

# Grundlagen der Hydrologie

## 1. Einzugsgebiete und Wasserbilanz<sup>1</sup>

### Übung im WiSe 2021/22 - TU Bergakademie Freiberg

Ziele der Übung sind Klarheit bei der Beantwortung folgender Fragen:

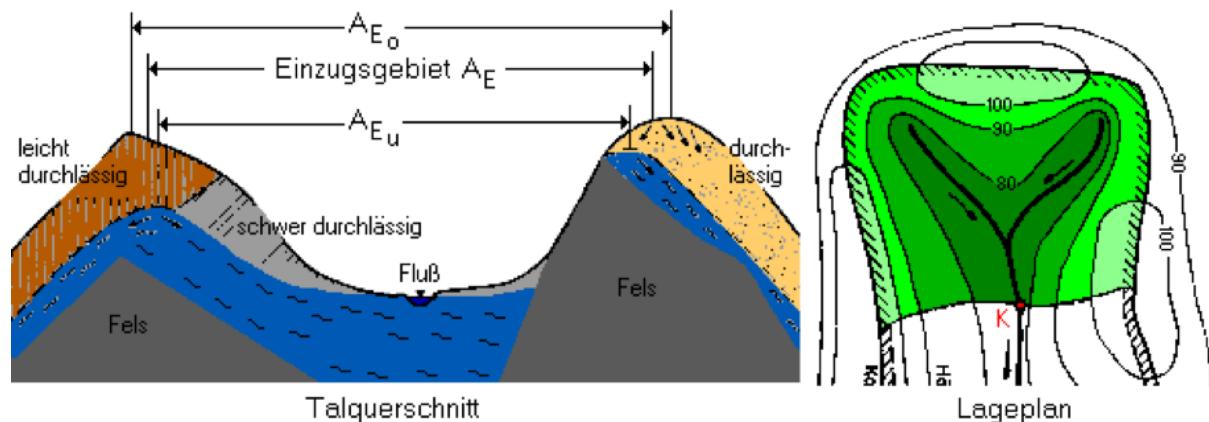
- Was ist ein Einzugsgebiet? Welches Konzept steckt dahinter? Wie weise ich es aus?
- Wie kann der Abfluss eines Einzugsgebiets gemessen werden? Wie kann ich Pegelstände in Durchflüsse umrechnen?
- Was versteht man unter Wasserbilanz? Wie kann ich sie berechnen? Welche Annahmen und welche Möglichkeiten ergeben sich damit?
- Anwendung der Wasserbilanz an Beispielen.

Zu diesem Aufgabenblatt gibt es ein Jupyter Notebook unter [https://github.com/cojacoo/hydro\\_tutorial/blob/master/Tutorial\\_1\\_Gauges\\_Discharge.ipynb](https://github.com/cojacoo/hydro_tutorial/blob/master/Tutorial_1_Gauges_Discharge.ipynb)<sup>2</sup>

#### Aufgabe 1.1: Definition Einzugsgebiet

1. Was versteht man in der Hydrologie unter einem Einzugsgebiet?
2. Wofür wird das Konzept überwiegend verwendet?
3. Welche Annahmen stecken hinter der Festlegung eines Einzugsgebiets?

Zur Unterstützung ist Abb. 1 gegeben.



#### Lösung:

In Abb. 1 ist das Konzept illustriert. Ein Einzugsgebiet ( $A_E$ ) [ $L^2$ ] ist ein begrenzter Raumauschnitt aus der Gesamtheit des hydrologischen Systems aus dem das Wasser einem Kontrollquerschnitt zufließt. Das oberirdische ( $A_{E_o}$ ) und das unterirdische Einzugsgebiet

<sup>1</sup> Begleitend zur Vorlesung **Grundlagen der Hydrologie** von Jun.Prof. Dr. Conrad Jackisch, Rückfragen in der Vorlesung oder per eMail [conrad.jackisch@tbt.tu-freiberg.de](mailto:conrad.jackisch@tbt.tu-freiberg.de)

