

# Potenziale des Bodenwassers – Modellierung der ungesättigten Wasserbewegung<sup>1</sup>

Conrad Jackisch

25. Juni 2019, TU Bergakademie Freiberg

<sup>1</sup> Rückfragen: [c.jackisch@tu-bs.de](mailto:c.jackisch@tu-bs.de)

Zu diesem Skript gibt es ein Jupyter Notebook sowie die Folien der Vorlesung unter <https://github.com/cojacoo/soilwater>

Lernziele der Vorlesung:

- Potenzialkonzept in der Bodenphysik verstehen und anwenden
- Unterschied zwischen gesättigtem Filterstrom und ungesättigter Wasserbewegung verstehen
- Praktischer Einstieg in die Modellierung ungesättigter Bodenwasserdynamik zur Vertiefung in einer Übung

## Wiederholung gesättigte Wasserdynamik

Die Experimente von Henry Darcy (von 1855) sind noch heute die Basis für das Verständnis der Strömung durch wasser-gesättigte poröse Medien. Abb. 1 zeigt die Versuchsanordnung.

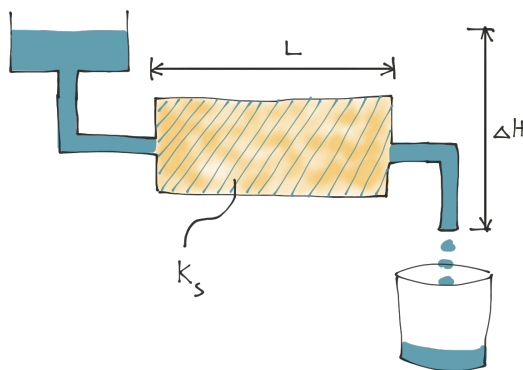


Abbildung 1: Darcy Experiment für den gesättigten Filterstrom durch eine Bodensäule mit Leitfähigkeit  $K_s$  und Länge  $L$ , angetrieben von einem Druckgradienten  $\Delta H$ .

Die daraus abgeleitete Gleichung lautet:

$$q = -K_s \frac{\Delta H}{L} \quad (1)$$

die Filterstromgeschwindigkeit  $q$  ergibt sich aus der gesättigten hydraulischen Leitfähigkeit  $K_s$  (bzw. dem Kehrwert des Widerstandes des porösen Mediums gegen den Fluss) multipliziert mit dem Quotienten aus dem antreibenden Druckgradienten  $\Delta H$  und der Länge des Filterstrecke  $L$ .

Die Experimente und die Gleichung 1 fassen auf fundamentale und gleichzeitig einfache Weise zentrale Eigenschaften dieser Prozesse zusammen:

- Um einen Fluss im System zu erzeugen, braucht es einen Druck- bzw. Potenzialgradienten ( $\Delta H$ ) und eine Leitfähigkeit ( $K_s$ ) ungleich null.
- Interpretiert man  $K_s$  als Kehrwert des Widerstandes des porösen Mediums gegen den Fluss, erhalten wir eine Beschreibung, in der der Widerstand  $1/K_s$  über eine Wirklänge  $L$  gegen den Potenzialgradient  $\Delta H$  wirkt.

Dieser Potenzialgradient ist im gesättigten Fall (und der Subsumierung aller Interaktionen zwischen Fluid und der Matrix des porösen Mediums sowie der Annahme konstanter Viskosität des Fluids selbst) der Gradient des Gravitationspotenzials der Wassersäule.

### Potenzialgradient in einer gesättigten Bodensäule

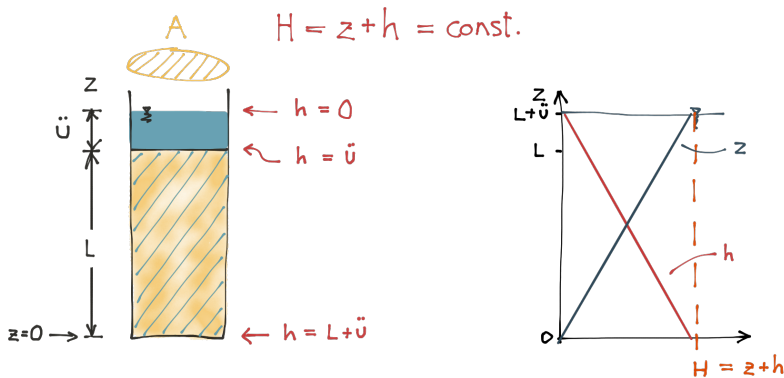


Abbildung 2: Wasser-gesättigte Bodensäule und hydrostatisches Potenzial.

