta}c = c$, si $c \in \Sigma$ d'arité 1

— $\hat{\theta}(fM_1 \ldots M_n) = f(\hat{\theta}M_1 \ldots \hat{\theta}M_n)$, si $f \in \Sigma$ d'arité n

— $\hat{\theta}x = \theta(x)$ si $x \in X$

La fonction θ s'étend ainsi en une fonction $\hat{\theta}$ (mais que nous appelerons aussi θ) de $T_{X \cup \Sigma} \rightarrow T_{X \cup \Sigma}$.
$\hat{\theta}$ est l'unique fonction telle que $\forall x \in X, \hat{\theta} x = \theta(x)$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\in"'] & T_{X \cup \Sigma} \\
T_{X \cup \Sigma} \arrow[ur, dotted, "\hat{\theta}"'] &
\end{tikzcd}$$

Voici un exemple d'implémentation de la substitution en OCAML :

```
let valeur_subst sigma var =
  try assoc var sigma
  with Not_found -> var

let rec substituer terme sigma  =
  match terme with
  | Var(x) -> (valeur_subst sigma terme)
  | Func(f, []) -> Func(f, [])
  | Func(f, args) -> Func(f, (map (function t -> (substituer t sigma)) args))
```

6.3 Filtrage et réécriture

6.3.1 Le filtrage

Soient deux termes M et M' appartenant à T_X, le filtrage consiste à trouver une substitution σ telle que $\sigma M = M'$. Autrement dit, il faut trouver les valeurs à donner aux variables de M pour que celui-ci soit égal M'.

On appelle M le *pattern* et M' l'*instance*. Nous implémentons cela comme ci-dessous :

```
type terme =
  | Var of string
  | Func of string * terme list

exception Impossible


let rec filtre_termes lt1 lt2 sigma =
  match (lt1,lt2) with
    | ([], _)  -> sigma
    | (_, []) ->  sigma
    | _ ->
     begin
    let sigma1 = filtre (hd(lt1)) (hd(lt2)) sigma in
    filtre_termes (tl(lt1)) (tl(lt2)) sigma1
    end
and filtre m n sigma =
```

```
  match (m,n) with
  | (Func(f,_), Func(g, _)) when f <> g -> raise Impossible
  | (Var(x), n) ->
    begin
    try let var_val = assoc (Var(x)) sigma in
      if var_val = n then sigma else raise Impossible
    with Not_found -> (Var(x), n)::sigma
    end
  | (Func(f,f1), Func(g,g1)) -> filtre_termes f1 g1 sigma
  | _ -> raise Impossible

let f1 = Func("f", [Var "x"; Func("g", [Var "y"; Var "z"]); Func("h", [Var "x"])]) ;;
let f2 = Func("f", [Func("a",[]); Func("g", [Func("h", [Var "x"]); Func("b", [])]); Func("h",
imprime_sigma (filtre f1 f2 []) ;;
=>>>
z <->  b
y <-> (h x )
x <->  a
- : unit = ()
```

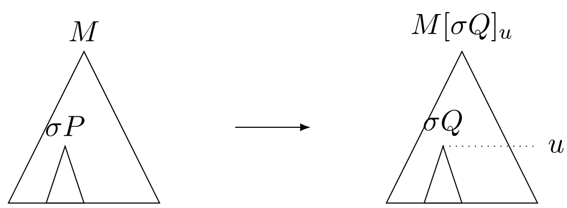
6.3.2 La réécriture et l'arithmétique de Peano

Le mécanisme de réécriture, très simple à comprendre conceptuellement, est un peu plus difficile à formaliser proprement.

Un système de *réécriture* est composé d'une signature Σ et d'un ensemble de règles $\mathcal{R}$ représenté par des couples $(P, Q) \in T_\Sigma[X] \times T_\Sigma[X]$.

Les couples (P, Q) sont notés $P \longrightarrow Q$

Si nous avons un filtre σ tel que $\sigma P = M|_u$, alors le terme M se réécrit en un terme $M[\sigma Q]_u$ par l'application de la règle $P \longrightarrow Q$ à l'occurence $u \in \mathcal{O}(M)$



Ocaml est «déjà» une machine à faire du filtrage et de la réécriture. L'application d'une fonction P à son argument Q est modélisé par le redex $(\lambda m P)Q \longrightarrow \theta P$ où m est le pattern et θ le filtre de m vers Q, c'est-à-dire $\theta m = Q$.

Il est ainsi simple de programmer en Ocaml une fonction de réécriture. Appliquons cela sur l'arithmétique de Peano.

Peano a reconstruit la théorie des entiers à partir de la fonction successeur. On se donne uniquement le symbole S d'arité 1 et le symbole de constante 0. Les entiers sont les termes de la forme $0, S0, SS0, SSS0 \ldots$ Nous pouvons implémenter cela en OCAM avec le type abstrait `peano`

```
type peano =
  | Zero
```

```
  | Succ of peano
  | Plus of peano * peano
  | Mult of peano * peano

let un = Succ Zero ;;
let deux = Succ (Succ Zero) ;;
let trois = Succ (Succ (Succ Zero)) ;;
```

Puis nous avons les quatre règles de réécriture suivante :

$$\begin{array}{ll} (r_1) & (+\ x\ 0) \rightarrow x \\ (r_2) & (+\ x\ (S\ y)) \rightarrow (S\ (+x\ y)) \\ (r_3) & (*\ x\ 0) \rightarrow 0 \\ (r_4) & (*\ x\ (S\ y)) \rightarrow (+\ y\ (*x\ y)) \end{array}$$

Ces quatre règles sont implémentées par la fonction `réduire` ci-dessous :

```
let rec reduire = function
  | Plus (p, Zero) -> reduire p
  | Plus (p1 , (Succ p2)) -> Succ ( reduire ((Plus (reduire p1, reduire p2))) )
  | Mult (p, Zero) -> Zero
  | Mult (p1, (Succ p2))
      -> reduire (Plus (reduire p1, reduire ((Mult (reduire p1, reduire p2))) ))
  | _ as p -> p

let rec peano_entier = function
  | Zero -> 0
  | Succ p -> 1 + (peano_entier p)
  | any -> peano_entier (reduire any)

peano_entier (Plus ( Mult(deux, trois), trois));;
```

Essayons maintenant d'implémenter le mécanisme de réécriture en utilisation le type *terme* que nous avons précedemment présenté, ainsi que la fonction de filtrage `filtre` et la fonction du substitution `substituer`.

Nous avons fait simple avec cette méthode naïve qui utilise les trois fonctions ci-dessous :

— La première `rewrite` utilise la fonction `filtre` pour chercher une substitution égalisant notre terme avec la partie gauche de la règle de substitution. Si cette substitution est trouveée, la fonction retourne la partie droite de la règle appliquée à la substitution. Dans le cas contraire, la fonction est appelée récursivement sur l'ensemble des arguments du terme.

— La seconde `rewriteall` déroule l'ensemble des règles représentées par une liste de paires (l, r) tant que la réécriture ne modifie par le terme.

— La troisième `rewrite_bourrin` itère la fonction précédente tant que l'on peut réduire le terme. Désolé pour cette méthode bourrin, mais ça fonctionne…

```
let rec rewrite t l r =
match t with
| Var(_) | Func(_,[]) -> t
```

```
| Func(f, listet)  ->
  try let subst = filtre l t [] in
    substituer r subst
  with Impossible -> Func(f, map (function t -> (rewrite t l r)) listet)
and rewriteall lregles t =
  match lregles with
  | [] -> t
  | (l,r) ::reste ->
    let t1 = (rewrite t l r) in
      if t1=t then rewriteall reste t
      else t1
and rewrite_bourrin t lregles =
  let t1 = rewriteall lregles t in
  if t1=t then t
  else rewrite_bourrin t1 lregles
```

Les quatre règles de Peano sont modélisées de la façon suivante :

```
let peano = [
(Func("+", [Var "x"; Func("0", [])]), Var "x") ;
(Func("+", [Var "x"; Func("S", [Var "y"])])), Func("S", [Func("+", [Var "x"; Var "y"])]) ;
(Func("*", [Var "x"; Func("0", [])]), Func("0", [])) ;
(Func("*", [Var "x"; Func("S", [Var "y"])])), Func("+", [Var "x"; Func("*", [Var "x"; Var "y"]
]
```

Nous pouvons ainsi calculer la valeur 16 :

```
let un = Func("S", [Func("0", [])]) ;;
let deux = Func("+", [un; un]) ;;
let quatre = Func("*", [deux;deux]) ;;
let seize = Func("*", [quatre;quatre]) ;;

rewrite_bourrin seize peano ;;
```

6.4 L'unification des termes

Un interprète PROLOG peut être considéré comme une machine à unifier.

Définissons d'abord l'opération d'unification de deux termes. Un unificateur de deux termes t_1 et t_2 est une substitution σ telle que $\sigma t_1 = \sigma t_2$

Soit E, un système d'équations, on peut définir des transformations $E_1 \rightarrow_t E_2$ entre systèmes d'équations. On note le symbole $\perp$ qui représente un système sans solution. Résoudre E_0 consiste à appliquer une suite de transformations $E_0 \rightarrow_* E_n$ de sorte que E_n soit en forme résolue, ou bien $E_n = \perp$

Nous avons six types de transformations possibles :

décomposition	$E \cup \{fM_1 \dots M_r = fN_1 \dots N_r\} \to E \cup \{M_1 = N_1, \dots, M_r = N_r\}$
effacement	$E \cup \{M = M\} \to E$
élimination	$E \cup \{x = M\} \to E[x := M] \cup \{x = M\}$ si $M \notin X, x \notin var(M)$
inversion	$E \cup \{M = x\} \to E \cup \{x = M\}$ si $M \notin X$
conflit	$E \cup \{fM = gM\} \to \perp$ si $f \neq g$
cycle	$E \cup \{x = M\} \to \perp$ si $x \in var(M)$

La difficulté de cet algorithme est sa condition d'arrêt. Si aucune règle ne peut plus s'appliquer sur les éléments du système d'équations, alors l'algorithme doit s'arrêter et son résultat est la substitution unifiant les deux termes initiaux. Avec une seule fonction parcourant le système d'équations, représentés en OCAML par le type `(term * term) list`, je pense que ce n'est pas possible. Je me suis là aussi un peu cassé les cheveux. Voici mon code avec deux fonctions :

```
let rec  unifier equation =
match equation with
| (Var(x),Var(y)) -> if x=y then [] else [(Var(x), Var(y))]
| (Func(f1,l1),Func(f2, l2)) -> if f1 = f2 && List.length l1 = List.length l2
  then unifierliste (List.combine l1 l2)
  else raise Impossible
| (Func(m,n),Var(x)) -> unifier (Var(x), Func(m,n))
| (Var(x), Func(m,n)) -> if (mem (Var(x)) (listevar (Func(m,n))))
  then raise Impossible
  else [(Var(x), Func(m,n)) ]
and unifierliste = function
| [] -> []
| (x,y)::t ->
  let t2 = unifierliste t in
  let t1 = unifier ((substituer x t2 ),(substituer y t2)) in
  t1 @ t2
```

On retrouve dans la fonction `unifier`, qui travaille uniquement sur une paire de terme, les différentes règles de l'algorithme. La fonction `unifierliste` va unifier sa première paire en utilisant la substitution trouvée dans le reste de l'équation. C'est un bel exemple de récursivité qui nous dépasse très souvent... Ce bout de code vient du site de l'université de Cornell.

Voici un autre exemple moins proche de l'algorithme présenté.

```
let unifier t1 t2 =
  let rec unificateur t1 t2 =
    match (t1,t2) with
    | (Var(x), _)  ->
      begin
        if t1 = t2 then []
        else if (mem t1 (listevar t2)) then raise Impossible
             else [(t1, t2)]
      end
    | (_, Var(x)) -> unificateur t2 t1
    | (Func(x, l1), Func(y, l2)) -> if x<>y then raise Impossible
```

```
      else (unifliste l1 l2 [])
  and unifliste l1 l2 sigma =
    match (l1, l2) with
    | ([], _) -> sigma
    | (h1::t1, h2::t2) ->
      begin
        let sigma1 = (unificateur h1 h2) in
        unifliste (map (function terme -> (substituer terme sigma1)) t1)
          (map (function terme -> (substituer terme sigma1)) t2)
          (compose_subst sigma sigma1)
      end
    | _ -> raise Impossible
  in unificateur t1 t2
```

6.5 Un mini Prolog

```
let question() =
  begin
    print_string "\n autre solution 1/2 (1=oui, 2=non) ? :" ;
    if read_int()= 1  then false else true
  end

let autre_solution lvar lvaleur  =
  if lvaleur <> [] then (affiche_solution lvar lvaleur ; question())
  else false

let prolog but lregles =
  let lvar_but = listevar but in
  let rec prouveli lbuts lvaleur =
    match lbuts with
    | [] -> autre_solution lvar_but lvaleur
    | h::t ->
    some (fun regle ->  try
         let regle_bis = (renomme regle) in
         let sigma1 = unifier h (hd regle_bis) in
         prouveli
           (sublis sigma1 ((lhypotheses regle_bis) @ t))
           (sublis sigma1 lvaleur)
         with Impossible -> false)
      lregles
  in
  prouveli [but] lvar_but
```