<sup>2</sup> Jupyter ist eine sehr einfache und gleichzeitig sehr mächtige Umgebung zur Benutzung der Programmiersprache Python. Es kann via Anaconda sehr leicht auf jedem Rechner installiert werden: <https://www.anaconda.com/>

Figure 1: Schröder, W., Euler, G., Schneider, K. & Knauf, D. (1994): Grundlagen des Wasserbaus. – 3. Aufl., Werner, Düsseldorf in [www.hydroskript.de](http://www.hydroskript.de)

$(A_{E_u})$  werden meist gleichgesetzt, da  $A_{E_u}$  meist unbekannt ist. Das Einzugsgebiet kann unter dieser Annahme aus der topographischen Karte mit Kamm- und Tal-linien konstruiert werden. Die Kammlinien verlaufen entlang der oberflächlichen Wasserscheiden im Gelände. Die Tal-linien grenzen den Bereich ab, in dem die Fließpfade gerade noch am Kontrollquerschnitt im Gewässer ankommen.

Das Konzept ist damit die Grundlage für das Erstellen einer Wasserbilanz (s.u.). Es wird angenommen, dass die Flüsse über die seitlichen Begrenzungen vernachlässigbar gering sind. Somit wird aller Niederschlag in einem Einzugsgebiet gesammelt und verlässt dieses durch den Kontrollquerschnitt und über den oberen (Verdunstung) und unteren (Grundwasser) Rand.

### Aufgabe 1.2: Ausweisung von Einzugsgebieten und Bestimmung deren Größe

Nach einem verheerenden Hochwasser 2011 an der Attert in Luxemburg sollen die Ursachen und mögliche Vermeidungsmaßnahmen untersucht werden. Dazu soll nun das Beobachtungsnetzwerk mit verschiedenen Pegeln analysiert werden.

1. Sie bekommen eine topographische Karte sowie die Lage der Pegel (lila Dreiecke, Spitze weist auf die Pegelposition). Wählen Sie sich 2 Pegel und weisen Sie die jeweiligen Einzugsgebiete aus.
2. Bestimmen Sie die Größe der Einzugsgebiete.

#### Lösung:

Siehe Lösungskarte (Abb. 2) und Tabelle 1.

### Aufgabe 1.3: Wasserstand-Abfluss Beziehung

Am Pegel "Becherbach" (Osterzgebirge) wurden über vier Jahre etliche Abflussmessungen durchgeführt, um die Wasserstand (H) – Abfluss (Q) Beziehung für den Pegel zu erstellen. In Tabelle 2 sind die Daten gegeben.

1. Erstellen Sie die HQ-Beziehung für den Becherbach.
  - (a) Um eine lineare Regression zu ermöglichen, transformieren Sie die Durchflüsse mit  $\sqrt[3]{Q}$ . Der natürliche Logarithmus ist auch eine sinnvolle Wahl. Zeichnen Sie damit ein zweites Diagramm.
  - (b) Zeichnen Sie die Punkte in ein Koordinatensystem mit Wasserstand (Pegel) auf der x-Achse und transformiertem Durchfluss auf der y-Achse.

Pegel	Fläche ( $m^2$ )
Colpach	190.3328e+05
Weierbach	4.512117e+05
F	10.63269e+05
U	4.591054e+05
Useldange	2467.229e+05
Huewelerbach	27.00e+05
Wollefsbach	45.00e+05
Platen	437.5590e+05
Schwebich	301.9430e+05
Niederpallen	327.6970e+05
Reichlange	1591.677e+05

