



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN
Vienna University of Technology

**Institute of Electrodynamics,
Microwave and
Circuit Engineering**
1040 Wien, Gußhausstraße 27
Tel. (01) 588 01

Aufgabensammlung zur
Lehrveranstaltung

Elektrodynamik

von
A. Prechtl

Inhaltsverzeichnis

1 EINFÜHRUNG

1.1 Historische Entwicklung

1.2 Das analytische Werkzeug

A1.2.1	Elementare Vektoralgebra.....	3, 59, 89
A1.2.2	Abstand in Kreiszylinderkoordinaten.....	3, 59, 89
A1.2.3	Richtung in Kreiszylinderkoordinaten.....	3, 59, 90
A1.2.4	Vektorfeld in kartesischen und in Kreiszylinder-Koordinaten.....	3, 59, 90
A1.2.5	Tensorfeld in kartesischen und in Kugelkoordinaten.....	3, 59, 91
A1.2.6	Richtungsableitung eines Skalarfeldes.....	4, 59, 91
A1.2.7	Identitäten.....	4, 59, 92
A1.2.8	Ortsvektor.....	4, 59, 93
A1.2.9	Basisvektoren.....	4, 59, 94
A1.2.10	Ebene Bipolarkoordinaten.....	5, 59, 94
A1.2.11	Entwicklungen in kartesischen Koordinaten.....	5, 59, 97
A1.2.12	Entwicklung in Kreiszylinderkoordinaten.....	5, 59, 97
A1.2.13	Entwicklung in Kugelkoordinaten.....	6, 59, 98
A1.2.14	Ausschnitt einer Kugel.....	6, 60, 98
A1.2.15	Konservatives Kraftfeld.....	6, 60, 98
A1.2.16	Gradientenfeld.....	6, 60, 99
A1.2.17	Arbeit in einem Kraftfeld.....	6, 60, 100

2 EIGENSCHAFTEN ELEKTROMAGNETISCHER FELDER

2.1 Globale und lokale Eigenschaften

A2.1.1	Polarisationsladungen.....	7, 61, 101
A2.1.2	Starr homogen elektrisch polarisierter Kreiszylinder.....	7, 61, 101
A2.1.3	Starr homogen magnetisierter Kreiszylinder.....	7, 61, 102
A2.1.4	Wahre und fiktive Ladungsdichte.....	7, 61, 103
A2.1.5	Wahre und fiktive Stromdichte.....	7, 61, 103
A2.1.6	Homogen elektrisch polarisierte Kugel.....	7, 61, 103
A2.1.7	Homogen magnetisierte Kugel.....	7, 61, 104
A2.1.8	Inhomogen dielektrische Schicht.....	8, 61, 104
A2.1.9	Inhomogen elektrisch leitfähige Schicht.....	8, 61, 105
A2.1.10	Dauermagnetplatte.....	8, 61, 106

A2.1.11 Dauermagnet.....	8, 61, 107
A2.1.12 Anisotropes Dielektrikum.....	9, 61, 107
A2.1.13 Anisotrop elektrisch leitfähiger Körper.....	9, 61, 108
2.2 Die Feldgleichungen in Sonderfällen	
A2.2.1 Wasserstoffatom.....	11, 63, 111
A2.2.2 Atomkern.....	11, 63, 111
A2.2.3 Homogenes Bohrungsfeld.....	11, 63, 112
A2.2.4 Spaltfeld.....	11, 63, 113
A2.2.5 Elektronenstrahl.....	12, 63, 113
2.3 Energie und Impuls	
A2.3.1 Sprungbedingung für den Poynting-Vektor.....	13, 65, 115
A2.3.2 Bewegter Kurzschlußbügel.....	13, 65, 115
A2.3.3 Poynting-Fluß in einem Leiter.....	14, 65, 117
A2.3.4 Elektromagnetischer Impulsfluß.....	14, 65, 117
A2.3.5 Energiefluß in einer dünnwandigen Kreiszylinder-spule.....	14, 65, 118
A2.3.6 Kräfte in einer dünnwandigen Zylinderspule.....	14, 65, 118
A2.3.7 Kraft und Drehmoment an einem elektrischen Punktdipol.....	14, 65, 119
A2.3.8 Kraft und Drehmoment an einem magnetischen Punktdipol.....	15, 65, 120
A2.3.9 Parallelle Linienleiter.....	15, 65, 120
A2.3.10 Parallelle Leiter mit Kreisquerschnitt.....	15, 65, 122
A2.3.11 Kraft zwischen zwei Halbkugeln.....	15, 66, 122
A2.3.12 Kraft zwischen zwei Metallplatten.....	15, 66, 123
A2.3.13 Kraft zwischen Stromschienen.....	16, 66, 124
A2.3.14 Kraft an abgeschrägtem Zylinder.....	16, 66, 125
A2.3.15 Haftkraft.....	16, 66, 125
A2.3.16 Kraft an einem Dreiteil.....	16, 66, 126
A2.3.17 Hubmagnet.....	17, 66, 126
A2.3.18 Kraft auf Teil eines Magnetkreises.....	17, 66, 127
A2.3.19 Kraft an Zylindersektor.....	17, 66, 127

3 STATISCHE UND STATIONÄRE FELDER

3.1 Elektrostatik und Quasi-Elektrostatik

A3.1.1 Geladene Vollkugel mit Hohlraum.....	19, 67, 129
A3.1.2 Integralformeln für die elektrische Feldstärke.....	19, 67, 129
A3.1.3 Erweiterung der elektrostatischen Spiegelungsmethode.....	19, 67, 130
A3.1.4 Poisson-Integral für ebene Felder.....	20, 67, 131
A3.1.5 Geteilter Hohlzylinder.....	20, 67, 133
A3.1.6 Dünnwandiger Metallzylinder.....	20, 67, 136

A3.1.7 Ein Dirichlet-Problem für den Halbraum.....	21, 67, 137
3.2 Spezielle elektrostatische Felder	
A3.2.1 Randfeldstärke.....	23, 69, 141
A3.2.2 Ebenes Dirichlet-Problem für einen Spalt.....	23, 69, 142
A3.2.3 Ebenes Dirichlet-Problem für eine Nut.....	23, 69, 142
A3.2.4 Halbraum mit periodischem Randpotential.....	23, 69, 144
A3.2.5 Stromdurchflossene Platte.....	24, 69, 146
A3.2.6 Potential in einem Würfel.....	24, 69, 147
A3.2.7 Additive Separationslösung.....	24, 69, 149
A3.2.8 Koaxialkabel mit radial inhomogenem Dielektrikum.....	24, 69, 150
A3.2.9 Ein inneres und ein äußeres Dirichlet-Problem.....	25, 70, 151
A3.2.10 Dickwandiger Kreiszylinder.....	25, 70, 153
A3.2.11 Dielektrischer Hohlzylinder im Transversalfeld.....	25, 70, 155
A3.2.12 Kantenfeld.....	25, 70, 158
A3.2.13 Widerstand.....	26, 70, 159
A3.2.14 Elektrostatische Potentiale.....	26, 70, 160
A3.2.15 Elektrischer Fluß.....	26, 70, 162
A3.2.16 Randfeld eines Plattenkondensators.....	27, 70, 163
A3.2.17 Asymptotisches Randfeld.....	27, 71, 163
A3.2.18 Kugelkondensator.....	27, 71, 165
A3.2.19 Homogen polarisierte Kugel.....	27, 71, 165
A3.2.20 Grundtypen.....	27, 71, 166
A3.2.21 Kegelspitze auf Platte.....	28, 71, 167
A3.2.22 Kugelschale im ursprünglich homogenen elektrischen Feld.....	28, 71, 168
A3.2.23 Influienziertes elektrisches Moment.....	28, 71, 170
A3.2.24 Dielektrischer Einschluß.....	28, 71, 171
A3.2.25 Dipol im Hohlraum eines Dielektrikums.....	29, 71, 172
A3.2.26 Ein drehsymmetrisches Quadrupolfeld.....	29, 71, 173
3.3 Relaxation und Konvektion elektrischer Ladung	
A3.3.1 Punktuelle Ladungsinjektion.....	31, 73, 175
A3.3.2 Ladungsrelaxation im Kreiszylinder.....	31, 73, 175
A3.3.3 Ladungsrelaxation in Schichtenstruktur.....	31, 73, 176
A3.3.4 Ladungsrelaxation in einem Stab.....	31, 73, 177
A3.3.5 Konvektiver Ladungstransport.....	31, 73, 177
3.4 Stationäre Magnetfelder	
A3.4.1 Leiter mit exzentrischer Bohrung.....	33, 75, 179
A3.4.2 Integralformeln für die magnetische Flußdichte.....	33, 75, 179
A3.4.3 Erweiterung der Spiegelungsmethode für Magnetfelder.....	33, 75, 180
A3.4.4 Energieinhalt.....	34, 75, 182

A3.4.5	Ebenes Strömungsfeld.....	34, 75, 183
A3.4.6	Besondere Darstellung der magnetischen Flußdichte.....	34, 75, 183
A3.4.7	Kräftefreies Magnetfeld.....	34, 75, 184

3.5 Spezielle stationäre Magnetfelder

A3.5.1	Äußerer ebener Quadrupol.....	35, 77, 187
A3.5.2	Schraubenfeld.....	35, 77, 187
A3.5.3	Randwertproblem.....	35, 77, 188
A3.5.4	Flächenströme am Spalt.....	35, 77, 189
A3.5.5	Sinusfeldpole.....	36, 77, 190
A3.5.6	Drehsymmetrisches Strömungsfeld.....	36, 77, 192
A3.5.7	Stromeinspeisung.....	36, 77, 192
A3.5.8	Homogen magnetisierte Kugel.....	36, 77, 193
A3.5.9	Magnetostatische Abschirmung.....	37, 78, 194
A3.5.10	Magnetfeld in einer Bohrung.....	37, 78, 197
A3.5.11	Kugelspule.....	37, 78, 198

4 INDUKTIONERSCHEINUNGEN

4.1 Quasistationäre Felder

4.2 Diffusion magnetischer Felder

A4.2.1	Eindringen des Magnetfeldes in eine Platte.....	39, 79, 199
A4.2.2	Poynting-Satz für dominant magnetische Sinusfelder.....	39, 79, 200
A4.2.3	Wirbelstromverluste in einer Kreisscheibe.....	40, 79, 202
A4.2.4	Flächenkraft.....	40, 79, 203
A4.2.5	Oberflächenimpedanz.....	40, 79, 204
A4.2.6	Frequenzabhängigkeit des Scheinwiderstandes.....	41, 79, 204
A4.2.7	Verluste in Stromschienen.....	41, 79, 205
A4.2.8	Induktionsheizung.....	41, 79, 205
A4.2.9	Maximale Wirbelstromverluste.....	42, 80, 206
A4.2.10	Verluste in einem Nutenleiter.....	42, 80, 206
A4.2.11	Innere Impedanz eines Drahtes.....	42, 80, 208

5 ELEKTROMAGNETISCHE WELLEN

5.1 Grundgleichungen und Potentiale

A5.1.1	Poynting-Satz für Sinusfelder.....	43, 81, 213
A5.1.2	Einschalten eines Punktdipols.....	43, 81, 214
A5.1.3	Strahlungsleistung einer Dipolantenne.....	43, 81, 215
A5.1.4	Strahlungsfeld eines Hertz-Dipols.....	44, 81, 216
A5.1.5	Elektrische Feldstärke eines Dipolstrahlers.....	44, 81, 217
A5.1.6	Antennengewinn.....	44, 81, 217

5.2 Typen von Wellen

A5.2.1	Potentiale im Wellenfeld.....	45, 83, 219
A5.2.2	Gekreuzte ebene Wellen.....	45, 83, 219
A5.2.3	Energieflußdichte.....	45, 83, 220
A5.2.4	Energie und Impuls im ebenen Wellenfeld.....	45, 83, 220
A5.2.5	Feldstärken der Sonnenstrahlung.....	46, 83, 221
A5.2.6	Feldstärke im Rundfunksignal.....	46, 83, 222
A5.2.7	Poynting-Fluß gekreuzter Wellen.....	46, 83, 222
A5.2.8	Oberflächenwelle.....	46, 83, 223
A5.2.9	Vollständige Reflexion.....	47, 83, 223
A5.2.10	Reflexion und Transmission.....	47, 83, 224
A5.2.11	Brechzahlen.....	47, 84, 225
A5.2.12	Wellenimpedanz.....	47, 84, 226
A5.2.13	Eindringtiefe.....	48, 84, 226
A5.2.14	Chirale Medien.....	48, 84, 227
A5.2.15	Dispersion.....	48, 84, 228
A5.2.16	Ionisiertes Gas.....	49, 84, 229
A5.2.17	Rechteck-Hohlleiter.....	49, 84, 230
A5.2.18	Hohlraumresonator.....	49, 84, 231
A5.2.19	Energiefluß für einen TM-Modus.....	50, 84, 233

5.3 Wellen auf Doppelleitungen

A5.3.1	TEM-Wellenimpedanzen.....	51, 85, 235
A5.3.2	Leitungsparameter.....	51, 85, 235
A5.3.3	Ein Leitungsproblem.....	52, 85, 236
A5.3.4	Sprungwelle.....	52, 85, 237
A5.3.5	Übertragener Spannungspuls.....	52, 85, 238
A5.3.6	Reflexionsfreie Anpassung.....	53, 85, 239
A5.3.7	Anpassung durch Querwiderstand.....	53, 85, 240
A5.3.8	Leitungsabzweig.....	53, 85, 241
A5.3.9	Thomson-Kabel.....	53, 85, 241
A5.3.10	Spannungspuls an Thomson-Kabel.....	54, 85, 242
A5.3.11	Gleichstromkabel.....	54, 86, 242
A5.3.12	Leitungsimpedanzen.....	54, 86, 243
A5.3.13	Energiebilanz.....	55, 86, 244
A5.3.14	Leistungsverlauf.....	55, 86, 245
A5.3.15	Drei Leitungsstücke.....	55, 86, 245
A5.3.16	Spannungsüberhöhung.....	55, 86, 246



AUFGABEN



A1.2.1 Elementare Vektoralgebra: In bezug auf eine kartesische Basis sind die drei Vektoren

$$\vec{a} = \vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z, \quad \vec{b} = \vec{e}_x - \vec{e}_y, \quad \vec{c} = \vec{e}_x + 2\vec{e}_y - 2\vec{e}_z$$

gegeben. Berechnen Sie $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} + \vec{c}$, $|\vec{a} - \vec{c}|$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{c}$, den Kosinus des Winkels zwischen \vec{a} und \vec{c} , $\vec{a} \times \vec{b}$, den Sinus des Winkels zwischen \vec{a} und \vec{b} , $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$, $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$.

A1.2.2 Abstand in Kreiszylinderkoordinaten: Wie groß ist der Abstand zwischen den beiden in Kreiszylinderkoordinaten (ρ, α, z) festgelegten Orten $(5m, 3\pi/2, 0)$ und $(5m, \pi/2, 10m)$?

A1.2.3 Richtung in Kreiszylinderkoordinaten: Drücken Sie in Kreiszylinderkoordinaten (ρ, α, z) und den zugehörigen Basisfeldern jenen Einheitsvektor im Punkt $P: (0, 0, h)$ auf der z -Achse aus, der von P zu einem allgemeinen Punkt $Q: (\rho, \alpha, 0)$ in der Ebene $z = 0$ weist.

A1.2.4 Vektorfeld in kartesischen und in Kreiszylinderkoordinaten: Stellen Sie das in kartesischen Koordinaten gegebene Vektorfeld

$$\vec{f}(\vec{r}) = y\vec{e}_x + x\vec{e}_y + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{e}_z$$

in Kreiszylinderkoordinaten dar.

A1.2.5 Tensorfeld in kartesischen und in Kugelkoordinaten: Stellen Sie das in Kugelkoordinaten vorliegende Tensorfeld zweiter Stufe

$$\mathcal{T}(\vec{r}) = r^2 \sin^2(\theta) [\cos(\theta)\vec{e}_r - \sin(\theta)\vec{e}_\theta] \otimes \vec{e}_\alpha$$

in kartesischen Koordinaten dar.

A1.2.6 Richtungsableitung eines Skalarfeldes: Berechnen Sie die Ableitung des Skalarfeldes

$$f(\vec{r}) = K \cdot (3xy^3 + y^2z^2 - z^3x), \quad K = \text{const},$$

im Punkt

$$\vec{r}_0 = (\vec{e}_x + 3\vec{e}_y - 2\vec{e}_z) \text{ cm}$$

in Richtung des Vektors

$$\vec{a} = 3\vec{e}_x + 2\vec{e}_y - \vec{e}_z.$$

A1.2.7 Identitäten: Zeigen Sie durch Ausrechnen in kartesischen Koordinaten die Identitäten

- (i) $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{f} := \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}_x \vec{f}) = 0,$
- (ii) $\operatorname{rot} \operatorname{grad} g := \vec{\nabla}_x (\vec{\nabla} g) = \vec{0},$
- (iii) $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{f} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{f} - \Delta \vec{f}, \quad \vec{\nabla}_x (\vec{\nabla}_x \vec{f}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{f}) - \vec{\nabla}^2 \vec{f}.$

A1.2.8 Ortsvektor: Angenommen, $\vec{r} = r \vec{e}_r$ mit $r = |\vec{r}|$ ist der Ortsvektor in bezug auf irgendeinen festen Punkt und \vec{f} ist ein Vektorfeld. Zeigen Sie die Gültigkeit der Beziehungen

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \vec{r} &= \vec{e}_r, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3, \quad \vec{\nabla}_x \vec{r} = \vec{0}, \quad \vec{\nabla} \vec{e}_r = 2/r, \quad \vec{\nabla}_x \vec{e}_r = \vec{0}, \\ \vec{f} \cdot \vec{\nabla} \vec{e}_r &= \frac{1}{r} \vec{f}_\perp \quad \text{mit} \quad \vec{f}_\perp = \vec{f} - \vec{e}_r \vec{e}_r \cdot \vec{f}. \end{aligned}$$

A1.2.9 Basisvektoren: Berechnen Sie für die orthonormierten Basisvektorfelder der

- (i) kartesischen Koordinaten,
- (ii) Kreiszylinderkoordinaten,
- (iii) Kugelkordinaten

die Divergenz und die Rotation.

A1.2.10 Ebene Bipolarkoordinaten: Ausgehend von den kartesischen Koordinaten (x, y) werden ebene Bipolarkoordinaten (u, β) durch

$$x = x(u, \beta) = \frac{a \sinh(u)}{\cosh(u) + \cos(\beta)},$$

$$y = y(u, \beta) = \frac{a \sin(\beta)}{\cosh(u) + \cos(\beta)}$$

mit einer Länge a und mit $-\infty < u < \infty, -\pi < \beta < \pi$ definiert.

- (i) Skizzieren Sie einige Koordinatenlinien.
- (ii) Berechnen Sie die zugehörigen Basisvektorfelder als normierte Tangentenvektoren an die Koordinatenlinien, ausgedrückt in der kartesischen Basis. Ist diese neue Basis orthonormiert?
- (iii) Rechnen Sie die Entwicklungskoeffizienten eines Vektors bezüglich der alten (kartesischen) Basis in die Entwicklungskoeffizienten bezüglich der neuen Basis um.

A1.2.11 Entwicklungen in kartesischen Koordinaten: Stellen Sie die Felder

$$(i) \vec{\nabla} \{ \vec{\nabla} \cdot [f(z) \vec{r}] \},$$

$$(ii) \vec{r} \times \{ \vec{\nabla} \times [f(z) \vec{r}] \}$$

$$(iii) \vec{r} \times [\vec{r} \times \vec{\nabla} f(z)]$$

in kartesischen Koordinaten dar, wobei \vec{r} den Ortsvektor bezüglich des Ursprungs und $f(z)$ eine Funktion allein der z -Koordinate bedeutet.

A1.2.12 Entwicklung in Kreiszylinderkoordinaten: Beziehlich eines Systems (ϱ, α, z) von Kreiszylinderkoordinaten ist das Skalarfeld

$$f(\varrho, \alpha, z) = z \cos(\alpha)$$

bekannt. Berechnen Sie Entwicklung des Ausdrucks

$$\vec{r} \times \vec{\nabla} \left(\frac{1}{\varrho} f \right)$$

nach den Elementen der zugehörigen, orthonormierten Basis, wobei \vec{r} den Ortsvektor in bezug auf den Ursprung bedeutet.

A1.2.13 Entwicklung in Kugelkoordinaten: Bezuglich eines Systems (r, θ, α) von Kugelkoordinaten ist das Skalarfeld

$$f(r, \theta, \alpha) = r^2 \cos(\theta)$$

bekannt. Berechnen Sie die Entwicklung des Ausdrucks

$$\vec{\nabla}_x [\vec{\nabla}_x (\vec{r} f)]$$

nach den Elementen der zugehörigen, orthonormierten Basis, wobei \vec{r} den Ortsvektor in bezug auf den Ursprung bedeutet.

A1.2.14 Ausschnitt einer Kugel: Berechnen Sie für eine Kugel mit dem Radius a den Flächeninhalt des Streifens $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, $0 \leq \alpha < 2\pi$, wobei θ den Polarwinkel und α den Azimutalwinkel angibt.

A1.2.15 Konservatives Kraftfeld: Untersuchen Sie, für welche Werte des Exponenten n das in Kugelkoordinaten dargestellte Kraftfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = K r^n \vec{e}_r, \quad K = \text{const}, \quad n = \text{const}, \quad r > 0$$

konservativ ist.

A1.2.16 Gradientenfeld: Gegeben ist das Vektorfeld

$$\vec{f}(\vec{r}) = K [(x^2 - y^2) \vec{e}_x - 2xy \vec{e}_y], \quad K = \text{const}.$$

- (i) Untersuchen Sie, ob sich \vec{f} als Gradient eines Skalarfeldes darstellen lässt. Geben Sie ein solches Skalarfeld gegebenenfalls an.
- (ii) Berechnen Sie direkt das Kurvenintegral

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{f} \cdot d\vec{r},$$

wobei \mathcal{C} den einheitlich orientierten Umfang eines Quadrates in der xy -Ebene mit achsenparallelen Seiten und einer Ecke im Ursprung bedeutet.

A1.2.17 Arbeit in einem Kraftfeld: Berechnen Sie die Arbeit, die in dem Kraftfeld (kartesische Koordinaten x, y)

$$\vec{F} = (y \vec{e}_x - x \vec{e}_y) \text{ N/m}$$

der geschlossenen Kurve \mathcal{C} zugeordnet ist, die in der xy -Ebene zuerst entlang der Parabel $y = x^2/a$, $a = 1\text{m}$, vom Punkt $(-1\text{m}, 1\text{m})$ zum Punkt $(2\text{m}, 4\text{m})$ und dann zurück entlang der Geraden $y = x + 2a$ verläuft.

A2.1.1 Polarisationsladungen: Zeigen Sie, daß die fiktive elektrische Gesamtladung eines Körpers immer verschwindet. Denken Sie sich den Körper dazu von einer leeren Schicht umgeben.

A2.1.2 Starr homogen elektrisch polarisierter Kreiszylinder: Ein kreiszylindrischer Körper mit dem Radius a und der Länge ℓ ist starr homogen axial elektrisch polarisiert, nicht aber elektrisch geladen. Dieser ideale Elektret wird im sonst leeren Raum plaziert.

- (i) Geben Sie die zugehörige effektive Ladungsverteilung an.
- (ii) Skizzieren Sie, qualitativ richtig, einige Vektorlinien der elektrischen Polarisation, der elektrischen Feldstärke und der elektrischen Flußdichte in einem Längsschnitt, der die Achse enthält.

A2.1.3 Starr homogen magnetisierter Kreiszylinder: Ein kreiszylindrischer Körper mit dem Radius a und der Länge ℓ ist starr homogen axial magnetisiert, trägt aber keine Leitungsströme. Dieser ideale Dauermagnet wird im sonst leeren Raum plaziert.

- (i) Geben Sie die zugehörige effektive Stromverteilung an.
- (ii) Skizzieren Sie, qualitativ richtig, einige Vektorlinien der Magnetisierung, der magnetischen Flußdichte und der magnetischen Feldstärke in einem Längsschnitt, der die Achse enthält.

A2.1.4 Wahre und fiktive Ladungsdichte: Stellen Sie für ein linear homogen isotropes Dielektrikum der Permittivitätszahl ϵ_r einen Zusammenhang her zwischen der Polarisationsladungsdichte ρ^f und der „wahren“ Ladungsdichte ρ .

A2.1.5 Wahre und fiktive Stromdichte: Stellen Sie für ein linear homogen isotrop magnetisierbares Material der Permeabilitätszahl μ_r einen Zusammenhang her zwischen der (fiktiven) Magnetisierungsstromdichte \vec{J}^f und der (wahren) Leitungsstromdichte \vec{J} . Vernachlässigen Sie dabei Verschiebungsströme.

A2.1.6 Homogen elektrisch polarisierte Kugel: Berechnen Sie die fiktive Ladungsverteilung einer homogen elektrisch polarisierten Kugel in einer nicht elektrisch polarisierbaren Umgebung.

A2.1.7 Homogen magnetisierte Kugel: Berechnen Sie die fiktive Stromverteilung einer homogen magnetisierten Kugel in einer nicht magnetisierbaren Umgebung.

A2.1.8 Inhomogen dielektrische Schicht: Die Permittivität der beidseitig metallisierten, nichtleitenden Schicht aus Abb. A2.1.8 variiert über die Dicke annähernd gemäß

$$\epsilon(x) = \epsilon_1 \frac{a}{x+a}, \quad \epsilon_1 = \text{const.}$$

Zwischen den Metallbelägen liegt die elektrische Spannung U . Berechnen Sie die Verteilungen der wahren, der fiktiven und der effektiven Ladungen in dieser Anordnung.

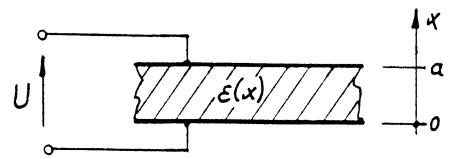


Abb. A 2.1.8

A2.1.9 Inhomogen elektrisch leitfähige Schicht: Die beidseitig metallisierte Schicht aus Abb. A2.1.9 besitzt die konstante Permittivität ϵ und eine relativ kleine elektrische Leitfähigkeit, die über die Dicke annähernd gemäß

$$\gamma(x) = \gamma_0 \frac{a}{x+a}, \quad \gamma_0 = \text{const.},$$

variiert. Zwischen den beiden Metallbelägen liegt die elektrische Gleichspannung U . Geben Sie die zugehörigen Verteilungen der wahren, der fiktiven und der effektiven Ladungen an.

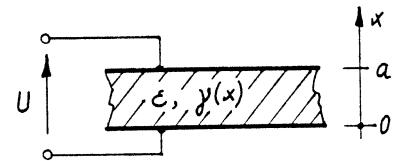


Abb. A 2.1.9

A2.1.10 Dauermagnetplatte: Die parallel zur xy -Ebene weit ausgedehnte Dauermagnetplatte aus Abb. A2.1.10 ist starr gemäß

$$\vec{M} = [-\sin(kx)\vec{e}_x + \cos(kx)\vec{e}_z] M_0$$

magnetisiert, wobei k und M_0 Konstanten sind. Berechnen Sie die zugehörige fiktive Stromverteilung.

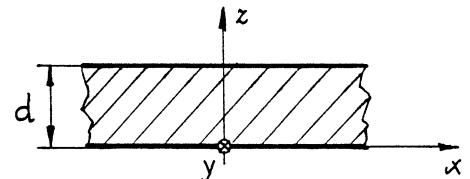


Abb. A 2.1.10

A2.1.11 Dauermagnet: Ein kreiszylindrischer Dauermagnet mit dem Durchmesser $2a$ und der Länge ℓ besitze näherungsweise die Magnetisierung

$$\vec{M} = \left(1 - \frac{\rho}{2a}\right) M_0 \vec{e}_z,$$

wobei die Zylinderachse mit der z -Achse zusammenfällt, ρ die Radialkoordinate bedeutet und $M_0 = \text{const}$ ist. Wie ist der zugehörige fiktive Strom verteilt?

A2.1.12 Anisotropes Dielektrikum: Der Permittivitätstensor eines speziell dielektrisch anisotropen Materials besitze in einer bestimmten kartesischen Basis die Entwicklung

$$\underline{\epsilon} = (2,6 \vec{e}_x \otimes \vec{e}_x + 1,2 \vec{e}_y \otimes \vec{e}_y + 1,7 \vec{e}_z \otimes \vec{e}_z) \epsilon_0 ,$$

wobei ϵ_0 die elektrische Feldkonstante bedeutet. Angenommen, in einem inneren Punkt dieses Materials herrscht die elektrische Feldstärke

$$\vec{E} = E_0 \frac{\vec{e}_x - 4\vec{e}_y + 2\vec{e}_z}{\sqrt{21}} .$$

Berechnen Sie den Winkel, den dieser Vektor mit dem Vektor der elektrischen Flußdichte im selben Punkt einschließt.

A2.1.13 Anisotrop elektrisch leitfähiger Körper: Als einfaches Modell eines transversal isotrop elektrisch leitfähigen Körpers kann eine feine Schichtung abwechselnd unterschiedlich leitfähiger Platten nach Abb. A2.1.13a (Konduktivitäten γ_1 und γ_2 , gleiche Dicken δ) dienen. Berechnen Sie durch Mitteilung (Abbildung auf ein Kontinuumsmodell) den Leitfähigkeitstensor $\underline{\gamma}$ für diesen speziellen anisotropen Körper.

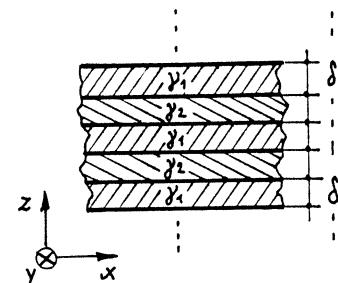


Abb. A 2.1.13a



A2.2.1 Wasserstoffatom: Für ein einzelnes, neutrales Wasserstoffatom lässt sich das mittlere elektrostatische Potential

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-2r/a}}{r} \left(1 + \frac{r}{a}\right)$$

mit der Elementarladung q und dem Bohr-Radius a angeben und daraus die elektrische Feldstärke über $\vec{E} = -\nabla\varphi$ berechnen. Bestimmen Sie die zugehörige Ladungsverteilung und interpretieren Sie das Ergebnis.

A2.2.2 Atomkern: Einem groben, für bestimmte Zwecke geeigneten elektrostatischen Modell eines Atomkerns liegt die Ladungsdichte

$$r < a : \rho = \rho_0 \cdot (1 - r^2/a^2), \quad \rho_0 = 5,11 \cdot 10^{25} \text{ C/m}^3, \quad a = 3,4 \cdot 10^{-15} \text{ m};$$

$$r > a : \rho = 0$$

zugrunde, wobei r die Radialkoordinate bedeutet.

- (i) Wie groß ist die Gesamtladung?
- (ii) Berechnen Sie die elektrische Feldstärke für $r < a$ und für $r > a$. Bei welchem Wert von r tritt der Größtwert des Betrages der Feldstärke auf? Wie groß ist dieser?

A2.2.3 Homogenes Bohrungsfeld: Im Hohlraum eines langen, dickwandigen Kreiszylinders aus hochpermeablem Material (ideal magnetisierbar) soll durch einen Flächenstrom ein homogenes, transversales Magnetfeld der Flußdichte \vec{B} erzeugt werden (Abb. A2.2.3a). Zeigen Sie - ohne Berücksichtigung von axialen Randstörungen - daß dies möglich ist und geben Sie die dafür notwendige Flächenstromdichte \vec{K} an.

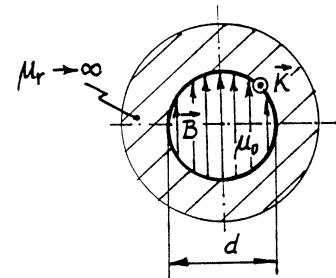


Abb. A 2.2.3a

A2.2.4 Spaltfeld: Untersuchen Sie das folgende Modell nach Abb. A2.2.4. Im leeren Raum zwischen zwei unendlich ausgedehnten, ideal elektrisch leitfähigen Platten herrscht die orts- und zeitabhängige elektrische Feldstärke

$$\vec{E} = E_0 \sin(\pi y/a) \cos(\pi c_0 t/a) \vec{e}_x.$$

c_0 ist die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum. Der übrige Raum ist feldfrei.

- (i) Berechnen Sie $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ und $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$. Läßt sich \vec{E} als negativer Gradient eines Skalarfeldes darstellen?
- (ii) Berechnen Sie die mit \vec{E} verknüpfte magnetische Flußdichte \vec{B} .
- (iii) Geben Sie die Ladungsverteilung und die Stromverteilung auf den Platten an.

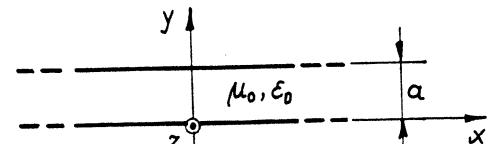


Abb. A 2.2.4

A2.2.5 Elektronenstrahl: Das Kontinuumsmodell eines kreiszylindrischen Elektronenstrahls nach Abb. A2.2.5a mit dem Radius α besitzt die Ladungsdichte

$$r < \alpha : \rho = \rho_0 \cdot (1 - r/\alpha), \quad \rho_0 < 0; \quad r > \alpha : \rho = 0$$

im Laborsystem. Die Elektronengeschwindigkeit ist annähernd konstant gleich $\vec{v} = v_0 \vec{e}_x$ mit $v_0^2 \ll c_0^2$, sodaß nichtrelativistisch gerechnet werden kann. Im speziellen ist dann die Ladungsdichte ρ' im Ruhssystem der Elektronen gleich der Ladungsdichte ρ im Laborsystem. Berechnen Sie die elektrische und die magnetische Feldstärke jeweils direkt

- (i) im Ruhssystem der Elektronen,
- (ii) im Laborsystem.
- (iii) Zeigen Sie, daß die Ergebnisse nach (i) und (ii) mit den Transformationsgleichungen des dominant elektrischen Feldsystems verträglich sind.

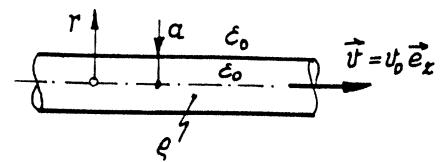


Abb. A2.2.5a

A2.3.1 Sprungbedingung für den Poynting-Vektor: Leiten Sie unter Verwendung der allgemeinen Sprungbedingungen für die elektrische und die magnetische Feldstärke \vec{E} bzw. \vec{H} die Sprungbedingung

$$[\![S_n]\!] = - \vec{K} \cdot \langle \vec{E} \rangle = - \vec{K} \cdot \vec{E}^\pm$$

für die Normalenprojektion S_n des Poynting-Vektors an einer ruhenden Fläche ab, die mit einem Flächenstrom der Dichte \vec{K} belegt ist. Dabei bedeuten, wie üblich,

$$[\![F]\!] = F^+ - F^-, \quad \langle F \rangle = \frac{1}{2}(F^+ + F^-)$$

den Sprung und den Mittelwert einer Größe F an der Fläche, und es gilt

$$[\![FG]\!] = [\![F]\!] \langle G \rangle + \langle F \rangle [\![G]\!].$$

Wie ist diese Sprungbedingung für den Poynting-Vektor im Hinblick auf die Energiebilanz zu interpretieren?

A2.3.2 Bewegter Kurzschlußbügel: Mit Hilfe des dominant magnetischen Feldsystems soll folgende Anordnung nach Abb. A2.3.2a untersucht werden. Zwischen den beiden Platten wird ein Kurzschlußbügel mit konstanter Geschwindigkeit verschoben. Platten und Bügel sind als ideal elektrisch leitfähig anzunehmen, die Randstörungen sind zu vernachlässigen. Eine Gleichspannungsquelle liefert über den Widerstand R den Strom I .

- (i) Berechnen Sie die magnetische Flußdichte und die elektrische Feldstärke im ganzen Raum zwischen den Platten.
- (ii) Wie groß ist die Anschlußspannung U und welchen Wert zeigt das Voltmeter am anderen Ende?
- (iii) Wie groß ist die resultierende, vom magnetischen Feld auf den Bügel ausgeübte Kraft?
- (iv) Berechnen Sie die über den elektrischen Anschluß zugeführte Leistung und vergleichen Sie diese mit der Zunahmerate der Feldenergie. Wodurch kommt der Unterschied zu stande?

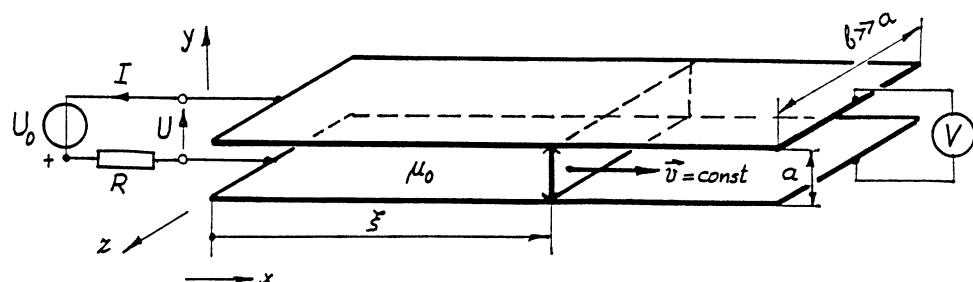


Abb.A 2.3.2 a

A2.3.3 Poynting-Fluß in einem Leiter: Ein kreiszylindrischer Leiter (Draht mit Kreisquerschnitt) mit dem Radius α und der elektrischen Leitfähigkeit γ wird axial von einem elektrischen Strom I gleichförmig durchflossen. Berechnen Sie den Poynting-Vektor im Leiterinneren und interpretieren Sie das Ergebnis.

A2.3.4 Elektromagnetischer Impulsfluß: Ein kreiszylindrischer Bereich $0 \leq \rho \leq \alpha$ nach Abb. A2.3.4a wird axial gleichförmig von einem elektrischen Strom I durchflossen. Berechnen Sie die zum dominant magnetischen Feldsystem gehörende Impulsflußdichte für $\rho \leq \alpha$ und für $\rho > \alpha$.

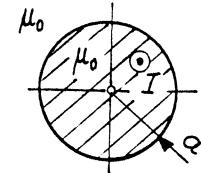


Abb. A 2.3.4a

A2.3.5 Energiefluß in einer dünnwandigen Kreiszylinder-spule: Eine lange, dünnwandige Kreiszylinder-spule nach Abb. A2.3.5 besitzt die längenbezogene Windungszahl N' und ist von einem zeitlich veränderlichen Strom $I(t)$ durchflossen. Das elektromagnetische Feld kann als quasi-stationär (dominant magnetisch) betrachtet werden.

- Berechnen Sie den Poynting-Vektor an der Innenwand der Spule.
- Wie ist dieses Ergebnis im Hinblick auf die Energiebilanz zu interpretieren?

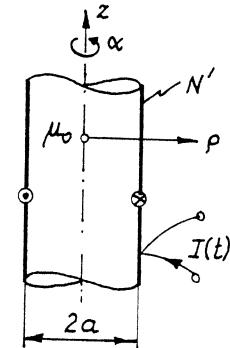


Abb. A 2.3.5

A2.3.6 Kräfte in einer dünnwandigen Zylinderspule: Berechnen Sie den Impulsfluß im Inneren einer schlanken, dünnwandigen Zylinderspule und daraus die Flächenkraftverteilung am Spulenmantel. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Flächenkraftdichte, direkt berechnet aus der magnetischen Flußdichte und der Flächenstromdichte.

A2.3.7 Kraft und Drehmoment an einem elektrischen Punkt-dipol: An einem Dipol mit dem elektrischen Moment \vec{p} greifen in einem Fremdfeld \vec{E} die Kraft und das Drehmoment

$$\vec{F} = \vec{p} \cdot \nabla \vec{E}, \quad \vec{T} = \vec{p} \times \vec{E}$$

an. Berechnen Sie damit \vec{F} und \vec{T} an einem solchen Dipol in einem Coulomb-Feld und diskutieren Sie deren Lageabhängigkeit.

A2.3.8 Kraft und Drehmoment an einem magnetischen Punktdipol:

An einem magnetischen Punktdipol mit dem magnetischen Moment \vec{m} , der als Modell für eine kleine Spule dienen kann ($\vec{m} \approx \Theta A \vec{n}$), greifen in einem Fremdfeld \vec{B} die Kraft und das Drehmoment

$$\vec{F} = (\vec{m} \times \vec{B}) \times \vec{B}, \quad \vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}$$

an. Berechnen Sie damit \vec{F} und \vec{T} an einem solchen Dipol im Feld eines geraden Linienleiters und diskutieren Sie deren Lageabhängigkeit.

A2.3.9 Parallele Linienleiter: Zwei lange, gerade Linienleiter verlaufen parallel im sonst leeren Raum (Abb. A2.3.9a). Berechnen Sie die längenbezogene Kraft auf den Leiter 1 durch Integration der Maxwell-Spannungen.

A2.3.10 Parallele Leiter mit Kreisquerschnitt: Zwei Aluminiumleiter mit Kreisquerschnitt verlaufen parallel zueinander im sonst leeren Raum (Abb. A2.3.10a) und führen die elektrischen Ströme I_1 bzw. I_2 , die sich gleichförmig über die jeweiligen Querschnitte verteilen (keine Stromverdrängung). Die Durchmesser d_1 und d_2 können nicht als klein gegenüber dem Achsabstand a vorausgesetzt werden. Zeigen Sie ohne viel zu rechnen, daß die längenbezogene Anziehungskraft trotzdem durch

$$F' = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2 \pi a},$$

d.h. wie für Linienleiter im Achsabstand gegeben ist.

A2.3.11 Kraft zwischen zwei Halbkugeln: Zwei metallene Halbkugeln in Luft mit dem Radius $a = 10 \text{ cm}$ werden aneinandergelegt (Abb. A2.3.11a) und dann so geladen, daß an der Kugeloberfläche eine elektrische Feldstärke des konstanten Betrages $E_0 = 20 \text{ kV/cm}$ entsteht. Berechnen Sie die Kraft, mit der die beiden Halbkugeln einander abstoßen.

A2.3.12 Kraft zwischen zwei Metallplatten: Zwei in der Ebene $z=0$ eines kartesischen Koordinatensystems liegende Metallplatten (Abb. A2.3.12a), zwischen denen die elektrische Spannung U besteht, bilden einen parallel zur y -Achse verlaufenden Spalt. Die Feldberechnung liefert für die Feldstärke an der Symmetrieebene $x=0$ den Ausdruck

$$\vec{E} = \frac{U}{\pi \sqrt{a^2 + z^2}} \hat{e}_x.$$

Berechnen Sie damit die längenbezogene Kraft, die die rechte Platte auf die linke ausübt.

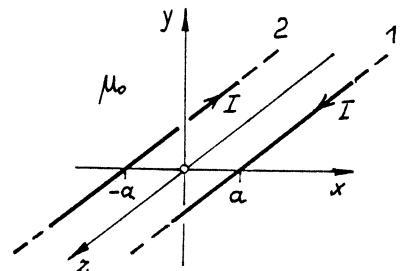


Abb. A 2.3.9a

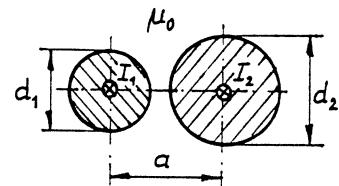


Abb. A 2.3.10a

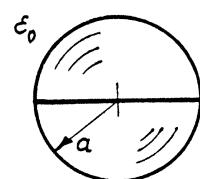


Abb. A 2.3.11a

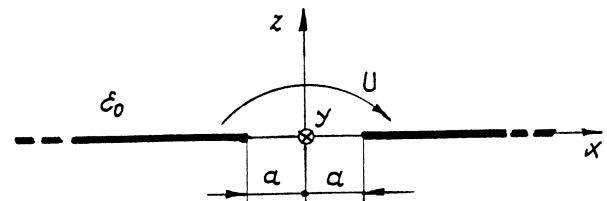


Abb. A 2.3.12a

A2.3.13 Kraft zwischen Stromschienen: In der Umgebung des Strombandes aus Abb. A2.3.13a, das im sonst leeren Raum verläuft, stellt sich die magnetische Flußdichte

$$\vec{B}(\rho) = \frac{\mu_0 K}{2\pi} \left[\ln\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \vec{e}_x + \alpha \vec{e}_y \right]$$

ein. Berechnen Sie damit - am einfachsten durch Integration der Lorentz-Kraftdichte - die längenbezogene resultierende Kraft, die in der Anordnung zweier gegensinnig gleichstromdurchflossener Schienen aus Abb. A2.3.13b von der unteren auf die obere Schiene ausgeübt wird.

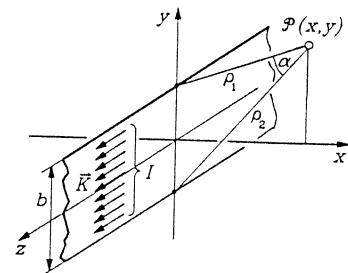


Abb. A 2.3.13 a

A2.3.14 Kraft an abgeschrägtem Zylinder: Ein Magnetsystem enthält nach Abb. A2.3.14a zwischen den festen Teilen 1 und 3 ein axial verschiebbares (durch eine nicht magnetisierbare Hülse geführtes), einseitig abgeschrägtes Teil 2. Der Pfad führt den magnetischen Fluß Φ . Berechnen Sie unter Vernachlässigung von Streuungen die axiale Komponente der resultierenden Kraft, die an dem verschiebbaren Teil angreift.

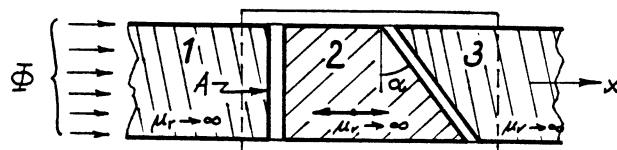


Abb. A 2.3.14 a

A2.3.15 Haftkraft: An den beiden Stirnflächen des gebogenen, hochpermeablen Teils aus Abb. A2.3.15a sind starr magnetisierte Dauermagnetplättchen der Remanenzflußdichte $B_r = \mu_0 M = 0,9 \text{ T}$ befestigt. Dieser „Hufeisenmagnet“ wird auf einen ebenfalls hochpermeablen Körper eben aufgesetzt. Wie groß ist die Haftkraft? Vernachlässigen Sie Streuungen.

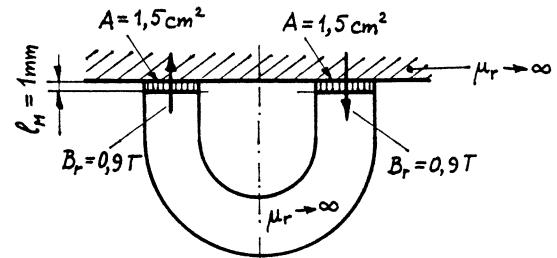


Abb. A 2.3.15 a

A2.3.16 Kraft an einem Drehteil: Ein Magnetsystem nach Abb. A2.3.16a (Maße in mm) enthält einen Körper K, der aus einem konischen Drehteil und einer transversal starr magnetisierten Dauermagnetscheibe mit der Remanenzflußdichte $\mu_0 M = 0,9 \text{ T}$ besteht. Nehmen Sie - abgesehen von den Luftspalten und der Dauermagnetscheibe - den magnetischen Kreis als ideal permeabel an und berechnen Sie die resultierende Kraft an K nach Betrag und Richtung. Vernachlässigen Sie Streuungen.

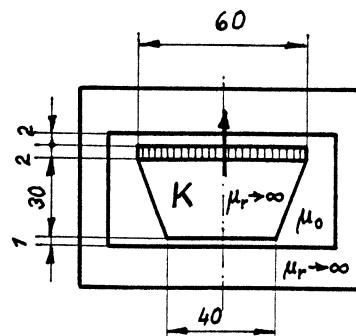


Abb. A 2.3.16 a

A2.3.17 Hubmagnet: Berechnen Sie näherungsweise die Haftkraft des in Abb. A2.3.17a (Längenmaße in mm) skizzierten, drehsymmetrischen Gleichstrom-Hubmagneten.

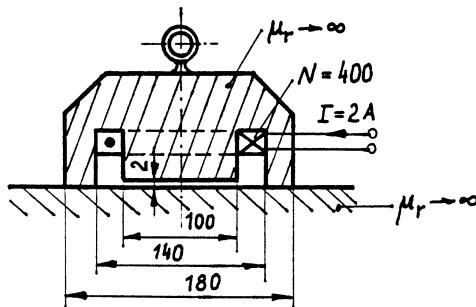


Abb. A 2.3.17 a

A2.3.18 Kraft auf Teil eines Magnetkreises: Berechnen Sie die resultierende Kraft nach Betrag und Richtung, die in dem magnetischen Kreis nach Abb. A2.3.18a (Längenmaße in mm) auf den Schenkel S ausgeübt wird. Vernachlässigen Sie Streuungen.

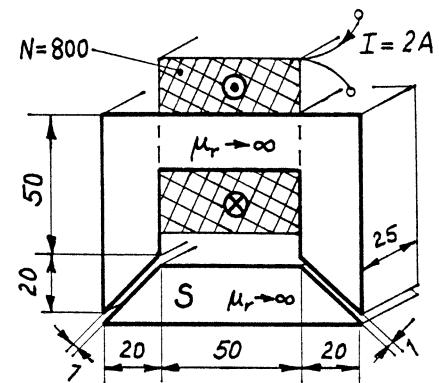


Abb. A 2.3.18 a

A2.3.19 Kraft an Zylindersektor: Im Innenraum eines dickwandigen, hochpermeablen Kreiszylinders nach Abb. A2.3.19a wird durch die Flächenstromverteilung

$$\vec{K}(\alpha) = -2 \frac{kA}{cm} \cos(\alpha) \vec{e}_z$$

ein annähernd homogenes Magnetfeld erzeugt. Berechnen Sie die längenbezogene, resultierende Kraft auf den durch schmale Trennfugen separierten Teil des Zylinders (einschließlich des Flächenstroms) im ersten Quadranten.

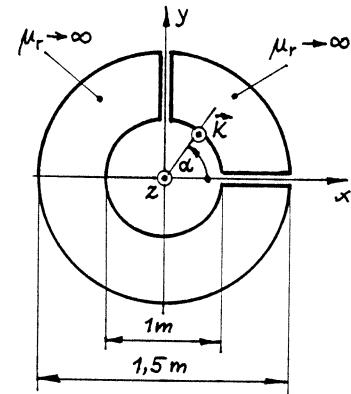


Abb. A 2.3.19 a



A3.1.1 Geladene Vollkugel mit Hohlraum: Ein kugelförmiger Bereich mit dem Radius a ist gleichförmig mit der Ladungsdichte ρ elektrisch geladen. Ausgenommen ist ein leerer, exzentrisch angeordneter, kugelförmiger Hohlraum mit dem Radius b nach Abb. A3.1.1a. Berechnen Sie das Vektorfeld der elektrischen Feldstärke im Hohlraum.

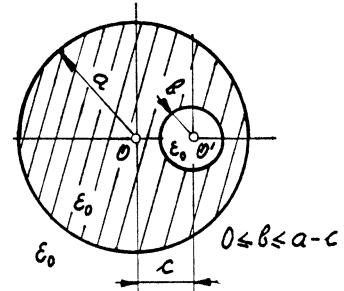


Abb. A 3.1.1a

A3.1.2 Integralformeln für die elektrische Feldstärke: Angenommen, $\rho(\vec{r})$ beschreibt eine (quasi-) elektrostatische Ladungsverteilung im sonst leeren Raum. Dann gilt bekanntlich für die elektrische Feldstärke

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{R}}{R^3} \rho(\vec{r}') dV', \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' \quad (1)$$

Für manche Zwecke ist die unter bestimmten Voraussetzungen äquivalente Form

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\nabla' \rho(\vec{r}')}{R} dV' \quad (2)$$

bequemer. Zeigen Sie, daß sich (2) aus (1) ableiten läßt. Welche Voraussetzungen über die Raumladungsverteilung müssen Sie dabei treffen?

A3.1.3 Erweiterung der elektrostatischen Spiegelungsme-
thode: In der Modellanordnung nach Abb. A3.1.3a ist der Halbraum $z > 0$ mit einem Medium der Permittivität ϵ_1 ausgefüllt und enthält eine Punktladung Q . Der Halbraum $z < 0$ besteht aus einem Körper der Permittivität ϵ_2 .

- (i) Zeigen Sie, daß sich das zugehörige elektrostatische Feld nach dem folgenden Verfahren berechnen läßt:
 - Das Feld im Bereich $z > 0$ ergibt sich nach Abb. A3.1.3b durch Plazierung einer Punktladung Q bei $z = d$ und einer zweiten Punktladung Q' bei $z = -d$, wobei im ganzen Raum die einheitliche Permittivität ϵ_1 besteht.
 - Das Feld im Bereich $z < 0$ ergibt sich nach Abb. A3.1.3c als das Feld einer Punktladung Q'' bei $z = -d$, wobei im ganzen Raum die einheitliche Permittivität ϵ_2 angenommen wird.
 - Durch passende Wahl von Q' und Q'' lassen sich die Sprungbedingungen an der Ebene $z = 0$ erfüllen.
- (ii) Skizzieren Sie Vektorlinien der elektrischen Flußdichte für die beiden Fälle $\epsilon_2 > \epsilon_1$ und $\epsilon_2 < \epsilon_1$.

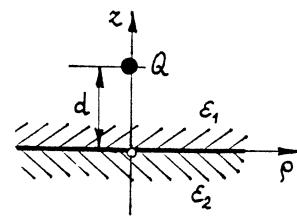


Abb. A 3.1.3a

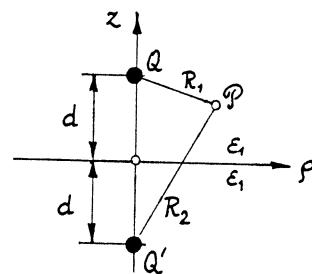


Abb. A 3.1.3b

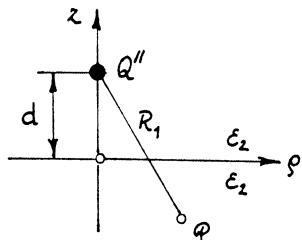


Abb. A 3.1.3c

A3.1.4 Poisson-Integral für ebene Felder: Bei einem ebenen elektrostatischen Problem ist das Skalarpotential φ an einer Kreislinie mit dem Radius a in der repräsentativen Feldebene bekannt. Geben Sie von der Reihenlösung der Laplace-Gleichung in ebenen Polarkoordinaten (ρ, α) aus,

$$\begin{aligned}\varphi(\rho, \alpha) = & A_0 + B_0 \ln(a/\rho) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n [A_n \cos(n\alpha) + B_n \sin(n\alpha)] + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{-n} [C_n \cos(n\alpha) + D_n \sin(n\alpha)],\end{aligned}$$

und leiten Sie daraus die Poisson-Integrale

$$0 < \rho < a: \quad \varphi(\rho, \alpha) = \frac{a^2 - \rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(a, \alpha') d\alpha'}{a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos(\alpha - \alpha')} ,$$

$$\rho > a: \quad \varphi(\rho, \alpha) = B_0 \ln(a/\rho) + \frac{\rho^2 - a^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(a, \alpha') d\alpha'}{a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos(\alpha - \alpha')}$$

für den Innenraum bzw. den Außenraum ab.

A3.1.5 Geteilter Hohlzylinder: Ein dickwandiger, langer Metall-Kreiszylinder ist durch einen Längsschnitt mit schmalen Spalten geteilt (Abb. A3.1.5a). Zwischen den beiden Hälften liegt die Gleichspannung U . Die Anordnung ist insgesamt ungeladen. Berechnen Sie mit Hilfe der Poisson-Integrale aus Aufgabe 3.1.4 das elektrostatische Potential im Innenraum und im Außenraum und geben Sie die Dichten der zugehörigen Flächenladungen an.

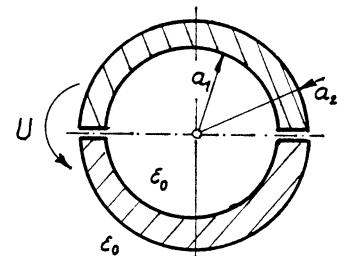


Abb. A3.1.5a

A3.1.6 Dünnwandiger Metallzylinder: Ein langes, dünnwandiges, kreiszylindrisches Metallrohr ist gemäß Abb. A3.1.6a geteilt. Ein Teil ist geerdet, Potential $\varphi = 0$, der andere trägt das Potential $\varphi = U$.

- (i) Berechnen Sie mit Hilfe des Poisson-Integrals aus Aufgabe 3.1.4 das Potential im Innenraum.
- (ii) Berechnen und zeichnen Sie den Verlauf der elektrischen Feldstärke am Innenrand als Funktion der Winkelkoordinate.

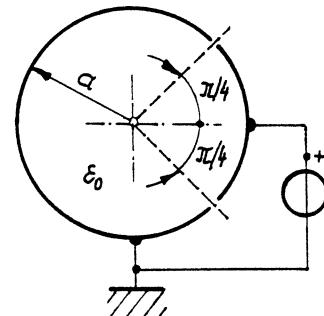


Abb. A3.1.6a

A3.1.7 Ein Dirichlet-Problem für den Halbraum: Sie haben die Aufgabe, ein spezielles Potentialproblem für den leeren Halbraum $z > 0$ mit Dirichlet-Daten an der Ebene $z = 0$ zu untersuchen.

- (i) Geben Sie zuerst, etwa über die Spiegelungsmethode, eine passende Green-Funktion an.
- (ii) Das Potential φ ist bei $z = 0$ in Keiszylinderkoordinaten (ρ, α, z) für die Bereiche $\rho < \alpha$ und $\rho > \alpha$ festgelegt,

$$\rho < \alpha : \varphi = U = \text{const} ; \quad \rho > \alpha : \varphi = 0 .$$

Leiten Sie eine Integralformel für das Potential in einem allgemeinen Punkt ab.

- (iii) Bestimmen Sie daraus speziell den Potentialverlauf entlang der z -Achse.
- (iv) Sei $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ der Abstand vom Ursprung. Geben Sie die ersten Glieder einer für $r^2 \gg \alpha^2$ gültigen, asymptotischen Entwicklung von φ als Potenzreihe in α/r an, deren Koeffizienten i.a. von ρ , nicht aber von z abhängen.



A3.2.1 Randfeldstärke: Ein elektrostatisches Feldproblem wird auf folgende einfache Aufgabe reduziert. Am Rand $y = 0$ des leeren Halbraumes $y > 0$ ist die elektrische Spannungsverteilung gemäß Abb. A3.2.1a über das Skalarpotential mit Konstanten U_0 und α vorgeschrieben. Berechnen Sie daraus die elektrische Randfeldstärke bei $y = 0+$. Wie ist das Ergebnis anschaulich zu interpretieren?

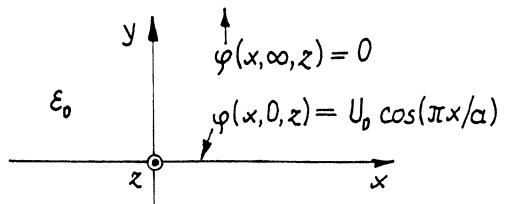


Abb. A 3.2.1a

A3.2.2 Ebenes Dirichlet-Problem für einen Spalt: Am Rand eines ebenen Spaltes zwischen zwei Metallkörpern nach Abb. A3.2.2a ist das elektrostatische Potential gemäß

$$\begin{aligned} x = 0 : \quad \varphi &= U_0 \cos(\pi y / \alpha), \\ y = \pm \alpha/2 : \quad \varphi &= 0 \end{aligned}$$

vorgeschrieben.

- (i) Berechnen Sie die zugehörige elektrische Feldstärke im ganzen Bereich $x > 0$, $|y| < \alpha/2$.
- (ii) Skizzieren Sie dazu elektrische Feldstarkelinien.

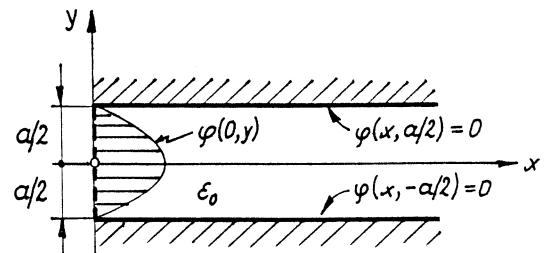


Abb. A 3.2.2a

A3.2.3 Ebenes Dirichlet-Problem für eine Nut: Als Teilaufgabe bei der Behandlung eines ebenen elektrostatischen Feldproblems ist für die Anordnung Abb. A3.2.3a

- (i) das Skalarpotential φ im Bereich $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ aus den angegebenen Randwerten zu bestimmen.
- (ii) Berechnen Sie daraus und diskutieren Sie den Verlauf der zugehörigen Randfeldstärke.

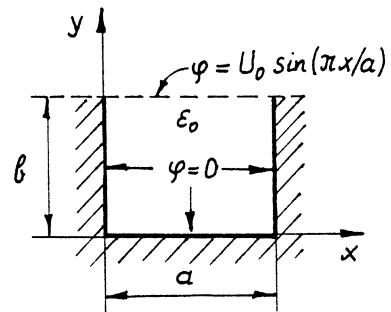


Abb. A 3.2.3a

A3.2.4 Halbraum mit periodischem Randpotential: Bei dem ebenen elektrostatischen Problem nach Abb. A3.2.4a lässt sich das an der Randebene $y = 0$ vorgeschriebene, abschnittsweise konstante Skalarpotential als Fourier-Reihe

$$\varphi(x, 0) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4U}{n\pi} \sin(n\pi x / a)$$

darstellen.

- (i) Geben Sie das Potential $\varphi(x, y)$ für $y > 0$ als Reihe an.
- (ii) Summieren Sie diese Reihe mit Hilfe der Beziehung

$$\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} z^n = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right), \quad z \in \mathbb{C}, \quad |z| < 1,$$

zu einem geschlossenen Ausdruck.

- (iii) Zeichnen Sie den Verlauf des Potentials an der Ebene $y = a$ als Funktion der x -Koordinate.

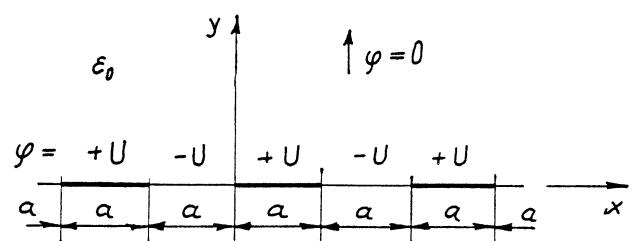


Abb. A 3.2.4a

A3.2.5 Stromdurchflossene Platte: An einer dünnen, rechteckigen, leitfähigen Platte (Dicke δ , Seitenlängen a und b , Leitfähigkeit γ) werden zwei benachbarte Seiten auf dem Potential Null gehalten. An den beiden anderen Seiten nimmt das Potential von Null linear bis zum Wert U in der gemeinsamen Ecke zu.

- (i) Berechnen Sie das stationäre elektrische Strömungsfeld in der Platte. Variationen über die Plattendicke sind dabei vernachlässigbar.
- (ii) Skizzieren Sie das System der zugehörigen Stromdichtelinien.

A3.2.6 Potential in einem Würfel: In einem leeren Würfel $|x| \leq a/2, |y| \leq a/2, |z| \leq a/2$ werden die beiden Seitenflächen $z = \pm a/2$ auf dem Potential $\varphi = U$, die restlichen vier Seitenflächen auf dem Potential $\varphi = 0$ gehalten.

- (i) Geben Sie eine Reihenlösung der Laplace-Gleichung für das Potential in einem allgemeinen Punkt innerhalb des Würfels an.
- (ii) Berechnen Sie durch Auswerten einiger Reihenglieder den Wert des Potentials im Würfelmittelpunkt. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Mittelwert des Potentials der Seitenflächen.

A3.2.7 Additive Separationslösung: Zeigen Sie, daß die Laplace-Gleichung in kartesischen Koordinaten auch additive Separationslösungen der Art

$$\varphi(x, y, z) = F_1(x) + F_2(y) + F_3(z)$$

besitzt. Bestimmen Sie die allgemeine Form solch einer Lösung, d.h. geben Sie die allgemeinste Form der Funktionen F_1 , F_2 und F_3 an.

A3.2.8: Koaxialkabel mit radial inhomogenem Dielektrikum: Der Feldraum eines Koaxialkabels mit dem Innenradius a und dem Außenradius b ist mit einem Dielektrikum ausgefüllt, dessen Permittivität von der Radialkoordinate angenähert gemäß

$$\epsilon(\rho) = \epsilon_1 + (\epsilon_2 - \epsilon_1) \frac{\rho-a}{b-a} ; \quad a < \rho < b; \quad \epsilon_1 \text{ und } \epsilon_2 \text{ konstant}$$

abhängt. Berechnen Sie den Kapazitätsbelag solch eines Kabels.

A3.2.9 Ein inneres und ein äußeres Dirichlet-Problem: An einem Kreiszylinder mit dem Radius α nach Abb. A3.2.9a ist das elektrostatische Skalarpotential

$$\varphi(a, \alpha) = \varphi_0 \sin(n\alpha), \quad n \in \mathbb{N},$$

vorgeschrieben. Bestimmen Sie

- (i) für den leeren Innenraum $0 \leq \rho < a$,
- (ii) für den leeren Außenraum $\rho > \alpha$

das Potential $\varphi(\rho, \alpha)$ und die zugehörige elektrische Feldstärke $\vec{E}(\rho, \alpha)$. Skizzieren Sie jeweils Potentiallinien und Feldstarkelinien für den Fall $n = 3$.

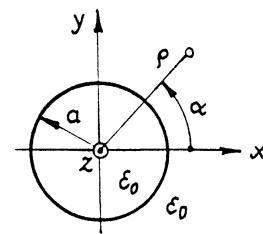


Abb. A 3.2.9 a

A3.2.10 Dickwandiger Kreiszylinder: Ein dielektrischer Kreiszylinder mit konzentrischer Bohrung (Abb. A3.2.10) ist außen metallisiert und geerdet, während am Innenrand das Potential winkelabhängig gemäß

$$\varphi(a, \alpha) = U_0 \cos(n\alpha), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

vorgeschrieben ist.

- (i) Berechnen Sie die elektrische Feldstärke innen am äußeren Metallbelag ohne Berücksichtigung der axialen Ränder.
- (ii) Wo tritt im Feldraum der Größtwert des Feldstärkebetrages auf? Wie groß ist dieser?

