1. נספח

1.1. שקילות בין מגבלת חוב קשיחה לחלוטין למגבלת חוב שנאכפת על ידי הגדלת מרווח

נציין כי במודל המרכזי ב-EK ובמרבית הספרות בנושא הורדת מינוף, מגבלת האשראי *קשיחה לחלוטין* ולא ניתן לחרוג ממנה. במקרה כזה אם מגבלת החוב *אוכפת* אז ניתן בקירוב להניח כי לווה נמצא בפתרון פינתי ומוריד מינוף מידית ולכן מתנהג לפי מגבלת התקציב שלו, או שניתן להתייחס עליו כפרט שחי מהיד לפה. לעומת זאת, במודל הנוכחי המגבלה אינה קשיחה לחלוטין, והלווה ניצבים בפני ריבית שעולה ככל שחוב גדל. לכן כאשר תיכפה על הלווה הורדת מינוף, היא תימשך על פני תקופה (Dynamic Deleveraging) ולא באופן מידי. הגישה כאן היא הכללה של מודל EK, שהרי במקרה בו קשיחות הפרמיה הולכת לאינסוף ($\phi \to \infty$) חוזרים לפתרון פינתי. אגב, מקרה הקצה בו $\phi \to 0$ מתאר את הגבול בו אין חיכוך פיננסי, והריבית על הלוואות שווה לריבית הפיקדונות. באופן כללי ניתן להראות שהמודל כאן, בו מגבלת החוב נאכפת על ידי הגדלת המרווח מעל ריבית חסרת סיכון שקול למודל שכולל מגבלת חוב קשיחה לחלוטין (מגבלה המיוצגת על ידי אי-שוויון) מכיוון שגם אז קיים "מחיר צל" שמייצג את עלות השבירה של המגבלה, כלומר אם לווה רוצה לעבור מגבלה אז הוא צריך לשלם מחיר בצורת פרמיה מעל הריבית חסרת הסיכון. נראה זאת כאן בהתבסס על Fornaro (2015), Uribe (2006).

נניח כי מבחינת הבנק, מתחת לסף מסוים, חוב נחשב "בטוח" והריבית היא חסרת סיכון. אם נסובב זאת (נעבור לצד הביקוש), אז בהינתן שהלווה מוכן לשלם ריבית חסרת סיכון בלבד, R_t^S, אז הוא מוגבל לאילוץ $b_t^B \leq \bar{b}_t$ (כמובן ש-$\bar{b}_t$ קטן מהמגבלה הטבעית של הלווה, קרי סך תזרים ההכנסות הצפוי של הלווה מהוון בתוואי הריבית הרלוונטי). כאשר מכניסים כזו מגבלה למערכת השיקולים של הלווה, יש להוסיף ללגרזיאן שמתאר את בעיית הלווים את האיבר $\xi_t\left(b_t^B - \bar{b}_t\right)$. קל לראות כי תנאי סדר ראשון לפי צריכה לא משתנה, אבל תנאי סדר ראשון לפי חוב משתנה ומקבלים בו את כופל הלגראנץ שנוסף ξ_t (לא שלילי). הכופל החדש מייצג את מחיר הצל של המגבלה, כלומר, מה המחיר שהלווה מוכן לשלם עבור חריגה ממגבלה (חריגה ממסגרת). פורמאלית, נקבל תנאי אויילר לצריכה מהצורה (לעומת **Error! Reference source not found.**):

$$u^{B\prime}(C_t^B)\frac{1}{R_t^S} = \beta^B E_t\left[u^{B\prime}(C_{t+1}^B)\right] + \xi_t \tag{1}$$

או בצורה שקולה:

$$u^{B\prime}(C_t^B) = \beta^B\ R_t^{Euler\ B}\ E_t\left[u^{B\prime}(C_{t+1}^B)\right] \tag{2}$$

כאשר

$$R_t^{Euler\ B} = R_t^S \underbrace{\left(1 - \frac{R_t^S}{u^{B\prime}(C_t^B)}\xi_t\right)^{-1}}_{Spread} \tag{3}$$

בנוסף מקבלים את תנאי (Kuhn-Tucker complementary slackness condition):

$$\xi_t\left(b_t^B - \bar{b}_t\right) = 0 \tag{4}$$

כלומר, אם לווה **לא מגיע למגבלה** ($b_t^B < \bar{b}_t$), אזי מגבלה לא אוכפת, לכן ניתן להיתעלם ממנה, אז $\xi_t = 0$, ומקבלים כי לווה משלם ריבית חסרת סיכון, $R_t^{Euler\ B} = R_t^S$. אולם, אם לווה **מגיע למגבלה** ($b_t^B = \bar{b}_t$), אז $\xi_t > 0$, כלומר יש "מחיר צל" לשבירה של המגבלה. המשמעות היא שאם לווה רוצה לעבור מגבלה אז הוא צריך לשלם מחיר בצורת פרמיה מעל הריבית חסרת הסיכון.

הערה:

נשים לב כי *הביקוש לאשראי* של כל טיפוס יקבע בהתאם ל**תנאי אוילר** ו**מגבלת התקציב הבין־תקופתית** שלו, שכוללת גם את רמת החוב מתקופה קודמת. ככל שהריבית גבוהה יותר, ושאר הדברים קבועים, הפרט ירצה להקטין צריכה ולהקטין חוב, אזי פונקציית הביקוש לאשראי היא מונוטונית יורדת. נשים לב כי הביקוש במצב עמיד (בטווח הארוך) הוא גמיש לחלוטין, זאת אומרת שעבור ריבית קטנה (גדולה) משיעור העדפות הזמן של הפרט, הוא ירצה להגדיל חוב (חיסכון) לאינסוף. בריבית השווה לשיעור העדפת הזמן שלו, הוא ירצה לא לשנות את הפוזיציה שלו.

1.2. צורות של עקום היצע האשראי

ניתן לרשום את עקום היצע האשראי במספר צורות אולם הדינמיקה נשארת דומה. בקירוב לינארי סביב מצב עמיד אין הבדל כמובן ראו דוגמאות:

1. ב־Schmitt-Grohé & Uribe (2016) רושמים היצע אשראי בצורה הבאה (Debt-Elastic Interest Rate),

$$R_t^* = R^{world} + \psi\left(e^{b_t^* - \bar{b}^*} - 1\right)$$

כאשר במצב עמיד $b_t^* = \bar{b}^*$, לכן

$$R_t^* \approx R^{world} + \psi\left(b_t^* - \bar{b}^*\right)$$

2. פיתוח במקרה של עלויות התאמה של חוב או חיסכון חו״ל לעומת חוב מקומי שהוא ללא עלויות התאמה, מקבלים היצע אשראי מהצורה (ראה BE, רק שהם עשו זאת עבור חיסכון, אזי מעבר לחוב $b_t^* = -B_t^*$):

$$\tilde{R}_t^*(b_t^*) = \frac{R_t^*}{1 - \varphi(b_t^* - b_0^*)}$$

כאשר במצב עמיד $b_t^* = \bar{b}^*$, לכן

$$\tilde{R}_t^*(b_t^*) \approx R_t^*\left(1 + \varphi(b_t^* - b_0^*)\right)$$

3. בנוסף, פיתחתי בנספח את פונקציית היצע האשראי במסגרת סטנדרטית, והראיתי כי בהינתן נטל החוב מתקופה קודמת (כך מקבלים הכנסה פנוייה), אז הריבית תלויה ברמת החוב או החיסכון.

$$r_0(b_0)^{Supply} = \frac{\rho}{1 - \psi(b_0 - B)}$$

ואכן מקבלים עקומת היצע (אשראי) שבה המחיר עולה כאשר כמות האשראי גדלה.

1.3. פיתוח תנאי סדר ראשון (מודל הכנסה אנדוגנית)

נרשום את הלגראזיאן (כולל הצבה של משוואת התפתחות ההון–השקעות)

$$\mathcal{L}_0^j = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} (\beta^j)^t \left(u^j\left(C_t^j - h^j C_{t-1}^j\right) - v^j\left(L_t^j\right) \right) + (\beta^j)^t \lambda_t^j \left(w_t L_t^j + q_t K_t^j + \frac{b_t^j}{R_t^j} + T^j - C_t^j \ - Q_t\left(K_{t+1}^j - (1-\delta)K_t^j\right) - b_{t-1}^j \right)$$

- נסמן ב-b_t^j את החוב לתשלום תקופה הבאה (עֵרֶךְ נָקוּב, face value, במונחים של אגרת חוב, כלומר קרן וריבית) [1].
- כאשר T_t^j מייצג תשלום העברה שלא בשליטה של משקי הבית (למשל דווידנד מבנק כמו במקרה של חוסכים). ולכן משק הבית לא לוקח אותו בחשבון כשעושים אופטימיצציה.
- כמו קודם, המפקידים מתייחסים לרווחי הבנקים כתהליך אקסוגני מבחינתם (מחוץ לשליטתם). כאשר הבנקים מנהלים את הסיכון ודואגים להגדיל מרווח סיכון מעל רמת סף חוב "בטוח" כפי שדנו מעלה.
- קונבנציה dating convention (ראה King and Rebelo 1999, הערת שוליים 16) לפיה לא מבחינים בין זמן התכנון של הסוכן $t+j$ לבין הזמן הקלנדרי של הכלכלה t. כלומר, בגלל שבעיה עם אופק אינסופי, אזי הבעיה שניצבת בפני הסוכן בכל נקודת זמן זהה לבעיה בזמן אפס, למעט משתני המצב \ תנאי התחלה. ולכן כל תקופה מספיק למקסם לפני משתני ההחלטה של החלטה נוכחית בלבד.
- תנאי סדר ראשון לפי צריכה:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0^j}{\partial C_t^j} = E_0 \left[\frac{\partial}{\partial C_t^j} u^j\left(C_t^j - h^j C_{t-1}^j\right) + \ \beta^j \frac{\partial}{\partial C_t^j} u^j\left(C_{t+1}^j - h^j C_t^j\right) - \lambda_t^j \right] = 0$$