Wenn wir das Experiment von Darcy nun leicht verändern und zunächst eine vertikale Bodensäule wie in Abb. 2 betrachten, können wir uns die Potenziale genauer betrachten.

Die Bodensäule hat eine Höhe  $L$  und ist mit Wasser der Höhe  $\bar{u}$  überstanden. Unsere Bezugshöhe  $z_0$  sei am Boden der Bodensäule ( $z_0 = 0$ ). Das totale hydraulische Druckpotenzial  $H$  ist die Summe des äußeren Drucks und des hydrostatischen Drucks, also:

$$H = z + h \quad (2)$$

Damit das System hydrostatisch ist, darf es keinen Gradienten  $\Delta H$  geben – oder anders ausgedrückt, muss  $H = \text{const.}$  gelten. Damit ist klar, dass  $z + h = \text{const.}$  ist und mit zunehmender Tiefe unser hydrostatischer Druck genau der Wassersäule darüber entspricht.

Wenn wir nun unser Darcy-Experiment mit dieser vertikalen Bodensäule durchführen (Abb. 3), gelten weiterhin all unsere Betrachtungen. Mit einer Position des Auslasses in einer Höhe  $z = -b$  und den bekannten äußerer hydraulischen Druck  $h$  an den Rändern unseres Systems wird schnell klar, dass der Gradient in unserer Bodensäule die Differenz der stehenden Wassersäule am oberen Rand  $H_{z=L} = L + \bar{u}$  und der hängenden Wassersäule am unteren Rand  $H_{z=0} = -b$  ist.

Wir nehmen dabei an, dass unser Auslassrohr dem Fluss keinen Widerstand entgegen setzt. Damit ist der Fluss<sup>2</sup>  $q$  durch den Bodenzylinder mit der Darcy-Gleichung:

$$q = -K_s \nabla H \quad (3)$$

das Produkt der gesättigten hydraulischen Leitfähigkeit  $K_s$  und dem Gradienten des totalen hydraulischen Druckpotenzials  $\nabla H$ . Es

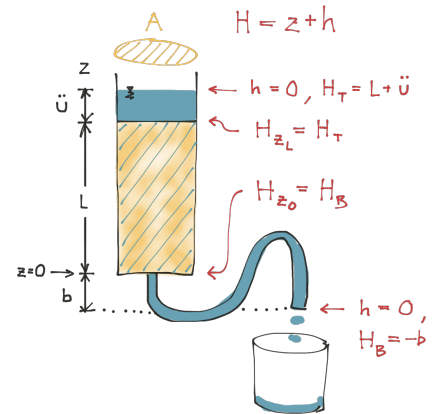


Abbildung 3: Darcy Experiment für den gesättigten Filterstrom durch eine vertikale Bodensäule mit einer Querschnittsfläche  $A$  und einer Leitfähigkeit  $K_s$ .

<sup>2</sup> Wir können auch die Volumenflussdichte  $Q$  ermitteln, indem wir  $q$  mit der Querschnittsfläche  $A$  multiplizieren.

ergibt sich also:

$$\nabla H = \frac{H_T - H_B}{L} \quad (4)$$

die Differenz des totalen hydraulischen Druckpotenzials oben  $H_T$  und unten  $H_B$  geteilt durch die gesamte Filterlänge  $L$ . Damit ist der Fluss  $q$  also:

$$q = -K_s \frac{L + \ddot{u} + b}{L} \quad (5)$$

Entsprechend können wir nun berechnen, wie sich der Fluss mit der Positionierung des Auslasses verändern würde. Dabei ist zu berücksichtigen, dass wir den stationären Fall betrachten — hier heißt das, dass sich trotz einem  $q > 0$  das System nicht ändert und also insb.  $\ddot{u} = \text{const.}$  gehalten werden muss.

### Ungesättigte Bedingungen im Boden

Bei Wassersättigung im Boden sind alle Poren vollständig mit Wasser gefüllt. Das heißt, dass es im Porenraum keine Menisken von Wasser-Luft-Grenzflächen gibt und diese nicht in Form einer Saugspannung bzw. Matrixpotenzial zum Tragen kommen. Das Wasser kann den gesamten Porenraum für die Dynamik verwenden.