6.6 Quelques exemples de programmation en Prolog

6.6.1 Les entiers naturels

Définissons en Prolog le type des entiers naturels avec la fonction `nat` d'arité 1, la fonction `s` d'arité 1 et la constante `0`. Nous avons ainsi les 2 règles :

$$\begin{array}{l} nat(0) \Leftarrow \\ nat(s(x)) \Leftarrow nat(x) \end{array}$$

```
---------------------------------------------------
let nat = [ [Func("nat", [Func("0", [])])] ;
            [Func("nat", [Func("s",[Var("X")])]) ; Func("nat", [Var("X")])] ] ;;
let but = Func("nat", [Var("X")]) ;;

prolog but nat ;;
----------------------------------------------------
vincent@HP-Notebook:~/workspace vscodium$ ./prolog.byte
 X  <->  0
 autre solution 1/2 (1=oui, 2=non) ? :1
 X  <-> (s 0 )
 autre solution 1/2 (1=oui, 2=non) ? :1
 X  <-> (s(s 0 ))
 autre solution 1/2 (1=oui, 2=non) ? :1
 X  <-> (s(s(s 0 )))
 autre solution 1/2 (1=oui, 2=non) ? :2
vincent@HP-Notebook:~/workspace vscodium$
```

6.6.2 Les additions de Peano

Nous pouvons modéliser les additions avec l'arithmétique de Peano en utilisant les deux propositions suivantes :

$$\begin{array}{l} add(x, 0, x) \Leftarrow \\ add(x, s(y), s(z)) \Leftarrow add(x, y, z) \end{array}$$

Puis demandons à notre mini Prolog de résoudre l'équation $add(x, y, s(s(s(0))))$

```
(* les entiers de peano *)
let peano = [ [Func("add", [Var("x"); Func("0", []); Var("x")]) ] ;
        [Func("add", [Var("x");  Func("S", [Var("y")]) ; Func("S", [Var("z")])]) ;
        Func("add", [Var("x"); Var("y"); Var("z")])]
      ] ;;

let but1 = Func("add", [Var("x") ; Var("y") ; Func("S", [Func("S", [Func("S", [Func("0", [])])])

vincent@HP-Notebook:~/vsc$ ./prolog.byte
 x  <-> (S(S(S 0 ))) y  <->  0
 autre solution 1/2 (1=oui, 2=non) ? :1
 x  <-> (S(S 0 )) y  <-> (S 0 )
```

```
 autre solution 1/2 (1=oui, 2=non) ? :1
 x  <-> (S 0 ) y  <-> (S(S 0 ))
 autre solution 1/2 (1=oui, 2=non) ? :1
 x  <->  0  y  <-> (S(S(S 0 )))
 autre solution 1/2 (1=oui, 2=non) ? :1
vincent@HP-Notebook:~/vsc$
```

6.6.3 Programmation "logique" en Coq

L'utilisation des types dépendants en COQ nous permet également de définir les relations PROLOG.

```
Inductive entier :=
| O : entier
| S : entier → entier.

Fixpoint somme (e1 e2 :entier) :entier :=
  match e1 with
  | O ⇒ e2
  | S e1 ⇒ S (somme e1 e2)
  end.

Lemma somme_O : ∀ e :entier, somme e O = e.
Proof.
        intro e.
        induction e.
        simpl. reflexivity.
        simpl. rewrite IHe. reflexivity.
Qed.

Lemma somme_S : ∀ (e1 e2 :entier), somme e1 (S e2)= S (somme e1 e2).
Proof.
        intros.
        induction e1. simpl. reflexivity.
        simpl.
        rewrite IHe1. reflexivity.
Qed.

Compute somme (S O) (S O).

Inductive sommeProlog : entier → entier → entier → Prop :=
| SommeO : ∀ x, sommeProlog x O x
| SommeS : ∀ x y z, sommeProlog x y z → sommeProlog x (S y) (S z).

Example un_plus_un : sommeProlog (S O) (S O) (S (S O)).
Proof.
apply SommeS. apply SommeO.
Defined.

Theorem somme_deux_entiers : ∀ e1 e2, sommeProlog e1 e2 (somme e1 e2).
Proof.
        intros e1 e2.
```

```
        induction e2.
        rewrite somme_O.
        apply SommeO.
        rewrite somme_S.
        apply SommeS.
        exact IHe2.
Qed.
```

6.6.4 La base généalogique

```
(* généalogie *)
let grecs = [ [Func("mere", [Func("gaia",[]);Func("chronos",[]) ] ) ] ;
        [Func("mere", [Func("rhea",[]);Func("zeus",[]) ] ) ] ;
        [Func("mere", [Func("rhea",[]);Func("hades",[]) ] ) ] ;
        [Func("pere", [Func("zeus",[]);Func("pollux",[]) ] ) ] ;
        [Func("pere", [Func("ourance",[]);Func("chronos",[]) ] ) ] ;
        [Func("pere", [Func("chronos",[]);Func("zeus",[]) ] ) ] ;
        [Func("pere", [Func("zeus",[]);Func("helene",[]) ] ) ] ;
        [Func("pere", [Func("zeux",[]);Func("castor",[]) ] ) ] ;
        [Func("pere", [Func("gaia",[]);Func("chronos",[]) ] ) ] ;
        [Func("parent", [Var("x"); Var("y")]) ; Func("pere", [Var("x"); Var("y")]) ]  ;
        [Func("parent", [Var("x"); Var("y")]) ; Func("mere", [Var("x"); Var("y")]) ]  ;
        [Func("gd-parent", [Var("i"); Var("k")]) ; Func("parent", [Var("i"); Var("j")]) ;
         Func("parent", [Var("j"); Var("k")])] ;
        [Func("frere", [Var("y"); Var("z")]) ; Func("parent", [Var("x"); Var("y")]) ;
         Func("parent", [Var("x"); Var("z")])]
      ] ;;

let but = Func("gd-parent", [Func("chronos", []) ; Var("x")]) ;;

vincent@HP-Notebook:~/vsc$ ./prolog.byte
  x  <->  pollux
  autre solution 1/2 (1=oui, 2=non) ? :1
  x  <->  helene
  autre solution 1/2 (1=oui, 2=non) ? :1
```

6.7 L'algorithme de complétion de Knuth-Bendix

6.7.1 Confluence et paires critiques

Le lemme de Newman nous dit qu'un système de réécriture noethérien (qui termine) est confluent ssi il est localement confluent.

La situation générale se présente comme cela :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & s \arrow[dl, "l_1 \to r_1"'] \arrow[dr, "l_2 \to r_2"] & \\ t_1 & & t_2 \end{tikzcd}$$

La confluence locale sera assurée si nous trouvons un terme t tel que $t_1 \xrightarrow{*} t \xleftarrow{*} t_2$

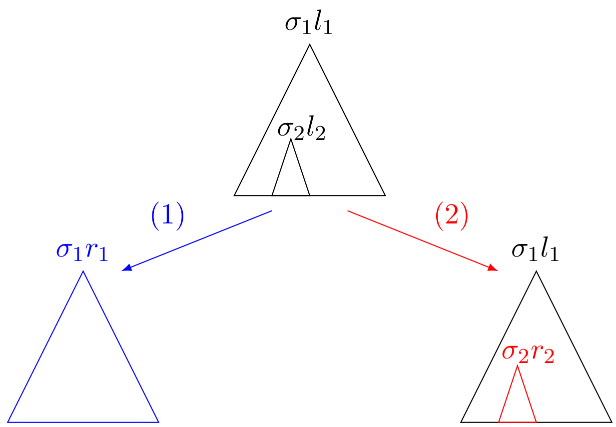
Nous avons ainsi 2 règles $l_1 \to r_1$ et $l_2 \to r_2$. Cela donne par définition de la réécriture :

$$s|_{p_1} = \sigma_1 l_1 \ avec \ t_1 = s[\sigma_1 r_1]_{p_1}$$

$$s|_{p_2} = \sigma_2 l_2 \ avec \ t_2 = s[\sigma_2 r_2]_{p_2}$$

On montre facilement (de manière visuelle) que nous pouvons trouver $t_1 \xrightarrow{*} t \xleftarrow{*} t_2$ lorsque p_1 et p_2 ne se chevauchent pas. Et lorsqu'il y a chevauchement, on peut également trouver $t_1 \xrightarrow{*} t \xleftarrow{*} t_2$ si la position de $\sigma_2 l_2$ dans l_1 est une variable.

Sinon, il y a un chevauchement *critique* :



Posons $\theta = \sigma_1 \cup \sigma_2$, l'unificateur principal de σ_1 et σ_2. Nous appelerons la paire des deux termes en bleu et rouge une *paire critique* $< \theta r_1, (\theta l_1)[\theta r_2]_p >$ Si deux règles génèrent une paire critique, on dit qu'elles se superposent. L'existence de paires critiques est un signe d'ambiguïté du système de réécriture.

Si ces paires critiques sont joignable, le système de réécriture est alors localement confluent.

Théorème 9 (Knuth-Bendix)**.** *Un système de réécriture noethérien est confluent si ses paires critiques sont joignables.*

```
let superpose l1 l2 =
let rec super l1 l2 occ =
  match occ with
  | a::b ->
  begin
    try
    let t = cut a l1 in
    match t with
    | Var _ -> raise Impossible
```

```
    | _ -> let sigma = unifier ((cut a l1), l2)
        in (a, sigma)
    with Impossible -> super l1 l2 b
  end
| [] -> raise Impossible
in super l1 l2 (occurences 0 l1)

let rec cp (l1,r1) (l2,r2) =
  let (oc, sigma) = superpose l1 l2 in
  ((substituer  r1 sigma), (greffe oc (substituer l1 sigma) (substituer r2 sigma))) ;;
```

6.7.2 Terminaison

Indécidabilité de la terminaison dans le cas "général"

Soient $a_1, a_2, a_3, \ldots$ une numérotation de tous les algorithmes. On définit la fonction suivante : $diag(i)$ si a_i termine alors `boucler`, sinon `s'arrêter`

Pour tout i, $diag(i)$ termine ssi a_i ne termine pas. Mais il y a un a_j tel que $diag = a_j$. Nous avons donc $diag(j)$ termine ssi a_j ne termine pas, ce qui donne a_j termine ssi a_j ne termine pas.

De manière peut-être plus formelle, en mettant en évidence la diagonalisation négative de Cantor :

Soit $f(x, y)$ la fonction de terminaison de l'algorithme a_x sur l'entrée y. On peut définir $f(x, y)$ comme $f(x, y) = 1$ si a_x termine sur y et 0 sinon. Soit g telle que $g(0) = 1$ et $g(1) = 0$ Considérons $h(i) = g(f(i, i))$. Alors on a $f(a, a) = h(a) = g(f(a, a)) \neq f(a, a)$ car g n'admet pas de point fixe. C'est-à-dire que l'on ne peut décider si l'algorithme a_a termine sur lui-même.

Cela donne en pseudo-code :

```
halt(x) = si le programme x s'arrête alors vrai
          sinon faux ;

diag(p) = si halt (p) alors boucle()
          sinon stop() ;
```

Quel est le comportement de `halt(diag(diag))` ?

S'il répond vrai, alors `diag` s'arrête alors qu'il est censé boucler par définition de `diag`

S'il répond faux, alors `diag` boucle, alors qu'il est censé s'arrêter par défintion de `diag`

Système de réécriture noethérien

Un système de réécriture est noethérien si et seulement s'il existe un ordre bien fondé $\succ$ sur l'ensemble des termes tel que

i) $\sigma P \succ \sigma Q$ pour toute règle $(P, Q) \in \mathcal{R}$ et toute substitution σ

ii) $M_i \succ M_i'$ entraîne $fM_1 \ldots M_i \ldots M_n \succ fM_1 \ldots M_i' \ldots M_n$

On dit que $\succ$ est clos par substitution, et qu'il est compatible avec Σ. En pratique, on utilise une fonction externe $h : T_\Sigma[X] \to \mathbb{N}$ et la relation d'ordre $>$ sur $\mathbb{N}$.

Pour un terme t et une variable x , on note $|t|$ le cardinal de t et $|t|_x$ le nombre d'occurrences de x dans t. On définit un ordre strict $\succ$ sur $T[X]$ par :

$$s > t \Leftrightarrow |s| > |t| \ et\ \forall x \in X, |s|_x |t|_x$$

6.7.3 Complétion de Knuth-Bendix

Nous pourrons ici nous référer au livre très didactique *Term Rewriting and All That*[6]

```
let rec super_liste l1 l2 occ =
 match occ with
 | a::b ->
  begin
   try
   let t = cut a l1 in
   match t with
   | Var _ -> raise Impossible
   | _ -> let sigma = unifier ((cut a l1), l2)
         in (a, sigma)
   with Impossible -> super_liste l1 l2 b
   end
 | [] -> raise Impossible

let superpose_liste (l1,r1) (l2,r2) =
let rec superpose_liste_aux l1 l2 occ = (* rend liste des occurences et substitution *)
  if   alpha_equiv (l1,r1) (l2,r2) then
    try
    let (oc, sigma) = super_liste l1 (rename l2 l1) (remove 0 occ) (* retire 0 car occurence t
    in
    begin
      print_string "superposition à l'occurence "; print_int oc ;  print_string "\n" ;
      print_string "sur le termes l1 :" ; imprime l1 ; print_string "\n" ;
      print_string "sur le terme l2 :" ; imprime l2 ; print_string "\n" ;
      print_string "avec la substitution :"; imprime_sigma sigma; print_string "\n" ;
    (oc, sigma)::superpose_liste_aux l1 l2 (remove oc occ)
    end
    with Impossible -> []
  else
  try
  let (oc, sigma) = super_liste l1 (rename l2 l1) occ
    in
    begin print_string "superposition à l'occurence "; print_int oc ;  print_string "\n" ;
      print_string "sur le terme l1 :" ; imprime l1 ; print_string "\n" ;
      print_string "sur le terme l2 :" ; imprime l2 ; print_string "\n" ;
      print_string "avec la substitution :"; imprime_sigma sigma; print_string "\n" ;
      (oc, sigma)::superpose_liste_aux l1 l2 (remove oc occ)
    end
```

```
  with Impossible -> []
in superpose_liste_aux l1 l2 (occurences l1) ;;
```

Chapitre 7

Calculabilité et complexité

7.1 Les fonctions récursives

Commençons par définir les fonctions récursives *primitives* telles que formalisées par Gödel.

