Grundlagen der Hydrologie
6. Einfache hydrologische Modelle[1]
Übung im WiSe 2021/22 - TU Bergakademie Freiberg

[1] Begleitend zur Vorlesung **Grundlagen der Hydrologie** von Jun.Prof. Dr. Conrad Jackisch, Rückfragen in der Vorlesung oder per eMail *conrad.jackisch@tbt.tu-freiberg.de*

Ziele der Übung sind:

- Ein einfaches linearspeichermodell berechnen
- Ein iteratives Speichermodell berechnen

Aufgabe 6.1: Ein einfaches hydrologisches Modell

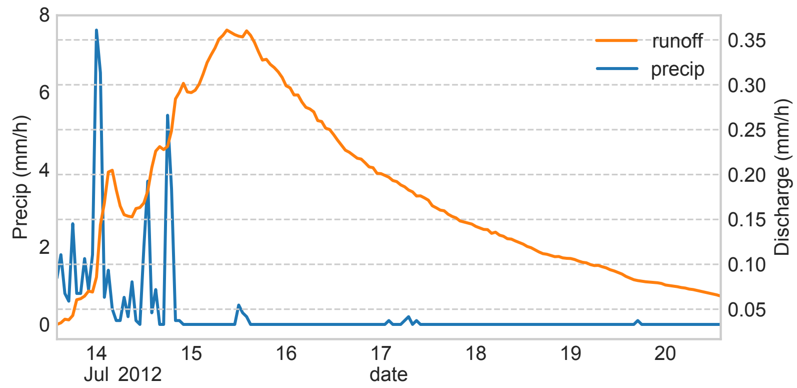

Abbildung 1: Ereignis am Colpach

Nachdem wir nun verschiedene Möglichkeiten von Infiltration und Abflussbildung betrachtet haben, wollen wir uns an ein erstes einfaches hydrologisches Modell wagen. Der einfachste Ansatz ist ein Linearspeicher.

Am Pegel Colpach haben wir um den 15. Juli 2012 ein Ereignis beobachtet, welches wir anhand dieses Modells simulieren wollen. Für die Verdunstung nehmen wir $3\,\mathrm{mm\,d^{-1}}$ an.

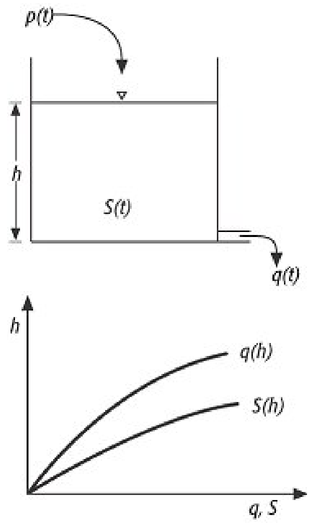

Abbildung 2: Schema eines Linearspeichers. Der Speicherinhalt (S) mit einer Höhe (h) entwickelt sich durch den Zustrom (p) und den Ausfluss (q) über die Zeit (t).

Der Ausfluss aus dem Linearspeicher ist abhängig von seiner Füllung mit

$$q(t) = S(t) \cdot k * \Delta t \tag{1}$$

wobei wir k als Kehrwert der mittleren Verweilzeit im Speicher $k = 1/t_{\text{Verweil}}$ mit $t_{\text{Verweil}} = 100\,\mathrm{h}$ annehmen. Die initiale Speicherfüllung sei 2.5 mm.

Stellen Sie die Bilanzgleichung auf und berechnen Sie die Speicherdynamik. Beachten Sie, dass in der Tabelle $\Delta t = 5h$ ist. Dies findet in der Ausflussrate und in der Anrechnung der Verdunstung Anwendung.

Lösung:

Die Bilanzgleichung lautet:

$$S(t+1) = S(t) - q(t) - ET(t) + p(t) \tag{2}$$

Damit wird nun ausgehend von der initialen Speicherfüllung ein $q(t)$ für den ersten Zeitschritt berechnet. Mit dem gegebenen Niederschlag und der Verdunstungsrate von $0.625mm/5h$ kann damit die Speicherfüllung zum nächsten Zeitschritt $S(t+1)$ berechnet werden. Dies wiederholen wir für alle Zeitschritte. Die Tabelle gibt die entsprechenden Beobachtungen und Ergebnisse in mm.