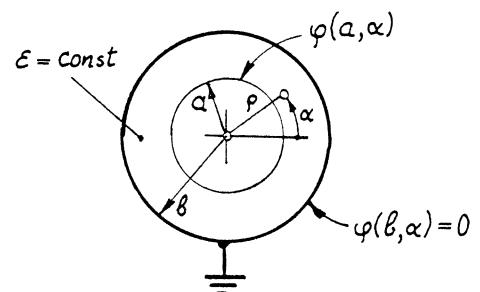


Abb. A 3.2.10

A3.2.11 Dielektrischer Hohlzylinder im Transversalfeld:

Ein relativ langer, dickwandiger Kreiszylinder aus dielektrischem Material konstanter Permittivität liegt in einem transversalen, asymptotisch homogenen elektrischen Feld (Abb. A3.2.11a).

- (i) Berechnen Sie das elektrostatische Potential und die elektrische Feldstärke im ganzen Raum ohne Berücksichtigung der axialen Randeffekte.
- (ii) Skizzieren Sie zugehörige Flußdichtelinien.
- (iii) Diskutieren Sie Grenzfälle betreffend die Radien und die Permittivität.

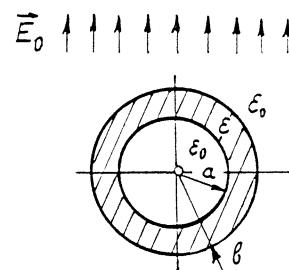


Abb. A 3.2.11 a

A3.2.12 Kantenfeld: In der näheren Umgebung der Kante einer Metallplatte (Abb. A3.2.12a) bildet sich ein elektrostatisches Feld mit dem Skalarpotential

$$\varphi(\rho, \alpha) = -U \sqrt{\rho/a} \cos(\alpha/2)$$

aus. Berechnen und zeichnen Sie den Verlauf der Flächenladungsdichte auf der Platte als Funktion des Randabstandes. Wie groß ist - bezogen auf die Länge senkrecht zur Zeichenebene - die elektrische Ladung in einem Randstreifen der Breite α ?

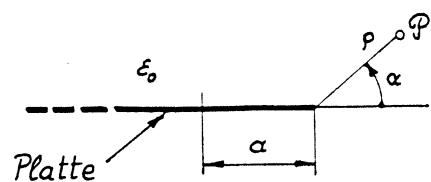


Abb. A 3.2.12 a

A3.2.13 Widerstand: Abb. A3.2.13a zeigt ein resistives Baulement. Dabei umgibt ein Metallrohr einen isolierenden Trägerstab, der am Mantel mit einer dünnen Schicht aus Widerstandsma- terial belegt ist. Die Widerstandsschicht besitzt die Flächenleit- fähigkeit γ_s (Flächenstromdichte $K_z = \gamma_s E_z$), der Widerstand des Metallrohrs ist vernachlässigbar.

Untersuchen Sie die quasi-statischen elektrischen und magnetischen Felder im Bereich $0 \leq z < l$, $a < \rho < b$ unter der Annahme, daß das Element von einem Strom der Stärke I durchflossen ist:

- (i) Zeigen Sie zuerst, daß

$$\varphi(\rho, z) = (C_1 + C_2 z) \ln(C_3/\rho)$$

die Potentialgleichung löst (Randstörungen bei $z = l$ ver- nachlässigt). Berechnen Sie daraus allgemein die elektrische Feldstärke und bestimmen Sie die Konstanten C_1, C_2, C_3 .

- (ii) Berechnen Sie die magnetische Feldstärke.
 (iii) Geben Sie schließlich das Feld des Poynting-Vektors an. Skizzieren Sie zugehörige Vektorlinien.

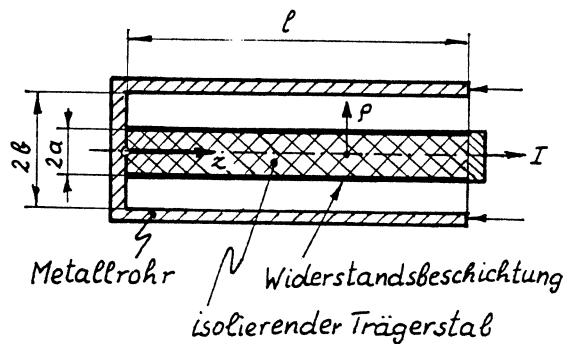
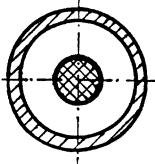
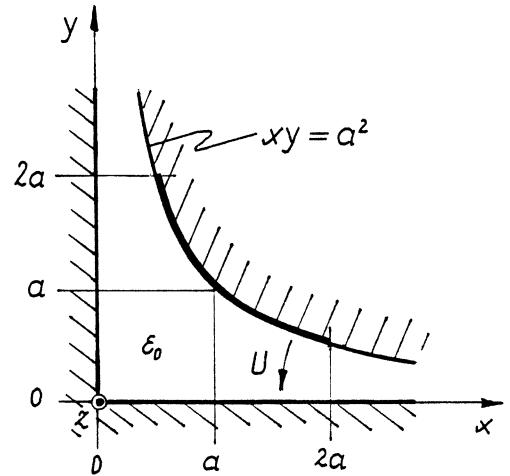


Abb. A 3.2.13 a

A3.2.14 Elektrostatische Potentiale: Geben Sie für das ebene elektrische Feld

$$\vec{E} = \frac{E_0}{a^2} [(x^2 - y^2) \hat{e}_x - 2xy \hat{e}_y]$$

- (i) ein Skalarpotential,
 (ii) ein Vektorpotential an.
 (iii) Zeichnen Sie damit ein quantitativ richtiges Feldbild (Potentiallinien und Feldlinien).



A3.2.15 Elektrischer Fluß: Abb. A3.2.15 zeigt den Querschnitt durch eine zylindrische Struktur, bei der zwei Metallelektroden - die eine mit gleichseitig hyperbolischer Kontur, die andere eine rechtwinkelige Ecke bildend - einander gegenüberstehen. Berechnen Sie den elektrischen Fluß bezogen auf die Länge in z -Richtung, der an dem stark ausgezogenen Teil der hyperbolischen Kontur austritt, wenn zwischen den Elektroden die Spannung U liegt. Wie groß ist der zugehörige Kapazitätsbelag?

Abb. A 3.2.15

A3.2.16 Randfeld eines Plattenkondensators: J. Clerk Maxwell hat für das elektrostatische Feld zweier paralleler, leitender Halbebenen nach Abb. A3.2.16 eine Lösung angegeben, die sich mit dem Skalarpotential φ und dem Vektorpotential $\vec{V} = V \vec{e}_z$ in parametrischer Form (Parameter u, v) als

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{U}{2\pi} u \\ V &= \frac{\epsilon_0 U}{2\pi} v \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} x &= \frac{a}{2\pi} [1 + v + e^v \cos(u)] \\ y &= \frac{a}{2\pi} [u + e^v \sin(u)] \end{aligned} \right\}$$

darstellen lässt. Berechnen Sie daraus die elektrische Feldstärke an der z -Achse.

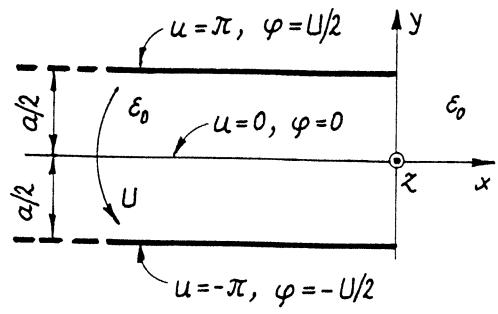


Abb. A 3.2.16

A3.2.17 Asymptotisches Randfeld: Für die Untersuchung des elektrostatischen Feldes in der Umgebung des geraden Randes eines Plattenkondensators nach Abb. A3.2.17a wird das in Abb. A3.2.17b skizzierte Modell der Doppelschicht verwendet. Setzen Sie die Unabhängigkeit von der z -Koordinate voraus und berechnen Sie, am besten in Kreiszylinderkoordinaten mit $-\pi < \alpha < \pi$,

- (i) das elektrostatische Skalarpotential und die elektrische Feldstärke,
- (ii) das elektrostatische Vektorpotential (Flußfunktion).
- (iii) Zeichnen Sie Potentiallinien und Feldlinien in der xy -Ebene.

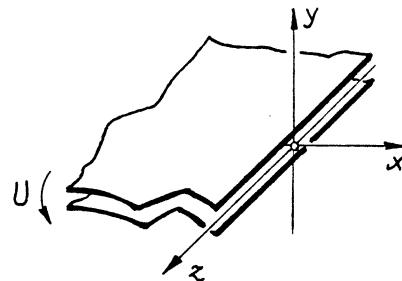


Abb. A 3.2.17a

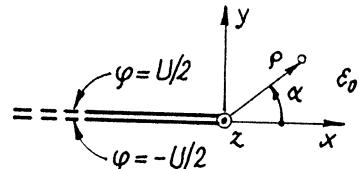


Abb. A 3.2.17b

A3.2.18 Kugelkondensator: Berechnen Sie allgemein die Kapazität eines Kugelkondensators mit einem Dielektrikum, dessen Permittivität von den Kugelkoordinaten θ und α , nicht aber von der Radialkoordinate r abhängt.

A3.2.19 Homogen polarisierte Kugel: Eine homogen elektrisch starr polarisierte, ladungsfreie Kugel ist nach dem Modell in Abb. A3.2.19a von einer geschlossenen Metallschale umgeben. Berechnen Sie das zugehörige elektrische Feld (Feldstärke und Flußdichte) und die sich einstellende, wahre Ladungsverteilung.

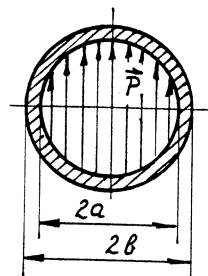


Abb. A 3.2.19a

A3.2.20 Grundtypen: Das elektrostatische Potential innerhalb und außerhalb einer Kugel mit dem Radius a ist durch

$$\varphi(r, \theta) = \begin{cases} U \cdot (r/a) \cos(\theta), & r \leq a, \\ U \cdot (a/r)^2 \cos(\theta), & r \geq a, \end{cases} \quad U = \text{const.}$$

gegeben, wobei r und θ Kugelkoordinaten bedeuten.

- (i) Berechnen Sie die elektrische Feldstärke. Aus welchen Grundtypen ist dieses elektrische Feld aufgebaut?
- (ii) Welche effektive Ladungsverteilung gehört zu diesem Feld?

A3.2.21 Kegelspitze auf Platte: Ein metallener Kreiskegel steht nach Abb. A3.2.21a senkrecht und isoliert auf einer Metallplatte.

- Welche Formen vermuten Sie für die Potentialflächen und für die elektrischen Feldstarkelinien?
- Berechnen Sie die Felder des elektrischen Potentials φ , der elektrischen Feldstärke und der elektrischen Flußdichte.
- Wie groß ist die in einer Kreisscheibe mit dem Radius r_1 auf der Platte enthaltene elektrische Ladung? Die Anordnung ist insgesamt ungeladen.

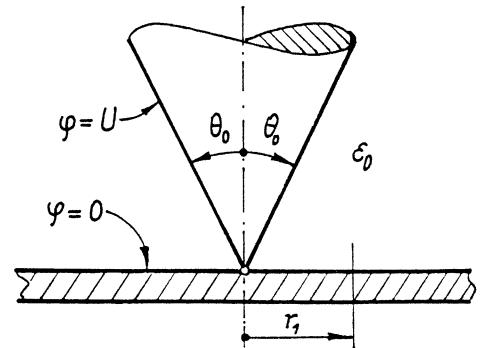


Abb. A3.2.21a

A3.2.22 Kugelschale im ursprünglich homogenen elektrischen Feld: Eine dünne, elektrisch leitfähige Kugelschale wird in ein weit ausgedehntes, ursprünglich homogenes elektrisches Feld der Feldstärke \vec{E}_0 gebracht (Abb. A3.2.22a). Berechnen Sie die Flächenkraftverteilung (= Verteilung des absorbierten Impulsflusses), wenn die Schale

- insgesamt ungeladen,
- insgesamt mit Q geladen ist.

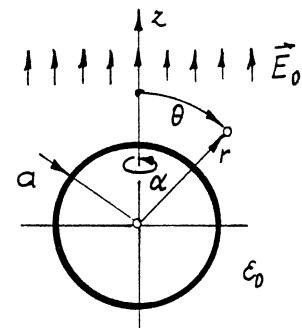


Abb. A3.2.22 a

A3.2.23 Influiertes elektrisches Moment: Das elektrische Feld in der Umgebung einer insgesamt ungeladenen Metallkugel vom Radius α , die in ein ursprünglich homogenes elektrisches Feld der Stärke $\vec{E}_0 = E_0 \hat{e}_z$ gebracht wird (Abb. A3.2.22a), lässt sich bekanntlich durch das elektrostatische Potential

$$\varphi = -E_0 \cdot [1 - (a/r)^3] z, \quad r \geq a,$$

beschreiben. Berechnen Sie daraus

- die elektrische Feldstärke an der Kugeloberfläche,
- das elektrische Moment der influenzierten Ladungsverteilung.

A3.2.24 Dielektrischer Einschluß: In einem ausgedehnten, nichtleitenden Körper der Permittivität ϵ_a herrscht ein homogenes, elektrostatisches Feld der Stärke \vec{E}_0 . Durch einen kleinen, nichtleitenden, kugelförmigen Materialeinschluß mit dem Radius α und der Permittivität ϵ_i wird das Homogenfeld gestört. Berechnen Sie die Feldstärke im Inneren des Einschlusses.

A3.2.25 Dipol im Hohlraum eines Dielektrikums: Ein elektrischer Punktdipol umgibt sich im sonst leeren Raum bekanntlich mit einem elektrostatischen Potential der Form

$$\varphi_0 = \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos(\theta)}{r^2}, \quad \vec{p}_0 = p_0 \hat{e}_z.$$

Angenommen, der Dipol befindet sich im Zentrum eines kugelförmigen Hohlraumes in einem ausgedehnten Dielektrikum (Abb. A3.2.25). Bestimmen Sie, ausgehend von einem die Laplace-Gleichung erfüllenden Ansatz

$$\varphi = (Ar + B/r^2) \cos(\theta),$$

den Verlauf des Potentials im Dielektrikum. Wie ist das Ergebnis zu interpretieren?

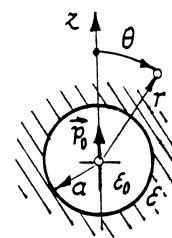


Abb. A3.2.25

A3.2.26 Ein drehsymmetrisches Quadrupolfeld: Für die Anordnung von Punktladungen nach Abb. A3.2.26 lässt sich in der Näherung $r \gg a$ (Fernfeld) das elektrostatische Skalarpotential

$$\varphi(P) = \frac{Qa^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\cos^2(\theta)-1}{r^3}$$

ableiten.

- (i) Berechnen Sie die zugehörige Feldstärke.
- (ii) Geben Sie ein damit verknüpftes elektrostatisches Vektorpotential an.

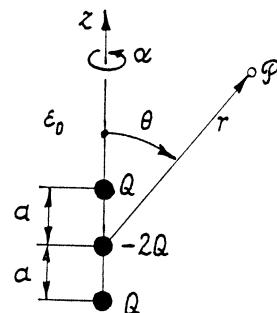
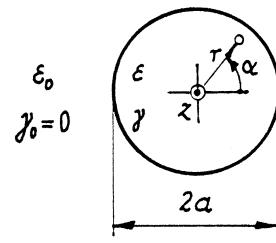


Abb. A3.2.26



A3.3.1 Punktuelle Ladungsinjektion: Im Zuge einer Modelluntersuchung ergibt sich das folgende Problem. Im Punkt O eines allseitig weit ausgedehnten Körpers der Permittivität ϵ und der Konduktivität γ wird zum Zeitpunkt $t=0$ die Ladungsmenge Q_0 injiziert. Berechnen Sie die nachfolgende Strom- und Ladungsverteilung in der Umgebung von O .



A3.3.2 Ladungsrelaxation im Kreiszylinder: Ein langer, keiszylindrischer Körper mit der Permittivität ϵ und der Konduktivität γ befindet sich im sonst leeren Raum und ist zum Zeitpunkt $t=0$ mit der Raumladungsdichte ρ_0 gleichförmig elektrisch geladen (Abb. A3.3.2). Berechnen Sie für den anschließenden Relaxationsvorgang

- (i) die Stromdichte $\vec{J}(r, t)$ für $r < a$,
- (ii) die sich für $t \rightarrow \infty$ einstellende Ladungsverteilung.

A3.3.3 Ladungsrelaxation in Schichtenstruktur: Die beiden äußersten, elektrisch schwach leitfähigen Schichten aus Abb. A3.3.3a sind durch eine Isolatorschicht voneinander getrennt und sind zum Zeitpunkt $t=0$ gleichförmig mit der Dichte ρ_0 bzw. $-\rho_0$ elektrisch geladen. Berechnen Sie für den nachfolgenden Ausgleichsvorgang die elektrische Feldstärke als Orts- und Zeitfunktion. Skizzieren Sie deren Abhängigkeit von der Ortskoordinate für die Zeitpunkte $t=0$, $t=T_R$ und $t \gg T_R$ (T_R ist die Relaxationszeitkonstante).

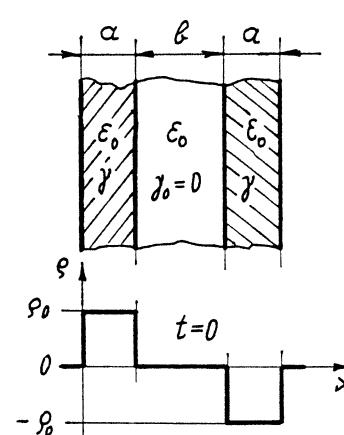


Abb. A 3.3.3 a

A3.3.4 Ladungsrelaxation in einem Stab: Die beiden Hälften eines Stabes (Abb. A3.3.4a, Länge 2ℓ , Querschnittsfläche A) aus schwach leitfähigem Material (Konduktivität γ , Permittivität ϵ) sind ursprünglich entgegengesetzt gleichförmig elektrisch geladen (Ladungsbetrag Q'). Berechnen Sie für die nachfolgende Relaxation die elektrische Stromdichte $\vec{J}(x, t)$, $-\ell \leq x \leq \ell$, $t \geq 0$.

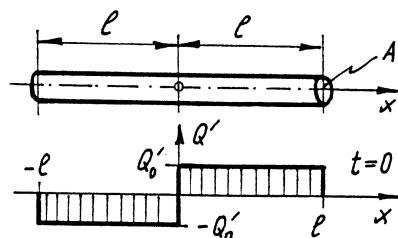


Abb. A 3.3.4 a

A3.3.5 Konvektiver Ladungstransport: Ein isolierender Kanal nach Abb. A3.3.5 mit der Querschnittsfläche A wird von einer schwach elektrisch leitfähigen, dielektrischen Flüssigkeit mit annähernd konstanter Geschwindigkeit v durchströmt. Quer zur Strömung befindet sich ein Gitter, an dem durch Ladungsinjektion die Raumladungsdichte ρ_0 und die Feldstärke E_0 aufrecht erhalten wird. Der stromaufwärts gelegene Bereich ist feldfrei. Berechnen Sie unter Berücksichtigung nur der x -Abhängigkeit

- (i) den Verlauf der Raumladungsdichte,
- (ii) den Verlauf der Feldstärke,
- (iii) den Verlauf der Stromdichte,

alles vom Laborsystem aus gesehen.

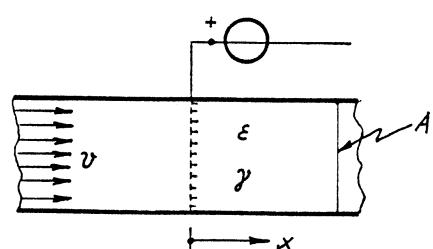
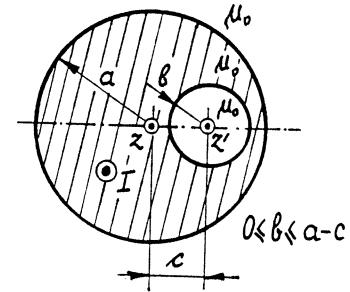


Abb. A 3.3.5



A3.4.1 Leiter mit exzentrischer Bohrung: Der kreiszylindrische Leiter aus Abb. A3.4.1a besitzt eine exzentrische Bohrung und trägt einen elektrischen Gleichstrom, gleichmäßig über den leitenden Querschnitt verteilt. Berechnen Sie das Vektorfeld der magnetischen Flußdichte in der Bohrung.



A3.4.2 Integralformeln für die magnetische Flußdichte: Angenommen, $\vec{J}(\vec{r})$ beschreibt eine (quasi-)stationäre, kontinuierliche elektrische Stromverteilung im sonst leeren Raum. Dann gilt bekanntlich für die magnetische Flußdichte

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \vec{R}}{R^3} dV', \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'. \quad (1)$$

Für manche Zwecke ist die unter bestimmten Voraussetzungen äquivalente Form

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{\vec{V}' \times \vec{J}(\vec{r}')}{R} dV' \quad (2)$$

bequemer. Zeigen Sie, daß sich (2) aus (1) ableiten läßt. Welche Voraussetzungen über die räumliche Stromverteilung müssen Sie dabei treffen?

A3.4.3 Erweiterung der Spiegelungsmethode für Magnetfelder: In bezug auf ein kartesisches Koordinatensystem trägt der Halbraum $z > 0$ die Stromverteilung $\vec{J}(x, y, z)$ und enthält keine magnetisierbaren Körper. Der Halbraum $z < 0$ ist dagegen stromfrei und vollständig mit einem Material konstanter Permeabilitätszahl μ_r ausgefüllt. Zeigen Sie die Brauchbarkeit des folgenden Verfahrens:

- Für die Berechnung der magnetischen Flußdichte im Bereich $z > 0$ wird zusätzlich zur gegebenen Stromverteilung

$$\vec{J}(x, y, z) = J_x(x, y, z) \vec{e}_x + J_y(x, y, z) \vec{e}_y + J_z(x, y, z) \vec{e}_z$$

für $z > 0$ eine weitere Stromverteilung

$$\vec{J}^*(x, y, z) = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} [J_x(x, y, -z) \vec{e}_x + J_y(x, y, -z) \vec{e}_y - J_z(x, y, -z) \vec{e}_z]$$

im Bereich $z < 0$ angenommen. Die beiden Verteilungen werden zusammen in den leeren Raum eingebettet.

- Für die Berechnung der magnetischen Flußdichte im Bereich $z < 0$ wird die gegebene Stromverteilung \vec{J} durch

$$\frac{2\mu_r}{\mu_r + 1} \vec{J}$$

ersetzt und in den leeren Raum eingebettet.

A3.4.4 Energieinhalt: Im sonst leeren Raum (keine magnetisierbaren Körper) befindet sich eine kontinuierliche, stationäre Stromverteilung, beschrieben durch das quellenfreie Feld \vec{J} der elektrischen Stromdichte. Die Stromverteilung sei räumlich begrenzt, d.h. sie läßt sich vollständig in eine Kugel mit endlichem Radius einschließen. Zeigen Sie, daß sich der gesamte Energieinhalt des zugehörigen Magnetfeldes durch

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{J} \cdot \vec{A} dV$$

berechnen läßt, wobei \vec{A} das übliche, Maxwell-geeichte Vektorpotential bedeutet und sich die Integration über den Trägerbereich von \vec{J} erstreckt.

A3.4.5 Ebenes Strömungsfeld: Zu einem ebenen, quasistationären elektrischen Strömungsfeld \vec{J} mit $\vec{J} \cdot \vec{e}_z = 0$ gehört die magnetische Feldstärke $\vec{H} = H(\vec{r})\vec{e}_z$, wobei \vec{r} den Ortsvektor in der xy -Ebene bedeutet (Abb. A3.4.5a). Zeigen Sie: Die elektrische Stromstärke an der Zylinderfläche \mathcal{A} mit der Spur \mathcal{C} in der xy -Ebene läßt sich durch

$$I(\mathcal{A}) = l [H(\vec{r}_2) - H(\vec{r}_1)]$$

darstellen. Die Linien $H = \text{const}$ sind somit die elektrischen Stromlinien in der xy -Ebene.

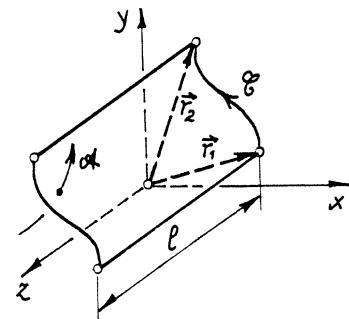


Abb. A3.4.5a

A3.4.6 Besondere Darstellung der magnetischen Flußdichte: Eine beliebige magnetische Flußverteilung läßt sich nach Wahl einer beliebigen, festen Richtung \vec{e} (konstanter Einsvektor) durch zwei Skalarfelder φ und ψ gemäß

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times [\vec{\nabla}_x (\vec{e} \varphi) + \vec{e} \psi]$$

darstellen. Angenommen, das Vektorfeld \vec{B} ist bekannt. Welchen entkoppelten Gleichungen müssen dann die Funktionen φ und ψ genügen?

A3.4.7 Kräftefreies Magnetfeld: Bezuglich eines kartesischen Koordinatensystems ist eine spezielle stationäre magnetische Flußverteilung durch die Flußdichte

$$\vec{B} = B_0 [\sin(z/a)\vec{e}_x + \cos(z/a)\vec{e}_y], \quad B_0 = \text{const}, \quad a = \text{const}$$

gegeben.

- (i) Bestimmen Sie dazu ein möglichst einfaches, Maxwell-geeichtes Vektorpotential.
- (ii) Die gegebene Flußverteilung gehört zur Klasse der „kräftefreien“ Magnetfelder. Begründen Sie diese Bezeichnung durch Berechnen der Lorentz-Kraftdichte unter der Voraussetzung $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$.

A3.5.1 Äußerer ebener Quadrupol: Ein ebenes magnetisches Feld wird in einer gewissen Umgebung der z -Achse eines kartesischen Koordinatensystems durch die Flußdichte

$$\vec{B} = \frac{B_0}{a} (x \vec{e}_x - y \vec{e}_y), \quad B_0/a = \text{const},$$

beschrieben.

- (i) Geben Sie ein zugehöriges, Maxwell-geeichtes Vektorpotential an.
- (ii) Skizzieren Sie den Verlauf der magnetischen Flußdichtenlinien in der xy -Ebene.
- (iii) Welche einfache Anordnung von Linieströmen erzeugt in erster Näherung das angegebene Feld im sonst leeren Raum?

A3.5.2 Schraubenfeld: Ein magnetisches Feld ist in Kreiszylinderkoordinaten (ϱ, α, z) durch das magnetische Vektorpotential

$$\vec{A} = K_1 \varrho \vec{e}_\alpha + K_2 \ln(\varrho/a) \vec{e}_z$$

mit Konstanten K_1 , K_2 und a charakterisiert.

- (i) Berechnen Sie die zugehörige magnetische Flußdichte.
- (ii) Welche Form besitzen die Vektorlinien der magnetischen Flußdichte?
- (iii) Wie könnten Sie ein magnetisches Feld dieser Art in einem kreiszylindrischen Bereich um die z -Achse erzeugen?

A3.5.3 Randwertproblem: An einem hochpermeablen Körper liegt ein Band, das gleichmäßig verteilt einen Gleichstrom der Stärke I führt (Abb. A3.5.3). Geben Sie die vollständige Formulierung des zugehörigen Randwertproblems für das magnetische Vektorpotential im Bereich $y > 0$ an.

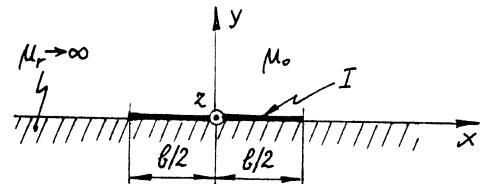


Abb. A3.5.3

A3.5.4 Flächenströme am Spalt: Nach dem in Abb. A3.5.4 skizzierten Modell soll in der Mitte $y=0$ des ausgedehnten, ebenen Spaltes zwischen zwei hochpermeablen Körpern durch zwei Flächenströme \vec{K}_1 und \vec{K}_2 die magnetische Flußdichte

$$y=0 : \vec{B} = B_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y,$$

$$B_0 = 1,0 \text{ T}, \quad a = 2 \text{ mm}, \quad k = 100 \text{ m}^{-1}, \quad \omega = 314 \text{ s}^{-1},$$

erzeugt werden. Wie müssen dazu \vec{K}_1 und \vec{K}_2 gewählt werden?

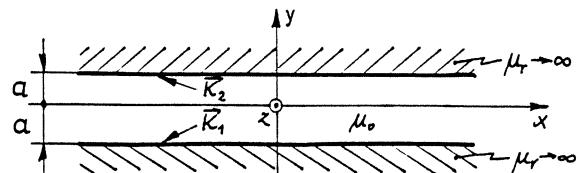


Abb. A3.5.4

A3.5.5 Sinusfeldpole: Ein Feldsyntheseproblem lässt sich vereinfacht auf die folgende Aufgabe reduzieren. Abb. A3.5.5a zeigt den Querschnitt einer bezüglich der z -Koordinate translationsinvarianten, bezüglich der x -Koordinate periodischen Struktur. Die gekrümmten Linien sind die Konturen hochpermeabler Pole, die zusammen mit der ebenen Oberfläche $y = 0$ eines hochpermeablen Halbraums einen Feldraum beranden. In diesem Feldraum soll ein ebenes Magnetfeld erzeugt werden, das bei $y = 0+$ sinusförmig gemäß

$$y = 0+: \vec{B} = B_0 \sin(\pi x/\tau) \hat{e}_y$$

verläuft. B_0 und die Polteilung τ sind vorgeschrieben. Vorgegeben ist auch die zur Verfügung stehende magnetische Spannung V_0 zwischen dem Körper $y < 0$ und den Polen. Berechnen Sie die Funktion $\delta(x)$, d.h. die Kontur, die diesen „Sinusfeldpolen“ zu geben ist.

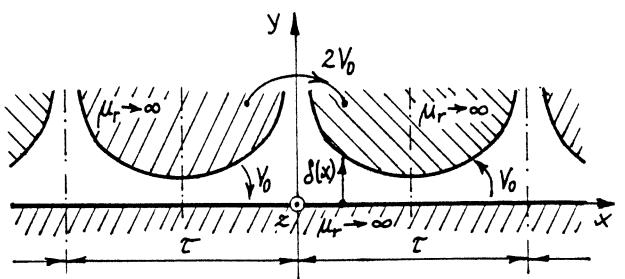


Abb. A 3.5.5a

A3.5.6 Drehsymmetrisches Strömungsfeld: Von einem stationären, drehsymmetrischen Strömungsfeld ist die elektrische Stromdichte in Kreiszylinderkoordinaten (ρ, α, z) bekannt,

$$\vec{J} = \frac{2I_0}{\pi} \frac{\rho \alpha}{(\alpha^2 + z^2)^3} [\rho z \hat{e}_\rho + \frac{3}{4}(\alpha^2 + z^2) \hat{e}_z], I_0 = \text{const}, \alpha = \text{const}.$$

Berechnen Sie die zugehörige magnetische Feldstärke, Materialisotropie vorausgesetzt.

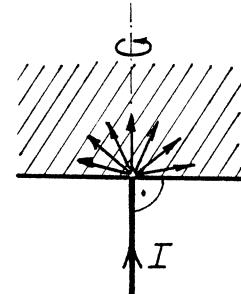


Abb. A 3.5.7a

A3.5.7 Stromeinspeisung: An der ebenen Oberfläche eines Leiters wird über einen geraden Linienleiter Gleichstrom der Stärke I modellhaft punktförmig eingespeist, der sich dann kugelsymmetrisch im Leiter verteilt (Abb. A3.5.7a). Geben Sie die zugehörige magnetische Feldstärke im ganzen Feldbereich an.

A3.5.8 Homogen magnetisierte Kugel: Abb. A3.5.8a zeigt eine Vollkugel, die eine konstante Magnetisierung trägt. Berechnen Sie die magnetische Feldstärke innen und im sonst leeren Außenraum.

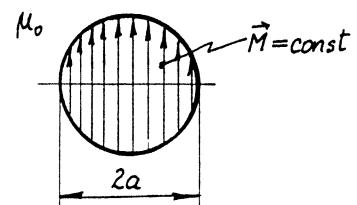


Abb. A 3.5.8a

A3.5.9 Magnetostatische Abschirmung: Untersuchen Sie zur Einschätzung der Wirksamkeit magnetostatischer Abschirmungen das Modell nach Abb. A3.5.9a. Dabei wird eine Kugelschale aus einem Material mit der konstanten Permeabilitätszahl μ_r in ein ausgedehntes, ursprünglich homogenes Magnetfeld der Flußdichte B_0 gebracht.

- Berechnen Sie die magnetische Flußdichte in den drei Bereichen.
- Geben Sie ein Maß für die Wirksamkeit der Abschirmung an.
- Wie groß ist der Maximalwert des Betrages der magnetischen Flußdichte im Schalenmaterial?

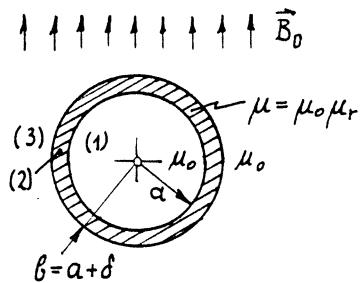


Abb. A3.5.9a

A3.5.10 Magnetfeld in einer Bohrung: In einem ausgedehnten, magnetisierbaren Körper der Permeabilität μ , der von einem ursprünglich homogenen magnetischen Fluß der Dichte B_0 durchsetzt wird, befindet sich senkrecht zur Flußrichtung eine kreiszylindrische Bohrung (Abb. A3.5.10). Bestimmen Sie, ausgehend von der Lösung

$$\vec{A} = x(C + D/\rho^2)\vec{e}_z$$

(C und D sind freie Konstanten) der Gleichung $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \vec{0}$ für das magnetische Vektorpotential, die magnetische Flußdichte in der Bohrung.

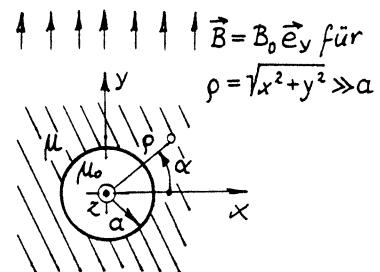


Abb. A3.5.10

A3.5.11 Kugelpule: Auf einer Kugelfläche sind, wie in Abb. A3.5.11 schematisch dargestellt, N Windungen eines dünnen Drahtes derart verteilt, daß modellhaft die Flächenstromdichte

$$\vec{K} = K_0 \sin(\theta) \vec{e}_\alpha, \quad K_0 = NI/(2a),$$

entsteht. Im Innenraum stellt sich dann ein Homogenfeld $\vec{H} = C_1 \vec{e}_z$ ein, im Außenraum ergibt sich dagegen ein Dipolfeld

$$\vec{H} = C_2 (a/r)^3 [2 \cos(\theta) \vec{e}_r + \sin(\theta) \vec{e}_\theta].$$

Bestimmen Sie zuerst die Konstanten C_1 und C_2 und berechnen Sie dann die Induktivität dieser Kugelpule.

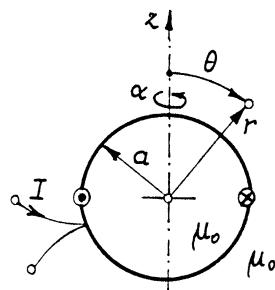


Abb. A3.5.11



A4.2.1 Eindringen des Magnetfeldes in eine Platte: An eine zuerst feldfreie, elektrisch leitfähige Platte nach Abb. A4.2.1a wird zum Zeitpunkt $t = 0$ beidseitig die magnetische Tangentialfeldstärke $H_0 = \text{const}$ gelegt. Die magnetische Feldstärke in der Platte genügt dann der Diffusionsgleichung

$$0 < x < a, t > 0 : \partial_x^2 H = \mu\gamma \partial_t H$$

mit den Rand- und Anfangsbedingungen

$$x = 0, x = a, t > 0 : H(0, t) = H(a, t) = H_0,$$

$$0 < x < a, t = 0 : H(x, 0) = 0.$$

- (i) Zeigen Sie, daß eine Reihe der Form

$$H(x, t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-t/T_n} \sin(\pi n x/a)$$

das Problem löst. Bestimmen Sie dabei die Konstanten C_n und T_n .

- (ii) Geben Sie einen Ausdruck für die Stromdichte in der Platte an und skizzieren Sie deren Verlauf über $0 \leq x \leq a$ zu den Zeitpunkten $0,1 T_d$, T_d und $10 T_d$, wobei $T_d = \mu\gamma (a/2)^2$ die zur halben Plattendicke gehörende Diffusionszeitkonstante bedeutet.

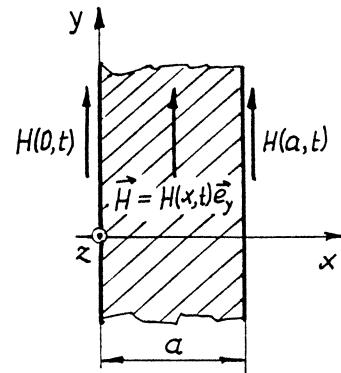


Abb. A 4.2.1a

A4.2.2 Poynting-Satz für dominant magnetische Sinusfelder: Angenommen, in einem dominant magnetischen Feld verlaufen – linear wirkende Medien vorausgesetzt – die primären Feldgrößen zeitlich sinusförmig,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}[\vec{E}(\vec{r}) e^{j\omega t}], \quad \vec{H}(\vec{r}, t) = \text{Re}[\vec{H}(\vec{r}) e^{j\omega t}], \quad \text{etc.}$$

- (i) Schreiben Sie die lokalen Feldgleichungen in komplexer Form.
(ii) Definieren Sie den komplexen Poynting-Vektor als

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^*$$

und leiten Sie eine dem Poynting-Satz in Integralform entsprechende Identität ab.

- (iii) Verwenden Sie lineare Materialgleichungen zur Interpretation dieser Form des Poynting-Satzes als einer Art von Energiebilanz. Identifizieren Sie insbesondere die Wirkleistung, die Blindleistung und die komplexe Scheinleistung.

A4.2.3 Wirbelstromverluste in einer Kreisscheibe: Eine metallene Kreisscheibe wird nach Abb. A4.2.3a in ein homogenes magnetisches Sinusfeld gebracht. Berechnen Sie die resultierenden Wirbelstromverluste (Zeitmittelwert) in der Scheibe ohne Berücksichtigung der Rückwirkung der Wirbelströme auf das magnetische Feld.

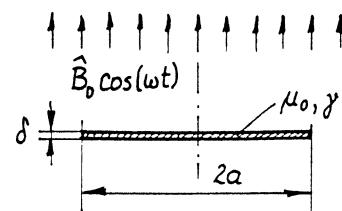


Abb. A 4.2.3 a

A4.2.4 Flächenkraft: An der ebenen Oberfläche eines ausgedehnten, nicht magnetisierbaren Körpers der Leitfähigkeit γ liegt, wie in Abb. A4.2.4 schematisch gezeigt, die magnetische Tangentialfeldstärke

$$\vec{H}_t = \hat{H}_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y, \quad \hat{H}_0 = \text{const.}$$

Berechnen Sie den zeitlichen Mittelwert $\overline{f^3}$ der Flächenkraftdichte, die im Grenzfall großer Frequenzen an der Fläche angreift. Was bedeutet hier „große Frequenzen“?

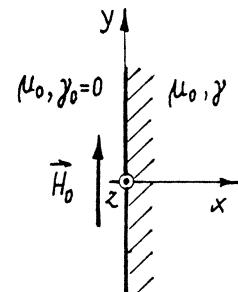


Abb. A 4.2.4

A4.2.5 Oberflächenimpedanz: Bei der Behandlung elektromagnetischer Felder in der Umgebung elektrisch gut leitfähiger Körper, die durch eine relativ kleine Eindringtiefe gekennzeichnet sind, wird als Kenngröße manchmal die „Oberflächenimpedanz“

$$\underline{Z}_f = \hat{E}_t / \hat{H}_t$$

mit den komplexen Amplituden \hat{E}_t und \hat{H}_t der elektrischen bzw. der magnetischen Tangentialfeldstärke an der Körperoberfläche eingeführt. Gehen Sie von dem einfachen Eindringmodell (Abb. A4.2.5) mit

$$\vec{H}(x, t) = \operatorname{Re} \left\{ \hat{H} \exp[-x/\delta + j(\omega t - x/\delta)] \right\} \vec{e}_y, \quad x \geq 0,$$

$$\delta = \sqrt{2/(\mu \gamma \omega)},$$

aus und drücken Sie \underline{Z}_f durch die Materialparameter und die Kreisfrequenz aus.

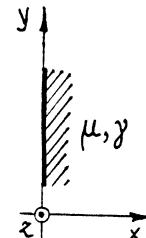


Abb. A 4.2.5

A4.2.6 Frequenzabhängigkeit des Scheinwiderstandes: Abb. A4.2.6a zeigt eine Modellanordnung, bei der über zwei ideal elektrisch leitfähige Streifen dem dazwischen liegenden Material ein Sinusstrom zugeführt wird. Bestimmen Sie, ausgehend von der Lösung

$$\vec{J}(x,t) = \operatorname{Re} \left\{ \hat{J}_0 \exp[j\omega t - (1+j)x/\delta] \right\} \vec{e}_z, \quad \delta = \sqrt{2/(\mu\gamma\omega)},$$

der Diffusionsgleichung für die Stromverteilung, die Impedanz $\underline{Z} = \underline{U}/\underline{I}$ und skizzieren Sie die Frequenzabhängigkeit von $|\underline{Z}|$.

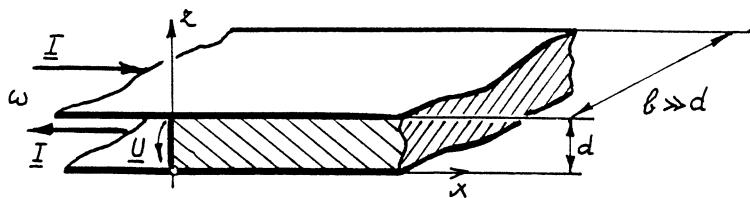


Abb. A4.2.6a

A4.2.7 Verluste in Stromschienen: Zwei parallel in Luft verlaufende Stromschienen mit Rechteckquerschnitt (Abb. A4.2.7, Konduktivität γ , Permeabilität μ) dienen zur Hin- und Rückleitung eines Sinusstroms mit dem Effektivwert I und der Frequenz f . Berechnen Sie näherungsweise die gesamte, längenbezogene Verlustleistung für den Fall, daß die Eindringtiefe δ deutlich kleiner als die Schienenbreite b ist. Gehen Sie dazu von den bekannten Ausdrücken

$$\vec{H}(0,t) = \hat{H}_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y,$$

$$\vec{J}(x,t) = -\hat{H}_0 \frac{\sqrt{2}}{\delta} e^{-x/\delta} \cos(\omega t - x/\delta + \pi/4) \vec{e}_z, \quad \delta = \sqrt{2/(\mu\gamma\omega)},$$

für den Halbraum (Abb. A4.2.5) aus.

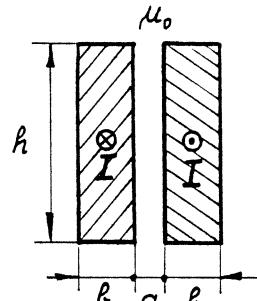


Abb. A4.2.7

A4.2.8 Induktionsheizung: Ein kreiszylindrisches Werkstück wird zur Aufheizung seiner Mantelfläche in eine kreiszylindrische Spule mit $N' = 100$ Windungen/Meter geschoben (Abb. A4.2.8) und diese mit einem Sinusstrom $I = 600A$ (Effektivwert) bei $f = 100\text{ kHz}$ gespeist. Nehmen Sie für das Werkstück $\mu = \mu_0$ und $\gamma = 10^7\text{ S/m}$ an und berechnen Sie den zeitlichen Mittelwert der oberflächenbezogenen Verlustleistung. Wegen der klein zu erwartenden Eindringtiefe δ können Sie von dem ebenen Eindringmodell für den Halbraum (Abb. A4.2.5),

$$\vec{H}(x,t) = \operatorname{Re} \left\{ \hat{H} \exp[-x/\delta + j(\omega t - x/\delta)] \right\} \vec{e}_y, \quad x > 0,$$

$$\delta = \sqrt{2/(\mu\gamma\omega)},$$

ausgehen.

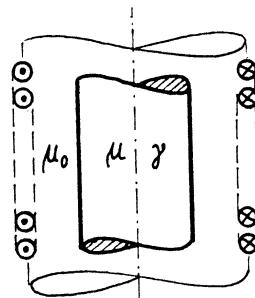


Abb. A4.2.8

A4.2.9 Maximale Wirbelstromverluste: An einer magnetisierbaren und elektrisch leitfähigen Schicht nach Abb. A4.2.9a der Dicke d liegt beidseitig tangential eine zeitlich sinusförmige magnetische Feldstärke. Für die flächenbezogenen Wirbelstromverluste in der Schicht ergibt sich

$$P'' = \frac{\hat{H}_0^2 d}{\gamma \delta^2} \operatorname{Re} \left[j \frac{\tan(kd/2)}{kd/2} \right] = \frac{\hat{H}_0^2}{\gamma \delta} \frac{\sinh(d/\delta) - \sin(d/\delta)}{\cosh(d/\delta) + \cos(d/\delta)},$$

wobei

$$\underline{k} = (1-j)\gamma, \quad \delta = \sqrt{2/(\mu_0 \gamma \omega)}.$$

Für welche Schichtdicke d ist P'' bei festen Werten \hat{H}_0 und ω maximal? Wie groß ist in diesem Fall P'' ?

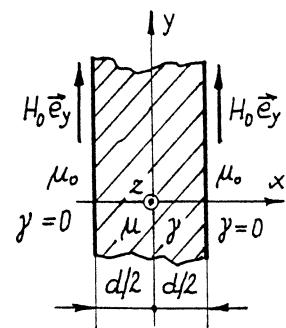


Abb. A 4.2.9 a

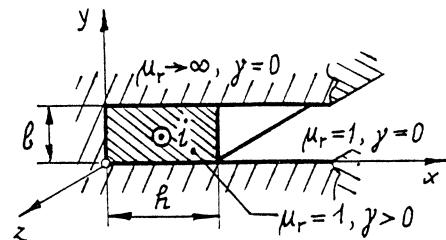
A4.2.10 Verluste in einem Nutenleiter: Die Untersuchung der Stromverdrängung in einem Nutenleiter nach dem in Abb. A4.2.10a skizzierten Modell liefert für den Sinusstrom

$$i(t) = \operatorname{Re}(I_1 \sqrt{2} e^{j\omega t})$$

die komplexe Amplitude der z -gerichteten Stromdichte

$$\hat{j}(x) = \frac{I_1 \sqrt{2}}{b h} \underline{k} h \frac{\cos(kx)}{\sin(kh)}, \quad \underline{k} = \frac{1-j}{\delta}, \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}.$$

Berechnen Sie damit den Zeitmittelwert P' der längenbezogenen Joule-Verluste für den in Abb. A4.2.10b angegebenen Mischstrom. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem entsprechenden Wert ohne Berücksichtigung der Stromverdrängung.



$$b = 10 \text{ mm}, \quad h = 50 \text{ mm}, \\ \gamma = 56 \cdot 10^6 \text{ S/m}.$$

Abb. A 4.2.10 a

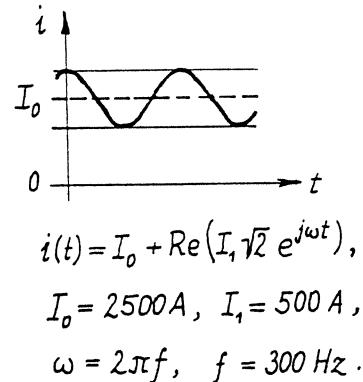


Abb. A 4.2.10 b

A4.2.11 Innere Impedanz eines Drahtes: Berechnen Sie unter Berücksichtigung der Stromverdrängung die innere, längenbezogene Impedanz eines Drahtes mit Kreisquerschnitt und den Materialparametern μ und γ . Diskutieren Sie insbesondere die Grenzfälle kleiner und großer Frequenzen.

A5.1.1 Poynting-Satz für Sinusfelder: Dies ist eine Erweiterung der Aufgabe 4.2.2 ohne Beschränkung auf dominant magnetische Felder. Die primären Feldgrößen sollen jedoch zeitlich sinusförmig verlaufen,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \operatorname{Re}[\vec{E}(\vec{r}) e^{j\omega t}], \quad \vec{H}(\vec{r}, t) = \operatorname{Re}[\vec{H}(\vec{r}) e^{j\omega t}], \text{ etc.}$$

- (i) Schreiben Sie die allgemeinen, lokalen Maxwell-Gleichungen in komplexer Form an.
- (ii) Definieren Sie den komplexen Poynting-Vektor als

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^*$$

und leiten Sie eine dem Poynting-Satz in Integralform entsprechende Identität ab.

- (iii) Verwenden Sie lineare Materialgleichungen zur Interpretation dieser Form des Poynting-Satzes als einer Art von Energiebilanz. Identifizieren Sie insbesondere die Wirkleistung, die Blindleistung und die komplexe Scheinleistung.

A5.1.2 Einschalten eines Punktdipols: Ein im Ursprung plazierter, \hat{z} -gerichteter Punktdipol mit dem elektrischen Moment $\vec{p} = p(t) \hat{e}_z$ erzeugt im sonst leeren Raum bekanntlich das Hertz-Vektorfeld

$$\vec{\Pi}(\vec{r}, t) = \frac{p(t - r/c_0)}{4\pi\epsilon_0 r} \hat{e}_z.$$

Daraus lassen sich die Lorentz-geeichten Potentiale

$$\vec{A} = \frac{1}{c_0^2} \partial_t \vec{\Pi}, \quad \varphi = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}$$

ableiten.

- (i) Berechnen Sie die zugehörige magnetische Flußdichte \vec{B} für eine allgemeine Funktion $p(t)$.
- (ii) Berechnen und skizzieren Sie speziell für die in Abb. A5.1.2a angegebene Funktion $p(t)$ den Zeitverlauf von \vec{B} an einem Ort $r = 2c_0 t_0$ in der Äquatorebene $z = 0$.

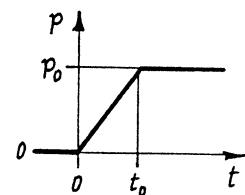


Abb. A 5.1.2 a

A5.1.3 Strahlungsleistung einer Dipolantenne: Das elektromagnetische Feld einer Dipolantenne im sonst leeren Raum wird in Bezug auf Kugelkoordinaten für große Abstände durch

$$\vec{E} = c_0 \vec{B} \times \hat{e}_r = \frac{U}{r} \sin(\theta) \cos(\omega t - kr) \hat{e}_\theta, \quad kr \gg 1,$$

beschrieben, wobei $\hat{e}_r \cdot \vec{B} = 0$, und U eine feste elektrische Spannung bezeichnet. Berechnen Sie den zeitlichen Mittelwert der gesamten Strahlungsleistung für $U = 100 \text{ V}$.

A5.1.4 Strahlungsfeld eines Hertz-Dipols: Das Strahlungsfeld eines elektrischen Hertz-Dipols im sonst leeren Raum ist in der Fernfeldnäherung, dargestellt durch die komplexen Amplituden

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\vec{e}_r \times \vec{p}}{4\pi\epsilon_0} \frac{k^2 e^{-jkr}}{c_0 r}, \quad \vec{E}(\vec{r}) = c_0 \vec{B}(\vec{r}) \times \vec{e}_r,$$

nicht quellenfrei. Berechnen Sie die zugehörigen komplexen Amplituden $\underline{J}(\vec{r})$ der elektrischen Stromdichte und $\underline{\rho}(\vec{r})$ der Ladungsdichte.

A5.1.5 Elektrische Feldstärke eines Dipolstrahlers: In der Fernzone eines elektrischen Hertz-Dipols ergibt sich die komplexe Amplitude der elektrischen Feldstärke zu

$$\underline{E} = -\frac{\vec{e}_r \times (\vec{e}_r \times \vec{p})}{4\pi\epsilon_0} \frac{k^2 e^{-jkr}}{r}, \quad kr \gg 1.$$

Andererseits ist die gesamte Strahlungsleistung

$$P = \frac{|\vec{p}|^2 c_0 k^4}{12\pi\epsilon_0}.$$

Zeigen Sie, daß sich der Effektivwertbetrag der elektrischen Feldstärke in der Fernzone durch

$$E_{\text{eff}} = \alpha \sqrt{\zeta_0 P} \frac{\sin(\theta)}{r}$$

ausdrücken läßt, wobei α einen Zahlenfaktor und ζ_0 die charakteristische Impedanz des leeren Raums bezeichnet. $\theta \in [0, \pi]$ gibt den Winkel zwischen der Dipolachse und einem Strahl vom Dipolort zum Feldpunkt an. Wie groß ist α ?

A5.1.6 Antennengewinn: Der Antennengewinn g ist definiert als der Quotient des Maximums der Strahlstärke (= raumwinkelbezogene Strahlungsleistung) $dP/d\Omega$ durch den Mittelwert der Strahlstärke über den vollen Raumwinkel. Für den elektrischen Hertz-Dipol ergibt sich in Kugelkoordinaten die Strahlstärke

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{|\vec{p}|^2 c_0^2 k^4}{32\pi^2\epsilon_0} \sin^2(\theta).$$

Berechnen Sie g für diesen Fall.

A5.2.1 Potentiale im Wellenfeld: Eine mögliche Lösung der Maxwell-Gleichungen in einem leeren, ladungs- und stromfreien Feldgebiet ist durch elektrodynamische Potentiale der Form

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \operatorname{Re}[\underline{\vec{A}} e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}], \quad \varphi(\vec{r}, t) = 0$$

mit $\omega = c_0 k$, einer festen Richtung \vec{x} (Einsvektor) und einem konstanten, i.a. komplexwertigen Vektor $\underline{\vec{A}}$ gegeben.

- (i) Berechnen Sie daraus die zugehörigen Felder der elektrischen Feldstärke und der magnetischen Flußdichte.
- (ii) Welcher geometrischen Bedingung muß der Vektor $\underline{\vec{A}}$ genügen damit die Maxwell-Gleichungen tatsächlich erfüllt sind?
- (iii) Sind die angegebenen Potentiale Lorentz-geeicht? Sind sie Maxwell-geeicht?

A5.2.2 Gekreuzte ebene Wellen: Zwei ebene, linear polarisierte elektromagnetische Sinuswellen mit den elektrischen Komponenten

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= \operatorname{Re}(\hat{E} e^{jk\theta_1}) \vec{e}_x, & \theta_1 &= \omega t - \vec{x}_1 \cdot \vec{r}, \\ \vec{E}_2 &= \operatorname{Re}(\hat{E} e^{jk\theta_2}) \vec{e}_x, & \theta_2 &= \omega t - \vec{x}_2 \cdot \vec{r},\end{aligned}$$

haben unterschiedliche Ausbreitungsrichtungen \vec{x}_1 und \vec{x}_2 . Sie werden gemäß Abb. A5.2.2 überlagert.

- (i) Berechnen Sie die resultierenden Wellenfelder $\vec{E}(\vec{r}, t)$ und $\vec{H}(\vec{r}, t)$ in kartesischen Koordinaten.
- (ii) Zeigen Sie insbesondere, daß es im resultierenden Wellenfeld Ebenen $y = \text{const}$ gibt, an denen die elektrische Feldstärke identisch verschwindet. Bestimmen Sie diese Ebenen.

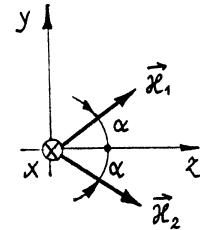


Abb. A5.2.2

A5.2.3 Energieflußdichte: Berechnen Sie die zu einer ebenen Sinuswelle im leeren Raum mit der elektrischen Feldstärke (kartesische Koordinaten)

$$\vec{E}(z, t) = \hat{E} \cos[2\pi(t/T - z/\lambda)] \vec{e}_y$$

gehörende, mittlere Energieflußdichte.

A5.2.4 Energie und Impuls im ebenen Wellenfeld: Drücken Sie für eine ebene elektromagnetische Welle im leeren Raum,

$$\vec{B}(\theta) = \vec{x} \times \vec{E}(\theta)/c_0, \quad \theta(\vec{r}, t) = c_0 t - \vec{x} \cdot \vec{r},$$

(θ ist die Phasenfunktion und \vec{x} ist die Ausbreitungsrichtung) die Energieflußdichte \vec{q}^e , die Impulsdichte \vec{g}^e und die Impulsflußdichte \vec{p}^e durch die Energiedichte w^e aus.

A5.2.5 Feldstärken der Sonnenstrahlung: Schätzen Sie die Amplituden der elektrischen und der magnetischen Feldstärken der Sonnenstrahlung auf der Erdoberfläche ab, wenn die damit verknüpfte Energieflußdichte im Mittel etwa 1 kW/m^2 beträgt. Nehmen Sie dazu vereinfachend ebene, monofrequente Sinuswellen im leeren Raum an und betrachten Sie

- (i) lineare Polarisation,
- (ii) zirkulare Polarisation.

A5.2.6 Feldstärke im Rundfunksignal: Angenommen, ein Rundfunksender strahlt eine Leistung von 100 kW bei einer Frequenz von 100 MHz ab. Berechnen Sie - als grobe Abschätzung - die Amplitude der zugehörigen elektrischen Feldstärke in einer Entfernung von 10 km vom Sender. Nehmen Sie dazu den Sender als isotopen Punktstrahler im leeren Raum und zirkulare Polarisation an.

A5.2.7 Poynting-Fluß gekreuzter Wellen: Zwei ebene Sinuswellen mit den elektrischen Komponenten

$$\vec{E}_1 = \operatorname{Re}[\hat{E} e^{j(\omega t - kx)}] \vec{e}_y, \quad \vec{E}_2 = \operatorname{Re}[\hat{E} e^{j(\omega t - ky)}] \vec{e}_z$$

sind nach Abb. A5.2.7 polarisiert und laufen parallel zur x -Achse bzw. parallel zur y -Achse im leeren Raum. Berechnen Sie für die Überlagerung der beiden Wellen das zeitlich gemittelte Poynting-Feld $\langle \mathcal{S} \rangle(x, y, z)$.

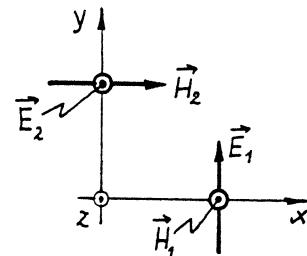


Abb. A5.2.7

A5.2.8 Oberflächenwelle: Unter bestimmten Bedingungen (Totalreflexion) kann in der Nähe der ebenen Oberfläche eines Körpers nach Abb. A5.2.8 im leeren Umgebungsraum $x > 0$ eine elektromagnetische Welle entstehen, deren magnetische Komponente die Form

$$\vec{B}(x, y, t) = \operatorname{Re}[\hat{B} e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta y)}] \vec{e}_z, \quad x > 0$$

mit konstanten, positiven Werten α, β, ω und mit einer i.a. komplexen Amplitude \hat{B} besitzt. Die Welle breitet sich demnach parallel zur Oberfläche aus und nimmt mit wachsendem Abstand von der Oberfläche exponentiell ab (Oberflächenwelle). Berechnen Sie die zugehörige elektrische Feldstärke.

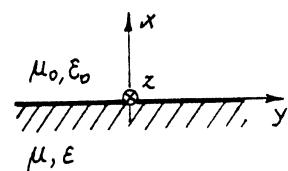


Abb. A5.2.8

A5.2.9 Vollständige Reflexion: Eine ebene elektromagnetische Transversalwelle mit der elektrischen Komponente

$$\vec{E}_i(z,t) = \operatorname{Re} [\vec{E}_i e^{j(\omega t + kz)}]$$

trifft aus dem Halbraum $z > 0$ kommend, bei $z = 0$ senkrecht auf eine ideal metallische Ebene (idealer Spiegel). Geben Sie das resultierende Wellenfeld als Überlagerung der einfallenden und der reflektierten Welle an.

A5.2.10 Reflexion und Transmission: Untersuchen Sie mit Bezug auf Abb. A5.2.10 folgende Situation. Eine ebene elektromagnetische Welle, deren elektrische Feldstärke durch

$$\vec{E}_i(z,t) = f(t - z/c_s) \vec{e}_x$$

mit einer bekannten Funktion $f(\cdot)$ gegeben ist, läuft durch das näherungsweise verlustfreie Medium (1) und trifft bei $z = 0$ senkrecht auf die ebene Grenzfläche zum ebenfalls verlustfreien Medium (2). Bestimmen Sie

- (i) die zu \vec{E}_i gehörende magnetische Feldstärke \vec{H}_i ,
- (ii) die Komponenten \vec{E}_r und \vec{H}_r der reflektierten Welle,
- (iii) die Komponenten \vec{E}_t und \vec{H}_t der transmittierten, d.h. der in das Medium (2) übertragenen Welle.

A5.2.11 Brechzahlen: Bei der Untersuchung der Eigenschaften dispergierender elektromagnetischer Wellen werden manchmal die Phasenbrechzahl $n_{ph} = c_0/c_{ph}$ und die Gruppenbrechzahl $n_{gr} = c_0/c_{gr}$ eingeführt, wobei c_0 die Ausbreitungsgeschwindigkeit im leeren Raum, c_{ph} die Phasengeschwindigkeit und c_{gr} die Gruppengeschwindigkeit bedeuten. Drücken Sie die Funktion $n_{gr}(\omega)$ durch die Funktion $n_{ph}(\omega)$ und deren Ableitungen aus.

A5.2.12 Wellenimpedanz: In einem schwach elektrisch leitfähigen Medium der Konduktivität σ , der Permittivität ϵ und der Permeabilität μ breite sich eine ebene Welle der Form

$$\vec{E}(z,t) = \operatorname{Re} (\hat{\vec{E}} e^{j\omega t - \gamma z}) \vec{e}_x,$$

$$\vec{H}(z,t) = \operatorname{Re} (\hat{\vec{H}} e^{j\omega t - \gamma z}) \vec{e}_y$$

aus, wobei γ die komplexe Ausbreitungskonstante bedeutet. Drücken Sie die zugeordnete Wellenimpedanz

$$\underline{Z} = \hat{\vec{E}} / \hat{\vec{H}}$$

durch die Materialparameter μ , ϵ , σ und durch die Kreisfrequenz ω aus.

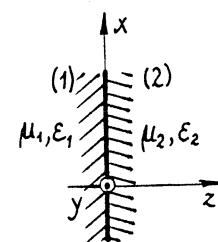


Abb. A5.2.10

A5.2.13 Eindringtiefe: In einem einfachen Material, das durch konstante Werte der Permeabilität μ , der Permittivität ϵ und der Konduktivität σ gekennzeichnet ist, führen die Maxwell-Gleichungen über einen Lösungsansatz für ebene Sinuswellen ($\gamma = \alpha + j\beta$ ist die komplexe Ausbreitungskonstante)

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = \operatorname{Re}(\vec{E} e^{j\omega t - \gamma \vec{k} \cdot \vec{r}})$$

zu der Ausbreitungsbedingung

$$\gamma^2 = j\mu\sigma\omega - \mu\epsilon\omega^2.$$

- (i) Berechnen Sie zunächst allgemein den reellen, frequenzabhängigen Dämpfungskoeffizienten $\alpha(\omega)$.
- (ii) Geben Sie dann Näherungsausdrücke für die Eindringtiefe $\delta = 1/\alpha$ in den Fällen großer Konduktivität $\sigma \gg \epsilon\omega$ und kleiner Konduktivität $\sigma \ll \epsilon\omega$ an.

A5.2.14 Chirale Medien: Lineare chirale Medien werden im einfachsten Fall (reziprok, isotrop) für Sinusfelder

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \operatorname{Re}[\vec{E}(\vec{r}) e^{j\omega t}], \text{ etc.}$$

durch die Materialgleichungen

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} + j\nu \vec{B}, \quad \vec{H} = j\nu \vec{E} + \frac{1}{\mu} \vec{B}$$

beschrieben, wobei ϵ , μ und ν reellwertige Funktionen der Kreisfrequenz sind.

- (i) Zeigen Sie, daß für ebene Sinuswellen

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \operatorname{Re}[\vec{E} e^{j(\omega t - k \vec{k} \cdot \vec{r})}], \text{ etc.}$$

zwei zirkular polarisierte Moden existieren.

- (ii) Geben Sie die zugehörigen Dispersionsbeziehungen $k(\omega)$ an.

A5.2.15 Dispersion: In einem besonders einfachen Plasmamodell ergibt sich für elektromagnetische Sinusfelder

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \operatorname{Re}[\vec{E}(\vec{r}) e^{j\omega t}], \text{ etc.}$$

die reduzierte Wellengleichung (Helmholtz-Gleichung)

$$\nabla^2 \vec{E} + \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_p^2) \vec{E} = \vec{0},$$

worin die Konstante $\omega_p = \sqrt{n_e e^2 / (\epsilon_0 m_e)}$ mit der Elektronendichte n_e , der Elementarladung e und der Elektronmasse m_e eine charakteristische Kreisfrequenz bedeutet.

- (i) Ermitteln Sie die zugehörige Dispersionsbeziehung $F(\omega, k) = 0$ für homogene, ebene Sinuswellen.
- (ii) Zeichnen und diskutieren Sie das Dispersionsdiagramm.

A5.2.16 Ionisiertes Gas: Für die Ausbreitung ebener elektromagnetischer Sinuswellen in einem ionisierten Gas geringer Dichte lässt sich die Beziehung

$$k^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda_0^2} \left[1 - \left(\frac{f_p}{f} \right)^2 \right]$$

ableiten, in der k die Kreiswellenzahl, f die Frequenz, f_p die charakteristische Plasmafrequenz und λ_0 die zur Frequenz f im leeren Raum gehörende Wellenlänge bedeuten. Berechnen und skizzieren Sie den Verlauf

- (i) der Phasengeschwindigkeit
- (ii) der Gruppengeschwindigkeit

mit der Frequenz f . Was passiert für $f < f_p$?

A5.2.17 Rechteck-Hohlleiter: Berechnen Sie für den in Abb. A5.2.17 angegebenen, idealen Rechteck-Hohlleiter die Grenzfrequenzen für den jeweils niedrigsten TM- und TE-Modus.

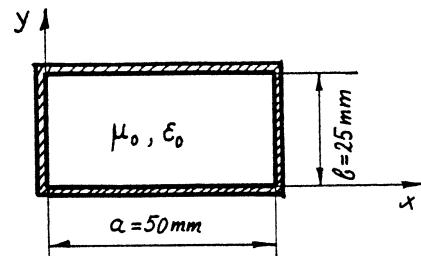


Abb. A 5.2.17

A5.2.18 Hohlraumresonator: Im Hohlraum der in Abb. A5.2.18 skizzierten, koaxialen Anordnung mit ideal leitfähigen Wänden soll eine stehende TEM-Sinuswelle mit dem angegebenen Spannungsverlauf und der Spannungsamplitude U bei $z = 0$ angeregt werden.