Un ensemble E de fonctions numériques de $\mathbb{N}^p$ dans $\mathbb{N}$ est dit :

i) clos par composition si pour tout $h, g_1, \ldots, g_p \in E$, si on définit f par

$$f(n) = h(g_1(n), \ldots, g_p(n))$$

alors $f \in E$

ii) clos par récursion primitive si pour tout $h, g \in E$, si on définit f par

$$\begin{aligned} f(0, n) &= g(n) \\ f(m+1, n) &= h(f(m, n), m, n) \end{aligned}$$

alors $f \in E$

Les fonctions de base sont la constante $0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, le successeur $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, les projections $pr_k^i : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$

Les fonctions récursives primitives sont les éléments du plus petit ensemble E contenant les fonctions de base et clos par composition et récursion primitive.

La quasi totalité des fonctions est récursive primitive. Considérons par exemple l'addition.

$$\begin{aligned} 0 + y &= y \\ s(x) + y &= s(x + y) \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\begin{aligned} +(0, y) &= g(y) \text{ avec } g = pr_1^1(y) \\ +(s(x), y) &= h(+(x, y), x, y) \text{ avec } h = s \circ pr_3^1 \end{aligned}$$

Voici un opérateur de récursion primitive en OCAML

```
let rec_prim g h =
let rec f m n =
  if m=0 then g n
  else h (f (m-1) n) (m-1) n
in f
```

Nous pouvons ainsi exprimer la fonction `add` :

```
let s n = n+1 ;;
let pr_11 n = n ;;
let pr_31 x y z =  x ;;
let g y = pr_11 y ;;
let h x y z =  s (pr_31 x y z);;

let add = rec_prim g h ;;

utop # add 5 8 ;;
- : int = 13
```

Toute fonction récursive primitive peut s'écrire avec une simple boucle `for`. Le nombre d'itérations est déterminé ; il ne dépend pas d'une condition d'évaluation du programme. Ainsi, nous pouvons code de la manière suivante :

```
let add x y =
  let r = ref (g y) in
  (for i=1 to x do r := h !r i y done ;
   !r
  )
```

Existe-t'il des fonctions calculables qui ne sont pas primitives récursives ? La réponse est oui. Notamment toute fonction qui ne termine pas (boucle `while` infinie) ne pourra s'écrire en fonction récursive primitive.

Nous pouvons également montrer par un argument *diagonal*, qu'il existe des fonctions que nous ne pouvons retrouver dans l'énumération des fonctions primitives récursives.

Démonstration. Numérotons l'ensemble des fonctions récursives par l'indice n

Soit $f(n, x)$, la fonction prenant en argument cet indice n et un argument x sur $\mathbb{N}$.

Soit la fonction $g(z) = z + 1$, considérons la fonction $h(x) = g(f(x, x)) = f(x, x) + 1$

S'il existe un indice a, tel que $f(a, x) = h(x)$, alors $h(a) = f(a, a) = f(a, a) + 1$ ce qui est impossible. Donc la fonction h n'est pas récursive primitive.

□

Il est cependant plus complexe d'identifier de fonctions plus *concrètes* qui terminent et qui soient non récursives primitives. La fonction d'*Ackermann* est traditionnelement donnée en exemple, bien que cette fonction n'a pas de réalité pratique…

La fonction d'Ackermann A est définie sur $\mathbb{N}$Ö$\mathbb{N}$ par :
$A(0, p) = p + 1$ pour $p0$
$A(n, 0) = A(n1, 1)$ pour $n1$
$A(n, p) = A(n1, A(n, p1))$ si $n1, p1$

```
let rec ack = function
  | (0,p) -> p+1
  | (n,0) -> ack (n-1, 1)
  | (n,p) -> ack (n-1, ack (n, p-1))
```

La fonction d'Ackermann croît très rapidement, en particulier $n \to A(n,n)$ croît plus rapidement que n'importe quelle fonction polynôme ou exponentielle.

Gödel a ainsi introduit un troisième critère permettant d'étendre le scope de définition des fonctions numériques au-delà des fonctions récursives primitives. C'est le critère de clôture par minimisation totale.

Nous dirons qu'un ensemble E de fonctions numériques est clos par minimisation si pour tout $g \in E$, tel que pour chaque n, il existe p tel que $g(n,p) = 0$, si on définit f par

$$f(n) = min\{p \in \mathbb{N}; g(n,p) = 0\}$$

alors $f \in E$. On notera $f = \mu p[g(.,p) = 0]$.

Les *fonctions récursives* sont les éléments du plus petit ensemble de fonctions numériques contenant les fonctions de base et clos par composition, récursion primitive et minimisation totale.

7.2 La machine de Turing

Une machine de Turing est un automate à état (*state machine*) qui a la capacité de lire puis d'enregistrer un caractère sur une bande de longueur infinie.

La machine change d'état sur la base de trois éléments : l'état courant, le caractère lu de la bande et une table externe de transition. La table de transition est externe à la bande et elle est statique. L'action résultante est un changement potentiel d'état, une écriture de caractère sur la bande et un déplacement à droite ou à gauche de la tête de lecture.

Nous implémentons cela avec le concept de *box* présenté dans le chapitre précédent. La lambda va encapsuler l'état courant, la position de la tête de lecture, la bande et la table de transition. La table de transition est modélisée par une a-liste d'a-listes. La première a-liste permet de faire matcher l'état courant. La seconde a-liste permet de faire matcher le caractère lu. Ces deux informations combinées fournissent le triplet de sortie `(état_suivant, caractère_écrit, direction)`

```
let matable = [ ("q0" , [ (">", ("q1", "X", "G")) ;
                  ("<", ("q0", "<", "D")) ;
                  (" ", ("q2", " ", "G")) ;
                  ("X", ("q0", "X",  "D")) ]) ;
             ("q1" , [ (">", ("q1", ">", "G")) ;
                       ("<", ("q0", "X", "D")) ;
                       (" ", ("qf", "non", "G")) ;
                       ("X", ("q1", "X", "G")) ]) ;
             ("q2" , [ (">", ("q2", ">", "G")) ;
                       ("<", ("qf", "non", "G")) ;
                       (" ", ("qf", "oui", "G")) ;
                       ("X", ("q2", "X", "G")) ]) ;
         ] ;;
```

Cette table de transition va nous permettre de vérifier le bon parenthésage d'une expression en entrée fournie sur la bande représentée par une liste `let mabande =    [" "; "<"; ">"; " "]`

L'état `q0` va rechercher une parenthèse `>` en allant vers la droite.

L'état `q1` va rechercher une parenthèse `<` en allant vers la gauche.

L'état `q2` va rechercher une parenthèse `>` en allant vers la gauche.

Les parenthèses matchées sont remplacées par le caractère `X`. Le passage à l'état final `qf` est accompagné par l'écriture `oui` ou `non` sur la bande suivant si l'expression est ou non correctement parenthésée.

```
let make_turing table etat0 position0 bande0 =
  let etat = ref etat0 in
  let position = ref position0 in
  let bande = ref bande0 in
  let fct_transition state input = assoc input (assoc state table) in
  let lire () = nth !bande !position in
  let deplacer = function
    | "G" -> if (!position = 0) then (bande := " " :: !bande) else (position := !position - 1)
    | "D" ->
     begin
      position := !position + 1 ;
      if ((lire ()) = " ") then (bande := !bande @ (" ":: []))
      end
    | _ -> raise Erreur
  in
  let rec liste_tail liste pos =
    match pos with
    | 0 -> liste
    | n -> liste_tail (tl liste) (pos - 1)
  in
  let rec liste_tete liste pos =
    match pos with
    | 0 -> []
    | n -> (hd liste) :: liste_tete (tl liste) (pos - 1)
  in
  let ecrire symb =
  bande := (liste_tete !bande !position) @ (symb :: []) @ ( liste_tail (tl !bande) !position)
  in
   fun instruction ->
    match instruction with
    | "executer" ->
      let (e, s, d) = fct_transition !etat (lire ()) in
        begin
          ecrire s ;
          deplacer d;
          etat := e ;
          if (!etat = "qf") then raise Final
        end
    | "reset" -> begin etat := etat0 ; bande := bande0; position := position0 end
    | "affiche"  ->
```

```
        begin print_string "etat:" ; print_string !etat ;
              print_string "  position:"; print_int !position ;
              print_string "  lire:"; print_string (lire ()) ;
              print_string "  bande:  "; print_liste !bande
        end
    | _ -> raise Erreur

let executer_turing turing trace =
  let rec iterer () =
    turing "executer" ; if trace then turing "affiche"; iterer ()
  in
  begin
   turing "reset" ;
   try
    iterer ()
   with Final -> turing "affiche"
   end
```

Voici le résultat sur l'expression <>

```
# let turing_par = make_turing matable etatinit posinit  [" "; "<"; ">"; " "]  ;;
# executer_turing turing_par true ;;

etat:q0  position:2  lire:>  bande:   <>
etat:q1  position:1  lire:<  bande:   <X
etat:q0  position:2  lire:X  bande:   XX
etat:q0  position:3  lire:   bande:   XX
etat:q2  position:2  lire:X  bande:   XX
etat:q2  position:1  lire:X  bande:   XX
etat:q2  position:0  lire:   bande:   XX
etat:qf  position:0  lire:   bande:   ouiXX
```

Et voici le résultat sur l'expression <<><>

```
# let turing_par = make_turing matable etatinit posinit  [" "; "<"; "<"; ">"; "<"; ">"; " "] ;
# executer_turing turing_par true ;;

etat:q0  position:2  lire:<  bande:   <<><>
etat:q0  position:3  lire:>  bande:   <<><>
etat:q1  position:2  lire:<  bande:   <<X<>
etat:q0  position:3  lire:X  bande:   <XX<>
etat:q0  position:4  lire:<  bande:   <XX<>
etat:q0  position:5  lire:>  bande:   <XX<>
etat:q1  position:4  lire:<  bande:   <XX<X
etat:q0  position:5  lire:X  bande:   <XXXX
etat:q0  position:6  lire:   bande:   <XXXX
```

```
etat:q2  position:5  lire:X  bande:   <XXXX
etat:q2  position:4  lire:X  bande:   <XXXX
etat:q2  position:3  lire:X  bande:   <XXXX
etat:q2  position:2  lire:X  bande:   <XXXX
etat:q2  position:1  lire:<  bande:   <XXXX
etat:qf  position:0  lire:   bande:   nonXXXX
```

7.3 La thèse de Church

Théorème 10. *Thèse de Church : toute fonction effectivement calculable est récursive.*

Autrement dit, les fonctions calculables sont exactement les fonctions récursives. Il est évident que les fonctions récursives sont bien calculables. C'est dans l'autre sens que cette thèse peut nous surprendre. Il met en relation une notion vague, la *calculabilité* à une notion mathématique. Par analogie, nous pouvons voir cette thèse comme une théorème physique qui exprime une expérience du monde physique en une formule mathématique, comme l'est par exemple la loi universelle de la gravitation (Newton).

Théorème 11. *Thèse forte de Church : si une fonction f est calculable par un algorithme, alors celui-ci est effectivement transformable en une machine de Turing calculant f*

Théorème 12. *Pour $f : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N}$, les propriétés $(i) f$ est λ-définissable et $(ii) f$ est récursive sont équivalentes.*

7.4 Complexité

7.4.1 Théorème de Cook

Définition 10. *Un problème est appelé NP-complet s'il vérifie les deux propriétés suivantes :*

1. *Toute solution pourra être vérifiée en temps polynomial*
2. *Tous les problèmes de la classe NP se ramènent à celui-ci via une réduction polynomiale*

L'algorithme SAT est significatif car il a été prouvé comme étant *NP-complet.*

Définition 11. *SAT (satisfaisabilité en logique propositionnelle).*
Instance : une formule conjonctive $\phi \in Prop[X]$
Requête : ϕ est-elle satisfaisable ?

Théorème 13. *(COOK, 1971) - Le problème SAT est NP-complet.*

Théorème 14. *Conjecture : $P \neq NP$*

7.4.2 Implémentation de l'algorithme SAT

Pour des raisons d'efficacité, nous utilisons ici un principe de l'algorithme DPLL qui est la *propagation unitaire.* L'algorithme recherche des solutions en parcourant l'arbre de recherche en profondeur. Cela s'implémente de manière intuitive avec une fonction récursive. L'algorithme s'arrête dès qu'une solution a été trouvée.

```
let sat c : (bool*env) =
  let rec sat_aux c liste_litt e : (bool*env)  =
    let c’ = propag_unitaire c in
    let e’ = extend_env c’ e in
      if eval_cnf e’ c’ then (true,e’)
      else
        let liste_litt’ = (diff (recup_litteral c’) (find_units_cnf2 c’)) in
        match liste_litt’ with
         | hd::tl -> let (b1, e1) = sat_aux ([P hd]::c’) tl ((hd,true)::e’) in
                if b1 then (b1,e1)
                else sat_aux ([N hd]::c’) tl ((hd, false)::e’)
         | [] -> (false, [])
   in sat_aux c (diff (recup_litteral c) (find_units_cnf2 c)) (init_env c) ;;
```

Voici la fonction de progation unitaire.

```
let rec propag_unitaire c =
  let units = find_units_cnf c
  in
  let rec propag_unitaire_aux c units =
  match units with
    | [] -> c
    | hd::tl -> propag_unitaire_aux (map (retire_unit hd) c) tl
in  let res = propag_unitaire_aux c units
in if c=res then (filter (fun x -> not (x=[])) c) else propag_unitaire res ;;
(* on propage jusqu’à l’obtention d’un point fixe *)
```

Nous travaillons ici exclusivement sur des clauses normales conjonctives. Une clause normale conjonctive est une une conjonction de plusieurs disjonctions de plusieurs littéraux. Un littéral est un atome ou la négation d’un atome.

```
type atome =  string ;;
type lit =  P of atome | N of atome ;;
type disj = lit list ;;
type cnf = disj list ;;
```

7.4.3 Sudoku - SAT encoding

L’algorithme permettant de résoudre les sudokus peut être réalisé par l’algorithme SAT en modélisant les contraintes du sudoku sous la forme de clauses propositionnelles. Une variable s_{xyz} représente que la case de la ligne x et colonne y porte le nombre z.