נארגן

---

[1] באופן כללי בעבודה זו, הסכם הסימן $(-/+)$ מוגדר כך: ערך חיובי $b_t > 0$ זה עבור חוב לתשלום בתקופה הבאה $(t+1)$, ובהתאמה ערך שלילי עבור חיסכון. הסימון הזה נכון הן לחוב מקומי והן לחוב זר, כמו גם עבור לווה ועבור חוסך. כמו כן, רשמנו חוב בצורה של אג"ח כלומר ערך נקוב (בדומה ל-**Error! Reference source not found.**), לעומת רישום חוב בצורה "בנקאית", היינו במונחי "קרן": $Y_t + b_t = C_t + b_{t-1}R_{t-1}$ (למשל EK). בשני המקומות, אינדקס הזמן הוא לפי מועד נטילת החוב ולא לפי מועד הפירעון. אגב, מגבלת החוב במודל המרכזי של EK הינה $R_t b_t < D_t$ כלומר מגבלה לגבי קרן וריבית, וזה אקוויוולנטי ל-$b_t < D_t$ בנוטציה של **Error! Reference source not found.** שזה הערך הנקוב. בשני המקרים שווי החוב במועד פדיון צריך להיות קטן מסף שנקבע **היום**. יש מקומות בהם אינדקס הזמן של חוב הוא לפי מועד הפירעון, ואז רושמים $Y_t + b_{t+1}/R_t = C_t + b_t$ (למשל BR 2014) או כאמור מקומות שמתייחסים דווקא לפיקדון ואז $C_t + b_{t+1}/R_t = Y_t + b_t$ (למשל Fornaro 2015).

$$E_0\lambda_t^j = E_0\left[u^{j\prime}\left(C_t^j - h^j C_{t-1}^j\right) - \beta^j h^j u^{j\prime}\left(C_{t+1}^j - h^j C_t^j\right)\right]$$

אם בוחנים זמן נוכחי $t = 0$

$$\lambda_0^j = u^{j\prime}\left(C_0^j - h^j C_{-1}^j\right) - \beta^j h^j E_0\left[u^{j\prime}\left(C_1^j - h^j C_0^j\right)\right]$$

או באופן כללי, נסמן זמן נוכחי כ־t (בשביל *dyanre*):

$$\lambda_t^j = u^{j\prime}\left(C_t^j - h^j C_{t-1}^j\right) - \beta^j h^j E_t\left[u^{j\prime}\left(C_{t+1}^j - h^j C_t^j\right)\right]$$

נציב צורה פונקציונאלית

$$u^j\left(C_t^j - h^j C_{t-1}^j\right) = \frac{\left(C_t^j - h^j C_{t-1}^j\right)^{1-\sigma^j}}{1-\sigma^j}$$

לכן

$$u^{j\prime}\left(C_t^j - h^j C_{t-1}^j\right) = \left(C_t^j - h^j C_{t-1}^j\right)^{-\sigma^j}$$

וקיבלנו לבסוף:

$$\lambda_t^j = \left(C_t^j - h^j C_{t-1}^j\right)^{-\sigma^j} - \beta^j h^j E_t\left[\left(C_{t+1}^j - h^j C_t^j\right)^{-\sigma^j}\right] \qquad (5)$$

במקרה ללא הרגלים, מקבלים את הביטוי הידוע: $\lambda_t^j = (C_t^j)^{-\sigma^j}$.

תנאי סדר ראשון לפי עבודה:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0^j}{\partial L_t^j} = E_0\left[-\frac{\partial}{\partial L_t^j} v^j\left(L_t^j\right) + \lambda_t^j w_t\right] = 0$$

מכאן

$$E_0\left[v^{j\prime}\left(L_t^j\right)\right] = E_0\left[\lambda_t^j w_t\right]$$

אם בוחנים זמן נוכחי $t = 0$

$$v^{j\prime}(L_0^j) = \lambda_0^j w_0$$

או באופן כללי, נסמן זמן נוכחי כ־t (בשביל *dyanre*):

$$v^{j\prime}(L_t^j) = \lambda_t^j w_t \qquad (6)$$

זהו היצע העבודה האופטימאלי, והוא מגלם כי שיעור התחלופה השולי בין עבודה לצריכה משתוו לשכר הריאלי (לכל טיפוס).

נציב צורה פונקציונאלית

$$v^j(L_t^j) = \vartheta^j \frac{{L_t^j}^{1+\omega^j}}{1+\omega^j}$$

מכאן

$$v^{j\prime}(L_t^j) = \vartheta^j {L_t^j}^{\omega^j}$$

ונציב בתנאי סדר ראשון (6):

$$\vartheta^j {L_t^j}^{\omega^j} = \lambda_t^j w_t \qquad (7)$$

1.3.1. הון

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0^j}{\partial K_{t+1}^j} = E_0 \lambda_t^j \ (-Q_t) + \beta^j \lambda_{t+1}^j \big(q_{t+1} + Q_{t+1}(1-\delta) \big) = 0$$

כמו למעלה, אם נסמן זמן נוכחי כ־t (בשביל *dyanre*):

$$\lambda_t^j \ Q_t = \beta^j E_t \lambda_{t+1}^j [q_{t+1} + \ Q_{t+1}(1-\delta)]$$

נסדר

$$1 = E_t[\underbrace{\beta^j \frac{\lambda_{t+1}^j}{\lambda_t^j}}_{m_{t+1}^j} \cdot \underbrace{\frac{q_{t+1} + (1-\delta)Q_{t+1}}{Q_t}}_{\tilde{R}_{t+1}^K}]$$

בכתיב מקוצר

$$1 = E_t\left[m_{t+1}^j \cdot \tilde{R}_{t+1}^K\right] \quad (8)$$

אינדקס הזמן של התשואה מסמל את מועד קבלתה (תקופה הבאה) כלומר $\tilde{R}_{t+1}^K = \tilde{R}_{t,t+1}^K$, בדומה למקדם ההיוון הסטוכסטי $m_{t+1}^j = m_{t,t+1}^j$. לא להתבלבל עם ריבית של חוב (שנקבעת מראש) ואינדקס הזמן הוא של זמן השקעה ולא של זמן פידיון.

גרום ההיוון הסטוכסטי (SDF) מוגדר כך

$$m_{t+1}^j = \beta^j \frac{\lambda_{t+1}^j}{\lambda_t^j} \quad (9)$$

באופן כללי $m_{0,t} = m_1 m_2 \ldots m_t = \beta^t \lambda_t / \lambda_0$.

התשואה להשקעה בהון "ex ante" [2] [3]

$$\tilde{R}_{t+1}^K = \frac{q_{t+1} + (1-\delta)Q_{t+1}}{Q_t} \quad (10)$$

1.3.2. ייצרנית הון

Based on Gertler, Kiyotaki (2011),Gertler Karadi (2011), and also CTW 2014, SW 2007. Capital goods producers make new capital (net investment, I_t), using input of final output

---

[2] בדיינר צריך להגדיר כך (אחרת לא מצליח לרוץ) $\tilde{R}_t^K = (q_{t+1} + (1-\delta)Q_{t+1})/Q_t$; $1 = E_t\left[m_{t+1}^j \cdot \tilde{R}_t^K\right]$

[3] נשים לב כי זה לא בדיוק תשואה צפוייה כי מוכפלת בגורם היוון סטוכסטי, ראו מעלה, כך שאם ארשום "תשואה צפוייה" הכוונה היא לתשואה ex ante.

(gross investment, $\tilde{I}_t$) (so $\tilde{Q} = 1$) and subject to adjustment costs (convex in the grossrate of change in investment[4]). Formaly:

$$I_t\big(1 + f(I_t/I_{t-1})\big) = \tilde{I}_t$$

With $f(1) = f'(1) = 0$, $f''(\tilde{I}_t/\tilde{I}_{t-1}) > 0$.

Then, capital goods producers sell this new capital to enterprenute at the price Q_t. So the periodic profit is:

$$\pi_t^K = Q_t I_t - 1 \cdot \tilde{I}_t = Q_t I_t - I_t\big(1 + f(I_t/I_{t-1})\big)$$

Given that households own capital producers, the objective of a capital producer is to choose I_t to solve the maximization problem: $max\ E_0\ \sum_t m_{0,t}\, \pi_t^K$. So FOC:

$$Q_t = 1 + f(I_t/I_{t-1}) + f'(I_t/I_{t-1})\ I_t/I_{t-1} - E_t m_{t+1} f'(I_{t+1}/I_t)\ (I_{t+1}/I_t)^2 \tag{11}$$

כאשר נניח צורה פונקציונאלית הבאה עבור עלויות ההתאמה:

$$f(I_t/I_{t-1}) = \gamma_{II} \frac{(I_t/I_{t-1} - 1)^{1-\sigma_I}}{1 - \sigma_I}$$

נניח $\sigma_I = -1$. אם המקדם, γ_{II}, גדול מאוד אז חוזרים למצב הבסיסי בו ההון קבוע.

1.3.3. חוב

כעת נגזור תנאי סדר ראשון לפי חוב. כאן נעשה הפרדה בין חוסכים ללווים.

עבור חוסכים (מלווים) אין חדש בתנאי סדר ראשון לפי b_t^S:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0^S}{\partial b_t^S} = E_0\left[\lambda_t^S \frac{1}{R_t^S} - \beta^S \lambda_{t+1}^S\right] = 0$$

---

[4] Adjustment costs are on net rather than gross investment so that (1.) the replacing worn out equipment does not involve adjustment costs & (2.) to make the capital decision independent of the market price of capital.

