

Les nombres premiers

Vincent Cagnet

23 novembre 2019

Les nombres premiers. Le crible d'Erathostene. Leur répartition. Les nombres premiers jumeaux. La constante de Brun. La fonction zêta. Le produit eulérien et sa convergence avec la suite harmonique

Le produit d'Euler aka le produit eulérien

La fonction zêta est égale au produit eulérien

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-p_i^{-s}} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{p_i^s}{p_i^s - 1}$$

Exemple pour $s = 1$ avec la suite harmonique

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{7}} \cdot (\dots) \quad (1)$$

$$= \frac{2.3.5.7.11.13.17.19\dots}{1.2.4.6.10.12.16.18\dots} \quad (2)$$

Démontrons cela

$$\zeta(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

Divisons par 2

$$\frac{\zeta(1)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \frac{1}{16} + \dots$$

La différence de ces 2 équations donne:

$$\zeta(1) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \dots$$

Divisons par 3

$$\frac{1}{2.3} \cdot \zeta(1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{27} + \frac{1}{33} + \frac{1}{39} + \dots$$

La différence donne:

$$\zeta(1) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2.3}\right) = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \dots$$

$$\zeta(1) \cdot \left(\frac{1.2}{2.3}\right) = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \dots$$

Divisons par 5

$$\zeta(1) \cdot \left(\frac{1.2}{2.3.5}\right) = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{35} + \frac{1}{55} + \dots$$

La différence donne:

$$\zeta(1) \cdot \left(\frac{1.2.4}{2.3.5}\right) = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \dots$$

Nous pouvons poursuivre sur le principe du crible d'Erathostène

$$\zeta(1) \cdot \frac{1.2.4.6.10.12.16.18...}{2.3.5.7.11.13.17.19...} = 1$$

$$\zeta(1) = \frac{2.3.5.7.11.13.17.19...}{1.2.4.6.10.12.16.18...}$$

Le numérateur est le produit de l'ensemble des nombres premiers. Le dénominateur est le produit de l'ensemble des nombres premiers moins 1.

Exemple pour $s = 2$ avec la suite carrée

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{25}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{49}} \cdot (\dots)$$

