Assignment 2

2023-12675 박지호

6.1

6.1.(1)

- Let $D_i \coloneqq X_{1i} - X_{2i}$
- 분포 가정: $D_i \overset{\text{iid}}{\sim} N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_D^2)$
  - When $\mu_1 \coloneqq \mathrm{E}(X_{1i}), \mu_2 \coloneqq \mathrm{E}(X_{2i})$
- 가설:
  - 귀무가설 H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$
  - 대립가설 H_1: $\mu_1 - \mu_2 > 0$
  - 유의수준 $\alpha = 0.05$
- Let $T \coloneqq \frac{\overline{D} - 0}{S_D / \sqrt{n}}$
  - When $\overline{D} \coloneqq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} D_i, S_D \coloneqq \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(D_i - \overline{D}\right)^2}$
- 귀무가설 H_0 하에서
  - $T \sim t(n-1)$
  - $n = 10, \overline{d} = \frac{29}{10}, s_D = \sqrt{\frac{121}{10}}$
  - 관측값 $t_0 = \frac{\overline{d} - 0}{s_D / \sqrt{n}} = \frac{29}{11}$
  - 유의확률 $\Pr(T \geq t_0) \approx 0.01354 < \alpha$
  - 유의수준 $\alpha = 0.05$에서 귀무가설 기각
- ∴ 유의수준 5%에서 이 피임약이 혈압을 저하시킨다고 할 수 있다.

6.1.(2)

- 분포 가정:
  - $X_{1i} \overset{\text{iid}}{\sim} N(\mu_1, \sigma_1^2)$
  - $X_{2i} \overset{\text{iid}}{\sim} N(\mu_2, \sigma_2^2)$
  - X_{1i}와 X_{2i}는 서로 독립

i. 등분산 검정

- 가설:
  - 귀무가설 H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$
  - 대립가설 H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$
  - 유의수준 $\alpha = 0.05$
- Let $F \coloneqq \frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2}$

- When $S_1 := \sqrt{\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}\left(X_{1i}-\overline{X_1}\right)^2}, S_2 := \sqrt{\frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}\left(X_{2i}-\overline{X_2}\right)^2}$
- And $\overline{X_1} := \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_{1i}, \overline{X_2} := \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} X_{2i}$

- 귀무가설 H_0 하에서
  - $F \sim F(n_1-1, n_2-1)$
  - $n_1 = 10, n_2 = 10, s_1 = \sqrt{\frac{1618}{45}}, s_2 = \sqrt{\frac{4469}{90}}$
  - 관측값 $f_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{3236}{4469}$
  - $\Pr(F \geq f_0) \approx 0.6808, \Pr(F \leq f_0) \approx 0.3192$
  - 유의확률 $\min(2 \times \Pr(F \geq f_0), 2 \times \Pr(F \leq f_0)) = 0.6384 > \alpha$
  - 유의수준 $\alpha = 0.05$에서 귀무가설 기각 불가
- ∴ 유의수준 5%에서 두 집단의 분산이 확실히 다르다고 말할 수는 없다.

ii. 모평균 비교

- 등분산 검정 결과에 따라 두 집단의 분산이 같다고 가정
- 가설:
  - 귀무가설 H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$
  - 대립가설 H_1: $\mu_1 - \mu_2 > 0$
  - 유의수준 $\alpha = 0.05$
- Let $T := \frac{\left(\overline{X_1}-\overline{X_2}\right)-(\mu_1-\mu_2)}{S_P\sqrt{1/n_1+1/n_2}}$
  - When $S_P = \sqrt{\frac{1}{n_1+n_2-2}\left(\sum_{i=1}^{n_1}\left(X_{1i}-\overline{X_1}^2\right)+\sum_{i=1}^{n_2}\left(X_{2i}-\overline{X_2}\right)^2\right)}$
  - And $\overline{X_1} := \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_{1i}, \overline{X_2} := \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} X_{2i}$
- 귀무가설 H_0 하에서
  - $T \sim t(n_1+n_2-2)$
  - $n_1 = 10, n_2 = 10, s_p = \frac{\sqrt{1541}}{6}, \overline{x_1} - \overline{x_2} = \frac{29}{10}$
  - 관측값 $t_0 = 0.9911$
  - 유의확률 $\Pr(T \geq t_0) \approx 0.1674 > \alpha$
  - 유의수준 $\alpha = 0.05$에서 귀무가설 기각 불가
- ∴ 유의수준 5%에서 이 피임약이 혈압을 저하시킨다고 확실히 말할 수는 없다.

6.3

- 1의 방법이 더 적합하다.
- 2의 방법의 경우 실험 대상의 개인차에 의한 영향을 배제할 수 없지만, 1의 방법의 경우 한 명의 실험자에 대해 두 약의 효과를 비교할 수 있기 때문에 더 적합하다.