Im ungesättigten Fall, verändert sich das System dahingehend (Abb. 4), dass für den Wasserfluss

- 1 die Wege länger werden
- 2 der benutzbare Fließquerschnitt kleiner wird und
- 3 der Fluss in dünneren Filmen stattfinden muss

Gleichzeitig bewirken die teilbenetzten Menisken die Entwicklung Saugspannung ähnlich von Kapillaren. Große Kapillaren haben eine geringe Kapillarität; kleiner eine größere. Der Zusammenhang ist aus der Bodenphysik als zentrale Charakterisierung des Bodens in Form der "Retentions-", "pF-WG-", "Ku-pF-" (etc.) Kurve bekannt (Abb. 5).

Damit hat Bodenwasser nun durch seine Masse im Gravitationsfeld der Erde ein hydrostatisches Potenzial in der benetzten Wasserphase  $\Psi_z$  und ein Matrixpotenzial  $\Psi_m$ . Wie wir zuvor gesehen haben, ist das hydrostatische Potenzial eine Funktion der Höhe  $z$  über einer Referenz  $z_0$ . Wenn man das Potenzial in der Einheit "Meter Wassersäule" angibt, ist  $\Psi_z$  unser  $h$  und damit  $z_{top} - z$ , also die Wassersäule über einem Punkt  $z$ .

Das Matrixpotenzial  $\Psi_m$  ist eine Funktion des freien bzw. luftgefüllten Porenradius. Die Young-Laplace-Gleichung beschreibt den Zusammenhang mit

$$\Delta p = p_w - p_a = -2 \frac{\sigma_w}{R} \quad (6)$$

Die resultierende Saugspannung ist also die Differenz des Drucks in der Wasser- und Luftphase, welche von der Oberflächenspannung von Wasser  $\sigma_w \approx 73 \text{ mJm}^{-2}$  und dem Radius der freien Pore  $R$  abhängt.

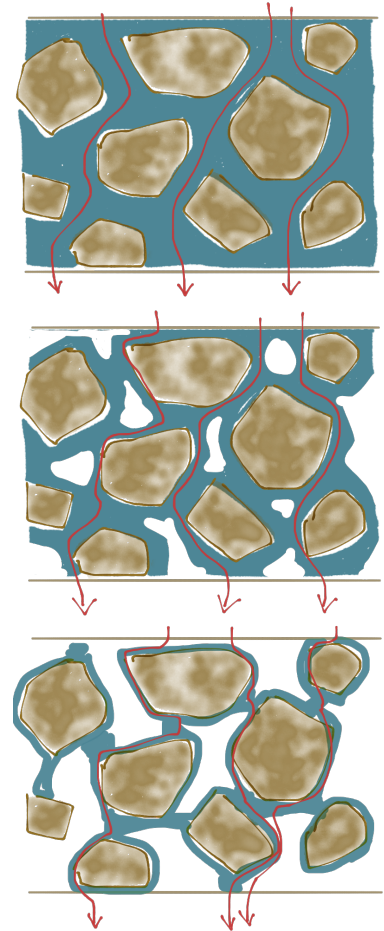


Abbildung 4: Schematische Darstellung des Flusses in einem gesättigten und ungesättigten Porenraum.

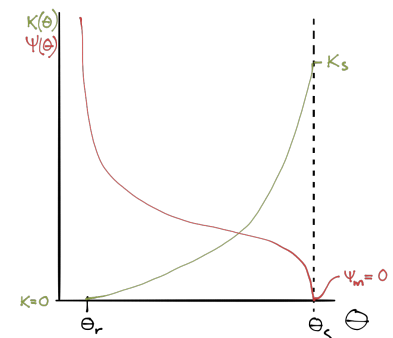


Abbildung 5: Beispielhafte Retentionsbeziehung in Abhängigkeit vom Bodenwassergehalt  $\theta$  für Matrixpotenzial  $\Psi_m(\theta)$  und hydraulische Leitfähigkeit  $K(\theta)$ . Bei Sättigung ( $\theta_s$ ) ist  $\Psi_m(\theta) = 0$  und  $K(\theta) = K_s$ . Beim residualen Wassergehalt ( $\theta_r$ ) wird  $\Psi_m(\theta)$  sehr groß und  $K(\theta) = 0$ .

### Hydrostatisches Schwammexperiment

Unser "Ideal-Boden" (Schwamm) wird in kapillaren Kontakt mit einem Wasserkörper gebracht. Wir beobachten einen Aufstieg von Wasser in dem Schwamm (Abb. 6).