Table 1: Einzugsgebiete der Attert

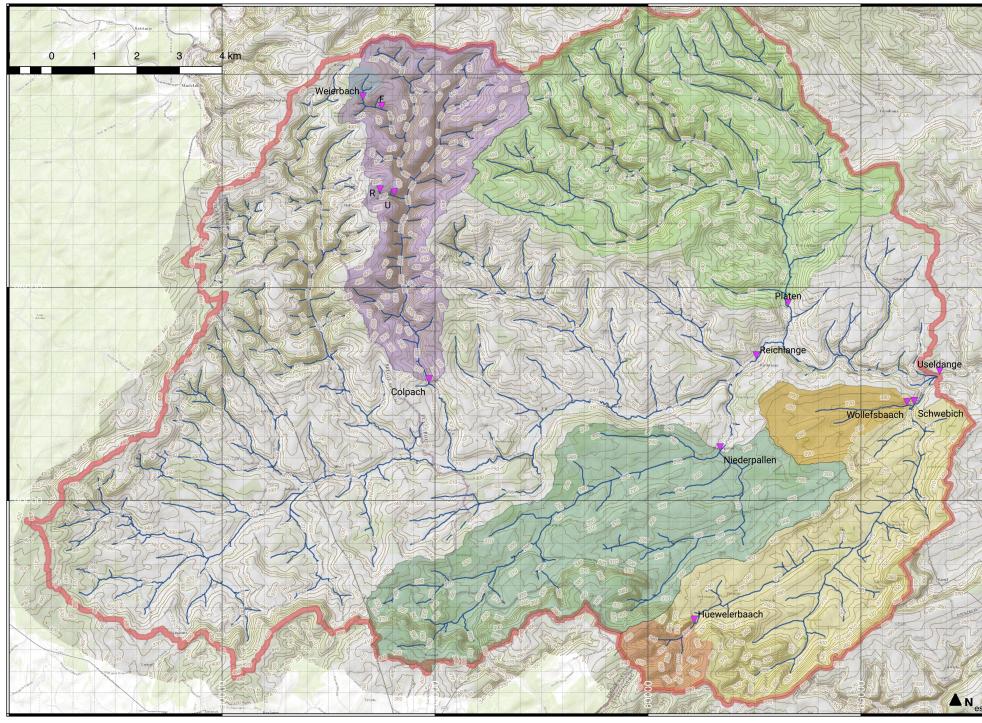


Figure 2: Einzugsgebiete der Attert

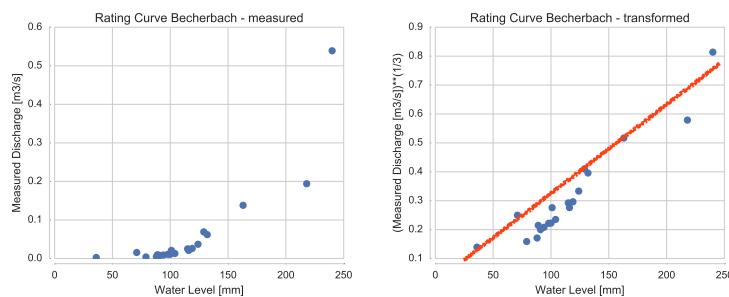
- (c) Zeichnen Sie die lineare Regressionsgerade in Ihr Diagramm und leiten Sie  $a$  und  $b$  für die lineare Funktion  $Q_{transformiert} = a * h + b$  aus Ihrer Graphik ab.
- (d) Bestimmen Sie die Funktion der Wasserstand-Abfluss Beziehung für den Becherbach.
2. Gültigkeit und Fehlerbetrachtung
- Für welchen Wertebereich gilt die ermittelte Wasserstand-Abfluss Beziehung? Warum?
  - Wie wirken sich Fehler in der (a) Abflussmessung und (b) Abgeleiteten Wasserstand-Abfluss Beziehung aus?
  - Bei welchen Wasserständen sind sie am stärksten? Zeigen Sie dies graphisch.
  - In vielen Fällen handelt es sich um Messstellen an Brücken (statt eines genormten Wehrs mit Überfall). Welche zusätzliche Unsicherheit ergibt sich?