- (i) Mit welcher Frequenz ist für $\ell = 100 \text{ mm}$ anzuregen?
- (ii) Geben Sie die Verläufe $\vec{E}(\rho, z, t)$ der elektrischen Feldstärke und $\vec{B}(\rho, z, t)$ der magnetischen Flußdichte an.

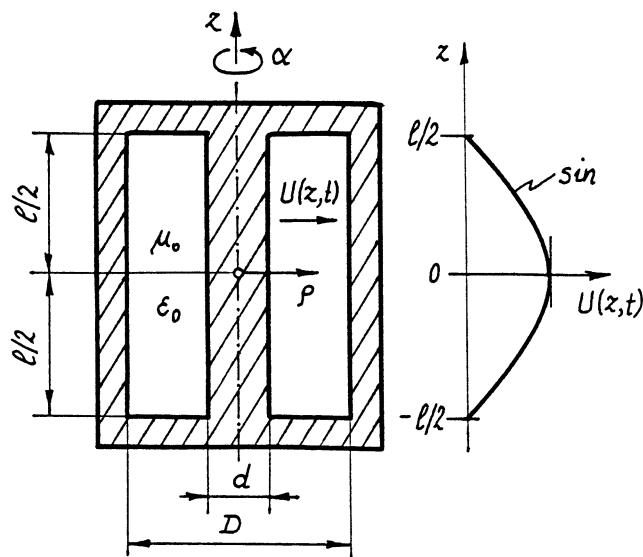


Abb. A 5.2.18

A5.2.19 Energiefluß für einen TM-Modus: In einem Hohlleiter mit ideal metallischen Randbedingungen gelten für die in den Darstellungen

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \operatorname{Re} [\vec{\xi}(x, y) e^{j(\omega t - kz)}],$$

$$\vec{H}(x, y, z, t) = \operatorname{Re} [\vec{\mathcal{H}}(x, y) e^{j(\omega t - kz)}]$$

eingeführten lokalen komplexen Vektoramplituden $\vec{\xi}(x, y)$ und $\vec{\mathcal{H}}(x, y)$ von TM-Wellen die Zusammenhänge

$$\vec{\xi} = \xi_z \vec{e}_z + \vec{\xi}_{\perp}, \quad \vec{\xi}_{\perp} = -\frac{jk}{\epsilon^2} \nabla_{\perp} \xi_z,$$

$$\vec{\mathcal{H}} = \vec{e}_z \times \vec{\xi}_{\perp} / Z, \quad Z = \frac{k}{\epsilon \omega},$$

$$\nabla_{\perp}^2 \xi_z + \kappa^2 \xi_z = 0, \quad \kappa^2 = \mu \epsilon \omega^2 - k^2.$$

Zeigen Sie mit Hilfe der ersten Green-Identität

$$\int_{\mathcal{A}} [u \nabla_{\perp}^2 v + (\vec{\nabla}_{\perp} u) \cdot (\vec{\nabla}_{\perp} v)] dA = \int_{\partial \mathcal{A}} u \partial_n v ds,$$

gültig für ein ebenes Flächenstück \mathcal{A} , daß sich der Zeitmittelwert des Energieflusses durch die Hohlleiter-Querschnittsfläche \mathcal{A} für einen TM-Modus (fester Wert κ) aus der Formel

$$P = \frac{\epsilon \omega k}{2 \kappa^2} \int_{\mathcal{A}} |\xi_z|^2 dA$$

berechnen läßt. P entspricht der im Hohlleiter übertragenen Wirkleistung.

A5.3.1 TEM-Wellenimpedanzen: In Abb. A5.3.1 sind die Querschnitte von drei näherungsweise idealen Leitungen dargestellt. Berechnen Sie die zugehörigen Wellenimpedanzen für die Ausbreitung von TEM-Wellen zuerst allgemein, dann für

$$\mu = \mu_0, \epsilon = \epsilon_0, D = 10d, b = 10a.$$

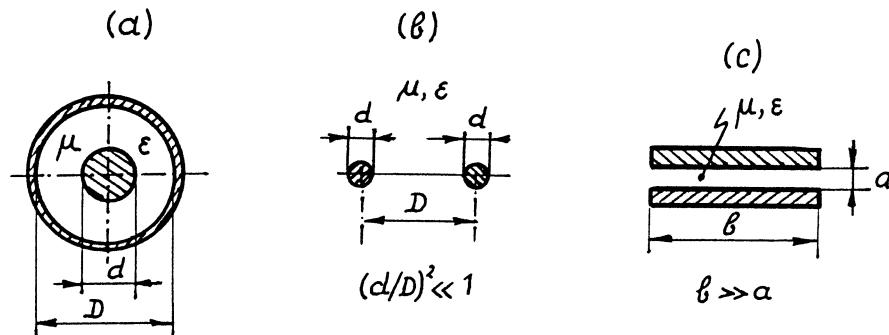


Abb. A5.3.1

A5.3.2 Leitungsparameter: Für das ebene elektrostatische Feld zwischen zwei Leiterbahnen mit rechteckigen Querschnitten wurde graphisch oder numerisch das in Abb. A5.3.2 angegebene Feldbild ermittelt. Zu den konstanten Potentialschritten $\Delta\varphi$ zwischen den Potentialflächen gehören dabei die längenbezogenen elektrischen Flüsse $\epsilon_0 \Delta\varphi$ der Flußröhren, begrenzt durch die strichliert gezeichneten Feldlinien.

- (i) Wie groß ist der Kapazitätsbelag der Anordnung?
- (ii) Wie groß ist der äußere Induktivitätsbelag, ideal metallische Randbedingungen vorausgesetzt?
- (iii) Geben Sie schließlich die Wellenimpedanz für die verlustfreie Ausbreitung von TEM-Wellen an.

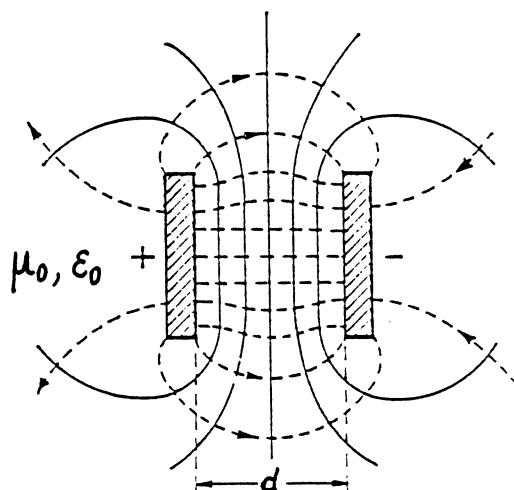


Abb. A5.3.2

A5.3.3 Ein Leitungsproblem: Im Zuge der Behandlung eines Leitungsproblems haben Sie für die bezogene Spannung $u(\xi, \tau)$ entlang der Leitung mit der bezogenen Längenvariablen ξ und der bezogenen Zeitvariablen τ die Aufgabe

$$\text{Differentialgleichung} \quad \partial_\xi^2 u = \partial_\tau^2 u \quad \text{für } |\xi| \leq 1, \tau > 0;$$

$$\text{Randbedingungen} \quad \partial_\xi u(\pm 1, \tau) = 0 \quad \text{für } \tau > 0;$$

$$\text{Anfangsbedingungen} \quad u(\xi, 0) = \xi, \partial_\tau u(\xi, 0) = 0 \quad \text{für } |\xi| < 1$$

formuliert und durch Laplace-Transformation nach der Zeitvariablen im Bildbereich bereits gelöst:

$$|\xi| \leq 1 : \quad u(\xi, \tau) = \xi - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} \frac{\sinh(\xi s)}{\cosh(s)} \right].$$

Einer Laplace-Tabelle entnehmen Sie

$$\frac{\sinh(\beta s)}{\cosh(\alpha s)} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ \delta[\tau - (2na + \alpha - \beta)] - \delta[\tau - (2na + \alpha + \beta)] \right\}, \beta < \alpha.$$

- (i) Geben Sie damit $u(\xi, \tau)$ im Originalbereich an.
- (ii) Skizzieren Sie speziell den Zeitverlauf $u(1, \tau) = -u(-1, \tau)$ der bezogenen Spannung an den Leitungsenden.

A5.3.4 Sprungwelle: Eine angenähert verlustfreie Leitung mit der Wellenimpedanz Z_w ist nach Abb. A5.3.4a mit einer R-C-Parallelschaltung abgeschlossen. Es fällt eine Sprungwelle mit dem Spannungsscheitelwert \hat{U}_1 ein. Berechnen Sie allgemein den Zeitverlauf $U(t)$ der Spannung am Abschluß.

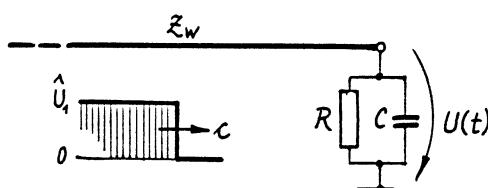


Abb. A5.3.4a

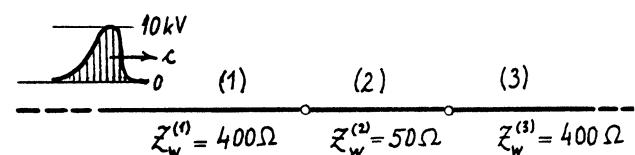


Abb. A5.3.5a

A5.3.5 Übertragener Spannungspuls: Abb. A5.3.5a zeigt schematisch zwei lange 400Ω -Leitungen, die über ein 50Ω -Kabel verbunden sind. Über den linken Abschnitt fällt ein kurzer Spannungspuls mit dem Scheitelwert $10kV$ ein. Berechnen Sie den Scheitelwert des ersten Spannungspulses, der in den rechten Abschnitt übertragen wird.

A5.3.6 Reflexionsfreie Anpassung: Die beiden angenähert verlustfreien Leitungen (1) und (3) aus Abb. A5.3.6 sollen über ein Leitungsstück (2) so miteinander verbunden werden, daß bei der Übertragung von Sinuswellen mit der Frequenz f keine Reflexionen auftreten. Bestimmen Sie die erforderliche Länge ℓ und die Wellenimpedanz $Z_w^{(2)}$ des Verbindungsstückes.

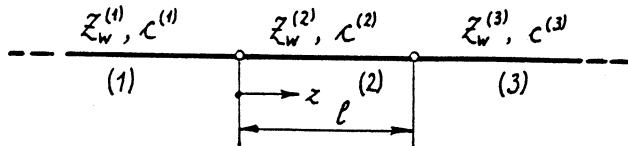


Abb. A 5.3.6

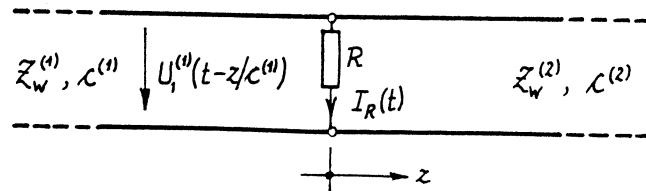


Abb. A 5.3.7

A5.3.7 Anpassung durch Querwiderstand: An der Verbindungsstelle zweier angenähert verlustfreier Leitungen soll, wie in Abb. A5.3.7 schematisch gezeigt, durch den Einbau eines Widerstandes verhindert werden, daß eine von links einfallende Spannungswelle $U_i^{(1)}$ zu Reflexionen führt.

- Bestimmen Sie aus den allgemeinen Lösungen der Leitungsgleichungen den dafür erforderlichen Widerstandswert R . Unter welcher Voraussetzung ist er realisierbar?
- Geben Sie den zu einer einfallenden Welle $U_i^{(1)}(t-z/c^{(1)})$ gehörenden Zeitverlauf $I_R(t)$ des Stromes durch den nach (i) bestimmten Widerstand an.

A5.3.8 Leitungsabzweig: Von einer angenähert verlustfreien Leitung zweigt eine gleiche Leitung ab (Abb. A5.3.8a). Bestimmen Sie, ausgehend von der einfallenden Spannungswelle U_1 , die reflektierte Spannungswelle und die beiden übertragenen Spannungswellen.

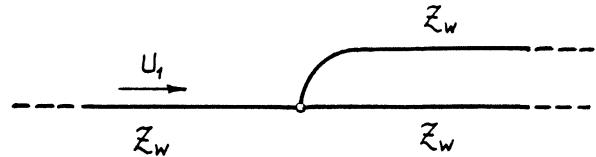


Abb. A 5.3.8a

A5.3.9 Thomson-Kabel: Leiten Sie die Differentialgleichung für die Ausbreitung von Spannungsstörungen entlang einer Leitung ab, für die der Induktivitätsbelag L' und der Leitwertbelag G' vernachlässigt werden können, der Kapazitätsbelag C' und der Widerstandsbelag R' aber berücksichtigt werden müssen. Von welchem Typus ist diese Differentialgleichung?

A5.3.10 Spannungspuls an Thomson-Kabel: Spannungs- und Stromverteilungen auf langen Kabeln mit vernachlässigbaren Induktivitäts- und Querleitwertbelägen werden durch die Gleichungen

$$\partial_z U + R' I = 0, \quad \partial_z I + C' \partial_t U = 0$$

beschrieben. An den Eingang solch eines Kabels wird ein scharfer Spannungspuls gelegt, den wir als Dirac-Stoß

$$U(0, t) = \Phi_0 \delta(t)$$

modellieren. Etwa mit Hilfe der Laplace-Transformation läßt sich dann zeigen, daß

$$U(z, t) = \frac{\Phi_0}{t \sqrt{\pi}} \zeta e^{-\zeta^2}, \quad \zeta = \frac{z}{2} \sqrt{\frac{R' C'}{t}},$$

die nachfolgende Spannungsverteilung auf dem Kabel beschreibt.

- (i) Skizzieren Sie diesen Spannungsverlauf $U(z, t_1)$ für einen festen Zeitpunkt $t_1 > 0$.
- (ii) An welcher Stelle z_1 tritt der Maximalwert des Betrages von $U(z, t_1)$ auf und wie groß ist dieser?
- (iii) Mit welcher Geschwindigkeit läuft dieses Maximum entlang des Kabels?

A5.3.11 Gleichstromkabel: Am Eingang eines langen Gleichstromkabels (Widerstandsbelag R' , Querleitwertbelag G') liegt die Gleichspannung U_0 , am Ausgang liegt der Widerstand R_A (Abb. A5.3.11a). Berechnen und skizzieren Sie den Spannungsverlauf $U(x)$ entlang des Kabels.

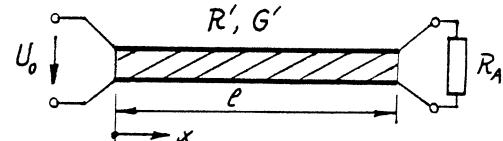


Abb. A5.3.11a

A5.3.12 Leitungsimpedanzen: Am Eingang einer 36 km langen Leitung wird bei leerlaufendem Ausgang die Impedanz $(145 - j 8960) \Omega$ und bei kurzgeschlossenem Ausgang die Impedanz $(13,4 + j 12,9) \Omega$ – jeweils bei 50 Hz – gemessen. Bestimmen Sie daraus die Wellenimpedanz und den komplexen Ausbreitungskoeffizienten der Leitung.

A5.3.13 Energiebilanz: Ermitteln Sie, ausgehend von den Leistungsgleichungen

$$\partial_z U + L' \partial_t I + R' I = 0, \quad \partial_z I + C' \partial_t U + G' U = 0$$

mit konstanten Parametern, eine lokale Energiebilanz für die Leistung in der Form

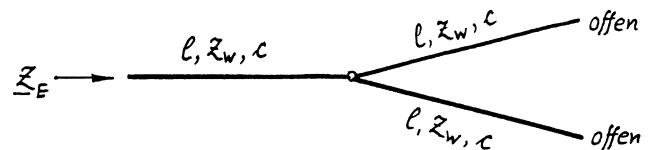
$$\partial_t W' + \partial_z Q + P'_v = 0,$$

worin W' den Energiebelag, Q den Energiefluß und P'_v den Belag der Verlustleistung entlang der Leitung bedeuten. Drücken Sie insbesondere die Größen W' , Q und P'_v durch U , I und die Leitungsparameter aus.

A5.3.14 Leistungsverlauf: Am Eingang einer langen, verlustbehafteten Leitung, die mit ihrer Wellenimpedanz abgeschlossen ist, liegt eine Sinusspannung mit dem Effektivwert U . Berechnen Sie den Verlauf der Wirkleistung, der Blindleistung und der reellen Scheinleistung entlang der Leitung.

A5.3.15 Drei Leitungsstücke: Die Kettenmatrix einer Leitung der Länge ℓ ist bekanntlich

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma\ell) & \sinh(\gamma\ell)\underline{z}_w \\ \sinh(\gamma\ell)/\underline{z}_w & \cosh(\gamma\ell) \end{bmatrix}$$



Berechnen Sie damit für die in Abb. A5.3.15a angegebene Zusammenschaltung von drei gleichen Stücken einer angenähert verlustfreien Leitung die Eingangsimpedanz \underline{z}_E . Bei welchen Frequenzen liegen die Pole und die Nullstellen von \underline{z}_E ?

Abb. A5.3.15a

A5.3.16 Spannungsüberhöhung: Am Eingang einer $10m$ langen, näherungsweise verlustfreien Doppelleitung (Permittivität ϵ_0 , Permeabilität μ_0) liegt eine Sinusspannung der Frequenz 5 MHz mit dem Effektivwert $U = 2 \text{ V}$. Berechnen Sie den Effektivwert der Spannung am offenen Ausgang der Leitung.



HINWEISE



A1.2.1: Definition der Verknüpfungen "+", "·", "×" und des Vektorbetrages. Orthonormalität der kartesischen Basisvektoren, Rechtschraube.

A1.2.2: Eine Skizze erspart oft formale Rechenarbeit.

A1.2.3: Auch hier ist eine Skizze hilfreich.

A1.2.4: Kartesische Koordinaten und kartesische Basisvektoren durch die Kreiszylinderkoordinaten und die zugehörigen Basisvektoren ausdrücken; in das gegebene Vektorfeld einsetzen.

A1.2.5: Gehen Sie von den Zusammenhängen zwischen den kartesischen Koordinaten und den Kugelkoordinaten bzw. den zugehörigen Basisvektoren aus.

A1.2.6: Wie ist der Operator „Richtungsableitung“ definiert? Darstellung in kartesischen Koordinaten.

A1.2.7: Entwicklungen von \vec{V} und \vec{f} nach kartesischen Basisvektoren.

A1.2.8: Entwicklungen nach einer kartesischen Basis.

A1.2.9: Am einfachsten ist hier die Verwendung von Tab. 1.3, es geht aber auch anders.

A1.2.10: Die Koordinatenlinien werden durch die beiden Kurvenscharen $\beta = \text{const}$ bzw. $u = \text{const}$ gebildet. Stellen Sie diese durch die kartesische Entwicklung des Ortsvektors dar und berechnen Sie dann die natürlichen Tangentenvektoren über partielle Ableitungen. Anschließend ist zu normieren.

A1.2.11: Entwickeln Sie \vec{V} in der kartesischen Basis.

A1.2.12: Benutzen Sie die Darstellungen von \vec{V} und \vec{r} in Kreiszylinderkoordinaten.

A1.2.13: Wie zeigt sich \vec{r} in Kugelkoordinaten? Tab. 1.3.

A1.2.14: Einbettung in Kugelkoordinaten, Skizze.

A1.2.15: Was bedeutet „Konservativität“ für ein Kraftfeld?

A1.2.16: Welche Bedingung muß ein Vektorfeld erfüllen, damit Sie es (lokal) als Gradient darstellen können?

A1.2.17: \mathcal{G} zerfällt in zwei Teilstücke, für die Sie die x -Koordinate als Kurvenparameter wählen können. Führen Sie dann alles auf Integrale über Funktionen allein von x zurück.

A2.1.1: Aus welchen Anteilen besteht die gesamte fiktive Ladung eines berandeten Körpers? Stellen Sie diese Anteile getrennt dar.

A2.1.2: Berechnen Sie die fiktive Ladungsverteilung und betten Sie diese in den leeren Raum ein. Dies liefert die aktuelle elektrische Feldstärke.

A2.1.3: Berechnen Sie die fiktive Stromverteilung und betten Sie diese in den leeren Raum ein. Dies liefert die aktuelle magnetische Flußdichte.

A2.1.4: Wie hängen die Vektorfelder \vec{P} und \vec{D} untereinander und mit den Raumladungen zusammen?

A2.1.5: Wie hängen die Vektorfelder \vec{M} und \vec{H} untereinander und mit den räumlichen Stromdichten zusammen?

A2.1.6: Wie hängt die fiktive Ladungsverteilung mit der elektrischen Polarisierung zusammen? Was bedeutet „homogen elektrisch polarisiert“?

A2.1.7: Wie hängt die fiktive Stromverteilung mit der Magnetisierung zusammen? Was bedeutet „homogen magnetisiert“?

A2.1.8: Bestimmen Sie zuerst die Felder \vec{E} , \vec{D} und \vec{P} .

A2.1.9: Gehen Sie von der elektrischen Stromdichte aus.

A2.1.10: Wie hängt das Magnetisierungsfeld mit den fiktiven Stromverteilungen zusammen?

A2.1.11: Beachten Sie die Variation des Magnetisierungsfeldes im Körperinneren und sein Sprungverhalten an der Körperoberfläche.

A2.1.12: Wie hängen \vec{D} und \vec{E} in einem linear, homogen, anisotrop dielektrischen Körper zusammen? Wie bestimmen Sie den Winkel zwischen zwei Vektoren?

A2.1.13: Setzen Sie \vec{J} und \vec{E} als schichtenweise konstant voraus und berücksichtigen Sie Sprungbedingungen. In $\vec{J} = \gamma \cdot \vec{E}$ werden mittlere Werte von \vec{J} und \vec{E} durch den gesuchten Tensor γ miteinander verknüpft.



- A2.2.1: Berechnen Sie zuerst \vec{E} und daraus ρ . Wenden Sie dann den Satz vom elektrischen Hullenfluß direkt an, um auch Singularitäten zu erfassen.
- A2.2.2: Die Gesamtladung ergibt sich durch Integration der Ladungsdichte. Wegen der Kugelsymmetrie ist die elektrische Feldstärke am einfachsten direkt über den Satz vom elektrischen Hullenfluß zu berechnen.
- A2.2.3: Führen Sie Kreiszylinderkoordinaten ein und berechnen Sie die Flächenstromdichte aus der Sprungbedingung an der Innenwand.
- A2.2.4: Welche Bedingung muß erfüllt sein, damit sich \vec{E} als Gradient eines Skalarfeldes darstellen läßt? \vec{B} finden Sie am einfachsten über das Induktionsgesetz, die Ladungs- und Stromverteilungen auf den Platten aus den Sprungbedingungen.
- A2.2.5: Im Ruhsystem der Elektronen liegt eine statische Ladungsverteilung vor, im Laborsystem zusätzlich eine Stromverteilung. Berechnen Sie die gesuchten Felder unter Ausnutzung der Kreiszylindersymmetrie direkt aus dem Satz vom elektrischen Hullenfluß und aus dem Ampère-Maxwell-Satz.



- A2.3.1: Entwickeln Sie zuerst $\llbracket S_n \rrbracket = \vec{n} \cdot \llbracket \vec{E} \times \vec{H} \rrbracket$ nach der angegebenen Produktformel und führen Sie dann passende Vertauschungen in den Spatprodukten durch.
- A2.3.2: Magnetische Flußdichte und elektrische Feldstärke lassen sich direkt aus dem Durchflutungssatz bzw. aus dem Induktionsgesetz gewinnen.
- A2.3.3: Gehen Sie von der Stromdichte aus, berechnen Sie über das lokale Ohmsche Gesetz die elektrische Feldstärke und über den Durchflutungssatz die magnetische Feldstärke.
- A2.3.4: Führen Sie Kreiszylinderkoordinaten ein, berechnen Sie aus dem Durchflutungssatz die magnetische Flußdichte und stellen Sie damit die Impulsflußdichte dar.
- A2.3.5: Aus der Stromverteilung folgt die magnetische Feldstärke, aus dem Induktionsgesetz die elektrische Feldstärke.
- A2.3.6: Zur Bestimmung der Impulsflußdichte benötigen Sie die magnetische Flußdichte innen und außen. Die Flächenkraftdichte hängt mit dem Sprung der Impulsflußdichte am Spulenmantel zusammen.
- A2.3.7: Stellen Sie die elektrische Feldstärke des Coulomb-Feldes allgemein als Funktion des Ortsvektors dar.
- A2.3.8: Stellen Sie \vec{B} in Kreiszylinderkoordinaten dar und beachten Sie
- $$\vec{\nabla} \rho = \vec{e}_\rho, \quad \rho \vec{\nabla} \theta \vec{e}_\alpha = -\vec{e}_\alpha \otimes \vec{e}_\rho.$$
- A2.3.9: Als Kontur für die Integration in der xy -Ebene erweist sich ein Halbkreis mit dem Radius $R \gg a$ in der rechten Halbebene zusammen mit dem Intervall $-R \leq y \leq R$ der y -Achse als günstig. Führen Sie den Grenzübergang $R \rightarrow \infty$ vor dem Berechnen der Teilintegrale durch.
- A2.3.10: Vergleichen Sie das magnetische Feld im Außenraum der gegebenen Stromverteilung mit dem von zwei Ersatz-Linienströmen entlang der Zylinderachsen.

- A2.3.11: Berechnen Sie zuerst die elektrische Feldstärke und integrieren Sie dann die zugehörigen Maxwell-Spannungen über eine Hülle, die durch einen schmalen Spalt zwischen den beiden Halbkugeln verläuft.
- A2.3.12: Wählen Sie als einen Teil der Hülle zur Integration der Maxwell-Spannungen die Ebene $x = 0$.
- A2.3.13: Spezialisieren Sie zuerst den Ausdruck für die magnetische Flußdichte allein der unteren Schiene für Orte entlang der oberen Schiene. Berechnen Sie damit die zugehörige Flächenkraftdichte und integrieren Sie diese über die Schienenbreite.
- A2.3.14: Die resultierende Kraft auf Teil 2 lässt sich durch Integration der Maxwell-Spannungen an dessen Oberfläche berechnen. Bestimmen Sie zuerst die magnetischen Flußdichten in den beiden Spalten.
- A2.3.15: Berechnen Sie zuerst die magnetische Flußdichte in kleinen Spalten zwischen den Dauermagnetplättchen und dem Körper. Werten Sie dann das Integral über die Maxwell-Spannung an einer Hülle aus, die durch diese Spalte verläuft.
- A2.3.16: Berechnen Sie zuerst die magnetischen Flußdichten in den beiden Spalten.
- A2.3.17: Erzeugen Sie durch Abheben des Magneten kleine Spalte und berechnen Sie in diesen die magnetische Flußdichte.
- A2.3.18: Werten Sie zur Berechnung der resultierenden Kraft den Impulsfluß an der Oberfläche des Schenkels S aus. Sie benötigen dafür die magnetischen Flußdichten in den beiden Spalten.
- A2.3.19: Bestimmen Sie zuerst die Werte der magnetischen Flußdichte im Innenraum und in den beiden Trennfugen.

- A3.1.1: Stellen Sie den Hohlraum durch Überlagerung der gleichförmig geladenen, großen Kugel mit einer ebenfalls gleichförmig, aber mit der entgegengesetzt gleich großen Dichte geladenen Kugel her. Die Teilfeldstärken sind dann direkt vektoriell zu addieren.
- A3.1.2: Formen Sie zuerst den Integranden in (1) unter Beachtung von $\vec{R} = \vec{R}'\vec{R} = -\vec{R}'\vec{R}'$ geeignet um. Wenden Sie dann die Green-Transformation zwischen Volums- und Flächenintegralen an.
- A3.1.3: Stellen Sie die Potentiale oder Feldstärken der Ersatzanordnungen mit allgemeinen Q' und Q'' aus Coulomb-Feldern dar. Bestimmen Sie dann Q' und Q'' so, daß bei $z = 0$ die Sprungbedingungen $\vec{n} \cdot [\vec{D}] = 0$ und $\vec{n} \times [\vec{E}] = \vec{0}$ erfüllt sind.
- A3.1.4: Welche der Koeffizienten in der angegebenen Reihe sind für den Innenraum $0 < \rho < a$ nullzusetzen? Beachten Sie, daß die verbleibende Reihe für $\varphi(a, \alpha)$ die Fourier-Entwicklung des gegebenen Randpotentials darstellt. Damit lassen sich die Koeffizienten durch $\varphi(a, \alpha)$ ausdrücken. Die durch Rückeinsetzen in $\varphi(\rho, \alpha)$ entstehende Reihe ist als geometrische Reihe darstellbar und kann deshalb summiert werden.
- A3.1.5: Die Poisson-Integrale aus A3.1.4 zerfallen mit den gegebenen Randwerten $\varphi(a_{1,2}, \alpha) = \pm U/2$ in jeweils zwei Integrale der allgemeinen Form
- $$\int \frac{dx}{a + b \cos(x)} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan \left[\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b} \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right] + \text{const}, \quad b^2 < a^2$$
- A3.1.6: Verwenden Sie zur Auswertung das unbestimmte Integral aus dem Hinweis zu A3.1.5.
- A3.1.7: (i) Bestimmen Sie $G(\vec{r}, \vec{r}')$ als Potential – bezogen auf Q/ϵ – einer Punktladung Q am Ort \vec{r}' über einem leitenden Halbraum (Spiegelung). Geben Sie $G(\vec{r}, \vec{r}')$ in Kreiszylinderkoordinaten an. (ii) Stellen Sie φ im ladungsfreien Bereich $z > 0$ durch die gegebenen Randwerte und G dar. (iii) Die Integralformel nach (ii) läßt sich für $\rho = 0$ elementar auswerten. (iv) Entwickeln Sie den Integranden aus (ii) in eine binomische Reihe.



- A3.2.1:** Zweidimensionales (ebenes) Problem. Separationslösungen der Laplace-Gleichung für das Skalarpotential in kartesischen Koordinaten. Bestimmen der freien Konstanten durch Anpassen an die gegebenen Randwerte. Feldstärke durch Gradientenbildung. Wie groß ist der Feldstärkebetrag bei $y = 0+$?
- A3.2.2:** Bestimmen Sie zuerst das elektrostatische Skalarpotential durch Anpassen einer Separationslösung der Laplace-Gleichung an die Randbedingungen und dann durch Gradientenbildung die zugehörige Feldstärke.
- A3.2.3:** Gehen Sie von einer Separationslösung der Laplace-Gleichung in kartesischen Koordinaten aus, die sich in x periodisch verhält. Bestimmen Sie dann schrittweise die freien Konstanten aus den gegebenen Randwerten.
- A3.2.4:** Gehen Sie von der in x periodischen Grundform der Separationslösung der Laplace-Gleichung aus. Erweitern Sie diese durch Vergleich mit der gegebenen Fourier-Entwicklung zu einer Reihenlösung.
- A3.2.5:** Zeichnen Sie ein Rechteck in der xy -Ebene und tragen Sie die Randwerte des Potentials ein. Können Sie eine passende Lösung der Laplace-Gleichung erraten? Wenn nicht, dann wenden Sie die übliche Separationsprozedur an, setzen aber bereits in den beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen die Separationskonstante gleich Null.
- A3.2.6:** Über den Produktansatz $\varphi(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$ lässt sich Potentialgleichung separieren (zwei Separationskonstanten, Symmetrie: $\varphi(x,y,z) = \varphi(y,x,z)$ und $\varphi(x,y,z)$ gerade in x, y, z). Konstruieren Sie damit eine Doppelreihe, deren Koeffizienten unter Benutzung der Orthogonalitätsrelationen für Kreisfunktionen aus $\varphi(x, y, \pm a/2) = U$ zu bestimmen sind.
- A3.2.7:** Tragen Sie den gegebenen Ansatz in die Laplace-Gleichung ein und wenden Sie dann zweimal das übliche Separationsargument an.
- A3.2.8:** Direkte Anwendung des Satzes vom elektrischen Hüllenfluß.

- A3.2.9: Berücksichtigen Sie im Produktansatz zum Lösen der Laplace-Gleichung in ebenen Polarkoordinaten von Anfang an die vorge schriebene Winkelabhängigkeit des Randpotentials.
- A3.2.10: Konstruieren Sie eine Separationslösung der Laplace-Gleichung mit der vorgegebenen Winkelabhängigkeit. Die Feldstärke folgt dann aus dem Skalarpotential durch Gradientenbildung.
- A3.2.11: Welche Differentialgleichung hat das elektrostatische Potential in den drei Bereichen zu erfüllen? Welchen Bedingungen muß das Potential für $\rho \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow \infty$ und an den Bereichsgrenzen $\rho = a$ und $\rho = b$ genügen?
- A3.2.12: Bestimmen Sie zuerst die elektrische Feldstärke und dann über die Sprungbedingung für die elektrische Flußdichte die Flächenladungs dichte.
- A3.2.13: Verwenden Sie die räumlichen Ableitungen in Kreiszylinderkoordinaten. Die freien Konstanten folgen aus den Randbedingungen: $E_\rho = 0$ bei $z = 0$ und $E_z = 0$ bei $\rho = b$, da die Metallteile als ideal elektrisch leitfähig angenommen werden, $K_z = \gamma_s E_z$ bei $\varphi = a$.
- A3.2.14: Stellen Sie die partiellen Ableitungen des Skalarpotentials nach den kartesischen Koordinaten durch die Koeffizienten der Feldstärke dar und lösen Sie die entstehenden Gleichungen. Analoges gilt für das Vektorpotential, das für ebene Felder nur eine Komponente quer zur Feldebene besitzt.
- A3.2.15: Bestimmen Sie zuerst ein Skalarpotential und daraus die Feldstärke. Der gesuchte elektrische Fluß läßt sich bequem über ein zugehöriges Vektorpotential (Flußfunktion) angeben.
- A3.2.16: Welchen Parameterwerten (u, v) entsprechen die Punkte auf der z -Achse? Drücken Sie die gesuchte Feldstärke durch das Vektor potential aus und beachten Sie, daß an $u = 0$ der Zusammenhang $\partial_x v = 1/\partial_v x$ besteht.

A3.2.17: Setzen Sie bei der Separation der Laplace-Gleichung in ebenen Polarkoordinaten die Separationskonstante gleich Null.

A3.2.18: Gehen Sie am besten von einer anliegenden Spannung aus und fixieren Sie damit die elektrische Feldstärke. Der Satz vom elektrischen Hüllenfluß stellt schließlich die Verbindung zur Ladung her.

A3.2.19: Versuchen Sie als Lösung ein Homogenfeld im Innenraum.

A3.2.20: Wie hängen die Feldstärke und das Skalarpotential zusammen? Die Klassifizierung in Grundtypen lässt sich über die radiale Abhängigkeit des Potentials vornehmen.

A3.2.21: Verwenden Sie Kugelkoordinaten. Die Elektrodenoberflächen lassen sich dann in eine Kegelschar $\theta = \text{const}$ einbetten.

A3.2.22: Bestimmen Sie durch Lösen des Potentialproblems für den Außenraum zuerst die Feldstärke außen an der Kugeloberfläche und dann die Impulsflußdichte.

A3.2.23: Mit der elektrischen Feldstärke an der Kugeloberfläche lässt sich direkt die Flächenladung an der Kugeloberfläche angeben. Das elektrische Moment ist das Ladungsmoment erster Ordnung (Dipolmoment).

A3.2.24: Konstruieren Sie eine passende Lösung in Kugelkoordinaten. Das gesuchte Feld im Innenraum erweist sich als homogen.

A3.2.25: Verwenden Sie den vorgeschlagenen Ansatz für die beiden Bereiche. Die vier freien Konstanten lassen sich aus den Randbedingungen widerspruchsfrei bestimmen.

A3.2.26: Die elektrische Feldstärke lässt sich für $r > 0$ einerseits als negativer Gradient des Skalarpotentials, andererseits als Rotation des Vektorpotentials darstellen. Im vorliegenden Fall ist ein rein azimuthal gerichtetes Vektorpotential zu erwarten.



- A3.3.1: Wenden Sie die globale Relaxationsgleichung auf eine Kugel um \mathcal{O} mit allgemeinem Radius an. Die Stromverteilung ergibt sich bei bekannter Ladungsverteilung aus dem Satz von der Erhaltung der elektrischen Ladung.
- A3.3.2: Gehen Sie von der Lösung der lokalen Relaxationsgleichung aus und wenden Sie den Satz von der Erhaltung der elektrischen Ladung an.
- A3.3.3: Die Lösung der lokalen Relaxationsgleichung und die Ladungserhaltung liefern die Ladungsverteilung. Die zugehörige Feldstärke lässt sich aus dem Satz vom elektrischen Hüllenfluß bestimmen.
- A3.3.4: Lokale Relaxationsgleichung, Kontinuitätsgleichung der elektrischen Ladung.
- A3.3.5: Bestimmen Sie die Raumladungsdichte als Lösung der zeitunabhängigen Relaxationsgleichung und daraus die Feldstärke über die lokale Form des Satzes vom elektrischen Hüllenfluss. Die Stromdichte besteht aus einem konduktiven und einem konvektiven Teil.



A3.4.1: Stellen Sie den stromfreien Bereich der Bohrung durch Überlagerung her.

A3.4.2: Formen Sie zuerst den Integranden in (1) unter Verwendung von $\vec{R} = R \vec{\nabla} R = -R \vec{\nabla}' R$ geeignet um. Wenden Sie dann die Green Transformation zwischen Volums- und Flächenintegralen an.

A3.4.3: Stellen Sie zuerst die Flußdichten für die beiden Bereiche mit den angegebenen Ersatz-Stromverteilungen als Integrale dar und zeigen Sie dann, daß mit diesen Lösungen in der ursprünglichen Anordnung die Sprungbedingungen an der Grenzfläche erfüllt sind.

A3.4.4: Gehen Sie von der Energiedichte eines magnetischen Feldes aus und formen Sie B^2 unter Verwendung von $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ und $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ passend um.

A3.4.5: Verwenden Sie $\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{H}$ und den Satz von Stokes.

A3.4.6: Bilden Sie $\vec{e} \cdot \vec{B}$ und $\vec{e} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$. Führen Sie dann zur Abkürzung den transversalen Laplace-Operator $\nabla_{\perp}^2 = \nabla^2 - (\vec{e} \cdot \vec{\nabla})^2$ ein.

A3.4.7: $\vec{B} = \vec{B}(z)$ lässt $\vec{A} = \vec{A}(z)$ vermuten. Was folgt dann aus der Maxwell-Eichung? Integrieren Sie anschließend $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$.



A3.5.1: Welche Richtung können Sie für das Vektorpotential einer ebenen magnetischen Flußverteilung o.B.d.A. annehmen? Integrieren Sie dann $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$. Beachten Sie schließlich den Zusammenhang zwischen den Flußdichtelinien und dem Vektorpotential eines ebenen Feldes.

A3.5.2: Berechnen Sie $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ in Kreiszylinderkoordinaten.

A3.5.3: Beachten Sie $\vec{A} = A(x,y) \vec{e}_z$ für ein ebenes Magnetfeld. Welche Gleichung für A folgt dann aus $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{0}$ und $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$? Was folgt dann aus der Sprungbedingung an $y = 0$? Wie sieht die Anordnung aus großer Entfernung $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \gg b$ aus?

A3.5.4: Abmessungen und Frequenz gestatten die Anwendung der dominant magnetischen Gleichungen. Welche Gleichung hat dann $A(x,y)$ (ebenes Feld!) zu erfüllen? Lösen Sie diese unter Beachtung der Symmetrie bezüglich $y = 0$ und der dort gegebenen Daten. Die gesuchten Flächenströme folgen aus den Sprungbedingungen bei $y = \pm a$.

A3.5.5: Formulieren Sie ein Randwertproblem für das magnetische Skalarpotential und passen Sie eine geeignete, in x periodische Lösung an die Randdaten an.

A3.5.6: Beachten Sie die Symmetrie des Problems. Welche Form besitzen die Feldstärkelinien? Wenden Sie zur Berechnung der Feldstärke den Durchflutungssatz an.

A3.5.7: Die Feldstärkelinien sind coaxiale Kreise. Damit lässt sich die Feldstärke aus dem Durchflutungssatz bestimmen: Außerhalb des Körpers unmittelbar, innerhalb des Körpers nach Darstellung der Stromdichte z.B. in Kugelkoordinaten.

A3.5.8: Formulieren Sie das Feldproblem für ein magnetisches Skalarpotential in Kugelkoordinaten.

A3.5.9: Verwenden Sie ein magnetisches Skalarpotential und lösen Sie das zugehörige Potentialproblem in Kugelkoordinaten.

A3.5.10: Berechnen Sie $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ in Kreiszylinderkoordinaten für die beiden Bereiche. Die vier freien Konstanten sind aus den Bedingungen für $\rho \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow \infty$ und den beiden Sprungbedingungen für $\rho = a$ zu bestimmen.

A3.5.11: Die Konstanten C_1 und C_2 lassen sich aus den Sprungbedingungen bestimmen. Berechnen Sie dann den gesamten Energieinhalt des magnetischen Feldes und lesen Sie daraus durch Vergleich mit $W = L I^2 / 2$ die Induktivität L ab.

- A4.2.1: Setzen Sie die Reihe in die Diffusionsgleichung ein. Was folgt daraus für T_n ? C_0 ergibt sich aus den Randbedingungen. Einsetzen der Reihe in die Anfangsbedingung und Verwenden der Orthogonalitätsrelationen für die Kreisfunktionen liefert die restlichen C_n . Welcher Zusammenhang besteht zwischen der magnetischen Feldstärke und der elektrischen Stromdichte?
- A4.2.2: (i) Tragen Sie die komplexen Ansätze in die lokalen Gleichungen des magnetischen Feldsystems ein. (ii) Die Divergenz des komplexen Poynting-Vektors lässt sich mit den Rotorgleichungen aus (i) umformen. Integration über einen räumlichen Bereich liefert die gesuchte Identität.
- A4.2.3: Wenden Sie das Induktionsgesetz direkt in der Integralform an (Drehsymmetrie!).
- A4.2.4: Führen Sie eine Bezugslänge ein und vergleichen Sie diese mit der Eindringtiefe. Dies beantwortet die Frage nach den „großen Frequenzen“. Die Stromverteilung präsentiert sich dann als Flächenstrom, der den Bereich $x > 0$ vollständig abschirmt.
- A4.2.5: Berechnen Sie die zur angegebenen magnetischen Feldstärke gehörende elektrische Feldstärke.
- A4.2.6: Berechnen Sie mit der angegebenen Lösung die komplexen Effektivwerte \underline{I} des Gesamtstroms und \underline{U} der Spannung bei $x = 0$.
- A4.2.7: Bestimmen Sie zuerst die magnetische Feldstärke im Zwischenraum ohne Berücksichtigung von Randstörungen.
- A4.2.8: Ermitteln Sie zuerst \hat{H} und dann über den Zusammenhang der Stromdichte mit der magnetischen Feldstärke die elektrische Randfeldstärke \hat{E} . Der Realteil des komplexen Poynting-Vektors liefert die flächenbezogene Verlustleistung.

A4.2.9: Führen Sie der Übersichtlichkeit halber $\alpha = d/\delta$ und $F(\alpha) = P''\gamma d/\hat{H}_o^2$ ein. Eine Skizze von $F(\alpha)$ kann hilfreich sein.

A4.2.10: Überlagern Sie die beiden Stromanteile und berechnen Sie damit den Zeitmittelwert des Poynting-Flusses, der längenbezogen in den Leiter eintritt.

A4.2.11: Formulieren Sie das Problem zur Bestimmung der magnetischen Feldstärke $\vec{H} = H \vec{e}_\alpha$ (Kreiszylinderkoordinaten) und lösen Sie dieses für den eingeschwungenen Zustand (führt auf Bessel-Funktionen). Bestimmen Sie daraus die Randstromdichte und die elektrische Randfeldstärke. Über den radialen Fluß des komplexen Poynting-Vektors von außen in den Draht (Scheinleistung) kann dann die längenbezogene innere Impedanz bestimmt werden.

A5.1.1: (i) Tragen Sie die komplexen Ansätze in die Maxwell-Gleichungen ein. (ii) Die Divergenz des komplexen Poynting-Vektors lässt sich mit den Rotorgleichungen aus (i) umformen. Integration über einen räumlichen Bereich liefert die gesuchte Identität.

A5.1.2: Berechnen Sie \vec{A} wie angegeben und daraus \vec{B} durch Rotorbildung.

A5.1.3: Bestimmen Sie den Poynting-Vektor, dessen zeitlichen Mittelwert und den zugeordneten Fluß durch eine Kugelfläche.

A5.1.4: Die gesuchten Größen folgen aus den lokalen, komplexen Formen des Ampere-Maxwell-Satzes und der Ladungserhaltung oder des Satzes vom elektrischen Hüllenfluß.

A5.1.5: Berechnen Sie direkt $E_{\text{eff}} = |\vec{E}|/\sqrt{2}$ aus dem angegebenen Ausdruck für \vec{E} .

A5.1.6: Wie groß ist der Maximalwert der Strahlstärke? Berechnen Sie den Mittelwert der Strahlstärke durch Integration über den vollen Raumwinkel und anschließender Division durch 4π .



- A5.2.1: Wie hängen die elektrodynamischen Potentiale mit der elektrischen Feldstärke und mit der magnetischen Flußdichte zusammen?
- A5.2.2: Stellen Sie $\vec{H}_{1,2}$ und $\theta_{1,2}$ zuerst in kartesischen Koordinaten dar und bilden Sie dann die Summe $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$.
- A5.2.3: Wie sieht die zugehörige magnetische Feldstärke aus? Berechnen Sie den Poynting-Vektor und dessen Mittelwert.
- A5.2.4: Drücken Sie zuerst die Energiedichte durch die elektrische Feldstärke aus und verwenden Sie dann die Definitionen der gesuchten Größen.
- A5.2.5: Drücken Sie den Mittelwert des Poynting-Vektors durch die Feldstärkeamplituden aus.
- A5.2.6: Wie groß ist die Energieflußdichte an einer Kugelfläche mit dem Radius 10 km um die Punktquelle?
- A5.2.7: Bestimmen Sie zuerst die zugehörigen Komponenten der magnetischen Feldstärke. Der Zeitmittelwert des Poynting-Vektors lässt sich dann recht einfach aus dessen komplexer Form (s. A5.1.1) berechnen.
- A5.2.8: Sie können die elektrische Feldstärke beispielsweise aus der lokalen Form des Ampere-Maxwell-Satzes berechnen.
- A5.2.9: Die einfallende und die reflektierte Welle haben entgegengesetzte Ausbreitungsrichtungen. Welche Bedingung muß die Tangentialkomponente der gesamten elektrischen Feldstärke an einem idealen Spiegel erfüllen?
- A5.2.10: Welche Beziehung besteht generell zwischen der elektrischen und der magnetischen Feldstärke einer ebenen freien Raumwelle? Das gesamte Wellenfeld setzt sich aus drei Wellen dieser Art zusammen, die über die Sprungbedingungen an der Grenzschicht miteinander verknüpft sind.

A5.2.11: Wie ist die Phasengeschwindigkeit, wie die Gruppengeschwindigkeit definiert?

A5.2.12: Werten Sie die beiden Maxwell-Rotorgleichungen zusammen mit den Materialgleichungen aus.

A5.2.13: Setzen Sie $\gamma = \alpha + j\beta$ in die gegebene Ausbreitungsbedingung ein. Aus den beiden entstehenden, reellen Gleichungen eliminieren Sie β .

A5.2.14: Werten Sie das den Maxwell-Gleichungen im Fall ebener, homogener Sinuswellen entsprechende algebraische Gleichungssystem für die Amplitudenvektoren zusammen mit den Materialgleichungen aus.

A5.2.15: Wie sieht $\vec{E}(\vec{r})$ für homogene, ebene Sinuswellen aus? Damit folgt aus der angegebenen, reduzierten Wellengleichung die gesuchte Dispersionsbeziehung.

A5.2.16: Setzen Sie $\lambda_0 = c_0/f$ zur Darstellung der Funktion $k(\omega)$ ein. Wie ist die Phasengeschwindigkeit, wie die Gruppengeschwindigkeit definiert?

A5.2.17: Lösen Sie die Helmholtz-Gleichung für den Rechteckquerschnitt über einen Produktansatz nach der Separationsmethode. Die homogenen Randbedingungen für TM- und TE-Wellen führen auf Eigenwertprobleme. Aus den jeweils kleinsten Eigenwerten zu nicht-trivialen Eigenformen ergeben sich die gesuchten Grenzfrequenzen.

A5.2.18: Wie groß ist die Wellenlänge? Wie sieht das elektrische Feld einer TEM-Welle in jeder Ebene $z = \text{const}$ unserer kreiszyklindrischen Struktur notwendig aus? Was folgt daraus für die ρ -Abhängigkeit? Die z - und t -Abhängigkeiten müssen denen einer stehenden Sinuswelle entsprechen.

A5.2.19: Drücken Sie zuerst $\langle S_z \rangle = \operatorname{Re}[\frac{1}{2}(\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot \hat{e}_z]$ durch die Funktion ξ_z aus und integrieren Sie dann über \mathcal{A} . Welche Bedingung muß ξ_z am Rand $\partial\mathcal{A}$ erfüllen?

- A5.3.1: Wie hängt die Wellenimpedanz von den Leitungsparametern L' und C' ab? Geben Sie diese für die drei Leitungen an.
- A5.3.2: Drücken Sie über die Anzahlen der Spannungsschichten und der Flußröhren die elektrische Spannung und den längenbezogenen elektrischen Fluß zwischen den beiden Leiterbahnen durch den Potentialschritt $\Delta\varphi$ aus. Der Kapazitätsbelag ergibt sich daraus als Quotient ψ'/U .
- A5.3.3: Wenn die Korrespondenz $X(s) \leftrightarrow x(\tau)$ bekannt ist, wie finden Sie dann die zu $X(s)/s^2$ gehörende Originalfunktion?
- A5.3.4: Stellen Sie die Wellen als Überlagerung von hin- und rücklaufenden Komponenten dar. Geben Sie dann speziell eine Differentialgleichung für $U(t)$ an und lösen Sie diese.
- A5.3.5: Wie groß ist der Scheitelwert des ersten, in das Zwischenstück übertragenen Spannungspulses?
- A5.3.6: Betrachten Sie das Zwischenstück als Zweitor. Berücksichtigen Sie überdies, daß auf den angeschlossenen Leitungsstücken keine rücklaufenden Komponenten bestehen sollen.
- A5.3.7: Auf welche Form reduziert sich die allgemeine Lösung im reflexionsfreien Fall? Berücksichtigen Sie die Übergangsbedingungen bei $z = 0$.
- A5.3.8: Welche Bedingungen müssen die einzelnen Wellenkomponenten an der Verzweigungsstelle erfüllen?
- A5.3.9: Verwenden Sie die Ersatzschaltung für ein Leitungselement.
- A5.3.10: Führen Sie eine Art von Kurvendiskussion für einen allgemeinen, aber festen Zeitpunkt durch.

A5.3.11: Leiten Sie, etwa von der Ersatzschaltung für ein Leitungselement ausgehend, zuerst eine Differentialgleichung für $U(x)$ zusammen mit den Randbedingungen ab. Bestimmen Sie dann deren allgemeine Lösung und passen Sie diese an die Randbedingungen an.

A5.3.12: Drücken Sie die beschriebenen Impedanzen zuerst allgemein über die Zweitorgleichungen durch die Wellenimpedanz, den komplexen Ausbreitungskoeffizienten und die Leitungslänge aus.

A5.3.13: Multiplizieren Sie die erste der beiden angegebenen Leitungsgleichungen mit dem Strom, die zweite mit der Spannung und addieren Sie die beiden Ausdrücke.

A5.3.14: Wie sehen die Verläufe der komplexen Effektivwerte von Strom und Spannung entlang der Leitung bei Abschluß mit der Wellenimpedanz aus? Bilden Sie damit die komplexe Scheinleistung.

A5.3.15: Welche Abschlußimpedanz stellt die Parallelschaltung der beiden offenen Leitungsstücke für das erste Leitungsstück dar? Berechnen Sie damit dessen Eingangsimpedanz.

A5.3.16: Adaptieren Sie die Zweitorgleichungen des Leitungsstücks für den vorliegenden Fall.

LÖSUNGEN



A1.2.1 Elementare Vektoralgebra:

- $\vec{a} + \vec{b} = (\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z) + (\vec{e}_x - \vec{e}_y) = 2\vec{e}_x + \vec{e}_z$;
„geometrische Summe“, Parallelogrammregel.
- $\vec{a} + \vec{c} = 2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y - \vec{e}_z$.
- $|\vec{a} - \vec{c}| = |-\vec{e}_y + 3\vec{e}_z| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$.
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z) \cdot (\vec{e}_x - \vec{e}_y) = 0$;
die beiden Vektoren sind orthogonal.
- $\vec{a} \cdot \vec{c} = 1$.
- $\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| |\vec{c}|} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$.
- $\vec{a} \times \vec{b} = (\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z) \times (\vec{e}_x - \vec{e}_y) = -\vec{e}_z - \vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_x$
 $= \vec{e}_y + 2\vec{e}_z$;
steht senkrecht auf die von \vec{a} und \vec{b} aufgespannte Ebene.
- $\sin(\alpha) = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = 1$.
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z) \cdot (2\vec{e}_z + 2\vec{e}_y + \vec{e}_x + 2\vec{e}_x)$
 $= 2+2+3 = 7$; „Spatprodukt“.
- $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \underbrace{\vec{a} \cdot \vec{c}}_1 - \vec{c} \underbrace{\vec{a} \cdot \vec{b}}_0 = \vec{b} = \vec{e}_x - \vec{e}_y$.
- $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b} \underbrace{\vec{a} \cdot \vec{c}}_1 - \vec{a} \underbrace{\vec{b} \cdot \vec{c}}_{-1} = \vec{a} + \vec{b} = 2\vec{e}_x + \vec{e}_z$. ■

A1.2.2 Abstand in Kreiszylinderkoordinaten:

Aus Abb. A 1.2.2 ist ohne weitere Rechnung für den gesuchten Abstand sofort

$$\ell = \sqrt{2} \cdot 10 \text{ m} = 14,14 \text{ m}$$

ablesbar.

Für zwei Punkte P_1 und P_2 in allgemeiner Lage mit den kartesischen Koordinaten (x_1, y_1, z_1) bzw. (x_2, y_2, z_2) und den zugehörigen Kreiszylinderkoordinaten (ρ_1, α_1, z_1) bzw. (ρ_2, α_2, z_2) haben wir den Abstand

$$\ell = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

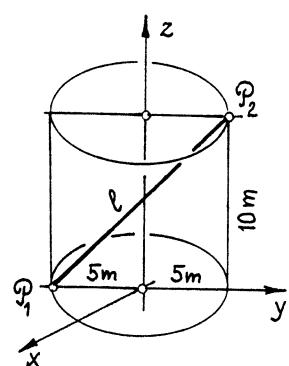


Abb. A 1.2.2

wobei

$$x_2 - x_1 = \rho_2 \cos(\alpha_2) - \rho_1 \cos(\alpha_1),$$

$$y_2 - y_1 = \rho_2 \sin(\alpha_2) - \rho_1 \sin(\alpha_1)$$

und damit

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = \rho_2^2 + \rho_1^2 - 2\rho_2 \rho_1 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)$$

gilt (vgl. „Kosinussatz“). Daraus folgt

$$\ell = \sqrt{\rho_2^2 + \rho_1^2 - 2\rho_2 \rho_1 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) + (z_2 - z_1)^2}. \blacksquare$$

A1.2.3 Richtung in Kreiszylinderkoordinaten:

Aus dem gerichteten Abstand (Abb. A 1.2.3)

$$\vec{r}_{QP} = \rho \vec{e}_\varphi - h \vec{e}_z$$

ergibt sich die Richtung

$$\vec{e}_{QP} = \frac{\vec{r}_{QP}}{|\vec{r}_{QP}|} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + h^2}} \vec{e}_\varphi - \frac{h}{\sqrt{\rho^2 + h^2}} \vec{e}_z.$$

Dabei hängt \vec{e}_φ vom Winkel α ab. ■

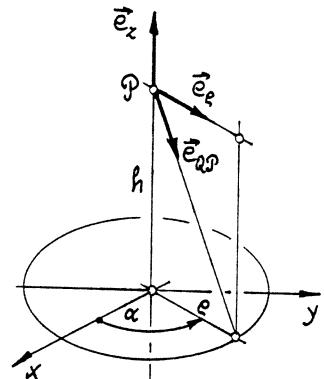


Abb. A 1.2.3

A1.2.4 Vektorfeld in kartesischen und in Kreiszylinderkoordinaten:

Die Gleichungen

$$x = \rho \cos(\alpha), \quad y = \rho \sin(\alpha), \quad z = z,$$

$$\vec{e}_x = \cos(\alpha) \vec{e}_\varphi - \sin(\alpha) \vec{e}_\alpha,$$

$$\vec{e}_y = \sin(\alpha) \vec{e}_\varphi + \cos(\alpha) \vec{e}_\alpha,$$

$$\vec{e}_z = \vec{e}_z,$$

geben den Zusammenhang zwischen den kartesischen Koordinaten und den Kreiszylinderkoordinaten bzw. zwischen den entsprechenden Basisfeldern an. Einsetzen in das gegebene Vektorfeld liefert

$$\begin{aligned} \vec{f}(\vec{r}) &= \rho \sin(\alpha) [\cos(\alpha) \vec{e}_\varphi - \sin(\alpha) \vec{e}_\alpha] \\ &\quad + \rho \cos(\alpha) [\sin(\alpha) \vec{e}_\varphi + \cos(\alpha) \vec{e}_\alpha] + \frac{\rho^2 \cos^2(\alpha)}{\sqrt{\rho^2 \cos^2(\alpha) + \rho^2 \sin^2(\alpha)}} \vec{e}_z \\ &= 2\rho \cos(\alpha) \sin(\alpha) \vec{e}_\varphi + \rho [\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)] \vec{e}_\alpha \\ &\quad + \rho \cos^2(\alpha) \vec{e}_z, \end{aligned}$$

also

$$\vec{f}(\vec{r}) = \rho \sin(2\alpha) \vec{e}_\varphi + \rho \cos(2\alpha) \vec{e}_\alpha + \frac{1}{2} \rho [1 + \cos(2\alpha)] \vec{e}_z. \blacksquare$$

A1.2.5 Tensorfeld in kartesischen und in Kugelkoordinaten:

Ausgehend von den Zusammenhängen zwischen den kartesischen und den Kugelkoordinaten bzw. zwischen den zugehörigen Basisvektoren erhalten wir zunächst

$$r^2 \sin^2(\theta) = r^2 - r^2 \cos^2(\theta) = r^2 - z^2 = x^2 + y^2 := \rho^2,$$

$$\cos(\theta) \vec{e}_r - \sin(\theta) \vec{e}_\theta = \vec{e}_z,$$

$$\vec{e}_\alpha = -\sin(\alpha) \vec{e}_x + \cos(\alpha) \vec{e}_y = -\frac{y}{\rho} \vec{e}_x + \frac{x}{\rho} \vec{e}_y,$$

insgesamt also

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\vec{r}) &= \rho^2 \vec{e}_z \otimes \left(-\frac{y}{\rho} \vec{e}_x + \frac{x}{\rho} \vec{e}_y \right) \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} (-y \vec{e}_z \otimes \vec{e}_x + x \vec{e}_z \otimes \vec{e}_y). \blacksquare \end{aligned}$$

A1.2.6 Richtungsableitung eines Skalarfeldes:

Mit der Richtung (Einsvektor)

$$\vec{e} = \vec{\alpha} / |\vec{\alpha}| = (3\vec{e}_x + 2\vec{e}_y - \vec{e}_z) / \sqrt{14}$$

ergibt sich die zugehörige Richtungsableitung

$$\begin{aligned} \vec{e} \cdot \vec{\nabla} f &= \frac{1}{\sqrt{14}} (3\vec{e}_x + 2\vec{e}_y - \vec{e}_z) \cdot (\vec{e}_x \partial_x + \vec{e}_y \partial_y + \vec{e}_z \partial_z) f \\ &= \frac{K}{\sqrt{14}} (3\partial_x + 2\partial_y - \partial_z) (3xy^3 + y^2z^2 - z^3x) \\ &= \frac{K}{\sqrt{14}} (9y^3 - 3z^3 + 18xy^2 + 4yz^2 - 2y^2z + 3z^2x), \end{aligned}$$

im angegebenen Punkt $(x_0, y_0, z_0) = (1, 3, -2) \text{ cm}$ also

$$\begin{aligned} (\vec{e} \cdot \vec{\nabla} f)(\vec{r}_0) &= \frac{K}{\sqrt{14}} (9 \cdot 27 + 3 \cdot 8 + 18 \cdot 9 + 4 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 9 \cdot 2 + 3 \cdot 4) \text{ cm}^3 \\ &= K \cdot 140,31 \text{ cm}^3. \blacksquare \end{aligned}$$

A1.2.7 Identitäten:

Wir setzen generell zweimalige stetige Differenzierbarkeit der Koeffizientenfunktionen bezüglich der kardesischen Koordinaten voraus. Es sind dann die gemischten partiellen Ableitungen vertauschbar, also

$$\partial_i \partial_j f_k = \partial_j \partial_i f_k ; \quad i, j, k = x, y, z.$$

$$\begin{aligned} (i) \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{f}) &= (\vec{e}_x \partial_x + \vec{e}_y \partial_y + \vec{e}_z \partial_z) \cdot [\vec{e}_x (\partial_y f_z - \partial_z f_y) + \vec{e}_y (\partial_z f_x - \partial_x f_z) \\ &\quad + \vec{e}_z (\partial_x f_y - \partial_y f_x)] \\ &= \partial_x (\partial_y f_z - \partial_z f_y) + \partial_y (\partial_z f_x - \partial_x f_z) + \partial_z (\partial_x f_y - \partial_y f_x) \\ &= (\partial_y \partial_z - \partial_z \partial_y) f_x + (\partial_z \partial_x - \partial_x \partial_z) f_y + (\partial_x \partial_y - \partial_y \partial_x) f_z = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii) \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} g) &= (\vec{e}_x \partial_x + \vec{e}_y \partial_y + \vec{e}_z \partial_z) \times (\vec{e}_x \partial_x g + \vec{e}_y \partial_y g + \vec{e}_z \partial_z g) \\ &= (\vec{e}_x \partial_x \partial_y - \vec{e}_y \partial_x \partial_z - \vec{e}_z \partial_y \partial_x + \vec{e}_x \partial_y \partial_z + \vec{e}_y \partial_z \partial_x - \vec{e}_x \partial_z \partial_y) g \\ &= \vec{e}_x (\partial_y \partial_z - \partial_z \partial_y) g + \vec{e}_y (\partial_z \partial_x - \partial_x \partial_z) g + \vec{e}_z (\partial_x \partial_y - \partial_y \partial_x) g = \vec{0}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (iii) \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{f}) &= (\vec{e}_x \partial_x + \vec{e}_y \partial_y + \vec{e}_z \partial_z) \times [\vec{e}_x (\partial_y f_z - \partial_z f_y) + \vec{e}_y (\partial_z f_x - \partial_x f_z) \\ &\quad - \vec{e}_z (\partial_x f_y - \partial_y f_x)] \\ &= \vec{e}_x [\partial_y (\partial_x f_z - \partial_z f_x) - \partial_z (\partial_z f_x - \partial_x f_z)] + \vec{e}_y [\partial_z (\partial_y f_z - \partial_z f_y) \\ &\quad - \partial_x (\partial_x f_y - \partial_y f_x)] + \vec{e}_z [\partial_x (\partial_z f_x - \partial_x f_z) - \partial_y (\partial_y f_z - \partial_z f_y)] \\ &= \vec{e}_x [\partial_x (\partial_x f_x + \partial_y f_y + \partial_z f_z) - (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) f_x] \\ &\quad + \vec{e}_y [\partial_y (-\partial_x^2 - \partial_z^2) - (-\partial_x^2 - \partial_z^2) f_y] \\ &\quad + \vec{e}_z [\partial_z (-\partial_x^2 - \partial_y^2) - (-\partial_x^2 - \partial_y^2) f_z] \\ &= \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{f}) - \nabla^2 \vec{f}. \end{aligned}$$

Etwas eleganter lassen sich die Beziehungen unter Verwendung des Summationszeichens zeigen, z.B.

$$\begin{aligned} (iii) \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{f}) &= \sum_{i,j,k} (\vec{e}_i \partial_i) \times [(\vec{e}_j \partial_j) \times (\vec{e}_k \partial_k)] = \sum_{i,j,k} \vec{e}_i \times (\vec{e}_j \times \vec{e}_k) \partial_i \partial_j f_k \\ &= \sum_{i,j,k} (\vec{e}_j \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k - \vec{e}_k \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) \partial_i \partial_j f_k \\ &= \underbrace{\sum_j \vec{e}_j \partial_j}_{\vec{\nabla}} \underbrace{\sum_k \vec{e}_k f_k}_{\vec{\nabla} \cdot \vec{f}} - \underbrace{\sum_j \partial_j \sum_k \vec{e}_k f_k}_{\nabla^2} \underbrace{\vec{f}}_{\vec{f}} . \end{aligned}$$

Die Gültigkeit aller drei Beziehungen ist unter Beachtung des Vektorcharakters von \vec{V} direkt einzusehen:

$$(i) \text{ „Spatprodukt“ } \vec{V} \cdot (\underbrace{\vec{V}_x \vec{f}}_{\vec{0}}) = (\underbrace{\vec{V}_x \vec{V}}_{\vec{0}}) \cdot \vec{f};$$

$$(ii) \vec{V}_x (\underbrace{\vec{V} g}_{\vec{0}}) = (\underbrace{\vec{V}_x \vec{V}}_{\vec{0}}) g;$$

(iii) Entwicklung des „Tripelproduktes“

$$\vec{V}_x (\vec{V}_x \vec{f}) = \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{f}) - \vec{V} \cdot \vec{V} \vec{f}. \blacksquare$$

A1.2.8 Ortsvektor:

In Bezug auf ein kartesisches System ist

$$\vec{r} = (x - x_0) \vec{e}_x + (y - y_0) \vec{e}_y + (z - z_0) \vec{e}_z,$$

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Damit haben wir

- $\vec{V} r = (\vec{e}_x \partial_x + \vec{e}_y \partial_y + \vec{e}_z \partial_z) \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$
 $= \frac{x - x_0}{\sqrt{r}} \vec{e}_x + \frac{y - y_0}{\sqrt{r}} \vec{e}_y + \frac{z - z_0}{\sqrt{r}} \vec{e}_z = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{e}_r.$
- $\vec{V} \cdot \vec{r} = (\vec{e}_x \partial_x + \vec{e}_y \partial_y + \vec{e}_z \partial_z) \cdot [(x - x_0) \vec{e}_x + (y - y_0) \vec{e}_y + (z - z_0) \vec{e}_z]$
 $= \partial_x (x - x_0) + \partial_y (y - y_0) + \partial_z (z - z_0) = 3.$
- $\vec{V}_x \vec{r} = (\vec{e}_x \partial_x + \vec{e}_y \partial_y + \vec{e}_z \partial_z) \times [(x - x_0) \vec{e}_x + (y - y_0) \vec{e}_y + (z - z_0) \vec{e}_z]$
 $= \vec{e}_x [\partial_y (z - z_0) - \partial_z (y - y_0)] + \vec{e}_y [\partial_z (x - x_0) - \partial_x (z - z_0)] + \vec{e}_z [\partial_x (y - y_0) - \partial_y (x - x_0)] = \vec{0}.$
- $\vec{V} \cdot \vec{e}_r = \vec{V} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{1}{r} \vec{V} \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \vec{V} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{3}{r} - \frac{1}{r^2} \vec{r} \cdot \vec{V} r = \frac{2}{r}.$
- $\vec{V}_x \vec{e}_r = \vec{V}_x \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{1}{r} \underbrace{\vec{V}_x \vec{r}}_{\vec{0}} - \vec{r} \times \vec{V} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \vec{r} \times \underbrace{\vec{V} r}_{\vec{0}} = \vec{0}.$

• Wegen

$$\vec{f} \cdot \vec{V} \vec{r} = (f_x \partial_x + f_y \partial_y + f_z \partial_z) [(x - x_0) \vec{e}_x + (y - y_0) \vec{e}_y + (z - z_0) \vec{e}_z]$$
 $= f_x \vec{e}_x + f_y \vec{e}_y + f_z \vec{e}_z = \vec{f}$

(folgt auch direkt aus $\vec{f} \cdot \vec{V} \vec{r} = \vec{f} \cdot (\vec{V} \otimes \vec{r}) = \vec{f} \cdot \vec{g} = \vec{f}$)

gilt

$$\begin{aligned} \vec{f} \cdot \vec{V} \vec{e}_r &= \vec{f} \cdot \vec{V} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{1}{r} \vec{f} \cdot \vec{V} \vec{r} + \vec{r} \vec{f} \cdot \vec{V} \left(\frac{1}{r} \right) \\ &= \frac{1}{r} \vec{f} - \frac{\vec{r}}{r^2} \vec{f} \cdot \vec{V} r = \frac{1}{r} (\vec{f} - \vec{e}_r \vec{e}_r \cdot \vec{f}). \blacksquare \end{aligned}$$

A1.2.9 Basisvektoren:

- (i) Die kartesischen Basisvektorfelder sind konstant, daher verschwinden insbesondere deren Divergenz und Rotation.
- (ii) Kreiszylinderkoordinaten: Tab. 1.3 liefert, wenn wir für \vec{f} oder Reihe nach $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\alpha, \vec{e}_z$ einsetzen,

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{e}_\rho &= \frac{1}{\rho} \partial_\rho \rho = \frac{1}{\rho}, & \vec{\nabla} \times \vec{e}_\rho &= \vec{0}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{e}_\alpha &= 0, & \vec{\nabla} \times \vec{e}_\alpha &= \vec{e}_z \frac{1}{\rho} \partial_\rho \rho = \frac{1}{\rho} \vec{e}_z, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{e}_z &= 0, & \vec{\nabla} \times \vec{e}_z &= \vec{0}.\end{aligned}$$

- (iii) Kugelkoordinaten: Aus Tab. 1.3 ergibt sich in diesem Fall

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{e}_r &= \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 = \frac{2}{r}, & \vec{\nabla} \times \vec{e}_r &= \vec{0}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{e}_\theta &= \frac{\partial_\theta \sin(\theta)}{r \sin(\theta)} = \frac{\cot(\theta)}{r}, & \vec{\nabla} \times \vec{e}_\theta &= \vec{e}_\alpha \frac{1}{r} \partial_r r = \frac{1}{r} \vec{e}_\alpha, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{e}_\alpha &= 0, & \vec{\nabla} \times \vec{e}_\alpha &= \vec{e}_r \frac{\partial_\theta \sin(\theta)}{r \sin(\theta)} - \vec{e}_\theta \frac{\partial_r r}{r} \\ &&&= \frac{1}{r} [\cot(\theta) \vec{e}_r - \vec{e}_\theta].\end{aligned}$$

Einige der Ausdrücke sind natürlich sofort angebar, etwa $\vec{\nabla} \cdot \vec{e}_z$ oder $\vec{\nabla} \times \vec{e}_r$; andere lassen sich einfach berechnen, z.B.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{e}_r = \vec{\nabla} \cdot (\vec{r}/r) = \frac{1}{r} \left(\overbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{r}}^3 - \vec{e}_r \cdot \overbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{r}}^{\vec{e}_r} \right) = 2/r. \blacksquare$$

A1.2.10 Ebene Bipolarkoordinaten:

- (i) Die Koordinatenlinien werden von zwei orthogonalen Kreisscharen gebildet, Abb. A1.2.10. Ihre Konfiguration entspricht dem ebenen elektrostatischen Feld bzw. dem ebenen stationären magnetischen Feld zweier paralleler Leiter.

