Assignment 2

2023-12675 박지호

4.1

4.1-(1)

x	$\frac{9}{5}$	$\frac{11}{5}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{13}{5}$
$P\left(\overline{X} = x\right)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

- $E\left(\overline{X}\right) = \frac{56}{25}$

4.1-(2)

x	$\frac{11}{12}$	$\frac{19}{12}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{35}{12}$
$P(S^2 = x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

- $Var(S^2) = \frac{505}{576}$

4.2

4.2-(1)

- 1회 시행 시 앞면 2번, 뒷면 1번 나올 확률: $\binom{3}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$
- $$X \sim B\left(25,\ \frac{4}{9}\right)$$
- $$E(X) = 25 \times \frac{4}{9} = \frac{100}{9},\ \sigma(X) = \sqrt{25 \times \frac{4}{9} \times \frac{5}{9}} = \frac{10\sqrt{5}}{9}$$

4.2-(2)

- X는 $n = 25$로 n이 충분히 크고, $p = \frac{4}{9}$로 대칭적인 확률을 가진 이항분포를 따르기 때문에 다음과 같이 근사할 수 있다.

  $$Z = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)} \sim N(0,1)$$

- $$P(X > 15) = P\left(Z > \frac{7\sqrt{5}}{10}\right) = 0.05876$$

4.2-(3)

- $P(Z \leq 1.64) = 0.95$

  $k < 1.64 \times \dfrac{10\sqrt{5}}{9} + \dfrac{100}{9} = 15.18$

- $k = 15$

5.1

5.1-(1)

- 모표준편차 $\sigma = 5$, 표본 크기 $n = 24$에 대해
  - $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$
  - $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$이라고 하면, $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$
  - $\alpha = 0.05$
- $\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- $346.30 \leq \mu \leq 350.30$

5.1-(2)

- 모평균 μ, 모표준편차 $\sigma = 5$, 표본 크기 $n = 24$에 대해
  - $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$
  - $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$이라고 하면, $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$
- 가설 설정
  - 귀무가설 $\mathrm{H}_0 : \mu \geq \mu_0 = 350$
  - 대립가설 $\mathrm{H}_1 : \mu < \mu_0 = 350$
  - 유의수준 $\alpha = 0.05$
- 귀무가설 하에서의 검정통계량 $Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$
  - $z = -1.666$
  - $P = P(Z \leq z \mid \mathrm{H}_0) = 0.048$
- 유의수준 $\alpha = 0.05$에서 귀무가설이 기각되며, 유의수준 $\alpha = 0.05$에서 350ml보다 적은 탄산수가 병에 담겨진다고 말할 수 있다.

5.1-(3)

- 모평균 $\mu = 348$, 모표준편차 $\sigma = 5$, 표본 크기 $n = 24$에 대해
  - $X_i \sim N(\mu, \sigma)$
  - $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$이라고 하면, $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
  - $Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$
- 유의수준 $\alpha = 0.05$에서 귀무가설을 기각할 수 없으려면
  - 표본평균 $\overline{X}$가 $\mu_0 - z_\alpha \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 348.32$ 이상이어야 함

- $P\left(\overline{X} \geq 348.32\right) = P(Z \geq 0.3135) = 0.377$

5.1-(4)

- $n = 24$일 때 검정력 0.6253
- $n = 30$일 때 검정력 0.7091
- $n = 40$일 때 검정력 0.8132
- $n = 50$일 때 검정력 0.8827
- $n = 60$일 때 검정력 0.9276
- $n = 70$일 때 결정력 0.9561
- $n = 69$일 때 결정력 0.9538
- $n = 68$일 때 결정력 0.9514
- $n = 67$일 때 결정력 0.9489
- 최소 68병의 탄산수를 조사하여야 한다

5.2

5.2-(1)

- A주머니에서 공을 두 개 꺼냈을 때 두 공이 모두 파란색일 확률
- $\frac{1}{\binom{9}{2}} = \frac{1}{36}$

5.2-(2)

- B주머니에서 공을 두 개 꺼냈을 때 두 공이 모두 파란색이 아닐 확률
- $$1 - \frac{\binom{5}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{13}{18}$$