1. Contrainte C_1. Il y a au moins un nombre pour chaque case

$$C_1 \triangleq \bigwedge_{x=1}^{9} \bigwedge_{y=1}^{9} \bigvee_{z=1}^{9} s_{xyz}$$

2. Contrainte C_2. Chaque nombre apparait au plus une fois dans une ligne

$$C_2 \triangleq \bigwedge_{y=1}^{9} \bigwedge_{z=1}^{9} \bigwedge_{x=1}^{8} \bigwedge_{i=x+1}^{9} (\neg s_{xyz} \vee \neg s_{iyz})$$

3. Contrainte C_3. Chaque nombre apparait au plus une fois dans une colonne

$$C_3 \triangleq \bigwedge_{y=1}^{9} \bigwedge_{z=1}^{9} \bigwedge_{y=1}^{8} \bigwedge_{i=y+1}^{9} (\neg s_{xyz} \vee \neg s_{xiz})$$

4. Contraintes C_1 et C_5. Chaque nombre apparait au plus une fois dans une sous-grille 3x3

$$C_4 \triangleq \bigwedge_{z=1}^{9} \bigwedge_{i=0}^{2} \bigwedge_{x=1}^{3} \bigwedge_{y=1}^{3} \bigwedge_{k=y+1}^{3} \left(\neg s_{(3i+x)(3j+y)z} \vee \neg s_{(3i+x)(3j+k)z}\right)$$

$$C_5 \triangleq \bigwedge_{z=1}^{9} \bigwedge_{i=0}^{2} \bigwedge_{x=1}^{3} \bigwedge_{y=1}^{3} \bigwedge_{k=x+1}^{3} \bigwedge_{l=1}^{3} \left(\neg s_{(3i+x)(3j+y)z} \vee \neg s_{(3i+k)(3j+l)z}\right)$$

```
let produce_C1 =
  print_string "let c1 = [";
  for x=1 to 9 do
    for y=1 to 9 do
      print_string "[" ;
      for z=1 to 9 do
        print_string ("P \"x"  ^ string_of_int x ^ string_of_int y ^ string_of_int z ^ (if z<>9 then "\"; " else "\"")  )
      done ;
      print_string ("]" ^ (if (x=9 && y=9)  then "" else ";") ^ "\n")  ;
    done
  done ;
  print_string "]\n";
;;

(* C2 Each number appears at most once in each column *)
let produce_C2 =
  print_string "let c2 = [";
  for y=1 to 9 do
    for z=1 to 9 do
      for x=1 to 8 do
        for i=(x+1) to 9 do
          print_string ("[ N \"x" ^ string_of_int x ^ string_of_int y ^ string_of_int z  ^ "\"; " ^
                        "N \"x" ^ string_of_int i ^ string_of_int y ^ string_of_int z  ^ "\"];\n ")
        done
      done
    done
  done ;
  print_string "]\n"
;;

(* C3 Each number appears at most once in each column *)
let produce_C3 =
  print_string "let c3 = [";
  for x=1 to 9 do
    for z=1 to 9 do
      for y=1 to 8 do
        for i=(y+1) to 9 do
          print_string ("[ N \"x" ^ string_of_int x ^ string_of_int y ^ string_of_int z  ^ "\"; " ^
                        "N \"x" ^ string_of_int x ^ string_of_int i ^ string_of_int z  ^ "\"];\n ")
        done
      done
    done
  done ;
  print_string "]\n"
;;

(* C4 Each number appears at most once in each 3x3 sub-grid *)
let produce_C4 =
  print_string "let c4 = [";
  for z=1 to 9 do
    for i=0 to 2 do
      for j=0 to 2 do
        for x=1 to 3 do
```

```
          for y=1 to 3 do
            for k=(y+1) to 3 do
          print_string ("[ N \"x" ^ string_of_int (3*i+x) ^ string_of_int (3*j+y) ^ string_of_int z  ^ "\"; " ^
                       "N \"x" ^ string_of_int (3*i+x) ^ string_of_int (3*j+k) ^ string_of_int z  ^ "\"];\n ")
         done
       done
     done
   done
  done
done;
  print_string "]\n"
;;
let produce_C5 =
  print_string "let c5 = [";
  for z=1 to 9 do
    for i=0 to 2 do
      for j=0 to 2 do
        for x=1 to 3 do
          for y=1 to 3 do
            for k=(x+1) to 3 do
              for l=1 to 3 do
          print_string ("[ N \"x" ^ string_of_int (3*i+x) ^ string_of_int (3*j+y) ^ string_of_int z  ^ "\"; " ^
                       "N \"x" ^ string_of_int (3*i+k) ^ string_of_int (3*j+l) ^ string_of_int z  ^ "\"];\n ")
         done
       done
     done
   done
  done
done
done; print_string "]\n"
;;
```

7.5 Métaprogrammation - récursivité et réflexivité

7.5.1 Introduction

Une fonction récursive en programmation est de la forme

```
f(x) = ... f ...
```

Nous pouvons formaliser cette récursivité syntaxique avec une fonctionnelle ϕ de la manière suivante :

$$f(x) = \phi(f, x)$$

Remplaçons ϕ par une fonction partielle récursive g et l'argument f de ϕ par un indice n qui représente la numérotation du code de f. Cette équation est alors transformée en

$$\{n\}(x) = g(n, x)$$

C'est la forme du théorème de Kleene que nous démontrerons juste après. Ce théorème implique que pour toute fonction g, il existe un indice n tel que le programme de n recevant en entrée x calcule le même résultat que $g(n, x)$

7.5.2 Le théorème de Kleene

Théorème 15 (S-M-N)**.** *Pour tout indice s, il existe une fonction récursive primitive ρ telle que*

$$\{s\}(m_1, m_2) = \{\rho(s, m_1)\}m_2$$

Théorème 16 (Kleene)**.** *Soit g une fonction partielle récursive de $\mathbb{N}^{k+1}$ dans $\mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\{n\}(x_1, ..., x_k) = g(n, x_1, ..., x_k)$*

En voici la démonstration constructive.

Soit la fonction ρ définie précédemment de $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$.
Considérons la fonction $(t, x_1, ..., x_k) \mapsto g(\rho(t,t), x_1, ..., x_k)$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$g(\rho(t,t), x_1, ..., x_k) = \{m\}(t, x_1, ..., x_k)$$

Par définition de ρ, on a $\{\rho(m,t)\}(x_1, ..., x_k) = \{m\}(t, x_1, ..., x_k)$
Alors $n = \rho(m,m)$ est le point fixe recherché, car $g(n, x_1, ..., x_k) = \{n\}(x_1, ..., x_k)$
□

7.5.3 Un programme Quine

Un programme *Quine* est un programme qui affiche son propre code, quelque soit l'entrée qu'il reçoit. Le théorème de Kleene assure l'existance de ce type de programme n tel que $\forall x, \{n\}x = n$

Comment construire un tel programme ? Appuyons nous sur la démonstration constructive du théorème de Kleene. D'après ce théorème, pour toute fonction g, il existe n tel que $\{n\}(x) = g(n,x)$. Considérons $g \equiv \lambda nx.n$

g ainsi affiche son premier argument n en ignorant son deuxième argument x.

Soit la fonction $(t,x) \mapsto g(\rho(t,t), x)$ qui donne $(t,x) \mapsto \rho(t,t)$

Il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\{m\}(t,x) = \rho(t,t)$.

Par définition de ρ, on a $\{\rho(m,t)\}(x) = \{m\}(t,x)$

$n \equiv \rho(m,m)$ est ce point fixe recherché car $\{\rho(m,m)\}(x) = \{m\}(m,x) = n$

Le programme à construire est donc de la forme d'un programme qui prend en entrée la data représentative de son code et l'affiche deux fois : son code et la data.

En OCaml, nous pouvons définir un programme Quine par le code suivant :

```
(fun x -> Printf.printf "%s %S" x x) "(fun x -> Printf.printf \"%s %S\" x x)"
```

Le programme prend ainsi en argument son propre code en data et l'affiche deux fois : une fois pour le programme et une fois pour la data de manière *quotée*.

7.5.4 Le théorème de Rice

Théorème 17 (Rice)**.** *Soit $I_A = \{x \in \mathbb{N}; \{x\} \in A\}$. A est un ensemble de fonctions partielles récursives. Alors I_A est décidable si et seulement si $A = \emptyset$ ou A est l'ensemble des fonctions partielles récursives.*

En voici la démonstration par contradiction.

Supposons qu'il existe des fonctions récursive partielles d'indices f et g telles que $\{f\} \in A$ et $\{g\} \notin A$

Définissons h tel que : $h(x,y) = \{g\}(y)$ si $x \in A$ et $h(x,y) = \{f\}(y)$ si $x \notin A$

D'après le théorème de Kleene, il existe $e \in \mathbb{N}$ tel que $h(e,y) = \{e\}(y)$ pour tout y.

Est-ce que $\{e\}$ appartient à l'ensemble A ?

— Si $\{e\} \in A$, $\{e\}(y) = h(x,y) = \{g\}(y)$ Donc $\{g\}$ devrait appartenir à A. Contradiction.

— Si $\{e\} \notin A$, $\{e\}(y) = h(x,y) = \{f\}(y)$ Donc $\{f\}$ ne devrait appartenir à A. Contradiction.

Théorème 18 (corollaire, problème de l'arrêt)**.** *Soit $x \in \mathbb{N}$, soit $H = \{n \in \mathbb{N}; \{n\}(x) \downarrow\}$, alors H est indécidable.*

Chapitre 8

Annexes / Divers

8.1 Quelques fonctions sur les listes

Scheme	Ocaml

`(define (somme l)`
` (if (null? l)`
`   0`
`   (+ (car l) (somme (cdr l)))))`
	`let rec somme l =`
	`  match l with`
	`  | [] -> 0`
	`  | hd::tl -> hd + somme(tl)`

`f car (f car (... (f car acc)...))`
 	
`(define (foldright f acc l)`
` (if (null? l)`
`  acc`
`  (f (car l) (foldright f acc (cdr l)))))`
	`f hd (f hd (... (f hd acc)...))`
	
	`let rec foldright f acc l =`
	`  match l with`
	`  | [] -> acc`
	`  | hd::tl -> f hd (foldright f acc tl)`

`f (... (f (f acc car) car)...) car)`
 	
`(define (foldleft f acc l)`
` (if (null? l)`
`  acc`
`  (foldleft f (f (car l) acc) (cdr l))))`
	`f (... (f (f acc hd) hd)...) hd)`
	
	`let rec foldleft f acc l =`
	`  match l with`
	`  | [] -> acc`
	`  | hd::tl -> foldleft f (f acc hd) tl`

`(foldleft * 1 '(1 2 3 4))` `-> 24`	`# foldleft ( * ) 1 [1;2;3;4] ;;` `- : int = 24`

8.2 Les listes mutables

En Scheme, nous avons les fonctions `set-car!` et `set-cdr!` qui nous permettent de modifier physiquement le car et le cdr d'un doublet. Nous pouvons par exemple définir la liste circulaire `(a b c a b c ...)`

```
(define maliste (list 'a 'b 'c))
(set-cdr! (cddr maliste) maliste)
 maliste
 -> #0= (a b c . #0#)
```

L'affichage de la liste infine provient de l'interprète DrRacket.

Essayons de reproduire cela en Ocaml (de manière intuitive et sûrement très maladroite…)

```
exception Listenulle
type liste = Nil | Cons of int ref * liste ref ;;

let set_car d v =
  match d with
  | Nil -> raise Listenulle
  | Cons(car,cdr) -> car:=v  ;;

let set_cdr d v =
  match d with
  | Nil -> raise Listenulle
  | Cons(car,cdr) -> cdr:=v ;;

let  cdr l =
 match l with
 | Nil -> raise Listenulle
 | Cons(tete, reste) when !reste <> Nil -> reste

let maliste = Cons(ref 1 , ref ( Cons (ref 2, ref ( Cons (ref 3, ref Nil))) ))
set_cdr (!cdr !(cdr maliste)) maliste ;;

# maliste;;
- : liste =
Cons ({contents = 1},
 {contents =
   Cons ({contents = 2},
    {contents =
      Cons ({contents = 3},
       {contents =
         Cons ({contents = 1},
          {contents =
            Cons ({contents = 2},
             {contents =
               Cons ({contents = 3},
                 ...
```

8.3 Les listes infinies ou *streams*

Les *streams* sont des listes infinies.

Pour pouvoir les représenter, nous utilisons le fait que le corps d'une lambda n'est pas évalué, comme nous l'avons vu en λ-calcul avec la stratégie de la β-réduction faible.