**Lösung:**

Um die Aufgabe zu lösen haben wir im Wesentlichen die Aufgabe, eine lineare Regression von gemessenem Durchfluss zu gemessenem Pegelstand zu erstellen. D.h. wir berechnen die Variablen  $a$  &  $b$  in

#	Date	$Q [m^3 s^{-1}]$	$Q_{transformiert}$	Gauge [mm]
0	2007-11-02 13 h	0.025000	0.2924	115
1	2008-01-17 11 h	0.009000	0.2080	94
3	2008-04-29 19 h	0.062000	0.3957	132
4	2008-05-08 17 h	0.026000	0.2962	119
6	2009-05-05 11 h	0.013000	0.2351	104
7	2009-07-14 13 h	0.037000	0.3332	124
9	2009-09-24 13 h	0.005000	0.1709	88
10	2009-11-05 15 h	0.138000	0.5167	163
13	2010-03-27 14 h	0.539000	0.8138	240
14	2010-03-29 12 h	0.194000	0.5788	218
16	2010-10-11 15 h	0.009880	0.2145	89
17	2010-11-21 13 h	0.010900	0.2217	98
18	2011-07-22 13 h	0.015583	0.2497	71
19	2011-09-23 12 h	0.002708	0.1393	36

Table 2: Abflussmessungen (Salztracer) am Becherbach

Figure 3: Messungen der HQ Beziehung am Becherbach (rechts mit  $\sqrt[3]{Q}$  transformiert)

der Funktion  $Q = a * h + b$  so, dass die Fehler zu den Beobachtungen minimiert werden.

Mit der Transformation der gemessenen Werte erhalten wir eine Punktwolke, die eine lineare Regression überhaupt möglich machen. Eine genauere Prüfung auf Normal-Verteilung wäre angebracht, wird aber hier vernachlässigt.

Nun können wir den Anstieg  $a$  und den Offset  $b$  aus dem Diagramm ablesen.  $b$  am Schnittpunkt mit der y-Achse (hier  $-0.08$ ),  $a$  über den Dreisatz: y-Wert bei hohem x-Wert (hier z.B. 200 →  $0.6$ ) geteilt durch die Differenz des gewählten x-Wertes und dem Schnittpunkt der Geraden mit der x-Achse (hier z.B.  $200 - 25 = 175$ ). Somit ergibt sich  $0.6 / 175 = 0.0034$ .

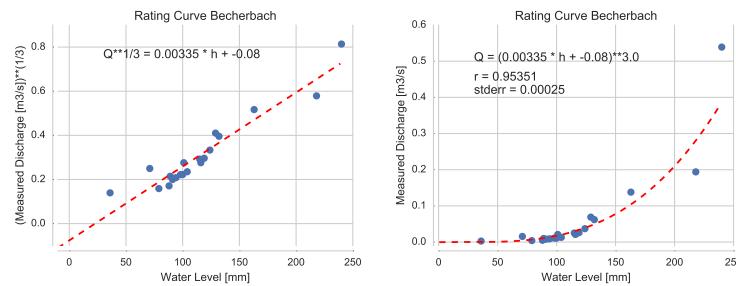


Figure 4: HQ Beziehung am Becherbach

Nun müssen wir die Transformation für unsere Funktion der Wasserstand-Abfluss Beziehung für den Becherbach berücksichtigen und erhalten:  $Q = (ah + b)^3$  mit

$a = 0.0034$ ,  $b = -0.08$  Mit der so erhaltenen Funktion lassen sich gemessene Wasserstände in Durchflüsse umrechnen.

#### Gültigkeit und Fehlerbetrachtung:

Die HQ-Beziehung gilt streng genommen nur für den Bereich beobachteter Abflüsse. Das hängt einerseits damit zusammen, dass wir mit der Regression die Geometrie des Flussbettes und der damit verbundenen Konfiguration des Verhältnis von durchströmter Querschnittsfläche zu hydraulischem Radius (Kontaktlänge zum Gerinne mit Reibung) implizit beschreiben. Hochwasser zeichnen sich jedoch vor allem dadurch aus, dass Flüsse ihre Gerinne übersteigen. Somit ändert sich der durchströmte Querschnitt durchaus massiv und oft auch abrupt.