Thus the aggregate production function of capital goods producers is decreasing returns to scale in the short run and is constant returns to scale in the long run

סידור כמו למעלה, אם נסמן זמן נוכחי כ־t:

$$\lambda_t^S \frac{1}{R_t^S} = \beta^S E_t[\lambda_{t+1}^S] \tag{12}$$

או בכתיב מקוצר

$$1 = E_t\left[\beta^S \frac{\lambda_{t+1}^S}{\lambda_t^S} \cdot R_t^S\right] = E_t[m_{t+1}^S \cdot R_t^S] \tag{13}$$

לווים מפנימים שהמרווח שהם משלמים על חוב מקומי תלוי ברמת החוב המקומי שלהם. כלומר הריבית של הלווים היא מהצורה:

$$R_t^B\left(b_t^B/\bar{b}_t^B\right) = R_t^S \cdot \Phi\left(b_t^B/\bar{b}_t^B\right) \tag{14}$$

ואז תנאי סדר ראשון שלהם לפי חוב הינו:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0^B}{\partial b_t^B} = E_0\left[\lambda_t^B\left(\frac{1}{R_t^B} - \frac{b_t^B}{(R_t^B)^2} R_t^{B\prime} \cdot \frac{1}{\bar{b}_t^B}\right) - \beta^B \lambda_{t+1}^B\right] = 0$$

סידור קל, וגם נסמן זמן נוכחי כ־t:

$$\frac{1}{R_t^B} - \frac{R_t^{B\prime}}{(R_t^B)^2} \frac{b_t^B}{\bar{b}_t^B} = E_t\left[\frac{\beta^B \lambda_{t+1}^B}{\lambda_t^B}\right]$$

עוד סידור

$$\frac{1}{R_t^B}\left(1 - \frac{R_t^{B\prime}}{R_t^B} \frac{b_t^B}{\bar{b}_t^B}\right) = E_t[m_{t+1}^B]$$

ונסמן

$$\epsilon\left(b_t^B/\bar{b}_t^B\right) = \frac{R_t^{B\prime}}{R_t^B} \frac{b_t^B}{\bar{b}_t^B} = \frac{\Phi'\left(b_t^B/\bar{b}_t^B\right)}{\Phi\left(b_t^B/\bar{b}_t^B\right)} \frac{b_t^B}{\bar{b}_t^B}$$

ותנאי אוילר הוא

$$\frac{1-\epsilon\left(b_t^B/\bar{b}_t^B\right)}{R_t^B}=\frac{1}{R_t^{B\_Euler}}=E_t[m_{t+1}^B] \quad (15)$$

כלומר, הריבית בתנאי אויילר היא כעת מהצורה :

$$R_t^{B\_Euler}=R_t^B\frac{1}{1-\epsilon\left(b_t^B/\bar{b}_t^B\right)} \quad (16)$$

כעת, בדומה להנחות ולפיתוח שמופיעים ב-BER, אבצע קירוב לינארי לביטויים (תזכורת, קירוב לינארי של טיילור מקיים $L[f(x)\cdot g(x)]=L[f(x)]\cdot L[g(x)]$), סביב נקודה $\bar{b}^B$ נתונה, מתוך הנחה שבמצב עמיד אנו קרובים לנקודה זו, כלומר בהנחה ש- $b_t^B\sim\bar{b}^B$. ונגדיר $\hat{b}_t^B=b_t^B/\bar{b}^B-1$.

$$R_t^B=R_t^S\cdot\Phi\left(b_t^B/\bar{b}^B\right)\cong R_t^S\left(\Phi(1)+\Phi'(1)\cdot\hat{b}_t^B\right) \quad (17)$$

כמו כן, סביב אותה נקודה- $\mathrm{b}_t^{\mathrm{B}}\sim\bar{\mathrm{b}}^{\mathrm{B}}$:

$$\frac{1}{1-\epsilon\left(b_t^B/\bar{b}^B\right)}\cong\frac{1}{1-\epsilon(1)}+\frac{\epsilon'(1)}{\left(1-\epsilon(1)\right)^2}\cdot\hat{b}_t^B \quad (18)$$

בדומה ל-BER, נניח כי $\Phi(1)=1$, כלומר, ברמת חוב "בטוחה" הריבית על חוב שווה לריבית חסרת הסיכון. ונסמן $\Phi'(1)=\phi$. אזי, $\epsilon(1)=\phi$. ונסכם :

$$R_t^B\cong R_t^S\left(1+\phi\,\hat{b}_t^B\right) \quad (19)$$

וגם

$$\frac{1}{1-\epsilon\left(b_t^B/\bar{b}^B\right)}\cong\frac{1}{1-\phi}+\frac{\epsilon'(1)}{(1-\phi)^2}\cdot\hat{b}_t^B \quad (20)$$

נסמן $\epsilon'(1)=\nu\cdot(1-\phi)$

$$\frac{1}{1-\epsilon\left(b_t^B/\bar{b}^B\right)}\cong\frac{1}{1-\phi}\left(1+\nu\cdot\hat{b}_t^B\right) \quad (21)$$

וקיבלתי

$$R_t^{B\_Euler} = R_t^S\left(1+\phi\cdot\hat{b}_t^B\right)\left(1+\nu\cdot\hat{b}_t^B\right)\frac{1}{1-\phi} \cong R_t^S\left(1+\phi+(\phi+\nu)\cdot\hat{b}_t^B\right) \quad (22)$$

כאשר האיבר ϕ מייצג מרווח קבוע בין ריבית חיסכון להלוואה.

1.3.4. הפנמה שח מגבלת חוב

הערה: אם מגבלת החוב תלויה במלאי ההון, כלומר: $\bar{b}_t(K_t^B) = \Theta_t^{loc}\left(K_t^B - f_t^f\cdot\overline{K^B}\right)$, והלווים מפנימים זאת, אז מקבלים איבר נוסף בתנאי סדר ראשון לפי הון (כאמור $R_t^B\left(b_t^B/\bar{b}_t^B\right) = R_t^S\cdot\Phi\left(b_t^B/\bar{b}_t^B\right)$):

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial K_t^B}\frac{b_t^B}{R_t^B} &= -\frac{b_t^B}{(R_t^B)^2}\frac{\partial}{\partial K_t^B}R_t^B = -\frac{b_t^B}{(R_t^B)^2}R_t^S\Phi'\left(b_t^B/\bar{b}_t^B\right)\frac{\partial}{\partial K_t^B}\left(b_t^B/\bar{b}_t^B\right)\\ &= -\frac{R_t^S\Phi'\left(b_t^B/\bar{b}_t^B\right)}{\left(R_t^S\cdot\Phi\left(b_t^B/\bar{b}_t^B\right)\right)^2}(b_t^B)^2\left(-\frac{1}{\left(\bar{b}_t^B\right)^2}\right)\frac{\partial}{\partial K_t^B}\bar{b}_t^B\\ &= \frac{\Phi'\left(b_t^B/\bar{b}_t^B\right)}{R_t^S\left(\Phi\left(b_t^B/\bar{b}_t^B\right)\right)^2}\left(\frac{b_t^B}{\bar{b}_t^B}\right)^2\Theta_t^{loc}\end{aligned} \quad (23)$$

ולכן תנאי סדר ראשון לפי הון יהיה:

$$\lambda_t^j\left(1-q_t+\gamma'\left(I_t^j\right)+\frac{\Phi'\left(b_t^B/\bar{b}_t^B\right)}{R_t^S\left(\Phi\left(b_t^B/\bar{b}_t^B\right)\right)^2}\left(\frac{b_t^B}{\bar{b}_t^B}\right)^2\Theta_t^{loc}\right) = \beta^j(1-\delta)E_t\left[\lambda_{t+1}^j\left(1+\gamma'\left(I_{t+1}^j\right)\right)\right] \quad (24)$$

או

$$1 = E_t\left[m_{t+1}^j\cdot\left(1+\gamma'\left(I_{t+1}^j\right)\right)(1-\delta)\left(1-q_t+\gamma'\left(I_t^j\right)+\frac{\Phi'\left(b_t^B/\bar{b}_t^B\right)}{R_t^S\left(\Phi\left(b_t^B/\bar{b}_t^B\right)\right)^2}\left(\frac{b_t^B}{\bar{b}_t^B}\right)^2\Theta_t^{loc}\right)^{-1}\right] \quad (25)$$

1.4. קירוב לוג לינארי

נרשום כאן את המשוואות העיקריות לאחר קירוב לוג לינארי (פיתוח מופיע בנספח 1.5). זה יעזור בהבנה של המשוואות וקשרים בין משתנים. ושימושי גם לצורך פתרון. באופן סטנדרטי, נגדיר לכל משתנה את הסטייה שלו ממצב עמיד באחוזים (קירוב מסדר ראשון).

תנאי סדר ראשון לפי צריכה,

$$\hat{\lambda}_t^j = \frac{\sigma^j}{1-\beta^j h^j}\frac{h^j}{1-h^j}\left(\hat{c}_{t-1}^j - (1/h^j + \beta^j h^j)\hat{c}_t^j + \beta^j E_t \hat{c}_{t+1}^j\right) \tag{26}$$

נשים לב כי במקרה $h^j = 0$:

$$\hat{\lambda}_t^j = -\sigma^j \hat{c}_t^j$$

תנאי סדר ראשון לפי עבודה :

$$\omega^j \hat{l}_t^j = \hat{\lambda}_t^j + \widehat{w}_t \tag{27}$$

ניתן לראות כאן באופן ישיר את שני האפקטים של שינוי שכר על קביעת שעות העבודה – אפקט תחלופה ואפקט הכנסה (עושר). כלומר, בהינתן גידול בשכר $w\uparrow$, האם $L\uparrow$ או $L\downarrow$? (נסתכל על פנאי כמוצר (נורמלי)). נתחיל ב*אפקט תחלופה* (שינויים בצריכה של מוצר ספציפי בגלל שינוי מחיר יחסי). כאן, המחיר היחסי של שעת פנאי עלה (כי שווה לאובדן שעת עבודה ששווה כעת יותר), ולכן נצרוך פחות פנאי, אזי $L\uparrow$. בעיקרון בדרך כלל זה האפקט הדומיננטי ברמה המצרפית, וניתן לראות במשוואה מעלה את ההשפעה הישירה של השכר על שעות העבודה. מנגד יש את *אפקט הכנסה* (שינויי בצריכה בגלל שינוי בכוח הקניה, קרי הכנסה גבוהה יותר או ירידה כללית במחירים). עבור אותו L, ההכנסה של הפרט משכר גדלה ולכן פרט מגדיל צריכה באופן כללי (כפי שניתן לראות במגבלת התקציב של הפרט, אך לא במשוואה מעלה). ולכן הפרט מגדיל גם צריכה של פנאי, כך ש-$L\downarrow$; או כפי שניתן לראות במשוואה מעלה, הגידול בצריכה מתבטא בירידה בתועלת השולית מצריכה ($\hat{\lambda}_t^j\downarrow$) ולכן אופטימלי להגדיל גם פנאי (כך שתועלת שולית מפנאי תקטן גם היא, ויחס התועלות ימשיך להיות שווה לשכר), אזי להקטין עבודה.