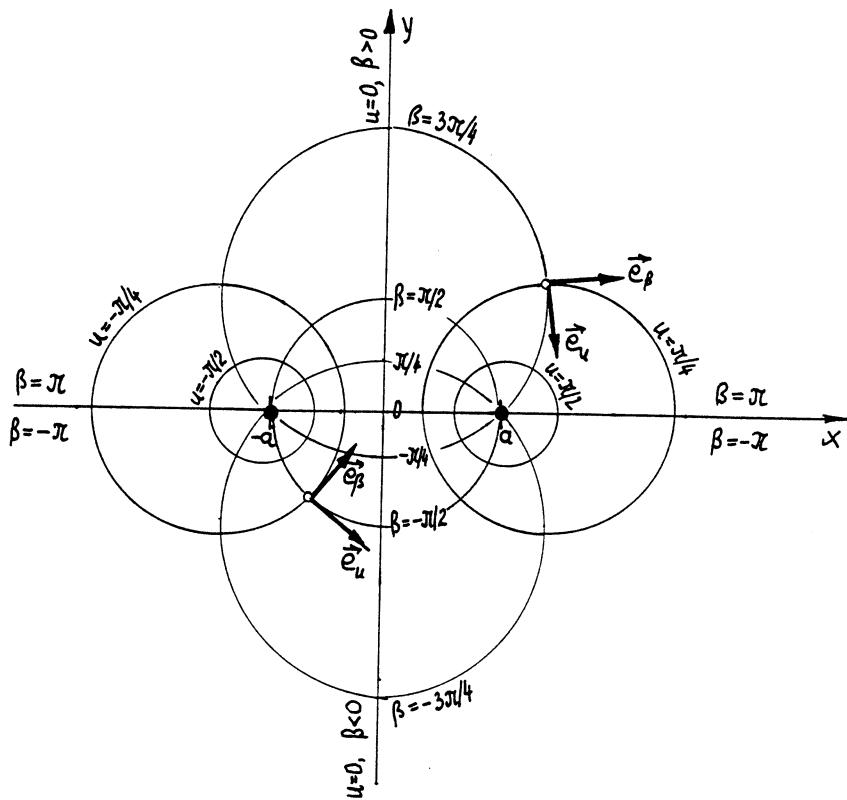


Abb. A 1.2.10

- (ii) Die Koordinatenlinien werden durch den Ortsvektor

$$\vec{r} = x(u, \beta) \vec{e}_x + y(u, \beta) \vec{e}_y$$

mit $\beta = \text{const}$ bzw. mit $u = \text{const}$ beschrieben. Für $\beta = \text{const}$ gilt

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= (\partial_u x) du \vec{e}_x + (\partial_u y) du \vec{e}_y, \\ \text{d.h.} \quad \partial_u \vec{r} &= (\partial_u x) \vec{e}_x + (\partial_u y) \vec{e}_y \end{aligned}$$

ist das natürliche Tangentenvektorfeld an den Koordinatenlinien $\beta = \text{const}$ (weist lokal in Richtung wachsender u) und

$$\vec{e}_u = (\partial_u \vec{r}) / |\partial_u \vec{r}|$$

ist das zugehörige normierte Tangentenvektorfeld. Analog liefert

$$\vec{e}_\beta = (\partial_\beta \vec{r}) / |\partial_\beta \vec{r}|$$

das normierte Tangentenvektorfeld, das der zweiten Schar von Koordinatenlinien ($u = \text{const}$) zugeordnet ist.

Aus den gegebenen Funktionen $x(u, \beta)$ und $y(u, \beta)$ berechnen wir

$$\partial_u x = \partial_\beta y = \alpha \frac{1 + \cosh(u) \cos(\beta)}{[\cosh(u) + \cos(\beta)]^2},$$

$$\partial_\beta x = -\partial_u y = \alpha \frac{\sinh(u) \sin(\beta)}{[\cosh(u) + \cos(\beta)]^2}$$

und damit

$$\begin{aligned} |\partial_u \vec{r}| &= \sqrt{(\partial_u x)^2 + (\partial_u y)^2} \\ &= |\partial_\beta \vec{r}| = \sqrt{(\partial_\beta x)^2 + (\partial_\beta y)^2} = \frac{\alpha}{\cosh(u) + \cos(\beta)}. \end{aligned}$$

Somit sind

$$\vec{e}_u = \frac{[1 + \cosh(u) \cos(\beta)] \vec{e}_x - \sinh(u) \sin(\beta) \vec{e}_y}{\cosh(u) + \cos(\beta)},$$

$$\vec{e}_\beta = \frac{\sinh(u) \sin(\beta) \vec{e}_x + [1 + \cosh(u) \cos(\beta)] \vec{e}_y}{\cosh(u) + \cos(\beta)}$$

die gesuchten Basisvektorfelder. Sie sind nicht nur normiert, sondern wegen $\vec{e}_u \cdot \vec{e}_\beta = 0$ auch orthogonal.

(iii) Die alternative Entwicklung

$$\vec{f} = f_x \vec{e}_x + f_y \vec{e}_y = f_u \vec{e}_u + f_\beta \vec{e}_\beta$$

liefert über das Skalarprodukt mit \vec{e}_u

$$\begin{aligned} f_u &= \vec{e}_u \cdot \vec{e}_x f_x + \vec{e}_u \cdot \vec{e}_y f_y \\ &= \frac{1 + \cosh(u) \cos(\beta)}{\cosh(u) + \cos(\beta)} f_x - \frac{\sinh(u) \sin(\beta)}{\cosh(u) + \cos(\beta)} f_y, \end{aligned}$$

und über das Skalarprodukt mit \vec{e}_β

$$\begin{aligned} f_\beta &= \vec{e}_\beta \cdot \vec{e}_x f_x + \vec{e}_\beta \cdot \vec{e}_y f_y \\ &= \frac{\sinh(u) \sin(\beta)}{\cosh(u) + \cos(\beta)} f_x + \frac{1 + \cosh(u) \cos(\beta)}{\cosh(u) + \cos(\beta)} f_y. \end{aligned}$$

Dies sind die gesuchten Transformationsformeln für die Entwicklungskoeffizienten. ■

A1.2.11 Entwicklungen in kartesischen Koordinaten:

Zweimalige Differenzierbarkeit der Funktion $f(z)$ vorausgesetzt, haben wir

$$(i) \quad \vec{\nabla} \{ \vec{\nabla} \cdot [f(z) \vec{r}] \} = \vec{\nabla} [f(z) \vec{\nabla} \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \vec{\nabla} f(z)] \\ = \vec{\nabla} [3f(z) + 2f'(z)] = [zf''(z) + 4f'(z)] \vec{e}_z.$$

Ähnlich ist

$$(ii) \quad \vec{r}_x \{ \vec{\nabla}_x [f(z) \vec{r}] \} = \vec{r}_x \{ f(z) \vec{\nabla}_x \vec{r} - \vec{r}_x [\vec{e}_z f'(z)] \} \\ = f'(z) \vec{r}_x (\vec{e}_x \times \vec{r}) = f'(z) (r^2 \vec{e}_z - z \vec{r}) \\ = f'(z) [-z \vec{e}_x - zy \vec{e}_y + (x^2 + y^2) \vec{e}_z]$$

und analog

$$(iii) \quad \vec{r}_x [\vec{r}_x \vec{\nabla}_y f(z)] = f'(z) \vec{r}_x (\vec{r}_x \vec{e}_z) = f'(z) (z \vec{r} - r^2 \vec{e}_x) \\ = f'(z) [zx \vec{e}_x + zy \vec{e}_y - (x^2 + y^2) \vec{e}_z]. \blacksquare$$

A1.2.12 Entwicklung in Kreiszylinderkoordinaten:

Unter Beachtung von

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_\rho \partial_\rho + \frac{1}{\rho} \vec{e}_\alpha \partial_\alpha + \vec{e}_z \partial_z, \quad \vec{r} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z,$$

berechnen wir

$$\begin{aligned} \vec{r}_x \vec{\nabla} \left[\frac{z}{\rho} \cos(\alpha) \right] &= \vec{r}_x \left[-\frac{z}{\rho^2} \cos(\alpha) \vec{\nabla} \rho - \frac{z}{\rho} \sin(\alpha) \vec{\nabla} \alpha + \frac{1}{\rho} \cos(\alpha) \vec{\nabla} z \right] \\ &= \frac{1}{\rho^2} (\rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z) \times [-z \cos(\alpha) \vec{e}_\rho - z \sin(\alpha) \vec{e}_\alpha + \rho \cos(\alpha) \vec{e}_z] \\ &= \frac{1}{\rho^2} [-\rho z \sin(\alpha) \vec{e}_z - \rho^2 \cos(\alpha) \vec{e}_\alpha - z^2 \cos(\alpha) \vec{e}_\alpha + z^2 \sin(\alpha) \vec{e}_\rho], \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \vec{r}_x \vec{\nabla} \left[\frac{z}{\rho} \cos(\alpha) \right] &= \frac{z^2}{\rho^2} \sin(\alpha) \vec{e}_\rho - \left(1 + \frac{z^2}{\rho^2} \right) \cos(\alpha) \vec{e}_\alpha - \frac{z}{\rho} \sin(\alpha) \vec{e}_z. \blacksquare \end{aligned}$$

A1.2.13 Entwicklung in Kugelkoordinaten:

Wir berechnen schrittweise unter Verwendung der Tab. 1.3

$$\begin{aligned}\vec{r} f &= \vec{e}_r r^3 \cos(\theta), \\ \vec{\nabla}_x (\vec{r} f) &= -\vec{e}_\alpha \frac{1}{r} \partial_\theta [r^3 \cos(\theta)] = \vec{e}_\alpha r^2 \sin(\theta), \\ \vec{\nabla}_x [\vec{\nabla}_x (\vec{r} f)] &= \vec{e}_r \frac{\partial_\theta [r^2 \sin^2(\theta)]}{r \sin(\theta)} - \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \partial_r [r^3 \sin(\theta)] \\ &= \vec{e}_r 2r \cos(\theta) - \vec{e}_\theta 3r \sin(\theta). \blacksquare\end{aligned}$$

A1.2.14 Ausschnitt einer Kugel:

Mit Bezug auf Abb. A 1.2.14 ergibt sich der gesuchte Flächeninhalt zu

$$\begin{aligned}A &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} a d\theta \int_0^{2\pi} a \sin(\theta) d\alpha = 2\pi a^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin(\theta) d\theta \\ &= 2\pi a^2 [\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)].\end{aligned}$$

Für $\theta_1 = 0$ und $\theta_2 = \pi$ erhalten wir den bekannten Ausdruck für den Flächeninhalt der Kugel. ■

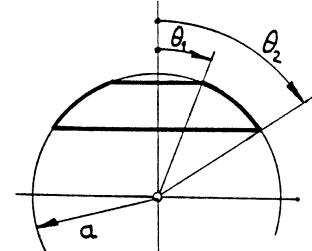


Abb. A 1.2.14

A1.2.15 Konservatives Kraftfeld:

Wenn wir die Konservativität eines Kraftfeldes mit dessen lokaler Wirbelfreiheit gleichsetzen, haben wir als notwendige und hinreichende Bedingung $\vec{\nabla}_x \vec{F} = \vec{0}$. Nun ist wegen $\vec{e}_r = \vec{\nabla} r$

$$\vec{\nabla}_x \vec{F} = K \vec{\nabla}_x (r^n \vec{e}_r) = K n \underbrace{r^{n-1} (\vec{\nabla} r)_x (\vec{\nabla} r)}_0 + K r^n \underbrace{\vec{\nabla}_x \vec{\nabla} r}_0,$$

unsere Bedingung ist also jedenfalls für $r > 0$ mit jedem n identisch erfüllt.

Deutlicher zeigt sich die Konservativität in der Existenz eines Skalarpotentials:

$$\vec{F} = K r^n \vec{\nabla} r = \vec{\nabla} \left(K \frac{r^{n+1}}{n+1} \right) \quad \text{für } n \neq -1,$$

$$\vec{F} = K \frac{1}{r} \vec{\nabla} r = \vec{\nabla} \left[K \ln \left(\frac{r}{a} \right) \right], \quad a = \text{const} > 0, \quad \text{für } n = -1,$$

d.h. \vec{F} ist immer als Gradientenfeld darstellbar. Im ganzen Bereich $r > 0$ existiert somit für jedes n ein eindeutiges Skalarpotential. ■

A1.2.16 Gradientenfeld:

(i) Ein Vektorfeld ist genau dann (lokal) als Gradient eines Skalarfeldes darstellbar, wenn seine Rotation verschwindet. Dies ist für das gegebene Vektorfeld der Fall:

$$\vec{\nabla} \times \vec{f} = \vec{e}_z (\partial_x f_y - \partial_y f_x) = \vec{e}_z (-2y + 2y) = \vec{0}.$$

Aus $\vec{f} = \vec{\nabla} g$ erhalten wir dann die beiden Gleichungen für das Skalarfeld $g(\vec{r})$

$$\partial_x g = K \cdot (x^2 - y^2), \quad \partial_y g = -K \cdot 2xy.$$

Integration der ersten Gleichung liefert

$$g(x, y) = K \cdot \left(\frac{1}{3} x^3 - xy^2 \right) + h(y)$$

mit einer Funktion $h(y)$, die sich durch Einsetzen in die zweite Gleichung bestimmen lässt:

$$-K \cdot 2xy + h'(y) = -K \cdot 2xy \Rightarrow h'(y) = \text{const.}$$

Unser Vektorfeld ist deshalb als Gradient gemäß

$$\vec{f}(\vec{r}) = \vec{\nabla} g(\vec{r}), \quad g(\vec{r}) = K x (x^2/3 - y^2) + \text{const}$$

darstellbar.

- (ii) Die direkte Berechnung des Integrals entlang der Kurve \mathcal{E} , dargestellt in Abb. A 1.2.16, liefert

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{E}} \vec{f} \cdot d\vec{r} &= K \left[\int_0^a x^2 dx + \int_0^a (-2ay) dy + \int_a^0 (x^2 - a^2) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_a^0 (-2 \cdot 0 \cdot y) dy \right] = K \left[a^2 \int_0^a dx - 2a \int_0^a y dy \right] \\ &= K \cdot (a^3 - a^3) = 0.\end{aligned}$$

Im Hinblick auf den Satz von Stokes bzw. auf die Existenz eines Skalarpotentials ist dieses Ergebnis – es gilt für jede geschlossene Kurve \mathcal{E} – klar. ■

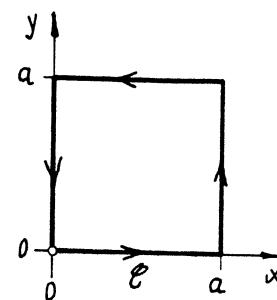


Abb. A 1.2.16

A 1.2.17 Arbeit in einem Kraftfeld:

Zur Berechnung der Arbeit ist das Kurvenintegral

$$A(\mathcal{E}) = \int_{\mathcal{E}} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_{\mathcal{E}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

auszuwerten, wobei entlang der Teilstücke von \mathcal{E} gemäß Abb. A 1.2.17,

$$\mathcal{E}_1 : \vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y = x \vec{e}_x + \frac{x^2}{a} \vec{e}_y, \quad d\vec{r} = (\vec{e}_x + 2 \frac{x}{a} \vec{e}_y) dx,$$

$$-\mathcal{E}_2 : \vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y = x \vec{e}_x + (x+2a) \vec{e}_y, \quad d\vec{r} = (\vec{e}_x + \vec{e}_y) dx,$$

gilt, d.h. wir wählen für beide Teilstücke die x -Koordinate als Kurvenparameter und drücken dann alles durch x aus. Dies liefert

$$\begin{aligned}A(\mathcal{E}) &= \int_{\mathcal{E}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{-\mathcal{E}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \left[\int_{-1m}^{2m} \left(\frac{x^2}{a} - 2 \frac{x^2}{a} \right) dx - \int_{-1m}^{2m} (x+2a-x) dx \right] N/m \\ &= - \int_{-1m}^{2m} \left(\frac{x^2}{a} + 2a \right) dx \quad N/m = - 9 \text{ Nm.} \quad ■\end{aligned}$$

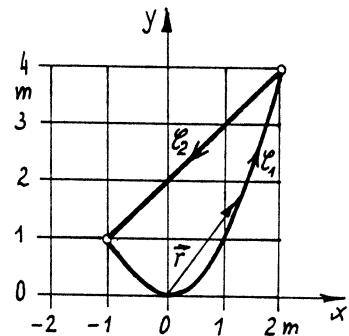


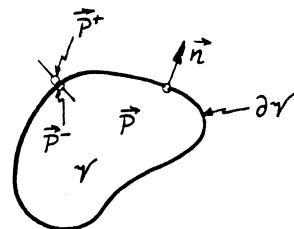
Abb. A 1.2.17

A2.1.1 Polarisationsladungen:

Die fiktive Gesamtladung des Körpers, der den Bereich γ' einnimmt, setzt sich aus der fiktiven Raumladung im Körperinneren γ' und der fiktiven Flächenladung am Körperrand $\partial\gamma$ zusammen (Abb. A2.1.1),

$$Q^f(\gamma) = \int_{\gamma'} \rho^f dV + \int_{\partial\gamma} \sigma^f dA,$$

$$\rho^f = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}, \quad \sigma^f = -\vec{n} \cdot [\vec{P}] .$$



Wir nehmen dabei an, daß das Polarisationsfeld in γ' stetig differenzierbar ist (andernfalls haben wir den Körper in mehrere Teilkörper aufzuspalten) und berechnen unter Anwendung des Satzes von Gauß

$$\int_{\gamma'} \rho^f dV = - \int_{\gamma'} \vec{\nabla} \cdot \vec{P} dV = - \int_{\partial\gamma} \vec{n} \cdot \vec{P}^+ dA,$$

$$\int_{\partial\gamma} \sigma^f dA = - \int_{\partial\gamma} \vec{n} \cdot [\vec{P}] dA = \int_{\partial\gamma} \vec{n} \cdot \vec{P}^- dA, \quad \text{da } \vec{P}^+ = \vec{0}.$$

Die Addition der beiden Integrale liefert Null. ■

Abb. A2.1.1

A2.1.2 Starr homogen elektrisch polarisierter Kreiszylinder:

Das Polarisationsvektorfeld \vec{P} ist im Körperinneren konstant (Abb. A2.1.2a), $\vec{P} = P \hat{e}_z$, $P = \text{const}$, und verschwindet im Außenraum.

- (i) Da keine wahren Ladungen vorliegen, stimmt die effektive mit der fiktiven Ladungsverteilung überein, d.h. wir haben die

- effektive Raumladungsdichte $\rho^e = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0$,

- effektive Flächenladungsdichte $\sigma^e = -\vec{n} \cdot [\vec{P}] = \begin{cases} P, & z=1/2, \\ -P, & z=-1/2. \end{cases}$

Die effektive Ladungsverteilung besteht demnach aus zwei entgegengesetzt gleichförmig geladenen Kreisscheiben, eingebettet in den leeren Raum (Abb. A2.1.2b).

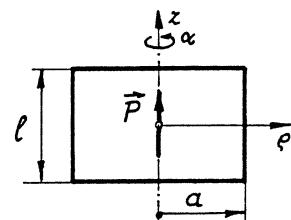


Abb. A2.1.2a

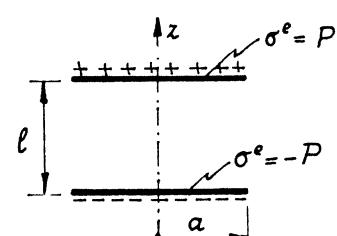


Abb. A2.1.2b

(ii) Die Vektorlinien der elektrischen Polarisation sind die eines Parallelfeldes im Körperinneren (Abb.A2.1.2c). Die Vektorlinien von \vec{E} lassen sich aus dem Modell der Einbettung der effektiven Ladungen in den leeren Raum direkt angeben (Abb.A2.1.2d). Schließlich erhalten wir die Vektorlinien von \vec{D} über die Verknüpfungsbeziehungen $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ im Inneren und $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ im Außenraum (Abb.A2.1.2e). ■

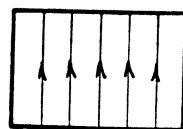


Abb.A2.1.2 c

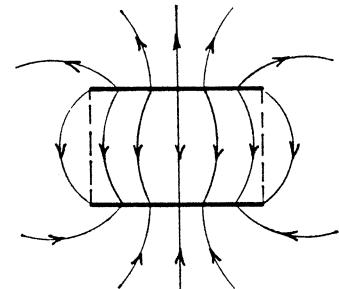


Abb.A2.1.2 d

A2.1.3 Starr homogen magnetisierter Kreiszylinder:

Das Magnetisierungsvektorfeld \vec{M} ist im Körperinneren konstant (Abb.A2.1.3a), $\vec{M} = M \hat{e}_z$, $M = \text{const}$, und verschwindet im Außenraum.

(i) Es treten keine wahren Ströme auf, daher stimmt die effektive Stromverteilung mit der fiktiven überein, d.h. wir haben die

- effektive Stromdichte $\vec{j}^e = \vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{0}$,
- effektive Flächenstromdichte $\vec{K}^e = \vec{n} \times [\vec{M}] = M \hat{e}_x$, $\rho = a$.

Die effektive Stromverteilung besteht demnach aus dem gleichförmig umströmten Zylindermantel entsprechend einer dünnwandigen Kreiszylinderspule endlicher Länge, eingebettet in den leeren Raum (Abb.A2.1.3 b).

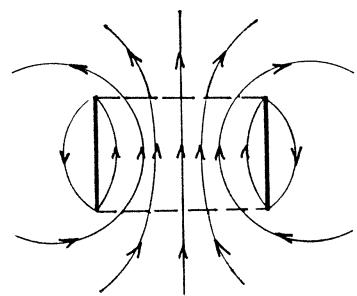


Abb.A2.1.2 e

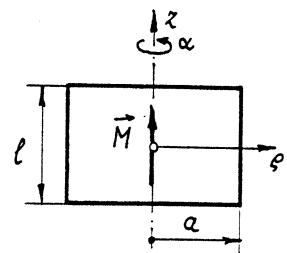


Abb.A2.1.3 a

(ii) Die Vektorlinien der Magnetisierung sind die eines Parallelfeldes im Körperinneren (Abb.A2.1.2c). Die Vektorlinien von \vec{B} entsprechen denen einer dünnwandigen Spule im leeren Raum (Abb.A2.1.2e). Die Vektorlinien von \vec{H} ergeben sich über die Verknüpfungen der Vektorfelder $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$ im Inneren und $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$ im Außenraum (Abb.A2.1.2d). ■

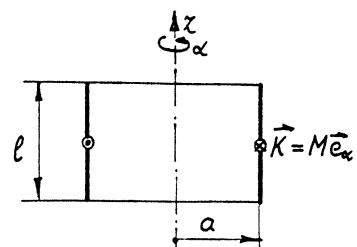


Abb.A2.1.3 b

A2.1.4 Wahre und fiktive Ladungsdichte:

Wegen

$$\vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E} = (1 - 1/\epsilon_r) \vec{D}$$

mit $\epsilon_r = \text{const}$ haben wir

$$\rho^f = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -(1 - 1/\epsilon_r) \vec{\nabla} \cdot \vec{D},$$

also olen Zusammenhang

$$\rho^f = - (1 - 1/\epsilon_r) \rho.$$

In einem elektrisch polarisierbaren Körper mit $\epsilon = \text{const}$ treten wahre und fiktive Raumladungen nur gemeinsam auf. Dies gilt nicht für Flächenladungen. ■

A2.1.5 Wahre und fiktive Stromdichte:

Der gesuchte Zusammenhang folgt über

$$\vec{M} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{H} = (\mu_r - 1) \vec{H} \quad \text{und} \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$$

aus

$$\vec{J}^f = \vec{\nabla} \times \vec{M} = (\mu_r - 1) \vec{\nabla} \times \vec{H}$$

zu

$$\vec{J}^f = (\mu_r - 1) \vec{J}.$$

In einem magnetisierbaren Körper mit $\mu = \text{const}$ treten demnach wahre und fiktive räumliche Stromverteilungen immer gemeinsam auf. Dies gilt nicht für Flächenströme. ■

A2.1.6 Homogen elektrisch polarisierte Kugel:

Im Kugelinneren ist (homogene Polarisation!) $\vec{P} = \text{const}$ und damit

$$\rho^f = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0.$$

Es gibt demnach keine fiktiven Raumladungen, wohl aber eine fiktive Flächenladung an der Kugeloberfläche (Abb. A 2.1.6). Mit $\vec{P} = P \vec{e}_z$ haben wir

$$\sigma^f = -\vec{n} \cdot [\vec{P}] = \vec{e}_r \cdot \vec{e}_z P = P \cos(\theta). ■$$

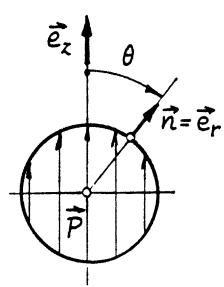


Abb. A 2.1.6

A2.1.7 Homogen magnetisierte Kugel:

Im Kugelinneren ist (homogene Magnetisierung!) $\vec{M} = \text{const}$
und damit

$$\vec{J}^f = \vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{0},$$

d.h. dort gibt es keine fiktiven Ströme. Die Kugeloberfläche ist jedoch eine Sprungfläche des Magnetisierungsvektors. Wir erhalten dort mit $\vec{M} = M \vec{e}_z$ (Abb. A2.1.7) die fiktive Flächenstromdichte

$$\vec{K}^f = \vec{n} \times [\vec{M}] = -\vec{e}_r \times \vec{e}_z M = M \sin(\theta) \vec{e}_\alpha. \blacksquare$$

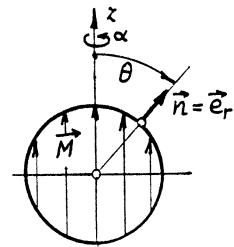


Abb. A 2.1.7

A2.1.8 Inhomogen dielektrische Schicht:

Im Inneren eines perfekt nichtleitenden Dielektrikums können sich keine wahren Ladungen ansammeln.

Wir erwarten x -gerichtete Parallelfelder

$$\vec{D} = D(x) \vec{e}_x, \quad \vec{E} = E(x) \vec{e}_x, \quad \vec{P} = P(x) \vec{e}_x$$

und haben daher

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \Rightarrow \partial_x D = 0 \Rightarrow D = \text{const},$$

$$E(x) = D/\epsilon(x) = \left(1 + \frac{x}{a}\right) \frac{D}{\epsilon_1},$$

$$U = \int_0^a E(x) dx = \frac{D}{\epsilon_1} \int_0^a (1+x/a) dx = \frac{3a}{2} \frac{D}{\epsilon_1},$$

also

$$D = \frac{2}{3} \frac{\epsilon_1 U}{a}, \quad E(x) = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{x}{a}\right) \frac{U}{a}, \quad 0 < x < a.$$

Der Außenraum ist feldfrei.

Wahre Ladungsverteilung:

$$0 < x < a : \quad \rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0,$$

$$x = 0 : \quad \sigma = \vec{n} \cdot [\vec{D}] = D(0+) = \frac{2}{3} \frac{\epsilon_1 U}{a},$$

$$x = a : \quad \sigma = \vec{n} \cdot [\vec{D}] = -D(a-) = -\frac{2}{3} \frac{\epsilon_1 U}{a}.$$

Fiktive Ladungsverteilung:

$$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \vec{D} = \left[1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} \left(1 + \frac{x}{a}\right)\right] \frac{2}{3} \frac{\epsilon_1 U}{a} \vec{e}_x ;$$

$$0 < x < a: \rho^f = -\vec{V} \cdot \vec{P} = \frac{2}{3} \frac{\epsilon_0 U}{a^2},$$

$$x=0: \sigma^f = -\vec{n} \cdot [\vec{P}] = -P(0+) = -(\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{2}{3} \frac{U}{a},$$

$$x=a: \sigma^f = -\vec{n} \cdot [\vec{P}] = P(a-) = (\epsilon_1 - 2\epsilon_0) \frac{2}{3} \frac{U}{a}.$$

Effektive Ladungsverteilung:

$$\rho^e = \rho + \rho^f, \quad \sigma^e = \sigma + \sigma^f;$$

$$0 < x < a: \rho^e = \epsilon_0 \vec{V} \cdot \vec{E} = \frac{2}{3} \frac{\epsilon_0 U}{a^2},$$

$$x=0: \sigma^e = \epsilon_0 \vec{n} \cdot [\vec{E}] = \epsilon_0 E(0+) = \frac{2}{3} \frac{\epsilon_0 U}{a},$$

$$x=a: \sigma^e = \epsilon_0 \vec{n} \cdot [\vec{E}] = -\epsilon_0 E(a-) = -\frac{4}{3} \frac{\epsilon_0 U}{a}.$$

Jede der drei Ladungsverteilungen liefert für sich die Gesamtladung Null. ■

A2.1.9 Inhomogen elektrisch leitfähige Schicht:

Wir erwarten x -gerichtete Parallelfelder

$$\vec{J} = J(x) \vec{e}_x, \quad \vec{E} = E(x) \vec{e}_x, \quad \vec{D} = D(x) \vec{e}_x, \quad \vec{P} = P(x) \vec{e}_x.$$

Im stationären (zeitunabhängigen) Fall gilt

$$\vec{V} \cdot \vec{J} = 0 \Rightarrow \partial_x J = 0 \Rightarrow J = \text{const}$$

und daher

$$E(x) = J/y(x) = \left(1 + \frac{x}{a}\right) \frac{J}{y_0},$$

$$U = \int_0^a E(x) dx = \frac{J}{y_0} \int_0^a \left(1 + \frac{x}{a}\right) dx = \frac{3a}{2} \frac{J}{y_0},$$

also, für $0 < x < a$,

$$D(x) = \epsilon E(x), \quad P(x) = (\epsilon - \epsilon_0) E(x), \quad E(x) = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{x}{a}\right) \frac{U}{a}.$$

Der Außenraum ist feldfrei.

Wahre Ladungsverteilung:

$$0 < x < a: \quad \rho = \vec{V} \cdot \vec{D} = \epsilon \frac{2}{3} \frac{U}{a^2},$$

$$x=0: \quad \sigma = \vec{n} \cdot [\vec{D}] = D(0+) = \epsilon \frac{2}{3} \frac{U}{a},$$

$$x=a: \quad \sigma = \vec{n} \cdot [\vec{D}] = -D(a-) = -\epsilon \frac{4}{3} \frac{U}{a}.$$

Fiktive Ladungsverteilung:

$$0 < x < a: \quad \rho^f = -\vec{V} \cdot \vec{P} = -(\epsilon - \epsilon_0) \frac{2}{3} \frac{U}{a^2},$$

$$x=0: \quad \sigma^f = -\vec{n} \cdot [\vec{P}] = -P(0+) = -(\epsilon - \epsilon_0) \frac{2}{3} \frac{U}{a},$$

$$x=a: \quad \sigma^f = -\vec{n} \cdot [\vec{P}] = P(a+) = (\epsilon - \epsilon_0) \frac{4}{3} \frac{U}{a}.$$

Effektive Ladungsverteilung:

$$\rho^e = \rho + \rho^f, \quad \sigma^e = \sigma + \sigma^f;$$

$$0 < x < a: \quad \rho^e = \epsilon_0 \vec{V} \cdot \vec{E} = \epsilon_0 \frac{2}{3} \frac{U}{a^2},$$

$$x=0: \quad \sigma^e = \epsilon_0 \vec{n} \cdot [\vec{E}] = \epsilon_0 E(0+) = \epsilon_0 \frac{2}{3} \frac{U}{a},$$

$$x=a: \quad \sigma^e = \epsilon_0 \vec{n} \cdot [\vec{E}] = -\epsilon_0 E(a-) = -\epsilon_0 \frac{4}{3} \frac{U}{a}.$$

Jede der drei Ladungsverteilungen liefert für sich die Gesamtladung Null. Bemerkenswert ist die Unabhängigkeit der Ladungen von der Basiskonduktivität ρ_0 im stationären Zustand. ■

A2.1.10 Dauermagnetplatte:

Die gesamte fiktive Stromverteilung besteht aus der räumlichen Stromverteilung im Inneren $0 < z < d$ und aus einer Flächenstromverteilung an den beiden Ebenen $z=0$ und $z=d$. Die zugehörigen Stromdichten sind

$$0 < z < d : \vec{J}^f = \vec{\nabla}_x \vec{M} = -\vec{e}_y \partial_x M_z = k M_0 \sin(kx) \vec{e}_y,$$

$$z = 0 : \vec{K}^f = \vec{n} \times [\vec{M}] = \vec{e}_z \times [-\sin(kx) \vec{e}_x] M_0 = -M_0 \sin(kx) \vec{e}_y,$$

$$z = d : \vec{K}^f = \vec{n} \times [\vec{M}] = \vec{e}_z \times [\sin(kx) \vec{e}_x] M_0 = M_0 \sin(kx) \vec{e}_y,$$

eingebettet in einen leeren Raum.

Übrigens ist der Betrag des gegebenen Magnetisierungssektors konstant. Beim Fortschreiten in x -Richtung dreht sich \vec{M} im Gegenuhzeigersinn. ■

A2.1.11 Dauermagnet:

Die axial gelegene Magnetisierung nimmt mit dem Abstand von der Zylinderachse ab (Abb. A2.1.11).

Neben dem azimuthalen fiktiven Strom an der Mantelfläche haben wir deshalb auch dem Zylinderinneren einen fiktiven Strom zuzuordnen:

$$0 < \rho < a, 0 < z < l : \vec{J}^f = \vec{\nabla}_x \vec{M} = \vec{\nabla}_x (M_z \vec{e}_z) = -\vec{e}_z \times \vec{\nabla} M_z = \frac{M_0}{2a} \vec{e}_\alpha,$$

$$\rho = a, 0 < z < l : \vec{K}^f = \vec{n} \times [\vec{M}] = \frac{M_0}{2} \vec{e}_\alpha.$$

An der Grundfläche $z=0$ und an der Deckfläche $z=l$ gibt es wegen $[\vec{M}] \parallel \vec{n}$ keine fiktiven Flächenströme. ■

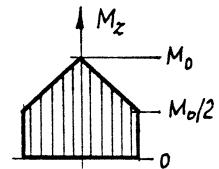
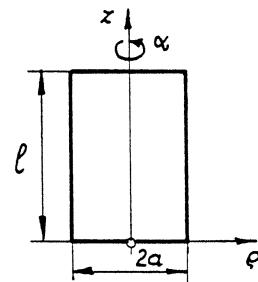


Abb. A2.1.11

A2.1.12 Anisotropes Dielektrikum:

Wegen der dielektrischen Anisotropie des Materials stimmen die Richtungen von \vec{D} und \vec{E} i.a. nicht überein:

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} = (2,6 \vec{e}_x \otimes \vec{e}_x + 1,2 \vec{e}_y \otimes \vec{e}_y + 1,7 \vec{e}_z \otimes \vec{e}_z) \cdot (\vec{e}_x - 4\vec{e}_y + 2\vec{e}_z) \frac{\epsilon_0 E_0}{\sqrt{21}}$$

$$= (2,6 \vec{e}_x - 1,2 \cdot 4 \vec{e}_y + 1,7 \cdot 2 \vec{e}_z) \frac{\epsilon_0 E_0}{\sqrt{21}}$$

$$= 1,403 \epsilon_0 E_0 (0,404 \vec{e}_x - 0,746 \vec{e}_y + 0,529 \vec{e}_z),$$

$$\vec{E} = E_0 (0,218 \vec{e}_x - 0,873 \vec{e}_y + 0,436 \vec{e}_z).$$

Den Winkel zwischen \vec{D} und \vec{E} erhalten wir aus

$$\begin{aligned}\cos(\alpha) &= \frac{\vec{D} \cdot \vec{E}}{|\vec{D}| |\vec{E}|} \\ &= (0,404 \vec{e}_x - 0,746 \vec{e}_y + 0,529 \vec{e}_z) \cdot (0,218 \vec{e}_x - 0,873 \vec{e}_y + 0,436 \vec{e}_z) \\ &= 0,970\end{aligned}$$

zu

$$\alpha = 14^\circ.$$

Der Permittivitätstensor $\boldsymbol{\epsilon}$ ist übrigens in der Entwicklung nach seinen Hauptrichtungen gegeben; die zugehörigen Entwicklungskoeffizienten sind die drei Hauptpermeabilitäten. Liegt \vec{E} in einer dieser drei ausgezeichneten Richtungen, so liegt auch \vec{D} – mit der entsprechenden Hauptpermittivität gebildet – in dieser Richtung (s. Eigenwerte, Eigenvektoren). ■

A2.1.13 Anisotrop elektrisch leitfähiger Körper:

Wir betrachten zwei benachbarte Schichten (Abb.

A2.1.13 b) und die kartesischen Entwicklungen

$$\vec{J} = J_x \vec{e}_x + J_y \vec{e}_y + J_z \vec{e}_z, \quad \vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y + E_z \vec{e}_z.$$

\vec{J} und \vec{E} seien innerhalb jeder Schicht konstant.

Aus $[\vec{E}_t] = \vec{0}$ folgt dann speziell $E_{x1} = E_{x2} := E_x$, wegen $J_{x1} = \gamma_1 E_x$, $J_{x2} = \gamma_2 E_x$ erhalten wir somit für die durch

$$J_{x1} \delta + J_{x2} \delta = (\gamma_1 + \gamma_2) \delta E_x := \bar{J}_x \cdot 2\delta$$

definierte mittlere Dichte des Stromes in x -Richtung

$$\bar{J}_x = \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) E_x, \quad \text{analog } \bar{J}_y = \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) E_y.$$

Ferner haben wir wegen $[J_n] = 0$ speziell $J_{z1} = J_{z2} := J_z$ und daher mit $E_{z1} = J_z / \gamma_1$, $E_{z2} = J_z / \gamma_2$ für den durch

$$E_{z1} \delta + E_{z2} \delta = (1/\gamma_1 + 1/\gamma_2) \delta J_z := \bar{E}_z \cdot 2\delta$$

definierten Mittelwert der Feldstärke in z -Richtung

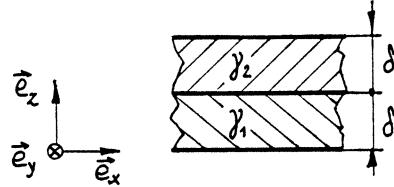


Abb. A2.1.13 b)

den Zusammenhang

$$\vec{J}_z = \frac{2}{1/\gamma_1 + 1/\gamma_2} \vec{E}_z .$$

Die (Mittelwert-) Größen des Kontinuumsmodells
(Überstriche weggelassen) sind demnach über

$$\vec{J} = \left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} E_x \vec{e}_x + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} E_y \vec{e}_y + \frac{2}{1/\gamma_1 + 1/\gamma_2} E_z \vec{e}_z \right)$$

miteinander verknüpft. Dies lässt sich in der Form

$$\underbrace{\vec{J}}_{\gamma} = \vec{E}$$

schreiben, wobei der Leitfähigkeitstensor γ die Entwicklung

$$\gamma = \gamma_x \vec{e}_x \otimes \vec{e}_x + \gamma_y \vec{e}_y \otimes \vec{e}_y + \gamma_z \vec{e}_z \otimes \vec{e}_z$$

mit

$$\gamma_x = \gamma_y = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}, \quad \gamma_z = \frac{2}{1/\gamma_1 + 1/\gamma_2}$$

besitzt. ■



A2.2.1 Wasserstoffatom:

Aus dem gegebenen elektrostatischen Potential erhalten wir zuerst die elektrische Feldstärke

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = -\vec{e}_r \partial_r \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-2r/\alpha}}{r^2} \left[1 + 2\frac{r}{\alpha} + 2\left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 \right] \vec{e}_r$$

und daraus mit $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ und dem Ausdruck für die Divergenz in Kugelkoordinaten (Tab. 1.3) die Ladungsdichte

$$\rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \epsilon_0 \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 E_r) = -\frac{q}{\pi\alpha^3} e^{-2r/\alpha}.$$

Die in einer Kugel mit dem Radius r eingeschlossene Ladung folgt aus dem Satz vom elektrischen Hüllefluß zu

$$Q(r) = \int_{\text{Sphere}} \epsilon_0 E_r dA = q e^{-2r/\alpha} \left[1 + 2r/\alpha + 2(r/\alpha)^2 \right], \quad r > \alpha,$$

und besitzt die Grenzwerte

$$\lim_{r \rightarrow 0} Q(r) = q, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} Q(r) = 0.$$

Im Zentrum $r=0$ befindet sich demnach die Punktladung q . Sie ist von einer kugelsymmetrischen Raumladungswolke (Ladungsdichte ρ) mit der Gesamtladung $-q$ umgeben. ■

A2.2.2 Atomkern:

(i) Die Gesamtladung ergibt sich durch Integration der kugelsymmetrischen Ladungsdichte zu

$$Q_0 = \int_V \rho dV = \int_0^\alpha \rho_0 \cdot (1-r^2/\alpha^2) 4\pi r^2 dr = 4\pi \rho_0 \left(\frac{\alpha^3}{3} - \frac{\alpha^3}{5} \right),$$

$$Q_0 = \frac{8\pi}{15} \rho_0 \alpha^3 = 3,37 \cdot 10^{-18} C = 21 e.$$

(ii) In einer Kugel mit dem Radius r ist die Ladung

$$Q(r) = \int_0^r \rho_0 \cdot (1 - r'^2/a^2) 4\pi r'^2 dr' = \rho_0 4\pi \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5a^2} \right), \quad r < a,$$

also

$$r < a: \quad Q(r) = Q_0 \frac{5}{2} \left[1 - \frac{3}{5} \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \left(\frac{r}{a} \right)^3,$$

$$r > a: \quad Q(r) = Q_0$$

eingeschlossen. Der Satz vom elektrischen Hüllenfluss (Kugelsymmetrie!) liefert damit

$$r < a: \quad \vec{E} = \frac{Q(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{e}_r = E_0 \frac{5}{2} \left[1 - \frac{3}{5} \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \frac{r}{a} \hat{e}_r,$$

$$E_0 = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 a^2} = 2,61 \cdot 10^{21} \text{ V/m},$$

$$r > a: \quad \vec{E} = E_0 \cdot \left(\frac{a}{r} \right)^2 \hat{e}_r.$$

Der Maximalwert von $|\vec{E}|$ tritt bei $r = a\sqrt{5}/3 = 0,745a$ auf und beträgt $|\vec{E}|_{\max} = E_0 5\sqrt{5}/9 = 1,24 E_0$. ■

A2.2.3 Homogenes Bohrungsfeld:

Mit Bezug auf Abb. A2.2.3& haben wir

$$0 \leq \varrho \leq d/2: \quad \vec{H} = \frac{B}{\mu_0} [\sin(\alpha) \hat{e}_\varphi + \cos(\alpha) \hat{e}_\alpha],$$

$$\varrho > d/2: \quad \vec{H} = \vec{0} \quad (\text{wegen } \mu_r \rightarrow \infty).$$

Das angegebene Magnetfeld ist dann realisierbar, wenn sich die Sprungbedingung

$$\varrho = d/2: \quad \vec{n} \times [\vec{H}] = \vec{K}$$

erfüllen lässt. Dies ist tatsächlich der Fall und führt auf die Flächenstromdichte

$$\vec{K} = -\hat{e}_\varphi \times \hat{e}_\alpha \frac{B}{\mu_0} \cos(\alpha) = -\frac{B}{\mu_0} \cos(\alpha) \hat{e}_z.$$

Stromverteilungen dieser Art werden durch passende Anordnungen von Leitern – meist in Nuten – hergestellt. ■

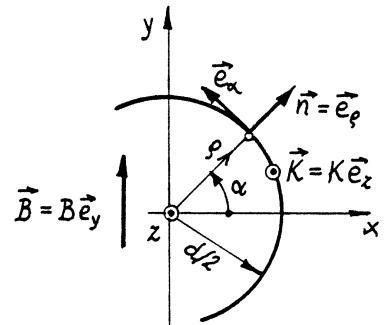


Abb. A2.2.3&

A2.2.4 Spaltfeld:

(i) Für die angegebene elektrische Feldstärke gilt

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{e}_y \partial_z E_x - \vec{e}_z \partial_y E_x = -\frac{\pi}{a} E_0 \cos(\pi y/a) \cos(\pi c_0 t/a) \vec{e}_z,$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \partial_x E_x = 0.$$

Wegen $\vec{\nabla} \times \vec{E} \neq \vec{0}$ lässt sich \vec{E} i.a. nicht als Gradientenfeld darstellen.

(ii) Integration des Induktionsgesetzes

$$\partial_t \vec{B} = -\vec{\nabla} \times \vec{E} - \frac{\pi}{a} E_0 \cos(\pi y/a) \cos(\pi c_0 t/a) \vec{e}_z$$

liefert für die magnetische Flussdichte

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{E_0}{c_0} \cos(\pi y/a) \sin(\pi c_0 t/a) \vec{e}_z + \vec{B}_0(\vec{r}),$$

wobei das zeitunabhängige Feld $\vec{B}_0(\vec{r})$ nicht mit \vec{E} verknüpft ist und deshalb nullgesetzt werden kann.

(iii) Die gesuchten Ladungs- und Stromverteilungen folgen aus den Sprungbedingungen:

$$y=0: \sigma = \vec{e}_y \cdot [\vec{D}] = [\epsilon_0 E_y] = 0,$$

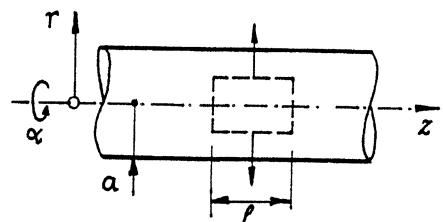
$$\vec{K} = \vec{e}_y \times [\vec{H}] = [B_z/\mu_0] \vec{e}_x = \frac{E_0}{\mu_0 c_0} \sin(\pi c_0 t/a) \vec{e}_x.$$

$$y=a: \sigma = \vec{e}_y \cdot [\vec{D}] = [\epsilon_0 E_y] = 0,$$

$$\vec{K} = \vec{e}_y \times [\vec{H}] = [B_z/\mu_0] \vec{e}_x = \frac{-E_0}{\mu_0 c_0} \sin(\pi c_0 t/a) \vec{e}_x. \blacksquare$$

A2.2.5 Elektronenstrahl:

(i) Im Ruhesystem der Elektronen liegt eine statische Ladungsverteilung vor, d.h. es gilt jedenfalls $\vec{H}' = \vec{0}$. Wegen der Kreiszylindersymmetrie lässt sich die elektrische Flussdichte direkt aus dem Satz vom elektrischen Hullenfluß, angewendet auf einen kreiszylindrischen Bereich (Abb. A2.2.5b), berechnen.



A88.A2.2.5b

$$0 \leq r < a: \epsilon_0 E_r' \cdot 2\pi r l = \int_0^r \epsilon_0 (1-r'/a) 2\pi r' dr' l \Rightarrow$$

$$\vec{E}' = \frac{\epsilon_0 a}{6\epsilon_0} \cdot \frac{r}{a} \left(3 - 2\frac{r}{a}\right) \hat{e}_r ,$$

$$r \geq a: \epsilon_0 E_r' \cdot 2\pi r l = \int_0^a \epsilon_0 (1-r/a) 2\pi r' dr' l \Rightarrow$$

$$\vec{E}' = \frac{\epsilon_0 a}{6\epsilon_0} \cdot \frac{a}{r} \hat{e}_r .$$

(ii) Da $\varrho = \varrho'$, liefert der Satz vom elektrischen Hülleßfluß im Laborsystem die gleiche elektrische Feldstärke wie im Ruhesystem, d.h. $\vec{E} = \vec{E}'$. Im Laborsystem tritt aber zusätzlich die Stromdichte

$$0 \leq r < a: \vec{J} = \vec{v} \varrho = v_0 \varrho_0 (1-r/a) \hat{e}_z ,$$

$$r > a: \vec{J} = \vec{0}$$

auf. Die direkte Anwendung des Ampère-Maxwell-Satzes liefert hier

$$0 \leq r < a: H_\alpha \cdot 2\pi r = \int_0^r v_0 \varrho_0 (1-r'/a) 2\pi r' dr' \Rightarrow$$

$$\vec{H} = v_0 \frac{\epsilon_0 a}{6} \cdot \frac{r}{a} \left(3 - 2\frac{r}{a}\right) \hat{e}_\alpha ,$$

$$r \geq a: H_\alpha \cdot 2\pi r = \int_0^a v_0 \varrho_0 (1-r/a) 2\pi r' dr' \Rightarrow$$

$$\vec{H} = v_0 \frac{\epsilon_0 a}{6} \cdot \frac{a}{r} \hat{e}_\alpha .$$

(iii) Mit $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ und $\vec{D}' = \epsilon_0 \vec{E}'$ sind die Transformationsgleichungen

$$\vec{E}' = \vec{E}, \quad \vec{D}' = \vec{D}$$

des dominant elektrischen Feldsystems offensichtlich erfüllt. Da $\vec{J}' = \vec{0}$ und $\vec{H}' = \vec{0}$, gelten auch die beiden anderen Transformationsgleichungen

$$\vec{J}' = \vec{J} - \vec{v} \varrho, \quad \vec{H}' = \vec{H} - \vec{v} \times \vec{D}. \blacksquare$$

A2.3.1 Sprungbedingung für den Poynting-Vektor:

Ausgehend von der Definition des Poynting - Vektors erhalten wir zunächst

$$\llbracket S_n \rrbracket = \vec{n} \cdot [\vec{E} \times \vec{H}] = \vec{n} \cdot ([\vec{E}] \times \langle \vec{H} \rangle) + \vec{n} \cdot (\langle \vec{E} \rangle \times [\vec{H}]) \\ = (\vec{n} \times [\vec{E}]) \cdot \langle \vec{H} \rangle - (\vec{n} \times [\vec{H}]) \cdot \langle \vec{E} \rangle.$$

Zusammen mit den allgemeinen Sprungbedingungen

$$\vec{n} \times [\vec{E}] = \vec{0}, \quad \vec{n} \times [\vec{H}] = \vec{K}$$

für ruhende Flächen folgt daraus

$$\llbracket S_n \rrbracket = - \vec{K} \cdot \langle \vec{E} \rangle.$$

Die Flächenstromdichte liegt stets tangential zur Fläche, $\vec{n} \cdot \vec{K} = 0$. Weiters gilt nach Aufspaltung in Normal- und Tangentialkomponenten, $\vec{E}^\pm = E_n^\pm \vec{n} + \vec{E}_t^\pm$, wegen $\vec{E}_t^+ = \vec{E}_t^-$

$$\vec{K} \cdot \langle \vec{E} \rangle = \vec{K} \cdot (\vec{n} \langle E_n \rangle + \langle \vec{E}_t \rangle) = \vec{K} \cdot \vec{E}_t^\pm = \vec{K} \cdot (\vec{E}^\pm - \vec{n} E_n^\pm) = \vec{K} \cdot \vec{E}^\pm,$$

also auch

$$\llbracket S_n \rrbracket = - \vec{K} \cdot \vec{E}^\pm.$$

Beschreibt der Poynting - Vektor die elektromagnetische Energieflußdichte, so gibt $\llbracket S_n \rrbracket$ dessen flächenbezogene Quellenstärke an. Durch $\vec{K} \cdot \langle \vec{E} \rangle$ wird, analog zum entsprechenden Volumenterm $\vec{J} \cdot \vec{E}$ im Poynting - Satz, der Energieaustausch des elektromagnetischen Feldes mit anderen Teilsystemen über elektrische Flächenströme erfaßt. ■

A2.3.2 Bewegter Kurzschlußbügel:

- (i) Ohne Berücksichtigung der Randstörungen erhalten wir im Raum zwischen den Platten die magnetische Flußdichte aus dem Durchflutungssatz:

$$x < \xi : \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{\ell} \vec{e}_z; \quad x > \xi : \vec{B} = \vec{0}.$$

Mit $v = \dot{\xi} = \text{const}$ liegt ein stationärer Zustand vor.

Das Induktionsgesetz (Abb. A2.3.2 b) liefert dann ($I=\text{const}$)

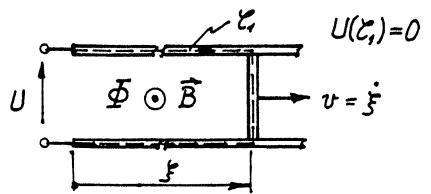


Abb. A2.3.2 b

$$U = \dot{\Phi} = (B_z a \xi)^\circ = \mu_0 I \frac{a}{b} v,$$

also für die elektrische Feldstärke

$$x < \xi: \vec{E} = \frac{\mu_0 I}{b} v \vec{e}_y; \quad x > \xi: \vec{E} = \vec{0}.$$

Dies lässt sich wegen $\vec{E}' = \vec{0}$ auch aus $\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}$ angeben. Die konstante Stromstärke folgt aus

$$U_0 = RI + U = (R + \mu_0 v a / b)I$$

zu

$$I = \frac{U_0}{R + \mu_0 v a / b}.$$

(ii) Die Anschlußspannung ist

$$U = \mu_0 I v a / b = \frac{U_0}{1 + R / (\mu_0 v a / b)}.$$

Das Voltmeter am Ende zeigt den Spannungswert Null (trotz der ideal leitfähigen Platten). Beachten Sie den Unterschied zum quasi-elektrostatischen Spannungsbegriff).

(iii) Mit den Bezeichnungen aus Abb.A2.3.2 c ergibt sich für die resultierende Kraft

$$\vec{F}_R = \int_{\gamma} \frac{1}{\mu_0} (\vec{n} \cdot \vec{B}) \vec{B} - \frac{1}{2} B^2 \vec{n} dA = \frac{B^2}{2 \mu_0} ab \vec{e}_x,$$

$$\vec{F}_R = \frac{\mu_0 I^2}{2} \frac{a}{b} \vec{e}_x.$$

(iv) Die zugeführte Leistung ist

$$P = UI = \mu_0 I^2 \frac{a}{b} v.$$

Weiters erhalten wir für die Feldenergie

$$W = \int_V \frac{B^2}{2 \mu_0} dV = \frac{B^2}{2 \mu_0} ab \xi = \frac{\mu_0 I^2}{2} \frac{a}{b} \xi$$

und deren Zunahmerate

$$\dot{W} = \frac{\mu_0 I^2}{2} \frac{a}{b} v = \frac{1}{2} UI,$$

also die Hälfte der zugeführten Leistung. Die andere Hälfte wird dem Bügel als mechanische Leistung $\vec{F}_R \cdot \vec{v}$ zugeführt. ■

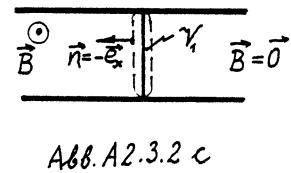


Abb.A2.3.2 c

A2.3.3 Poynting-Fluß in einem Leiter:

In Kreiszylinderkoordinaten (Abb. A2.3.3) ergibt sich im Bereich $0 \leq \rho < a$ aus der Stromdichte (gleichförmige Verteilung)

$$\vec{J} = \frac{I}{\pi a^2} \hat{e}_z$$

mit dem lokalen Ohmschen Gesetz die elektrische Feldstärke

$$\vec{E} = \frac{I}{\gamma \pi a^2} \hat{e}_z$$

und mit dem Durchflutungssatz für die magnetische Feldstärke

$$\vec{H} = \frac{J_z \pi \rho^2}{2 \pi \rho} \hat{e}_\alpha = \frac{I}{2 \pi a^2} \rho \hat{e}_\alpha$$

Der Poynting-Vektor im Leiterinneren ist daher

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{I}{\gamma \pi a^2} \cdot \frac{I}{2 \pi a^2} \rho \hat{e}_z \times \hat{e}_\alpha = -\frac{1}{2} \left(\frac{I}{\pi a^2} \right)^2 \frac{\rho}{\gamma} \hat{e}_\phi$$

Er ist radial nach innen gerichtet. Sein Fluß deckt genau die lokalen Joule-Verluste im Leiter. ■

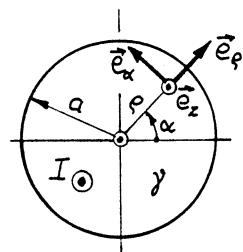


Abb. A 2.3.3

A2.3.4 Elektromagnetischer Impulsfluß:

In Kreiszylinderkoordinaten nach Abb. A2.3.4b folgt zunächst mit der Drehsymmetrie und $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ aus dem Durchflutungssatz für die magnetische Flussdichte

$$\vec{B} = B_\alpha \hat{e}_\alpha, \quad B_\alpha = \frac{\mu_0 I}{2 \pi a} \cdot \begin{cases} \rho/a, & 0 \leq \rho \leq a \\ a/\rho, & \rho > a. \end{cases}$$

Dies liefert für die zugehörige Impulsflussdichte

$$\underline{p}^e = \frac{B^2}{2 \mu_0} \underline{\delta} - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \otimes \vec{B} = \frac{B_\alpha^2}{2 \mu_0} (\underline{\delta} - 2 \hat{e}_\alpha \otimes \hat{e}_\alpha),$$

$$\underline{\delta} = \hat{e}_\rho \otimes \hat{e}_\rho + \hat{e}_\alpha \otimes \hat{e}_\alpha + \hat{e}_z \otimes \hat{e}_z,$$

den Ausdruck

$$\underline{p}^e = \frac{\mu_0 I^2}{8 \pi^2 a^2} (\hat{e}_\rho \otimes \hat{e}_\rho - \hat{e}_\alpha \otimes \hat{e}_\alpha + \hat{e}_z \otimes \hat{e}_z) \cdot \begin{cases} (\rho/a)^2, & 0 \leq \rho \leq a, \\ (a/\rho)^2, & \rho > a. \end{cases} ■$$

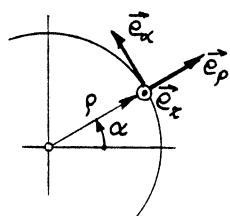


Abb. A 2.3.4b

A2.3.5 Energiefluß in einer dünnwandigen Kreiszylinder-spule:

(i) Aus der magnetischen Feldstärke im Innenraum,

$$\vec{H} = N'I \vec{e}_z, \quad 0 \leq \rho < a,$$

und dem magnetischen Fluß

$$\Phi = \mu_0 H_z A = \mu_0 N' \pi a^2 I$$

folgt über das Induktionsgesetz

$$E_\alpha \cdot 2\pi a = -\dot{\Phi} = -\mu_0 N' \pi a^2 \dot{I}, \quad \rho = a,$$

die elektrische Feldstärke und damit der Poynting-Vektor am Innenrand,

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = E_\alpha H_z \vec{e}_\alpha \times \vec{e}_z = -\frac{\mu_0}{2} N'^2 a^2 I I \vec{e}_\rho, \quad \rho = a.$$

(ii) Die Größe

$$L' = \frac{1}{\ell} \cdot \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell} = \mu_0 N'^2 \pi a^2$$

gibt die längenbezogene Induktivität der Spule an. Der längenbezogene Poynting-Fluß am Innenrand ist

$$S_\rho \cdot 2\pi a = -\mu_0 N'^2 \pi a^2 I \dot{I} = -L' I \dot{I} = -(L' I^2 / 2),$$

er bilanziert also genau die Abnahmerate der längenbezogenen magnetischen Feldenergie. ■

A2.3.6 Kräfte in einer dünnwandigen Zylinderspule:

Mit Bezug auf Abb. A2.3.6 herrscht im Innenraum die konstante magnetische Flußdichte

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{n} \times \vec{K} = B \vec{e}_z, \quad B = \mu_0 K, \quad K = IN/\ell,$$

und damit die Impulsflußdichte

$$\underline{p} = \underline{p}^e = \frac{B^2}{2\mu_0} (\delta - 2 \vec{e}_z \otimes \vec{e}_z).$$

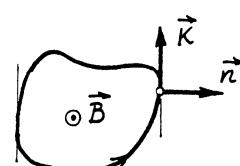
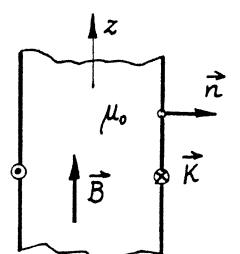


Abb. A2.3.6

Sie verschwindet im Außenraum. An der Spulenwand greift demnach eine Flächenkraft mit der Dichte

$$\vec{f}^{sm} = -\vec{f}^{se} = -\vec{n} \cdot [\underline{p^e}] = \frac{B^2}{2\mu_0} \vec{n}$$

an, entsprechend einem konstanten, transversalen Innendruck. Das gleiche Ergebnis erhalten wir direkt aus

$$\vec{f}^{sm} = \vec{K} \times \langle \vec{B} \rangle = \vec{K} \times \left(\frac{1}{2} B \vec{e}_z \right) = \frac{1}{2} K B \vec{n} = \frac{B^2}{2\mu_0} \vec{n}. \blacksquare$$

A2.3.7 Kraft und Drehmoment an einem elektrischen Punkt-dipol:

Wir setzen das Coulomb-Feld in der Form

$$\vec{E} = E_0 \frac{r_0^2}{r^2} \vec{e}_r = E_0 r_0^2 \frac{\vec{r}}{r^3}$$

an und berechnen

$$\vec{F} = \vec{p} \cdot \vec{\nabla} \vec{E} = E_0 r_0^2 \vec{p} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = E_0 r_0^2 \left[\frac{1}{r^3} \vec{p} \cdot \vec{\nabla} \vec{r} + \vec{r} \vec{p} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r^3} \right) \right],$$

wobei

$$\vec{p} \cdot \vec{\nabla} \vec{r} = (p_x \partial_x + p_y \partial_y + p_z \partial_z)(x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z) = \vec{p},$$

$$\vec{p} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r^3} \right) = -\frac{3}{r^4} \vec{p} \cdot \vec{\nabla} r = -\frac{3}{r^4} \vec{p} \cdot \vec{e}_r.$$

Die gesuchte Kraft auf den Punkt-dipol ist demnach

$$\vec{F} = E_0 \frac{r_0^2}{r^3} \left[\vec{p} - 3 \vec{e}_r \vec{e}_r \cdot \vec{p} \right].$$

Liegt der Dipol radial im Coulomb-Feld, $\vec{p} = p_r \vec{e}_r$, so ist auch die Kraft radial gerichtet: $\vec{F} = -2 p_r E_0 r_0^2 / r^3 \vec{e}_r$. Bei transversaler Lage ergibt sich auch eine transversale Kraft.