Dazu kommt, dass die Rauigkeit der Gewässersole in verschiedenen Bereichen sehr unterschiedlich sein kann. Beides ist in Abb. 5 dargestellt.

Unsere HQ-Beziehung hat ein  $R^2 = 0.95$  und eine Standardabweichung von 0.00025. Wenn wir uns für Hochwasser interessieren (Wasserstände über 150 mm), sind allein die Fehler zur empirischen Funktion deutlich größer (siehe Abweichung der gemessenen Punkte

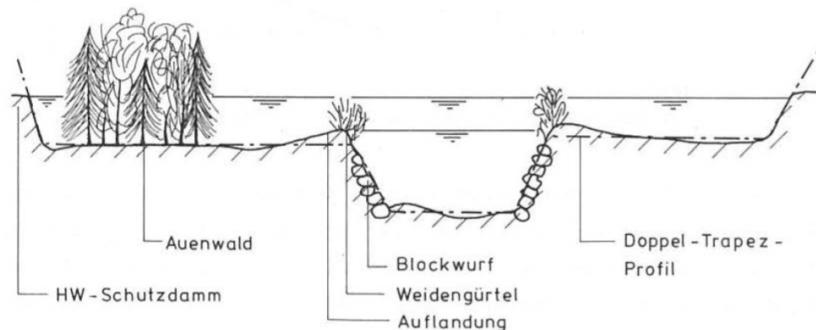


Figure 5: Fluss-Querprofil aus W. Kradolfer Berechnung des Normalabflusses in Gerinnen mit einfachen und gegliederten Querschnitten, ETH Zürich, 1983

von der Funktion im Diagramm).

Auch im Gültigkeitsbereich unserer HQ-Beziehung wirken sich Fehler bei hohen Wasserständen deutlich stärker auf den Wert des ermittelten Durchfluss' aus. Dies ergibt sich bereits aus der hier angewendeten Transformation zur 3. Potenz.

Wenn die Messstelle keinen Überfall besitzt oder dieser zeitweise nicht frei ist, ist die Messung nicht unabhängig vom unterstromigen Abfluss. Es kann bspw. zu Rückstaueffekten kommen, wodurch auch bei steigendem Pegel der Durchfluss nicht steigen würde. Besonders unschön daran ist, dass damit eine Grundannahme unserer Einzugsgebietsbetrachtung in Bedrängnis gerät: Der Abfluss ist dann nicht nur eine Funktion des bemessenen Gebiets selbst.

Eine solche Situation ergibt sich häufig an Mündungsbereichen, wenn sich durch den Pegel unterhalb der Messstelle der hydraulische Gradient aufhebt oder gar umkehrt. In Flussdeltas bilden sich aufgrund dieses Zusammenhangs sogar ganz spezielle Ökosysteme, die sich an dieses Wechselspiel angepasst haben.

*Aufgabe 1.4: Definition Wasserbilanz*

1. Nennen Sie die Wasserbilanzgleichung
2. Erklären Sie deren Eigenschaften.

**Lösung:**

$$\Delta S = \sum_{t_0, Q_0}^{t_i, Q_n} Q_{in} - \sum_{t_0, Q_0}^{t_i, Q_n} Q_{out} \quad (1)$$

Die Änderung des Speichers ( $\Delta S$ ) ist die Summe (über Zeit  $t$  und Prozesse) aller Zu- und Abflüsse (Quellen  $Q_{in}$  und Senken  $Q_{out}$ ) des Kontrollvolumens (zB. Einzugsgebiet, Bodenprobe, Messbereich eines Sensors). Für ein Einzugsgebiet sind diese Randflüsse Niederschlag ( $P$ ), Evapotranspiration ( $ET$ ), und Abfluss im Gerinne ( $Q$ ). Damit erhalten wir die bekannte Gleichung:

$$\Delta S = P - Q - ET \quad (2)$$

Die wichtigste Eigenschaft ist das "Gleichheitszeichen" der Bilanzgleichung. Sie beruht auf der Grundlage, dass Masse nicht verloren gehen kann und auf der Annahme, dass alle relevanten Komponenten (Quellen, Senken, Zustand) erfasst werden.