Le code

```
era <- function(L, n) {
  if (L[1]^2 > L[length(L)]) {return(c(n, L))}
  else { era(L[L%%L[1]!=0], c(n, L[1])) }
}

twins <- function(P) {
  R <- 2
  for (i in 1:(length(P) - 1)) {
    if (P[i + 1] - P[i] == 2) {
      R <- c(R, P[i], P[i + 1])
    }
  }
  return(R)
}

Premiers <- function(x) {
  T<- matrix(c(2:x), ncol=1)
  T2 <- cbind(T, 0)
  T3 <- cbind(T2, 0)
  T4 <- cbind(T3, 0)
  T5 <- cbind(T4, 0)
  T6 <- cbind(T5, 0)
  T7 <- cbind(T6, 0)
  T8 <- cbind(T7, 0)
  colnames(T8) <- c("N", "Premier", "Jumeau", "Cardinal", "InversePremiers", "InverseJumeaux", "Harmonique")
  P <- era(c(2:x), 1)
  J <- twins(P)
  T8[1,] <- c(2, 1, 1, 1, 1/2, 1/2, 3/2, 2)
  for(i in 2:length(T)) {
    T8[i,2] <- T8[i,1] %in% P
    T8[i,3] <- T8[i,1] %in% J
    T8[i,4] <- if ( T8[i, 2] ) {T8[i-1, 4] + 1} else {T8[i-1,4]}
    T8[i,5] <- if ( T8[i, 2] ) {T8[i-1, 5] + 1/T8[i,1]} else {T8[i-1,5]}
    T8[i,6] <- if ( T8[i, 3] ) {T8[i-1, 6] + 1/T8[i,1]} else {T8[i-1,6]}
    T8[i,7] <- T8[i-1, 7] + 1/T8[i, 1]
    T8[i,8] <- if ( T8[i, 2] ) {T8[i-1, 8] * 1/(1-(1/T8[i,1]))} else {T8[i-1,8]}
```

```

}
appro <- function(x) {x/log(x)}
print(P)
matplot(T8[,1], T8[,4], type = "l", ylab="Repartition", col=2)
matlines(appro(1:x), type='l')
}

Jumeaux <- function(x) {
T<- matrix(c(2:x), ncol=1)
T2 <- cbind(T, 0)
T3 <- cbind(T2, 0)
T4 <- cbind(T3, 0)
T5 <- cbind(T4, 0)
T6 <- cbind(T5, 0)
T7 <- cbind(T6, 0)
T8 <- cbind(T7, 0)
colnames(T8) <- c("N", "Premier", "Jumeau", "Cardinal", "InversePremiers", "InverseJumeaux", "Harmonique")
P <- era(c(2:x), 1)
J <- twins(P)
T8[1,] <- c(2, 1, 1, 1, 1/2, 1/2, 3/2, 2)
for(i in 2:length(T)) {
T8[i,2] <- T8[i,1] %in% P
T8[i,3] <- T8[i,1] %in% J
T8[i,4] <- if ( T8[i, 2] ) {T8[i-1, 4] + 1} else {T8[i-1,4]}
T8[i,5] <- if ( T8[i, 2] ) {T8[i-1, 5] + 1/T8[i,1]} else {T8[i-1,5]}
T8[i,6] <- if ( T8[i, 3] ) {T8[i-1, 6] + 1/T8[i,1]} else {T8[i-1,6]}
T8[i,7] <- T8[i-1, 7] + 1/T8[i, 1]
T8[i,8] <- if ( T8[i, 2] ) {T8[i-1, 8] * 1/(1-(1/T8[i,1]))} else {T8[i-1,8]}
}
matplot(T8[,1], T8[,6], type = "l", ylab="Inverse des jumeaux", col=2)
}

EulerHarmonique <- function(x) {
T<- matrix(c(2:x), ncol=1)
T2 <- cbind(T, 0)
T3 <- cbind(T2, 0)
colnames(T3) <- c("N", "Harmonique", "Produit Euler")
n<-x*(log(x)+1000)
P <- era(c(2:n), 1)
P <- P[-1]
T3[1,] <- c(2,3/2, 2)
for(i in 2:length(T)) {
T3[i,2] <- T3[i-1, 2] + 1/T3[i, 1]
T3[i,3] <- T3[i-1,3] * 1/(1-(1/P[i]))}
print(T3)
matplot(T3[,1], T3[,3], type = "l", ylab="Produit Euler", col=2)
matlines(T3[,2], ylab="Harmonique", col=3)
}

```

```

EulerCarre <- function(x) {
  T<- matrix(c(2:x), ncol=1)
  T2 <- cbind(T, 0)
  T3 <- cbind(T2, 0)
  colnames(T3) <- c("N", "Carré", "Produit Euler")
  n<-x*(log(x)+1000)
  P <- era(c(2:n), 1)
  P <- P[-1]
  T3[1,] <- c(2,5/4, 4/3)
  for(i in 2:length(T)) {
    T3[i,2] <- T3[i-1, 2] + 1/(T3[i, 1]^2)
    T3[i,3] <- T3[i-1,3] * 1/(1-(1/(P[i])^2))}
  matplot(T3[,1],T3[,3], type = "l", ylab="Produit Euler", col=2)
  matlines(y=pi^2/6, col=1)
  matlines(T3[,2], ylab="Carré", col=3)
}

```

Le résultat de la suite harmonique. En rouge, le produit d'Euler. En vert la suite harmonique. La convergence des deux courbes à l'infini n'est pas évidente.