Tabelle 1: Linearspeicherdynamik

	beobachtet		simuliert	
t	p(t)	q(t)	$q_s(t)$	$S_s(t)$
2012-07-13 10:00:00	1.2	0.033053	0.125	2.500
2012-07-13 15:00:00	6.6	0.215386	0.148	2.950
2012-07-13 20:00:00	12.8	0.351379	0.439	8.778
2012-07-14 01:00:00	9.1	0.902682	1.026	20.514
2012-07-14 06:00:00	2.2	0.788818	1.398	27.963
2012-07-14 11:00:00	6.9	0.947273	1.407	28.140
2012-07-14 16:00:00	9.0	1.223468	1.650	33.008
2012-07-14 21:00:00	0.1	1.470488	1.987	39.732
2012-07-15 02:00:00	0.0	1.611635	1.861	37.221
2012-07-15 07:00:00	0.0	1.780965	1.737	34.735
2012-07-15 12:00:00	1.0	1.769711	1.619	32.373
2012-07-15 17:00:00	0.0	1.634569	1.556	31.129
2012-07-15 22:00:00	0.0	1.506614	1.447	28.948
2012-07-16 03:00:00	0.0	1.387170	1.344	26.876
2012-07-16 08:00:00	0.0	1.265646	1.245	24.907
2012-07-16 13:00:00	0.0	1.144643	1.152	23.036
2012-07-16 18:00:00	0.0	1.064635	1.063	21.260
2012-07-16 23:00:00	0.1	0.991863	0.979	19.572
2012-07-17 04:00:00	0.3	0.930439	0.903	18.068
2012-07-17 09:00:00	0.1	0.863057	0.842	16.840
2012-07-17 14:00:00	0.0	0.792176	0.774	15.473
2012-07-17 19:00:00	0.0	0.738270	0.704	14.074
2012-07-18 00:00:00	0.0	0.694957	0.637	12.745
2012-07-18 05:00:00	0.0	0.656182	0.574	11.483
2012-07-18 10:00:00	0.0	0.611403	0.514	10.284

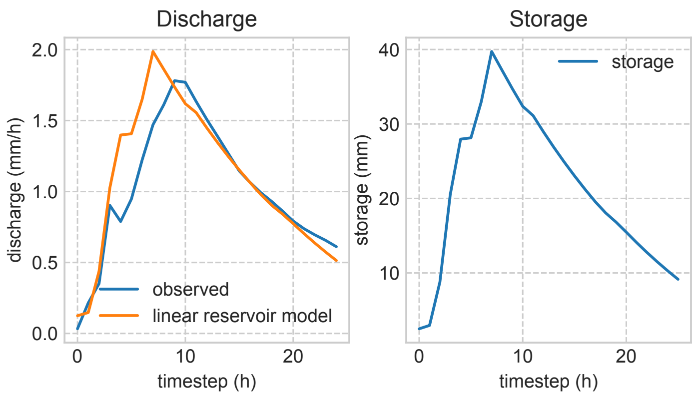

Abbildung 3: Beobachteter und simulierter Abfluss am Colpach. Simulierte Dynamik des Linearspeichers.

Aufgabe 6.2: Retention eines Speicherbeckens

Im Einzugsgebiet des B-Bachs gibt es ein ungesteuertes Hochwasserrückhaltebecken (Abb. 4). Die Gemeinde möchte dieses auf seine Funktionsfähigkeit zum kappen eines Hochwasserscheitels untersuchen. Anders als in Aufgabe 6.1 ist hier die Speicherfüllung in jedem Zeitschritt eine Funktion von Zufluss und Abfluss und muss iterativ bestimmt werden.

Untersuchen Sie das Ereignis in Abb. 5 hinsichtlich der maximalen Transportkapazität des unterliegenden Bachabschnittes mit $18\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{s}^{-1}$. Der Einfachheit halber wird ein Funktion zwischen Speicherinhalt S und Wasserstand h angenommen: $h(S) = 0.018 \cdot \sqrt{S}$. Die Dammkrone befindet sich in 9.0 m Höhe. Die Querschnittsfläche des Auslass ist $A = 3.0\,\mathrm{m}^2$. Der Abflussbeiwert für den Auslass ist $\mu = 0.5$. Der Speicher hat zu Beginn eine Füllhöhe von 0.566 m.