Une lambda `fun()->2*2` $\rightsquigarrow$ `- : unit -> int = <fun>` est en fait considérée comme une *valeur*. Seul son appel provoquera l'évaluation de la lambda `(fun() -> 2*2) ()` $\rightsquigarrow$ `- : int = 4`

Un *stream* sera ainsi représenté comme une liste, mais dont le `cdr` ne pointera plus directement sur une liste, mais sera une fonction dont le corps sera la liste. L'évaluation du `cdr` est ainsi retardé.

```
type 'a stream = Cons of 'a * (unit -> 'a stream) ;;
let hd (Cons (h, _)) = h ;;
let tl (Cons (_, tf)) = tf () ;;

let rec from n = Cons (n, fun () -> from (n+1));;
let entiers = from 0 ;;
let rec take n s =
  if n=0 then []
  else hd s :: take (n-1) (tl s) ;;

# take 30 entiers
- : int list =
[0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20;
 21; 22; 23; 24; 25; 26; 27; 28; 29]
```

Nous pouvons aussi modéliser la fraction continue représentant $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

Voici le code OCAML. Je n'ai pas trouvé de manière plus élégante pour exprimer le stream.

```
let rec square2 iter =
  if (iter = 1) then 1.
  else
  1. +. ( 1. /. ( 1. +. square2 (iter - 1)))

let rec racine2cons n = Cons(square2 n, fun () -> racine2cons (n+1))

let rec racine2stream = racine2cons 1
  in take 10 racine2stream ;;

- : float list =
[1.; 1.5; 1.4; 1.41666666666666674; 1.4137931034482758; 1.41428571428571437;
 1.41420118343195256; 1.41421568627450989; 1.41421319796954315;
 1.41421362489486957]
```

Nous voyons la convergence très rapide de la fraction continue.

Cependant, le calcul OCAML est très inefficace, car chaque nouvel élément de la liste recalcule la totalité de la fraction continue en passant par la fonction `square2 iter`. Si nous essayons par exemple de calculer les 10000 premiers éléments du stream, cela prend sur ma machine une dizaine de seconde.

En utilisant le module `Lazy` d'OCAML, nous pouvons utiliser le mécanisme de *mémoisation*. Les valeurs du stream ne seront pas recalculées au 2ème appel.

```
open Lazy ;;
let racine2_10000 = take 10000 racine2stream  (* environ 10 secondes à chaque appel *)

let racine2_10000_lazy = lazy (take 10000 racine2stream) ;;
let racine2_force = force racine2_10000_lazy ;; (* uniquement long au 1er appel *)
```

8.4 Le module Graphics d'Ocaml, les fractales

Nous allons ici présenter tres brievement le module Graphics. Je reprends le code de Xavier Leroy tiré de son livre *le langage* CAML [24].

```
open Graphics ;;

Graphics.open_graph "";;
Graphics.set_window_title "THE WINDOW" ;;

type  etat = { mutable x : float; mutable y : float;
               mutable visee : float; mutable levee : bool };;
let crayon = { x = 0.0; y = 0.0; visee = 0.0; levee = false };;
let fixe_crayon b = crayon.levee <- b;;

let pi_sur_180 =let pi = 4.0 *. (atan 1.0) in pi /. 180.0


let tourne angle = crayon.visee <- (crayon.visee +. angle *. pi_sur_180) ;;

let zero_x = float_of_int ((size_x ()) / 2);;
let zero_y = float_of_int ((size_y ()) / 2);;

let vide_ecran () =
  set_color white;
  fill_rect 0 0 (size_x ()) (size_y ());
  set_color black;
  crayon.x <- zero_x;
  crayon.y <- zero_y;
  crayon.visee <- 0.0;
  crayon.levee <- false;
  moveto (round crayon.x) (round crayon.y);;


let avance d =
```

```
  let dx = d *. cos (crayon.visee)
  and dy = d *. sin (crayon.visee) in
  crayon.x <- crayon.x +. dx;
  crayon.y <- crayon.y +. dy;
  if crayon.levee then moveto (round crayon.x) (round crayon.y)
  else lineto (round crayon.x) (round crayon.y);;

let rec motif n c =
  if n = 0 then avance c
  else
    begin
      motif (n -1) (c /. 3.0);
      tourne 60.0;
      motif (n -1) (c /. 3.0);
      tourne (-120.0);
      motif (n -1) (c /. 3.0);
      tourne 60.0;
      motif (n -1) (c /. 3.0)
    end;;

let flocon n c =
  for i = 1 to 3
   do
     motif n c; tourne (-120.0)
   done;;

  flocon 1 100.0;    flocon 2 100.0;    flocon 3 100.0;  flocon 4 100.0;
```

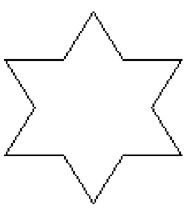
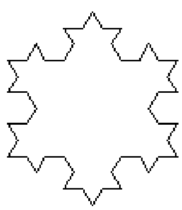
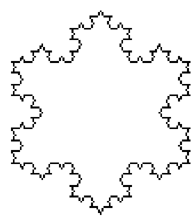
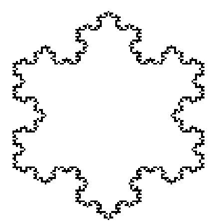
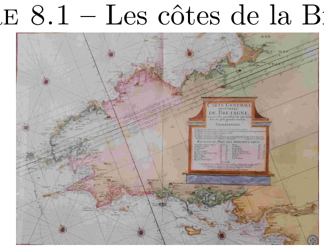





FIGURE 8.1 – Les côtes de la Bretagne



Les objets fractales ont une propriété surprenante : ils ont une aire finie, mais un périmètre infini. A l'itération n, le périmètre de notre flocon est de $3.(\frac{4}{3})^n$. Et nous avons bien entendu $\lim_{n\to\infty} 3.(\frac{4}{3})^n = \infty$

La longueur des côtes de la Bretagne est-elle aussi infinie ? *L'Atlantique ronge nos côtes.* [11]

L'ensemble de Mandelbrot

l'ensemble de Mandelbrot est une fractale définie comme l'ensemble des points c du plan complexe pour lesquels la suite des nombres complexes définie comme ci-dessous est **bornée**.

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = z_n^2 + c \end{cases}$$

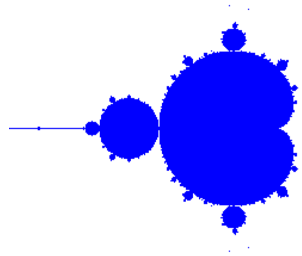
Voir le bon article https://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot

On montre que si la suite des modules des z_n est strictement supérieure à 2 pour un certain indice alors, cette suite est croissante à partir de cet indice, et elle tend vers l'infini. Donc notre test d'appartenance à l'ensemble s'arrêtera au-delà de la valeur 2.

Pour estimer la convergence, nous nous arrêterons à la valeur z_{300}. Nous utilisons également l'hypothèse que l'ensemble de Mandelbrot se situe dans le plan complexe $(-2.00 : 0.50), (-1.25 : 1.25)$

```
open Complex ;;   (* {re=2.; im=4.} *)

let appartient c =
  let rec loop n z =
    if (n > 300) then true
    else if ((norm2 z) > 4.) then false
         else loop (n+1) (add c (mul z z))
  in loop 0 c

#load "/home/vincent/.opam/ocaml-base-compiler/lib/graphics/graphics.cma" ;;
#require "graphics" ;;
open Graphics ;;
Graphics.open_graph " 500x200+0-0" ;;
Graphics.set_window_title "Mandelbrot" ;;
Graphics.set_color Graphics.blue;;

let mandelbrot () =
  for i = (-200) to 50
    do
      for j=(-125) to 125
      do
        if (appartient {re=((float_of_int i)/.100.); im=((float_of_int j)/.100.)})
        then plot (200+i) (200+j)
      done
    done
```

Figure 8.2 – L'ensemble de Mandelbrot

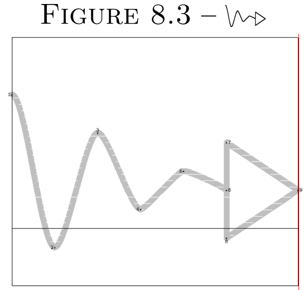


8.5 Utilisation de METAFONT

METAFONT est un langage créé par D. Knuth [13]. Il permet le design de nouvelles fontes de manière très élégante sous forme d'équations. La programmation se fait principalement de manière déclarative.

Je me suis amusé ici à créer le symbole que j'ai souvent utilisé dans cet article, principalement dans la section sur le λ-calcul.

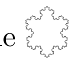
Figure 8.3 –



Voici le bout de code qui a permis de définir ce symbole :

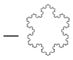
```
%file name: beta.mf

beginchar("D",15pt#,10pt#,3pt#);
% proportion ligne vs triangle 3/4 1/4
prop:=3/4;

y1=h-d; y2=1/5h-d; y3=4/5h-d;
y4=2/5h-d; y5=3/5h-d; y6=1/2h-d;
y7=3/4h-d; y8=1/4h-d; y9=h/2-d;

x1=0; x2=1/5*prop*w; x3=2/5*prop*w;
x4=3/5*prop*w; x5=4/5*prop*w; x6=prop*w;
x7=x8=x6; x9=w;

pickup pencircle scaled 0.3pt;
draw z1{right}..tension 6..z2{right}..tension 5..z3{right}
```

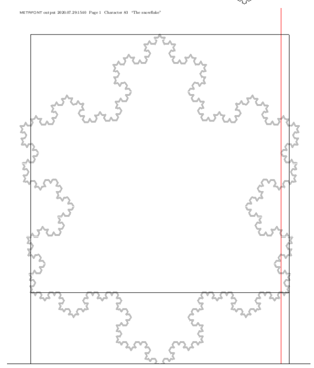
```
     ..tension 4..z4{right}..tension 4..z5{right}..tension 3..z6;
draw z7--z8--z9--cycle;
labels(range 1 thru 9);
endchar;
end
```

Nous avons également représenté notre fractale  avec le langage METAFONT. Cela s'écrit très facilement, car le langage de Knuth permet l'utilisation de macros récursives.

```
%file name: snow.mf
%mode_setup;
%shape for the character S

i:=1;

def dessine(expr debut, fin) =
z[i]=debut;
z[i+1]=1/3[debut, fin];
z[i+2]= (z[i+1]-z[i]) rotated 60 shifted z[i+1];
z[i+3] = 2/3[debut, fin] ;
z[i+4] = fin ;
pickup pencircle scaled 0.1pt;
draw z[i]--z[i+1]--z[i+2]--z[i+3]--z[i+4];
i:=i+5;
enddef;

def motif (expr debut, fin, n) =
if (n=1):dessine(debut,fin) else:
  motif(debut, 1/3[debut,fin], n-1) ;
  motif(1/3[debut,fin],
    (1/3[debut,fin] - debut) rotated 60 shifted (1/3[debut,fin]), n-1) ;
  motif((1/3[debut,fin] - debut) rotated 60 shifted (1/3[debut,fin]),
    (1/3[debut,fin] -debut) shifted (1/3[debut,fin]), n-1) ;
  motif((1/3[debut,fin] - debut) shifted (1/3[debut,fin]), fin, n-1) ;
fi;
enddef;

beginchar("S",15pt#,15pt#,5pt#); "The snowflake" ;
motif((0,0), (w/2,h),4);
motif((w/2,h), (w,0),4);
motif((w,0), (0,0),4);
endchar;
end
```

Voici le résultat :

Figure 8.4 – 



8.6 The boxes

Nous avons vu comment représenter un environnement comme une liste d'associations avec des paires `variable.valeur`. Une autre méthode est d'utiliser le principe de *box* qui encapsule la valeur dans une lambda. La *box* est une lambda qui prend une valeur à sa création. Puis elle réagit à deux messages qui permettent respectivement d'afficher la valeur capturée ou de la modifier avec la procédure `set!`

Voici l'implémentation en Scheme :

```
(define (box value)
  (lambda (msg)
    (case msg
      ("get" value)
      ("set" (lambda (new-value) (set! value new-value))))))

(define (make-box value)
  (box value))

(define maboite (make-box 4))
(maboite "get")
((maboite "set") 5)
```

En Ocaml, nous pouvons rédiger le code ci-dessous :

```
exception Erreur

let box value0 =
  let value = ref value0 in
  fun message ->
    match message with
    | "get" -> (fun any -> print_int !value)
    | "set" -> (fun newvalue -> (value := newvalue ; print_int !value ))
    | "reset"-> (fun any -> (value := value0 ; print_int !value))
```

```
    | _ -> raise Erreur


let maboite = box 5 ;;
(maboite "get") 0 ;;
(maboite "set") 1976 ;;
(maboite "get") 0 ;;
(maboite "reset") 0 ;;
```

8.7 Les modules Ocaml. Modélisation d'un monoïde

Un monoïde est une structure algébrique qui possède une loi de composition interne associative et un élément neutre. Représentons cette structure en OCAML, en définissant un module. Nous reprenons ici l'excellent article https ://blog.derniercri.io/observons-une-premiere-structure-algebrique-appliquee-a-linformatique-le-monoide/

```
module type MONOID =
sig
type t
val ( <+> ) : t -> t -> t
val neutral : t
end

module String_monoid : MONOID with type t = string  =
struct
type t = string
let ( <+> ) = (^)
let neutral = ""
end

String_monoid.("abc" <+> "def" <+> neutral)
-> String_monoid.t = "abcdef"
```

En algèbre, un morphisme (ou homomorphisme) est une application entre deux structures algébriques de même espèce.

Pour les monoïdes, un morphisme est une application $f : (M, *, e) \longrightarrow (M', \star, e')$, entre deux monoïdes $(M, *, e)$ et $(M', \star, e')$ qui vérifie :

— $\forall (g, h) \in M^2,\ f(g * h) = f(g) \star f(h)$

— $f(e) = e'$

```
#load "Str.cma"

let count  t =  split (regexp " ") t   |> List.length ;;

let pageA = "Hello World "
let pageB = "Foo bar "
```

```
let pageC = "O Caml " ;;

count String_monoid.(pageA <+> pageB <+>  pageC) ;;
count(String_monoid.(pageA)) + count(String_monoid.(pageB)) + count(String_monoid.(pageC));;
```

Nous avons ici utilisé l'opérateur `|>` défini comme suit `let ( |> ) x f = f x`

Cette fonction `count` est ainsi un morphisme entre le monoïde `String_monoid` et le monoïde des entiers (avec + comme fonction de composition interne et 0 comme élément neutre)

8.8 Machine Learning and Neural Networks

8.8.1 Introduction

Nous implémentons en R un réseau de neurones réduit à sa plus simple expression. Il n'aura que deux couches de neurones. Le langage R est ici commode pour ses opérations natives sur les matrices. Nous pourrons voir ensuite comme transposer ce code en OCAML.