7.1

- Let:
  - p_1 := 독감 백신 주사를 받은 사람 중 독감에 걸리지 않은 사람의 모비율
  - p_2 := 독감 백신 주사를 받지 않은 사람 중 독감에 걸리지 않은 사람의 모비율
  - X_1 := 독감 백신 주사를 받은 n_1명 중 독감에 걸리지 않은 사람의 수
    - $X_1 \sim B(n_1, p_1)$
  - X_2 := 독감 백신 주사를 받지 않은 n_2명 중 독감에 걸리지 않은 사람의 수
    - $X_2 \sim B(n_2, p_2)$
  - X_1과 X_2는 서로 독립
- Let $Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)/n_1 + \hat{p}_2(1-\hat{p}_2)/n_2}}$
  - When $\hat{p}_1 := \frac{X_1}{n_1}, \hat{p}_2 := \frac{X_2}{n_2}$
  - 표본의 크기가 충분히 크므로 $Z \mathrel{\dot\sim} N(0,1)$

7.1.(1)

- 가설:
  - 귀무가설 H_0: $p_1 - p_2 = 0$
  - 대립가설 H_1: $p_1 - p_2 > 0$
  - 유의수준 $\alpha = 0.05$
- 귀무가설 H_0 하에서
  - $Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(1/n_1 + 1/n_2)}} \mathrel{\dot\sim} N(0,1)$
    - When $\hat{p} := \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$
  - 관측값 $z_0 = 1.827$
  - 유의확률 $\Pr(Z > z_0) \approx 0.03388 < \alpha$
  - 유의수준 $\alpha = 0.05$에서 귀무가설 기각
- ∴ 유의수준 5%에서 독감 백신이 독감에 걸리지 않을 확률을 높인다, 즉 독감 예방에 효과가 있다.

7.1.(2)

- $Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)/n_1 + \hat{p}_2(1-\hat{p}_2)/n_2}} \mathrel{\dot\sim} N(0,1)$ 이므로

  $$p_1 - p_2 = (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - Z\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

- $p_1 - p_2$의 95% 신뢰구간:

  $$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

  - When $\alpha = 0.05$
- $(-0.00222, 0.09222)$

7.1.(3)

- 분포 가정:
  - $(O_{i1}, O_{i2}) \sim \mathrm{Multi}(n_i, (p_{i1}, p_{i2})), i = 1, 2$
  - When
    - O_{11}: 독감 백신 주사를 받은 사람 중 독감에 걸리지 않은 사람 수
    - O_{12}: 독감 백신 주사를 받은 사람 중 독감에 걸린 사람 수
    - O_{21}: 독감 백신 주사를 받지 않은 사람 중 독감에 걸리지 않은 사람 수
    - O_{22}: 독감 백신 주사를 받지 않은 사람 중 독감에 걸린 사람 수
    - p_{11}: 독감 백신 주사를 받은 사람 중 독감에 걸리지 않은 사람의 모비율
    - p_{12}: 독감 백신 주사를 받은 사람 중 독감에 걸린 사람의 모비율
    - p_{21}: 독감 백신 주사를 받지 않은 사람 중 독감에 걸리지 않은 사람의 모비율
    - p_{22}: 독감 백신 주사를 받지 않은 사람 중 독감에 걸린 사람의 모비율
- 가설 (동질성 검정):
  - 귀무가설 H_0: $p_{1j} = p_{2j} = p_j$
  - 대립가설 H_1: not H_0
  - 유의수준 $\alpha = 0.05$
- Let $\chi^2 := \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \frac{(O_{ij} - \hat{E}_{ij})^2}{\hat{E}_{ij}}$ (카이제곱 검정통계량)
  - When $\hat{p}_j = \frac{O_{1j} + O_{2j}}{n_1 + n_2}, \hat{E}_{ij} = n_i \hat{p}_j$ (기대도수)
- 귀무가설 H_0 하에서
  - $\chi^2 \dot{\sim} \chi^2(1)$
  - $n_1 = 400, n_2 = 600, o_{11} = 340, o_{12} = 60, o_{21} = 483, o_{22} = 117$
  - $\hat{p}_1 = \frac{823}{1000}, \hat{p}_2 = \frac{177}{1000}$
  - 기대도수 $\hat{E}_{11} = \frac{1646}{5}, \hat{E}_{12} = \frac{354}{5}, \hat{E}_{21} = \frac{2469}{5}, \hat{E}_{22} = \frac{531}{5}$
  - 카이제곱 검정통계량 관측값 $\chi_0^2 = \frac{162000}{48557} \approx 3.3363$
  - 유의확률: $\Pr(\chi^2 \geq \chi_0^2) = 0.06777 > \alpha$
  - 유의수준 $\alpha = 0.05$에서 귀무가설 기각 불가
- 유의수준 5%에서 독감 백신이 독감에 걸릴 확률에 영향을 끼친다고 할 수 없다.

7.2

- 분포 가정:
  - $(O_{i1}, O_{i2}) \sim \mathrm{Multi}(n_i, (p_{i1}, p_{i2})), i = 1, 2, 3$
  - When
    - O_{ij}: 주어진 표의 i행 j열에 대응되는 사람의 수

    - p_{ij}: 주어진 표의 i행 j열에 대응되는 사람의 모비율
- 가설 (독립성 검정):
  - 귀무가설 H_0: $p_{1j} = p_{2j} = p_{3j}, j = 1, 2$
  - 대립가설 H_1: not H_0
  - 유의수준 $\alpha = 0.05$
- Let $\chi^2 = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} \frac{\left(O_{ij} - \hat{E}_{ij}\right)^2}{\hat{E}_{ij}}$ (카이제곱 검정통계량)
  - When $\hat{p}_j = \frac{O_{1j}+O_{2j}}{n_1+n_2}, \hat{E}_{ij} = n_i \hat{p}_j$ (기대도수)
- 귀무가설 H_0 하에서
  - $\chi^2 \dot{\sim} \chi^2(2)$
  - 카이제곱 검정통계량 관측값 $\chi_0^2 = 0.1527$
  - $\Pr\left(\chi^2 \geq \chi_0^2\right) = 0.9265 \geq \alpha$
  - 유의수준 $\alpha = 0.05$에서 귀무가설 기각 불가
- 유의수준 5%에서 연애기간의 길이가 결혼기간의 길이와 관계가 있다고 할 수 없다.