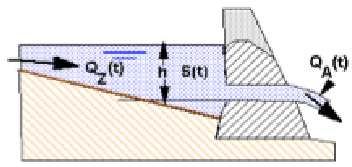

Abbildung 4: Schema eines ungesteuerten Hochwasserrückhaltebeckens

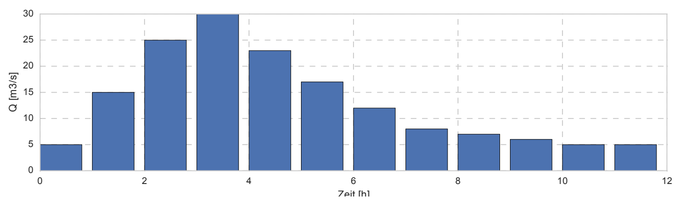

Abbildung 5: Zufluss in das Hochwasserrückhaltebecken

1. Stellen Sie für die Lösung die Speichergleichung (Wasserbilanz der Zeitschritte) auf. Warum können Verdunstung und Versickerung vernachlässigt werden?
2. Ermitteln Sie die Abflussganglinie $Q_A(t_i)$ und vergleichen Sie diese in einem Diagramm mit dem Zufluss.
3. Berechnen Sie die Ganglinie der Wassertiefe im Speicher $h(t_i)$ und des Speicherinhalts $S(t_i)$.
4. Übersteigt der Wasserstand die Dammkrone zu einem Zeitpunkt? Falls ja, wann? Was wäre, wenn der Betriebsauslass nur $1.5\,\mathrm{m}^2$ groß wäre?

5. Wurde das Hochwasserrückhaltebecken seiner Aufgabe, die Unterlieger vor einer Überschwemmung zu schützen, gerecht?

   Sie erhalten Zur Lösung die Speichergleichung:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t_i) - S(t_{i-1})}{\Delta t_{i-1}^{i}} = \left(\frac{Q_{zu}(t_i) + Q_{zu}(t_{i-1})}{2} - \frac{Q_{ab}(t_i) + Q_{ab}(t_{i-1})}{2}\right) \tag{3}$$

$$S(t_i) = \left(\frac{Q_{zu}(t_i) + Q_{zu}(t_{i-1})}{2} - \frac{Q_{ab}(t_i) + Q_{ab}(t_{i-1})}{2}\right)\Delta t + S(t_{i-1}) \tag{4}$$

Der Abfluss als Funktion der Wasserstandes ist:

$$Q_{ab}(t_i) = \mu A\sqrt{2gh(t_i)} \tag{5}$$

Die geforderte Iterationsgenauigkeit ist 10%.

Lösung:

Die Verdunstung rangiert im Bereich von 2 bis 8 mm pro Tag. Versickerungsraten liegen im Bereich von 0.01 bis 0.5 m pro Tag. Beide Raten liegen weit unter den Flüssen des Ereignisses und sind somit für die Betrachtung vernachlässigbar.

Zur Lösung des Problems muss beachtet werden, dass die Speicheränderung vom Abfluss und der Abfluss von der Speicherhöhe abhängt. Somit ist dieses Problem nicht einfach analytisch lösbar, sondern erfordert eine Iteration bis zum Einhalten der gewünschten Iterationsgenauigkeit.

Fangen wir damit an, diese Iterationsgenauigkeit zu definieren und zu verstehen: Wir berechnen die Speicheränderung aus gegebenem Zufluss und von der Speicherhöhe abhängigem Abfluss. Daraus ergibt sich eine neue Speicherhöhe, die wiederum zum Abfluss passen muss. Würde nun zu viel Abfluss geschätzt werden, ist der Abfluss beim nächsten Schritt viel geringer, das Speicherbecken würde viel voller werden als in Wirklichkeit, was wiederum einen deutlich höheren Abfluss zur Folge hat etc. Ziel ist es also, dass der geschätzte Wert eben kein oszillieren sondern ein harmonisches Auslaufen erzeugt.