Nous entraînerons notre NN sur la base du jeu de test MNIST. Le "training set" contient 60000 exemples, et le "test set" 10000 exemples. Nous pourrons nous documenter plus précisément avec l'excellent ouvrage de François Chollet [5].

8.8.2 Un peu de théorie

Soit les 150 observations suivantes représentées par la matrice $X_{150,784}$ (ou tensor 2 dimensions) comprenant 150 lignes pour les 150 observations et 784 colonnes pour les 784 features des observations.

2 matrices de poids $W^1_{32,150}$ et $W^2_{10,150}$ sont utilisées.

— 1er layer de 32 neurones
— 2nd layer de 10 neurones

La sortie $OUTPUT_{150,10}$ est une matrice de 150 lignes avec les 10 colonnes représentant les 10 features que l'on cherche à reconnaître.

Voici le schéma simplifié du NN à 2 couches :

$$X \longrightarrow \otimes W^1 \to Z^1 \to \sigma \to LAYER^1 \longrightarrow \otimes W^2 \to Z^2 \to \sigma \to \hat{Y} >> LOSS(\hat{Y}, Y)$$

8.8.3 Calcul matriciel

Cela donne le calcul matriciel ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,784} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,784} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{150,1} & x_{150,2} & \cdots & x_{150,784} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} camlw^1_{1,1} & w^1_{1,2} & \cdots & w^1_{1,32} \\ w^1_{2,1} & w^1_{2,2} & \cdots & w^1_{2,32} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w^1_{784,1} & w^1_{784,2} & \cdots & w^1_{784,32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^1_{1,1} & z^1_{1,2} & \cdots & z^1_{1,32} \\ z^1_{2,1} & z^1_{2,2} & \cdots & z^1_{2,32} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z^1_{150,1} & z^1_{150,2} & \cdots & z^1_{150,32} \end{pmatrix}$$

$$\sigma(\begin{pmatrix} z^1_{1,1} & z^1_{1,2} & \cdots & z^1_{1,32} \\ z^1_{2,1} & z^1_{2,2} & \cdots & z^1_{2,32} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z^1_{150,1} & z^1_{150,2} & \cdots & z^1_{150,32} \end{pmatrix}) \times \begin{pmatrix} w^2_{1,1} & w^2_{1,2} & \cdots & w^2_{1,10} \\ w^2_{2,1} & w^2_{2,2} & \cdots & w^2_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w^2_{32,1} & w^2_{32,2} & \cdots & w^2_{32,10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^2_{1,1} & z^2_{1,2} & \cdots & z^2_{1,10} \\ z^2_{2,1} & z^2_{2,2} & \cdots & z^2_{2,10} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z^2_{150,1} & z^2_{150,2} & \cdots & z^2_{150,10} \end{pmatrix}$$

$$\sigma(\begin{pmatrix} z^2_{1,1} & z^2_{1,2} & \cdots & z^2_{1,10} \\ z^2_{2,1} & z^2_{2,2} & \cdots & z^2_{2,10} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z^2_{150,1} & z^2_{150,2} & \cdots & z^2_{150,10} \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \hat{y}_{1,1} & \hat{y}_{1,2} & \cdots & \hat{y}_{1,10} \\ \hat{y}_{2,1} & \hat{y}_{2,2} & \cdots & \hat{y}_{2,10} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{y}_{150,1} & \hat{y}_{150,2} & \cdots & \hat{y}_{150,10} \end{pmatrix}$$

$$LOSS(Y,\hat{Y}) = \sum(\begin{pmatrix} \hat{y}_{1,1} & \hat{y}_{1,2} & \cdots & \hat{y}_{1,10} \\ \hat{y}_{2,1} & \hat{y}_{2,2} & \cdots & \hat{y}_{2,10} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{y}_{150,1} & \hat{y}_{150,2} & \cdots & \hat{y}_{150,10} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} & \cdots & y_{1,10} \\ y_{2,1} & y_{2,2} & \cdots & y_{2,10} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{150,1} & y_{150,2} & \cdots & y_{150,10} \end{pmatrix})^2$$

$$\begin{aligned} Z_1 &= X.W_1 \\ LAYER_1 &= \sigma(Z_1) \\ Z_2 &= LAYER_1 * W_2 \\ \hat{Y} &= \sigma(Z_2) \\ LOSS &= (\hat{Y} - Y)^2 \end{aligned}$$

Calculons la dérivée de la fonction $LOSS$ en fonction de W^1

$$\begin{aligned} \frac{\delta LOSS}{\delta W_1} &= \frac{\delta LOSS}{\delta \hat{Y}}.\frac{\delta \hat{Y}}{\delta Z_2}.\frac{\delta Z_2}{\delta LAYER_1}.\frac{\delta LAYER_1}{\delta Z_1}.\frac{\delta Z_1}{\delta W_1} \\ &= 2(\hat{Y} - Y).\sigma'(Z_2).W_2.\sigma'(Z_1).X \end{aligned}$$

$2(\hat{Y} - Y)$ est une matrice de dimension $(150, 10)$
$\sigma'(Z_2)$ est une matrice de dimension $(150, 10)$
W_2 est une matrice de dimension $(32, 10)$
$\sigma'(Z_1)$ est une matrice de dimension $(150, 32)$
X est une matrice de dimension $(150, 784)$

Le calcul matriciel qui sera fait est $t(X) * \{(2(\hat{Y} - Y).\sigma'(Z^2) * t(W^2).\sigma'(Z^1)\}$, où $*$ est le produit matriciel et . le produit d'Hadamard. Le résultat donne une matrice de dimension $(784, 32)$ qui est de même dimension que W_1

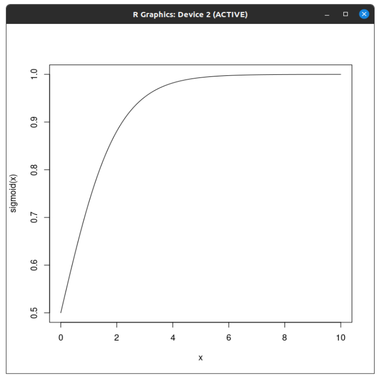
$$\begin{aligned} t(150, 784) * \{(150, 10).(150, 10) * t(32, 10).(150, 32))\} &= (784, 150) * \{(150, 10) * (10, 32).(150, 32)\} \\ &= (784, 150) * (150, 32) \\ &= (784, 32) \end{aligned}$$

8.8.4 Fonctions d'activation

Pour la fonction d'activation, ici appelée σ, nous utiliserons pour la première couche la fonction $relu(x) = max(o, x)$

Pour la seconde couche, nous utiliserons la fonction sigmoid $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$

FIGURE 8.5 – La fonction sigmoid



Voici le code en R :

```
# the activation function
sigmoid <- function(x) {
  1.0 / (1.0 + exp(-x))
}

x=seq(0,10,0.1)
plot(x, sigmoid(x), type="l")

# the derivative of the activation function
sigmoid_derivative <- function(x) {
  sigmoid(x) * (1.0 - sigmoid(x))
}
```

Calculons la dérivée de la fonction $LOSS$ en fonction de W^2

$$\frac{\delta LOSS}{\delta W_2} = \frac{\delta LOSS}{\delta \hat{Y}} . \frac{\delta \hat{Y}}{\delta Z_2} . \frac{\delta Z_2}{\delta W_2} \tag{8.1}$$

$$= 2(\hat{Y} - Y).\sigma'(Z_2).LAYER_1 \tag{8.2}$$

$2(\hat{Y} - Y)$ est une matrice de dimension $(150, 10)$

$\sigma'(Z_2)$ est une matrice de dimension $(150, 10)$

$LAYER_1$ est une matrice de dimension $(150, 32)$

Le calcul matriciel qui sera fait est $t(LAYER_1) * (2(\hat{Y} - Y).\sigma'(Z_2))$, où $*$ est le produit matriciel et . le produit d'Hadamard. Le résultat donne une matrice de dimension $(32, 10)$ qui est de même dimension que W_2

$$t(150, 32) * (150, 10).(150.10) = (32, 150) * (150, 10) = (32, 10)$$

8.9 Les nombres premiers. L'algorithme RSA

— Le crible d'Erathostène (Ἐρατοσθένης)
— Leur répartition
— Les nombres premiers jumeaux
— La constante de Brun
— La fonction zêta
— Le produit eulérien et sa convergence avec la suite harmonique
— Le petit théorème de Fermat
— La fonction *indicatrice* d'Euler
— L'algorithme RSA

Le crible

```
type 'a stream = Cons of 'a * (unit -> 'a stream) ;;
let hd (Cons (h, _)) = h ;;
let tl (Cons (_, tf)) = tf () ;;

let rec take n s =
  if n=0 then []
  else hd s :: take (n-1) (tl s)

let rec entiers x = Cons(x, fun() -> entiers(x+1))

let rec filtre m (Cons(x,l)) =
  if x mod m = 0 then filtre m (l())
  else Cons(x, fun() -> (filtre m (l())))

let rec crible (Cons(x,l)) = Cons(x, fun()-> crible(filtre x (l())))

let premiers = crible(entiers 2) ;;
```

```
utop # take 100 premiers ;;
- : int list =
[2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71;
 73; 79; 83; 89; 97; 101; 103; 107; 109; 113; 127; 131; 137; 139; 149; 151;
 157; 163; 167; 173; 179; 181; 191; 193; 197; 199; 211; 223; 227; 229; 233;
 239; 241; 251; 257; 263; 269; 271; 277; 281; 283; 293; 307; 311; 313; 317;
 331; 337; 347; 349; 353; 359; 367; 373; 379; 383; 389; 397; 401; 409; 419;
 421; 431; 433; 439; 443; 449; 457; 461; 463; 467; 479; 487; 491; 499; 503;
 509; 521; 523; 541]
```

Le produit d'Euler aka le produit eulérien

La fonction zêta est égale au produit eulérien

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_i^{-s}} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{p_i^s}{p_i^s - 1}$$

Exemple pour $s = 1$ avec la suite harmonique

$$\begin{aligned} 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + ... &= \tfrac{1}{1-\frac{1}{2}}.\tfrac{1}{1-\frac{1}{3}}.\tfrac{1}{1-\frac{1}{5}}.\tfrac{1}{1-\frac{1}{7}}.(...) \\ &= \tfrac{2.3.5.7.11.13.17.19...}{1.2.4.6.10.12.16.18...} \end{aligned}$$

Démontrons cela

$$\zeta(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + ...$$

Divisons par 2

$$\frac{\zeta(1)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \frac{1}{16} + ...$$

La différence de ces 2 équations donne :

$$\zeta(1).(1 - \frac{1}{2}) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + ...$$

Divisons par 3

$$\frac{1}{3}.(1 - \frac{1}{2}).\zeta(1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{27} + \frac{1}{33} + \frac{1}{39} + ...$$

La différence donne :

$$(1 - \frac{1}{3}).(1 - \frac{1}{2}).\zeta(1) = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + ...$$

Divisons par 5

$$\frac{1}{5}.(1 - \frac{1}{3}).(1 - \frac{1}{2}).\zeta(1) = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{35} + \frac{1}{55} + ...$$

La différence donne :

$$(1 - \frac{1}{5}).(1 - \frac{1}{3}).(1 - \frac{1}{2}).\zeta(1) = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + ...$$

Nous pouvons poursuivre sur le principe du crible d'Erathostène

$$\dots (1 - \frac{1}{5}).(1 - \frac{1}{3}).(1 - \frac{1}{2}).\zeta(1) = 1$$

D'où :

$$\begin{aligned} \zeta(1) &= \tfrac{1}{(1-\frac{1}{2}).(1-\frac{1}{3}).(1-\frac{1}{5})...} \\ \zeta(1) &= \tfrac{1}{\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{4}{5}...} \\ \zeta(1) &= \tfrac{2.3.5.7.11.13.17.19...}{1.2.4.6.10.12.16.18...} \end{aligned}$$

Le numérateur est le produit de l'ensemble des nombres premiers. Le dénominateur est le produit de l'ensemble des nombres premiers moins 1.

Exemple pour $s = 2$ avec la suite carrée

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + ... = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}}.\frac{1}{1 - \frac{1}{9}}.\frac{1}{1 - \frac{1}{25}}.\frac{1}{1 - \frac{1}{49}}.(...)$$

Les nombres premiers jumeaux et la constante de Brun

La somme inverse des nombres premiers jumeaux. Il y en aurait une infinité. Cependant, cette somme converge vers la constante de Brun.

$$Brun = (\frac{1}{3}+\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{7})+(\frac{1}{11}+\frac{1}{13})+(\frac{1}{17}+\frac{1}{19})+(\frac{1}{29}+\frac{1}{31})+\ ...$$
$$Brun \approx 1,90216$$

```
let rec filtre_jumeaux = function
 | Cons(x,l) -> if (hd (l()) = (x+2)) then
                  Cons(x, fun() -> Cons ((hd (l())) , (fun() ->  (filtre_jumeaux  (l())))))
                else filtre_jumeaux (l()) ;;

take 100 (filtre_jumeaux premiers) ;;

let rec inverse (Cons(x,l)) = Cons(1. /. float_of_int x, fun() -> inverse(l())) ;;

let inverse_jumeaux = inverse (filtre_jumeaux premiers) ;;

let rec somme n s =
if n=0 then 0.
else hd s +. somme (n-1) (tl s) ;;

somme 10000 inverse_jumeaux ;;
```

Avec les 10000 premières paires, nous sommes encore loin de $1,90216\ldots$

Le petit théorème de Fermat

Si p est premier et si a n'est pas un multiple de p, alors $a^{p1}1 \mod p$

Le théorème d'Euler

L'indicatrice d'Euler est une fonction, qui à tout entier naturel n non nul associe le nombre d'entiers compris entre 1 et n et premiers avec n. Cette fonction est nommée en anglais *Euler's totient function*

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \\ & & n & \longmapsto & \mathrm{card}\{m \in \mathbb{N}^* \mid m \leq n \text{ et } m \text{ premier avec } n\} \end{array}$$

Le théorème d'Euler nous dit que $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n$, si a est un entier premier à n. C'est une généralisation du petit théorème de Fermat.