תנאי סדר ראשון לפי חוב הינו (תנאי אויילר) :

$$\hat{R}_t^{j\,Euler} = \hat{\lambda}_t^j - E_t \hat{\lambda}_{t+1}^j \tag{28}$$

במקרה הפשוט ללא הרגלים,

$$\hat{c}_t^j = E_t \hat{c}_{t+1}^j - \hat{R}_t^{j\,Euler}/\sigma^j$$

כזכור, צריכה מצרפית (פר משק בית)

$$C(1+\hat{c}_t) = \chi^B C^B (1+\hat{c}_t^B) + \chi^S C^S (1+\hat{c}_t^S)$$

כאשר

$$C = \chi^B C^B + \chi^S C^S$$

לכן

$$C\hat{c}_t = \chi^B C^B \hat{c}_t^B + \chi^S C^S \hat{c}_t^S$$

ונעבור למונחים של מלווים בלבד (ריבית חסרת סיכון), ונשתמש בתנאי אויילר

$$\begin{aligned}\hat{c}_t &= (\chi^B C^B/C\,)\hat{c}_t^B + (\chi^S C^S/C)\hat{c}_t^S \\ &= (\chi^B C^B/C\,)\left(E_t \hat{c}_{t+1}^B - \hat{R}_t^{B\,Euler}/\sigma^B\right) + (\chi^S C^S/C)\left(E_t \hat{c}_{t+1}^S - \hat{R}_t^{S\,Euler}/\sigma^S\right)\end{aligned}$$

כאשר נגדיר:

$$\hat{R}_t^{Euler}/\sigma = \frac{1}{C}\left(\left(\frac{\chi^B C^B}{\sigma^B}\right)\hat{R}_t^{B\,Euler} + \left(\frac{\chi^S C^S}{\sigma^S}\right)\hat{R}_t^{S\,Euler}\right) \quad (29)$$

ובפרט אם נציב הגדרות מתאימות:

$$\hat{R}_t^{Euler}/\sigma = \frac{1}{C}\left(\left(\frac{\chi^B C^B}{\sigma^B}\right)\left(\hat{R}_t^S + (\phi+\nu)\cdot\hat{b}_t^B\right) + \left(\frac{\chi^S C^S}{\sigma^S}\right)\hat{R}_t^S\right) \quad (30)$$

ונניח אותו מקדם שהאת סיכון

$$\hat{R}_t^{Euler}/\sigma = \frac{1}{C}\left(\hat{R}_t^S\ \left(\frac{C}{\sigma}\right) + \left(\frac{\chi^B C^B}{\sigma}\right)\left((\phi+\nu)\cdot\hat{b}_t^B\right)\right) \quad (31)$$

נקבל

$$\hat{R}_t^{Euler} = \hat{R}_t^S + \left(\frac{\chi^B C^B}{C}\right)(\phi + \nu) \cdot \hat{b}_t^B \tag{32}$$

כלומר, הצריכה המצרפית תלויה בשני אלמנטים. ראשית בריבית חסרת הסיכון (ריבית המלווים) ושנית בפער מהסף חסר הסיכון, שבעצם משפיע על פרמיית הסיכון ונכנס כאן לתוך השקלול. כאשר לאיבר השני ניתן לקרוא בשם "ריבית טבעית אנדוגנית", אזי ניתן לרשום זאת כך: (נחסיר 1 משני הצדדים)

$$\hat{r}_t^{Euler} = \hat{r}_t^S + \hat{r}_t^n \tag{33}$$

מקבל משוואת אויילר מצרפית,

$$\hat{c}_t = E_t \hat{c}_{t+1} - \hat{R}_t^{Euler}/\sigma \tag{34}$$

תנאי סדר ראשון לפי הון

$$\hat{R}_t^{j\ Euler} = \hat{\lambda}_t^j - E_t \hat{\lambda}_{t+1}^j = \frac{q}{1-q}\hat{q}_t + \gamma_{II}\left(E_t \hat{I}_{t+1}^j - \frac{1}{1-q}\hat{I}_t^j\right) \tag{35}$$

עבור **פירמות**, פונקציית הייצור בקירוב לוג לינארי:

$$\hat{y}_t = \hat{a}_t + \alpha \hat{k}_t + (1-\alpha)\hat{l}_t \tag{36}$$

יחס ההון לעבודה האופטימאלי מבחינת הפירמה:

$$\hat{k}_t - \hat{l}_t = \hat{w}_t - \hat{q}_t \tag{37}$$

העלות השולית הריאלית של פירמה , בקירוב לוג לינארי (פיתוח ישיר):

$$\widehat{mc}_t = -\hat{a}_t + (1-\alpha)\hat{w}_t + \alpha \hat{q}_t \tag{38}$$

כמו כן, קירוב לוג לינארי לעלות נותן את הקשרים הבאים (ניתן להסיק גם מהמשוואות הקודמות):

$$\hat{w}_t + \hat{l}_t = \hat{q}_t + \hat{k}_t = \widehat{mc}_t + \hat{y}_t \tag{39}$$

משוואות הביקוש לעבודה היא:

$$\hat{w}_t = \widehat{mc}_t + \hat{a}_t + \alpha\left(\hat{k}_t - \hat{l}_t\right)$$

ומשוואות הביקוש להון היא:

$$\hat{q}_t = \widehat{mc}_t + \hat{a}_t + (\alpha - 1)\left(\hat{k}_t - \hat{l}_t\right)$$

משוואת פיליפס בא אני משתמש, הינה כבר לאחר קירוב לוג לינארי.

1.5. פיתוח קירוב לוג־לינארי למשוואות עיקריות

נבצע קירוב לוג־לינארי למשוואות עיקריות לצורך הבנה יותר קלה של המשוואות וקשרים בין משתנים. ושימושי גם לצורך פתרון. באופן סטנדרטי, נגדיר לכל משתנה את הסטייה שלו ממצב עמיד באחוזים (קירוב מסדר ראשון) באופן הבא:

$$\hat{x}_t = x_t - x = ln(X_t/X) = ln(1 + \underbrace{(X_t/X - 1)}_{\varepsilon}) \cong X_t/X - 1 \qquad (40)$$

כאשר המעבר האחרון הוא פיתוח טיילור פשוט עבור $\varepsilon \cong 0$: $\ln(1+\varepsilon) = \varepsilon$. וזה בעצם הדרך הפשוטה ביותר לעשות קירוב לוג לינארי, כלומר, לחלק את המשוואה במשוואת המצב העמיד משני צדדים ולהפעיל LN משני הצדדים. כאשר הביטויים מכילים רק כפל, ביצוע פעולת הלוג־לניאריזציה היא מידית. כאשר יש פעולת חיבור, עוזר (הטריק) להעביר קודם את X_t למונחי $\hat{x}_t$, באופן הבא: $X_t = X(1+\hat{x}_t)$, ואז פיתוח טיילור הופך לפשוט מאוד. בפרט, במקרה של שני משתנים, אז אותו טריק, הבדל רק בפיתוח קירוב טיילור של הפונקציה לפי שני המשתנים: $f(B + X_t + Y_t) =$
$f\left(B + X(1+\hat{x}_t) + Y(1+\hat{y}_t)\right) = f(B+X+Y) + f'(B+X+Y)\, X\cdot\hat{x}_t + f'(B+X+Y)\, Y\cdot\hat{y}_t$.

תנאי סדר ראשון לפי צריכה, מקבלים ביטוי עבור כופל לגרנץ, ראו משוואה * 24 *, נחלק במשוואה במצב עמיד משני צדדים ונפעיל LN משני הצדדים:

$$ln\left(\lambda_t^j/\lambda^j\right) = ln\left(\frac{\left(\left(C_t^j - h^j C_{t-1}^j\right)^{-\sigma^j} - \beta^j h^j E_t\left(C_{t+1}^j - h^j C_t^j\right)^{-\sigma^j}\right)}{\left((C^j(1-h^j))^{-\sigma^j} - \beta^j h^j\left[(C^j(1-h^j))^{-\sigma^j}\right]\right)}\right) \qquad (41)$$

נפשט

$$\hat{\lambda}_t^j = ln\left(\frac{(1-h^j)^{\sigma^j}}{(1-\beta^j h^j)}\left(\left(\frac{C_t^j}{C^j} - h^j\frac{C_{t-1}^j}{C^j}\right)^{-\sigma^j} - \beta^j h^j E_t\left(\frac{C_{t+1}^j}{C^j} - h^j\frac{C_t^j}{C^j}\right)^{-\sigma^j}\right)\right)$$

כעת, נסתכל על ביטוי פנימי (ונשתמש קשר $X_t = X(1+\hat{x}_t)$) :

$$\left(\frac{C_t^j}{C^j} - h^j\frac{C_{t-1}^j}{C^j}\right)^{-\sigma^j} = \left(1+\hat{c}_t^j - h^j(1+\hat{c}_{t-1}^j)\right)^{-\sigma^j} =$$

$$(1-h^j)^{-\sigma^j} - \sigma^j(1-h^j)^{-\sigma^j-1}\cdot\hat{c}_t^j - \sigma^j(1-h^j)^{-\sigma^j-1}(-h^j)\cdot\hat{c}_{t-1}^j$$
$$= (1-h^j)^{-\sigma^j}\left(1-\sigma^j(1-h^j)^{-1}\cdot\left(\hat{c}_t^j - h^j\hat{c}_{t-1}^j\right)\right)$$

ונציב חזרה

$$\hat{\lambda}_t^j = ln\left(\frac{(1-h^j)^{\sigma^j}}{(1-\beta^j h^j)}\left((1-h^j)^{-\sigma^j}\left(1-\sigma^j(1-h^j)^{-1}(\hat{c}_t^j - h^j\hat{c}_{t-1}^j)\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. - \beta^j h^j E_t(1-h^j)^{-\sigma^j}\left(1-\sigma^j(1-h^j)^{-1}(\hat{c}_{t+1}^j - h^j\hat{c}_t^j)\right)\right)\right)$$