Das Kriterium ist mit $Q_{ab}(t_i)$ als aktuellen speicherabhängigen Ausfluss und $Q_{ab}(t_i)_{\text{iter}}$ als in der iteration geschätztem Ausfluss:

$$crit = \frac{abs(Q_{ab}(t_i) - Q_{ab}(t_i)_{\text{iter}})}{Q_{ab}(t_i)} \leq 0.1 \tag{6}$$

Der Speicherabhängige Ausfluss ist nach Gleichung 5:

$$Q_{ab}(t_i) = \mu A\sqrt{2g(0.018 \cdot \sqrt{S(t_i)})} \tag{7}$$

Die Speichergleichung ist in Gleichung 4 gegeben.

Entsprechend ergibt sich die folgende Prozedur für jeden Zeitschritt:

1. Schätze $Q_{ab}(t_i)_{\text{iter}}$ aus der vorherigen Iteration/Zeitschritt

2. Berechne $S(t_i)_{\text{iter}}$ aus der Kontinuitätsgleichung 4 mit dem neuen $Q_{ab}(t_i)_{\text{iter}}$
3. Berechne die neue Speicherhöhe und $Q_{ab}(t_i)_{\text{iter+1}}$
4. Berechne das Iterationskriterium mit dem geschätzten $Q_{ab}(t_i)_{\text{iter}}$ und dem neuen $Q_{ab}(t_i)_{\text{iter+1}}$
5. Falls erfüllt: $Q_{ab}(t_i) = Q_{ab}(t_i)_{\text{iter+1}}$ und $S(t_i) = S(t_i)_{\text{iter}}$
6. Falls nicht erfüllt: zurück zu Schritt 1 mit $Q_{ab}(t_i)_{\text{iter}} = Q_{ab}(t_i)_{\text{iter+1}}$

Diese Prozedur wird für jeden Zeitschritt wiederholt, wobei jeweils der Zufluss $Q_{zu}(t_i)$ entsprechend Abb. 5 zu benutzen ist.

Erste Iteration

In der ersten Iteration stellen wir schnell fest, dass der Zufluss und Abfluss von jeweils $5\,\text{m}^3\,\text{s}^{-1}$ einerseits den Speicher nicht ändert. Anderseits zur Füllhöhe des Speichers passt.

Zweite Iteration

In der zweiten Iteration bemerken wir, dass bei $Q_{ab}(t_i) = 5\,\text{m}^3\,\text{s}^{-1}$ der Speicher derart ansteigt, dass sich mit der neuen Füllhöhe ein $Q_{ab}(t_i)_{\text{iter+1}} = 10.5\,\text{m}^3\,\text{s}^{-1}$ ergeben würde. Damit ist das Kriterium bei weitem nicht erfüllt. Wir nutzen das neue $Q_{ab}(t_i)_{\text{iter+1}}$ und erhalten eine neue projizierte Speicheränderung die $Q_{ab}(t_i)_{\text{iter+2}} = 8.7\,\text{m}^3\,\text{s}^{-1}$ ergibt. Auch jetzt ist das Kriterium nicht erfüllt. Wir nutzen $Q_{ab}(t_i)_{\text{iter+2}}$ und erhalten ein $Q_{ab}(t_i)_{\text{iter+3}} = 9.4\,\text{m}^3\,\text{s}^{-1}$. Dies erfüllt unser Kriterium und kann akzeptiert werden.

Und so geht es für alle Zeitschritte weiter.