*Aufgabe 1.5: Wasserbilanzen der Attert*

Im Bereich der Attert befinden sich zu den Pegeln mehrere meteorologische Stationen. Sie erhalten die Lage der Messstationen sowie die monatlichen Mittelwerte von Niederschlag, Abfluss und geschätzter Verdunstung in Tabelle 3.

1. Bestimmen Sie die Wasserbilanzen eines der Pegel Colpach, Wollefsbach, Huewelerbach und Useldange.
2. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis im Hinblick auf die Annahmen der Wasserbilanzgleichung und die Eigenschaften der jeweiligen Einzugsgebiete.

**Lösung:**

Month	Disch.				Precip	ET	$\Delta S$				$\Delta S(a)$
	Col-pach	Weierbach	Usel-dange	Huew.-erbach	Usel-dange	Szilagyi 2007	Col-pach	Weierbach	Usel-dange	Huew.-erbach	
2010-11	73.00	61.19	43.03	17.19	65.1	5.57	-13.46	-1.65	16.50	42.34	
2010-12	39.32	37.92	33.23	14.71	116.5	9.28	67.89	69.29	73.98	92.50	
2011-01	164.39	186.02	97.46	27.75	55.7	9.85	-118.53	-140.17	-51.61	18.09	
2011-02	23.15	25.72	21.94	12.21	25.8	8.69	-6.04	-8.61	-4.83	4.89	
2011-03	17.40	20.02	17.37	12.43	10.5	8.91	-15.81	-18.42	-15.77	-10.84	
2011-04	6.87	8.93	11.78	11.16	19.4	18.66	-6.12	-8.19	-11.03	-10.42	
2011-05	2.70	2.78	9.31	8.70	22.0	43.76	-24.46	-24.54	-31.06	-30.45	
2011-06	3.75	1.60	9.12	8.80	60.3	35.74	20.80	22.95	15.43	15.75	
2011-07	2.24	0.64	7.97	10.75	46.8	22.16	22.40	23.99	16.67	13.89	C: -17.88
2011-08	2.56	0.80	8.00	9.60	52.9	23.51	26.82	28.59	21.39	19.79	W: -25.58
2011-09	1.75	0.41	7.29	7.29	30.0	13.91	14.34	15.68	8.80	8.80	U: 45.88
2011-10	1.95	0.74	8.80	9.44	25.7	9.47	14.27	15.48	7.42	6.78	H: 171.16
2011-11	2.59	0.94	10.49	11.05	12.0	12.62	-3.21	-1.56	-11.11	-11.67	
2011-12	119.70	104.40	64.78	17.65	143.7	10.33	13.67	28.97	68.59	115.72	
2012-01	134.27	131.31	83.95	18.00	74.2	11.45	-71.52	-68.56	-21.20	44.75	
2012-02	22.48	4.30	18.83	6.60	11.6	13.68	-24.56	-6.37	-20.91	-8.68	
2012-03	25.17	16.34	18.80	6.81	14.4	11.00	-21.77	-12.93	-15.40	-3.40	
2012-04	41.14	61.45	28.38	11.15	96.9	6.48	49.28	28.97	62.04	79.27	
2012-05	49.48	62.88	28.87	11.57	66.0	24.81	-8.28	-21.68	12.32	29.62	
2012-06	24.42	22.66	17.75	9.98	103.0	25.52	53.05	54.81	59.72	67.49	
2012-07	54.50	51.96	37.26	13.08	144.6	34.68	55.42	57.95	72.66	96.84	C: 90.62
2012-08	13.10	14.84	13.43	7.59	41.2	46.41	-18.30	-20.05	-18.64	-12.79	W: 121.16
2012-09	5.26	4.20	11.00	6.86	60.9	22.43	33.20	34.26	27.47	31.60	U: 256.58
2012-10	36.45	22.74	29.05	19.00	78.0	7.91	33.63	47.34	41.04	51.09	H: 479.84
2012-11	36.57	43.97	29.20	14.30	52.7	9.90	6.22	-1.16	13.60	28.50	
2012-12	144.19	172.78	97.68	27.35	115.3	8.45	-37.33	-65.92	9.17	79.50	
2013-01	63.99	70.51	51.25	18.58	35.7	9.76	-38.05	-44.57	-25.31	7.35	
2013-02	61.30	60.47	45.44	18.14	31.1	4.89	-35.09	-34.26	-19.23	8.06	
2013-03	58.57	60.66	38.86	22.97	36.5	7.36	-29.43	-31.52	-9.71	6.17	
2013-04	41.76	49.39	30.70	20.08	55.9	24.34	-10.19	-17.82	0.86	11.47	
2013-05	57.09	75.17	43.26	29.58	110.7	26.67	26.94	8.86	40.77	54.45	
2013-06	34.99	45.37	26.56	20.63	90.7	45.35	10.36	-0.01	18.79	24.72	
2013-07	9.77	10.55	14.33	16.74	35.0	74.62	-49.38	-50.17	-53.95	-56.35	C: -28.24
2013-08	2.73	1.84	10.56	14.08	40.3	45.58	-8.00	-7.12	-15.84	-19.36	W: -92.95
2013-09	4.59	2.76	11.29	13.73	57.0	32.46	19.94	21.77	13.24	10.80	U: 79.23
2013-10	19.48	6.27	28.42	22.40	151.9	16.64	115.78	128.98	106.84	112.85	H: 268.19