נצמצם ונסדר

$$\hat{\lambda}_t^j = -ln(1-\beta^j h^j) + ln\left(1-\beta^j h^j + \frac{\sigma^j h^j\hat{c}_{t-1}^j}{1-h^j} - \frac{\sigma^j\hat{c}_t^j}{1-h^j}\left(1+\beta^j {h^j}^2\right) + \beta^j h^j E_t\frac{\sigma^j\hat{c}_{t+1}^j}{1-h^j}\right)$$

טיילור ל-Ln :

$$\hat{\lambda}_t^j = -ln(1-\beta^j h^j) + ln(1-\beta^j h^j)$$
$$+\frac{1}{1-\beta^j h^j}\left(\frac{\sigma^j h^j}{1-h^j}\hat{c}_{t-1}^j - \frac{\sigma^j\hat{c}_t^j}{1-h^j}\left(1+\beta^j {h^j}^2\right) + \beta^j h^j E_t\frac{\sigma^j\hat{c}_{t+1}^j}{1-h^j}\right)$$

וקיבלנו

$$\hat{\lambda}_t^j = \frac{\sigma^j}{1-\beta^j h^j}\frac{h^j}{1-h^j}\left(\hat{c}_{t-1}^j - (1/h^j + \beta^j h^j)\hat{c}_t^j + \beta^j E_t\hat{c}_{t+1}^j\right) \qquad (42)$$

נשים לב כי במקרה $h^j = 0$:

$$\hat{\lambda}_t^j = -\sigma^j \hat{c}_t^j$$

ניקח תנאי סדר ראשון לפי עבודה, נחלק במשוואה במצב עמיד משני צדדים ונפעיל LN משני הצדדים:

$$\omega^j ln\left(L_t^j/L^j\right) = ln\left(\frac{\lambda_t^j w_t}{\lambda^j w}\right)$$

ומקבלים

$$\omega^j \hat{l}_t^j = \hat{\lambda}_t^j + \widehat{w}_t \tag{43}$$

תנאי סדר ראשון שלהם לפי חוב הינו (תנאי אויילר), נחלק במשוואה במצב עמיד משני צדדים ונפעיל LN משני הצדדים:

$$\hat{R}_t^{j\,Euler} = \hat{\lambda}_t^j - E_t \hat{\lambda}_{t+1}^j \tag{44}$$

תנאי סדר ראשון לפי הון, נחלק במשוואה במצב עמיד משני צדדים ונפעיל LN משני הצדדים:

$$\hat{\lambda}_t^j + ln\left(\frac{1 - q_t + \gamma'\left(I_t^j\right)}{1 - q + \gamma'\left(I^j\right)}\right) = E_t \hat{\lambda}_{t+1}^j + ln\, E_t \left(\frac{1 + \gamma'\left(I_{t+1}^j\right)}{1 + \gamma'\left(I^j\right)}\right)$$

נציב את עלות ההתאמה השולית פנימה, $\gamma'\left(\mathrm{I}_t^j\right) = \gamma_{II}\left(\mathrm{I}_t^j/\bar{\mathrm{I}}^j - 1\right)$, כאמור $\gamma'\left(\mathrm{I}^j\right) = 0$, לכן

$$\hat{\lambda}_t^j - ln(1-q) + ln\left(1 - q(1 + \hat{q}_t) + \gamma_{II}\hat{I}_t^j\right) = E_t \hat{\lambda}_{t+1}^j + ln\,\left(1 + \gamma_{II} E_t \hat{I}_{t+1}^j\right)$$

נפתח LN באגף שמאל לקירוב טיילור סדר ראשון:

$$\hat{\lambda}_t^j - ln(1-q) + ln(1-q) - \frac{q}{1-q}\hat{q}_t + \frac{1}{1-q}\gamma_{II}\hat{I}_t^j = E_t \hat{\lambda}_{t+1}^j + \gamma_{II} E_t \hat{I}_{t+1}^j$$

ולסיכום, עביר אגפים, ונראה שקיבלנו ביטוי של ריבית אפקטיבית כמו במשוואת אויילר:

$$\hat{R}_t^{j\,Euler} = \hat{\lambda}_t^j - E_t \hat{\lambda}_{t+1}^j = \frac{q}{1-q}\hat{q}_t + \gamma_{II}\left(E_t \hat{I}_{t+1}^j - \frac{1}{1-q}\hat{I}_t^j\right) \tag{45}$$

עבור פירמות, פונקציית הייצור בקירוב לוג לינארי (פיתוח ישיר):

$$\hat{y}_t = \hat{a}_t + \alpha\hat{k}_t + (1-\alpha)\hat{l}_t \tag{46}$$

תנאי סדר ראשון לפי הון (הביקוש להון), בקירוב לוג לינארי (פיתוח ישיר):

$$\hat{q}_t = \hat{a}_t + (\alpha-1)(\hat{k}_t - \hat{l}_t) \tag{47}$$

תנאי סדר ראשון לפי עבודה (ביקוש לעבודה), בקירוב לוג לינארי (פיתוח ישיר):

$$\hat{w}_t = \hat{a}_t + \alpha(\hat{k}_t - \hat{l}_t) \tag{48}$$

יחס ההון לעבודה האופטימאלי מבחינת הפירמה:

$$\hat{k}_t - \hat{l}_t = \hat{w}_t - \hat{q}_t \tag{49}$$

כעת, המשוואות במקרה של **הרחבה למודל NK**.

העלות השולית הריאלית של פירמה , בקירוב לוג לינארי (פיתוח ישיר):

$$\widehat{mc}_t = -\hat{a}_t + (1-\alpha)\hat{w}_t + \alpha\hat{q}_t \tag{50}$$

משוואות הביקוש לעבודה היא:

$$\hat{w}_t = \widehat{mc}_t + \hat{a}_t + \alpha(\hat{k}_t - \hat{l}_t)$$

ומשוואות הביקוש להון היא:

$$\hat{q}_t = \widehat{mc}_t + \hat{a}_t + (\alpha-1)(\hat{k}_t - \hat{l}_t)$$

משוואת פיליפס בא אני משתמש, הינה כבר לאחר קירוב לוג לינארי.

1.6. פיתוח חוב נומינאלי וכלל פישר

נחליף חוב המקומי ריאלי בחוב מקומי נומינאלי $b_t^{nom,j}$. ונעדכן בהתאם את מגבלת התקציב (כעת היא נומינאלית):

$$w_t L_t^j P_t + q_t K_t^j P_t + T_t^j P_t + \frac{b_t^{nom,j}}{R_t^{nom,j}} = C_t^j P_t + Q_t I_t^j P_t + b_{t-1}^{nom,j} \tag{51}$$

נחלק במחיר (של סל צריכה), אזי מגבלת תקציב ריאלית:

$$w_t L_t^j + q_t K_t^j + T_t^j + \frac{b_t^{nom,j}/P_t}{R_t^{nom,j}} = C_t^j + Q_t I_t^j + \frac{b_{t-1}^{nom,j}}{P_{t-1}} \frac{P_{t-1}}{P_t} \tag{52}$$

נגדיר חוב ריאלי

$$b_t^j = \frac{b_t^{nom,j}}{P_t} \tag{53}$$

ואז:

$$w_t L_t^j + q_t K_t^j + T_t^j + \frac{b_t^j}{R_t^{nom,j}} = C_t^j + Q_t I_t^j + b_{t-1}^j \frac{1}{\Pi_t} \tag{54}$$

במקרה של הלווים, תנאי סדר ראשון היחיד שמושפע הוא גזירה לפי חוב, וקל לראות כי זהו פיתוח דומה למקרה של חוב ריאלי (ראו נספח **):

$$\frac{1}{R_t^{nom,B}}\left(1 - \frac{b_t^B}{R_t^{nom,B}} R_t^{nom,B\prime}\right) = \beta^B \frac{E_t[\lambda_{t+1}^B / \Pi_{t+1}]}{\lambda_t^B}$$

בהנחה שפרמיית הסיכון הינה פונקציה של החוב הריאלי (מגבלת החוב היא ביחס לחוב הריאלי), כפי שעושים EK ו־BER, אז קל לראות כי:

$$\frac{b_t^B}{R_t^{nom,B}} R_t^{nom,B\prime} = \frac{b_t^B}{R_t^{nom,S} \cdot \Phi\left(b_t^B / \bar{b}_t^B\right)} R_t^{nom,S} \cdot \Phi'\left(b_t^B / \bar{b}_t^B\right) \frac{1}{\bar{b}_t^B} = \frac{b_t^B}{\bar{b}_t^B} \frac{\Phi'\left(b_t^B / \bar{b}_t^B\right)}{\Phi\left(b_t^B / \bar{b}_t^B\right)}$$

כלומר הביטוי זהה למקרה הריאלי. לכן אם משווים את תנאי אויילר למקרה הריאלי, ניתן להסיק כי

$$R_t^B E_t[\lambda_{t+1}^B] = R_t^{nom,B} E_t[\lambda_{t+1}^B / \Pi_{t+1}]$$

ואז ניתן לקבל את כלל פישר (בהנחה שניתן לשחק עם האינפלציה הצפויה, ולהעביר אותה אגף):

$$R_t^{nom,B} = R_t^B E_t[\Pi_{t+1}]$$

הערה: מרווח הסיכון הוא זהה במונחים ריאליים ומונחים נומינליים. נראה זאת, מכלל פישר

$$R_t^{nom\ b} = R_t^b \cdot \Pi_{t+1} = R_t^s \cdot \Delta_R^{risk} \cdot \Pi_{t+1} = R_t^{nom\ s} \cdot \Delta^{risk}$$

1.7. תחרות מונופוליסטית

נדון בתחרות מונופוליסטית, שהינה תחרות לא משוכללת, כפי שניסחו Dixit-Stiglitz. כאן אציין רק את נקודות החשובות שרלוונטיות לעדכון המודל הריאלי הקיים מעלה. נקודת המפתח היא שכל פירמה מייצרת מוצר מובדל ועבורו היא זו שקובעת את המחיר (וללא לוקחת מחיר כנתון).