Le théorème de Bezout

$$\forall x, y \in \mathbb{N},\ \exists u, v \in \mathbb{Z} \text{ tel que } ux + vy = \mathrm{pgcd}(x, y)$$

L'inverse modulaire

Avec x et n premiers entre eux, en prenant u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que $ux + vn = 1$, on a :

$$u.x \equiv 1 \mod n$$
$$u \equiv x^{-1} \mod n$$

L'algorithme RSA

Soient $p > 1$ et $q > 1$ deux nombres premiers distincts, $n = pq$ leur produit, e un nombre premier avec $\varphi(n) = (p1)(q1)$ et $d = e^1 \mod (p1)(q1)$.

Pour tout entier positif $m < n$, on a $m^{ed}m \mod n$

La clé publique est le couple $P = (n, e)$, la clé secrète est le couple $S = (n, d)$.

Raisonnement :

$ed1 \mod (p1)(q1)$, donc il existe k tel que $ed = 1 + k(p1)(q1)$.

Si m n'est pas multiple de p ni de q, d'après le petit théorème de Fermat,

$$\begin{cases} m^{ed} = m^{1+k(p1)(q1)} = m(m^{p-1})^{k(q-1)} \equiv m \mod p \\ m^{ed} = m^{1+k(p1)(q1)} = m(m^{q-1})^{k(q-1)} \equiv m \mod q \end{cases}$$

et si m est un multiple de p, $m0 \mod p$ et $m^{ed}0 \mod p$ (de même avec q).

L'entier $u^{ed}m$ est donc un multiple de p et de q, qui sont premiers distincts, donc un multiple de leur produit $pq = n$

Donc, pour tout entier $m, m^{ed}m \mod n$

Le code

```
open List
open Random

let p = 61 and q = 53 ;;
let n = p*q ;;
let phi = (p-1)*(q-1) ;; (* phi=3233 *)
let m = 65 ;;

let rec pgcd a b =
  if b = 0 then a
  else pgcd b (a mod b)

let rec calcule_e p q =
  let e = Random.int ((p-1)*(q-1))
    in if pgcd e ((p-1)*(q-1)) = 1 then e
      else calcule_e p q

let rec euclide a b =
  if b = 0 then ( a , 1 , 0 )
    else
```

```
    begin
        let (d', u', v') = euclide b (a mod b)
        in (d', v', u' - (a / b) * v' )
    end

let calcule_d p q e =
    let(_, u ,_) = euclide e (( p-1)*(q-1)) in
      u mod ((p-1)*(q-1))

let rec pow a m = function
  | 0 -> 1 mod m
  | 1 -> a mod m
  | n ->
    let b = pow a m (n / 2) in
    b * b * (if n mod 2 = 0 then 1 else a) mod m
  ;;

let e = calcule_e p q  ;;
let d = calcule_d p q e ;;

crypt (crypt m e n) d n;;

let factor n =
  let rec aux n k l =
    if n < k/2 then l
    else if (n mod k) = 0 then aux (n/k) k (k::l)
    else if (k=2) then aux n 3 l
    else aux n (k+2) l
in rev (aux n 2 [])
```

8.10 Approximation du nombre π

Que	j'	aime	à	faire	connaître	ce	nombre	utile	aux	sages.
3,	1	4	1	5	9	2	6	5	3	5

Cherchons à approcher π par cinq méthodes :
- La loi des grands nombres. Nous faisons ici un tirage aléatoire de coordonnées (x, y) avec x et y compris entre -1 et 1. Il y a π chances sur 4 que le tirage tombe dans le cercle de rayon 1.
- La série alternée de Leibniz

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \frac{\pi}{4}$$

- Le calcul numérique de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

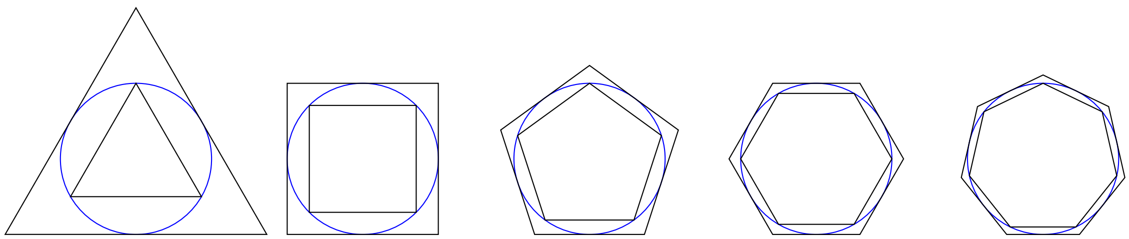
— Le produit de Wallis

$$\pi/2 = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10....}{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11....}$$

Ce produit s'écrira mieux sous la forme :

$$(\frac{2}{1}.\frac{2}{3}).(\frac{4}{2}.\frac{4}{5}).(\frac{6}{5}.\frac{6}{7}).(\frac{8}{7}.\frac{8}{9}).... = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n.2n}{(2n-1).(2n+1)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1}$$

— Les périmètres des polygones réguliers inscrits et circonscrits au cercle



8.10.1 La méthode des polygones

Pour calculer la valeur de π, il suffit de calculer pour n suffisament grand les périmètres des polygones réguliers de n côtés inscrits et circonscrits à un cercle de diamètre $2R = 1$. Nous nous référerons à l'excellent ouvrage [9]. Cette approche est appelée en anglais *the method of exhaustion*.

Le périmètre du polygone inscrit sera nommé p_n. Le périmètre du polygone circonscrit sera p'_n. Comme $p_n < 2\pi R < p'_n$, on aura $p_n < \pi < p'_n$. Nous obtiendrons alors deux valeurs approchées de π, l'une par défaut, l'autre par excès.

Calcul de p_{2n} en fonction de p_n

Nous rappelons les deux définitions suivantes :

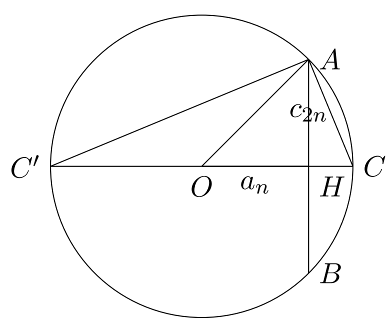
Définition 12. *Le rayon du polygone est le rayon du cercle circonscrit.*

Définition 13. *L'apothème du polygone est le rayon du cercle inscrit.*

Nous pouvons ainsi exprimer l'apothème en fonction du rayon par la formule $a = r\cos(\frac{\pi}{n})$ où n est le nombre de côté du polygone.

Soit $AB = c_n$ le côté du polygone régulier inscrit et $OH = a_n$ son apothème.

C est le milieu de l'arc AB. On a $AC = c_{2n}$



Dans le triangle rectangle ACC' :

$$\begin{aligned} AC^2 &= CC'.CH = CC'(OC - OH) \\ \Leftrightarrow c_{2n}^2 &= 2R - (R - a_n) \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} OH &= \sqrt{OA\text{š} - AH\text{š}} \\ \Leftrightarrow a_n &= \sqrt{R\text{š} - \frac{c_n^2}{4}} \end{aligned}$$

Donc

$$c_{2n}^2 = R(2R - \sqrt{4R^2 - c_n^2})$$

Comme $c_n = \frac{p_n}{n}$, on obtient :

$$\frac{p_{2n}^2}{4n^2} = R(2R - \sqrt{4R^2 - \frac{p^2}{n^2}})$$

Soit pour $2R = 1$

$$\boxed{p_{2n}^2 = 2n(n - \sqrt{n^2 - p_n^2})}$$

En partant d'un carré inscrit ($n = 4$), nous avons $c_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et donc nous pouvons calculer les valeurs de $p_8, p_{16}, p_{32}, \ldots$

Calcul de p'_n en fonction de p_n

Les polygones inscrits et cirsconscrits étant deux polygones semblables, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{p'_n}{p_n} &= \frac{R}{a_n} \\ \Leftrightarrow p'_n &= p_n.\frac{R}{a_n} \\ \Leftrightarrow p'_n &= p_n.\frac{2R}{\sqrt{4R^2 - c_n^2}} \\ \Leftrightarrow p'_n &= \frac{2nRp_n}{\sqrt{4n^2R^2 - p_n^2}} \end{aligned}$$

Soit pour $2R = 1$

$$\boxed{p'_n = \frac{np_n}{\sqrt{n^2 - p_n^2}}}$$

Les valeurs approchées de π par défaut, et par excès en fonction du nombre n de côtés :
$n = 4 \rightarrow 2.82843 < \pi < 4.00002$
$n = 8 \rightarrow 3.06148 < \pi < 3.31372$
$n = 16 \rightarrow 3.121446 < \pi < 3.18266$
$n = 32 \rightarrow 3.136542 < \pi < 3.151722$
$n = 64 \rightarrow 3.140274 < \pi < 3.144064$

Depuis la formule $p_{2n}^2 = 2n(n - \sqrt{n^2 - p_n^2})$ et sachant que $p_n = n.c_n$, nous pouvons en déduire :

$$c_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - c_n^2}}$$

Pour un carré de rayon 1, nous avons $c_4 = \sqrt{2}$. Ainsi $c_8 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$
De même, $c_{16} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$ et $c_{32} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$
Comme formule générique, nous obtenons ainsi avec $n - 1$ racines imbriquées :

$$c_{2^n} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}}$$

Quand n tend vers l'infini, le 2^n-gone tend vers le cercle. D'où :

$$2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}} \rightarrow \pi \textit{ quand } n \rightarrow \infty$$

Nous pourrons nous référer à [21]

8.10.2 La série alternée de Leibniz

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \frac{\pi}{4}$$

Nous pouvons coder cette somme infinie en utilisant un type *stream*.

```
type 'a stream = Cons of 'a * (unit -> 'a stream) ;;
let hd (Cons (h, _)) = h ;;
let tl (Cons (_, tf)) = tf () ;;

let rec sum n s acc =
  if n=0 then acc
  else  sum (n-1) (tl s) (acc +. (hd s)) ;;

let rec take n s =
  if n=0 then []
  else hd s :: take (n-1) (tl s) ;;

let rec from i = Cons ((((-1.) ** i ) /. (2.*. i +. 1.)), fun () -> from (i +. 1.)) ;;
let leibniz = from 0. ;;
```

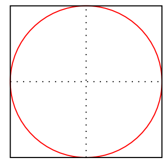
Cette série est belle, mais paresseuse. Elle converge très lentement vers $\frac{\pi}{4}$. Prenons les cinq millions premières valeurs de notre stream `leibniz`.

```
# 4. *. sum 5000000 leibniz 0. ;;
- : float = 3.14159245358977968
```

8.10.3 La loi des grands nombres

Sur un tirage aléatoire de coordonnées (x, y) avec x et y compris entre -1 et 1, il y a π chances sur 4 que le tirage tombe dans le cercle de rayon 1.

comme un jeu de fléchettes...



Le résultat des tirages est stocké sur notre liste "infinie". Nous effectuons cinq millions de tirages qui nous permettent d'obtenir une valeur approchée de π avec les deux premières décimales exactes.

```
let gen() =
let x = if Random.bool () then Random.float 1. else (-. Random.float 1.) in
let y = if Random.bool () then Random.float 1. else (-. Random.float 1.) in
if (x ** 2. +. y ** 2. <= 1.) then 1.0 else 0.0 ;;

let rec from i = Cons (gen(), fun () -> from (i + 1)) ;;

let rec sum n s acc =
if n=0 then acc
else  sum (n-1) (tl s) (acc +. (hd s)) ;;

4. *. (sum 5000000  tirage 0. /. 5000000.) ;;
- : float = 3.142153
```

8.10.4 Le produit de Wallis

Pour introduire le produit infini de Wallis, nous partons du fait que tout polynome de degré n s'écrivant $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ peut se décomposer en :

$$f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$$

Et en factorisant ce produit par $x_1.x_2 \dots x_n$, nous pouvons écrire :

$$f(x) = C(1 - \frac{x}{x_1})(1 - \frac{x}{x_2})\dots(1 - \frac{x}{x_n})$$

C est ici une constante égale à a_0, que nous avons calculé en posant $x = 0$.