Das Drehmoment ist

$$\vec{T} = \vec{p} \times \vec{E} = E_0 \frac{r_0^2}{r^2} \vec{p} \times \vec{e}_r.$$

Es steht senkrecht auf die durch \vec{p} und \vec{r} aufgespannte Ebene und verschwindet in der radialen Lage des Dipols. Sein Betrag ist maximal für eine transversale Lage. ■

A2.3.8 Kraft und Drehmoment an einem magnetischen Punktdipol:

Wir stellen die magnetische Flussdichte des geraden Linienleiters in Kreiszylinderkoordinaten dar,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \vec{e}_\alpha,$$

und berechnen zusammen mit $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

$$\vec{F} = (\vec{m} \times \vec{B}) \times \vec{B} = (\vec{\nabla} \otimes \vec{B}) \cdot \vec{m} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\vec{\nabla} \otimes \frac{\vec{e}_\alpha}{\rho} \right) \cdot \vec{m},$$

wobei

$$\vec{\nabla} \otimes \frac{\vec{e}_\alpha}{\rho} = -\frac{1}{\rho^2} (\vec{e}_\rho \otimes \vec{e}_\alpha + \vec{e}_\alpha \otimes \vec{e}_\rho).$$

Die gesuchte Kraft ist daher

$$\vec{F} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho^2} (m_\alpha \vec{e}_\rho + m_\rho \vec{e}_\alpha).$$

Sie weist für einen Dipol in radialer Lage in Umfangsrichtung, und umgekehrt.

Das Drehmoment

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \vec{m} \times \vec{e}_\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} (m_\rho \vec{e}_x - m_z \vec{e}_\rho)$$

verschwindet für eine Dipollage in Umfangsrichtung. ■

A2.3.9 Parallele Linienleiter:

Wir berechnen zuerst die Flussdichte in einem allgemeinen Punkt (Abb. A 2.3.9 f),

$$\begin{aligned} \vec{B}(\varphi) &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\rho_1} \left[-\sin(\alpha_1) \vec{e}_x + \cos(\alpha_1) \vec{e}_y \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\rho_2} \left[\sin(\alpha_2) \vec{e}_x - \cos(\alpha_2) \vec{e}_y \right] \right\} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left\{ -\left(\frac{1}{\rho_1^2} - \frac{1}{\rho_2^2}\right) y \vec{e}_x + \left[\left(\frac{1}{\rho_1^2} - \frac{1}{\rho_2^2}\right) x - \left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2}\right) \alpha \right] \vec{e}_y \right\}, \\ \rho_1^2 &= (x-a)^2 + y^2, \quad \rho_2^2 = (x+a)^2 + y^2, \end{aligned}$$

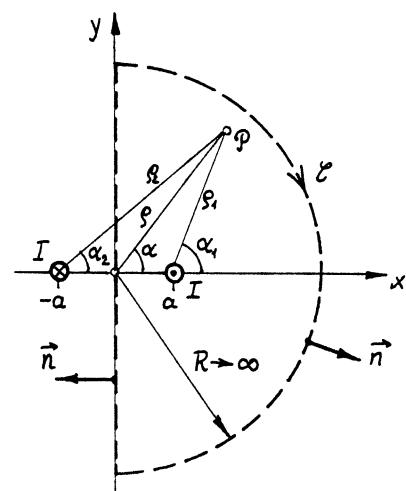


Abb. A 2.3.9 f

und daraus speziell

$$x = 0 : \quad \vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{\pi a} \frac{a^2}{a^2 + y^2} \vec{e}_y, \quad (1)$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \gg a^2 : \quad \vec{B} \approx -\frac{\mu_0 I}{\pi a} \frac{a^2}{\rho^2} [2 \cos(\alpha) \vec{e}_x - \vec{e}_y]. \quad (2)$$

Die längenbezogene Kraft auf den Leiter 1 lässt sich durch Integration der Maxwell-Spannungen entlang irgendeiner Kontur \mathcal{C} , die genau den Leiter 1 umschließt, berechnen. Es ist günstig, diese Kontur gemäß \mathcal{C} in Abb. A2.3.9 b zu wählen:

$$\begin{aligned} \vec{F}'_R &= \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{\mu_0} (\vec{n} \cdot \vec{B} \vec{B} - \frac{1}{2} B^2 \vec{n}) ds \\ &= \int_{-R}^R \frac{1}{\mu_0} (-\vec{e}_x \cdot \vec{B} \vec{B} + \frac{1}{2} B^2 \vec{e}_x) dy + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\mu_0} (\vec{e}_p \cdot \vec{B} \vec{B} - \frac{1}{2} B^2 \vec{e}_p) R d\alpha. \end{aligned}$$

Wir legen in das letzte Integral der Ausdruck (2) mit $\rho = R \gg a$ eingesetzt, so erweist sich der Integrand proportional zu R^{-3} . Das Integral verschwindet also für $R \rightarrow \infty$ und es verbleibt nur das Integral entlang der y-Achse mit dem Ausdruck (1) für \vec{B} ,

$$\vec{F}'_R = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 I}{\pi a} \frac{a^2}{a^2 + y^2} \right)^2 \vec{e}_x dy = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2 a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\eta}{(1+\eta^2)^2} \vec{e}_x.$$

Wegen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\eta}{(1+\eta^2)^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{\eta}{1+\eta^2} + \arctan(\eta) \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2}$$

erhalten wir schließlich die (natürlich sofort angebbare) Beziehung

$$\vec{F}'_R = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi a} \vec{e}_x. \blacksquare$$

A2.3.10 Parallele Leiter mit Kreisquerschnitt:

Die längenbezogene Kraft etwa auf den rechten Leiter ist aus

$$\vec{F}'_R = \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{\mu_0} (\vec{n} \cdot \vec{B} \vec{B} - \frac{1}{2} B^2 \vec{n}) ds$$

zu berechnen, wobei die Kurve \mathcal{C} in der Feldebene liegt und, wie in Abb. A2.3.10 b skizziert, nur den rechten Leiter umfängt. Wegen der über die Kreisquerschnitte gleichförmigen Stromverteilungen ergibt sich aber das magnetische Feld im Außenraum gleich dem von zwei Ersatz-Linienströmen entlang der Zylinderachsen (Superposition!), somit auch der gleiche Wert für obiges Integral. ■

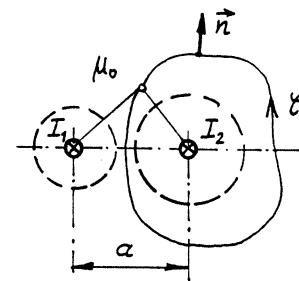


Abb. A 2.3.10 b

A2.3.11 Kraft zwischen zwei Halbkugeln:

Die elektrische Feldstärke können wir, wenn r die Radialkoordinate bezeichnet, sofort angeben,

$$r > a: \vec{E} = \frac{a^2}{r^2} E_0 \hat{e}_r; \quad r < a: \vec{E} = \vec{0}.$$

Zur Bestimmung der resultierenden Kraft auf die obere Halbkugel schließen wir diese in einen passend gewählten Bereich, z.B. den nach Abb. A2.3.11 b, ein und berechnen das Integral

$$\vec{F}_R = \int_{\partial\gamma} \epsilon_0 (\vec{n} \cdot \vec{E} \vec{E} - \frac{1}{2} E^2 \vec{n}) dA.$$

Die Hülle $\partial\gamma$, ist auch im Grenzfall $R \rightarrow \infty$ noch zulässig, wobei jedoch der Beitrag über die Halbkugel verschwindet (der Integrand ist proportional zu R^{-4} , der Flächeninhalt proportional zu R^2).

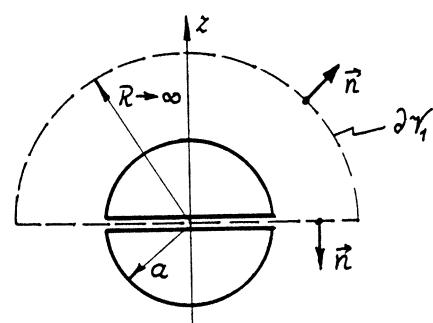


Abb. A 2.3.11 b

Es verbleibt also nur das Integral über die Ebene
 $x=0$, $\vec{n} = -\vec{e}_z$, $\vec{n} \cdot \vec{e}_r = 0$,

$$\begin{aligned}\vec{F}_R &= \int_a^\infty \underbrace{\epsilon_0 (-\vec{e}_z \cdot \vec{E} \vec{E} + \frac{1}{2} E^2 \vec{e}_z)}_0 2\pi r dr = \epsilon_0 E_0^2 \pi a^4 \int_a^\infty \frac{dr}{r^3} \vec{e}_z \\ &= \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \pi a^2 \vec{e}_z.\end{aligned}$$

Die gesuchte, abstoßende Kraft ist demnach

$$F = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \pi a^2 = 0,556 \text{ N}.$$

Das gleiche Ergebnis liefert auch eine Integration über die obere Halbkugel mit $R=a$. ■

A2.3.12 Kraft zwischen zwei Metallplatten:

Als Hülle für die Integration der Maxwell-Spannungen eignet sich die Symmetrieebene $x=0$ zusammen mit einer halben Kreiszylinderfläche, deren Beitrag im Grenzfall Radius $\rightarrow \infty$ verschwindet. Wir erhalten (Abb. A 2.3.12 b)

$$\begin{aligned}\vec{F}'_R &= \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_0 (\vec{n} \cdot \vec{E} \vec{E} - \frac{1}{2} E^2 \vec{n}) dz = \frac{\epsilon_0 U^2}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{a^2 + z^2} \vec{e}_x \\ &= \frac{\epsilon_0 U^2}{2\pi^2 a} \arctan\left(\frac{z}{a}\right) \Big|_{-\infty}^{\infty} \vec{e}_x,\end{aligned}$$

also die gesuchte, längenbezogene Kraft

$$\vec{F}'_R = \frac{\epsilon_0 U^2}{2\pi a} \vec{e}_x.$$

Sie wirkt anziehend. ■

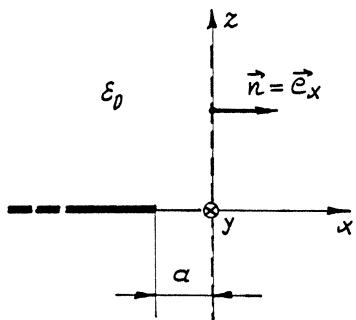


Abb. A 2.3.12 b

A2.3.13 Kraft zwischen Stromschienen:

Für die Berechnung der resultierenden Kraft auf die obere Schiene reicht, wenn das Überlagerungsprinzip anwendbar und die Stromverteilung fixiert ist, die Kenntnis der von der unteren Schiene erzeugten Flussdichte aus. Dies ergibt sich in einem Koordinatensystem nach Abb. A2.3.13 c mit $\alpha = 0$, $\rho_1 = \alpha + y$ und $\rho_2 = \alpha + b + y$ zu

$$x=0, -\alpha < y < b: \vec{B}_{21} = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \ln\left(\frac{\alpha+y}{\alpha+b+y}\right) \vec{e}_x.$$

Daraus folgt die gesuchte, längenbezogene Kraft zunächst allgemein

$$\vec{F}'_2 = \int_0^b \vec{K}_2 \times \vec{B}_{21} dy = -\frac{I}{b} \int_0^b \vec{e}_z \times \vec{B}_{21} dy = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi b^2} \int_0^b \ln\left(\frac{\alpha+b+y}{\alpha+y}\right) dy \vec{e}_y,$$

$$\vec{F}'_2 = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi(\alpha+b)} f\left(\frac{b}{\alpha}\right) \vec{e}_y,$$

wobei zur Abkürzung ($\beta = b/\alpha$, $\eta = y/\alpha$)

$$f(\beta) = \frac{1+\beta}{\beta^2} \int_0^\beta \ln\left(\frac{1+\beta+\eta}{1+\eta}\right) d\eta$$

gesetzt wurde. Die Länge $(\alpha+b)/f(b/\alpha)$ lässt sich dabei als Abstand zweier Ersatz-Linienleiter interpretieren.

Die Berechnung des Integrals liefert

$$f(\beta) = \frac{1+\beta}{\beta^2} \left[(1+2\beta) \ln(1+2\beta) - 2(1+\beta) \ln(1+\beta) \right]$$

mit den Grenzwerten

$$f(0) = 1, \quad f(\infty) = 2 \ln(2) = 1,386$$

und dem speziellen, $\alpha = 1 \text{ cm}$ und $b = 10 \text{ cm}$ entsprechenden Wert $f(10) = 1,23$. Dies führt auf das Ergebnis

$$\vec{F}'_2 = \frac{5}{0,11} \frac{N}{m} \cdot 1,23 \vec{e}_y = 55,9 \text{ N/m } \vec{e}_y.$$

Die Schienen stoßen einander ab. ■

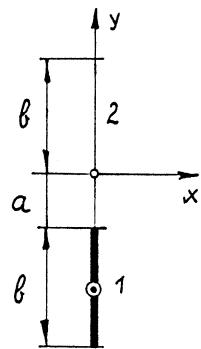


Abb. A 2.3.13 c

A2.3.14 Kraft an abgeschrägtem Zylinder:

Zur Berechnung der resultierenden Kraft ist das Integral

$$\vec{F}_R = \int_{\partial\gamma_2} \frac{1}{\mu_0} (\vec{n} \cdot \vec{B} \vec{B} - \frac{1}{2} B^2 \vec{n}) dA = \int_{\partial\gamma_2} \frac{B^2}{2\mu_0} \vec{n} dA$$

an der Oberfläche des ideal permeablen Teils nach Abb. A2.3.14 b auszuwerten. Unter Vernachlässigung der Streuung gilt in den Spalten

$$\begin{aligned}\vec{n}_1 &= -\vec{e}_x, & \vec{n}_2 &= \cos(\alpha)\vec{e}_x + \sin(\alpha)\vec{e}_y, \\ A_1 &= A, & A_2 &= A/\cos(\alpha), \\ B_1 &= \Phi/A, & B_2 &= \Phi/A_2 = (\Phi/A)\cos(\alpha).\end{aligned}$$

Damit ist

$$\vec{F}_R = \frac{B_1^2}{2\mu_0} A_1 \vec{n}_1 + \frac{B_2^2}{2\mu_0} A_2 \vec{n}_2,$$

also

$$F_{Rx} = \frac{(\Phi/A)^2}{2\mu_0} \left[-A + \cos^2(\alpha) \frac{A}{\cos(\alpha)} \cos(\alpha) \right],$$

$$F_{Rx} = -\frac{\Phi^2}{2\mu_0 A} \sin^2(\alpha).$$

Bei einem frei beweglichen Teil 2 schließt sich demnach der transversale Spalt. Sind beide Spalte transversal ($\alpha = 0$), verschwindet die resultierende Kraft. ■

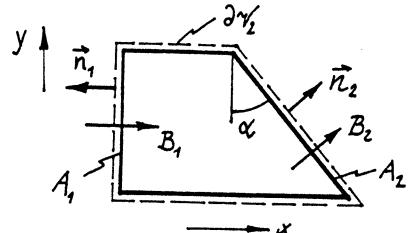


Abb. A2.3.14 b

A2.3.15 Haftkraft:

Die Anwendung des Durchflutungssatzes entlang der geschlossenen Kurve \mathcal{C} aus Abb. A2.3.15 b liefert $H=0$ in den Dauermagnetplättchen. Mit der Materialgleichung $B = \mu_0(H+M) = \mu_0 H + B_r$ und mit $\llbracket B_n \rrbracket = 0$ haben wir dann in den schmalen Spalten zwischen den Plättchen und dem Körper, durch die wir die Hülle $\partial\gamma_1$ legen, die magnetische Flussdichte $B = B_r$. Das Integral der Maxwell-Spannungen über $\partial\gamma_1$ ergibt schließlich die Haftkraft

$$F = 2 \frac{B_r^2}{2\mu_0} A = 96,7 \text{ N.} ■$$

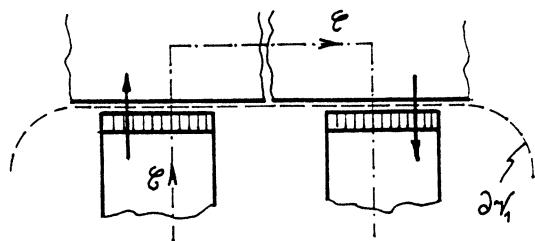


Abb. A2.3.15 b

A2.3.16 Kraft an einem Dreiteil:

Mit den Bezeichnungen aus Abb. A 2.3.16 b. lassen sich aus dem Durchflutungssatz,

$$\frac{1}{\mu_0} B_1 l_1 + H_M l_M + \frac{1}{\mu_0} B_2 l_2 = 0,$$

zusammen mit dem Satz vom magnetischen Hüllefluß und der Materialgleichung für den Dauermagneten,

$$B_1 A_1 = B_2 A_2, \quad B_1 = \mu_0 H_M + \mu_0 M,$$

die magnetischen Flußdichten in den Spalten berechnen:

$$B_1 = \frac{\mu_0 M}{1 + \frac{l_1}{l_M} + \frac{l_M A_1}{l_M A_2}} = 0,288 T, \quad B_2 = \frac{A_1}{A_2} B_1 = 0,648 T.$$

Die gesuchte resultierende Kraft ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{B_1^2}{2\mu_0} A_1 \vec{e}_x - \frac{B_2^2}{2\mu_0} A_2 \vec{e}_x = \frac{\pi}{8\mu_0} [(B_1 d_1)^2 - (B_2 d_2)^2] \vec{e}_x \\ &= -116,6 N \vec{e}_x. \blacksquare \end{aligned}$$

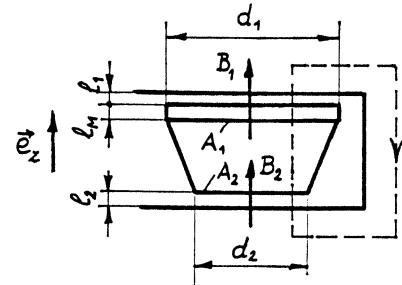


Abb. A 2.3.16 b

A2.3.17 Hubmagnet:

Bezeichnungen nach Abb. A 2.3.17 b. Der Durchflutungssatz liefert

$$B_1 = \mu_0 NI / \delta = 0,503 T,$$

und der Satz vom magnetischen Hüllefluß, zusammen mit den Flächeninhalten $A_1 = 78,54 \text{ cm}^2$, $A_2 = 100,53 \text{ cm}^2$,

$$B_2 = B_1 A_1 / A_2 = 0,393 T.$$

Damit ist die Haftkraft

$$F = \frac{1}{2\mu_0} (B_1^2 A_1 + B_2^2 A_2) = 1406 N. \blacksquare$$

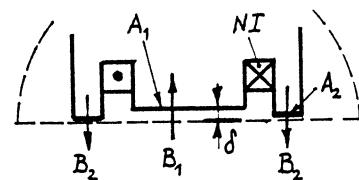


Abb. A 2.3.17 b

A2.3.18 Kraft auf Teil eines Magnetkreises:

In den beiden Spalten mit den Flächeninhalten $A = 2 \cdot 2,5 \cdot \sqrt{2} \text{ cm}^2$ herrscht die gleiche Flußdichte (Abb. A2.3.18 b)

A2.3.18 b)

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\delta}.$$

Das Flächenintegral zur Berechnung der resultierenden Kraft,

$$\vec{F}_R = \int_{\partial\gamma} \frac{1}{\mu_0} (\vec{n} \cdot \vec{B} \vec{B} - \frac{1}{2} B^2 \vec{n}) dA = \frac{B^2 A}{2\mu_0} (\vec{n}_1 + \vec{n}_2),$$

ergibt daher wegen $\vec{n}_1 + \vec{n}_2 = \sqrt{2} \vec{e}_z$

$$\vec{F}_R = \frac{B^2 A}{2\mu_0} \sqrt{2} \vec{e}_z = \mu_0 (NI)^2 \frac{A\sqrt{2}}{8\delta^2} \vec{e}_z = 402 \text{ N } \vec{e}_z. \blacksquare$$

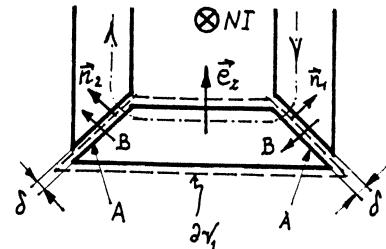


Abb. A2.3.18 b

A2.3.19 Kraft an Zylindersektor:

Mit den Bezeichnungen aus Abb. A2.3.19 b und dem angegebenen Strombelag stellt sich im Innenraum ein homogenes Magnetfeld der Flußdichte (s. z.B. A2.2.3)

$$\vec{B}_1 = \mu_0 \vec{e}_x \times \vec{K}(0) = 0,251 \text{ T } \vec{e}_y$$

ein. Der Satz vom magnetischen Hüllefluß liefert dann für den Rückfluß bei $y=0$

$$\vec{B}_2 = -\frac{a}{b} \vec{B}_1 = -0,503 \text{ T } \vec{e}_y.$$

Damit lässt sich das Integral

$$\vec{F}_R = \int_{\partial\gamma} \frac{1}{\mu_0} (\vec{n} \cdot \vec{B} \vec{B} - \frac{1}{2} B^2 \vec{n}) dA$$

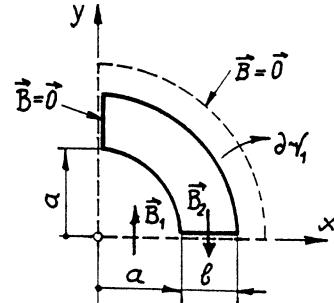


Abb. A2.3.19 b

auswerten. Wir erhalten, bezogen auf die axiale Länge,

$$\vec{F}'_R = \frac{1}{\mu_0} [(-\vec{e}_y \cdot \vec{B}_1 \vec{B}_1 + \frac{1}{2} B_1^2 \vec{e}_y) \alpha + (-\vec{e}_y \cdot \vec{B}_2 \vec{B}_2 + \frac{1}{2} B_2^2 \vec{e}_y) \beta + (-\vec{e}_x \cdot \vec{B}_1 \vec{B}_1 + \frac{1}{2} B_1^2 \vec{e}_x) \alpha]$$

$$= \frac{1}{2\mu_0} (B_1^2 \alpha \vec{e}_x - B_1^2 \alpha \vec{e}_y - B_2^2 \beta \vec{e}_y),$$

$$\vec{F}'_R = \frac{B_1^2 \alpha}{2\mu_0} [\vec{e}_x - (1 + \alpha/\beta) \vec{e}_y] = 12,57 \frac{kN}{m} (\vec{e}_x - 3 \vec{e}_y),$$

also

$$\vec{F}'_R = F'_R \vec{e}, \quad F'_R = 39,74 \text{ kN/m}, \quad \vec{e} = (\vec{e}_x - 3 \vec{e}_y) / \sqrt{10}.$$

Die Richtung \vec{e} zeigt Abb. A 2.3.19 c. ■

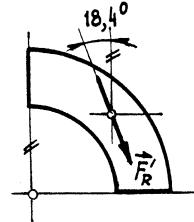


Abb. A 2.3.19 c

A3.1.1 Geladene Vollkugel mit Hohlraum:

Wir betrachten zuerst die gleichförmig geladene Vollkugel ohne Hohlraum. In ihrem Inneren herrscht, wenn \vec{r} den Ortsvektor bezüglich des Zentrums O angibt, die elektrische Feldstärke

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho \cdot 4\pi r^3 / 3}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{e}_r = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}, \quad r < a.$$

Den Hohlraum erzeugen wir dann durch Überlagern einer zweiten Vollkugel mit der entgegengesetzte gleich großen Ladungsschicht, die, in O' zentriert, für sich allein in ihrem Inneren die elektrische Feldstärke

$$\vec{E}_2 = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}', \quad r' < b,$$

erzeugt, wenn \vec{r}' den Ortsvektor bezüglich O' bedeutet (Abb. A3.1.1b). Die Überlagerung liefert dann

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{r} - \vec{r}') = \frac{\rho c}{3\epsilon_0} \hat{e}_x, \quad r' < b,$$

also ein Homogenfeld (!) im Hohlraum. ■

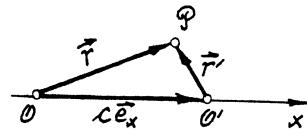


Abb. A3.1.1b

A3.1.2 Integralformeln für die elektrische Feldstärke:

Wegen $\vec{R} = R \vec{\nabla} R = -R \vec{\nabla}' R$ gilt zunächst für den Integranden in (1)

$$\frac{\vec{R}}{R^3} \rho' = -\frac{\rho'}{R^2} \vec{\nabla}' R = \rho' \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{R}\right) = \vec{\nabla}' \left(\frac{\rho'}{R}\right) - \frac{\vec{\nabla}' \rho'}{R},$$

also

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{\nabla}' \rho'}{R} dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \vec{\nabla}' \left(\frac{\rho'}{R}\right) dV'.$$

Dieser Ausdruck reduziert sich genau dann auf die Formel (2), wenn das zweite Integral gleich Null wird. Nun liefert aber die Anwendung der Green-Transformation

$$\int_{\gamma} \vec{V}' \left(\frac{\rho'}{R} \right) dV' = \int_{\partial\gamma} \vec{n}' \frac{\rho'}{R} dA'.$$

Das fragliche Integral verschwindet demnach insbesondere dann, wenn die Ladungsdichte ρ an einer hinreichend groß gewählten Hülle γ verschwindet, d.h. wenn die Ladungsverteilung räumlich begrenzt ist. ■

A3.1.3 Erweiterung der elektrostatischen Spiegelungsme- thode:

(i) Mit

$$R_1 = \sqrt{\rho^2 + (d-z)^2}, \quad R_2 = \sqrt{\rho^2 + (d+z)^2}$$

sind die Potentiale der Ersatzanordnungen nach Abb. A3.1.3 b und c

$$z > 0 : \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left(\frac{Q}{R_1} + \frac{Q'}{R_2} \right),$$

$$z < 0 : \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{Q''}{R_1},$$

da aus Coulomb-Feldern gebildet, jedenfalls Lösungen der Laplace-Gleichung mit der tatsächlich vorhandenen Singularität. Zur Erfüllung der Sprungbedingungen bei $z=0$ haben wir einerseits

$$\begin{aligned} [D_z] = 0 : \quad & -\epsilon_1 \partial_z \varphi \Big|_{0+} = -\epsilon_2 \partial_z \varphi \Big|_{0-} \\ & \left[-Q \cdot (d-z)/R_1^3 + Q' \cdot (d+z)/R_2^3 \right] \Big|_{z=0} = - \left[Q'' \cdot (d-z)/R_1^3 \right] \Big|_{z=0}, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Q - Q' = Q'',$$

andererseits

$$\llbracket E_p \rrbracket = 0 : \left. \frac{1}{\epsilon_1} [Q\rho/R_1^3 + Q'\rho/R_2^3] \right|_{z=0} = \left. \frac{1}{\epsilon_2} [Q''\rho/R_1^3] \right|_{z=0},$$

$$\Rightarrow (Q+Q')/\epsilon_1 = Q''/\epsilon_2,$$

zusammen also

$$Q' = -\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} Q, \quad Q'' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1} Q.$$

Somit erfüllen die Potentiale in den angegebenen Bereichen die Differentialgleichung und die Randbedingungen.

(ii) Skizzen in Abb. A 3.1.3 d, e. ■

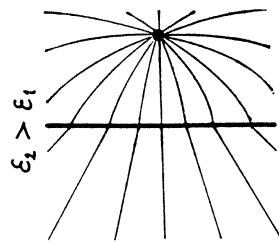


Abb. A 3.1.3 d

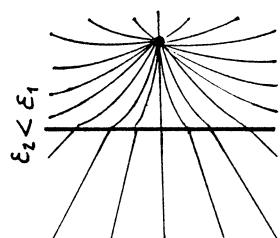


Abb. A 3.1.3 e

A3.1.4 Poisson-Integral für ebene Felder:

Innenraum, $0 \leq \rho < a$

Beschränktheit von φ für $\rho \rightarrow 0$ erfordert $B_0 = 0$ und

$C_n = D_n = 0$. Dann ist speziell für $\rho \rightarrow a$

$$\varphi(a, \alpha) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a^n A_n \cos(n\alpha) + a^n B_n \sin(n\alpha)]$$

die Fourier-Reihe des gegebenen, in α notwendig 2π -periodischen Randpotentials. Damit lassen sich die Koeffizienten zu

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(a, \alpha') d\alpha',$$

$$\begin{aligned} A_n \\ B_n \end{aligned} \left. \right\} = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} \varphi(a, \alpha') \left\{ \begin{array}{l} \cos(n\alpha') \\ \sin(n\alpha') \end{array} \right\} d\alpha', \quad n=1, 2, \dots$$

bestimmen. Einsetzen in die Reihe für $\varphi(\rho, \alpha)$ liefert nun

$$\begin{aligned}\varphi(\rho, \alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(a, \alpha') d\alpha' \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^n \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(a, \alpha') [\cos(n\alpha) \cos(n\alpha') + \sin(n\alpha) \sin(n\alpha')] d\alpha', \\ \varphi(\rho, \alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(a, \alpha') \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left(\frac{\rho}{a}\right)^n \cos[n(\alpha - \alpha')] \right\} d\alpha'.\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Abkürzung

$$z = \frac{\rho}{a} e^{j(\alpha - \alpha')}, \quad |z| < 1,$$

lässt sich die Summe in der geschlungenen Klammer als geometrische Reihe zusammenfassen,

$$\left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left(\frac{\rho}{a}\right)^n \cos[n(\alpha - \alpha')] \right\} = -1 + 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) = -1 + 2 \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1-z} \right)$$

$$= \operatorname{Re} \left(\frac{1+z}{1-z} \right) = \operatorname{Re} \left[\frac{(1+z)(1-z^*)}{|1-z|^2} \right] = \frac{1-zz^*}{|1-z|^2},$$

wobei $zz^* = (\rho/a)^2$ und, mit Bezug auf Abb. A 3.1.4 und den Kosinussatz

$$|1-z|^2 = 1 + \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 - 2 \frac{\rho}{a} \cos(\alpha - \alpha').$$

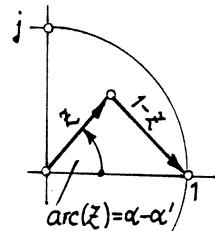


Abb. A 3.1.4

Somit haben wir

$$\left\{ \right\} = \frac{a^2 - \rho^2}{a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos(\alpha - \alpha')} ,$$

also das gesuchte Poisson-Integral

$$0 \leq \rho < a: \quad \varphi(\rho, \alpha) = \frac{a^2 - \rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(a, \alpha') d\alpha'}{a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos(\alpha - \alpha')}$$

für den Innenraum.

Außenraum, $\rho > a$

Die Beschränktheit von φ für $\rho \rightarrow \infty$ erfordert, wenn der logarithmische Term zur Berücksichtigung einer eventuell vorhandenen Gesamtladung beibehalten wird, $A_n = B_n = 0$. Dann ist

$$\varphi(a, \alpha) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a^n C_n \cos(n\alpha) + a^{-n} D_n \sin(n\alpha) \right]$$

wiederum die Fourier-Reihendarstellung des gegebenen Randpotentials und wir erhalten analog zu Obigem

$$\varphi(\rho, \alpha) = B_0 \ln\left(\frac{\rho}{a}\right) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(a, \alpha') \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left(\frac{a}{\rho} \right)^n \cos[n(\alpha - \alpha')] \right\} d\alpha',$$

nach Summieren der Reihe also das Poisson-Integral

$$\rho > a: \quad \varphi(\rho, \alpha) = B_0 \ln\left(\frac{\rho}{a}\right) + \frac{\rho^2 - a^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(a, \alpha') d\alpha'}{a^2 + \rho^2 - 2\rho a \cos(\alpha - \alpha')}$$

für den Außenraum. ■

A3.1.5 Geteilter Hohlzylinder:

(i) Innenraum, $0 \leq \rho < a_1$

Mit den ebenen Polarkoordinaten aus Abb.A3.1.5.b legen wir die Randwerte gemäß

$$\varphi(a_1, \alpha) = \begin{cases} U/2, & 0 < \alpha < \pi, \\ -U/2, & -\pi < \alpha < 0 \end{cases}$$

fest und erhalten für das Poisson-Integral aus

A3.1.4

$$\varphi(\rho, \alpha) = \frac{a_1^2 - \rho^2}{2\pi} \frac{U}{2} \left[\int_0^{\pi} \frac{d\alpha'}{a_1^2 + \rho^2 - 2a_1 \rho \cos(\alpha - \alpha')} - \int_{-\pi}^0 \frac{d\alpha'}{a_1^2 + \rho^2 - 2a_1 \rho \cos(\alpha - \alpha')} \right].$$

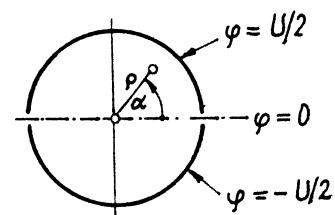


Abb.A3.1.5.b

Unter Verwendung des unbestimmten Integrals

$$\int \frac{dx}{a + b \cos(x)} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan \left[\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b} \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right] + \text{const}, \quad b^2 < a^2,$$

ergibt sich dann zunächst mit der Abkürzung

$$\beta = (\alpha_1 + \rho) / (\alpha_1 - \rho)$$

der Ausdruck

$$\begin{aligned} \varphi(\rho, \alpha) &= \frac{U}{2\pi} \left\{ 2 \arctan \left[\beta \tan \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \arctan \left[\beta \tan \left(\frac{\alpha + \pi}{2} \right) \right] - \arctan \left[\beta \tan \left(\frac{\alpha - \pi}{2} \right) \right] \right\} \\ &= \frac{U}{\pi} \left\{ \arctan \left[\beta \tan \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right] + \arctan \left[\beta \cot \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right] - \frac{\pi}{2} \right\} \\ &= \frac{U}{\pi} \left\{ \arctan \left[\beta \tan \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right] - \arctan \left[\frac{1}{\beta} \tan \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

und, wegen

$$\arctan(x_1) \pm \arctan(x_2) = \arctan \left(\frac{x_1 \pm x_2}{1 \mp x_1 x_2} \right)$$

für die Hauptwerte, schließlich

$$\varphi(\rho, \alpha) = \frac{U}{\pi} \arctan \left[\frac{2\alpha_1 \rho}{\alpha_1^2 - \rho^2} \sin(\alpha) \right]$$

als gesuchte Potentialverteilung im Innenraum.

Die sich einstellende Flächenladungsdichte am Innenrand folgt aus

$$\sigma = \epsilon_0 \partial_\rho \varphi \Big|_{\rho=a_1}, \quad \partial_x \arctan(x) = 1/(1+x^2),$$

zu

$$\sigma = \frac{\epsilon_0 U}{a_1 \pi \sin(\alpha)}.$$

(ii) Außenraum, $\rho > a_2$

Die Anordnung ist insgesamt ungeladen. \Rightarrow

$B_0 = 0$ im Poisson-Integral aus A 3.1.4. Eine Rechnung analog zu (i) mit $a_1 \rightarrow \rho$ und $\rho \rightarrow a_2$ liefert für die gesuchte Potentialverteilung im Außenraum

$$\varphi(\rho, \alpha) = \frac{U}{\pi} \arctan \left[\frac{2a_2 \rho}{\rho^2 - a_2^2} \sin(\alpha) \right]$$

und für die zugehörige Flächenladungsichte am Außenrand

$$\sigma = -\epsilon_0 \partial_\rho \varphi \Big|_{\rho=a_2} = \frac{\epsilon_0 U}{a_2 \pi \sin(\alpha)}.$$

Ein Skizze des elektrischen Feldes zeigt Abb. A 3.1.5 c.

Die Spuren oder Potentialflächen und die Vektorlinien der elektrischen Feldstärke werden durch orthogonale Scharen von Kreisbögen gebildet. ■

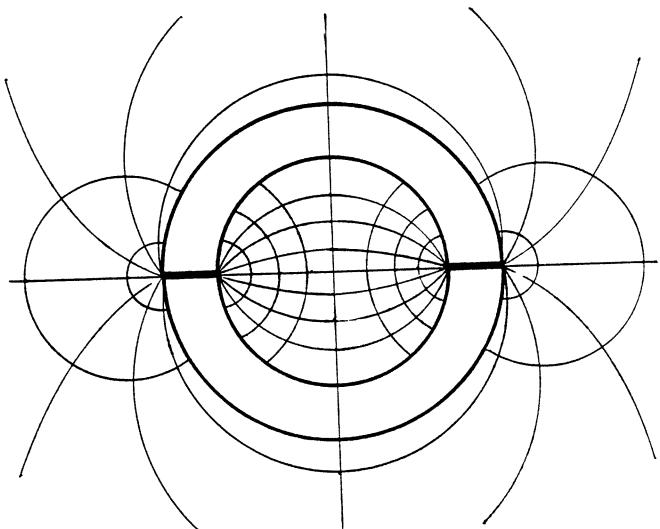


Abb. A 3.1.5 c

A3.1.6 Dünnwandiger Metallzylinder:

(i) Mit den Randwerten

$$\varphi(a, \alpha) = \begin{cases} U, & |\alpha| < \pi/4, \\ 0, & \pi/4 < |\alpha| \leq \pi \end{cases}$$

und dem unbestimmten Integral

$$\int \frac{dx}{a+b \cos(x)} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \arctan \left[\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b} \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right] + \text{const}, \quad b^2 < a^2,$$

liefert das Poisson-Integral aus A3.1.4 für $\rho < a$

$$\begin{aligned} \varphi(\rho, \alpha) &= \frac{a^2 - \rho^2}{2\pi} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{U d\alpha'}{a^2 + \rho^2 - 2\rho a \cos(\alpha - \alpha')} \\ &= \frac{U}{\pi} \left\{ \arctan \left[\frac{a+\rho}{a-\rho} \tan \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \right] - \arctan \left[\frac{a+\rho}{a-\rho} \tan \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Dies ist ein Ausdruck für die gesuchte Potentialverteilung.

(ii) Für die Randfeldstärke

$$\vec{E}(\alpha, \alpha) = E_\rho(\alpha, \alpha) \vec{e}_\rho, \quad E_\rho = -\partial_\rho \varphi,$$

erhalten wir über

$$\partial_\rho \varphi \Big|_{\rho=a} = -\frac{U}{2\pi a} \left[\cot \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{8} \right) - \cot \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \right]$$

den Zusammenhang

$$E_\rho = \frac{U}{2a} \cdot \frac{2/\pi}{1 - \sqrt{2} \cos(\alpha)},$$

dargestellt in Abb. A3.1.6 B. ■

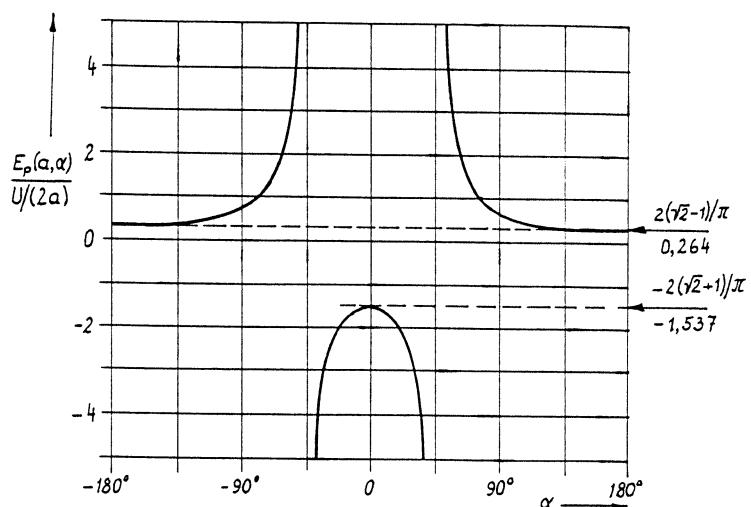


Abb. A 3.1.6 B

A3.1.7 Ein Dirichlet-Problem für den Halbraum:

(i) Als Green-Funktion $G(\vec{r}, \vec{r}')$ für das vorliegende Dirichlet-Problem eignet sich das auf Q/ϵ_0 bezogene elektrostatische Skalarpotential einer am Ort \vec{r}' platzierten Punktladung, dessen Werte am Rand des Feldbereichs, d.h. an der Ebene $z=0$ und für $|\vec{r}| \rightarrow \infty$, verschwinden. Solch ein Potential lässt sich offensichtlich mit der Spiegelungsmethode sofort angeben (Abb. A 3.1.7),

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi |\vec{r}-\vec{r}'|} - \frac{1}{4\pi |\vec{r}-\vec{r}''|},$$

wobei $\vec{r}'' = \vec{r}' - 2\vec{e}_z \cdot \vec{r}' \vec{e}_z = \vec{r}' - 2z' \vec{e}_z$. In kartesischen Koordinaten gilt speziell

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \left\{ \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{-1/2} - \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2 \right]^{-1/2} \right\},$$

und in Kreiszylinderkoordinaten

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \left\{ \left[\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\alpha-\alpha') + (z-z')^2 \right]^{-1/2} - \left[\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\alpha-\alpha') + (z+z')^2 \right]^{-1/2} \right\}.$$

Beachten Sie die Symmetrie $G(\vec{r}, \vec{r}') = G(\vec{r}', \vec{r})$ der Green-Funktion eines Dirichlet-Problems.

(ii) Da der Feldbereich $z > 0$ ladungsfrei ist, können wir das gesuchte Potential aus

$$\varphi = - \int_{\partial\gamma} \varphi' \partial_n' G \, dA'$$

berechnen, wobei sich die Integration wegen der speziellen Randwerte von φ nur über die Kreisscheibe $0 \leq \rho < a$ in der Ebene $z=0$ erstreckt. Wir haben

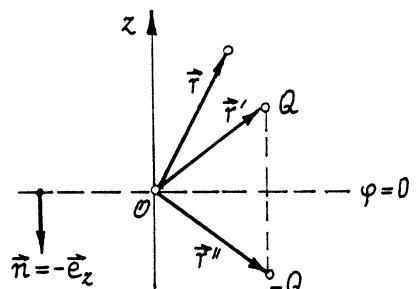


Abb. A 3.1.7

$$-\partial_n' G \Big|_{z'=0} = \partial_z G \Big|_{z=0} = \frac{U}{2\pi} \left[\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\alpha - \alpha') + z^2 \right]^{-3/2},$$

$$dA' = \rho' d\rho' d\alpha',$$

und damit die Integralformel

$$\varphi(\rho, \alpha, z) = \frac{Uz}{2\pi} \int_0^\alpha \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\alpha - \alpha') + z^2 \right]^{-3/2} d\alpha' \right\} \rho' d\rho'.$$

Offensichtlich hängt φ nicht von α ab (Substitution $\alpha - \alpha' \rightarrow \alpha''$), das gesuchte Integral lässt sich deshalb auch in der Form

$$\varphi(\rho, z) = \frac{Uz}{2\pi} \int_0^\alpha \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\alpha) + z^2 \right]^{-3/2} d\alpha \right\} \rho' d\rho'.$$

schreiben.

(iii) Für $\rho = 0$ reduziert sich das Integral auf

$$\begin{aligned} \varphi(0, z) &= \frac{Uz}{2\pi} \int_0^\alpha \left\{ \int_0^{2\pi} [\rho'^2 + z^2]^{-3/2} d\alpha \right\} \rho' d\rho' \\ &= Uz \int_0^\alpha \rho' (\rho'^2 + z^2)^{-3/2} d\rho' = Uz [z^{-1} - (\alpha^2 + z^2)^{-1/2}], \end{aligned}$$

also auf den Potentialverlauf entlang der Halbachse $z > 0$

$$\varphi(0, z) = U \cdot (1 - z/\sqrt{z^2 + \alpha^2}).$$

(iv) In der unter (ii) abgeleiteten Integralformel entwickeln wir zuerst den inneren Integranden in eine binomische Reihe,

$$\begin{aligned} [\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\alpha) + z^2]^{-3/2} &= [r^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\alpha)]^{-3/2} \\ &= r^{-3} \underbrace{\left[1 + \frac{\rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\alpha)}{r^2} \right]^{-3/2}}_f = r^{-3} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-3/2}{n} f^n, \end{aligned}$$

$$\binom{-3/2}{n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}{n! 2^n} \cos(n\pi),$$

und erhalten damit

$$\varphi(\rho, z) = \frac{U}{2} \frac{z}{a} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-3/2}{n} I_n,$$

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\alpha)}{r^2} \right]^n d\alpha \right\} \rho' d\rho' \\ &= \left(\frac{a}{r}\right)^{2n} \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left\{ \int_0^{2\pi} \left[x^2 - 2x \frac{\rho}{a} \cos(\alpha) \right]^n d\alpha \right\} x dx. \end{aligned}$$

Die Berechnung der Integrale liefert der Reihe nach

$$I_0 = 1, \quad I_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r}\right)^2, \quad I_2 = \left[\frac{1}{3} + \left(\frac{a}{r}\right)^2\right] \left(\frac{a}{r}\right)^4,$$

$$I_3 = \left[\frac{1}{4} + 2\left(\frac{a}{r}\right)^2\right] \left(\frac{a}{r}\right)^6, \quad I_4 = \left[\frac{1}{5} + 3\left(\frac{a}{r}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{r}\right)^4\right] \left(\frac{a}{r}\right)^8, \dots,$$

also die gesuchte asymptotische Entwicklung

$$\varphi(\rho, z) = \frac{Uz}{2a} \left\{ \left(\frac{a}{r}\right)^3 - \frac{3}{4} \left(\frac{a}{r}\right)^5 + \frac{5}{8} \left[1 + 3\left(\frac{a}{r}\right)^2\right] \left(\frac{a}{r}\right)^7 \mp \dots \right\},$$

gültig für $r^2 = \rho^2 + z^2 \gg a^2$. ■



A3.2.1 Randfeldstärke:

Da keine z -Abhängigkeit vorliegt, haben wir eine passende Lösung der Laplace-Gleichung

$$\partial_x^2 \varphi + \partial_y^2 \varphi = 0$$

zu bestimmen. Ein Separationsansatz $\varphi(x, y) = X(x)Y(y)$ führt auf

$$X'' + k^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = A_1 \cos(kx) + A_2 \sin(kx),$$

$$Y'' - k^2 Y = 0 \Rightarrow Y(y) = B_1 e^{ky} + B_2 e^{-ky},$$

wobei die Vorzeichen von k^2 im Hinblick auf die Randbedingungen gemäß der zu erwartenden periodischen x -Abhängigkeit gewählt wurden.
Anpassen an die Randbedingungen liefert

$$A_1 = U_0, \quad A_2 = 0, \quad k = \pi/a,$$

$$B_1 = 0, \quad B_2 = 1,$$

also die Lösung

$$\varphi(x, y, z) = U_0 e^{-\pi y/a} \cos(\pi x/a).$$

Sie erfüllt tatsächlich die Laplace-Gleichung und nimmt die gegebenen Randwerte an. Die elektrische Feldstärke

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla} \varphi = -\vec{e}_x \partial_x \varphi - \vec{e}_y \partial_y \varphi \\ &= U_0 \frac{\pi}{a} e^{-\pi y/a} \sin(\pi x/a) \vec{e}_x + U_0 \frac{\pi}{a} e^{-\pi y/a} \cos(\pi x/a) \vec{e}_y \end{aligned}$$

reduziert sich für $y=0+$ auf

$$\vec{E} = \frac{\pi U_0}{a} [\sin(\pi x/a) \vec{e}_x + \cos(\pi x/a) \vec{e}_y] = E_0 \vec{e}(x)$$

mit

$$E_0 = \pi U_0 / a, \quad \vec{e}(x) = \sin(\pi x/a) \vec{e}_x + \cos(\pi x/a) \vec{e}_y.$$

Ihr Betrag ist demnach konstant, während ihre Richtung gemäß Abb. A3.2.1 b von x abhängt. ■

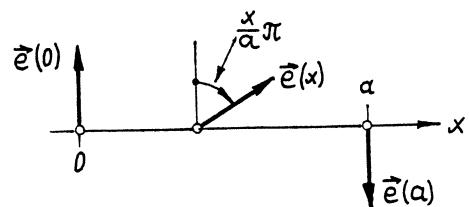


Abb. A3.2.1 b

A3.2.2 Ebenes Dirichlet-Problem für einen Spalt:

- (i) Ein Lösungsansatz $\varphi(x, y) = X(x)Y(y)$ für die Laplace-Gleichung in kartesischen Koordinaten führt auf

$$X'' - k^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = A_1 e^{kx} + A_2 e^{-kx},$$

$$Y'' + k^2 Y = 0 \Rightarrow Y(y) = B_1 \cos(ky) + B_2 \sin(ky).$$

Damit lassen sich die Randbedingungen direkt erfüllen, falls

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 1, \quad B_1 = U_0, \quad B_2 = 0, \quad k = \pi/a$$

gewählt wird. Tatsächlich genügt

$$\varphi(x, y) = U_0 e^{-\pi x/a} \cos(\pi y/a)$$

der Laplace-Gleichung und nimmt auch die gegebenen Randwerte an. Die gesuchte Feldstärke folgt daraus durch Gradientenbildung,

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla} \varphi = -\vec{e}_x \partial_x \varphi - \vec{e}_y \partial_y \varphi \\ &= \frac{\pi U_0}{a} e^{-\pi x/a} [\cos(\pi y/a) \vec{e}_x + \sin(\pi y/a) \vec{e}_y]. \end{aligned}$$

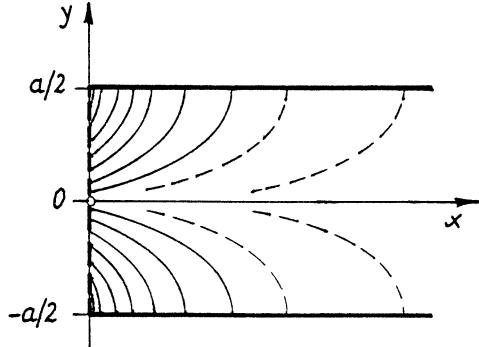


Abb. A3.2.2 b

- (ii) Eine Skizze der Feldstärkelinien zeigt Abb. A3.2.2 b. ■

A3.2.3 Ebenes Dirichlet-Problem für eine Nut:

- (i) Die Separationslösung $\varphi(x, y) = X(x)Y(y)$ der Laplace-Gleichung mit

$$X(x) = A_1 \cos(kx) + A_2 \sin(kx), \quad Y(y) = B_1 e^{ky} + B_2 e^{-ky}$$

lässt sich mit Blick auf die Randbedingungen zunächst auf

$$\varphi(x, y) = (B_1 e^{ky} + B_2 e^{-ky}) \sin(kx), \quad k = \pi/a,$$

reduzieren. Aus

$$\varphi(x, 0) = (B_1 + B_2) \sin(kx) \stackrel{!}{=} 0$$

folgt weiters $B_1 = -B_2$, also

$$\varphi(x, y) = B_1 (e^{ky} - e^{-ky}) \sin(kx) = 2B_1 \sinh(ky) \sin(kx),$$

und aus

$$\varphi(x, b) = 2B_1 \sinh(kb) \sin(kx) \stackrel{!}{=} U_0 \sin(kx)$$

ergibt sich schließlich $2B_1 = U_0 / \sinh(kb)$. Somit ist das gesuchte Potential

$$\varphi(x, y) = U_0 \frac{\sinh(ky)}{\sinh(kb)} \sin(kx), \quad k = \pi/a.$$

Es genügt der Laplace-Gleichung und nimmt die vorgeschriebenen Randwerte an.

(ii) Die elektrische Feldstärke

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla} \varphi = -\vec{e}_x \partial_x \varphi - \vec{e}_y \partial_y \varphi \\ &= -k U_0 \left[\frac{\sinh(ky)}{\sinh(kb)} \cos(kx) \vec{e}_x + \frac{\cosh(ky)}{\sinh(kb)} \sin(kx) \vec{e}_y \right] \end{aligned}$$

mit $k = \pi/a$ nimmt an den Rändern die Werte

$$x = \begin{cases} 0 \\ a \end{cases} : \quad \vec{E} = \mp k U_0 \frac{\sinh(ky)}{\sinh(kb)} \vec{e}_x,$$

$$y = 0 : \quad \vec{E} = -k U_0 \frac{\sin(kx)}{\sinh(kb)} \vec{e}_y,$$

$$y = b : \quad \vec{E} = -k U_0 [\cos(kx) \vec{e}_x + \coth(kb) \sin(kx) \vec{e}_y]$$

an. Abb. A 3.2.3 b zeigt diese Verläufe. Auf den Rändern mit $\varphi = \text{const}$ steht die Feldstärke senkrecht und sie verschwindet in den beiden unteren Ecken.

Entlang des unteren Randes bleibt der Betrag der Feldstärke relativ klein. Entlang des oberen Randes dreht sich die Richtung der Feldstärke (für $U_0 > 0$) von $-\vec{e}_x$ über $-\vec{e}_y$ nach \vec{e}_x . ■

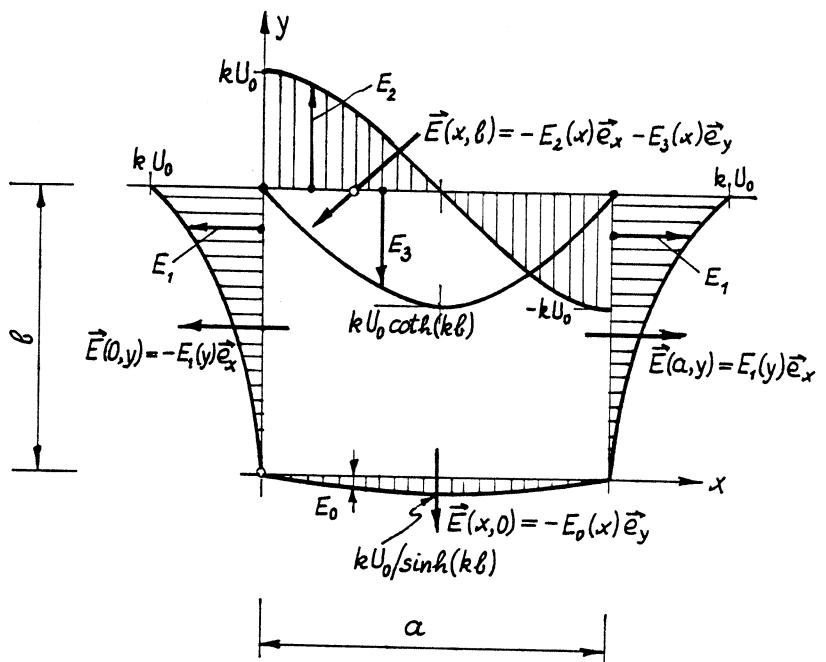


Abb. A 3.2.3 b

A3.2.4 Halbraum mit periodischem Randpotential:

- (i) Die in x periodische Grundform einer Separationslösung der Laplace-Gleichung in kartesischen Koordinaten,

$$\varphi_k(x, y) = C_k e^{-ky} \sin(kx),$$

lässt sich mit der gegebenen Fourier-Entwicklung des Randpotentials durch Vergleich sofort zur gesuchten Reihenlösung erweitern,

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{4U}{n\pi} e^{-n\pi y/a} \sin(n\pi x/a), \quad y > 0.$$

(ii) Wir schreiben die Reihe in der Form

$$\varphi(x,y) = \frac{4U}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n\pi y/a} \operatorname{Im}(e^{jn\pi x/a}) = \frac{4U}{\pi} \operatorname{Im} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} e^{n(-y+jx)\pi/a},$$

führen die komplexe Variable

$$z = e^{(-y+jx)\pi/a}, \quad |z| < 1 \text{ für } y > 0,$$

ein und erhalten mit der angegebenen Summen =

formel

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) &= \frac{4U}{\pi} \operatorname{Im} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} z^n = \frac{2U}{\pi} \operatorname{Im} \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \\ &= \frac{2U}{\pi} \operatorname{Im} \ln\left[\frac{1+e^{(-y+jx)\pi/a}}{1-e^{(-y+jx)\pi/a}}\right]. \end{aligned}$$

Dieser geschlossene Ausdruck ist zwar nicht schwierig auszuwerten, eine rein reelle Lösungsdarstellung ist aber meist vorzuziehen. Wir formen deshalb noch etwas um,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) &= \operatorname{Im} \ln\left[\left|\frac{1+z}{1-z}\right| e^{j\arg\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}\right] = \arg\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \\ &= \arg[(1+z)(1-z^*)] = \arg(1 - zz^* + z - z^*) \\ &= \arg[1 - e^{-2\pi y/a} + 2je^{-\pi y/a} \sin(\pi x/a)] \\ &= \arg[e^{\pi y/a} - e^{-\pi y/a} + 2j \sin(\pi x/a)] \\ &= \arg[\sinh(\pi y/a) + j \sin(\pi x/a)] = \arctan\left[\frac{\sin(\pi x/a)}{\sinh(\pi y/a)}\right], \end{aligned}$$

und erhalten damit

$$\varphi(x,y) = \frac{2U}{\pi} \arctan\left[\frac{\sin(\pi x/a)}{\sinh(\pi y/a)}\right].$$

Diese Funktion nimmt, wenn die Werte des \arctan auf das Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$ beschränkt werden, offensichtlich die gegebenen Randwerte an. Sie genügt aber auch der Laplace-Gleichung, wie sich durch geukuloliges Differenzieren direkt zeigen lässt.

(iii) Den gesuchten Potentialverlauf an der Ebene $y=a$,
also den Verlauf

$$\varphi(x, a) = \frac{2U}{\pi} \arctan \left[\frac{\sin(\pi x/a)}{\sinh(\pi)} \right],$$

zeigt Abb. A 3.2.4 b. Wegen $1/\sinh(\pi) = 0,0866$ und $\arctan(z) \approx z$ für $|z| \ll 1$ gilt übrigens in guter Näherung

$$\varphi(x, a) \approx \frac{2U}{\pi} \frac{\sin(\pi x/a)}{\sinh(\pi)}.$$

Deswegen ergibt sich der Verlauf als nahezu sinusförmig. ■

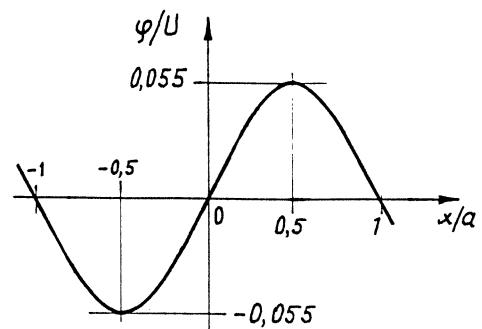


Abb. A 3.2.4 b

A3.2.5 Stromdurchflossene Platte:

Wir bestimmen zuerst die Potentialverteilung in der Platte durch Anpassen einer geeigneten Lösung der zweidimensionalen Laplace-Gleichung an die gegebenen, in Abb. A 3.2.5 a gezeigten Randwerte. Solch eine Lösung ergibt sich etwa durch Separation mit einer Separationskonstanten Null, kann aber mit etwas Übung auch direkt hingeschrieben werden. Tatsächlich genügt

$$\varphi(x, y) = U \frac{xy}{ab}$$

oder Laplace-Gleichung und nimmt die vorgeschriebenen Randwerte an.

(i) Das gesuchte Strömungsfeld, lokal durch die Stromdichte erfaßt, ist bei bekanntem Potential sofort angebbar,

$$\vec{J} = \gamma \vec{E} = -\gamma \nabla \varphi = -\frac{\gamma U}{ab} (y \vec{e}_x + x \vec{e}_y).$$

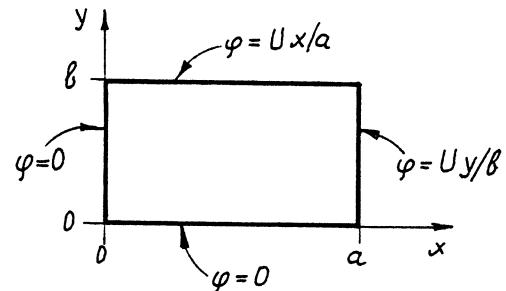


Abb. A 3.2.5 a

(ii) Die Potentiallinien $\varphi(x, y) = \text{const}$ des ebenen Feldes werden durch $xy = \text{const}$, also durch eine Schar gleichseitiger Hyperbeln mit den Koordinatenachsen als Asymptoten gebildet. Die Feldstärkelinien und die damit äquivalenten Stromdichtelinien verlaufen lokal immer senkrecht zu den Potentiallinien. Sie werden deshalb ebenfalls durch eine Schar gleichseitiger Hyperbeln, jedoch mit um 45° gedrehten Asymptoten dargestellt (Abb. A 3.2.5 b). ■

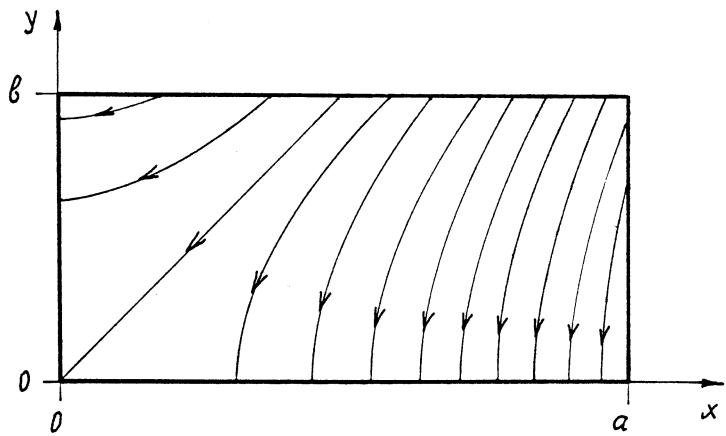


Abb. A 3.2.5 b

A3.2.6 Potential in einem Würfel:

(i) Ein Produktansatz $\varphi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ für Lösungen der Laplace-Gleichung in kartesischen Koordinaten ergibt

$$X''/X + Y''/Y + Z''/Z = 0$$

und führt über das übliche Separationsargument auf die drei Gleichungen

$$X'' + \alpha^2 X = 0, \quad Y'' + \beta^2 Y = 0, \quad Z'' - (\alpha^2 + \beta^2)Z = 0$$

mit Konstanten α und β . Aus deren Lösungen

bauen wir unter Beachtung der Symmetrie die Reihe

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{m, n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} C_{mn} \cos(m\pi x/a) \cos(n\pi y/a) \cosh(\sqrt{m^2+n^2}\pi z/a)$$

auf, die offensichtlich der Laplace-Gleichung genügt und auch bereits die Randbedingungen $\varphi=0$ an den vier Mantelflächen des Würfels erfüllt. Zur Bestimmung der noch freien Konstanten C_{mn} werden die Randbedingungen

$$\varphi(x, y, \pm a/2) = 0 = \sum_{m, n=1, 3, \dots}^{\infty} C_{mn} \cos(m\pi x/a) \cos(n\pi y/a) \cosh(\sqrt{m^2+n^2}\pi/2)$$

herangezogen: Wir multiplizieren auf beiden Seiten mit $\cos(k\pi x/a) \cos(l\pi y/a)$, integrieren über x und y jeweils von $-a/2$ bis $a/2$ und erhalten unter Beachtung der Orthogonalitätsrelationen

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(k\pi x/a) \cos(m\pi x/a) dx = \begin{cases} \pi/2 & \text{für } k=m, \\ 0 & \text{für } k \neq m, k \text{ ungerade,} \end{cases}$$

den Ausdruck

$$C_{mn} = \frac{16}{\pi^2} \frac{\sin(m\pi/2) \sin(n\pi/2)}{m n \cosh(\sqrt{m^2+n^2}\pi/2)}.$$

Damit ist die gesuchte Reihenlösung vervollständigt,

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{m, n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{\sin(m\pi/2) \sin(n\pi/2)}{m n} \cos(m\pi x/a) \cos(n\pi y/a) \frac{\cosh(\sqrt{m^2+n^2}\pi z/a)}{\cosh(\sqrt{m^2+n^2}\pi/2)}.$$

Sie gibt den Wert des Potentials in einem allgemeinen Punkt an.