נניח רצף של פירמות זהות, כאשר כל אחת מייצרת מוצר ביניים שונה, מה שמאפשר לה כוח מונופוליסטי ולכן מאפשר לה לקבוע מחיר. מוצרי הביניים השונים "נארזים" לכדי מוצר סופי יחיד המשמש לצריכה ולהשקעה בדומה למודל הריאלי. האריזה יכולה להתבצע על ידי פירמה תחרותית (או ישירות על ידי משקי הבית בתוך פונקציית התועלת, וזה שקול):

$$(Y_t)^{\frac{\nu-1}{\nu}} = \int_0^1 dj\, \left(Y_t^j\right)^{\frac{\nu-1}{\nu}}$$

כאשר הפרמטר ν שולט ברמת התחלופה הקיימת בין מוצרי הביניים. בגבול $\nu \to \infty$, הביטוי הוא סכום רגיל, ולכן יש תחלופה מלאה, אזי תחרות משוכללת. בגבול $\nu \to 0$, המוצרים הם משלימים מושלמים (Leontief). במקרה $\nu = 1$, מקבלים את פונקציית הייצור של הפירמות של מוצרי הביניים.

מכאן נניח כי $\nu > 1$. כאשר רמת המחירים הכללית מוגדרת בהתאם $(p_t)^{1-\nu} = \int_0^1 dj\, \left(p_t^j\right)^{1-\nu}$.

מתוך האופטימיזציה של האריזה מקבלים את פונקציית הביקוש (היחסי) לכל מוצר ביניים (פיתוח סטנדרטי):

$$Y_t^j = \left(p_t^j / p_t\right)^{-\nu} Y_t \qquad (55)$$

כעת ננתח את התנהגותן של הפירמות המייצרות את מוצרי הביניים, להלן הפירמות. פירמה j רואה את פונקציית הביקוש לעיל (התוצר המצרפי ורמת המחירים במשק הן אקסוגניים מבחינתה כיוון שאינה יכולה להשפיע עליהם, כיוון שיש רצף של פירמות כך שכל פירמה היא קטנה באופן אינפיטסימלי). כל הפירמות שוכרות הון משוק הון משותף ומשוכלל ושוכרות עבודה משוק משותף ומשוכלל, אזי הן ניצבות בפני אותם עלויות הון ושכר. אבל כל פירמה יכולה לקבוע מחיר בעצמה (בכל תקופה במקרה של מחירים גמישים או רק לעיתים כפי שנראה בהמשך תחת מחירים דביקים, אז המחיר יהיה "בהינתן"), בהינתן כאמור פונקציית ביקוש יורדת. הפירמה ממקסמת רווח *נומינאלי* (לשים לב כי המכירות הן ע"פ המחיר של הפירמה, בעוד העלויות הן בהתאם לעלויות הריאלית של הון ועבודה מוכפלים ברמת המחירים הכללית במשק):

$$\max_{Y_t^j, p_t^j, L_t^j, K_t^j} p_t^j Y_t^j - (w_t L_t^j + q_t K_t^j) \cdot p_t$$

תחת האילוצים : (א.) ביקוש נתון (55) ו־(ב.) פונקציית ייצור קוב דאגלס (מקל מאוד על הניתוח...) :

$$Y_t^j = A_t\left(K_t^j\right)^{\alpha}\left(L_t^j\right)^{1-\alpha} \tag{56}$$

ניתן לרשום את הבעיה בעזרת לגרזיאן הכולל את שני האילוצים, או לפצל לשני שלבים, וזה דווקא נותן יותר אינטואיציה, לכן אבצע זאת. אציב את פונקציית הביקוש ישירות בביטוי ונקבל

$$\max_{p_t^j, L_t^j, K_t^j} p_t^j\left(p_t^j/p_t\right)^{-\nu} Y_t - (w_t L_t^j + q_t K_t^j) \cdot p_t$$

תחת אילוץ (ב.) פונקציית ייצור קוב דאגלס. עכשיו קל לפצל לשני שלבים (הון ועבודה לא משפיעים על האיבר הראשון). כלומר,

$$\max_{p_t^j}\left\{p_t^j\left(p_t^j/P_t\right)^{-\nu} Y_t - p_t \cdot \min_{L_t^j, K_t^j}\left(w_t L_t^j + q_t K_t^j\right)\right\}$$

אז שלב ראשון נמזער עלות *ריאלית* :

$$\min_{L_t^j, K_t^j}\left(w_t L_t^j + q_t K_t^j\right)$$

תחת אילוץ (ב.) פונקציית ייצור קוב דאגלס. אז הלגרזיאן לצורך חישוב מינימום עלות :

$$\mathcal{L} = w_t L_t^j + q_t K_t^j + \varrho_t\left(Y_t^j - A_t\left(K_t^j\right)^{\alpha}\left(L_t^j\right)^{1-\alpha}\right)$$

תנאי סדר ראשון :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_t}: w_t = \varrho_t(1-\alpha)A_t\left(K_t^j/L_t^j\right)^{\alpha}$$

ו-

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_t}: q_t = \varrho_t \alpha A_t\left(K_t^j/L_t^j\right)^{\alpha-1}$$

נחלק משוואות :

$$\frac{K_t^j}{L_t^j} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{w_t}{q_t} \qquad (57)$$

מסקנה חשוב: כל הפירמות ישכרו הון ועבודה באותו יחס אופטימלי, מכיוון שמחיר גורמי הייצור זהים. כמו כן, יחס הון לעבודה האופטימלי, אינו תלויי בבחירה של הכמות או המחיר! ונשים לב, שכעת ניתן לרשום את העלות הריאלית בשני אופן:

$$cost_t^j = w_t L_t^j + q_t K_t^j = w_t L_t^j\left(1+\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) = \frac{w_t L_t^j}{1-\alpha} = \frac{q_t K_t^j}{\alpha}$$

כלומר, חלק α מהעלות הולך להוצאות השכרת הון, וחלק $1-\alpha$ הולך להוצאות שכר עבודה.

נציב יחס הון לעבודה אופטימלי בפונקציית הייצור:

$$Y_t^j = A_t\left(K_t^j/L_t^j\right)^\alpha L_t^j = A_t\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{w_t}{q_t}\right)^\alpha L_t^j \qquad (58)$$

מכאן

$$L_t^j = \frac{Y_t^j}{A_t}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{q_t}{w_t}\right)^\alpha \qquad (59)$$

והעלות היא

$$cost_t^j = \frac{w_t L_t^j}{1-\alpha} = \frac{w_t}{1-\alpha}\frac{Y_t^j}{A_t}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{q_t}{w_t}\right)^\alpha = \frac{Y_t^j}{A_t}\left(\frac{q_t}{\alpha}\right)^\alpha\left(\frac{w_t}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}$$

מכאן, העלות השולית *הריאלית* של פירמה היא (אינה תלויה ב-j):

$$MC_t^j = \frac{d}{dY_t^j}cost_t^j = \frac{1}{A_t}\left(\frac{w_t}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{q_t}{\alpha}\right)^\alpha = MC_t \qquad (60)$$

כלומר, בנוסף ליחס ההון לעבודה, גם העלות השולית היא זהה עבור כל הפירמות, וגם היא אינה תלויה בכמות או המחיר שהפירמה תבחר, אלא רק במחירים של גורמי הייצור.

אגב, נשים לב שהביטוי של עלות הייצור הינה:

$$cost_t^j = w_t L_t^j + q_t K_t^j = \frac{w_t L_t^j}{1-\alpha} = \frac{q_t K_t^j}{\alpha} = Y_t^j MC_t \qquad (61)$$

כעת נחלץ חזרה את מחירי גורמי הייצור כפונקציה של העלות השולית הריאלית (נשתמש ביחס הון לעבודה)

$$MC_t\, A_t = \frac{w_t}{1-\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\,\frac{q_t}{w_t}\right)^{\alpha} = \frac{w_t}{1-\alpha}\left(\frac{L_t}{K_t}\right)^{\alpha}$$

נקבל את משוואות הביקוש לעבודה

$$w_t = MC_t \cdot (1-\alpha)A_t(K_t/L_t)^{\alpha} \tag{62}$$

כלומר, אם משווים עם תנאי סדר ראשון למעלה, ניתן לראות כי:

$$\varrho_t = MC_t \tag{63}$$

ולכן, נקבל את משוואות הביקוש להון

$$q_t = MC_t \cdot \alpha A_t(K_t/L_t)^{\alpha-1} \tag{64}$$

כלומר, ההבדל היחיד לעומת המודל של תחרות משוכללת הוא הכפלה בעלות השולית הריאלית. למעשה, ניתן לראות כי העלות השולית הריאלית היא היחס של מחיר השכרת גורם ייצור לחלק לתוצר השולי של גורם הייצור. כלומר, שכר ריאלי במונחי תפוקה שולית של עובדים או דמי שכירות הון במונחי תפוקה שולית של ההון. לסיכום, נרשום עלות שולית ריאלית בכל הצורות האפשריות:

$$\begin{aligned} MC_t &= \frac{1}{A_t}\left(\frac{w_t}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{q_t}{\alpha}\right)^{\alpha} \\ &= \frac{w_t}{(1-\alpha)A_t(K_t/L_t)^{\alpha}} = \frac{w_t}{(1-\alpha)\,Y_t/L_t} = \frac{w_t}{MPL_t} \\ &= \frac{q_t}{\alpha A_t(K_t/L_t)^{\alpha-1}} = \frac{q_t}{\alpha Y_t/K_t} = \frac{q_t}{MPK_t} \end{aligned} \tag{65}$$

עד כאן דנו במשתנים ראליים בלבד, כעת נחשב רווח *נומינאלי* של פירמה של מוצר ביניים:

$$\Pi_t^{j,nom} = p_t^j Y_t^j - \left(w_t L_t^j + q_t K_t^j\right)\cdot p_t = p_t^j Y_t^j - Y_t^j MC_t \cdot p_t$$

ונציב פונקציית ביקוש

$$\Pi_t^{j,nom} = Y_t\left(p_t^j/P_t\right)^{-\nu}\left(p_t^j - MC_t\cdot p_t\right) \tag{66}$$

כעת הפירמות יכולה לייצר רווח, מכיוון שיש להן כוח מונופוליסטי, והרווח תלויי בפער שבין המחיר שהפירמה תקבע לבין העלות השולית הנומינאלית. אגב, הרווח הולך חזרה למשקי בית, אבל הם לא מפנימים השפעה שלהם עליו ומתייחסים עליו כאקסוגני ולכן לא מתייחסים לדיווידנד כמשתנה החלטה (ראה מגבלת התקציב **Error! Reference source not found.**).