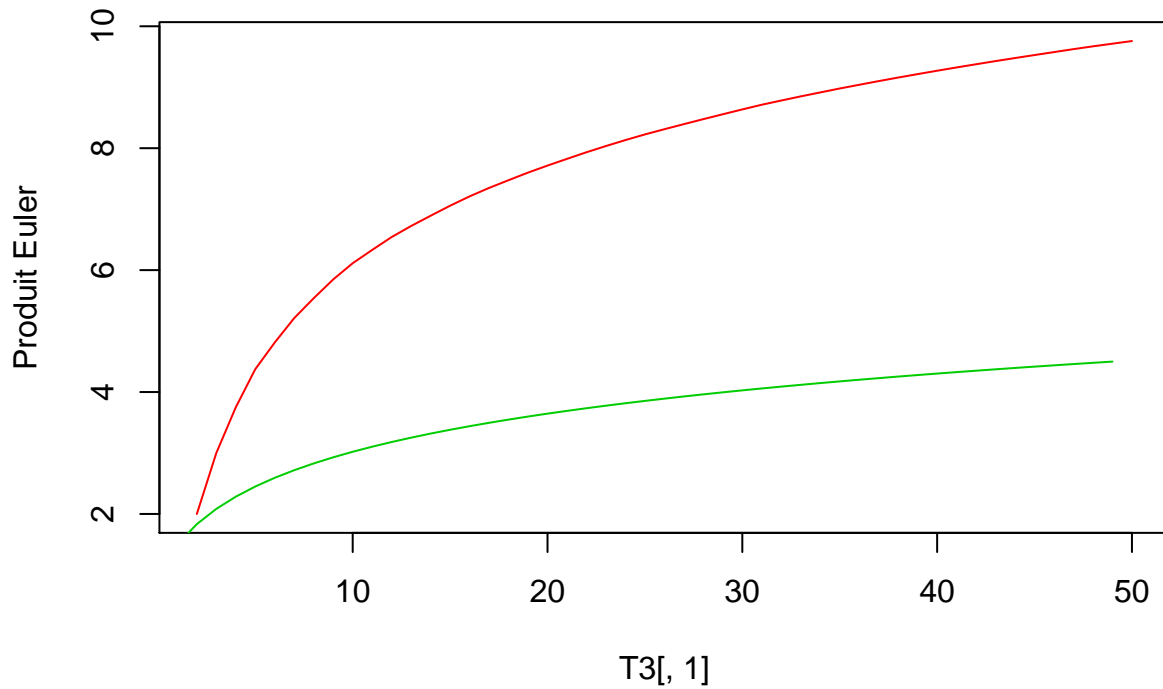
```
EulerHarmonique(50)
```

##		N	Harmonique	Produit Euler
##	[1,]	2	1.500000	2.000000
##	[2,]	3	1.833333	3.000000
##	[3,]	4	2.083333	3.750000
##	[4,]	5	2.283333	4.375000
##	[5,]	6	2.450000	4.812500
##	[6,]	7	2.592857	5.213542
##	[7,]	8	2.717857	5.539388
##	[8,]	9	2.828968	5.847132
##	[9,]	10	2.928968	6.112911
##	[10,]	11	3.019877	6.331229
##	[11,]	12	3.103211	6.542270
##	[12,]	13	3.180134	6.723999
##	[13,]	14	3.251562	6.892099
##	[14,]	15	3.318229	7.056197
##	[15,]	16	3.380729	7.209593
##	[16,]	17	3.439553	7.348239
##	[17,]	18	3.495108	7.474932
##	[18,]	19	3.547740	7.599515
##	[19,]	20	3.597740	7.714659
##	[20,]	21	3.645359	7.824868
##	[21,]	22	3.690813	7.933547
##	[22,]	23	3.734292	8.035259
##	[23,]	24	3.775958	8.133250
##	[24,]	25	3.815958	8.225673
##	[25,]	26	3.854420	8.311357
##	[26,]	27	3.891457	8.394471
##	[27,]	28	3.927171	8.476770
##	[28,]	29	3.961654	8.556739
##	[29,]	30	3.994987	8.635968
##	[30,]	31	4.027245	8.713075

```