Euler aurait démontré que cette décomposition vraie pour les polynomes l'est également pour la fonction $\sin(x)$, et plus particulièrement $\sin(\pi x)$. Nous avons $\sin(\pi\ n) = 0\ \forall n \in \mathbb{Z}$

$$\sin(\pi x) = \pi x(1 - \frac{x^2}{1^2})(1 - \frac{x^2}{2^2})(1 - \frac{x^2}{3^2})(1 - \frac{x^2}{4^2})\dots$$

Et donc pour $x = \frac{1}{2}$, nous avons :

$$\sin(\frac{\pi}{2}) = 1 = \frac{\pi}{2}(1 - \frac{1}{2^2.1^2})(1 - \frac{1}{2^2.3^2})(1 - \frac{1}{2^2.4^2})\dots$$

Si nous écrivons

$$1 - \frac{1}{2^2.n^2} = \frac{(2n-1)(2n+1)}{2n.2n}$$

Nous obtenons le produit de Wallis :

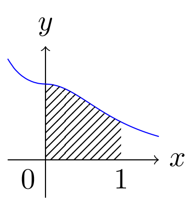
$$\frac{\pi}{2} = (\frac{2}{1}.\frac{2}{3}).(\frac{4}{2}.\frac{4}{5}).(\frac{6}{5}.\frac{6}{7}).(\frac{8}{7}.\frac{8}{9}).... = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n.2n}{(2n-1).(2n+1)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1}$$

```
let rec from i = Cons ((4. *. i**2. ) /. (4. *. i**2. -. 1.), fun () -> from (i +. 1.)) ;;
let wallis = from 1. ;;

let rec mult n s acc =
  if n=0 then acc
  else  mult (n-1) (tl s) (acc *. (hd s)) ;;
```

Le produit converge ici rapidement vers $\pi/2$. Nous multiplions les cinquantes premiers millions de notre liste infinie `wallis`.

```
utop #
2. *. mult 5000000 wallis 1. ;;
- : float = 3.14159249652297845
```

8.10.5 L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$



$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2} = \frac{\pi}{4}$$

```
let f x = 1. /. (1. +. x**2.)

let rec somme n i acc =
  if i > n then (1./. n) *. acc
  else somme n (i +. 1.)  (acc +. (f (i /. n))) ;;

utop #
 4. *. somme 900000000. 0. 0. ;;
 - : float = 3.14159265692298773
```

8.11 Poésies

Un soir t'en souvient-il ? Nous voguions en silence ;
On n'entendait au loin, sur l'onde et sous les cieux,
Que le bruit des rameurs qui frappaient en cadence
Tes flots harmonieux.

Les feuilles mortes se ramassent à la pelle
Tu vois, je n'ai pas oublié...
Les feuilles mortes se ramassent à la pelle,
Les souvenirs et les regrets aussi

Agneau de Dieu, qui sauves les hommes,
Agneau de Dieu, qui nous comptes et nous nommes,
Agneau de Dieu, vois, prends pitié de ce que nous sommes.

Demain, dès l'aube, à l'heure où blanchit la campagne,
Je partirai. Vois-tu, je sais que tu m'attends.
J'irai par la forêt, j'irai par la montagne.
Je ne puis demeurer loin de toi plus longtemps.

8.12 Lectures

Call me Ismaël. [17]

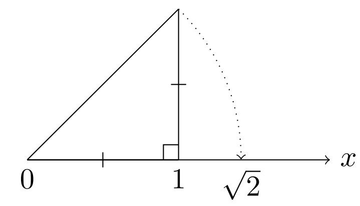
Some years ago - never mind how long precisely - having little or no money in my purse, and nothing particular to interest me on shore, I thought I would sail about a little and see the watery part of the world.

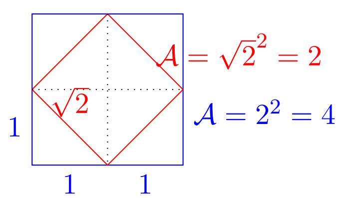
8.13 Les fractions continues

$$\frac{32}{7} = 4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}$$

```
let cont a b =
  let rec aux acc a b =
    if a mod b = 0 then
      a::acc
    else  aux ((a / b)::acc) b (a mod b)
  in rev (aux [] a b) ;;

(*
[4;1;1:3]
4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}
*)

let rec print = function
  | [] -> ""
  | h::[] -> string_of_int h
  | h::t ->  string_of_int(h) ^ " + \\cfrac{1}{" ^ print t ^ "}" ;;
```

8.14 L'irrationalité de $\sqrt{2}$





Démonstration par l'absurde

Considérons que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec la fraction $\frac{a}{b}$ étant réduite.
Alors, nous avons $2 = \frac{a^2}{b^2} \Leftrightarrow a^2 = 2b^2$
Donc a^2 est pair, et donc a est pair. Nous écrivons $a = 2r$.
Cela donne $(2r)^2 = 2b^2 \Leftrightarrow 2r^2 = b^2$
Donc b^2 est pair, et donc b est pair.
Ainsi a et b sont pairs, ce qui contredit l'hypothèse initiale de la fraction réduite.

$\rightsquigarrow$ $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

8.15 Démonstration non constructive

Démontrons qu'il existe deux irrationnels a et b tels que a^b soit rationnel.

Considérons $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$

Si $\sqrt{3}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$ alors on pose $a = \sqrt{3}$ et $b = \sqrt{2}$

Sinon, on pose $a = \sqrt{3}^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2}$, de sorte que $\left(\sqrt{3}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 3 \in \mathbb{Q}$

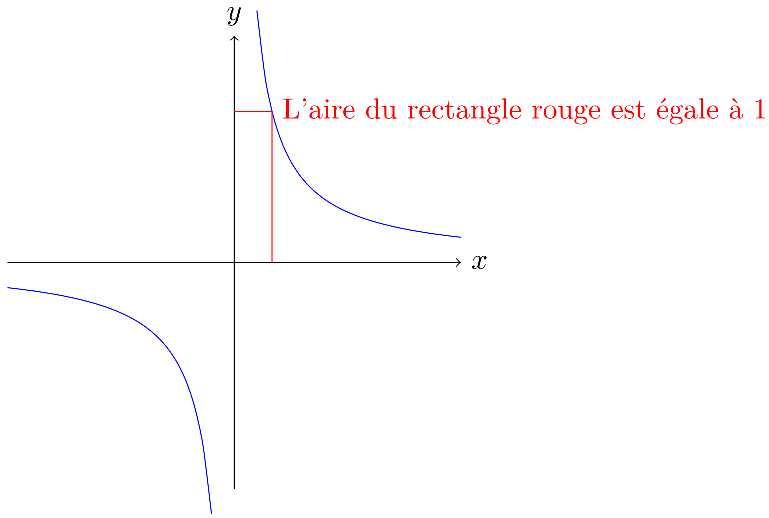
Mais laquelle des deux est la solution ? Faut-il abandonner le principe du *tiers-exlus* de nos démonstrations mathématiques ?

8.16 Le tout est-il plus grand que chacune de ses parties ?

Galilée (et avant lui Aristote ?) remontait le paradoxe suivant sur les nombres entiers : chaque entier peut être mappé un à un avec son carré. Pourtant l'ensemble de nombres carrés est intuitivement un sous-ensemble des nombres entiers.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	...

8.17 L'hyperbole $xy = 1$

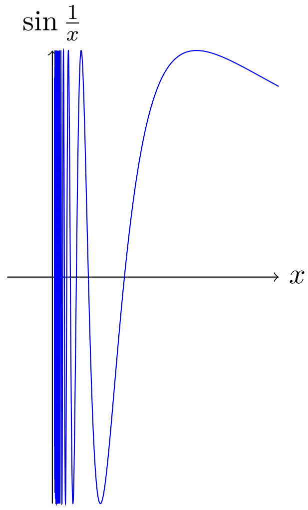


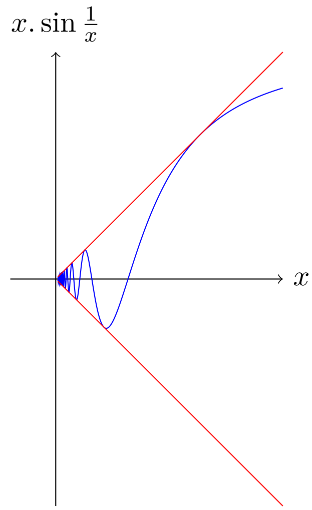
8.18 L'exponentielle

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}
\end{aligned}
$$

Nous avons ainsi : $e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots + + \frac{1}{n!} + \dots$
Et également $e = \lim_{n \to \infty} (\frac{1}{1+n})^n$

8.19 Les fonctions $\sin\frac{1}{x}$ et $x.\sin\frac{1}{x}$





8.20 Prouver par réflection en Agda

Dans certaines situations, la constitution d'une preuve peut être très longue. Par exemple, nous aurons ce cas si la preuve fait appel à des constructeurs de type inductif.

Considérons le type `Pair`

```
data Pair : Nat → Set where
  pair0 : Pair 0
  pairSS : (n : Nat) → Pair n → Pair (suc (suc n))

pair6 : Pair 6
pair6 =  pairSS 4 (pairSS 2 (pairSS zero pair0))
```

Définissons une fonction qui, par le calcul, rendra `True` si n est pair et `False` si n est impair.

```
ispair? : Nat → Set
ispair? zero = True
ispair? (suc zero) = False
ispair? (suc (suc n)) = ispair? n
```

Il nous reste à montrer que cette fonction est consistante avec le type `Pair`, c'est-à-dire que `ispair? n →  Pair n`

```
ispairxsound : {n : Nat} → ispair? n → Pair n
ispairxsound {zero} tt = pair0
ispairxsound {1} ()
ispairxsound {suc (suc n)} x = pairSS n (ispairxsound {n} x)

th : Pair 90
th = ispairxsound tt
```

8.21 Srivanasa Ramanujan

Le mathématicien indien aurait découvert la très belle formule

$$3 = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + \ldots}}}}$$

Posons $f(n) = n(n+2)$, et sachant que $n(n+2) = n\sqrt{1 + (n+1)(n+3)}$, nous avons :

$$\begin{aligned} f(n) &= n\sqrt{1 + f(n+1)} \\ &= n\sqrt{1 + (n+1)\sqrt{1 + f(n+2)}} \\ &= n\sqrt{1 + (n+1)\sqrt{1 + (n+2)\sqrt{1 + f(n+3)}}} \end{aligned}$$

```
let rec f n i =
 if i = 0 then 1.
 else n *. sqrt(1. +. (f (n +. 1.) (i-1)))

utop # f 1. 10 ;;
- : float = 2.99480026926620502
```

Nous pouvons définir la fonction d'affichage `f_latex` comme ci-dessous :

```
let rec f_latex n i =
  if i = 0 then "\\ldots"
  else (string_of_int n)^ "\\sqrt{1 + " ^ (f_latex (n + 1) (i-1)) ^ "}" ;;

print_string (f_latex 1 10) ;;
```

$$3 = 1\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + 5\sqrt{1 + 6\sqrt{1 + 7\sqrt{1 + 8\sqrt{1 + 9\sqrt{1 + 10\sqrt{1 + \ldots}}}}}}}}}}$$

8.22 Le grec ancien

8.22.1 L'alphabet grec

α	β	γ	δ	ϵ	ζ	η	θ	ι	κ	λ	μ	ν	ξ	o	π	ρ	σ	τ	υ	ϕ	χ	ψ	ω
A	B	Γ	Δ	E	Z	H	Θ	I	K	Λ	M	N	Ξ	O	Π	R	Σ	T	Υ	Φ	X	Ψ	Ω

8.22.2 Extraits du nouveau testament

Ἐγὼ τὸ Ἄλφα καὶ τὸ Ὦμεγα, ὁ πρῶτος καὶ ὁ ἔσχατος, ἡ ἀρχὴ καὶ τὸ τέλος. (Ap 22,13)

Ἐάν τις ἀγαπᾷ με, τὸν λόγον μου τηρήσει, καὶ ὁ πατήρ μου ἀγαπήσει αὐτόν, καὶ πρὸς αὐτὸν ἐλευσόμεθα, καὶ μονὴν παρ' αὐτῷ ποιήσομεν. (Jn 14,23)

Εἰρήνη ὑμῖν !

Bibliographie

[1] Badiou ALAIN. *Eloge des mathématiques*. Flammarion, 2015.

[2] Henk BARENDREGT. *Lambda calculi with types*.

[3] Henk BARENDREGT. *The Lambda Calculus, its Syntax and Semantics*.

[4] Jacques CHAZARAIN. *Programmer avec Scheme : De la pratique à la théorie*. International Thomson Publ. France, 1996.

[5] Francois CHOLLET et JJ ALLAIRE. *Deep Learning with R*. 2018.

[6] Baader FRANZ. *Term Rewriting and All That*. Cambridge University Press, 1998.

[7] André GIDE. *Les faux monnayeurs*.

[8] Jean-Yves GIRARD. *Le Point Aveugle, vers la perfection*. Sous la dir. d'HERMANN. 2006.

[9] C. HÉMERY. *Géométrie plane*. Fernand Nathan, 1947.

[10] Douglas R HOFSTADTER et al. *Gödel, Escher, Bach : an eternal golden braid*. 1979.

[11] Victor HUGO. *Les travailleurs de la mer*.

[12] KLEENE. *Introduction to meta-mathematics*. 1950.

[13] Donald KNUTH. *The METAFONT Book*. Addison Wesley, 1992.

[14] René LALEMENT. *Logique, réduction, résolution*. 1990.

[15] Leslie LAMPORT. *LaTeX a document preparation system*. Addison-wesley, 1994.

[16] *Livre de la Genèse, Gn 11, 1-9*.

[17] Herman MELVILLE. *Moby-Dick ; or, The Whale*. 1851.

[18] Samuel MIMRAM. *Program = Proof*. 2020.

[19] Henri POINCARÉ. *La science et l'hypothèse*. Sous la dir. de FLAMMARION. 1902.

[20] Christian QUEINNEC. *Lisp in small pieces*. Cambridge University Press, 2003.

[21] Courant RICHARD. *What is Mathematics ?* Oxford University Press, 1941.

[22] William SHAKESPEARE. *Romeo and Juliet*.

[23] Daniel P. Friedman STANLEY JEFFERSON. *A Simple Reflective Interpreter*. 1992.

[24] Pierre WEIS et Xavier LEROY. *Le langage Caml*. Dunod, 1999.