Table 3: Wasserbilanzdaten Attert. Alle Werte sind in mm pro Monat gegeben.

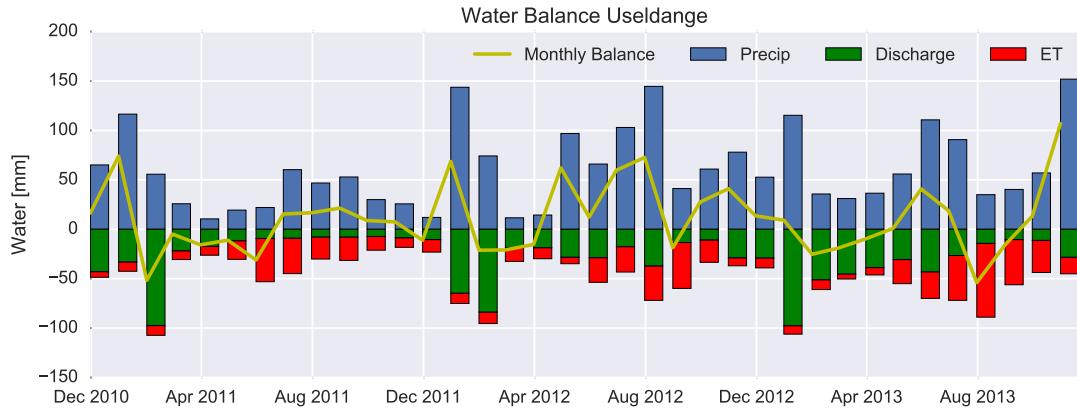


Figure 6: Wasserbilanz am Pegel Useldange

### Aufgabe 1.6: Anwendung der Wasserbilanz

Abbildung 7 zeigt das Einzugsgebiet des A-Flusses. In diesem Einzugsgebiet befinden sich die beiden Pegel A und B. Zwischen diesen beiden Pegeln leitet ein Kraftwerksbetreiber einen Anteil des Abflusses in das Nachbareinzugsgebiet ab. Zusätzlich erhalten Sie Tabelle 4 mit Angaben zum jeweiligen Gesamteinzugsgebiet der Pegel. Die mittlere Jahresverdunstung ist in beiden Einzugsgebieten gleich hoch.