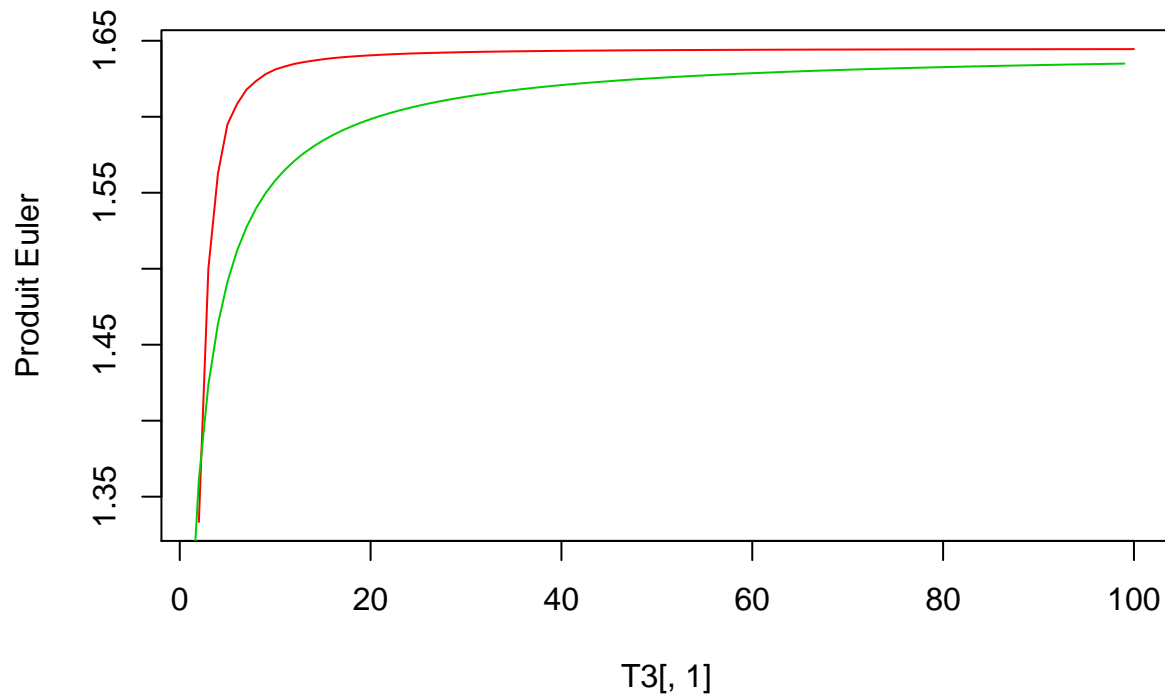
## [31,] 32  4.058495    8.782227
## [32,] 33  4.088798    8.849782
## [33,] 34  4.118210    8.914854
## [34,] 35  4.146781    8.979454
## [35,] 36  4.174559    9.040126
## [36,] 37  4.201586    9.100394
## [37,] 38  4.227902    9.158730
## [38,] 39  4.253543    9.215265
## [39,] 40  4.278543    9.270779
## [40,] 41  4.302933    9.324679
## [41,] 42  4.326743    9.377065
## [42,] 43  4.349999    9.429159
## [43,] 44  4.372726    9.478786
## [44,] 45  4.394948    9.528155
## [45,] 46  4.416687    9.576768
## [46,] 47  4.437964    9.625136
## [47,] 48  4.458797    9.670970
## [48,] 49  4.479205    9.714533
## [49,] 50  4.499205    9.757517

```



Le résultat de la suite carrée. En rouge, le produit d'Euler. En vert la suite carrée. Les courbes convergent vers $\frac{\pi^2}{6}$