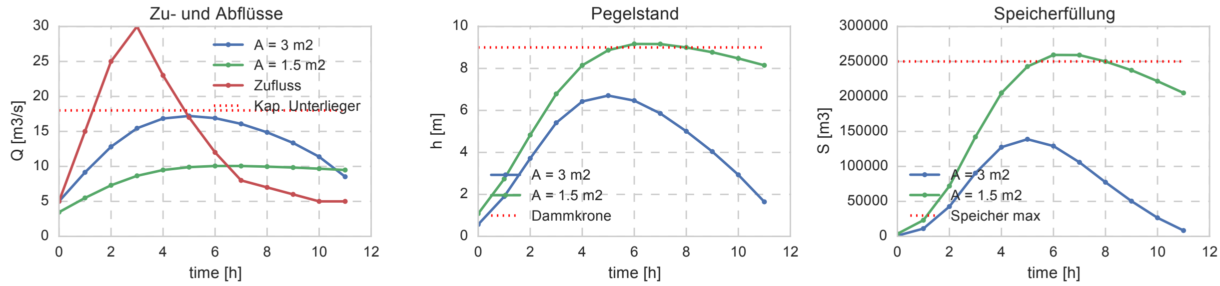

Abbildung 6: Lösung der Speicherretentionsberechnung Aufgabe 6.2

Zeit	$Q_{zu}(t_i)$ $[m^3s^{-1}]$	$Q_{zu}(t_{i-1})$ $[m^3s^{-1}]$	$Q_{ab}(t_{i-1})$ $[m^3s^{-1}]$	$Q_{ab,it}(t_i)$ $[m^3s^{-1}]$	$S_{it}(t_i)$ $[m^3]$	$h_{it}(t_i)$ $[m]$	$Q_{ab,it+1}(t_i)$ $[m^3s^{-1}]$	$\Delta < 0.1$ h>h [ ]
1	5.0	5.0	5.0	5.0	989.86	0.57	5.0	0.0
2	15.0	5.0	5.0	5.0	18989.86	2.48	10.46	0.52
	15.0	5.0	5.0	10.46	9154.24	1.72	8.72	0.20
	15.0	5.0	5.0	8.72	12295.08	2.0	9.39	0.07
3	25.0	15.0	9.39	9.39	50503.20	4.05	13.36	0.30
	25.0	15.0	9.39	13.36	43345.59	3.75	12.86	0.04
	25.0	15.0	9.39	12.86	44247.29	3.79	12.93	0.01
4	30.0	25.0	12.93	12.93	96704.63	5.60	15.72	0.18
	30.0	25.0	12.93	15.72	91680.85	5.45	15.51	0.01
	30.0	25.0	12.93	15.51	92055.72	5.46	15.53	0.0
5	23.0	30.0	15.53	15.53	131558.24	6.53	16.98	0.09
	23.0	30.0	15.53	16.98	128948.69	6.46	16.89	0.01
	23.0	30.0	15.53	16.89	129101.37	6.47	16.90	0.0
6	17.0	23.0	16.90	16.90	140272.15	6.74	17.25	0.02
	17.0	23.0	16.90	17.25	139634.56	6.73	17.23	0.0
	17.0	23.0	16.90	17.23	139669.91	6.73	17.23	0.0
7	12.0	17.0	17.23	17.23	129832.27	6.49	16.92	0.02
	12.0	17.0	17.23	16.92	130393.52	6.50	16.94	0.0
	12.0	17.0	17.23	16.94	130360.66	6.50	16.94	0.0
8	8.0	12.0	16.94	16.94	105383.65	5.84	16.06	0.05
	8.0	12.0	16.94	16.06	106962.50	5.89	16.12	0.0
	8.0	12.0	16.94	16.12	106854.83	5.88	16.12	0.0
9	7.0	8.0	16.12	16.12	75834.78	4.96	14.79	0.09
	7.0	8.0	16.12	14.79	78218.15	5.03	14.91	0.01
	7.0	8.0	16.12	14.91	78011.36	5.03	14.90	0.0
10	6.0	7.0	14.90	14.90	47779.98	3.93	13.18	0.13
	6.0	7.0	14.90	13.18	50873.14	4.06	13.39	0.02
	6.0	7.0	14.90	13.39	50498.19	4.04	13.36	0.0
11	5.0	6.0	13.36	13.36	22192.28	2.68	10.88	0.23
	5.0	6.0	13.36	10.88	26661.30	2.94	11.39	0.04
	5.0	6.0	13.36	11.39	25742.12	2.89	11.29	0.01
12	5.0	5.0	11.29	11.29	3093.99	1.0	6.65	0.70
	5.0	5.0	11.29	6.65	11451.22	1.93	9.22	0.28
	5.0	5.0	11.29	9.22	6819.80	1.49	8.10	0.14

Tabelle 2: Tabelle zur Speicheriteration