Ermitteln Sie den mittleren Abfluss der Ausleitung in  $[m^3 s^{-1}]$ .

Kenngröße	Pegel A	Pegel B
Fläche des Einzugsgebiets	25 [km <sup>2</sup> ]	50 [km <sup>2</sup> ]
mittlerer Jahresniederschlag	850 [mm]	825 [mm]
mittlerer Abfluss MQ	0.238 [m <sup>3</sup> s <sup>-1</sup> ]	0.250 [m <sup>3</sup> s <sup>-1</sup> ]

#### Lösung:

Wir greifen auf die Wasserbilanzgleichung zurück und bestimmen zunächst die Verdunstung für Pegel A ohne Ausleitung:

$$V_{precip} = 850 \text{ mm} * 25 \text{ km}^2 = 0.85 \text{ m} * 25 * 10^6 \text{ m} = 21250000 \text{ m}^3 \quad (3)$$

$$V_{Q(A)} = 0.238 \text{ m}^3 \text{s}^{-1} * (365 * 24 * 60 * 60) \text{s} = 7505568 \text{ m}^3 \quad (4)$$

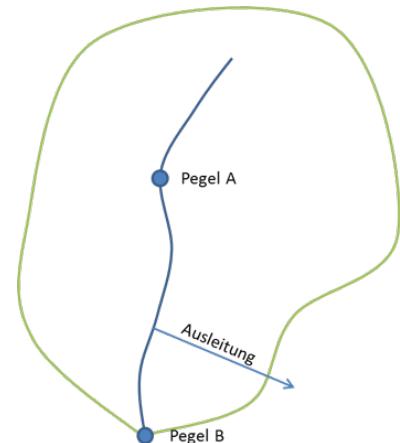


Figure 7: Skizze zu Aufgabe 1.6

Table 4: Einzugsgebietsdaten zu Aufgabe 1.6

$$V_{E(A)} = V_{precip} \cdot V_{Q(A)} = 21250000m^3 - 7505568m^3 = 13744432m^3 \quad (5)$$

$$V_{E(norm)} = \frac{V_{E(A)}}{A_{PegelA}} = 13744432m^3 / 25 * 10^6 m^2 = 0.549m \quad (6)$$

$V_{precip}$  ist das Volumen des Niederschlags.  $V_{Q(A)}$  ist das Volumen des Abflusses an Pegel A in einem Jahr. Über die Wasserbilanz im der Annahme  $\Delta S = 0$  errechnen wir das Volumen der Verdunstung in Einzugsgebiet A ( $V_{E(A)}$ ). Dieses können wir mit der Fläche normieren und erhalten die Jahresverdunstung  $V_{E(norm)}$ .

Nach Aufgabenstellung gilt diese auch für Pegel B. Wir können somit die Wasserbilanz erneut anwenden und das Abflussvolumen ohne Ausleitung für Pegel B abschätzen. Dieses können wir dann in einen geschätzten mittleren Abfluss umrechnen:

$$V_{E_B} = 0.549m * 50 * 10^6 m^2 = 27450000m^3 \quad (7)$$

$$V_{precip(B)} = 0.825m * 50 * 10^6 m^2 = 41250000m^3 \quad (8)$$

$$V_{Q(B)} = V_{precip(B)} - V_{E_B} = 41250000m^3 - 27450000m^3 = 13800000m^3 \quad (9)$$

$$Q_B(\text{theoretisch}) = 13800000m^3 a^{-1} / (365 * 24 * 60 * 60) s a^{-1} = 0.437 m^3 s^{-1} \quad (10)$$

Der gemessene mittlere Abfluss ist nun um die Ausleitung verringert. Wir berechnen als die mittlere Ausleitung mit:

$$Q_{\text{Ausleitung}} = Q_B(\text{theoretisch}) - Q_B(\text{gemessen}) = 0.437 - 0.250 = 0.187 m^3 s^{-1} \quad (11)$$