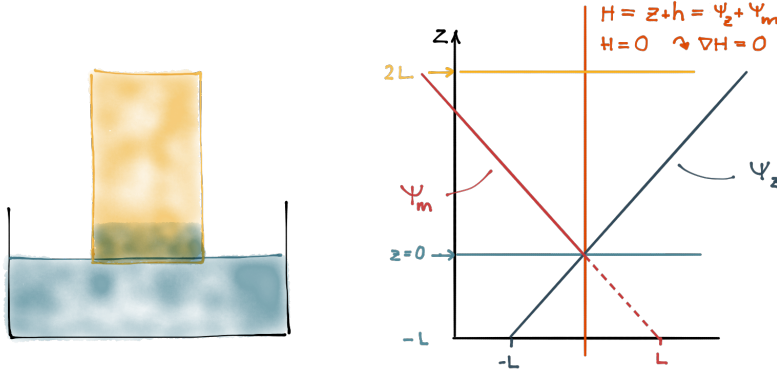


Abbildung 6: Einstellen des hydrostatischen Gleichgewichts durch kapillaren Aufstieg in ein poröses Medium.

Um die Frage zu beantworten, wieso das poröse Medium Wasser gegen die Schwerkraft hebt und dabei eine charakteristische Verteilung des Wassergehalts über die Höhe des Schwamms einstellt, greifen wir uns zunächst auf unsere einfache Gleichung für das totale hydraulische Potenzial zurück:

$$H = h + z \quad (7)$$

An der Wasseroberfläche ist  $h = 0$  und  $z = 0$ . D.h. unser  $H$  ist ebenfalls null. Am Boden des Behälters haben wir  $z = -L$ , was bedeutet, dass der Druck  $h = L$  sein muss (siehe auch Abb. 2). Wir haben also einen Überdruck der stehenden Wassersäule am Boden des Behälters. An der Oberkante des Schwamms hingegen ist  $z = 2L$ , was bedeutet, dass  $h = -2L$  sein muss. Es gibt also einen Unterdruck in unserem Schwamm. Dieser Unterdruck muss genau mit der Höhe zunehmen, damit weiterhin  $H = \text{const.}$  gilt. Letzteres erkennen wir daran, dass sich unser System in einem solchen Zustand einstellt und nicht mehr ändert.

Nun können wir unsere Kenntnisse über die Retentionseigenschaften von porösen Medien (Abb. 5) anwenden: Der Wassergehalt ändert sich nicht-linear mit dem Matrixpotenzial (also dem Unterdruck in unserem ungesättigten porösen Medium). Der Wasseraufstieg im Schwamm spiegelt nichts anderes als die Benässungskurve wieder.

Noch eine zweite wichtige Charakteristik unseres Systems wird nun deutlich: Statt des totale hydraulische Potenzial mit der Höhe  $z$  und dem Druck  $h$  (Gleichung 7) zu beschreiben, meinen diese beiden Terme nichts anderes als das Gravitationspotenzial  $\Psi_z$  und das Matrixpotenzial  $\Psi_m$ .

## Ungesättigter Bodenwasserfilterstrom

In ungesättigten Bedingungen aber unter Gleichgewichtszustand (d.h. wir haben keine Änderung der Konfiguration unseres Systems) ist also die hydraulische Leitfähigkeit eine Funktion des Wassergehalts bzw. Matrixpotenzials  $K(\Psi_m)$ . Und das Matrixpotenzial selbst hat einen Gradienten im Raum.

Unsere Darcy-Gleichung (Gl. 1) muss also die Leitfähigkeit  $K(\Psi_m)$  und für den hydraulischen Gradienten die Änderung des Gravitationspotenzials und des Matrixpotenzials im Raum berücksichtigen:

$$q = -K(\theta) \left[ \frac{dh}{dz} + \frac{dz}{dz} \right] = -K(\theta) \left[ \frac{dh}{dz} + 1 \right] \quad (8)$$

Man sieht schnell, dass die Höhe nach der Höhe abgeleitet immer 1 ergibt. Allgemein ausgedrückt, wobei  $\partial$  nichts anderes meint als eine lokale Ableitung hinsichtlich einer von mehreren Abhängigen und wo wir  $h$  als  $\Psi_m$  schreiben und der Konsistenz halber auch  $K(\Psi_m)$  definieren, erhalten wir die Darcy-Buckingham Gleichung:

$$q = -K(\Psi_m) \left[ \frac{\partial \Psi_m}{\partial z} + 1 \right] \quad (9)$$

Da in der Natur die eingangs vorausgesetzten Gleichgewichtszustände sehr selten sind, bringt uns diese Gleichung aber noch nicht ganz zum Ziel. Schließlich ändert sich bei einem Fluss der Zustand des Systems permanent.