(ii) Für den Mittelpunkt erhalten wir speziell

$$\begin{aligned}\varphi(0,0,0) &= U \frac{16}{\pi^2} \sum_{m,n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin(m\pi/2)\sin(n\pi/2)}{mn \cosh(\sqrt{m^2+n^2}\pi/2)} \\ &= U \frac{16}{\pi^2} \left[\underbrace{\frac{1}{\cosh(\pi/\sqrt{2})}}_{0,21438} - \underbrace{\frac{2}{3\cosh(\sqrt{10}\pi/2)}}_{0,00928} + \underbrace{\frac{1}{9\cosh(3\pi/\sqrt{2})}}_{0,00028} + \dots \right],\end{aligned}$$

$$\varphi(0,0,0) = 0,333 U.$$

Dies entspricht dem Mittelwert

$$\varphi_0 = \frac{2U}{6} = \frac{1}{3}U$$

des Potentials der Seitenflächen. Vergleichen Sie damit die Mittelwertsätze der Potentialtheorie für Kugeln. ■

A3.2.7 Additive Separationslösung:

Eintragen des Ansatzes in die Laplace-Gleichung liefert

$$F_1''(x) + F_2''(y) + F_3''(z) = 0.$$

Wir können nun auf

$$F_1''(x) = -[F_2''(y) + F_3''(z)]$$

das übliche Separationsargument anwenden und erhalten

$$F_1''(x) = A_1 = \text{const.}$$

$$F_2''(y) = -[A_1 + F_3''(z)] = A_2 = \text{const.}$$

$$F_3''(z) = -(A_1 + A_2) := A_3.$$

Die allgemeinste Lösung von $F_i''(x) = A_i$ ist $F_i(x) = \frac{1}{2}A_i x^2 + B_i x + C_i$, analog für F_2 und F_3 . Daraus ergibt sich die allgemeine Form einer Lösung des

vorausgesetzten Typs zu

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{2}(A_1 x^2 + A_2 y^2 + A_3 z^2) + B_1 x + B_2 y + B_3 z + C$$

mit Konstanten A_i , B_i und C , wobei $A_1 + A_2 + A_3 = 0$. ■

A3.2.8 Koaxialkabel mit radial inhomogenem Dielektrikum:

Bezeichnungen nach Abb. A3.2.8. Überschubladungen gibt es nur an den Elektroden. Die vorliegende Drehsymmetrie gestattet die Feldberechnung direkt aus dem Satz vom elektrischen Hullenfluß,

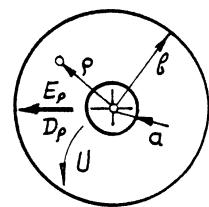


Abb. A3.2.8

$$D_p = \frac{Q'}{2\pi p} , \quad E_p = \frac{D_p}{\epsilon(p)} .$$

Der Zusammenhang mit der elektrischen Spannung ist durch

$$\begin{aligned} U &= \int_a^b E_p d\rho = \frac{Q'}{2\pi} \int_a^b \frac{d\rho}{\rho [\epsilon_1 + (\epsilon_2 - \epsilon_1) \frac{\rho-a}{b-a}]} \\ &= \frac{Q'}{2\pi} \frac{b-a}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \int_a^b \frac{d\rho}{\rho(\rho+\alpha)} , \quad \alpha = \frac{\epsilon_1 b - \epsilon_2 a}{\epsilon_2 - \epsilon_1} , \end{aligned}$$

gegeben. Die Auswertung des Integrals liefert

$$\int_a^b \frac{d\rho}{\rho(\rho+\alpha)} = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{\rho}{\rho+\alpha} \right) \Big|_a^b = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 b - \epsilon_2 a} \ln \left(\frac{\epsilon_1 b}{\epsilon_2 a} \right) ,$$

also

$$U = \frac{Q'}{2\pi} \frac{b-a}{\epsilon_1 b - \epsilon_2 a} \ln \left(\frac{\epsilon_1 b}{\epsilon_2 a} \right) .$$

Somit ist der gesuchte Kapazitätsbelag

$$C' = \frac{Q'}{U} = \frac{2\pi(\epsilon_1 b - \epsilon_2 a)}{(b-a) \ln\left(\frac{\epsilon_1 b}{\epsilon_2 a}\right)}.$$

Für $\epsilon_2 = \epsilon_1$, d.h. $\epsilon = \text{const}$, ergibt sich die bekannte Formel. ■

A3.2.9 Ein inneres und ein äußeres Dirichlet-Problem:

Die Form der Randbedingung legt den Produktionsatz $\varphi(\rho, \alpha) = R(\rho) \sin(n\alpha)$ für die Lösung der Laplace-Gleichung in ebenen Polarkoordinaten,

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \partial_\rho \varphi) + \frac{1}{\rho^2} \partial_\alpha^2 \varphi = 0,$$

nahe. Wir erhalten

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{\rho} (\rho R')' \sin(n\alpha) - \frac{n^2}{\rho^2} R \sin(n\alpha) = 0,$$

d.h. die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\rho(\rho R')' = n^2 R, \quad n = 1, 2, \dots,$$

für die Funktion $R(\rho)$. Ein Ansatz $R(\rho) = C\rho^\beta$ liefert $\beta = \pm n$, insgesamt also die Lösung

$$\varphi(\rho, \alpha) = (C_1 \rho^n + C_2 \rho^{-n}) \sin(n\alpha)$$

mit noch freien Konstanten C_1 und C_2 . Sie genügt der Laplace-Gleichung.

(i) Innenraum, $0 \leq \rho < a$

Soll das Potential für $\rho \rightarrow 0$ beschränkt bleiben, muß $C_2 = 0$ gelten. Aus $\varphi(a, \alpha) = C_1 a^n \sin(n\alpha) \stackrel{!}{=} \varphi_0 \sin(n\alpha)$ folgt dann $C_1 = \varphi_0 a^{-n}$, also

$$\varphi(\rho, \alpha) = \varphi_0 (\rho/\alpha)^n \sin(n\alpha).$$

Die zugehörige elektrische Feldstärke erhalten wir aus

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = -\vec{e}_\rho \partial_\rho \varphi - \vec{e}_\alpha \frac{1}{\rho} \partial_\alpha \varphi$$

zu

$$\vec{E}(\rho, \alpha) = -n \frac{\varphi_0}{\alpha} \left(\frac{\rho}{\alpha}\right)^{n-1} [\sin(n\alpha) \vec{e}_\rho + \cos(n\alpha) \vec{e}_\alpha].$$

Für $n=1$ wird im speziellen das Homogenfeld $\vec{E} = -\vec{e}_y \varphi_0/\alpha$ wiedergegeben. Ein Feldbild für $n=3$ zeigt Abb. A 3.2.9 b.

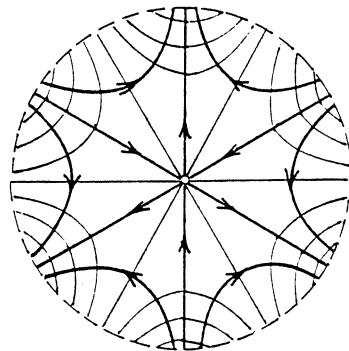


Abb. A 3.2.9 b

(ii) Außenraum, $\rho > a$

Soll die Feldstärke bei jedem n für $\rho \rightarrow \infty$ verschwinden, was wir hier annehmen wollen, ist $C_1 = 0$ zu setzen (Für $n=1$ beschreibt $C_1 \neq 0$ ein homogenes Feld $\vec{E}_1 = -C_1 \vec{e}_y$). Aus $\varphi(a, \alpha) = C_2 a^{-n} \sin(n\alpha) \stackrel{!}{=} \varphi_0 \sin(n\alpha)$ folgt hier $C_2 = \varphi_0 a^n$ und damit

$$\varphi(\rho, \alpha) = \varphi_0 (\alpha/\rho)^n \sin(n\alpha).$$

Dazu gehört die elektrische Feldstärke

$$\vec{E}(\rho, \alpha) = n \frac{\varphi_0}{\alpha} \left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^{n+1} [\sin(n\alpha) \vec{e}_\rho - \cos(n\alpha) \vec{e}_\alpha].$$

Abb. A 3.2.9 c zeigt ein Feldbild für $n=3$. ■

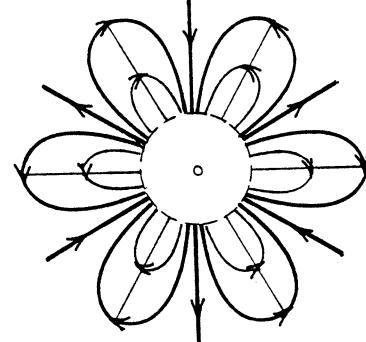


Abb. A 3.2.9 c

A3.2.10 Dickwandiger Kreiszylinder:

Wir gehen von dem Produktansatz $\varphi(\rho, \alpha) = R(\rho) \cos(n\alpha)$ aus und erhalten nach Eintragen in die Laplace-Gleichung in ebenen Polarkoordinaten die Bedingung

$$\rho(\rho R')' = n^2 R, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

für die Funktion $R(\rho)$. Bei deren Lösung sind zwei Fälle zu unterscheiden. Zum Fall $n=0$, d.h. $\varphi(a, \alpha) = U_0 = \text{const}$, gehört $\varphi(\rho, \alpha) = C_1 \ln(C_2/\rho)$, mit den gegebenen Randwerten also

$$n=0 : \quad \varphi(\rho, \alpha) = U_0 \frac{\ln(\beta/\rho)}{\ln(\beta/a)}.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ führt der Ansatz $R(\rho) = C_1 \rho^\beta$ auf $\beta = \pm n$, d.h. $R(\rho) = C_1 \rho^n + C_2 \rho^{-n}$ und somit

$$\varphi(\rho, \alpha) = (C_1 \rho^n + C_2 \rho^{-n}) \cos(n\alpha).$$

Die Randbedingungen

$$\begin{aligned} \varphi(a, \alpha) &= (C_1 a^n + C_2 a^{-n}) \cos(n\alpha) \stackrel{!}{=} U_0 \cos(n\alpha) \Rightarrow C_1 a^n + C_2 a^{-n} = U_0, \\ \varphi(\beta, \alpha) &= (C_1 \beta^n + C_2 \beta^{-n}) \cos(n\alpha) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow C_1 \beta^n + C_2 \beta^{-n} = 0 \end{aligned}$$

gestatten die Bestimmung der beiden Konstanten C_1 und C_2 . Wir erhalten

$$n = 1, 2, 3, \dots : \quad \varphi(\rho, \alpha) = U_0 \frac{(\beta/\rho)^n - (a/\beta)^n}{(\beta/a)^n - (a/\beta)^n} \cos(n\alpha)$$

für das elektrostatische Potential.

- (i) Die Feldstärke ergibt sich aus dem Potential durch Gradientenbildung,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = -\vec{e}_\rho \partial_\rho \varphi - \vec{e}_\alpha \frac{1}{\rho} \partial_\alpha \varphi ,$$

$$n=0: \quad \vec{E}(\rho, \alpha) = \frac{U_0}{\ln(b/a)} \frac{\vec{e}_\rho}{\rho} ,$$

$$n=1,2,\dots: \quad \vec{E}(\rho, \alpha) = \frac{n U_0}{b} \left[\frac{(b/\rho)^{n+1} + (\rho/b)^{n-1}}{(b/a)^n - (a/b)^n} \cos(n\alpha) \vec{e}_\rho \right. \\ \left. + \frac{(b/\rho)^{n+1} - (\rho/b)^{n-1}}{(b/a)^n - (a/b)^n} \sin(n\alpha) \vec{e}_\alpha \right] ,$$

für $\rho = b$ also speziell

$$n=0: \quad \vec{E}(b, \alpha) = \frac{U_0}{b \ln(b/a)} \vec{e}_\rho ,$$

$$n=1,2,\dots: \quad \vec{E}(b, \alpha) = \frac{n U_0}{b} \frac{2 \cos(n\alpha)}{(b/a)^n - (a/b)^n} \vec{e}_\rho .$$

(ii) Da der Feldraum ladungsfrei ist, tritt das Maximum des Feldstärkebetrages entweder am Innenrand oder am Außenrand auf. Der Fall $n=0$ ist klar;

$$n=0: \text{Innenrand}, \quad |\vec{E}|_{\max} = \frac{|U_0|}{a \ln(b/a)} .$$

Für $n=1,2,\dots$ setzen wir zur Abkürzung

$$K = \frac{n |U_0|}{b} \left[(b/a)^n - (a/b)^n \right]^{-1}$$

und berechnen

$$|\vec{E}(b, \alpha)|^2 = K^2 4 \cos^2(n\alpha) = 2 K^2 [1 + \cos(2n\alpha)] ,$$

$$|\vec{E}(a, \alpha)|^2 = 2 K^2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 \underbrace{\left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{b}{a} \right)^{2n} + \left(\frac{a}{b} \right)^{2n} \right] + \cos(2n\alpha) \right\}}_{>1} ;$$

das Maximum von $|\vec{E}|$ tritt also ebenfalls am Innenrand auf, und zwar bei

$$\alpha = 0, \pi/n, 2\pi/n, 3\pi/n, \dots$$

mit

$$|\vec{E}|_{max} = \frac{n|U_0|}{a} \frac{(\beta/a)^{2n} + 1}{(\beta/a)^{2n} - 1} . \blacksquare$$

A3.2.11 Dielektrischer Hohlzylinder im Transversalfeld:

- (i) Formulierung des Potentialproblems in ebenen Polarkoordinaten nach Abb.A 3.2.11 B.

Differentialgleichung

$$\rho \partial_\rho (\rho \partial_\rho \varphi) + \partial_\alpha^2 \varphi = 0$$

in allen drei offenen Bereichen $0 \leq \rho < a$, $a < \rho < b$ und $\rho > b$.

Randbedingungen

$$\rho = 0: \varphi \text{ beschränkt, o.B.d.A. } \varphi = 0;$$

$$\rho = a: [\vec{E}_t] = \vec{0} \Rightarrow \text{o.B.d.A. } [\varphi] = 0,$$

$$[D_n] = 0 \Rightarrow (\varepsilon_r \partial_\rho \varphi) \Big|_{\rho=a+} - (\partial_\rho \varphi) \Big|_{\rho=a-}, \quad \varepsilon_r = \varepsilon / \varepsilon_0;$$

$$\rho = b: [\vec{E}_t] = \vec{0} \Rightarrow \text{o.B.d.A. } [\varphi] = 0,$$

$$[D_n] = 0 \Rightarrow (\partial_\rho \varphi) \Big|_{\rho=b+} - (\varepsilon_r \partial_\rho \varphi) \Big|_{\rho=b-};$$

$$\rho \rightarrow \infty: \vec{E} \rightarrow E_0 \vec{e}_y \Rightarrow \varphi \rightarrow -E_0 y = -E_0 \rho \sin(\alpha).$$

Über die Grundform $\varphi(\rho, \alpha) = C \rho^k \sin(k\alpha)$ lassen sich leicht geeignete Lösungen

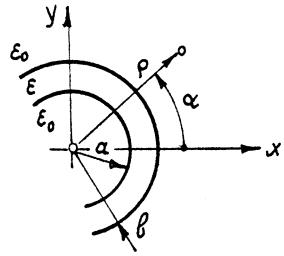


Abb.A 3.2.11 B

$$0 \leq \rho < a: \quad \varphi(\rho, \alpha) = C_1 \rho \sin(\alpha),$$

$$a < \rho < b: \quad \varphi(\rho, \alpha) = (C_2 \rho + C_3/\rho) \sin(\alpha),$$

$$\rho > b: \quad \varphi(\rho, \alpha) = (-E_0 \rho + C_4/\rho) \sin(\alpha)$$

mit noch freien Konstanten C_1 bis C_4 angeben. Sind die Konstanten aus den Randbedingungen widerspruchsfrei bestimmbar, so haben wir damit eine vollständige Lösung des Potentialproblems konstruiert. Wir erhalten

$$\rho = a: \quad C_1 a = C_2 a + C_3/a, \quad C_1 = \epsilon_r (C_2 - C_3/a^2),$$

$$\rho = b: \quad C_2 b + C_3/b = -E_0 b + C_4/b, \quad \epsilon_r (C_2 - C_3/b^2) = -E_0 - C_4/b^2$$

und daraus

$$C_1 = -\frac{1}{\epsilon_r} C E_0, \quad C_2 = -\frac{\epsilon_r+1}{2\epsilon_r^2} C E_0, \quad C_3 = -\frac{\epsilon_r-1}{2\epsilon_r^2} C a^2 E_0,$$

$$C_4 = \frac{\epsilon_r^2-1}{4\epsilon_r^2} C (b^2-a^2) E_0, \quad C = \frac{4\epsilon_r^2 b^2}{(\epsilon_r+1)^2 b^2 - (\epsilon_r-1)^2 a^2},$$

insgesamt also für das Potential und die zugehörige Feldstärke $\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$

$$0 \leq \rho < a: \quad \varphi = -\frac{C}{\epsilon_r} E_0 \rho \sin(\alpha) = -\frac{C}{\epsilon_r} E_0 y,$$

$$\vec{E} = \frac{C}{\epsilon_r} E_0 \vec{e}_y = \frac{C}{\epsilon_r} \vec{E}_0 \quad (\text{Homogenfeld!}).$$

$$a < \rho < b: \quad \varphi = -C \left(\frac{\epsilon_r+1}{2\epsilon_r^2} \frac{\rho}{a} + \frac{\epsilon_r-1}{2\epsilon_r^2} \frac{a}{\rho} \right) E_0 a \sin(\alpha),$$

$$\vec{E} = C \frac{\epsilon_r+1}{2\epsilon_r^2} \vec{E}_0 - C \frac{\epsilon_r-1}{2\epsilon_r^2} \left(\frac{a}{\rho} \right)^2 E_0 [\sin(\alpha) \vec{e}_\rho - \cos(\alpha) \vec{e}_\alpha].$$

$$\rho > b: \quad \varphi = -\left[\rho - C \frac{\epsilon_r^2-1}{4\epsilon_r^2} \frac{b^2-a^2}{\rho} \right] E_0 \sin(\alpha),$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + C \frac{\epsilon_r^2-1}{4\epsilon_r^2} \frac{b^2-a^2}{\rho^2} E_0 [\sin(\alpha) \vec{e}_\rho - \cos(\alpha) \vec{e}_\alpha].$$

Damit sind sowohl die Differentialgleichung wie auch die Randbedingungen erfüllt.

(ii) Flußdichtelinien entsprechend $\epsilon_r=2$ zeigt Abb.A 3.2.11c.

(iii) Diskussion von Grenzfällen.

1) $\epsilon_r=1: \Rightarrow C=1$, Homogenfeld \vec{E}_0 im ganzen Raum.

2) $\epsilon_r \rightarrow \infty: \Rightarrow C = 4\beta^2/(\beta^2 - \alpha^2)$,

$$\rho < \beta: \vec{E} = \vec{0},$$

$$\rho > \beta: \vec{E} = \vec{E}_0 + E_0 \left(\frac{\beta}{\rho} \right)^2 \left[\sin(\alpha) \vec{e}_\rho - \cos(\alpha) \vec{e}_\alpha \right],$$

entspricht einem leitenden Zylinder.

3) $\alpha=0: \Rightarrow C = 4\epsilon_r^2/(\epsilon_r+1)^2$,

$$\rho < \beta: \vec{E} = \frac{2}{\epsilon_r+1} \vec{E}_0, \text{ Homogenfeld},$$

$$\rho > \beta: \vec{E} = \vec{E}_0 + \frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r+1} \left(\frac{\beta}{\rho} \right)^2 E_0 \left[\sin(\alpha) \vec{e}_\rho - \cos(\alpha) \vec{e}_\alpha \right].$$

4) $\beta \rightarrow \infty: \Rightarrow C = 4\epsilon_r^2/(\epsilon_r+1)^2$,

$$\rho < \alpha: \vec{E} = \frac{2\epsilon_r}{\epsilon_r+1} \vec{E}_\infty \quad \text{mit} \quad \vec{E}_\infty = \frac{2}{\epsilon_r+1} \vec{E}_0,$$

Homogenfeld,

$$\rho > \alpha: \vec{E} = \vec{E}_\infty - \frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r+1} \left(\frac{\alpha}{\rho} \right)^2 E_\infty \left[\sin(\alpha) \vec{e}_\rho - \cos(\alpha) \vec{e}_\alpha \right]. \blacksquare$$

$$\beta/\alpha = 2, \quad \epsilon_r = 2$$

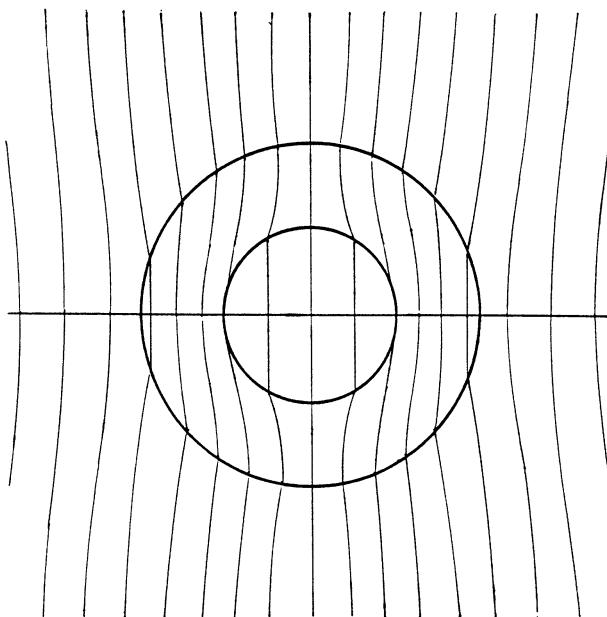


Abb. A 3.2.11 c

A3.2.12 Kantenfeld:

Aus dem bereits bekannten Potentialverlauf erhalten wir die Feldstärke

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = -\vec{e}_\rho \partial_\rho \varphi - \vec{e}_\alpha \frac{1}{\rho} \partial_\alpha \varphi$$

$$= \frac{U}{2a} \sqrt{\frac{a}{\rho}} [\cos(\alpha/2) \vec{e}_\rho - \sin(\alpha/2) \vec{e}_\alpha]$$

und aus der Sprungbedingung für die elektrische Flussdichte die gesuchte Ladungsdichte

$$\sigma = \vec{n} \cdot [\vec{D}] = \epsilon_0 E_\alpha(\rho, -\pi) - \epsilon_0 E_\alpha(\rho, \pi) = \frac{\epsilon_0 U}{a} \sqrt{\frac{a}{\rho}},$$

wobei ρ direkt den Randabstand auf der Platte ($\alpha = \pm \pi$) angibt. Den Verlauf zeigt Abb. A3.2.12 b.
Ein Randstreifen der Breite a trägt die längenbezogene Ladung

$$Q' = \int_0^a \sigma d\rho = \epsilon_0 U \int_0^a \sqrt{\frac{a}{\rho}} d\left(\frac{\rho}{a}\right) = 2\epsilon_0 U. \blacksquare$$

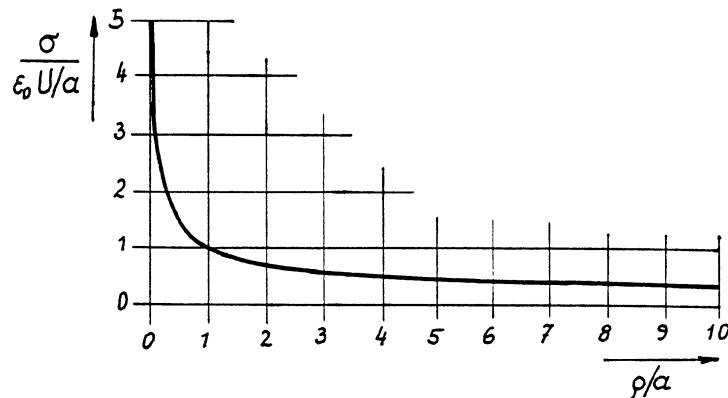


Abb. A 3.2.12 b

A3.2.13 Widerstand:

(i) Mit

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\vec{\nabla}\varphi = -\vec{e}_\rho \partial_\rho \varphi - \vec{e}_\alpha \frac{1}{\rho} \partial_\alpha \varphi - \vec{e}_z \partial_z \varphi \\ &= \vec{e}_\rho \underbrace{(C_1 + C_2 z)/\rho}_{E_\rho} - \vec{e}_z \underbrace{C_2 \ln(C_3/\rho)}_{-E_z}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\epsilon_0}{\rho} \underbrace{\partial_\rho(\rho E_\rho)}_0 + \frac{\epsilon_0}{\rho} \underbrace{\partial_\alpha E_\alpha}_0 + \epsilon_0 \underbrace{\partial_z E_z}_0 \\ &= -\epsilon_0 \nabla^2 \varphi\end{aligned}$$

ist die Potentialgleichung offensichtlich erfüllt. Aus den Randbedingungen (vernachlässigbarer Widerstand der metallischen Leiter, flächenhafter Strom in der Widerstandsschicht)

$$z = 0: \quad E_\rho = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0,$$

$$\rho = b: \quad E_z = 0 \quad \Rightarrow \quad C_3 = b,$$

$$\rho = a: \quad K_z = I/(2\pi a) = j_s E_z = -j_s C_2 \ln(b/a) \Rightarrow$$

$$C_2 = -\frac{I}{j_s 2\pi a \ln(b/a)}$$

folgt dann

$$\vec{E} = -C_2 \left[-\frac{z}{\rho} \vec{e}_\rho + \ln\left(\frac{b}{\rho}\right) \vec{e}_z \right].$$

(ii) Aus dem Durchflutungssatz ergibt sich sofort

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \vec{e}_\alpha.$$

(iii) Damit ist der Poynting-Vektor

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = -\frac{C_2 I}{2\pi\rho} \left[-\frac{z}{\rho} \underbrace{\vec{e}_\rho \times \vec{e}_\alpha}_{\vec{e}_z} + \ln\left(\frac{b}{\rho}\right) \underbrace{\vec{e}_z \times \vec{e}_\alpha}_{-\vec{e}_\rho} \right],$$

$$\vec{J} = - \frac{I^2}{j_s (2\pi)^2 a b \ln(b/a)} \frac{\rho}{\rho} \left[\ln\left(\frac{b}{\rho}\right) \vec{e}_\rho + \frac{z}{\rho} \vec{e}_z \right],$$

oder, mit dem Widerstand $R = \ell/(j_s 2\pi a)$,

$$\vec{J} = - \frac{I^2 R}{2\pi \rho \ell} \left[\frac{\ln(b/\rho)}{\ln(b/a)} \vec{e}_\rho + \frac{z/\rho}{\ln(b/a)} \vec{e}_z \right].$$

Ein Bild des Poynting-Flusses zeigt Abb. A3.2.13 b. ■

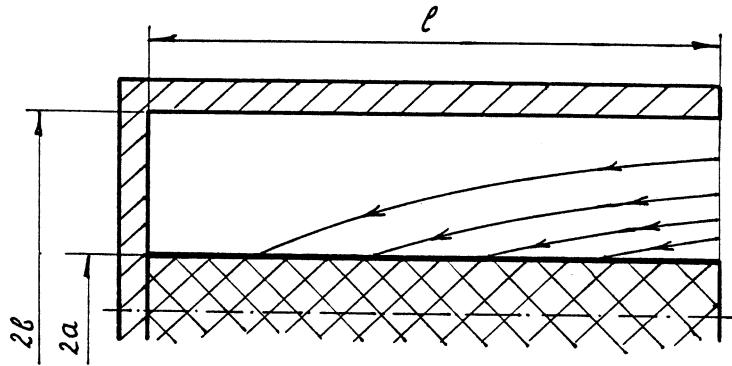


Abb. A3.2.13 b

A3.2.14 Elektrostatische Potentiale:

- (i) Da $\nabla \times \vec{E} = (\partial_x E_y - \partial_y E_x) \vec{e}_z = \vec{0}$, lässt sich \vec{E} durch ein Skalarpotential φ gemäß

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi = -\vec{e}_x \partial_x \varphi - \vec{e}_y \partial_y \varphi = \frac{E_0}{a^2} [(x^2 - y^2) \vec{e}_x - 2xy \vec{e}_y]$$

darstellen. Dies bedeutet

$$\partial_x \varphi = -\frac{E_0}{a^2} (x^2 - y^2) \Rightarrow \varphi = \frac{E_0}{a^2} (xy^2 - x^3/3) + f(y),$$

$$\partial_y \varphi = \frac{E_0}{a^2} 2xy + f'(y) \stackrel{!}{=} \frac{E_0}{a^2} 2xy \Rightarrow f(y) = \text{const} = 0 \text{ (o.B.d.A.)}$$

also

$$\varphi(x, y) = \frac{E_0}{a^2} x (y^2 - x^2/3).$$

(ii) Aus $\vec{V} \cdot \vec{E} = \partial_x E_x + \partial_y E_y = 0$ folgt die Existenz eines Vektorpotentials $\vec{V} = V \vec{e}_z$ derart daß

$$\vec{E} = \vec{V} \times \vec{V} = \vec{e}_x \partial_y V - \vec{e}_y \partial_x V = \frac{E_0}{a^2} [(x^2 - y^2) \vec{e}_x - 2xy \vec{e}_y].$$

Daher gilt

$$\partial_y V = \frac{E_0}{a^2} (x^2 - y^2) \Rightarrow V = \frac{E_0}{a^2} (x^2 y - y^3/3) + g(x),$$

$$\partial_x V = \frac{E_0}{a^2} 2xy + g'(x) \stackrel{!}{=} \frac{E_0}{a^2} 2xy \Rightarrow g(x) = \text{const} = 0 \text{ (o.B.d.A.)}.$$

Das gesuchte Vektorpotential ist somit

$$\vec{V} = \frac{E_0}{a^2} y (x^2 - y^2/3) \vec{e}_z.$$

(iii) In einem ebenen Feld werden die Potentiallinien durch $\varphi = \text{const}$, die dazu orthogonalen Feldstärkelinien durch $V = \text{const}$ dargestellt. Abb.

A3.2.14 zeigt solch ein Feldbild. ■

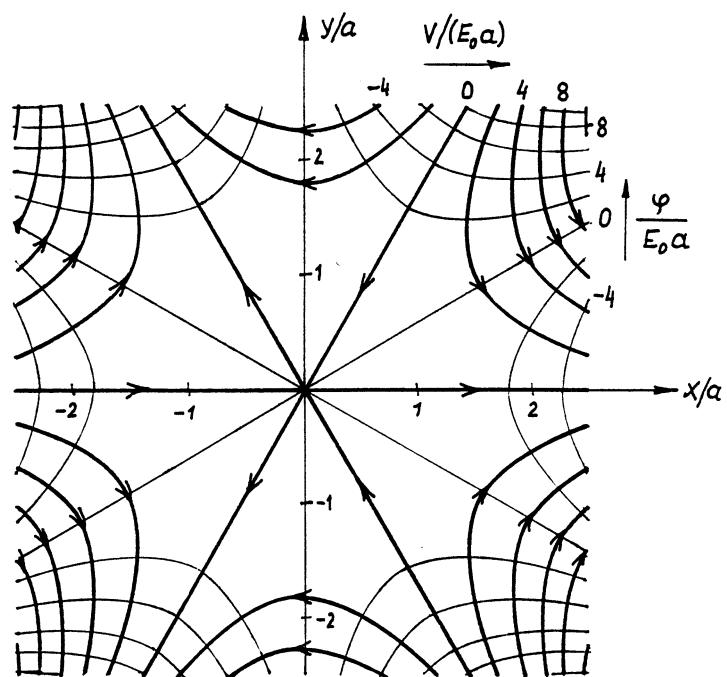


Abb. A3.2.14

A3.2.15 Elektrischer Fluß:

Die Form der Elektrodenkontur, an der das skalare Potential φ jeweils konstante Werte annehmen muß, legt den Ansatz $\varphi = Cxy$ nahe. Tatsächlich erfüllt

$$\varphi(x, y) = U \frac{xy}{a^2}$$

die Laplace-Gleichung und die Randbedingungen.

Die zugehörige Feldstärke ist

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = -\frac{U}{a^2}(y\vec{e}_x + x\vec{e}_y).$$

Da der Feldbereich ladungsfrei ist, läßt sich $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ auch durch ein Vektorpotential $\vec{V} = V\vec{e}_z$ gemäß

$$\vec{D} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{e}_x \partial_y V - \vec{e}_y \partial_x V \stackrel{!}{=} \epsilon_0 \vec{E} = -\frac{\epsilon_0 U}{a^2}(y\vec{e}_x + x\vec{e}_y)$$

darstellen, wobei

$$\partial_x V = \frac{\epsilon_0 U}{a^2} x \Rightarrow V = \frac{\epsilon_0 U}{2a^2} x^2 + f(y),$$

$$\partial_y V = f'(y) \stackrel{!}{=} -\frac{\epsilon_0 U}{a^2} y \Rightarrow f(y) = -\frac{\epsilon_0 U}{2a^2} y^2 + \underline{\text{const}},$$

also

$$V(x, y) = \frac{\epsilon_0 U}{2a^2}(x^2 - y^2).$$

Damit läßt sich der gesuchte, längenbezogene Fluß sofort angeben,

$$\bar{\Psi}' = V(2a, a/2) - V(a/2, 2a) = \frac{15}{4} \epsilon_0 U,$$

und der zugehörige Kapazitätsbelag ist

$$C' = \bar{\Psi}' / U = 15 \epsilon_0 / 4 = 33,2 \text{ pF/m. } \blacksquare$$

A3.2.16 Randfeld eines Plattenkondensators:

Punkten auf der z -Achse ($x=0, y=0$) sind die Parameterwerte $u=0$ und $v=v_0$ zugeordnet, wobei v_0 als Lösung einer transzendenten Gleichung

$$1 + v_0 + e^{v_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 = -1,2785$$

zu bestimmen ist. Die gesuchte Feldstärke besitzt lediglich eine y -Komponente mit dem Koeffizienten

$$E_y = -\frac{1}{\epsilon_0} \partial_x V = -\frac{U}{2\pi} \partial_x v.$$

Nun gilt entlang der Kurve $u=0$ ($y=0$)

$$\partial_x v = \frac{1}{\partial_v x}, \quad \partial_v x = \frac{a}{2\pi} (1 + e^v),$$

also

$$E_y(0, 0, z) = -\frac{U}{2\pi} \frac{2\pi}{a(1+e^{v_0})} = \frac{U}{v_0 a},$$

$$\vec{E}(0, 0, z) = -0,7822 \frac{U}{a} \vec{e}_y. \blacksquare$$

A3.2.17 Asymptotisches Randfeld:

- (i) Die Separation der Laplace-Gleichung in ebenen Polarkoordinaten liefert im speziellen mit dem Wert Null der Separationskonstanten die Lösung

$$\varphi(\rho, \alpha) = [A_1 + A_2 \ln(\alpha/\rho)]/(B_1 + B_2 \alpha).$$

Wie üblich, sind die freien Konstanten aus den Randbedingungen zu bestimmen, hier $\varphi(\rho, \pm\pi) = \pm U/2$. Damit ist das Skalarpotential und die zugehörige Feldstärke

$$\varphi = \frac{U}{2} \frac{\alpha}{\pi}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi = -\frac{U}{2\pi\rho} \vec{e}_\alpha.$$

(ii) Da das Feld eben ist, steht das Vektorpotential notwendig senkrecht auf der Feldebene, $\vec{V} = V \vec{e}_z$.
Wir erhalten

$$\vec{D} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{e}_\rho \frac{1}{\rho} \partial_\alpha V - \vec{e}_\alpha \partial_\rho V \stackrel{!}{=} \epsilon_0 \vec{E} = - \frac{\epsilon_0 U}{2\pi\rho} \vec{e}_\alpha,$$

$$\partial_\rho V = \frac{\epsilon_0 U}{2\pi\rho} \Rightarrow V = \frac{\epsilon_0 U}{2\pi} \ln(\rho/a) + f(\alpha),$$

$$\partial_\alpha V = f'(\alpha) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow f(\alpha) = \text{const} = 0 \text{ (o.B.d.A.)},$$

also

$$V = \frac{\epsilon_0 U}{2\pi} \ln\left(\frac{\rho}{a}\right).$$

Die Bezugslänge a ist in diesem Zusammenhang physikalisch unwesentlich, sie dient lediglich zur Eichung des Vektorpotentials.

(iii) Potentiallinien ($\varphi = \text{const}$) und Feldlinien ($V = \text{const}$) sind in Abb. A 3.2.17 c angegeben. ■

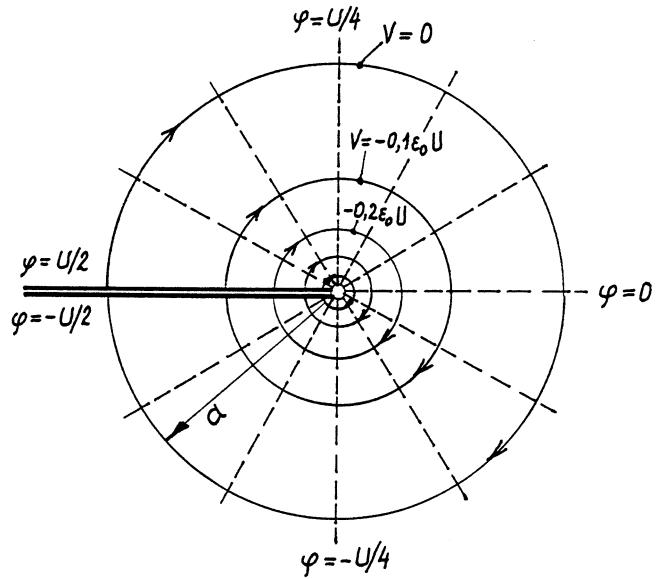


Abb. A 3.2.17 c

A3.2.18 Kugelkondensator:

Die Kugelsymmetrie der elektrischen Spannungsverteilung wird durch die vorliegende Materialinhomogenität nicht gestört. Mit Bezug auf Abb. A3.2.18 haben wir

$$\vec{E} = E_r \vec{e}_r, \quad E_r = K/r^2,$$

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E_r dr = K(1/r_1 - 1/r_2) \Rightarrow K = \frac{U}{1/r_1 - 1/r_2}.$$

Weiters gilt

$$\vec{D} = D_r \vec{e}_r, \quad D_r = \epsilon E_r = \epsilon(\theta, \alpha) K/r^2,$$

$$Q = \int_{\Sigma} D_r dA, \quad dA = r d\theta \cdot r \sin(\theta) d\alpha,$$

insgesamt also

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{1}{1/r_1 - 1/r_2} \int_0^{\pi} \left[\int_0^{2\pi} \epsilon(\theta, \alpha) d\alpha \right] \sin(\theta) d\theta. \blacksquare$$

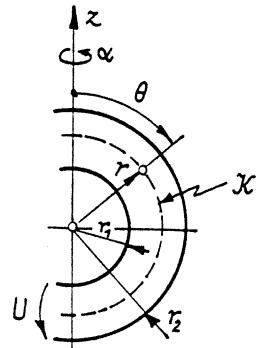


Abb. A3.2.18

A3.2.19 Homogen polarisierte Kugel:

In der Metallschale verschwindet das elektrische Feld. Gleichermaßen gilt für den Außenraum, da die Anordnung insgesamt ungeladen ist. Das elektrische Feld ist deshalb auf den Innenraum $0 \leq r < b$ (Abb. A3.2.19b) beschränkt. Wir versuchen ein Homogenfeld als Lösung. Die Grundgleichungen

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0, \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P},$$

wobei $\vec{P} = P \vec{e}_z$, sind mit

$$\vec{E} = E \vec{e}_z, \quad E = \text{const},$$

$$\vec{D} = D \vec{e}_z, \quad D = \epsilon_0 E + P = \text{const},$$

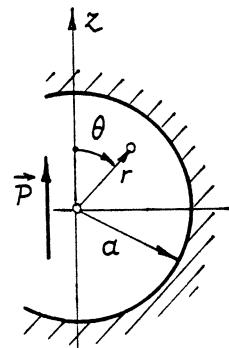


Abb. A3.2.19b

erfüllt. Lassen sich auch die Randbedingungen widerspruchsfrei befriedigen, so haben wir damit die Lösung des Problems gefunden. Tatsächlich gilt

$$r=a: \vec{e}_r \times [\vec{E}] = \vec{0} \Rightarrow E=0,$$

$$\vec{e}_r \cdot [\vec{D}] = \sigma \Rightarrow \sigma = -D_r = -D \cos(\theta),$$

d.h.

$$0 \leq r < a: \vec{E} = \vec{0}, \quad \vec{D} = \vec{P},$$

also verschwindet die Feldstärke überall, nicht aber die Flussdichte. Am Innenrand der Schale stellt sich die Flächenladungsdichte

$$r=a: \sigma = -P \cos(\theta)$$

ein. ■

A3.2.20 Grundtypen:

(i) Die Feldstärke ergibt sich durch Gradientenbildung aus dem Skalarpotential,

$$r < a: \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = -\frac{U}{a} [\cos(\theta)\vec{e}_r - \sin(\theta)\vec{e}_\theta] = -\frac{U}{a}\vec{e}_r,$$

$$\begin{aligned} r > a: \vec{E} &= -\vec{\nabla}\varphi = -U a^2 \left[-\frac{2}{r^3} \cos(\theta)\vec{e}_r - \frac{1}{r^3} \sin(\theta)\vec{e}_\theta \right] \\ &= \frac{U}{a} \left(\frac{a}{r} \right)^3 [2 \cos(\theta)\vec{e}_r + \sin(\theta)\vec{e}_\theta]. \end{aligned}$$

- Homogenfeld im Innerraum,

- Dipolfeld im Außenraum.

(ii) Eine effektive Raumladung tritt wegen

$$\rho^e = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

weder im Innerraum noch im Außenraum auf. Dagegen erhalten wir bei $r=a$ die effektive Flächenladungsdichte

$$\sigma^e = \epsilon_0 \vec{n} \cdot [\vec{E}] = \epsilon_0 [E_r] = \frac{\epsilon_0 U}{a} 3 \cos(\theta). ■$$

A3.2.21 Kegelspitze auf Platte:

(i) Die Oberflächen der beiden Elektroden sind jedenfalls Potentialflächen. Sie lassen sich in ein System koaxialer Kreiskegelflächen mit gemeinsamer Spitze einbetten. Wir können daher vermuten, daß die Potentialflächen durch solch eine Kegelschar gebildet werden (ABB. A3.2.21 b), d.h. daß das Potential φ in Kugelkoordinaten nur vom Polarwinkel θ , nicht aber von r und α abhängt. Die Feldstärkelinien sind dann senkrecht dazu verlaufende Kreisbögen.

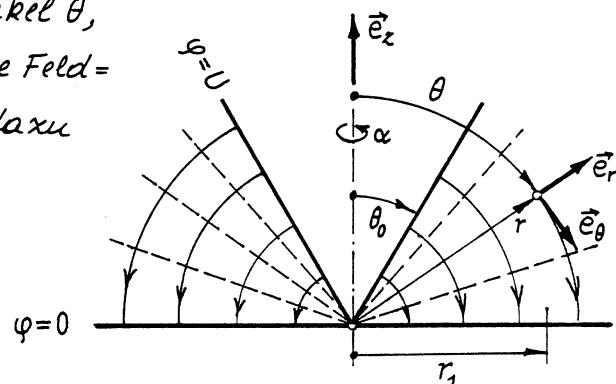


ABB. A3.2.21 b

(ii) Nach den Überlegungen aus (i) setzen wir $\varphi(r, \theta, \alpha) = \varphi(\theta)$ und erhalten aus der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial_\theta [\sin(\theta) \partial_\theta \varphi]}{r^2 \sin(\theta)} = 0 \Rightarrow [\sin(\theta) \varphi'(\theta)]' = 0,$$

also

$$\varphi'(\theta) = C_1 / \sin(\theta), \quad \theta_0 \leq \theta \leq \pi/2,$$

$$\varphi(\theta) = C_1 \ln[\tan(\theta/2)] + C_2.$$

Die Konstanten C_1 und C_2 sind aus den Randwerten zu bestimmen,

$$\varphi(\pi/2) = 0 \Rightarrow C_2 = 0,$$

$$\varphi(\theta_0) = U \Rightarrow C_1 = U / \ln[\tan(\theta_0/2)].$$

Damit ist das gesuchte Potential vollständig fixiert,

$$\varphi(\theta) = U \frac{\ln[\tan(\theta/2)]}{\ln[\tan(\theta_0/2)]}$$

Die Feldstärke und die Flussdichte sind daraus sofort berechenbar,

$$\vec{E}(r, \theta) = -\vec{\nabla}\varphi = -\frac{1}{r} \varphi'(\theta) \vec{e}_\theta = -\frac{U}{\ln[\tan(\theta_0/2)]} \frac{\vec{e}_\theta}{r \sin(\theta)},$$

$$\vec{D}(r, \theta) = \epsilon_0 \vec{E}(r, \theta).$$

(iii) Die zu bestimmende Ladung tritt als Flächenladung auf der Platte in Erscheinung und kann deshalb direkt aus dem elektrischen Fluss bestimmt werden,

$$\vec{D}(r, \pi/2) = \frac{\epsilon_0 U}{\ln[\tan(\theta_0/2)]} \frac{\vec{e}_z}{r},$$

$$Q = \int_0^r \vec{e}_z \cdot \vec{D}(r, \pi/2) 2\pi r dr = \frac{\epsilon_0 U}{\ln[\tan(\theta_0/2)]} \int_0^r 2\pi r dr,$$

$$Q = \frac{2\pi r_i \epsilon_0 U}{\ln[\tan(\theta_0/2)]}.$$

A3.2.22 Kugelschale im ursprünglich homogenen elektrischen Feld:

1) Feldberechnung in Kugelkoordinaten. Im Innentraum $r < a$ verschwindet jedenfalls das elektrische Feld, d.h. Skalarpotential $\varphi = \text{const} = 0$ (o.B.d.A.), Feldstärke $\vec{E} = \vec{0}$.

(i) Kugel ungeladen; Randwertproblem

$$r > a: \quad \nabla^2 \varphi = 0,$$

$$r = a: \quad \varphi = 0,$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \varphi \rightarrow -E_0 z = -E_0 r \cos(\theta).$$

Dies liefert

$$\varphi(r, \theta) = -E_0 a \left[\frac{r}{a} - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] \cos(\theta) = -E_0 z \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right]$$

und damit die Randfeldstärke

$$r = a: \vec{E} = -\partial_r \varphi \Big|_{r=a} \vec{e}_r = 3 E_0 \cos(\theta) \vec{e}_r.$$

(ii) Kugel mit Q geladen. Überlagerung oder Feldstärke $E_1 \cdot (a/r)^2 \vec{e}_r$ mit

$$E_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2},$$

also

$$r = a: \vec{E} = [3 E_0 \cos(\theta) + E_1] \vec{e}_r.$$

2) Die Impulsflußdichte

$$\underline{p}^e = \frac{\epsilon_0}{2} \underline{E}^2 \underline{\delta} - \epsilon_0 \vec{E} \otimes \vec{E}$$

reoluxiert sich an der Kugeloberfläche auf

$$r = a, \vec{E} = E \vec{e}_r: \underline{p}^e = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 (\underline{\delta} - 2 \vec{e}_r \otimes \vec{e}_r).$$

Dort wird, flächenbezogen, der Impulsfluß

$$\vec{f}^s = -\vec{e}_r \cdot \underline{p}^e = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \vec{e}_r$$

absorbiert. Dies ist die gesuchte Flächenkraftdichte.

(i) Ungeladene Kugel.

Eine graphische Darstellung der Flächenkraftdichte

$$\vec{f}^s = \frac{9}{2} \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\theta) \vec{e}_r$$

zeigt Abb. A 3.2.22 b. An der Halbschale $0 \leq \theta \leq \pi/2$ greift die resultierende Kraft

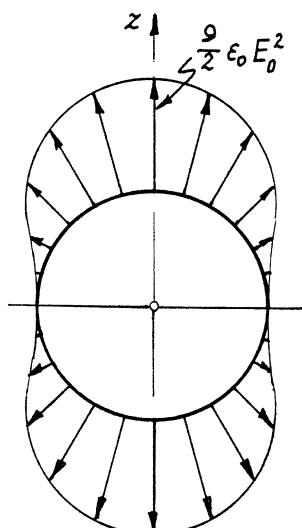


Abb. A 3.2.22 b

$$\vec{F}_R = \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^{2\pi} \vec{f}^s a^2 \sin(\theta) d\alpha \right] d\theta, \quad \int_0^{2\pi} \vec{e}_r d\alpha = 2\pi \cos(\theta) \vec{e}_z,$$

$$\vec{F}_R = \frac{9}{2} \epsilon_0 E_0^2 \int_0^{\pi/2} \cos^3(\theta) \sin(\theta) 2\pi a^2 d\theta \vec{e}_z = \frac{9}{4} \epsilon_0 E_0^2 a^2 \pi \vec{e}_z$$

an.

(ii) Geladene Kugel.

Die Flächenkraftdichte

$$\vec{f}^s = \frac{\epsilon_0}{2} [3E_0 \cos(\theta) + E_1]^2 \vec{e}_r, \quad E_1 = Q/(4\pi\epsilon_0 a^2),$$

ist speziell für $E_1 = 3E_0$ in Abb. A3.2.22 c dargestellt. Für die resultierende Kraft auf die gesamte Kugel ergibt sich (Kontrollrechnung)

$$\begin{aligned} \vec{F}_R &= \int_0^\pi \left[\int_0^{2\pi} \vec{f}^s a^2 \sin(\theta) d\alpha \right] d\theta \\ &= \pi \epsilon_0 a^2 \vec{e}_z \int_0^\pi [3E_0 \cos(\theta) + E_1]^2 \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta \\ &= 4\pi \epsilon_0 a^2 E_1 E_0 \vec{e}_z = Q \vec{E}_0. \blacksquare \end{aligned}$$

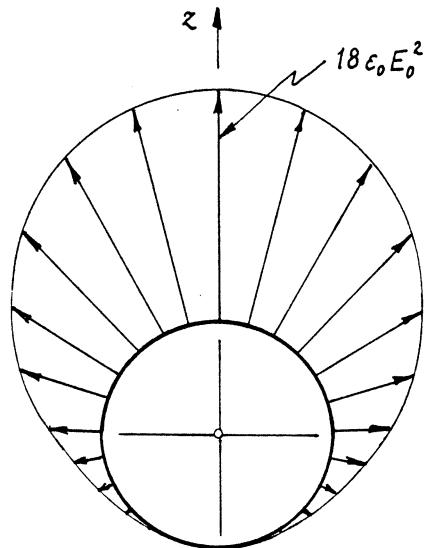


Abb. A 3.2.22 c

A3.2.23 Influienziertes elektrisches Moment:

(i) Unter Verwendung von Kugelkoordinaten und $z = r \cos(\theta)$ berechnen wir aus

$$\varphi(r, \theta) = -E_0 a \left[\frac{r}{a} - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] \cos(\theta)$$

die elektrische Feldstärke für $r > a$,

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla} \varphi = -\vec{e}_r \partial_r \varphi - \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \partial_\theta \varphi \\ &= E_0 \left\{ \left[1 + 2 \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right] \cos(\theta) \vec{e}_r - \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right] \sin(\theta) \vec{e}_\theta \right\}, \end{aligned}$$

und speziell

$$r = a : \quad \vec{E} = 3E_0 \cos(\theta) \vec{e}_r.$$

(ii) Die influenzierte Ladung bildet sich als Flächenladung oder Dichte

$$\sigma = \epsilon_0 E_r = 3\epsilon_0 E_0 \cos(\theta)$$

an oder Kugeloberfläche aus. Das zugehörige elektrische Moment

$$\vec{p} = \int_{\partial V} \sigma \vec{r} dA = \int_0^{\pi} \sigma(\theta) \left[\int_0^{2\pi} a \vec{e}_r d\alpha \right] a^2 \sin(\theta) d\theta, \quad \int_0^{2\pi} \vec{e}_r d\alpha = 2\pi \cos(\theta) \vec{e}_z,$$

$$\vec{p} = 6\pi a^3 \epsilon_0 E_0 \vec{e}_z \int_0^{\pi} \cos^2(\theta) \sin(\theta) d\theta = 4\pi a^3 \epsilon_0 E_0 \vec{e}_z.$$

ist unabhängig vom Bezugspunkt, weil die Gesamtladung verschwindet. ■

A3.2.24 Dielektrischer Einschluß:

Mit den Bezeichnungen aus Abb. A 3.2.24 gilt für das ungestörte Feld

$$\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_z = E_0 [\cos(\theta) \vec{e}_r - \sin(\theta) \vec{e}_\theta],$$

$$\varphi_0 = -E_0 z = -E_0 r \cos(\theta).$$

Passende Separationslösungen der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten für das gestörte Feld sind

$$r < a: \varphi = (A_i r + B_i r^{-2}) \cos(\theta) \quad \text{mit } B_i = 0 \quad (r \rightarrow 0),$$

$$r > a: \varphi = (A_a r + B_a r^{-2}) \cos(\theta) \quad \text{mit } A_a = -E_0 \quad (r \rightarrow \infty).$$

Die restlichen Konstanten A_i und B_a lassen sich aus den Sprungbedingungen an der Kugeloberfläche bestimmen,

$$\left. \begin{aligned} r=a: \quad & [\vec{E}_t] = \vec{0} \Rightarrow [\varphi] = 0 \Rightarrow A_i a = -E_0 a + B_a/a^2 \\ & [[D_n]] = 0 \Rightarrow [\epsilon \partial_r \varphi] = 0 \Rightarrow \epsilon_i A_i = \epsilon_a (-E_0 - 2B_a/a^3) \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow A_i = -\frac{3E_0}{2+\epsilon_i/\epsilon_a}.$$

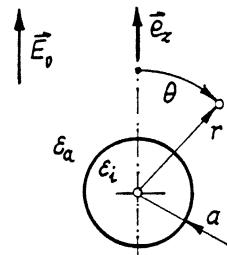


Abb. A 3.2.24

Im Inneren des Einschlusses ergibt sich damit das Homogenfeld

$$r < a: \quad \varphi = A_i r \cos(\theta) - A_i z,$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi = -A_i \vec{e}_z = \frac{3\epsilon_a}{2\epsilon_a + \epsilon_i} \vec{E}_0,$$

für $\epsilon_a > \epsilon_i$ demnach eine Erhöhung gegenüber \vec{E}_0 . ■

A3.2.25 Dipol im Hohlraum eines Dielektrikums:

Die Koeffizienten im Ansatz

$$r < a: \quad \varphi = (A_1 r + B_1/r^2) \cos(\theta),$$

$$r > a: \quad \varphi = (A_2 r + B_2/r^2) \cos(\theta)$$

sind schrittweise aus den Randbedingungen zu bestimmen.

$$r \rightarrow 0: \quad \varphi \rightarrow \varphi_0 \Rightarrow B_1 = p_0/(4\pi\epsilon_0);$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \varphi \rightarrow 0 \Rightarrow A_2 = 0;$$

$$r = a: \quad \left. \begin{aligned} \llbracket E_\theta \rrbracket &= 0 \Rightarrow \llbracket \varphi \rrbracket = 0 \Rightarrow A_1 a + B_1/a^2 = B_2/a^2 \\ \llbracket D_r \rrbracket &= 0 \Rightarrow \epsilon_0 (A_1 - 2B_1/a^3) = -\epsilon_2 B_2/a^3 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow B_2 = \frac{3}{1+2\epsilon_r} B_1, \quad \epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0.$$

Damit ergibt sich

$$r > a: \quad \varphi = \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{1+2\epsilon_r} \frac{\cos(\theta)}{r^2}$$

oder, anders geschrieben,

$$r > a: \quad \varphi = \frac{p}{4\pi\epsilon} \frac{\cos(\theta)}{r^2} \quad \text{mit } p = \frac{3\epsilon_r}{1+2\epsilon_r} p_0,$$

unabhängig vom Kugelradius a . Das elektrische Moment des Dipols erscheint durch die Einbettung in den Hohlraum erhöht. ■

A3.2.26 Ein drehsymmetrisches Quadrupolfeld:

- (i) Die zugehörige Feldstärke ergibt sich direkt durch Gradientenbildung aus dem Potential,

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\vec{\nabla}\varphi = -\frac{Q\alpha^2}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \frac{3\cos^2(\theta)-1}{r^3} \\ &= -\frac{Q\alpha^2}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \vec{e}_r \left[-3 \frac{3\cos^2(\theta)-1}{r^4} \right] + \vec{e}_\theta \frac{1}{r^4} \left[-6\cos(\theta)\sin(\theta) \right] \right\}, \\ \vec{E} &= \frac{Q\alpha^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{r^4} \left\{ [3\cos^2(\theta)-1] \vec{e}_r + 2\cos(\theta)\sin(\theta) \vec{e}_\theta \right\}.\end{aligned}$$

- (ii) Wegen der vorliegenden Drehsymmetrie zusammen mit $E_\alpha = 0$ erwarten wir das elektrostatische Vektorpotential in azimuthaler Richtung, $\vec{V} = V(r, \theta) \vec{e}_\alpha$. Aus

$$\vec{D} = \vec{\nabla} \times \vec{V}, \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$$

folgt zunächst

$$\begin{aligned}\epsilon_0 E_\theta &= -\frac{1}{r} \partial_r(rV), \\ \partial_r(rV) &= -\frac{Q\alpha^2}{4\pi} \frac{3}{r^3} 2\cos(\theta)\sin(\theta) \Rightarrow \\ V(r, \theta) &= \frac{Q\alpha^2}{4\pi} \frac{3}{r^3} \cos(\theta)\sin(\theta) + \frac{f(\theta)}{r}.\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck erfüllt die zweite Gleichung

$$\epsilon_0 E_r = \frac{\partial_\theta [\sin(\theta)V]}{r \sin(\theta)} = \frac{Q\alpha^2}{4\pi} \frac{3}{r^4} [3\cos^2(\theta)-1],$$

falls $f(\theta) = 0$. Wir haben damit das Vektorpotential

$$\vec{V} = \frac{Q\alpha^2}{4\pi} \frac{3}{r^3} \cos(\theta)\sin(\theta) \vec{e}_\alpha = \frac{Q\alpha^2}{4\pi} \frac{3}{2} \frac{\sin(2\theta)}{r^3} \vec{e}_\alpha$$

bestimmt. ■



A3.3.1 Punktuelle Ladungsinjektion:

Bezeichnet $Q = Q(r)$ die in einer Kugel vom Radius r zum Zeitpunkt t enthaltene Ladungsmenge (Abb. A3.3.1), so gilt

$$T_R \dot{Q} + Q = 0 \quad \text{mit} \quad T_R = \epsilon/\gamma.$$

Daraus folgt

$$Q = Q_0 e^{-t/T_R}$$

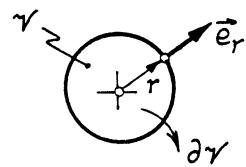


Abb. A3.3.1

unabhängig von r , d. h. die gesamte Ladungsverteilung besteht für $t > 0$ nur aus der exponentiell abnehmenden Punktladung Q in \mathcal{O} . Es entwickelt sich keine Raumladung,

$$\rho(r, t) = 0 \quad \text{für } r > 0.$$

Die Ladungserhaltung

$$\dot{Q}(r) + I(\partial r) = 0$$

liefert zusammen mit der Kugelsymmetrie sofort die Stromdichte

$$\vec{J}(r, t) = \frac{-\dot{Q}}{4\pi r^2} \vec{e}_r = \frac{Q_0}{T_R} \frac{e^{-t/T_R}}{4\pi r^2} \vec{e}_r. \blacksquare$$

A3.3.2 Ladungsrelaxation im Kreiszylinder:

(i) Die lokale Relaxationsgleichung besitzt die Lösung

$$\rho(r, t) = \rho_0 e^{-t/T_R}, \quad T_R = \epsilon/\gamma.$$

Für die Stromdichte $\vec{J} = J(r, t) \vec{e}_r$ folgt daraus mit der Ladungserhaltung

$$2\pi r J = -\partial_t (\pi r^2 \rho) = \pi r^2 \frac{\rho_0}{T_R} e^{-t/T_R}$$

oder Ausdruck

$$\vec{J}(r, t) = \frac{\rho_0}{2T_R} e^{-t/T_R} r \vec{e}_r.$$

(ii) Nach relativ langer Zeit $t \gg T_R$ findet sich die ursprüngliche Raumladung als Flächenladung mit der Dichte

$$\sigma = \frac{\pi a^2 \rho_0}{2\pi a} = \frac{a}{2} \rho_0$$

gleichmäßig an der Mantelfläche verteilt. ■

A3.3.3 Ladungsrelaxation in Schichtenstruktur:

In den beiden äußeren Schichten relaxieren die Raumladungen gemäß

$$\rho = \pm \rho_0 e^{-t/T_R}, \quad T_R = \epsilon_0/\gamma.$$

Sie treten als Flächenladungen mit den Dichten

$$\sigma = \pm \rho_0 a (1 - e^{-t/T_R})$$

an den beiden inneren Grenzflächen wieder in Erscheinung (Ladungserhaltung). Mit den zu erwartenden Parallelfeldern $\vec{E} = E(x,t) \hat{e}_x$, $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ liefert der Satz vom elektrischen Hüllenfluß für die elektrische Feldstärke

$$0 < x < a: \quad E(x,t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_0 e^{-t/T_R} x = E_0 e^{-t/T_R} \frac{x}{a},$$

$$a < x < a+b: \quad E(x,t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_0 a = E_0,$$

$$a+b < x < 2a+b: \quad E(x,t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_0 e^{-t/T_R} (2a+b-x) = E_0 e^{-t/T_R} \frac{2a+b-x}{a},$$

dargestellt in Abb. A3.3.3 b. ■

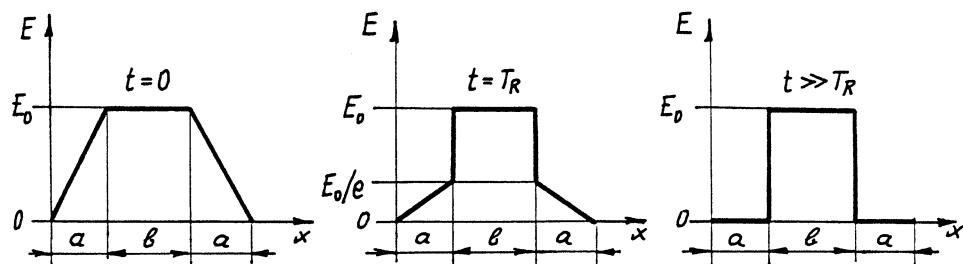


Abb. A3.3.3 b

A3.3.4 Ladungsrelaxation in einem Stab:

Wegen

$$T_R \partial_t \rho + \rho = 0, \quad T_R = \epsilon/\gamma$$

relaxiert die Ladung gemäß

$$\rho(x, t) = \rho(x, 0) e^{-t/T_R}, \quad \rho(x, 0) = \mp Q'_0 / A \quad \text{für} \begin{cases} -l < x < 0, \\ 0 < x < l. \end{cases}$$

Aus der Ladungserhaltung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\partial_t \rho, \quad \vec{J} = J(x, t) \vec{e}_x$$

folgt damit die Differentialgleichung

$$\partial_x J(x, t) = \frac{\rho(x, 0)}{T_R} e^{-t/T_R} = \mp \frac{Q'_0}{A T_R} e^{-t/T_R} \quad \text{für} \begin{cases} -l < x < 0, \\ 0 < x < l \end{cases}$$

mit den Randbedingungen

$$J(-l, t) = J(l, t) = 0, \quad J(0^-, t) = J(0^+, t).$$

Die Integration liefert

$$J(x, t) = -J_0 \cdot (1 \pm \frac{x}{l}) e^{-t/T_R} \quad \text{für} \begin{cases} -l < x < 0, \\ 0 < x < l, \end{cases} \quad t \geq 0$$

mit

$$J_0 = \frac{Q'_0 l}{A T_R},$$

dargestellt in Abb. A 3.3.4 b. ■

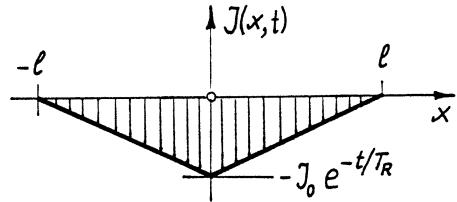


Abb. A 3.3.4 b

A3.3.5 Konvektiver Ladungstransport:

(i) Die stationäre (zeitunabhängige) Ladungskonvektion wird durch die Gleichung

$$\frac{\epsilon}{\gamma} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) + \rho = \frac{\epsilon v}{\gamma} \partial_x \rho + \rho = 0, \quad \rho(0) = \rho_0,$$

beschrieben. Ihre Lösung

$$\rho(x) = \rho_0 e^{-x/\lambda}, \quad \lambda = \varepsilon v / \gamma,$$

stellt die gesuchte, räumlich exponentiell mit der charakteristischen Länge λ abklingende Ladungsdichte dar.

(ii) Aus $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$, $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, $\vec{E} = E(x) \vec{e}_x$ folgt

$$\partial_x E = \frac{\rho}{\varepsilon} = \frac{\rho_0}{\varepsilon} e^{-x/\lambda}, \quad E(0) = E_0,$$

also

$$E(x) = E_0 + \frac{\rho_0 v}{\gamma} (1 - e^{-x/\lambda}).$$

(iii) Die gesamte Stromdichte $\vec{J} = J(x) \vec{e}_x$, bestehend aus dem konduktiven Anteil $\gamma \vec{E}$ und dem konvektiven Anteil $\rho \vec{v}$, erweist sich als konstant,

$$\begin{aligned} J(x) &= \gamma E(x) + \rho(x) v = \gamma E_0 + \rho_0 v (1 - e^{-x/\lambda}) + v \rho_0 e^{-x/\lambda} \\ &= \gamma E_0 + \rho_0 v. \blacksquare \end{aligned}$$

A3.4.1 Leiter mit exzentrischer Bohrung:

Im Leiter mit Bohrung herrscht die Stromdichte

$$\vec{J} = \frac{I}{\pi(a^2-b^2)} \hat{e}_x = \text{const.}$$

Wir berechnen die gesuchte Flußdichte durch Überlagerung nach Abb. A3.4.1 b. Im Inneren des großen Kreisquerschnitts allein gilt (Durchflutungssatz)

$$\begin{aligned}\vec{B}_1 &= \frac{\mu_0 J}{2} \rho \hat{e}_\alpha = \frac{\mu_0 J}{2} \rho [-\sin(\alpha) \hat{e}_x + \cos(\alpha) \hat{e}_y] \\ &= \frac{\mu_0 J}{2} (-y \hat{e}_x + x \hat{e}_y),\end{aligned}$$

und im Inneren des kleinen Kreisquerschnitts allein ($J \rightarrow -J$)

$$\vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 J}{2} [-y \hat{e}_x + (x-c) \hat{e}_y],$$

zusammen also

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 J}{2} x \hat{e}_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \frac{ax}{a^2-b^2} \hat{e}_y.$$

In der Bohrung stellt sich demnach ein homogenes (!) Magnetfeld ein. ■

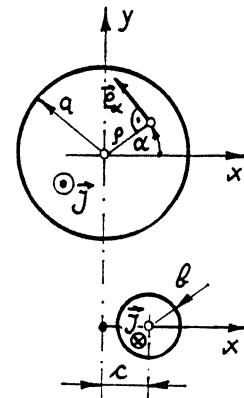


Abb. A3.4.1 b

A3.4.2 Integralformeln für die magnetische Flußdichte:

Wegen $\vec{R} = R \vec{V} R = -R \vec{V}' R$ gilt zunächst für den Integranden in (1) mit $\vec{J}' = \vec{J}(\vec{r}')$

$$\vec{J}' \times \frac{\vec{R}}{R^3} = -\vec{J}' \times \frac{\vec{V}' R}{R^2} = \vec{J}' \times \vec{V}' \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{\vec{V}' \times \vec{J}'}{R} - \vec{V}' \times \left(\frac{\vec{J}'}{R} \right),$$

also

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{V}' \times \vec{J}'}{R} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{V}' \times \left(\frac{\vec{J}'}{R} \right) dV'.$$

Dieser Ausdruck reduziert sich genau dann auf die Formel (2), wenn sich das zweite Integral zu Null ergibt. Nun liefert aber die Anwendung der Green-Transformation speziell ($\Theta \rightarrow x$)

$$\int_{\gamma} \vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{J}'}{R} \right) dV' = \int_{\partial\gamma} \frac{\vec{n}' \times \vec{J}'}{R} dA'.$$

Das fragliche Integral verschwindet demnach insbesondere dann, wenn die Stromdichte an einer hinreichend groß gewählten Hülle $\partial\gamma$ verschwindet, wenn also die Stromverteilung räumlich begrenzt ist. ■

A3.4.3 Erweiterung der Spiegelungsmethode für Magnetfelder:

Die Brauchbarkeit des Verfahrens ist dann gezeigt, wenn es für den Bereich $z > 0$ eine Lösung der Gleichungen $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$, für den Bereich $z < 0$ eine Lösung der Gleichungen $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{0}$ und an der Ebene $z = 0$ die Sprünge $\vec{n} \cdot [\vec{B}] = 0$, $\vec{n} \times [\vec{B}/\mu] = \vec{0}$ liefert.