נחשב ביטוי של משתנים מצרפיים חשובים. נתחיל בביטוי לתוצר המצרפי במקרה של תחרות מונופוליסטית. נרשום את ההיצע והביקוש של מוצר ביניים:

$$Y_t^j = \left(p_t^j/p_t\right)^{-\nu} Y_t = A_t\left(K_t^j/L_t^j\right)^{\alpha} L_t^j$$

נבצע אינטגרציה משני צדדים:

$$\int_0^1 dj\,\left(p_t^j/p_t\right)^{-\nu} Y_t = \int_0^1 dj\, A_t\left(K_t^j/L_t^j\right)^{\alpha} L_t^j$$

כפי שראינו, יחס הון לעבודה הינו קבוע עבור כל הפירמות **Error! Reference source not found.**, ולכן

$$Y_t \int_0^1 dj\,\left(p_t^j/p_t\right)^{-\nu} = \int_0^1 dj\, A_t(K_t/L_t)^{\alpha} L_t^j = A_t(K_t/L_t)^{\alpha}\int_0^1 dj\, L_t^j = A_t(K_t/L_t)^{\alpha} L_t$$

כלומר,

$$Y_t = \frac{1}{v_t^p}\cdot A_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \qquad (67)$$

כאשר נגדיר מדד לפיזור המחירים (ולכן גם פיזור הייצור) בין הפירמות השונות, באופן הבא:

$$v_t^p = \int_0^1 dj\,\left(p_t^j/p_t\right)^{-\nu} \qquad (68)$$

כלומר, ככל שהמחירים יותר מפוזרים כך הפירמות מייצרות פחות באופן מצרפי. בסביבה של מצב עמיד של אינפלציה אפס, בסדר ראשון – $v_t^p = 1$ (ראו Gali (2008) נספח 3.3).

נחשב עלות מצרפית. נבצע אינטגרציה על (61) ונקבל:

$$\int_0^1 dj\; cost_t^j = \int_0^1 dj\left(w_t L_t^j + q_t K_t^j\right) = \int_0^1 dj\;\left(\frac{w_t L_t^j}{1-\alpha}\right) = \int_0^1 dj\;\left(\frac{q_t K_t^j}{\alpha}\right) = \int_0^1 dj\; Y_t^j \cdot MC_t$$

נקבל ביטוי שקושר יפה מאוד בין מספר משתנים חשובים:

$$cost_t = w_t L_t + q_t K_t = \frac{w_t L_t}{1-\alpha} = \frac{q_t K_t}{\alpha} = MC_t \cdot\; v_t^p \;\cdot\; Y_t = MC_t \cdot\; A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} \tag{69}$$

באופן דומה, נחשב רווח *נומינאלי* מצרפי:

$$\int_0^1 dj\; \Pi_t^{j,nom} = \int_0^1 dj\;\; p_t^j Y_t^j - \int_0^1 dj\; Y_t^j \cdot MC_t \cdot p_t$$

הסבר: מכיוון שהרווח של הפירמה שאורזת הוא אפס כי בתחרות משוכללת (או לחילופין ניתן להסתכל על אריזה שעושים משקי הבית כאמור), אזי הכנסות של הפירמה שאורזת הן $p_t Y_t$ והן שוות להוצאות. ולכן $p_t Y_t$ זה ההכנסה המצרפית של הפירמות של מוצרי ביניים, כפי שאכן ניתן לראות באיבר ההכנסה. נקבל

$$\Pi_t^{nom} = p_t Y_t\left(1 - MC_t \cdot v_t^p\right)$$

אפשר להשתמש בביטויים השונים לעלות. נסכם את הרווח *הריאלי* של פירמה במספר צורות:

$$\Pi_t = Y_t - (w_t L_t + q_t K_t) = Y_t\left(1 - MC_t \cdot v_t^p\right) = Y_t - MC_t \cdot\; A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} \tag{70}$$

נשים לב שעד כאן הביטויים תקפים ללא קשר האם המחירים גמישים או דביקים.

1.7.1. מקרה: מחירים גמישים לחלוטין

כעת, **נניח שהמחירים גמישים לחלוטין**, כלומר הפירמה יכולה לעדכן מחיר בכל עת, ולכן נותר לבצע מקסימיזציה לפי המחיר (בהמשך, כאשר נניח מחירים דביקים, כמו בסגנון Calvo, אז הפירמה לא תוכל לעשות את האופטימיזציה הזו כל תקופה):

$$\max_{p_t^j} \Pi_t^j = \max_{p_t^j}\left\{Y_t\left(p_t^j/p_t\right)^{-\nu}\left(\,p_t^j - MC_t \cdot p_t\right)\right\}$$

תנאי סדר ראשון

$$(1-\nu)\left(p_t^j/p_t\right)^{-\nu} = -\nu\left(p_t^j/p_t\right)^{-\nu-1} MC_t$$

לסיכום

$$p_t^j = \mu\, MC_t\, p_t \qquad (71)$$

כאשר הגדרתי $\mu = \nu/(\nu-1)$ אשר נקרא "markup". כלומר, כל הפירמות מוכרות באותו מחיר, שהינו מרווח קבוע באחוזים (markup) מעל העלות השולית הנומינלית (עלות שולית מוכפלת ברמת המחירים במשק). מכיוון שכל הפירמות קובעות את אותו מחיר וכאמור יש להן אותה פונקציית ביקוש אזי הן גם מייצרות את אותה כמות. אם נוסיף על זה שפירמות משתמשות באותו יחס הון לעבודה, אזי הפירמות משתמשות באותן כמויות ממש של הון ועבודה.

כעת, נחשב את רמת המחירים הכללית (האינטגרנד אינו תלוי ב־j...):

$$p_t = \left(\int_0^1 dj\,\left(p_t^j\right)^{1-\nu}\right)^{\frac{1}{1-\nu}} = \left(\int_0^1 dj\,\left(\mu\, MC_t\, p_t\right)^{1-\nu}\right)^{\frac{1}{1-\nu}} = \mu\, MC_t\, p_t$$

כלומר,

$$p_t = p_t^j \quad and \quad MC_t = \mu^{-1} \qquad (72)$$

מכאן, העלות השולית הריאלית הינה קבועה בזמן (וזהה לכל הפירמות).

כל הפירמות קובעות את אותו מחיר השווה לרמת המחירים הכללית, אזי המחיר היחסי של כל מוצר הוא $p_t^j/p_t = 1$, וכל הפירמות מייצרות את אותה כמות השווה גם לכמות התוצר המצרפי $Y_t^j = Y_t$.

לכן, וכפי שניתן לראות במשוואה האחרונה, **רמת המחירים יכולה להיות כל רמה ואין לזה שום השפעה ריאלית**! וניתן לנרמל את כל המחירים להיות 1, ולכן אין הבדל בין מחיר נומינאלי וריאלי של גורמי הייצור.

ההבדל מול המודל הרגיל יהיה בערכי המצב העמיד. והדינמיקה (במודל לוג לינארי) תהיה זהה.

מדד לפיזור מחירים במקרה זה:

$$v_t^p = \int_0^1 dj\,\left(p_t^j/p_t\right)^{-\nu} = 1 \qquad (73)$$

לכן, לפי נוסחה (67), התוצר המצרפי זהה לתוצר במקרה של תחרות משוכללת:

$$Y_t = A_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \quad (74)$$

עלות מצרפית:

$$cost_t = w_t L_t + q_t K_t = \mu^{-1} \cdot Y_t = \mu^{-1} \cdot A_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \quad (75)$$

נחשב רווח של פירמה של מוצר ביניים, במקרה של מחירים גמישים:

$$\Pi_t^j = Y_t p_t (1 - \mu^{-1}) = p_t Y_t \cdot \frac{1}{\nu} \quad (76)$$

כעת לפירמות יש רווח, מכיוון שיש להן כוח מונופוליסטי. אגב, הרווח הולך חזרה למשקי בית, אבל הם לא מפנימים השפעה שלהם עליו ומתייחסים עליו כאקסוגני ולכן לא מתייחסים לדיווידנד כמשתנה החלטה (ראה מגבלת התקציב **Error! Reference source not found.**).

איזה זעזועים יכולים להיות, ומה התגובה.

- זעזוע לתוצר המצרפי (ביקוש. טכנולוגיה נשארת קבוע.)? העלות השולית תישאר קבועה ($MC_t = \mu^{-1}$), מחיר גורמי הייצור יכולים להישתנות, אבל חייבית לשמור על עלות שולית קבועה כאמור. כלומר, אם אחד מגורמי הייצור יגדל, הגורם השני יוזל באיזשהו ייחס. אבל הם אקסוגניים מבחינת הפירמה. בהתאם ליחס של גורמי הייצור, יקבע ייחס הון לעבודה אופטימלי, וייקבעו הון ועבודה בהתאם לתוצר המצרפי. עוד? זעזוע טכנולוגי?
- זעזוע לרמת המחיר (למשל שינוי בריבית הנומינאלית, גוררת שינוי בציפיות אינפלציה)? לא תהיה שום השפעה ריאלית, כל הפירמות ישנו מחיר שלהם אחד לאחד כמו רמת המחירים הכללית – כאמור, גמישות מחירים.

1.7.2. מקרה: מחירים דביקים

הפיתוח הוא סטנדרטי, וניתן לראות ב־Gali, או לחילופין במאמרים של EK ו־BER. כאשר התוצאה המרכזית הינה עקומת פיליפס הניאו קיינסיאנית. כמו כן, במקרה זה, יש פיזור מחירים לכן $v_t^p \neq 1$. ושאר המשתנים ניתנים לחישוב באופן מיידי, כגון $\mathrm{MC_t}$.