Diese Änderung können wir mit der Kontinuitätsgleichung beschreiben:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial z} \quad (10)$$

d.h. die Änderung des Wassergehalts ( $\partial \theta$ ) in der Zeit ( $\partial t$ ) entspricht der Änderung des Flusses ( $\partial q$ ) im Raum ( $\partial z$ ). Abb. 7 illustriert dazu folgendes Beispiel: Wir haben ein System aus zwei Gläsern an Position  $x_0$  und  $x_1$  zum Zeitpunkt  $t_0$ . Das Glas an  $x_0$  ist gefüllt. Das Glas an  $x_1$  sei leer. Im nächsten Zeitschritt ( $t_1$ ) hat sich der Zustand der Gläser geändert. Das Gesamtvolumen des Wassers ist gleich geblieben, aber der Füllstand im Glas  $x_0$  hat sich geändert ( $\frac{\partial \theta}{\partial t}$ ). Und zwar entspricht diese Änderung genau der Änderung des Flusses im Raum ( $-\frac{\partial q}{\partial x}$ ), also dem Übergang von Wasser in das Glas  $x_1$ .

Nun setzen wir unsere Darcy-Buckingham Gleichungen für den ungesättigten Fluss (Gl. 9) in die Kontinuitätsgleichung (Gl. 10) ein:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \overbrace{K(\Psi_m) \left( \frac{\partial \Psi_m}{\partial z} + 1 \right)}^{=-q} \right] \quad (11)$$

$= \nabla H$

Diese Gleichung heißt Richards-Gleichung und ist soetwas wie der "Heilige Gral" der Hydrologie, weil wir damit die Änderung der des Wassergehalts einer Bodenschicht in der Zeit mit seinen Randflüssen berechnen können. Dazu brauchen wir "nur" die Retentions-

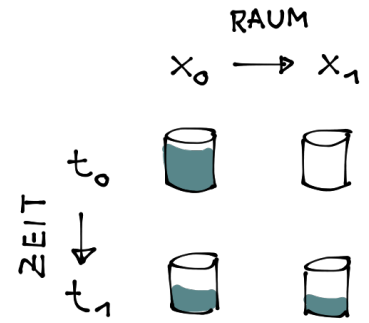


Abbildung 7: Kontinuität von Zustandsänderungen in der Zeit ( $t$ ) und der Flüsse im Raum ( $x$ ).

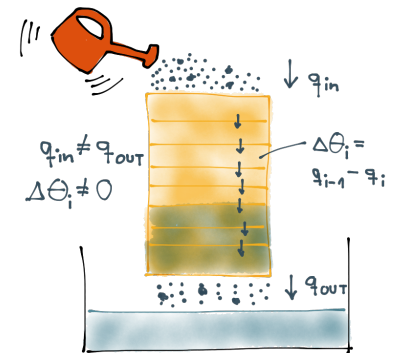


Abbildung 8: Modellierung einer Säule aus mehreren Bodenschichten ( $i$ ).

beziehung des Bodens und die Randbedingungen der Bodensäule (Abb. 8).

Da aber nun der Ausfluss einer Bodenschicht der Zustrom der darunter liegenden Schicht ist ( $q_{i-1,out} = q_{i,in}$ ), ist es relativ aufwändig, eine Lösung per Hand auszurechnen. Daher werden wir in der Übung die Modellumgebung CMF (Catchment Modelling Framework, Kraft *et al.* 2011<sup>3</sup>) verwenden, die stabile numerische Verfahren zur Lösung der Flüsse für uns umgesetzt hat. Wir werden darin eine Bodensäule aufzusetzen und mit verschiedenen Anfangsbedingungen und Parametern die Einstellung des Gleichgewichtszustandes in der Bodensäule nachrechnen. Das Jupyter Notebook ist im Repositorium enthalten <https://github.com/cojacoo/soilwater>.

<sup>3</sup> Kraft, P., K. B. Vache, H.-G. Frede, and L. Breuer (2011), CMF: A Hydrological Programming Language Extension For Integrated Catchment Models, *Environ Modell Softw*, 26(6), 828–830, doi:10.1016/j.envsoft.2010.12.009.