$z > 0$:

Zu den beiden Stromverteilungen gehört mit den Bezeichnungen aus Abb. A3.4.3 die magnetische Flussdichte

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int_{\gamma^+} \frac{\vec{J}' \times \vec{e}_R}{R^2} dV' + \int_{\gamma^-} \frac{\vec{J}^* \times \vec{e}_R^*}{R^{*2}} dV' \right].$$

Das erste Integral ist eine partikuläre Lösung der Gleichungen $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$. Das zweite Integral stellt mit beliebigem, auf $z < 0$ beschränktem \vec{J}^* eine Lösung der Gleichungen $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ und $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{0}$ für den Bereich $z > 0$ dar.

$z = 0+$:

Mit Bezug auf Abb. A 3.4.3 gilt

$$\vec{R}^* = R, \quad \vec{e}_R^* = \vec{e}_R - 2\vec{e}_R \cdot \vec{e}_z \vec{e}_z$$

und damit

$$\begin{aligned} \vec{B}^+ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int_{\gamma^+} \frac{\vec{J}' \times \vec{e}_R}{R^2} dV' + \int_{\gamma^-} \frac{\vec{J}^* \times \vec{e}_R^*}{R^2} dV' \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\gamma^+} \frac{1}{R^2} [\vec{J}(x', y', z') \times \vec{e}_R + \vec{J}^*(x', y', -z') \times (\vec{e}_R - 2\vec{e}_R \cdot \vec{e}_z \vec{e}_z)] dV'. \end{aligned}$$

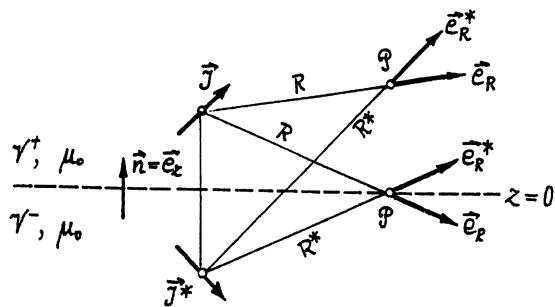


Abb. A 3.4.3

Wir formen nun den Ausdruck in der eckigen Klammer des letzten Ausdrucks um,

$$\begin{aligned} \vec{F} &:= \vec{J}(x, y, z) \times \vec{e}_R + \vec{J}^*(x, y, -z) \times (\vec{e}_R - 2\vec{e}_R \cdot \vec{e}_z \vec{e}_z) \\ &= \vec{J} \times \vec{e}_R + \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} (\vec{J} - 2\vec{J} \cdot \vec{e}_z \vec{e}_z) \times (\vec{e}_R - 2\vec{e}_R \cdot \vec{e}_z \vec{e}_z) \\ &= \vec{J} \times \vec{e}_R + \underbrace{\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} (\vec{J} \times \vec{e}_R - 2\vec{J} \times \vec{e}_z \vec{e}_z \cdot \vec{e}_R - 2\vec{J} \cdot \vec{e}_z \vec{e}_z \times \vec{e}_R)}_{-\vec{J} \times \vec{e}_R + 2(\vec{J} \times \vec{e}_R) \cdot \vec{e}_z \vec{e}_z}, \\ \vec{F} &= \frac{2}{\mu_r + 1} \vec{J} \times \vec{e}_R + 2 \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} (\vec{J} \times \vec{e}_R) \cdot \vec{e}_z \vec{e}_z, \end{aligned}$$

und erhalten

$$\vec{B}^+ = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\gamma^+} \frac{1}{R^2} \left[\frac{2}{\mu_r + 1} \vec{J}' \times \vec{e}_R + 2 \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} (\vec{J}' \times \vec{e}_R) \cdot \vec{e}_z \vec{e}_z \right] dV',$$

sodaß ($\vec{n} = \vec{e}_z$)

$$\begin{aligned} z = 0+ : \quad \vec{n} \cdot \vec{B}^+ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mu_r}{\mu_r + 1} \int_{\gamma^+} \frac{\vec{e}_z \cdot (\vec{J}' \times \vec{e}_R)}{R^2} dV', \\ \vec{n} \times \vec{B}^+ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2}{\mu_r + 1} \int_{\gamma^+} \frac{\vec{e}_z \times (\vec{J}' \times \vec{e}_R)}{R^2} dV'. \end{aligned}$$

$z < 0$:

Nach dem angegebenen Verfahren ist die Flussdichte im Bereich $z < 0$ durch

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mu_r}{\mu_r + 1} \int_{\gamma^+} \frac{\vec{J}' \times \vec{e}_R}{R^2} dV'$$

zu berechnen. Damit sind, weil \vec{J} auf V^+ beschränkt ist, für $z < 0$ die Gleichungen $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ und $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{0}$ erfüllt.

$z = 0^-$:

Der eben angegebene Ausdruck liefert

$$z = 0^- : \quad \vec{n} \cdot \vec{B}^- = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mu_r}{\mu_r + 1} \int_{V^+} \frac{\vec{e}_z \cdot (\vec{J}' \times \vec{e}_R)}{R^2} dV',$$

$$\vec{n} \times \vec{B}^- = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mu_r}{\mu_r + 1} \int_{V^+} \frac{\vec{e}_z \times (\vec{J}' \times \vec{e}_R)}{R^2} dV'.$$

Damit sind die Sprungbedingungen bei $z = 0$,

$$\vec{n} \cdot \vec{B}^+ = \vec{n} \cdot \vec{B}^-, \quad \vec{n} \times \vec{B}^+ = \vec{n} \times \vec{B}^- / \mu_r,$$

erfüllt. ■

A3.4.4 Energieinhalt:

Der gesamte Energieinhalt ist zunächst durch das Integral

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 dV,$$

zu erstrecken über den ganzen Raum, definiert, wobei \vec{B} die Gleichungen

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

erfüllt. Über die Umformung (der Index c bedeutet Konstanthalten bei der räumlichen Ableitung)

$$\begin{aligned} B^2 &= \vec{B} \cdot \vec{B} - \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{B}_c \times \vec{A}) = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \times \vec{A}) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \times \vec{A}_c) \\ &= -\vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \times \vec{A}) + (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \vec{A} = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \times \vec{A}) + \mu_0 \vec{J} \cdot \vec{A} \end{aligned}$$

erhalten wir daraus

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int_V [\mu_0 \vec{J} \cdot \vec{A} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \times \vec{A})] dV,$$

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{J} \cdot \vec{A} dV - \frac{1}{2\mu_0} \int_{\partial V} \vec{n} \cdot (\vec{B} \times \vec{A}) dA.$$

Angenommen, $\partial\mathcal{V}$ ist eine Kugel mit dem Radius R , die die ganze Stromverteilung einschließt. Für $R \rightarrow \infty$ lässt sich das quasistationäre Magnetfeld in der Dipolnäherung beschreiben, d.h. $\vec{B} \sim R^{-3}$, $\vec{A} \sim R^{-2}$, $\vec{B} \times \vec{A} \sim R^{-5}$. Da die Kugelfläche mit zunehmendem R nur $\sim R^2$ wächst, verschwindet das letzte Integral im Grenzübergang $R \rightarrow \infty$. ■

A3.4.5 Ebenes Strömungsfeld:

Mit $\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{H}$ und dem Satz von Stokes gilt zunächst

$$I(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} \vec{n} \cdot \vec{J} dA = \int_{\mathcal{A}} \vec{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) dA = \int_{\partial\mathcal{A}} \vec{s} \cdot \vec{H} ds; \quad \vec{H} = H(\vec{r}) \vec{e}_z.$$

Bezeichnen wir die Kurvenstücke nach Abb. A3.4.5 f, so liefern \mathcal{C}_1 und \mathcal{C}_3 wegen $\vec{s} \cdot \vec{e}_z = 0$ keine Beiträge zum Integral. Entlang \mathcal{C}_2 und \mathcal{C}_4 ist $\vec{s} = \vec{e}_z$ bzw. $\vec{s} = -\vec{e}_z$ und damit $\vec{s} \cdot \vec{H} = H(\vec{r}_2)$ bzw. $\vec{s} \cdot \vec{H} = -H(\vec{r}_4)$, unabhängig von z . Somit gilt

$$I(\mathcal{A}) = \int_{\partial\mathcal{A}} \vec{s} \cdot \vec{H} ds = \int_0^l \underbrace{[H(\vec{r}_2) - H(\vec{r}_4)]}_{\text{const}} dz = l[H(\vec{r}_2) - H(\vec{r}_4)]. ■$$

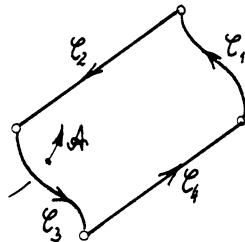


Abb. A3.4.5 f

A3.4.6 Besondere Darstellung der magnetischen Flußdichte:

Wir bilde

$$\begin{aligned} \vec{e} \cdot \vec{B} &= \vec{e} \cdot [\vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot (\vec{e} \varphi) - \nabla^2 (\vec{e} \varphi) + \vec{\nabla} \times (\vec{e} \psi)] \\ &= \vec{e} \cdot [\vec{\nabla} \vec{e} \cdot \vec{\nabla} \varphi - \vec{e} \nabla^2 \varphi - \vec{e} \times \vec{\nabla} \psi] \\ &= (\vec{e} \cdot \vec{\nabla})^2 \varphi - \nabla^2 \varphi \end{aligned}$$

und erhalten, nach Einführung des auf die Normalebene von \vec{e} beschränkten Laplace-Operators

$$\nabla_{\perp}^2 = \nabla^2 - (\vec{e} \cdot \vec{\nabla})^2,$$

die erste Gleichung

$$\nabla_{\perp}^2 \varphi = -\vec{e} \cdot \vec{B}. \quad (1)$$

Analog gilt

$$\begin{aligned} \vec{e} \cdot (\vec{\nabla}_{\perp} \vec{B}) &= \vec{e} \cdot \{ \vec{\nabla}_{\perp} [\vec{\nabla}_{\perp} \vec{e} \cdot \vec{\nabla} \varphi - \vec{e} \nabla^2 \varphi - \vec{e} \times \vec{\nabla} \psi] \} \\ &= \vec{e} \cdot [\vec{\nabla}_{\perp} (\vec{\nabla}_{\perp} \vec{e} \cdot \vec{\nabla} \varphi) + \vec{e} \times \vec{\nabla} \nabla^2 \varphi - \vec{\nabla}_{\perp} (\vec{e} \times \vec{\nabla} \psi)] \\ &= \vec{e} \cdot (-\vec{e} \nabla^2 \psi + \vec{e} \cdot \vec{\nabla} \vec{\nabla} \psi) = -\nabla^2 \psi + (\vec{e} \cdot \vec{\nabla})^2 \psi, \end{aligned}$$

also die zweite Gleichung

$$\nabla_{\perp}^2 \psi = -\vec{e} \cdot (\vec{\nabla}_{\perp} \vec{B}). \quad (2)$$

(1) und (2) sind die beiden gesuchten, entkoppelten Gleichungen. ■

A3.4.7 Kräftefreies Magnetfeld:

- (i) \vec{B} hängt nur von z ab, $\vec{B} = \vec{B}(z)$. Ein entsprechender Ansatz $\vec{A} = \vec{A}(z)$ liefert mit der Maxwell-Gleichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ die Bedingung $\partial_z A_z = 0$ und damit $A_z = \text{const} = 0$ (o.B.d.A.), d.h.

$$\vec{A} = A_x(z) \vec{e}_x + A_y(z) \vec{e}_y.$$

Aus dem Zusammenhang $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ erhalten wir dann

$$B_x = B_0 \sin(z/a) = -\partial_z A_y \Rightarrow A_y = a B_0 \cos(z/a) + \underline{\text{const}},$$

$$B_y = B_0 \cos(z/a) = \partial_z A_x \Rightarrow A_x = a B_0 \sin(z/a) + \underline{\text{const}},$$

$$\vec{A} = a B_0 [\sin(z/a) \vec{e}_x + \cos(z/a) \vec{e}_y] = a \vec{B}.$$

In diesem speziellen Feld ist das Vektorpotential proportional der Flussdichte.

(ii) Mit $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ gilt

$$\mu_0 \vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\vec{e}_x \partial_z B_y + \vec{e}_y \partial_z B_x = \frac{B_0}{a} [\sin(z/a) \vec{e}_x + \cos(z/a) \vec{e}_y],$$

es ist also auch die Stromdichte proportional zur Flussdichte,

$$\vec{J} = \vec{B}/(\mu_0 a).$$

Deshalb verschwindet überall die Lorentz-Kraftdichte $\vec{f} = \vec{J} \times \vec{B}$, was die Benennung „kräftefreies Magnetfeld“ begründet. ■



A3.5.1 Äußerer ebener Quadrupol:

- (i) Das Vektorpotential $\vec{A} = A(x, y)\vec{e}_z$ eines ebenen Magnetfeldes ist jedenfalls Maxwell-geeicht ($\nabla \cdot \vec{A} = 0$).
Aus dem Zusammenhang $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ ergibt sich

$$\partial_y A = B_x = B_0 x/a \Rightarrow A(x, y) = B_0 xy/a + f(x),$$

$$\partial_x A = B_0 y/a + f'(x) = -B_y = B_0 y/a \Rightarrow f'(x) = 0,$$

$$f(x) = \text{const} = 0 \text{ (a.B.d.A.)},$$

also das gesuchte Vektorpotential

$$\vec{A} = B_0 \frac{xy}{a} \vec{e}_z.$$

- (ii) Die Flußdichtelinien werden durch Linien $A(x, y) = \text{const}$, d.h. durch gleichseitige Hyperbeln $xy = \text{const}$ dargestellt. Skizze in Abb. A 3.5.1 a.

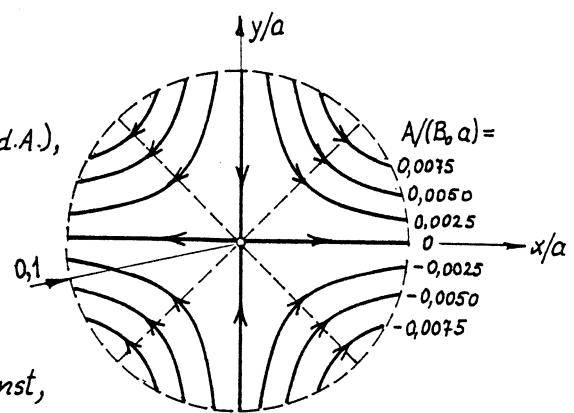


Abb. A 3.5.1 a

- (iii) Die einfache Anordnung von Linieströmen, die in einer hinreichend kleinen Umgebung der z-Achse das angegebene Feld erzeugt, zeigt Abb. A 3.5.1 b. Dabei gilt

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{\pi a}, \quad x^2 + y^2 \ll a^2. \blacksquare$$

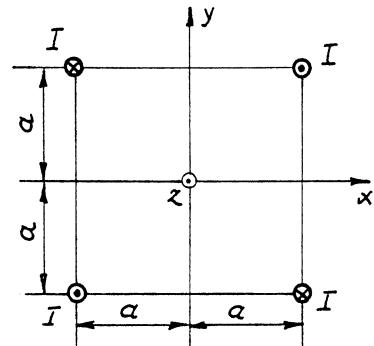


Abb. A 3.5.1 b

A3.5.2 Schraubenfeld:

- (i) Aus dem Zusammenhang $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ erhalten wir in Kreiszylinderkoordinaten die magnetische Flussdichte

$$\vec{B} = -\vec{e}_\alpha \partial_\rho [K_2 \ln(\rho/a)] + \vec{e}_z \frac{1}{\rho} \partial_\rho (K_1 \rho^2),$$

$$\vec{B} = -\frac{K_2}{\rho} \vec{e}_\alpha + 2K_1 \vec{e}_z.$$

- (ii) Die Vektorlinien von \vec{B} sind Schraubenlinien um die z-Achse, charakterisiert durch den Steigungswinkel β (Abb. A 3.5.2 a) mit

$$\tan(\beta) = -\frac{K_1}{K_2} 2\rho$$

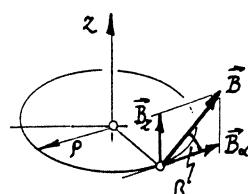


Abb. A 3.5.2 a

bzw. durch die Ganghöhe

$$h = 2\pi p \tan(\beta) = -\frac{K_1}{K_2} 4\pi p^2.$$

- (iii) Ein Magnetfeld dieser Art lässt sich z.B. im Inneren einer langen Kreiszylinderspule zusammen mit einem Linienleiter an der Achse erzeugen (Abb.A3.5.28). ■

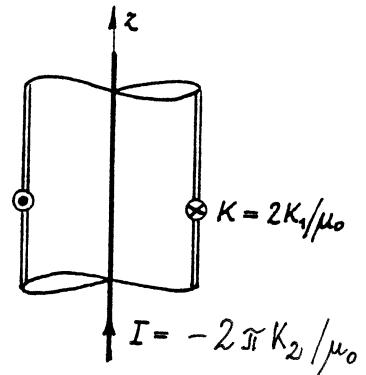


Abb.A3.5.28

A3.5.3 Randwertproblem:

Das zu beschreibende Magnetfeld ist eben, d.h.

$$\vec{A} = A(x, y) \hat{e}_z, \quad B_x = \partial_y A, \quad B_y = -\partial_x A.$$

Mit $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ und der Stromfreiheit im Bereich $y > 0$
gilt dann

$$\nabla \times \vec{H} = (\partial_x H_y - \partial_y H_x) \hat{e}_z = \vec{0} \Rightarrow \partial_x^2 A + \partial_y^2 A = 0.$$

Weiters ist die Sprungbedingung bei $y = 0$ zu erfüllen,

$$\vec{e}_y \times [\vec{H}] = \vec{e}_y \times (H_x \hat{e}_x) \Big|_{y=0^+} = -\frac{1}{\mu_0} (\partial_y A) \Big|_{y=0^+} \hat{e}_z = K_z \hat{e}_z,$$

wobei

$$K_z = I/B \quad \text{für } |x| < B/2,$$

$$K_z = 0 \quad \text{für } |x| > B/2.$$

Schließlich präsentiert sich die Anordnung für
große Abstände $p = \sqrt{x^2 + y^2} \gg B$ als Linienleiter an
einem ideal permeablen Halbraum, d.h. das Vek-
torpotential muss asymptotisch die Form

$$A \rightarrow \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln(p_0/p)$$

annehmen.

Zusammengefaßt haben wir demnach das Randwertproblem

$$y > 0 : \quad \partial_x^2 A + \partial_y^2 A = 0 .$$

$$y = 0+, \quad |x| > b/2 : \quad \partial_y A = 0 ,$$

$$|x| < b/2 : \quad \partial_y A = -\mu_0 I / b .$$

$$y > 0, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty : \quad A \rightarrow \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln(\rho_0/\rho) ,$$

wobei ρ_0 eine frei wählbare Bezugslänge bedeutet. ■

A3.5.4 Flächenströme am Spalt:

Das ebene Feld im Spalt läßt sich durch

$$\vec{A} = A(x, y) \vec{e}_z, \quad B_x = \partial_y A, \quad B_y = -\partial_x A$$

beschreiben. Aus $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, $\vec{\nabla}_x \cdot \vec{H} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}_x \cdot \vec{B} = 0$

ergibt sich dann zusammen mit der Bedingung an $y=0$

$$-a < y < a : \quad \partial_x^2 A + \partial_y^2 A = 0 ,$$

$$y = 0 : \quad \partial_x A = -B_0 \cos(\omega t - kx) ,$$

$$\partial_y A = 0 .$$

Die Separation der Laplace-Gleichung oder ein direkter Ansatz unter Beachtung der Symmetrie bezüglich $y=0$ führt auf

$$A(x, y) = \frac{B_0}{k} \sin(\omega t - kx) \cosh(ky)$$

und damit

$$B_x = B_0 \sin(\omega t - kx) \sinh(ky) ,$$

$$B_y = B_0 \cos(\omega t - kx) \cosh(ky) .$$

Die Sprungbedingungen $\vec{n} \times [\vec{H}] = \vec{K}$ bei $y = \pm a$ liefern schließlich die gesuchten Flächenstromdichten

$$\vec{K}_1 = \vec{K}_2 = \hat{K} \sin(\omega t - kx) \vec{e}_z$$

mit $\hat{K} = \frac{B_0}{\mu_0} \sinh(ka) = 160 \text{ kA/m. } \blacksquare$

A3.5.5 Sinusfeldpole:

Wir haben ein eßenes Magnetfeld in einem stromfreien Bereich zu beschreiben und verwenden dazu das magnetische Skalarpotential $\varphi(x, y)$ mit $\vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi$.

Dafür gilt das Randwertproblem

$$0 < y < \delta(x) : \partial_x^2 \varphi + \partial_y^2 \varphi = 0;$$

$$y = 0: H_x = -\partial_x \varphi = 0 \Rightarrow \varphi(x, 0) = \text{const} = 0 \text{ (o.B.d.A.)},$$

$$H_y = -\partial_y \varphi = \frac{B_0}{\mu_0} \sin(kx) \text{ mit } k = \pi/\tau;$$

$$y = \delta(x): \begin{aligned} \varphi &= V_0 \text{ für } -\tau < x < 0, \\ \varphi &= -V_0 \text{ für } 0 < x < \tau, \\ &\text{periodisch fortgesetzt.} \end{aligned}$$

Ein Ansatz der Form

$$\varphi(x, y) = (C_1 e^{ky} + C_2 e^{-ky}) \sin(kx)$$

erfüllt die Differentialgleichung und die Periodizitätsbedingung. Weiters liefert $\varphi(x, 0) = 0$ die Bedingung $C_1 = -C_2$, also

$$\varphi(x, y) = C \sinh(ky) \sin(kx).$$

Weiters muß

$$H_y(x, 0) = -\partial_y \varphi \Big|_{y=0} = -Ck \sin(kx) \stackrel{!}{=} \frac{B_0}{\mu_0} \sin(kx)$$

gelten, insgesamt also

$$\varphi(x, y) = -\frac{B_0}{\mu_0 k} \sinh(ky) \sin(kx), \quad k = \pi/\tau.$$

Schließlich ist noch

$$\varphi(x, \delta(x)) = -\frac{B_0}{\mu_0 k} \sinh(k\delta(x)) \sin(kx) \stackrel{!}{=} -V_0, \quad 0 < x < \tau,$$

zu erfüllen. Dies liefert für die gesuchte Kontur

$$\delta(x) = \frac{\tau}{\pi} \operatorname{arsinh} \left[\frac{\sinh(\pi \delta_0 / \tau)}{|\sin(\pi x / \tau)|} \right]$$

mit

$$\delta_0 = \frac{\tau}{\pi} \operatorname{arsinh} \left(\frac{\pi \mu_0 V_0}{\tau B_0} \right).$$

Abb. A 3.5.5 b zeigt zwei Auswertungen. ■

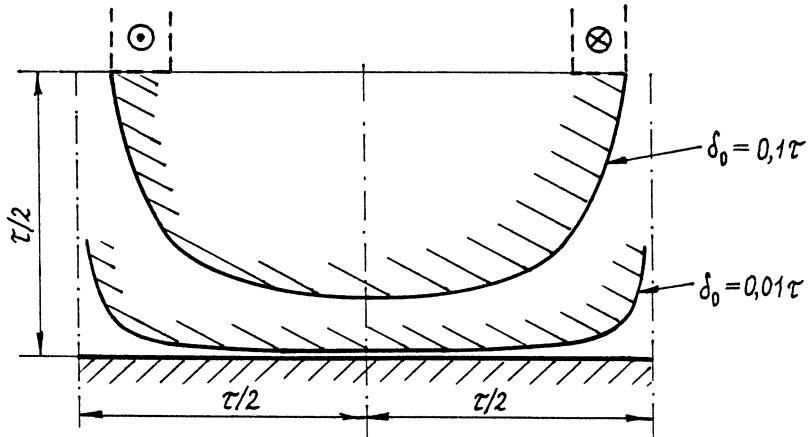


Abb. A 3.5.5 b

A3.5.6 Drehsymmetrisches Strömungsfeld:

Die Drehsymmetrie des quellenfreien Strömungsfeldes

$$\vec{J} = J_r(r, z) \vec{e}_r + J_z(r, z) \vec{e}_z$$

überträgt sich auf die magnetische Spannungsverteilung gemäß

$$\vec{H} = H_\alpha(r, z) \vec{e}_\alpha,$$

d.h. die Feldstärkelinien sind coaxiale Kreise.

Anwenden des Durchflutungssatzes auf solch einen Kreis ergibt

$$2\pi r H_\alpha(r, z) = \int_0^r J_z(r', z) 2\pi r' dr' = \frac{3I_o a}{(a^2 + z^2)^2} \underbrace{\int_0^r r'^2 dr'}_{r^3/3},$$

also

$$\vec{H} = \frac{I_o}{2\pi} \frac{ar^2}{(a^2 + z^2)^2} \vec{e}_\alpha. \blacksquare$$

A3.5.7 Strom einspeisung:

Wegen der vorliegenden Drehsymmetrie sind die Vektorlinien der magnetischen Feldstärke coaxiale Kreise. Mit den Bezeichnungen aus Abb. A3.5.7 b erhalten wir für den Bereich $z \leq 0$ unmittelbar aus dem Durchflutungssatz

$$z \leq 0: \quad \vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_\alpha.$$

Im Bereich $z \geq 0$ verteilt sich der Strom I jeweils gleichmäßig über konzentrische Halbkugeln,

$$\vec{J} = I/(2\pi r^2) \vec{e}_r.$$

Durch den Kugelausschnitt Δ tritt deshalb der Strom

$$I(\Delta) = \frac{I}{2\pi r^2} \cdot 2\pi r^2 [1 - \cos(\theta)] = I \cdot [1 - \cos(\theta)],$$

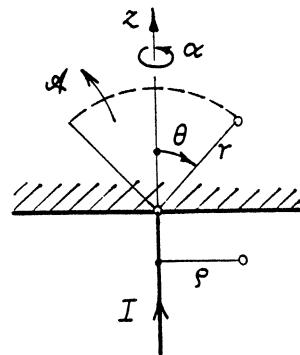


Abb. A3.5.7 b

und der Durchflutungssatz, angewendet auf den unbeladenen Kreisrand (Radius $\rho = r \sin(\theta)$), liefert

$$z \geq 0 \quad (0 \leq \theta \leq \pi/2): \quad \vec{H} = \frac{I}{2\pi} \frac{1 - \cos(\theta)}{r \sin(\theta)} \vec{e}_\alpha = \frac{I}{2\pi} \frac{\tan(\theta/2)}{r} \vec{e}_\alpha. \blacksquare$$

A3.5.8 Homogen magnetisierte Kugel:

Da der ganze Feldraum stromfrei ist, lässt sich ein magnetisches Skalarpotential φ verwenden. Aus

$$\vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0,$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}), \quad \vec{M} = \text{const},$$

erhalten wir dafür die Laplace-Gleichung $\nabla^2 \varphi = 0$ für das Innere beider Bereiche. Die zugehörigen Randbedingungen formulieren wir in Kugelkoordinaten nach Abb. A 3.5.8 b,

$$\vec{M} = M \vec{e}_z = M [\cos(\theta) \vec{e}_r - \sin(\theta) \vec{e}_\theta];$$

$$r = a: \quad \vec{e}_r \times [\vec{H}] = \vec{0} \Rightarrow [\varphi] = \text{const} = 0 \quad (\text{o.B.d.A.}),$$

$$\vec{e}_r \cdot [\vec{B}] = 0 \Rightarrow [\partial_r \varphi] = -M \cos(\theta).$$

$$r \rightarrow 0: \quad \varphi \rightarrow 0; \quad r \rightarrow \infty: \quad \varphi \rightarrow 0.$$

Ein Produktansatz mit der passenden Winkelabhängigkeit führt auf

$$\varphi(r, \theta) = (C_1 r + C_2 r^{-2}) \cos(\theta),$$

wobei wegen des Verhaltens für $r \rightarrow 0$ und $r \rightarrow \infty$ gilt:

$$r < a: \quad C_2 = 0; \quad r > a: \quad C_1 = 0.$$

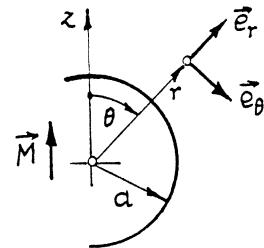


Abb. A 3.5.8 b

Zusammen mit den Sprungbedingungen ergibt sich schließlich

$$r < a : \quad \varphi(r, \theta) = \frac{1}{3} Mr \cos(\theta) = Mz/3,$$

$$\vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi = -\frac{1}{3}M\vec{e}_z = -\vec{M}/3 \quad (\text{Homogenfeld});$$

$$r > a : \quad \varphi(r, \theta) = \frac{1}{3} Ma \left(\frac{a}{r}\right)^2 \cos(\theta) = \frac{1}{3} M \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^3 z,$$

$$\vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi = \frac{1}{3} M \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^3 [2 \cos(\theta) \vec{e}_r + \sin(\theta) \vec{e}_\theta],$$

$$\vec{H} = (\vec{M} \cdot \vec{e}_r \vec{e}_r - \frac{1}{3} \vec{M}) \left(\frac{a}{r}\right)^3 \quad (\text{Dipolfeld}). \blacksquare$$

A3.5.9 Magnetostatische Abschirmung:

- (i) Formulierung des Feldproblems für ein magnetisches Skalarpotential φ , $\vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi$, in Kugelkoordinaten nach Abb. A3.5.9 b. Aus $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, $\vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi$ und $\vec{B} = \mu \vec{H}$ mit bereichsweise konstantem μ , aus den Sprungbedingungen $\vec{n} \times [\vec{H}] = \vec{0}$ und $\vec{n} \cdot [\vec{B}] = 0$, aus der Singularitätenfreiheit für $r \rightarrow 0$ und aus dem asymptotischen Verhalten $\vec{H} \rightarrow \vec{H}_0 = \vec{B}_0 / \mu_0$ für $r \rightarrow \infty$ folgt

$$0 \leq r < a, \quad a < r < b, \quad r > b : \quad \nabla^2 \varphi = 0;$$

$$r = 0 : \quad \varphi = 0 \quad (\text{o.B.d.A.});$$

$$r = a : \quad \varphi_2 = \varphi_1, \quad \mu_r \partial_r \varphi_2 = \partial_r \varphi_1;$$

$$r = b : \quad \varphi_3 = \varphi_2, \quad \partial_r \varphi_3 = \mu_r \partial_r \varphi_2;$$

$$r \rightarrow \infty : \quad \varphi \rightarrow -H_0 r \cos(\theta).$$

Ein Produktansatz führt auf den Radialteil $R(r) = Ar^n + Br^{-(n+1)}$ und liefert mit $n=1$, $m=0$ wegen $P_1^0[\cos(\theta)] = \cos(\theta)$ eine Form

$$\varphi = (Ar + Br^{-2}) \cos(\theta)$$

passender Winkelabhängigkeit, die sich sofort auf

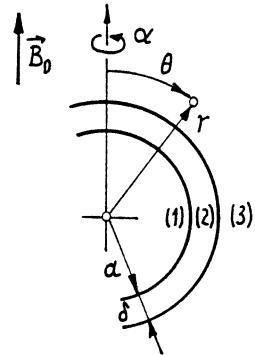


Abb. A3.5.9 b

$$\begin{aligned} 0 \leq r < a : \quad \varphi &= A_1 r \cos(\theta), \\ a < r < b : \quad \varphi &= (A_2 r + B_2 r^{-2}) \cos(\theta), \\ r > b : \quad \varphi &= (-H_0 r + B_3 r^{-2}) \cos(\theta) \end{aligned}$$

reduzieren lässt. Die restlichen Konstanten A_1, A_2, B_2 und B_3 sind aus den vier Bedingungen bei $r=a$ und $r=b$ zu bestimmen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} r = a : \quad A_2 a + B_2/a^2 &= A_1 a, \\ \mu_r (A_2 - 2B_2/a^3) &= A_1, \\ r = b : \quad -H_0 b + B_3/b^2 &= A_2 b + B_2/b^2, \\ -H_0 - 2B_3/b^3 &= \mu_r (A_2 - 2B_2/b^3) \end{aligned}$$

und daraus mit der Abkürzung

$$\gamma = \frac{9\mu_r}{(\mu_r+2)(2\mu_r+1)-2(\mu_r-1)^2(a/b)^3}$$

die Ausdrücke

$$\begin{aligned} A_1 &= -\gamma H_0, & B_2 &= -\frac{\mu_r-1}{3\mu_r} a^3 \gamma H_0, \\ A_2 &= -\frac{2\mu_r+1}{3\mu_r} \gamma H_0, & B_3 &= \frac{(2\mu_r+1)(\mu_r-1)}{3\mu_r} (b^3-a^3) \gamma H_0. \end{aligned}$$

Die magnetische Flussdichte in den drei Bereichen ist daher

$$0 \leq r < a : \quad \vec{B} = \vec{B}_1 = \gamma \vec{B}_0; \quad (\text{Homogenfeld})$$

$$a < r < b : \quad B_r = \gamma \left[\frac{2\mu_r+1}{3} - 2 \frac{\mu_r-1}{3} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right] B_0 \cos(\theta),$$

$$B_\theta = \gamma \left[-\frac{2\mu_r+1}{3} - \frac{\mu_r-1}{3} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right] B_0 \sin(\theta);$$

(Homogenfeld + Dipolfeld)

$$r > b : \quad B_r = \left[1 + 2\gamma \frac{(2\mu_r+1)(\mu_r-1)}{3\mu_r} \frac{b^3-a^3}{r^3} \right] B_0 \cos(\theta),$$

$$B_\theta = \left[-1 + \gamma \frac{(2\mu_r+1)(\mu_r-1)}{3\mu_r} \frac{b^3-a^3}{r^3} \right] B_0 \sin(\theta);$$

(Homogenfeld + Dipolfeld).

(ii) Als Maß für die Wirksamkeit der Abschirmung lässt sich beispielsweise der „Abschirmfaktor“

$$\gamma = \frac{|\vec{B}_1|}{|\vec{B}_0|} = \frac{9\mu_r}{(\mu_r+2)(2\mu_r+1)-2(\mu_r-1)^2(\alpha/\delta)^3}$$

$$= \frac{9\mu_r}{2(\mu_r^2+1)\left[1-\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^3\right]+\mu_r\left[5+4\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^3\right]}$$

$$\approx \frac{1}{1+\frac{2}{3}(\mu_r-1)^2\frac{\delta}{\alpha}} \quad \text{für } \delta/\alpha \ll 1$$

einführen. Sein Wert ist 1 für $\mu_r = 1$ oder $\alpha = \delta$ (keine Abschirmung) und 0 für $\mu_r \rightarrow \infty$, $\delta > \alpha$ (vollständige Abschirmung). Ein Pegelmaß für die Abschirmung ist die „Dämpfung“

$$\Gamma = -20 \lg(\gamma) \text{ dB.}$$

Abb. A 3.5.9 c zeigt eine graphische Darstellung.

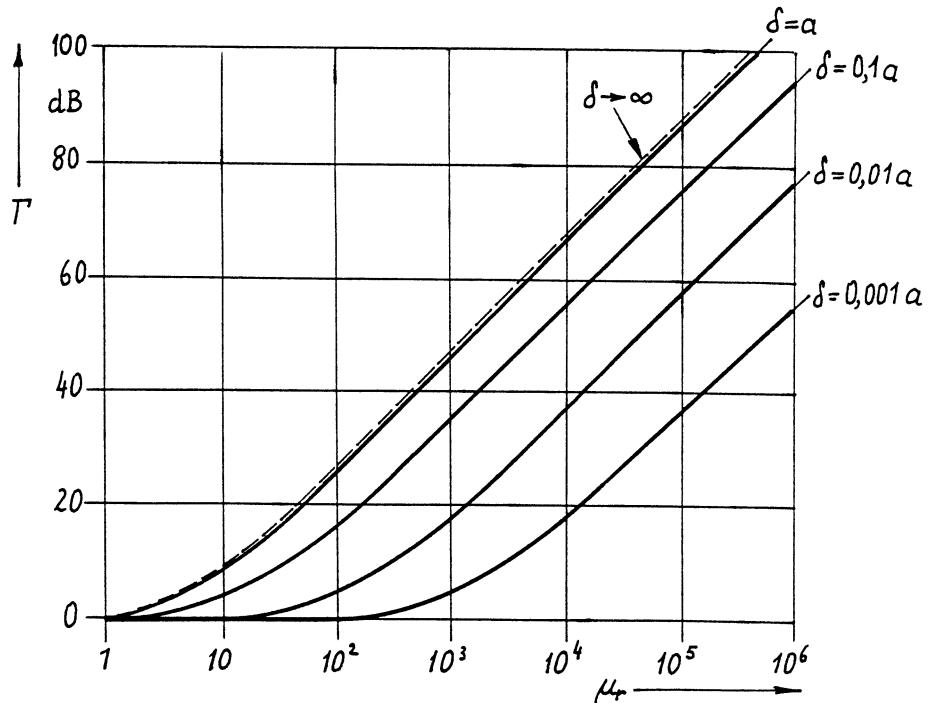


Abb. A 3.5.9 c

(iii) Der Maximalwert von $|\vec{B}|$ im Schalenmaterial tritt bei $r=a$, $\theta=\pi/2$ (innerer Äquator) auf und beträgt

$$|\vec{B}|_{\max} = \gamma \left(\frac{2\mu_r + 1}{3} + \frac{\mu_r - 1}{3} \right) B_0 = \mu_r \gamma B_0.$$

Für eine wirksame Abschirmung sollte dieser Wert unterhalb des Sättigungsbereiches liegen. Dies bestimmt in der Regel die erforderliche Schalendicke. ■

A3.5.10 Magnetfeld in einer Bohrung:

In Kreiszylinderkoordinaten ist

$$\vec{A} = (C_\rho + D/\rho) \cos(\alpha) \vec{e}_z,$$

$$\vec{B}_0 = B_0 \sin(\alpha) \vec{e}_\rho + B_0 \cos(\alpha) \vec{e}_\alpha,$$

und $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ bedeutet

$$B_\rho = \frac{1}{\rho} \partial_\alpha A_z = - (C + D/\rho^2) \sin(\alpha),$$

$$B_\alpha = -\partial_\rho A_z = - (C - D/\rho^2) \cos(\alpha).$$

Singularitätenfreiheit im Innenraum $\rho < a$ erfordert $D_1 = 0$, also

$$\rho < a: \quad B_\rho = -C \sin(\alpha), \quad B_\alpha = -C \cos(\alpha) \quad (\text{Homogenfeld}).$$

Das asymptotische Verhalten $\vec{B} \rightarrow \vec{B}_0$ für $\rho \rightarrow \infty$ liefert dagegen $C_2 = -B_0$, d.h.

$$\rho > a: \quad B_\rho = (B_0 - D_2/\rho^2) \sin(\alpha), \quad B_\alpha = (B_0 + D_2/\rho^2) \cos(\alpha).$$

Die beiden restlichen Konstanten C_1 und D_2 sind aus den Sprungbedingungen zu bestimmen,

$$\rho = a: \quad \begin{cases} [B_\rho] = 0 \Rightarrow -C_1 = B_0 - D_2/a^2, \\ [H_\alpha] = 0 \Rightarrow -\frac{1}{\mu_0} C_1 = \frac{1}{\mu} (B_0 + D_2/a^2) \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} C_1 = -\frac{2}{\mu_r + 1} B_0,$$

wobei $\mu_r = \mu/\mu_0$. In der Bohrung stellt sich demnach das Homogenfeld

$$r < a : \quad \vec{B} = \frac{2}{1 + \mu_r} \vec{B}_0$$

ein. ■

A3.5.11 Kugelpule:

Die noch freien Konstanten C_1 und C_2 ergeben sich sofort aus den Sprungbedingungen,

$$\left. \begin{array}{l} r=a, \theta=0 : [B_r] = 0 \Rightarrow C_1 = 2C_2, \\ \theta=\pi/2 : [H_\theta] = K_0 \Rightarrow C_2 + C_1 = K_0 \end{array} \right\} C_1 = \frac{2}{3} K_0, C_2 = \frac{1}{3} K_0.$$

Wir berechnen die Induktivität über die gespeicherte magnetische Energie.

$$r < a : \quad w_i = \frac{\mu_0}{2} C_1^2 = \text{const.},$$

$$w_i = \frac{\mu_0}{2} C_1^2 \frac{4\pi}{3} a^3 = \frac{\mu_0}{2} \frac{16\pi}{27} a^3 K_0^2.$$

$$r > a : \quad w_a = \frac{\mu_0}{2} C_2^2 \left(\frac{a}{r}\right)^6 [4\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)] = \frac{\mu_0}{2} C_2^2 \left(\frac{a}{r}\right)^6 [1 + 3\cos^2(\theta)],$$

$$\begin{aligned} w_a &= \int_a^\infty \int_0^\pi w_a 2\pi r^2 \sin(\theta) dr d\theta \\ &= \frac{\mu_0}{2} C_2^2 a^6 2\pi \int_a^\infty \frac{dr}{r^4} \int_0^\pi [1 + 3\cos^2(\theta)] \sin(\theta) d\theta \end{aligned}$$

$$= \frac{\mu_0}{2} C_2^2 \frac{8\pi}{3} a^3 = \frac{\mu_0}{2} \frac{8\pi}{27} a^3 K_0^2 = \frac{1}{2} w_i.$$

Der gesamte Energieinhalt des magnetischen Feldes ist dann

$$W = w_a + w_i = \frac{3}{2} w_i = \frac{\mu_0}{2} \frac{8\pi}{9} a^3 K_0^2 = \frac{\mu_0}{2} \frac{2\pi}{9} a N^2 I^2,$$

und der Vergleich mit $W = LI^2/2$ liefert die gesuchte Induktivität

$$L = \frac{2\pi}{9} N^2 \mu_0 a. ■$$

A4.2.1 Eindringen des Magnetfeldes in eine Platte:

(i) Einsetzen der Reihe in die Differentialgleichung liefert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\mu\gamma}{T_n} - \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right] C_n e^{-t/T_n} \sin(n\pi x/a) = 0.$$

Soll diese Beziehung für jedes $x \in (0, a)$ und $t > 0$ bestehen, muß

$$T_n = \mu\gamma \left(\frac{a}{n\pi} \right)^2 = \left(\frac{2}{n\pi} \right)^2 T_d \quad \text{mit } T_d = \mu\gamma (a/2)^2.$$

Damit ist die Diffusionsgleichung erfüllt. Wegen $\sin(n\pi x/a) = 0$ für $x = 0$ und $x = a$ sind die Randbedingungen ebenfalls befriedigt, falls

$$C_0 = H_0.$$

Um der Anfangsbedingung

$$C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi x/a) = 0$$

zu genügen, multiplizieren wir diese mit $\sin(k\pi x/a)$, $k \in \mathbb{N}$, und integrieren über x von 0 bis a ,

$$\underbrace{C_0 \int_0^\pi \sin(k\varphi) d\varphi}_{2/k \text{ für } k=1,3,\dots} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^\pi \sin(k\varphi) \sin(n\varphi) d\varphi}_{\pi/2 \text{ für } k=n, \quad 0 \text{ für } k \neq n} = 0, \quad \varphi = \pi x/a.$$

Daraus folgt

$$C_n = -\frac{4}{n\pi} H_0 \quad \text{für } n=1,3,\dots,$$

$$C_n = 0 \quad \text{für } n=2,4,\dots.$$

Die vervollständigte Lösung ist damit

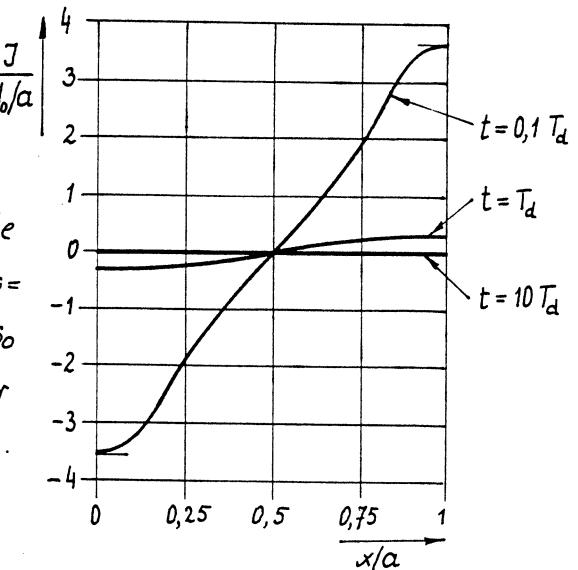
$$H(x,t) = H_0 \left[1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{1}{n} \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{4} \frac{t}{T_d}\right) \sin\left(n\pi \frac{x}{a}\right) \right].$$

(ii) Die zugehörige Stromdichte erhalten wir aus $\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{H}$, wegen $\vec{J} = J(x, t) \hat{e}_x$ und $\vec{H} = H(x, t) \hat{e}_y$, also aus $J = \partial_x H$,

$$J(x, t) = -\frac{4H_0}{a} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{4}\frac{t}{T_d}\right) \cos\left(n\pi\frac{x}{a}\right).$$

Eine Auswertung für die angegebenen Zeitpunkte zeigt Abb. A 4.2.1 B. Die Reihen konvergieren, ausgenommen für $t \ll T_d$, außerordentlich rasch. So sind für $t = 0,1 T_d$ die beiden ersten Reihenglieder ausreichend, für $t = T_d$ genügt das erste Glied.

■



A4.2.2 Poynting-Satz für dominant magnetische Sinusfelder:

Abb. A 4.2.1 B

(i) Ausgehend von den lokalen Feldgleichungen des dominant magnetischen Feldsystems,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (1)$$

$$\vec{\nabla}_x \vec{E} = -\partial_t \vec{B}, \quad (2)$$

$$\vec{\nabla}_x \vec{H} = \vec{J} \quad (3)$$

erhalten wir durch Eintragen der komplexen Ansätze die komplexen Formen

$$\vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{B}} = 0, \quad (1')$$

$$\vec{\nabla}_x \underline{\vec{E}} = -j\omega \underline{\vec{B}}, \quad (2')$$

$$\vec{\nabla}_x \underline{\vec{H}} = \underline{\vec{J}}. \quad (3')$$

(ii) Die Divergenz des komplexen Poynting-Vektors lässt sich mit (2') und (3') umformen,

$$\begin{aligned} -\vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{S}} &= -\frac{1}{2} \vec{\nabla} \cdot (\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*) = -\frac{1}{2} \underline{\vec{H}}^* \cdot (\vec{\nabla}_x \underline{\vec{E}}) + \frac{1}{2} \underline{\vec{E}} \cdot (\vec{\nabla}_x \underline{\vec{H}}^*) \\ &= j\omega \frac{1}{2} \underline{\vec{B}} \cdot \underline{\vec{H}}^* + \frac{1}{2} \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{J}}^*. \end{aligned}$$

Nach Integration über einen räumlichen Bereich γ und Anwendung des Satzes von Gauß ergibt sich

$$-\int_{\gamma} \vec{n} \cdot \underline{\underline{S}} dA = j2\omega \int_{\gamma} \frac{1}{4} \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{H}}^* dV + \int_{\gamma} \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{J}}^* dV. \quad (4)$$

Dies ist die gesuchte Identität.

(iii) Wir verwenden die Materialgleichungen $\underline{\underline{B}} = \mu \underline{\underline{H}}$ und $\underline{\underline{J}} = \gamma \underline{\underline{E}}$ und erhalten aus (4)

$$-\int_{\gamma} \vec{n} \cdot \underline{\underline{S}} dA = j2\omega \int_{\gamma} \frac{\mu}{4} |\underline{\underline{H}}|^2 dV + \int_{\gamma} \frac{1}{2\gamma} |\underline{\underline{J}}|^2 dV. \quad (5)$$

Darin lässt sich das letzte Integral

$$P = \int_{\gamma} \frac{1}{2\gamma} |\underline{\underline{J}}|^2 dV \quad (6)$$

sofort als Wirkleistung (Joule-Verluste) interpretieren, da $|\underline{\underline{J}}|$ die lokale Amplitude der Stromdichte-Sinus-
schwingung darstellt. Der Faktor $1/2$ entsteht bei der Mittelwertbildung.

Der Ausdruck $\mu \underline{\underline{H}}^2/2$ mit der reellen Feldstärke $\underline{\underline{H}}$ gibt die Dichte der lokal im Magnetfeld gespeicherten Energie an. Dies ist im vorliegenden Fall eine Mischgröße, bei der der zeitliche Mittelwert $\mu |\underline{\underline{H}}|^2/4$ eine Sinusschwingung gleicher Amplitude mit der Kreisfrequenz 2ω überlagert ist. Der Term

$$Q = 2\omega \int_{\gamma} \frac{\mu}{4} |\underline{\underline{H}}|^2 dV \quad (7)$$

lässt sich damit als Blindleistung interpretieren (Vergleichen Sie dazu die Ausdrücke $W = LI^2/2$ mit dem Effektivwert I für den mittleren Energieinhalt und $Q = \omega LI^2 = 2\omega W$ für die Blindleistung einer Spule).

Wir haben also

$$-\int_{\partial V} \vec{n} \cdot \vec{S} dA = j Q + P, \quad (8)$$

und dies zeigt die Bedeutung der linken Seite:

Es handelt sich um die dem Bereich V zugeführte, komplexe Scheinleistung. Diese Interpretation lässt sich sogar für etwas allgemeinere, lineare Materialgleichungen aufrecht erhalten. Sie bildet häufig die Grundlage für die Definition von Impedanzen u. ä., liefert mit

$$P = \operatorname{Re} \left(-\int_{\partial V} \vec{n} \cdot \vec{S} dA \right) \quad (9)$$

ein bequemes Verfahren zur Berechnung der Wirkleistung und mit

$$Q = \operatorname{Im} \left(-\int_{\partial V} \vec{n} \cdot \vec{S} dA \right) \quad (10)$$

eine gute Interpretation der Blindleistung. ■

A4.2.3 Wirbelstromverluste in einer Kreisscheibe:

Mit Bezug auf Abb. A 4.2.3. b ergibt die direkte Anwendung des Induktionsgesetzes bei Vernachlässigung der Rückwirkung

$$U(\partial \alpha) = E_\alpha 2\pi\rho = -\dot{\Phi}(\alpha) = \omega \hat{B}_0 \rho^2 \pi \sin(\omega t),$$

$$E_\alpha = \frac{1}{2} \rho \omega \hat{B}_0 \sin(\omega t).$$

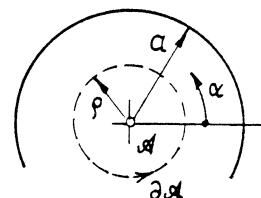


Abb. A 4.2.3 b

Daraus folgt für den Augenblickswert der Joule-Verluste

$$p = \delta \int_0^a \gamma E_\alpha^2 2\pi\rho d\rho = \frac{\pi}{2} \gamma \delta (\omega \hat{B}_0)^2 \sin^2(\omega t) \int_0^a \rho^3 d\rho$$

$$= \frac{\pi}{8} \gamma \delta a^4 (\omega \hat{B}_0)^2 \sin^2(\omega t),$$

und für deren zeitlichen Mittelwert

$$P = \bar{p} = \frac{\pi}{16} \gamma \delta \alpha^4 (\omega \hat{B}_0)^2 = \frac{\gamma \delta}{16 \pi} (\omega \hat{\Phi})^2$$

mit

$$\hat{\Phi} = \pi \alpha^2 \hat{B}_0.$$

Dies sind die resultierenden Wirbelstromverluste in der Scheibe.

Die Vernachlässigung der Rückwirkung der Wirbelströme auf das magnetische Feld ist dann gerechtfertigt, wenn die „seitliche Eindringtiefe“ $1/(\mu_0 \gamma \delta \omega)$ deutlich größer als der Scheibenradius α ist. ■

A4.2.4 Flächenkraft:

Bezeichnet L eine Bezugslänge, so ist der Fall großer Frequenzen durch $\delta \ll L$ mit der üblichen Eindringtiefe δ gegeben, d. h. durch

$$f \gg \frac{1}{\pi \mu_0 \gamma L^2}.$$

An der Ebene $x=0$ stellt sich dann modellhaft ein Flächenstrom der Dichte \vec{K} ein, und der Bereich $x>0$ bleibt feldfrei, wobei

$$\vec{K} = \vec{e}_x \times [\vec{H}] = -\vec{e}_x \times [\hat{H}_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y] = -\hat{H}_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z.$$

Damit erhalten wir für die Flächenkraftdichte

$$\begin{aligned} \vec{f}^s &= \vec{K} \times \langle \vec{B} \rangle = [-\hat{H}_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z] \times \left[\frac{1}{2} \mu_0 \hat{H}_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y \right] \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 \hat{H}_0^2 \cos^2(\omega t) \vec{e}_x \quad (\text{pulsierender Druck}), \end{aligned}$$

und für den zeitlichen Mittelwert

$$\overline{\vec{f}^s} = \frac{1}{4} \mu_0 \hat{H}_0^2 \vec{e}_x \quad (\text{mittlerer Druck}).$$

Das gleiche Ergebnis folgt auch aus der absorbierten Impulsflußdichte. ■

A4.2.5 Oberflächenimpedanz:

Die elektrische Feldstärke ergibt sich aus

$$\begin{aligned}\vec{E}(x,t) &= \frac{1}{\gamma} \vec{J} = \frac{1}{\gamma} \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{\gamma} \operatorname{Re} \left\{ -\hat{H} \vec{e}_y \times \vec{\nabla} \exp[-x/\delta + j(\omega t - x/\delta)] \right\} \\ &= \underbrace{\operatorname{Re} \left\{ -\frac{1+j}{\gamma \delta} \hat{H} \exp[-x/\delta + j(\omega t - x/\delta)] \right\}}_{\hat{E}} \vec{e}_z.\end{aligned}$$

Damit ist die gesuchte Oberflächenimpedanz

$$\underline{Z}_f = \frac{1+j}{\gamma \delta} = (1+j) \sqrt{\frac{\mu \omega}{2 \gamma}},$$

sofern die Richtungen von \vec{E}_t , \vec{H}_t und der in das Körperinnere weisenden Flächennormalen in dieser Reihenfolge ein rechtswendiges Dreieck bilden. ■

A4.2.6 Frequenzabhängigkeit des Scheinwiderstandes:

Mit der angegebenen Lösung ist der komplexe Effektivwert des Gesamtstroms

$$\underline{I} = \frac{1}{\sqrt{2}} B \int_0^{\infty} \hat{J}_0 e^{-(1+j)x/\delta} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{B \delta}{1+j} \hat{J}_0,$$

und der komplexe Effektivwert der Spannung bei $x=0$

$$\underline{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{E} d = \frac{d}{\sqrt{2} \gamma} \hat{J}_0.$$

Daraus folgt für die Impedanz

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = (1+j) \frac{d}{\gamma \delta B} = \frac{1+j}{\sqrt{2}} \frac{d}{B} \sqrt{\frac{\mu \omega}{\gamma}} = |\underline{Z}| e^{j\pi/4},$$

und deren Betrag (Scheinwiderstand)

$$|\underline{Z}| = \frac{d}{B} \sqrt{\frac{\mu \omega}{\gamma}},$$

dargestellt als Frequenzfunktion in Abb. A4.2.6 B
(parabolischer Verlauf). ■

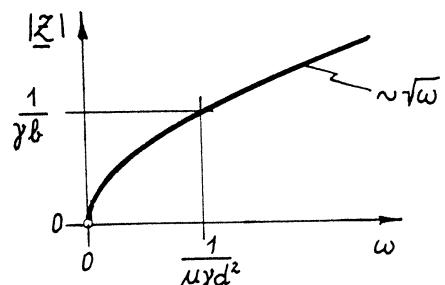


Abb. A4.2.6 B

A4.2.7 Verluste in Stromschienen:

Wegen $\delta \ll h$ können wir einen Halbraumauschnitt direkt verwenden, wobei, unter Vernachlässigung der Randstörungen im Zwischenraum,

$$\hat{H}_0 = \hat{I}/h = \sqrt{2} I/h.$$

Aus dem Poynting-Vektor $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \vec{J} \times \vec{H}/\gamma$ an der Schienoberfläche im Zwischenraum,

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \frac{1}{\gamma} \hat{H}_0^2 \frac{\sqrt{2}}{\delta} \cos(\omega t) \cos(\omega t + \pi/4) \vec{e}_x \\ &= \frac{\hat{H}_0^2}{\gamma \delta \sqrt{2}} [\cos(\pi/4) + \cos(2\omega t + \pi/4)] \vec{e}_x = S \vec{e}_x,\end{aligned}$$

ergibt sich der zeitliche Mittelwert der in die Schienen einströmenden Energieflussdichte,

$$\bar{S} = \frac{\hat{H}_0^2}{2\gamma\delta} = \frac{I^2}{\gamma\delta h^2}.$$

Die längenbezogene Verlustleistung, für beide Schienen zusammengenommen, ist daher

$$P' = 2\bar{S}h = \frac{2I^2}{\gamma\delta h} = \frac{I^2}{h} \sqrt{\frac{2\mu\omega}{\gamma}}, \quad \omega = 2\pi f. \blacksquare$$

A4.2.8 Induktionsheizung:

Der angegebene Ausdruck für die magnetische Feldstärke lässt sich mit $\underline{H} = N'\sqrt{2} I$ sofort vervollständigen. Die zugehörige elektrische Feldstärke ist

$$\vec{E} = \frac{1}{\gamma} \vec{J} = \frac{1}{\gamma} \vec{V} \times \vec{H} = \text{Re} \left\{ -\frac{1+j}{\gamma\delta} \underline{\underline{H}} \exp[-x/\delta + j(\omega t - x/\delta)] \right\} \vec{e}_z.$$

An der Zylinderoberfläche tritt demnach im zeitlichen Mittel die flächenbezogene Leistung

$$P'' = -\text{Re} \left\{ \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} \underline{\underline{H}}^* \right\} = \text{Re} \left\{ \frac{1}{2} \frac{1+j}{\gamma\delta} \underline{\underline{H}} \underline{\underline{H}}^* \right\} = \frac{(N'I)^2}{\gamma\delta}$$

in den Körper ein. Dies liefert mit $\delta = 0,503 \text{ mm}$ den Wert

$$P'' = 715 \text{ kW/m}^2 = 71,5 \text{ W/cm}^2. \blacksquare$$

A4.2.9 Maximale Wirbelstromverluste:

Der angegebene Verlauf ist in Abb. A4.2.9 b gezeichnet.

Wir führen zur Abkürzung

$$\alpha = \frac{d}{\delta}, \quad F(\alpha) = \frac{P''}{\hat{H}_0^2 / (\gamma \delta)} = \frac{\sinh(\alpha) - \sin(\alpha)}{\cosh(\alpha) + \cos(\alpha)}$$

ein und berechnen

$$\begin{aligned} F'(\alpha) &= \frac{[\cosh(\alpha) - \cos(\alpha)][\cosh(\alpha) + \cos(\alpha)] - [\sinh(\alpha) - \sin(\alpha)]^2}{[\cosh(\alpha) + \cos(\alpha)]^2} \\ &= \frac{2 \sinh(\alpha) \sin(\alpha)}{[\cosh(\alpha) + \cos(\alpha)]^2}. \end{aligned}$$

Extremwerte von $F(\alpha)$ treten demnach für $\alpha = k\pi$, $k = 0, 1, 2, \dots$, auf, wobei das gesuchte absolute Maximum mit Blick auf Abb. A4.2.9 b offensichtlich zu $\alpha = \pi$ gehört. Der Größtwert der flächenbezogenen Verluste tritt also bei einer Schichtdicke

$$d = \pi \delta$$

auf und beträgt

$$P'' = \frac{\hat{H}_0^2 \sinh(\pi)}{\gamma \delta [\cosh(\pi) - 1]} = 1,090 \frac{\hat{H}_0^2}{\gamma \delta}. \blacksquare$$

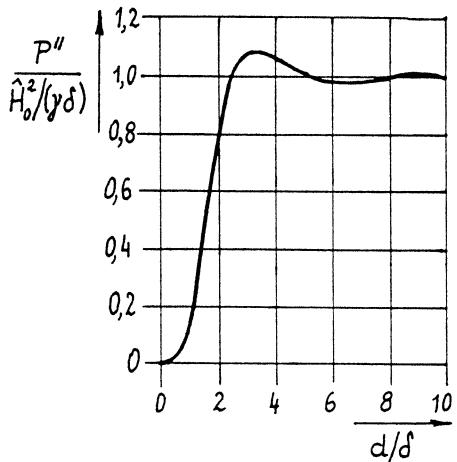


Abb. A4.2.9 b

A4.2.10 Verluste in einem Nutenleiter:

Die Überlagerung der beiden Stromverteilungen liefert für die Feldstärken am freien Teil der Leiteroberfläche

$$H_y(h, t) = \frac{I_o}{\beta} + \frac{1}{\beta} \operatorname{Re}(I, \sqrt{2} e^{j\omega t}) \quad (\text{Durchflutungssatz}),$$

$$E_z(h, t) = \frac{I_o}{\gamma \beta h} + \frac{1}{\gamma} \operatorname{Re}\left[\frac{I, \sqrt{2}}{\beta h} \frac{k h}{\tan(k h)} e^{j\omega t}\right]$$

und damit für den in den Leiter eintretenden, längenbezogenen Energiefluß

$$\begin{aligned}-\beta S_x(h, t) &= \beta E_z(h, t) H_y(h, t) \\&= \frac{1}{\gamma \beta h} \left\{ I_0 + \operatorname{Re} \left[\frac{I_1 \sqrt{2} \underline{k} h}{\tan(\underline{k} h)} e^{j \omega t} \right] \right\} \left\{ I_0 + \operatorname{Re} (I_1 \sqrt{2} e^{j \omega t}) \right\},\end{aligned}$$

da der Poynting-Vektor an den anderen Teilen der Kontur wegen $\vec{H}_t = \vec{0}$ verschwindet. Wir berechnen daraus den gesuchten zeitlichen Mittelwert

$$P' = -\beta \overline{S_x(h, t)} = R'_0 \left\{ I_0^2 + I_1^2 \operatorname{Re} \left[\frac{\underline{k} h}{\tan(\underline{k} h)} \right] \right\},$$

wobei

$$R'_0 = 1/(\gamma \beta h)$$

den längenbezogenen „Gleichstromwiderstand“ des Leiters darstellt.

Für die angegebenen Werte ist

$$R'_0 = 3,57 \cdot 10^{-5} \Omega/m, \quad \delta = 3,883 \text{ mm},$$

$$\underline{k} h = (1-j) \frac{h}{\delta} = (1-j) 12,877,$$

$$\cot(\underline{k} h) = j \frac{e^{j \underline{k} h} + \bar{e}^{-j \underline{k} h}}{e^{j \underline{k} h} - \bar{e}^{-j \underline{k} h}} \approx j$$

und damit

$$\operatorname{Re} \left[\frac{\underline{k} h}{\tan(\underline{k} h)} \right] \approx \operatorname{Re}(j \underline{k} h) = 12,877.$$

Daraus folgt

$$P' = R'_0 (I_0^2 + 12,877 I_1^2) = 338 \text{ W/m.}$$

Ohne Berücksichtigung der Stromverdrängung wäre

$$P' = R'_0 (I_0^2 + I_1^2) = 232 \text{ W/m.},$$

wir erhielten also einen deutlich zu niedrigen Wert. ■

A4.2.11 Innere Impedanz eines Drahtes:

Bezeichnungen nach Abb. A 4.2.11a. Wir betrachten den eingeschwungenen Zustand mit dem eingeprägten Gesamtstrom

$$i(t) = \operatorname{Re} (I \sqrt{2} e^{j\omega t}), \quad (1)$$

oder sich zwar drehsymmetrisch, sonst aber nicht gleichförmig über den Querschnitt verteilt (Stromverdrängung, Skin-Effekt). Für die elektrische Stromdichte und die magnetische Feldstärke sind die Konfigurationen

$$\vec{J} = J(\rho, t) \vec{e}_z, \quad \vec{H} = H(\rho, t) \vec{e}_\alpha \quad (2)$$

zu erwarten, wobei über den Durchflutungssatz die magnetische Randfeldstärke durch den Gesamtstrom fixiert ist,

$$H(a, t) = \frac{i(t)}{2\pi a}. \quad (3)$$

Aus

$$\left. \begin{array}{l} \vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{H}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \\ \vec{E} = \vec{J}/\gamma, \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \end{array} \right\} \quad (4)$$

folgt

$$-\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \mu \gamma \partial_t \vec{H} \quad (5)$$

mit

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho H) \vec{e}_z, \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = -\partial_\rho \left[\frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho H) \right] \vec{e}_\alpha. \quad (6)$$

Zur Berechnung der magnetischen Feldstärke $H(\rho, t)$ ist somit das folgende Problem zu lösen.

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq \rho < a : \partial_\rho \left[\frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho H) \right] = \mu \gamma \partial_t H \\ \rho = 0 : \quad H(0, t) \text{ beschränkt,} \\ \rho = a : \quad H(a, t) = \frac{i(t)}{2\pi a} \end{array} \right\} \quad (7)$$

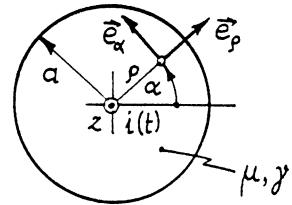


Abb. A 4.2.11 a

Gesucht ist der eingeschwungene Zustand für Sinusströme (1). Ist $H(\rho, t)$ bestimmt, lässt sich die Stromdichte über

$$J = \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho H) \quad (8)$$

ermitteln.