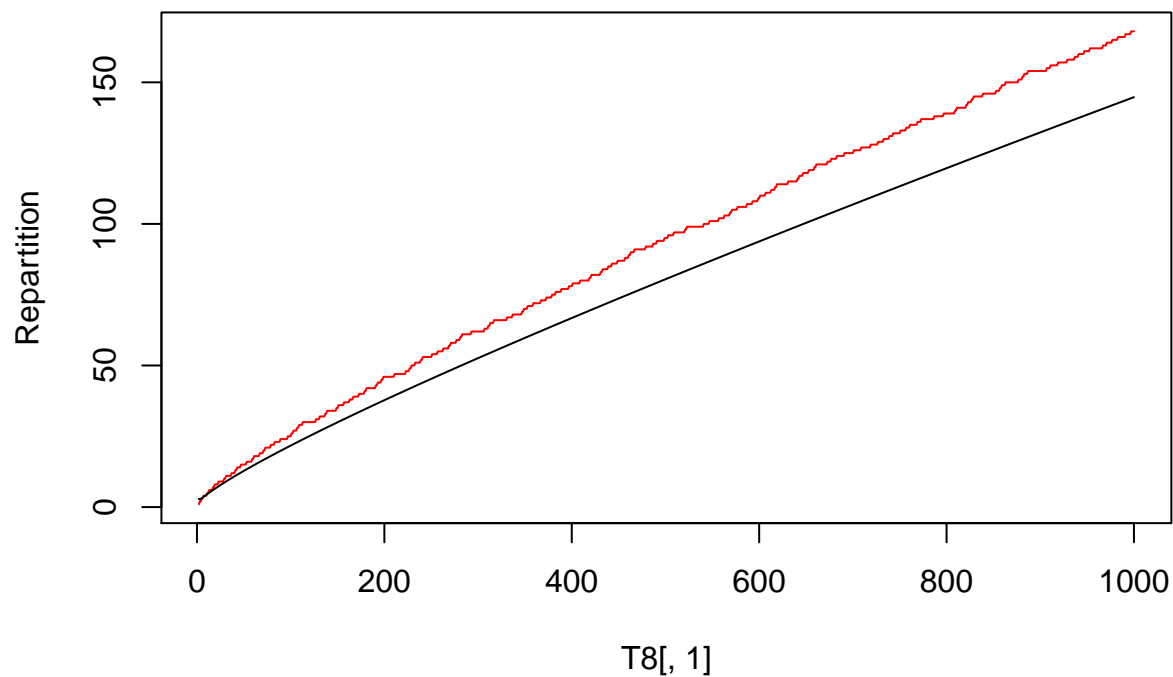
```
EulerCarre(100)
```



La répartition des nombres premiers. En rouge la fonction $x/\log(x)$ qui s'approche de cette répartition

```
Premiers(1000)
```

```
## [1] 1 2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53
## [18] 59 61 67 71 73 79 83 89 97 101 103 107 109 113 127 131 137
## [35] 139 149 151 157 163 167 173 179 181 191 193 197 199 211 223 227 229
## [52] 233 239 241 251 257 263 269 271 277 281 283 293 307 311 313 317 331
## [69] 337 347 349 353 359 367 373 379 383 389 397 401 409 419 421 431 433
## [86] 439 443 449 457 461 463 467 479 487 491 499 503 509 521 523 541 547
## [103] 557 563 569 571 577 587 593 599 601 607 613 617 619 631 641 643 647
## [120] 653 659 661 673 677 683 691 701 709 719 727 733 739 743 751 757 761
## [137] 769 773 787 797 809 811 821 823 827 829 839 853 857 859 863 877 881
## [154] 883 887 907 911 919 929 937 941 947 953 967 971 977 983 991 997
```



Les nombres premiers jumeaux et la constante de Brun

La somme inverse des nombres premiers jumeaux. Il y en aurait une infinité. Cependant, cette somme converge vers la constante de Brun.

$$Brun = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{13}\right) + \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{19}\right) + \left(\frac{1}{29} + \frac{1}{31}\right) + \dots$$

$$Brun \approx 1,90216$$

Jumeaux(10000)