מהו הביטוי לתוצר במקרה של תחרות מונופוליסטית תחת מחירים דביקים? בנספח של EK, עמוד 22 מראים כי בקירוב לינארי סביב מצב עמיד הפיזור הוא קבוע, אזי לצורך הפשטות נניח כי $v_t^p = 1$. באופן עקבי, בנספח שלהם בעמוד 15, עבוד מודל עם הון הם גם לא מתייחסים לאפקט של פיזור ולרווחים של פירמות מונופוליסטיות תחת מחירים דביקים. נציין גם את Christiano, Eichenbaum and Evans 2005 אשר מניחים שהרווח הכלכלי בממוצע קרוב לאפס, ולכן זניחים אותו. הטיעון שלהם הוא אפשר להזניח רווחים של פירמות ממגבלת התקציב, מכיוון שאם היו לפירמה רווחים גדולים ומתמידים אז היו נכנסות פירמות מתחרות. כמו כן, סביר להניח שיש לפירמה עלות קבועה אשר שוחק את הרווח לרמה אפסית וכאמור אז התמריץ לכניסה הוא מינימלי. למעשה, ניתן להוסיף למודל עלות קבוע באופן פשוט ומידי, וניתן להניח עלות קבועה כזו שהרווח הוא אפס במצב עמיד.

1.8. מצב עמיד

ראשית, מתנאי אויילר של חוסכים

$$R^S = 1/\beta^S$$

כלל פישר

$$R^S_{nom} = R^S * (1 + \bar{\pi})$$

מחיר ההון במצב עמיד:

$$Q_t = 1 + f(1) + f'(1) \cdot 1 - E_t m_{t+1} f'(1)\ (1)^2 \quad (77)$$

כאשר נניח צורה פונקציונאלית הבאה עבור עלויות ההתאמה:

$$f(I_t/I_{t-1}) = (\gamma_{II}/2)(I_t/I_{t-1} - 1)^2$$

אזי

$$f'(I_t/I_{t-1}) = \gamma_{II}(I_t/I_{t-1} - 1)$$

אזי במצב עמיד

$$f(1) = 0, \;\; f'(1) = 0$$

לכן

$$Q = 1$$

מתוך התשואה להון במצב עמיד, שהיא שווה לריבית האפקטיבית של לווים (תנאי חוסר ארביטרז שללהם):

$$\tilde{R}^K = \frac{q + (1 - \delta)Q}{Q} = \frac{1}{\beta^B}$$

כאמור $Q = 1$, ונחלץ

$$q = \frac{1}{\beta^B} - (1-\delta)$$

ניתן לחלץ את היחס הון ליחידת עבודה ($\bar{k}_l = K/L$) מהמשוואה הבאה:

$$\bar{q} = \alpha\bar{A}(\bar{k}_l)^{\alpha-1}$$

$$\bar{k}_l = K/L = \left(\frac{\bar{q}}{\alpha\bar{A}}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

ואז לחלץ גם את השכר

$$\bar{w} = (1-\alpha)\bar{A}(\bar{k}_l)^{\alpha}$$

נניח **(קליברציה)** כי רמת המצב העמיד של היצע העבודה הינה 0.25 (ראה (2001) Cochrane) [Prescott (1996) הציע 0.33] (זה פרמטר שניתן לשנות באקסל)

$$\bar{L} = 0.25$$

לכן

$$\bar{K} = \bar{k}_l\,\bar{L}$$

מיידי לחשב MC, Y.

מתהליך צבירת הון מקבלים:

$$\bar{I} = \delta\bar{K}$$

מהנחה שרק לווים הם בעלי הון:

$$K^B = K/\chi^B$$

$$I^B = I/\chi^B$$

נחזור לשוק אשראי

מגבלת החוב היא (כאן נראה רק למצב עמיד של מגבלה נמוכה. עהור מגבלה גבוהה החישוב זהה)

$$\bar{b}^B_{Low} = \Theta_{Low}K^B$$

כמו כן, הריבית האפקטיבית של הלווה יחד עם תנאי אוילר של שלו:

$$R^{B\_Euler} = R^S\left(1 + (\phi + \nu) \cdot \hat{b}^B\right) = 1/\beta^B$$

מכאן, במצב עמיד הריבית של כל טיפוס שווה לשיעור העדפת הזמן שלו. ריבית שונות לחוסך וללווה, כתוצאה מעלות שהלווה משלם מעל התשואה חסרת הסיכון.

לווה ייקחו הלוואה b^B מעל הסף $\bar{b}$, במידה כזו שהריבית שמשלם על חוב שווה לשיעור העדפת הזמן שלו.

מכאן, עבור מגבלת חוב נמוכה ($\bar{b}^B_{\mathrm{Low}}$), נקבל את ערך החוב המקומי במצב עמיד נמוך :

$$b^B_{Low} = \bar{b}^B_{Low}\left((\phi + \nu)^{-1}\left(\frac{\beta^S}{\beta^B} - 1\right) + 1\right)$$

ניכוי שוק אשראי

$$\mathrm{b}^{\mathrm{S}}_{\mathrm{Low}} = -\frac{\chi^{\mathrm{B}}}{\chi^S}\mathrm{b}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{Low}}$$

מרווחים

```
Spread_R_b_SS_L          = 1 + phi *(b_b_SS_L/b_BAR_SS_L - 1) ;
R_b_SS_L                 = R_s_SS * Spread_R_b_SS_L  ;
R_b_nom_SS_L = R_b_SS_L * Pi_BAR ;
DB_b_BAR_l               = b_b_SS_L * ( 1/Pi_BAR - 1 / R_b_nom_SS_L ) ;    // Debt Balanace
DB_s_BAR_l               = b_s_SS_L * ( 1/Pi_BAR - 1 / R_s_nom_SS ) ;    // Debt Balanace
```

ניתן לחלץ את הצריכה במצב עמיד ממגבלת התקציב

```
C_b_BAR_l = w_BAR * L_BAR + (q_BAR/p_delta-1) * I_b_BAR - DB_b_BAR_l
C_s_BAR_l = w_BAR * L_BAR  - DB_s_BAR_l
```

כופל לגראנץ במצב עמיד (כנל עבור חוסך) :

$$\overline{\lambda^B} = (1 - \beta^B h^B)\left((1 - h^B)\mathrm{C}^{\mathrm{B}}\right)^{-\sigma^B}$$

מצד שני צריך להתקיים :

$$\overline{\lambda^B} = \frac{\vartheta^B\left(\overline{L^B}\right)^{\omega^B}}{\overline{w}}$$

מכאן נבחר את ϑ^{B}

$$\vartheta^B = w\lambda^B(L^B)^{-\omega^B}$$

צריכה מצרפית.

$$\bar{Y} = \bar{C} + \delta \bar{K}$$

$$\frac{Y_t}{L} L = C_t + I_t + TB_t$$

$$(w_t + q_t k_t) L = C_t + I_t + TB_t$$

שאר המשתנים הם הצבות מיידיות במשוואות המודל

1.9. סיכום משוואות עיקריות של מודל

// // Households Boudget Constraint

$$Y_t^S = C_t^S + b_{t-1}^S - \frac{b_t^S}{R_t^S}$$

$$Y_t^S = w_t \cdot L_t^S + \Pi_t^{Bank\ S}$$

$$\Pi_t^{Bank\ S} = -b_t^S \cdot (1/R_t^S - 1/R_t^B)$$

$$K_t^B = I_{t-1}^B + (1-\delta) K_{t-1}^B$$

// Households FOC. For B (the same for S):

$$\lambda_t^B = (C_t^B - h^B C_{t-1}^B)^{-\sigma^B} - \beta^B h^B E_t\left[(C_{t+1}^B - h^B C_t^B)^{-\sigma^B}\right]$$

$$\vartheta^B {L_t^B}^{\omega^B} = \lambda_t^B w_t$$

$$m_{t+1}^B = \beta^B \frac{\lambda_{t+1}^B}{\lambda_t^B}$$

** till here

$$\tilde{R}_t^K = \frac{q_{t+1} + (1-\delta) Q_{t+1}}{Q_t}$$

$$Q_t = 1 + f_t^0 + f_t^1 \cdot I_t/I_{t-1} - E_t m_{t+1}^B \cdot f_{t+1}^1 \cdot (I_{t+1}/I_t)^2$$

$$f_t^0 = (\gamma_{II}/2)(I_t/I_{t-1} - 1)^2$$

$$f_t^1 = \gamma_{II}(I_t/I_{t-1} - 1)$$

// FOC wrt B

$$1 = E_t[m_{\mathbf{t+1}}^S R_t^S]$$

$$1 = E_t[m_{t+1}^B R_t^{B\ Euler}]$$

$$1 = E_t[m_{\mathbf{t+1}}^B \cdot \tilde{R}_t^K]$$

// Colleteral

$$\bar{b}_t = \Theta_t^B E_t Q_{t+1} K_{t+1}^B$$

$$\hat{b}_t^B = b_t^B / \bar{b}_t^B - 1$$

$$R_t^B = R_t^S \left(1 + \phi \cdot \hat{b}_t^B\right)$$

$$R_t^{B\_Euler} = R_t^B \left(1 + \nu \cdot \hat{b}_t^B\right)$$

// Firms and FOC

$$Y_t = A_t {K_t}^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$$

$$\frac{K_t}{L_t} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{w_t}{q_t}$$

// Aggregate Varibles and Budget Constraint

$$C_t = \chi^B C_t^B + \chi^S C_t^S$$

The same for: L, K, Y, I, f^1 and also:

$$\chi^B b_t^B + \chi^S b_t^S = 0$$

$$Y_t = C_t + Q_t I_t$$

// Fisher Rule

$$R_t^{nom,S} = R_t^S \Pi_{t+1}$$

$$R_t^{nom,B} = R_t^B \Pi_{t+1}$$

$$MC_t = \frac{1}{A_t} \left(\frac{w_t}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} \left(\frac{q_t}{\alpha}\right)^{\alpha}$$

$$\widehat{mc}_t = MC_t/MC - 1$$

$$\hat{\pi}_t = \pi_t - \bar{\pi}$$

$$\hat{\pi}_t = \beta^B E_t\hat{\pi}_{t+1} + \kappa\widehat{mc}_t$$

$$\hat{Y}_t = Y_t/\bar{Y} - 1$$

// Monetary Policy:

$$R_t^{s,nom} - 1 = max\left(0, (\rho^S + \pi) + \phi_\pi(\pi_t - \pi) + \phi_y \hat{Y}_t\right)$$

Where $1 + \rho^S = (\beta^S)^{-1}$