Mit den Darstellungen

$$H(\rho, t) = \operatorname{Re}[\underline{H}(\rho) e^{j\omega t}], \quad J(\rho, t) = \operatorname{Re}[\underline{J}(\rho) e^{j\omega t}] \quad (9)$$

reduziert sich das Problem auf

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq \rho < a: \quad \rho^2 \underline{\hat{H}}'' + \rho \underline{\hat{H}}' + (\underline{k}^2 \rho^2 - 1) \underline{\hat{H}} = 0, \\ \underline{k} = (1-j)/\delta, \quad \delta = \sqrt{2/(\mu \gamma \omega)}; \\ \underline{\hat{H}}(0) \text{ beschränkt}, \\ \underline{\hat{H}}(a) = \underline{I} \sqrt{2}/(2\pi a); \end{array} \right\} \quad (10)$$

$$\underline{\hat{J}} = \frac{1}{\rho} (\rho \underline{\hat{H}})' \quad (11)$$

Gl. (10), ist eine Bessel-Differentialgleichung mit der allgemeinen Lösung

$$\underline{\hat{H}}(\rho) = C_1 J_1(\underline{k}\rho) + C_2 Y_1(\underline{k}\rho). \quad (12)$$

Aus dem Verhalten der Bessel-Funktionen $J_1(\zeta)$ und $Y_1(\zeta)$ für $\zeta \rightarrow 0$ schließen wir sofort auf $C_2 = 0$ und bestimmen C_1 aus dem Randwert $\underline{\hat{H}}(a)$, d.h. wir erhalten die Lösung von (10)

$$\underline{\hat{H}}(\rho) = \frac{\underline{I} \sqrt{2}}{2\pi a} \frac{J_1(\underline{k}\rho)}{J_1(\underline{k}a)}. \quad (13)$$

Die komplexe Amplitudensfunktion der Stromdichte ist aus (11) zu berechnen

$$\hat{J}(\rho) = \frac{\underline{I}\sqrt{2}}{2\pi a} \frac{1}{\rho} \left[\rho \frac{J_1(\underline{k}\rho)}{J_1(\underline{k}a)} \right]' = \frac{\underline{I}\sqrt{2}}{2\pi a} \frac{\underline{k}}{J_1(\underline{k}a)} \underbrace{\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} [\xi J_1(\xi)]}_{\xi=\underline{k}\rho},$$

also

$$\hat{J}(\rho) = \frac{\underline{I}\sqrt{2}}{\pi a^2} \frac{\underline{k}a/2}{J_1(\underline{k}a)} J_0(\underline{k}\rho). \quad (14)$$

Als nächstes bestimmen wir den längenbezogenen, komplexen Poynting-Fluß, der in dem Draht eintritt. Der dazu benötigte Randwert der elektrischen Feldstärke ergibt sich mit $\vec{E} = \vec{J}/\gamma$ aus (14), und wir erhalten

$$-\vec{e}_\rho \cdot \left\{ \frac{1}{2} [\vec{E}(a) \vec{e}_z] \times [\vec{H}^*(a) \vec{e}_x] \right\} 2\pi a = \frac{\underline{I} I^*}{\pi a^2 \gamma} \frac{\underline{k}a/2}{J_1(\underline{k}a)} J_0(\underline{k}a). \quad (15)$$

Nach den Überlegungen aus A 4.2.2 entspricht dieser Wert der dem Draht zugeführten, längenbezogenen komplexen Scheinleistung. Wir setzen ihn deshalb gleich $\underline{Z}' \underline{I} \underline{I}^*$ und definieren so die gesuchte längenbezogene Impedanz des Drahtes,

$$\underline{Z}' = R'_0 \frac{\underline{k}a/2}{J_1(\underline{k}a)} J_0(\underline{k}a), \quad (16)$$

wobei

$$R'_0 = 1/(\pi a^2 \gamma), \quad \underline{k} = (1-j)/\delta, \quad \delta = \sqrt{2/(\mu \gamma \omega)}. \quad (17)$$

Die Ortskurve dieses Impedanzbelages mit der bezogenen Frequenzvariablen

$$\nu = \mu \gamma a^2 \omega = 2(a/\delta)^2 \quad (18)$$

ist in Abb. A 4.2.11 b angegeben.

Das Verhalten für kleine Frequenzen lässt sich mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung

$$J_\nu(\xi) = (\xi/2)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\xi^2/4)^n}{n! \Gamma(\nu+n+1)} \quad (19)$$

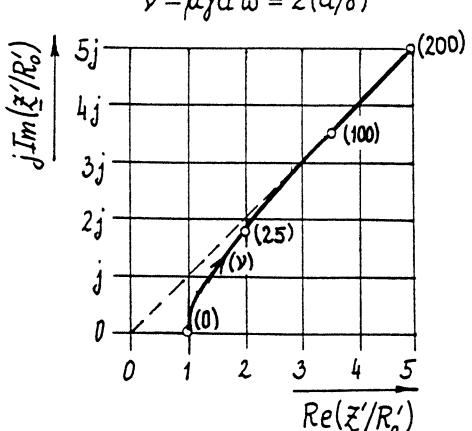


Abb. A 4.2.11 b

gewinnen, wobei in unserem Fall

$$\underline{\xi} = k a = \sqrt{\nu} e^{-j\pi/4}. \quad (20)$$

Wir erhalten

$$J_0(\underline{\xi}) = 1 - \left(\frac{\underline{\xi}}{2}\right)^2 + \dots, \quad J_1(\underline{\xi}) = \frac{\underline{\xi}}{2} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\underline{\xi}}{2}\right)^2 + \dots\right], \quad (21)$$

und daraus

$$\underline{Z}' \approx R'_0 (1 + j\nu/8), \quad \nu \ll 1. \quad (22)$$

Für kleine Frequenzen ergibt sich demnach der Widerstandsbelag

$$R' = \operatorname{Re}(\underline{Z}') = R'_0 = 1/(\pi a^2 \gamma) \quad (23)$$

(„Gleichstromwiderstand“) und der Reaktanzbelag

$$X' = \operatorname{Im}(\underline{Z}') = R'_0 \nu/8 = \omega \mu/(8\pi). \quad (24)$$

Daraus lässt sich übrigens der für kleine Frequenzen definierte innere Induktivitätsbelag

$$L' = X'/\omega = \mu/(8\pi) \quad (25)$$

ablesen.

Das Verhalten für große Frequenzen (ausgeprägter Skin-Effekt) ergibt sich aus dem asymptotischen Verhalten der Bessel-Funktionen,

$$\left. \begin{aligned} J_0(\underline{\xi}) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi \underline{\xi}}} \cos(\underline{\xi} - \pi/4), & J_1(\underline{\xi}) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi \underline{\xi}}} \sin(\underline{\xi} - \pi/4), \\ \underline{Z}'/R'_0 &\approx \frac{1}{2} \underline{\xi} \cot(\underline{\xi} - \pi/4) \approx j\underline{\xi}/2, & \text{da } \operatorname{Im}(\underline{\xi}) \gg 1, \end{aligned} \right\} (26)$$

zu

$$\underline{Z}' \approx R'_0 \frac{1}{2} \sqrt{\nu} e^{j\pi/4}, \quad \nu \gg 1, \quad (27)$$

also

$$R' \approx X' \approx \frac{1}{2\pi a \gamma \delta} \approx \frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{\mu \omega}{2\gamma}}. \quad (28)$$

Der Widerstandsbelag und der Reaktanzbelag verhalten sich dann proportional zu $\sqrt{\omega}$, der innere Induktivitätsbelag X'/ω proportional zu $1/\sqrt{\omega}$. ■

A5.1.1 Poynting-Satz für Sinusfelder:

(i) Die lokalen Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0,$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \partial_t \vec{D}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

nehmen nach Eintragen der komplexen Ansätze die Form

$$\vec{\nabla} \times \underline{\vec{E}} = -j\omega \underline{\vec{B}}, \quad \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{B}} = 0,$$

$$\vec{\nabla} \times \underline{\vec{H}} = \underline{\vec{J}} + j\omega \underline{\vec{D}}, \quad \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{D}} = \underline{\rho}$$

an.

(ii) Die Divergenz des komplexen Poynting-Vektors lässt sich mit den komplexen Rotorgleichungen umformen,

$$\begin{aligned} -\vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{S}} &= -\frac{1}{2} \vec{\nabla} \cdot (\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*) = -\frac{1}{2} \underline{\vec{H}}^* \cdot (\vec{\nabla} \times \underline{\vec{E}}) + \frac{1}{2} \underline{\vec{E}} \cdot (\vec{\nabla} \times \underline{\vec{H}}^*) \\ &= j\omega \left(\frac{1}{2} \underline{\vec{B}} \cdot \underline{\vec{H}}^* - \frac{1}{2} \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{D}}^* \right) + \frac{1}{2} \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{J}}^*. \end{aligned}$$

Integration über ein Volumen V und Anwendung des Satzes von Gauß liefert die gesuchte Identität

$$-\int_{\partial V} \vec{n} \cdot \underline{\vec{S}} dA = j2\omega \int_V \left(\frac{1}{2} \underline{\vec{B}} \cdot \underline{\vec{H}}^* - \frac{1}{2} \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{D}}^* \right) dV + \int_V \frac{1}{2} \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{J}}^* dV.$$

(iii) Lineare Materialgleichungen

$$\underline{\vec{D}} = \epsilon \underline{\vec{E}}, \quad \underline{\vec{B}} = \mu \underline{\vec{H}}, \quad \underline{\vec{J}} = \gamma \underline{\vec{E}}$$

mit reellen Werten ϵ, μ und γ führen auf

$$-\int_{\partial V} \vec{n} \cdot \underline{\vec{S}} dA = j2\omega \int_V \left(\frac{\mu}{4} |\underline{\vec{H}}|^2 - \frac{\epsilon}{4} |\underline{\vec{E}}|^2 \right) dV + \int_V \frac{1}{2\gamma} |\underline{\vec{J}}|^2 dV,$$

womit die Interpretation analog zu Aufgabe 4.2.2 verläuft: Im letzten Integral ist die zugeführte Wirkleistung P zu erkennen, während das zweite Integral (ohne j) die zugeführte Blindleistung Q angibt. Beachten Sie das Minuszeichen im Inte-

gränden und vergleichen Sie damit die zugeführte Blindleistung an einer idealen Spule ($Q = 2\omega \cdot L \hat{I}^2/4$) und an einem idealen Kondensator ($Q = -2\omega \cdot C \hat{U}^2/4$). Das erste Integral repräsentiert demnach die oben Bereich γ zugeführte komplexe Scheinleistung, so daß

$$P = \operatorname{Re} \left(- \int_{\partial\gamma} \vec{n} \cdot \vec{S} dA \right), \quad Q = \operatorname{Im} \left(- \int_{\partial\gamma} \vec{n} \cdot \vec{S} dA \right).$$

Diese Interpretation läßt sich auch für etwas allgemeinere lineare Materialgleichungen als die angegebenen aufrechterhalten. ■

A5.1.2 Einschalten eines Punktdipols:

- (i) Aus dem Hertz-Vektor leiten wir das elektrodynamische Vektorpotential ab ($\mu_0 \epsilon_0 c_0^2 = 1$),

$$\vec{A} = \frac{1}{c_0^2} \partial_t \vec{\Pi} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p'(t-r/c_0)}{r} \vec{e}_z,$$

und gelangen weiter durch Rotorbildung zur gesuchten magnetischen Flussdichte,

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = - \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{e}_z \times \vec{\nabla} \left[\frac{p'(t-r/c_0)}{r} \right] = - \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{e}_z \times \vec{e}_r \partial_r \left[\frac{p'(t-r/c_0)}{r} \right],$$

d.h. in Kugelkoordinaten (r, θ, α) wegen $\vec{e}_z \times \vec{e}_r = \sin(\theta) \vec{e}_\alpha$ zu

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{p'(t-r/c_0)}{r^2} + \frac{p''(t-r/c_0)}{c_0 r} \right] \sin(\theta) \vec{e}_\alpha.$$

- (ii) Mit dem Heaviside-Sprung $\epsilon(t)$ läßt sich der gegebene Zeitverlauf als

$$p(t) = \frac{p_0}{t_0} [t \epsilon(t) - (t-t_0) \epsilon(t-t_0)]$$

darstellen. Dann ist, falls $\delta(t) = \epsilon'(t)$ den Dirac-Stoß bezeichnet,

$$p'(t) = \frac{p_0}{t_0} [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-t_0)], \quad p''(t) = \frac{p_0}{t_0} [\delta(t) - \delta(t-t_0)]$$

und wir erhalten für $\theta = \pi/2$ und $r = 2c_0 t_0$ speziell den Ausdruck

$$\vec{B} = B_\alpha \vec{e}_\alpha,$$

$$B_\alpha = \frac{\mu_0 p_0}{4\pi(2c_0 t_0)^2} [\varepsilon(t-2t_0) + 2t_0 \delta(t-2t_0) - \varepsilon(t-3t_0) - 2t_0 \delta(t-3t_0)],$$

veranschaulicht in Abb. A5.1.2 b. ■

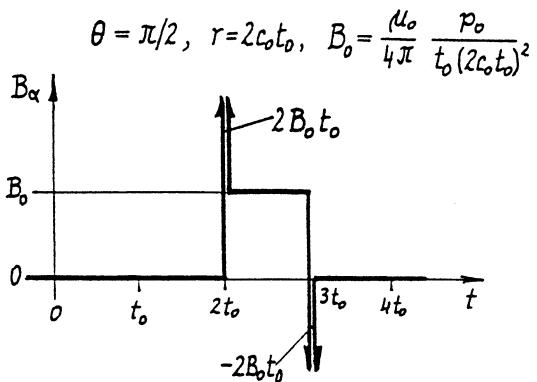


Abb. A5.1.2 b

A5.1.3 Strahlungsleistung einer Dipolantenne:

Die Strahlungsleistung ergibt sich aus dem Poynting-Vektor

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{U^2}{\mu_0 c_0 r^2} \sin^2(\theta) \cos^2(\omega t - kr) \vec{e}_r$$

durch zeitliche Mittelwertbildung,

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{U^2}{2\mu_0 c_0 r^2} \sin^2(\theta) \vec{e}_r,$$

und Integration über eine Kugelfläche mit dem Radius r ,

$$P = \int_0^\pi \vec{e}_r \cdot \langle \vec{S} \rangle \underbrace{2\pi r^2 \sin(\theta) d\theta}_{dA} = \frac{\pi U^2}{\mu_0 c_0} \underbrace{\int_0^\pi \sin^3(\theta) d\theta}_{4/3}.$$

Mit $U = 100 \text{ V}$ erhalten wir

$$P = \frac{4\pi}{3} \frac{U^2}{\mu_0 c_0} = 111 \text{ W.} ■$$

A5.1.4 Strahlungsfeld eines Hertz-Dipols:

Entsprechend der Maxwell-Gleichung $\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{H} - \partial_t \vec{D}$

gilt mit $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$ und $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ für die komplexen Amplituden ($k = \omega/c_0$)

$$\begin{aligned}\underline{\vec{J}}(\vec{r}) &= \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla}_x \vec{B}(\vec{r}) - j\omega \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) \\ &= \frac{k^2 c_0}{4\pi} \vec{\nabla}_x (\vec{e}_r \times \underline{\vec{p}} \frac{e^{-jkr}}{r}) - \frac{j k^3 c_0}{4\pi} (\vec{e}_r \times \underline{\vec{p}}) \times \vec{e}_r \frac{e^{-jkr}}{r}.\end{aligned}$$

Wir berechnen

$$\vec{\nabla}_x (\vec{e}_r \times \underline{\vec{p}} \frac{e^{-jkr}}{r}) = \frac{e^{-jkr}}{r} \vec{\nabla}_x (\vec{e}_r \times \underline{\vec{p}}) - (\vec{e}_r \times \underline{\vec{p}}) \times \vec{\nabla} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right)$$

mit

$$\vec{\nabla}_x (\vec{e}_r \times \underline{\vec{p}}) = \underline{\vec{p}} \cdot \vec{\nabla} \vec{e}_r - \underline{\vec{p}} \vec{\nabla} \cdot \vec{e}_r = \frac{1}{r} (\underline{\vec{p}} \cdot \underline{\vec{p}} \vec{e}_r \vec{e}_r) - \frac{2}{r} \underline{\vec{p}},$$

$$\vec{\nabla} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) = -\frac{e^{-jkr}}{r^2} \vec{e}_r - jk \frac{e^{-jkr}}{r} \vec{e}_r = -(1+jkr) \frac{e^{-jkr}}{r^2} \vec{e}_r,$$

also

$$\vec{\nabla}_x (\vec{e}_r \times \underline{\vec{p}} \frac{e^{-jkr}}{r}) = -\frac{e^{-jkr}}{r^2} [\underline{\vec{p}} + \underline{\vec{p}} \cdot \vec{e}_r \vec{e}_r - (1+jkr)(\vec{e}_r \times \underline{\vec{p}}) \times \vec{e}_r],$$

und erhalten

$$\begin{aligned}\underline{\vec{J}}(\vec{r}) &= \frac{k^2 c_0}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r^2} [-\underline{\vec{p}} - \underline{\vec{p}} \cdot \vec{e}_r \vec{e}_r + (1+jkr)(\vec{e}_r \times \underline{\vec{p}}) \times \vec{e}_r - jkr(\vec{e}_r \times \underline{\vec{p}}) \times \vec{e}_r] \\ &= \frac{k^2 c_0}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r^2} (-\underline{\vec{p}} - \underline{\vec{p}} \cdot \vec{e}_r \vec{e}_r + \underline{\vec{p}} - \underline{\vec{p}} \cdot \vec{e}_r \vec{e}_r).\end{aligned}$$

Die gesuchte komplexe Amplitude der Stromdichte ist daher

$$\underline{\vec{J}}(\vec{r}) = -\frac{k^2 c_0}{2\pi} \frac{e^{-jkr}}{r^2} \underline{\vec{p}} \cdot \vec{e}_r \vec{e}_r,$$

radial gerichtet und dem Betrag nach proportional zu $1/r^2$.

Die zugehörige Ladungsdichte ergibt sich aus der Kontinuitätsgleichung $\partial_t \rho = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}$ für die komplexen Amplituden,

$$\underline{\rho}(\vec{r}) = -\frac{1}{j\omega} \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{J}}(\vec{r}) = -\frac{jk}{2\pi} \vec{\nabla} \cdot (\underline{\vec{p}} \cdot \vec{e}_r \vec{e}_r \frac{e^{-jkr}}{r^2}),$$

über eine Rechnung analog zu oben als

$$\underline{\rho}(\vec{r}) = -\frac{k^2}{2\pi} \frac{e^{-jkr}}{r^2} \underline{\vec{p}} \cdot \vec{e}_r.$$

Sie kann auch aus $\rho = \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E})$ berechnet werden.

Wir bemerken den Zusammenhang $\underline{\vec{J}}(\vec{r}) = c_0 \underline{\rho}(\vec{r}) \vec{e}_r$. ■

A5.1.5 Elektrische Feldstärke eines Dipolstrahlers:

Mit Bezug auf Abb. A 5.1.5 ist

$$|\vec{e}_r \times (\vec{e}_r \times \vec{p})| = |\vec{p}_r - \vec{p}| = |\vec{p}| \sin(\theta)$$

und deshalb

$$E_{\text{eff}} = \frac{|\vec{E}|}{\sqrt{2}} = \frac{|\vec{e}_r \times (\vec{e}_r \times \vec{p})|}{4\sqrt{2} \pi \epsilon_0} \frac{k^2}{r} = \frac{|\vec{p}| k^2}{4\sqrt{2} \pi \epsilon_0} \frac{\sin(\theta)}{r}.$$

Über den angegebenen Ausdruck für die gesamte Strahlungsleistung besteht weiters der Zusammenhang

$$|\vec{p}| k^2 = \sqrt{12 \pi \epsilon_0 P / c_0}$$

Einsetzen in den Ausdruck für E_{eff} führt mit $Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0} = 1 / (c_0 \epsilon_0)$ auf den Ausdruck

$$E_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sqrt{Z_0 P} \frac{\sin(\theta)}{r}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} = 0,3455. \blacksquare$$

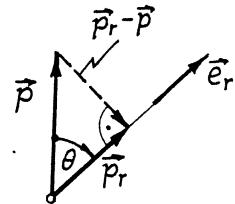


Abb. A 5.1.5

A5.1.6 Antennengewinn:

Der Maximalwert der Strahlstärke,

$$\left(\frac{dP}{d\Omega} \right)_{\max} = \frac{|\vec{p}|^2 c_0^2 k^4}{32\pi^2 \epsilon_0},$$

tritt in der Äquatorebene ($\theta = \pi/2$) auf. Für den Mittelwert erhalten wir mit $d\Omega = \sin(\theta)d\theta d\alpha$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{dP}{d\Omega} d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \frac{dP}{d\Omega} d\alpha \right) \sin(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{dP}{d\Omega} \right)_{\max} \underbrace{\int_0^\pi \sin^3(\theta) d\theta}_{4/3}. \end{aligned}$$

Damit ist der gesuchte Antennengewinn

$$g = \frac{\left(\frac{dP}{d\Omega} \right)_{\max}}{\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle} = 3/2 = 1,5. \blacksquare$$



A5.2.1 Potentiale im Wellenfeld:

(i) Aus oben Zusammenhängen

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \partial_t \vec{A}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

ergibt sich sofort

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \operatorname{Re}[\underline{\vec{E}} e^{j(\omega t - k \vec{x} \cdot \vec{r})}] \quad \text{mit } \underline{\vec{E}} = -j\omega \vec{A},$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \operatorname{Re}[\underline{\vec{B}} e^{j(\omega t - k \vec{x} \cdot \vec{r})}] \quad \text{mit } \underline{\vec{B}} = -jk \vec{x} \times \underline{\vec{A}}.$$

(ii) Die Maxwell-Gleichungen $\vec{\nabla}_x \vec{E} + \partial_t \vec{B} = \vec{J}$ und $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ sind bereits erfüllt. Aus $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$, d.h. $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ folgt die Bedingung

$$\vec{x} \cdot \underline{\vec{A}} = 0.$$

Es ist dann auch die Gleichung $\vec{\nabla}_x \vec{H} + \partial_t \vec{D} = \vec{J}$, d.h. $c_0^2 \vec{\nabla}_x \vec{B} + \partial_t \vec{E} = \vec{0}$ erfüllt, sofern $\omega = c_0 k$. Der Vektor $\underline{\vec{A}}$ muß also senkrecht zur Ausbreitungsrichtung \vec{x} liegen.

(iii) Wegen $\varphi \equiv 0$ fallen die beiden Eichungen zusammen. Gilt, wie gefordert, $\vec{x} \cdot \underline{\vec{A}} = 0$, so ist auch $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Die Potentiale sind daher sowohl Lorentz-geeicht, wie auch Maxwell-geeicht. ■

A5.2.2 Gekreuzte ebene Wellen:

(i) In kartesischer Darstellung ist

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= \cos(\alpha) \vec{e}_x + \sin(\alpha) \vec{e}_y, \quad \theta_1 = ct - z \cos(\alpha) - y \sin(\alpha), \\ \vec{x}_2 &= \cos(\alpha) \vec{e}_x - \sin(\alpha) \vec{e}_y, \quad \theta_2 = ct - z \cos(\alpha) + y \sin(\alpha). \end{aligned}$$

Die Überlagerung der beiden elektrischen Feldstärken ergibt dann (\hat{E} o.B.d.A. reell)

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \hat{E} \operatorname{Re} \left\{ e^{jk[ct-z\cos(\alpha)-y\sin(\alpha)]} + e^{jk[ct-z\cos(\alpha)+y\sin(\alpha)]} \right\} \vec{e}_x \\ &= \hat{E} \operatorname{Re} \left\{ \underbrace{\left[e^{jky\sin(\alpha)} + e^{-jky\sin(\alpha)} \right]}_{2\cos[ky\sin(\alpha)]} e^{jk[ct-z\cos(\alpha)]} \right\} \vec{e}_x. \end{aligned}$$

Somit ist die resultierende elektrische Feldstärke

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = 2\hat{E} \cos[ky \sin(\alpha)] \cos[\omega t - kz \cos(\alpha)] \vec{e}_x, \quad \omega = ck. \quad (1)$$

Analog ergibt sich mit $\vec{H}_{1,2} = \vec{x} \times \vec{E}_{1,2} / Z_0$ und $\vec{x} \times \vec{e}_x = \cos(\alpha) \vec{e}_y \mp \sin(\alpha) \vec{e}_z$ für die resultierende magnetische Feldstärke

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{2\hat{E}}{Z_0} \left\{ \cos[ky \sin(\alpha)] \cos[\omega t - kz \cos(\alpha)] \cos(\alpha) \vec{e}_y - \cos[ky \sin(\alpha)] \cos[\omega t - kz \cos(\alpha)] \sin(\alpha) \vec{e}_z \right\}. \quad (2)$$

- (ii) Die elektrische Feldstärke (1) verschwindet identisch für $\cos[ky \sin(\alpha)] = 0$. Es handelt sich dann nach um die Ebenen

$$y = n \frac{\pi/2}{k \sin(\alpha)} = n \frac{\lambda/4}{\sin(\alpha)}, \quad n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots; \quad \lambda = 2\pi/k. \blacksquare$$

A5.2.3 Energieflußdichte:

Mit $\vec{H} = \vec{x} \times \vec{E} / Z_0$, $\vec{x} = \vec{e}_z$, erhalten wir für den Poynting-Vektor

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \vec{E} \times \vec{H} = \vec{E} \times (\vec{e}_z \times \vec{E}) / Z_0 = \vec{e}_z \cdot \vec{E} \cdot \vec{E} / Z_0 \\ &= (\hat{E}^2 / Z_0) \cos^2[2\pi(t/T - z/\lambda)] \vec{e}_z, \end{aligned}$$

im räumlichen oder zeitlichen Mittel also die elektromagnetische Energieflußdichte

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{\hat{E}^2}{2Z_0} \vec{e}_z \quad \text{mit } Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}. \blacksquare$$

A5.2.4 Energie und Impuls im ebenen Wellenfeld:

Die Energie dichte der elektromagnetischen Welle ist

$$w^e = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0 c_0^2} \underbrace{(\vec{x} \times \vec{E}) \cdot (\vec{x} \times \vec{E})}_{E^2} = \epsilon_0 E^2.$$

Damit berechnen wir für die Energieflußdichte

$$\vec{q}^e = \frac{1}{\mu_0 c_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0 c_0} \vec{E} \times (\vec{x} \times \vec{E}) = \epsilon_0 c_0 E^2 \vec{x} = c_0 w^e \vec{x}$$

und für die Impulsdichte

$$\vec{g}^e = \frac{1}{c_0^2} \vec{q}^e = \frac{\omega^e}{c_0} \vec{x}.$$

Die zugehörige Impulsflußdichte folgt aus

$$\underline{\underline{p}}^e = \omega^e \underline{\underline{\delta}} - \epsilon_0 \vec{E} \otimes \vec{E} - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \otimes \vec{B}, \quad \vec{E} = E \vec{e}_E, \quad \vec{B} = B \vec{e}_B,$$

und, da $(\vec{e}_E, \vec{e}_B, \vec{x})$ ein rechtwinkliges, orthonormiertes Dreibein darstellt, über die Zerlegung

$$\underline{\underline{\delta}} = \vec{e}_E \otimes \vec{e}_E + \vec{e}_B \otimes \vec{e}_B + \vec{x} \otimes \vec{x}$$

des Einsteinsors zweiter Stufe zu

$$\underline{\underline{p}}^e = \omega^e \vec{x} \otimes \vec{x}. \blacksquare$$

A5.2.5 Feldstärken der Sonnenstrahlung:

Für ebene Freiraumwellen ergibt sich der Poynting-Vektor

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = (E^2 / Z_0) \vec{x} = Z_0 H^2 \vec{x}, \quad \vec{H} = \vec{x} \times \vec{E} / Z_0,$$

mit der charakteristischen Impedanz $Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$.

(i) Bei linearer Polarisation ist

$$\vec{E}(\theta) = \operatorname{Re}(\vec{E}_0 e^{ik\theta}), \quad \vec{E}_0 \text{ o.B.d.A. reell,}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{Z_0} E_0^2 \cos^2(k\theta) \vec{x},$$

im Mittel also

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{E_0^2}{2Z_0} \vec{x}.$$

Daraus folgt für die Amplituden der Feldstärken

$$E_0 = \sqrt{2Z_0 \langle \vec{S} \rangle} = \sqrt{2 \cdot 377 \Omega \cdot 1 \text{ kW/m}^2} = 868 \text{ V/m},$$

$$H_0 = E_0 / Z_0 = 2,30 \text{ A/m}.$$

(ii) Bei zirkularer Polarisation ist

$$|\vec{E}| = Z_0 |\vec{H}| = \text{const}, \quad \vec{S} = \langle \vec{S} \rangle = \text{const},$$

und damit

$$E_0 = |\vec{E}| = \sqrt{Z_0 |\vec{S}|} = \sqrt{377 \Omega \cdot 1 \text{ kW/m}^2} = 614 \text{ V/m},$$

$$H_0 = E_0 / Z_0 = 1,63 \text{ A/m}.$$

Die Größenordnung der elektrischen Feldstärke liegt also bei einigen hundert Volt/Meter, die der magnetischen Feldstärke bei einigen Ampere/Meter. ■

A5.2.6 Feldstärke im Rundfunksignal:

An einer Kugelfläche mit dem Radius r und der lokalen Approximation durch eine ebene, zirkular polarisierte Sinuswelle gilt

$$\langle S \rangle = \frac{P}{4\pi r^2} \approx \langle EH \rangle = \hat{E}^2 / Z_0.$$

Die Amplitude \hat{E} der elektrischen Feldstärke ist also ungefähr

$$\hat{E} \approx \sqrt{\frac{P Z_0}{4\pi r^2}} = \sqrt{\frac{10^5 \cdot 377}{4\pi \cdot 10^8}} \frac{\text{V}}{\text{m}} = 0,17 \text{ V/m}. ■$$

A5.2.7 Poynting-Fluß gekreuzter Wellen:

Wir schreiben

$$\underline{\underline{E}}_1 = \text{Re}(\vec{E}_1 e^{j\omega t}), \quad \underline{\underline{E}}_1 = \hat{E} e^{jkx} \vec{e}_y,$$

$$\underline{\underline{E}}_2 = \text{Re}(\vec{E}_2 e^{j\omega t}), \quad \underline{\underline{E}}_2 = \hat{E} e^{jky} \vec{e}_z$$

und setzen \hat{E} o.B.d.A. als reell voraus. Analog folgt

aus $\vec{H}_1 = \vec{e}_x \times \vec{E}_1 / Z_0$ und $\vec{H}_2 = \vec{e}_y \times \vec{E}_2 / Z_0$ mit $Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$

$$\underline{\underline{H}}_1 = \text{Re}(\vec{H}_1 e^{j\omega t}), \quad \underline{\underline{H}}_1 = \hat{H} e^{-jkx} \vec{e}_z,$$

$$\underline{\underline{H}}_2 = \text{Re}(\vec{H}_2 e^{j\omega t}), \quad \underline{\underline{H}}_2 = \hat{H} e^{-jky} \vec{e}_x, \quad \hat{H} = \hat{E} / Z_0.$$

Damit läßt sich nun der Zeitmittelwert des Poynting-Vektors berechnen:

$$\begin{aligned}\langle \vec{S} \rangle &= \langle \vec{E} \times \vec{H} \rangle = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \times (\vec{H}_1 + \vec{H}_2)^* \right] \\ &= \frac{1}{2} \hat{E} \hat{H} \operatorname{Re} [(\vec{e}_x e^{-jky} + \vec{e}_y e^{jky})_z \times (\vec{e}_x e^{jkx} + \vec{e}_y e^{-jky})_z^*] \\ &= \frac{1}{2} \hat{E} \hat{H} \operatorname{Re} [\vec{e}_x + \vec{e}_y - e^{-jk(x-y)} \vec{e}_z].\end{aligned}$$

An dem Ergebnis

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{\hat{E}^2}{2\zeta_0} \{ \vec{e}_x + \vec{e}_y - \cos[k(x-y)] \vec{e}_z \}$$

ist vor allem der letzte Term interessant. Er repräsentiert einen Energiefluß senkrecht zu der von den beiden Ausbreitungsrichtungen aufgespannten Ebene. ■

A5.2.8 Oberflächenwelle:

Mit $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$, $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$ und $\vec{B} = B_z(x, y, t) \vec{e}_z$ erhalten wir aus $\nabla \times \vec{H} = \partial_t \vec{D}$ den Zusammenhang

$$\begin{aligned}\partial_t \vec{E} &= c_0^2 \nabla \times \vec{B} = c_0^2 (\vec{e}_x \partial_y - \vec{e}_y \partial_x) B_z \\ &= \operatorname{Re} [c_0^2 \hat{B} (\vec{e}_x \partial_y - \vec{e}_y \partial_x) e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta y)}] \\ &= \operatorname{Re} [c_0^2 \hat{B} (-j\beta \vec{e}_x + \alpha \vec{e}_y) e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta y)}].\end{aligned}$$

Somit ist die zugehörige elektrische Feldstärkewelle

$$\vec{E}(x, y, t) = \operatorname{Re} \left[-\frac{c_0^2}{\omega} \hat{B} (\beta \vec{e}_x + j\alpha \vec{e}_y) e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta y)} \right]. ■$$

A5.2.9 Vollständige Reflexion:

Wir stellen die Welle als Überlagerung der einfallenden mit der reflektierten Welle dar,

$$\vec{E}(z, t) = \operatorname{Re} [\vec{E}_i e^{j(\omega t + kz)} + \vec{E}_r e^{j(\omega t - kz)}].$$

Da es sich um eine senkrecht einfallende, transversale Welle handelt und die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke am idealen Spiegel verschwinden muß (Sprungbedingung!), haben wir

$$\vec{E}(0,t) = \vec{0} \Rightarrow \vec{E}_r = -\vec{E}_i.$$

Daher ist

$$\begin{aligned}\vec{E}(z,t) &= \operatorname{Re}[\vec{E}_i e^{j\omega t} (e^{j kz} - e^{-j kz})] \\ &= \operatorname{Re}(2j\vec{E}_i e^{j\omega t}) \sin(kz),\end{aligned}$$

es bildet sich also eine stehende Welle aus. ■

A5.2.10 Reflexion und Transmission:

(i) Im Bereich $z < 0$ ist

$$c_1 = 1/\sqrt{\mu_1 \epsilon_1}, \quad Z_1 = \sqrt{\mu_1/\epsilon_1}, \quad \vec{x}_i = \vec{e}_z$$

und damit

$$\vec{H}_i = \frac{1}{Z_1} \vec{x}_i \times \vec{E}_i = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} f(t-z/c_1) \vec{e}_y.$$

Das gesamte Wellenfeld besteht aus der einfallenden und der reflektierten Welle im Bereich $z < 0$ und aus der transmittierten Welle im Bereich $z > 0$, wobei

$$\vec{x}_r = -\vec{e}_z, \quad \vec{x}_t = \vec{e}_z, \quad c_2 = 1/\sqrt{\mu_2 \epsilon_2}, \quad Z_2 = \sqrt{\mu_2/\epsilon_2}.$$

Die Sprungbedingungen bei $z=0$ erfordern die Stetigkeit der Tangentialkomponenten der Feldstärken,

$$z=0: \quad \vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{E}_t, \quad \vec{H}_i + \vec{H}_r = \vec{H}_t$$

mit

$$\vec{H}_r = -\frac{1}{Z_1} \vec{e}_z \times \vec{E}_r, \quad \vec{H}_t = \frac{1}{Z_2} \vec{e}_z \times \vec{E}_t.$$

Daraus folgt

$$\left. \begin{array}{l} \vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{E}_t \\ \vec{E}_i - \vec{E}_r = \vec{E}_t z_1/z_2 \end{array} \right\} \text{mit } \vec{E}_i = f(t) \vec{e}_x,$$

für $z=0$ also speziell

$$\vec{E}_r = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} f(t) \vec{e}_x, \quad \vec{E}_t = \frac{2z_2}{z_2 + z_1} f(t) \vec{e}_x.$$

Wir haben damit das Wellenfeld vollständig festgelegt:

(ii) Die reflektierte Welle besteht aus

$$\vec{E}_r = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} f(t+z/c_1) \vec{e}_x, \quad \vec{H}_r = -\frac{z_2 - z_1}{z_1(z_2 + z_1)} f(t+z/c_1) \vec{e}_y.$$

(iii) Die transmittierte Welle setzt sich aus

$$\vec{E}_t = \frac{2z_2}{z_2 + z_1} f(t-z/c_2) \vec{e}_x, \quad \vec{H}_t = \frac{2}{z_2 + z_1} f(t-z/c_2) \vec{e}_y$$

zusammen. ■

A5.2.11 Brechzahlen:

Phasengeschwindigkeit und Gruppengeschwindigkeit sind durch

$$c_{ph} = \frac{\omega}{k}, \quad c_{gr} = \frac{d\omega}{dk}$$

definiert. Daraus folgt

$$n_{gr} = c_0 \frac{dk}{d\omega} = c_0 \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\omega}{c_{ph}} \right) = \frac{d}{d\omega} (\omega n_{ph}),$$

o.l.h.

$$n_{gr}(\omega) = n_{ph}(\omega) + \omega n'_{ph}(\omega). ■$$

A5.2.12 Wellenimpedanz:

Die Maxwell-Rotorgleichungen zusammen mit
 $\vec{J} = \sigma \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$ und $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = \operatorname{Re} [\hat{E} \vec{e}_y \partial_z e^{j\omega t - \gamma z} + j\omega \mu \hat{H} e^{j\omega t - \gamma z} \vec{e}_y]$$

$$= \operatorname{Re} [(-\gamma \hat{E} + j\omega \mu \hat{H}) e^{j\omega t - \gamma z}] \vec{e}_y = \vec{0},$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \sigma \vec{E} - \epsilon \partial_t \vec{E} = \operatorname{Re} [-\hat{H} \vec{e}_x \partial_z e^{j\omega t - \gamma z} - (\sigma + j\omega \epsilon) \hat{E} e^{j\omega t - \gamma z} \vec{e}_x]$$

$$= \operatorname{Re} [(j\gamma \hat{H} - (\sigma + j\omega \epsilon) \hat{E}) e^{j\omega t - \gamma z}] \vec{e}_x = \vec{0},$$

sind dann erfüllt, wenn

$$\underline{\gamma} \hat{E} = j\omega \mu \hat{H} \quad \text{und} \quad \underline{\gamma} \hat{H} = (\sigma + j\omega \epsilon) \hat{E},$$

gleichbedeutend mit

$$\underline{Z} = \frac{\hat{E}}{\hat{H}} = \frac{j\omega \mu}{\underline{\gamma}} = \frac{\underline{\gamma}}{\sigma + j\omega \epsilon}.$$

Daraus folgt $\underline{\gamma}^2 = j\omega \mu (\sigma + j\omega \epsilon)$ und

$$\underline{Z} = \sqrt{\frac{j\omega \mu}{\sigma + j\omega \epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon - j\sigma/\omega}}.$$

Für $\sigma \ll \omega \epsilon$ reduziert sich diese Wellenimpedanz auf den bekannten Ausdruck $\underline{Z} = \sqrt{\mu/\epsilon}$. ■

A5.2.13 Eindringtiefe:

(i) Die komplexe Gleichung

$$\underline{\gamma}^2 = (\alpha + j\beta)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + j2\alpha\beta \stackrel{!}{=} j\mu\sigma\omega - \mu\epsilon\omega^2$$

entspricht den beiden reellen Gleichungen

$$\alpha^2 - \beta^2 = -\mu\epsilon\omega^2, \quad 2\alpha\beta = \mu\sigma\omega.$$

Elimination von β führt auf die biquadratische Gleichung

$$\alpha^4 + \mu\epsilon\omega^2\alpha^2 - \left(\frac{1}{2}\mu\sigma\omega\right)^2 = 0$$

mit der Lösung

$$\alpha(\omega) = \omega \sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2} - 1 \right]} .$$

(ii) Im Fall $\sigma \gg \omega\epsilon$, d.h. $\omega T_R \ll 1$ mit der Relaxationszeitkonstanten $T_R = \epsilon/\sigma$, gilt

$$\alpha(\omega) \approx \omega \sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\sigma}{\omega\epsilon}} = \sqrt{\frac{1}{2} \omega \mu \sigma} .$$

Die Eindringtiefe

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \approx \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}}$$

entspricht jener der Diffusionstheorie (dominant magnetische Felder).

Im Fall $\sigma \ll \omega\epsilon$, d.h. $\omega T_R \gg 1$, erhalten wir dagegen

$$\alpha(\omega) \approx \omega \sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{\frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2 - 1 \right]} = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} ,$$

für die Eindringtiefe also

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \approx \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} . \blacksquare$$

A5.2.14 Chirale Medien:

(i) Die Maxwell-Rotorgleichungen $\vec{\nabla}_x \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$ und $\vec{\nabla}_x \vec{H} = \partial_t \vec{D}$ entsprechen den algebraischen Gleichungen

$$k \vec{x} \times \vec{\underline{\epsilon}} = \omega \vec{\underline{B}} , \quad (1)$$

$$k \vec{x} \times \vec{\underline{D}} = -\omega \vec{\underline{D}} \quad (2)$$

für die komplexen vektoriellen Amplituden der ebenen Sinuswellen. Einsetzen der angegebenen Materialgleichungen in (2) liefert

$$k \vec{x} \times \left(j\nu \vec{\underline{\epsilon}} + \frac{1}{\mu} \vec{\underline{B}} \right) = -\omega (\epsilon \vec{\underline{\epsilon}} + j\nu \vec{\underline{B}})$$

und, wenn wir daraus \vec{B} mit Hilfe von (1) eliminieren,

$$(k^2 - \mu\epsilon\omega^2)\underline{\vec{\epsilon}} = j2\mu\nu\omega k \vec{x} \times \underline{\vec{\epsilon}}. \quad (3)$$

Dabei wurde noch die ebenfalls in (1) und (2) und der ersten Materialgleichung enthaltene Transversalitätsbedingung $\vec{x} \cdot \underline{\vec{\epsilon}} = 0$ benutzt. Gl. (3) ist äquivalent

$$\vec{x} \times \underline{\vec{\epsilon}} = j\underline{\vec{\epsilon}} \quad \text{und} \quad k^2 - \mu\epsilon\omega^2 = -2\mu\nu\omega k, \quad (4)$$

entsprechend einer linkszirkular polarisierten Welle,
oder

$$\vec{x} \times \underline{\vec{\epsilon}} = -j\underline{\vec{\epsilon}} \quad \text{und} \quad k^2 - \mu\epsilon\omega^2 = 2\mu\nu\omega k, \quad (5)$$

entsprechend einer rechtszirkular polarisierten Welle.

(ii) Auflösen von (4)₂ und von (5)₂ jeweils nach $k > 0$
liefert mit den Abkürzungen

$$c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}, \quad \alpha = \nu\sqrt{\mu/\epsilon}$$

für die linkszirkular polarisierte Welle

$$k(\omega) = (\sqrt{1+\alpha^2} - \alpha) \frac{\omega}{c}$$

und für die rechtszirkular polarisierte Welle

$$k(\omega) = (\sqrt{1+\alpha^2} + \alpha) \frac{\omega}{c}.$$

Die beiden Moden besitzen demnach i.a. unterschiedliche Phasengeschwindigkeiten ("optische Aktivität"). ■

A5.2.15 Dispersion:

(i) Mit $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{jk\vec{x} \cdot \vec{r}}$ (homogene ebene Sinuswellen)
folgt aus der angegebenen reduzierten Wellengleichung sofort die gesuchte Dispersionsbeziehung

$$\omega^2 - \omega_p^2 - c_0^2 k^2 = 0$$

entsprechend

$$\omega = \sqrt{\omega_p^2 + c_0^2 k^2} \quad \text{oder} \quad k = \frac{1}{c_0} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}.$$

(ii) Abb. A5.2.15 zeigt das zugehörige Dispersionsdiagramm.

Für Kreisfrequenzen unterhalb ω_p ist eine Wellenausbreitung dieses Typs nicht möglich (Evaneszenz).

Für $\omega > \omega_p$ gibt es ungekämpfte, aber dispergierende Wellen. Für $\omega \gg \omega_p$ verhalten sich die Wellen wie im leeren Raum. ■

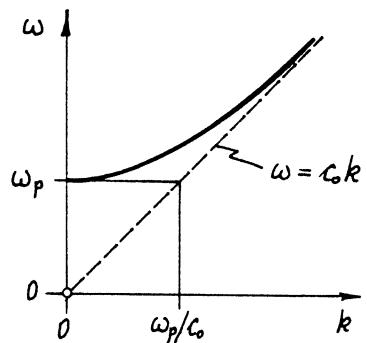


Abb. A5.2.15

A5.2.16 Ionisiertes Gas:

Wir schreiben die angegebene Dispersionsbeziehung mit $\lambda_0 = c_0/f$ in der Form

$$k = \frac{2\pi}{c_0} \sqrt{f^2 - f_p^2}$$

und erhalten daraus unter Beachtung von $\omega = 2\pi f$

(i) für die Phasengeschwindigkeit

$$c_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{c_0}{\sqrt{1 - (f_p/f)^2}}$$

(ii) und für die Gruppengeschwindigkeit

$$c_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{dk/d\omega} = c_0 \sqrt{1 - (f_p/f)^2}.$$

Die Frequenzgänge der beiden Geschwindigkeiten zeigt Abb. A5.2.16. Für $f < f_p$ findet keine Wellenausbreitung statt. Die Feldkomponenten klingen dann räumlich exponentiell mit der charakteristischen Länge

$$\delta = \frac{c_0}{2\pi \sqrt{f_p^2 - f^2}}$$

ab (Evaneszenz). ■

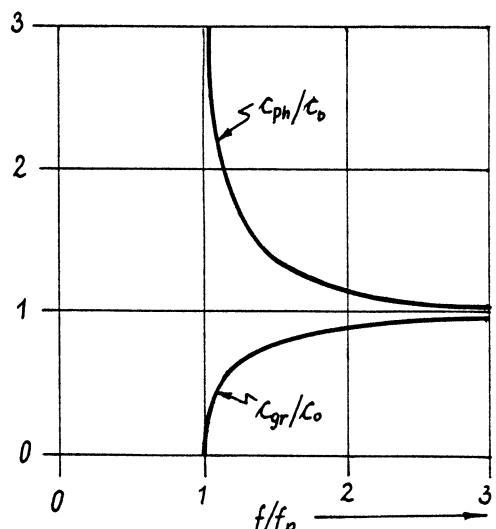


Abb. A5.2.16

A5.2.17 Rechteck-Hohlleiter:

Es ist jeweils ein Eigenwertproblem für den Rechteckquerschnitt zu lösen, und zwar

$$TM: (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \kappa^2) \Psi = 0, \text{ Randbed. } \Psi = 0 \quad (\Psi = \mathcal{E}_z),$$

$$TE: (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \kappa^2) \Psi = 0, \text{ Randbed. } \partial_n \Psi = 0 \quad (\Psi = \mathcal{H}_z).$$

Ein Produktansatz $\Psi(x, y) = f(x)g(y)$ liefert mit dem üblichen Separationsargument,

$$\underbrace{f''/f}_{-\alpha^2} + \underbrace{g''/g}_{-\beta^2} + \kappa^2 = 0,$$

Lösungen des Typs

$$\Psi(x, y) = [C_\alpha \cos(\alpha x) + D_\alpha \sin(\alpha x)][E_\beta \cos(\beta y) + F_\beta \sin(\beta y)].$$

Aus den TM - Randbedingungen erhalten wir

$$\Psi(0, y) = \Psi(a, y) = 0 \Rightarrow C_\alpha = 0, D_\alpha \sin(\alpha a) = 0 \Rightarrow \alpha a = m\pi, m=1, 2, \dots,$$

$$\Psi(x, 0) = \Psi(x, b) = 0 \Rightarrow E_\beta = 0, F_\beta \sin(\beta b) = 0 \Rightarrow \beta b = n\pi, n=1, 2, \dots,$$

also die Eigenformen

$$\Psi_{mn}(x, y) = E_{mn} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b),$$

und aus den zugehörigen Eigenwerten

$$\kappa_{mn}^2 = \pi^2 (m^2/a^2 + n^2/b^2) = (\omega_{mn}/c_0)^2,$$

$$m = 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, \dots$$

die entsprechenden Grenzfrequenzen

$$f_{mn} = \frac{c_0}{2} \sqrt{m^2/a^2 + n^2/b^2}.$$

Der Kleinstwert ergibt sich für $m = n = 1$ zu

$$f_{1,1} = \frac{c_0}{2} \sqrt{1/a^2 + 1/b^2} = 6,7 \text{ GHz.}$$

Die TE-Randbedingungen führen auf

$$\begin{aligned}\partial_x \Psi(0, y) = \partial_x \Psi(a, y) = 0 &\Rightarrow \alpha C_\alpha \sin(\alpha a) = 0, \quad \alpha D_\alpha = 0 \\ &\Rightarrow \alpha a = m\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_y \Psi(x, 0) = \partial_y \Psi(x, b) = 0 &\Rightarrow \beta E_\beta \sin(\beta b) = 0, \quad \beta F_\beta = 0 \\ &\Rightarrow \beta b = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots,\end{aligned}$$

also die Eigenformen

$$\Psi_{mn}(x, y) = H_{mn} \cos(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b).$$

Den zugehörigen Eigenwerten

$$\omega_{mn}^2 = \pi^2 (m^2/a^2 + n^2/b^2) = (\omega_{mn}/c_0)^2,$$

$$m = 0, 1, 2, \dots; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

entsprechen die Grenzfrequenzen

$$f_{mn} = \frac{c_0}{2} \sqrt{m^2/a^2 + n^2/b^2}.$$

$m = n = 0$ gehört zu einem trivialen Modus. Die ersten nichttrivialen Moden ergeben sich für $m = 0, n = 1$ oder $m = 1, n = 0$. Wegen $a > b$ liefert der zweite Fall die kleinere Grenzfrequenz, nämlich

$$f_{1,0} = \frac{c_0}{2a} = 3 \text{ GHz.} \blacksquare$$

A5.2.18 Hohlraumresonator:

- (i) Zu der Wellenlänge $\lambda = 2l = 0,2 \text{ m}$ oder stehenden TEM-Welle gehört die Frequenz

$$f = c_0/\lambda = 1,5 \text{ GHz.}$$

(ii) Zu jeder TEM-Welle gehört quer zur Ausbreitungsrichtung eine ebene, quasi-elektrostatische Feldkonfiguration. In unserer kreiszylindrischen Anordnung bedeutet dies

$$\vec{E}(\rho, z, t) = F(z, t) \frac{\hat{e}_\rho}{\rho},$$

wobei F als Lösung der Gleichung $(c_0^2 \partial_z^2 - \partial_t^2)F = 0$ eine stehende Sinuswelle repräsentieren soll.

Wegen $\vec{E}(\rho, \pm l/2, t) = \vec{0}$ erhalten wir bei passender Wahl des Zeitnullpunktes

$$\vec{E}(\rho, z, t) = \frac{C}{\rho} \cos(kz) \cos(\omega t) \hat{e}_\rho, \quad k = \pi/l,$$

und bestimmen die Konstante C aus

$$\hat{U} = \int_{d/2}^{D/2} E_\rho(\rho, 0, 0) d\rho = C \ln(D/d).$$

Damit ist der Ausdruck für die elektrische Feldstärke vervollständigt,

$$\vec{E}(\rho, z, t) = \frac{\hat{U} \cos(\pi z/l)}{\rho \ln(D/d)} \cos(\omega t) \hat{e}_\rho.$$

Die zugehörige magnetische Flussdichte ergibt sich bequem aus dem lokalen Induktionsgesetz

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \hat{e}_\alpha \partial_z E_\rho = - \frac{\hat{U} k \sin(kz)}{\rho \ln(D/d)} \cos(\omega t) \hat{e}_\alpha = - \partial_t \vec{B}$$

zusammen mit $k = \omega/c_0$ zu

$$\vec{B}(\rho, z, t) = \frac{1}{c_0} \frac{\hat{U} \sin(\pi z/l)}{\rho \ln(D/d)} \sin(\omega t) \hat{e}_\alpha.$$

Die zugehörigen Vektorlinien sind konzentrische Kreise. ■

A5.2.19 Energiefluß für einen TM-Modus:

Der Zeitmittelwert der longitudinalen Projektion des Poynting - Vektors lässt sich in der Form

$$\begin{aligned}\langle S_z \rangle &= \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} (\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}^*) \cdot \vec{e}_z \right] = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\zeta} [\vec{\mathcal{E}} \times (\vec{e}_z \times \vec{\mathcal{E}}_1^*)] \cdot \vec{e}_z \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\zeta} \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{E}}_1^* \right) = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2\zeta} \frac{k^2}{\kappa^4} (\vec{\nabla}_1 \mathcal{E}_z) \cdot (\vec{\nabla}_1 \mathcal{E}_z^*) \right] \\ &= \frac{\epsilon \omega k}{2\kappa^4} (\vec{\nabla}_1 \mathcal{E}_z) \cdot (\vec{\nabla}_1 \mathcal{E}_z^*)\end{aligned}$$

schreiben. Die Integration über Ω und das Anwenden der ersten Green - Identität führt dann auf

$$\begin{aligned}P &= \int_{\Omega} \langle S_z \rangle dA = \frac{\epsilon \omega k}{2\kappa^4} \left[\int_{\partial\Omega} \underset{\substack{\uparrow \\ =0 \text{ an } \partial\Omega}}{\mathcal{E}_z} \partial_n \mathcal{E}_z^* ds - \int_{\Omega} \underbrace{\mathcal{E}_z \nabla_1^2 \mathcal{E}_z^*}_{-\kappa^2 \mathcal{E}_z^*} dA \right] \\ &= \frac{\epsilon \omega k}{2\kappa^4} \int_{\Omega} \mathcal{E}_z \mathcal{E}_z^* dA.\end{aligned}$$

Dies ist die angegebene Formel. ■



A5.3.1 TEM-Wellenimpedanzen:

- (a) Für die Koaxialleitung ergibt sich mit den Ausdrücken

$$C' = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(D/d)}, \quad L' = \frac{\mu}{2\pi} \ln(D/d)$$

für den Kapazitätsbelag und den (äußeren) Induktivitätsbelag die Wellenimpedanz

$$Z_w = \sqrt{L'/C'} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\ln(D/d)}{2\pi} = Z_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \frac{\ln(D/d)}{2\pi}, \quad Z_0 = 376,7 \Omega,$$

und speziell

$$Z_w = 138 \Omega.$$

- (b) Ähnlich erhalten wir für die Zweidrahtleitung

$$C' \approx \frac{\pi\epsilon}{\ln(2D/d)}, \quad L' \approx \frac{\mu}{\pi} \ln(2D/d),$$

$$Z_w \approx Z_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \frac{\ln(2D/d)}{\pi} = 359 \Omega,$$

- (c) und für die Streifenleitung

$$C' \approx \epsilon b/a, \quad L' \approx \mu a/b,$$

$$Z_w \approx Z_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \frac{a}{b} = 37,7 \Omega.$$

Beachten Sie den Zusammenhang

$$Z_w = c L' = 1/(c C'). \blacksquare$$

A5.3.2 Leitungsparameter:

- (i) Dem Feldbild entnehmen wir: Zu den $n_1 = 6$ elektrischen Spannungsschichten gehört die Gesamtspannung $U = n_1 \Delta \varphi$ zwischen den beiden Bahnen. Weiters gibt es $n_2 = 13$ elektrische Flußröhren, somit den gesamten längenbezogenen

genen elektrischen Fluss $\Psi' = n_2 \epsilon_0 \Delta \varphi$ von einer Bahn zur anderen. Daraus folgt für den Kapazitätsbelag

$$C' = \frac{\Psi'}{U} = \frac{n_2}{n_1} \epsilon_0 = \frac{13}{6} 8,854 \text{ pF/m} = 19,2 \text{ pF/m}.$$

(ii) Aus der Beziehung $L'C' = \mu \epsilon = 1/c^2$ ergibt sich für den (äußerer) Induktivitätsbelag

$$L' = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{C'} = \frac{n_1}{n_2} \mu_0 = \frac{6}{13} \frac{4\pi}{10} \mu\text{H/m} = 0,580 \mu\text{H/m}.$$

(iii) Die zugehörige Wellenimpedanz ist schließlich

$$Z_w = \sqrt{L'/C'} = \frac{n_1}{n_2} Z_0 = \frac{6}{13} 376,7 \Omega = 174 \Omega. \blacksquare$$

A5.3.3 Ein Leitungsproblem:

(i) Wir nehmen, ausgehend von der angegebenen Korrespondenz, die Rücktransformation schrittweise vor:

$$X(s) := \frac{\sinh(\xi s)}{\cosh(s)} \rightarrow X_o(\tau) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \{ \delta[\tau - (2n+1-\xi)] - \delta[\tau - (2n+1+\xi)] \},$$

$$\frac{1}{s} X(s) \rightarrow X_1(\tau) = \int_0^\tau X_o(\tau') d\tau' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \{ \varepsilon[\tau - (2n+1-\xi)] - \varepsilon[\tau - (2n+1+\xi)] \},$$

$$\frac{1}{s^2} X(s) \rightarrow X_2(\tau) = \int_0^\tau X_1(\tau') d\tau' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \{ [\tau - (2n+1-\xi)] \varepsilon[\tau - (2n+1-\xi)] \\ - [\tau - (2n+1+\xi)] \varepsilon[\tau - (2n+1+\xi)] \}.$$

Somit ist die gesuchte bezogene Spannungsverteilung

$$u(\xi, \tau) = \xi + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (-1)^n [\tau - \xi - (2n+1)] \varepsilon[\tau - \xi - (2n+1)] \right. \\ \left. - (-1)^n [\tau + \xi - (2n+1)] \varepsilon[\tau + \xi - (2n+1)] \right\}.$$

Sie besteht in der Summe aus hin- und rücklaufenden Komponenten.

(ii) Es ist speziell

$$U(1, \tau) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \{ [\tau - 2(n+1)] \varepsilon[\tau - 2(n+1)] - (\tau - 2n) \varepsilon(\tau - 2n) \}$$

$$= 1 - \tau \varepsilon(\tau) - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2(\tau - 2n) \varepsilon(\tau - 2n),$$

dargestellt in Abb. A5.3.3. ■

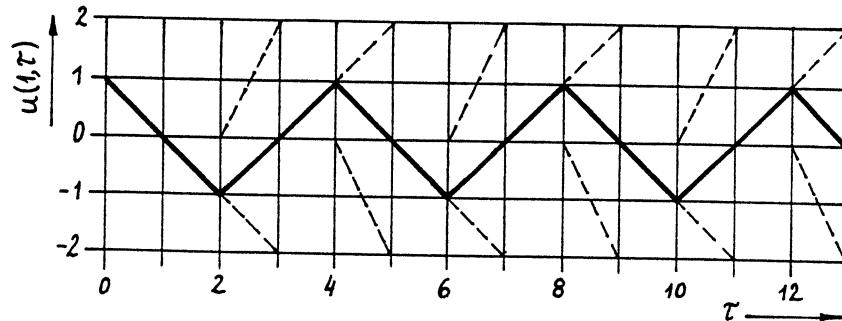


Abb. A5.3.3

A5.3.4 Sprungwelle:

Wir stellen die Wellen als Überlagerung von hin- und rücklaufenden Komponenten dar,

$$U(z, t) = U_1(t - z/c) + U_2(t + z/c), \quad U_1(t) = \hat{U}_1 \varepsilon(t),$$

$$I(z, t) = I_1(t - z/c) + I_2(t + z/c),$$

wobei

$$I_1 = U_1/Z_w, \quad I_2 = -U_2/Z_w.$$

Mit Bezug auf Abb. A5.3.4 f gilt speziell am Leitungsausgang $z = 0$

$$U(t) = U(0, t) = U_1(t) + U_2(t), \quad (1)$$

$$I(t) = I(0, t) = I_1(t) + I_2(t) = [U_1(t) - U_2(t)]/Z_w. \quad (2)$$

Weiters ist

$$I(t) = U(t)/R + C \dot{U}(t). \quad (3)$$

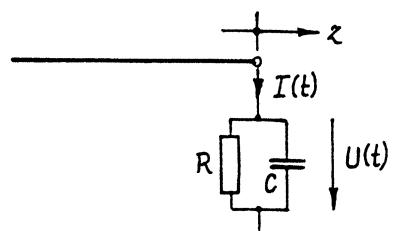


Abb. A5.3.4 f

Elimination von $I(t)$ aus (3) mit Hilfe von (2) und (1) liefert

$$C \dot{U}(t) + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{Z_w} \right) U(t) = \frac{2}{Z_w} U_1(t)$$

oder, mit $U_1(t) = \hat{U}_1 \epsilon(t)$,

$$\frac{C}{1/R + 1/Z_w} \dot{U}(t) + U(t) = \frac{2 \hat{U}_1}{1 + Z_w/R} \epsilon(t).$$

Dies ist eine Differentialgleichung für die gesuchte Ausgangsspannung. Sie besitzt mit der Anfangsbedingung $U(0+) = 0$ die Lösung

$$U(t) = U_\infty \cdot (1 - e^{-t/\tau}) \epsilon(t),$$

wobei

$$U_\infty = \frac{2 \hat{U}_1}{1 + Z_w/R}, \quad \tau = \frac{C}{1/R + 1/Z_w}.$$

Beachten Sie die Sonderfälle $C = 0$, $R \rightarrow \infty$ und $R = Z_w$. ■

A5.3.5 Übertragener Spannungspuls:

Von links kommend fällt der Puls $U_1^{(1)}$ ein. Er wird an der ersten Verbindungsstelle teilweise reflektiert und teilweise übertragen (Abb. A5.3.5b), wobei die Zusammenhänge

$$\begin{aligned} U_1^{(2)} &= U_1^{(1)} + U_2^{(1)}, \\ I_1^{(2)} &= I_1^{(1)} + I_2^{(1)} \Rightarrow U_1^{(2)}/Z_w = (U_1^{(1)} - U_2^{(1)})/Z_w \end{aligned} \quad \left\{ \left(1 + \frac{Z_w^{(1)}}{Z_w^{(2)}} \right) U_1^{(2)} = 2 U_1^{(1)} \right\}$$

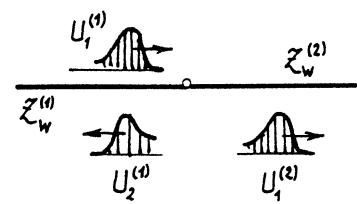


Abb. A5.3.5b

bestehen. Für den Scheitelwert des übertragenen Spannungspulses gilt demnach

$$\hat{U}_1^{(2)} = \frac{2}{1 + Z_w^{(1)}/Z_w^{(2)}} \hat{U}_1^{(1)}. \quad (1)$$

Dieser Puls trifft auf die zweite Verbindungsstelle und wird dort teilweise reflektiert, teilweise übertragen (Abb. A 5.3.5 c). Für den Scheitelwert des übertragenen Spannungspulses haben wir analog zu (1)

$$\hat{U}_1^{(3)} = \frac{2}{1 + Z_w^{(2)}/Z_w^{(3)}} \hat{U}_1^{(2)}, \quad (2)$$

zusammen also

$$\begin{aligned} \hat{U}_1^{(3)} &= \frac{2}{1 + Z_w^{(2)}/Z_w^{(3)}} \cdot \frac{2}{1 + Z_w^{(1)}/Z_w^{(2)}} \hat{U}^{(1)} = \frac{2}{1 + 50/400} \cdot \frac{2}{1 + 400/50} \cdot 10 \text{kV} \\ &= 3,95 \text{kV}. \end{aligned}$$

Diesen ersten Puls folgen wegen späterer Reflexionen noch weitere Pulse nach. ■

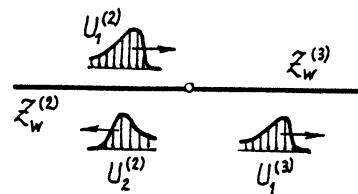


Abb. A 5.3.5 c

A5.3.6 Reflexionsfreie Anpassung:

Wir betrachten das Leitungsstück (2) als Zweitor und erhalten mit $\gamma = j\beta = j\omega/c^{(2)}$ für die komplexen Effektivwerte

$$\underline{U}(0) = \cos(\beta l) \underline{U}(l) + j \sin(\beta l) Z_w^{(2)} \underline{I}(l),$$

$$\underline{I}(0) = j \sin(\beta l) \underline{U}(l)/Z_w^{(2)} + \cos(\beta l) \underline{I}(l).$$

Da in den Bereichen (1) und (3) keine rücklaufenden Komponenten bestehen sollen, gilt überdies

$$\underline{U}(0) = Z_w^{(1)} \underline{I}(0), \quad \underline{U}(l) = Z_w^{(3)} \underline{I}(l)$$

und damit die Bedingung

$$Z_w^{(1)} = \frac{\cos(\beta l) Z_w^{(3)} + j \sin(\beta l) Z_w^{(2)}}{j \sin(\beta l) Z_w^{(3)}/Z_w^{(2)} + \cos(\beta l)}$$

entsprechend

$$(Z_w^{(1)} - Z_w^{(3)}) \cos(\beta l) = 0, \quad (Z_w^{(1)} Z_w^{(3)}/Z_w^{(2)} - Z_w^{(2)}) \sin(\beta l) = 0.$$

Ist $Z_w^{(1)} \neq Z_w^{(2)}$, so folgt daraus einerseits $\cos(\beta l) = 0$, d.h.
die erforderliche Leitungslänge

$$l = \lambda/4 = c^{(2)}/(4f)$$

oder ungeradzahlige Vielfache davon; andererseits ergibt sich die erforderliche Wellenimpedanz

$$Z_w^{(2)} = \sqrt{Z_w^{(1)} Z_w^{(3)}}$$

als geometrisches Mittel. ■

A5.3.7 Anpassung durch Querwiderstand:

(i) Die allgemeine Lösung der Leitungsgleichungen,

$$\left. \begin{array}{l} I(z,t) = I_1(t-z/c) + I_2(t+z/c) \\ U(z,t) = U_1(t-z/c) + U_2(t+z/c) \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} U_1 = Z_w I_1, \\ U_2 = -Z_w I_2 \end{array}$$

gilt auf beiden Abschnitten mit den jeweiligen Werten Z_w und c . Bei $z=0$ sind die Übergangsbedingungen

$$I^{(1)}(0,t) = I^{(2)}(0,t) + I_R(t),$$

$$U^{(1)}(0,t) = U^{(2)}(0,t) = R I_R(t)$$

zu erfüllen; außerdem sollen auf keinem der beiden Abschnitte rücklaufende Komponenten bestehen, d.h.

$$U_2^{(1)}(t) = 0, \quad U_2^{(2)}(t) = 0.$$

Daraus folgt

$$U_1^{(1)}(t) = U_1^{(2)}(t) = R I_R(t),$$

$$U_1^{(1)}(t)/Z_w^{(1)} = (1/Z_w^{(2)} + 1/R) U_1^{(1)}(t),$$

also die Beziehung

$$1/R = 1/Z_w^{(1)} - 1/Z_w^{(2)}$$

zur Bestimmung des Widerstandes R . Er ist für $Z_w^{(1)} \leq Z_w^{(2)}$ realisierbar.

(ii) Der Querstrom ergibt sich zu

$$I_R(t) = U_1^{(1)}(t)/R = (1/Z_w^{(1)} - 1/Z_w^{(2)}) U_1^{(1)}(t). ■$$

A5.3.8 Leitungsabzweig:

Mit den Bezeichnungen aus Abb. A 5.3.8 B haben wir an der Verzweigungsstelle die Bedingungen

$$\left. \begin{aligned} U_1 + U_2 &= U_3 = U_5, \\ I_1 + I_2 &= I_3 + I_5 \Rightarrow U_1 - U_2 = U_3 + U_5 \end{aligned} \right\}$$

zu erfüllen. Daraus folgt ohne Weiteres

$$U_2 = -\frac{1}{3} U_1,$$

für die reflektierte und

$$U_3 = U_5 = \frac{2}{3} U_1,$$

für die beiden übertragenen Spannungswellen. ■

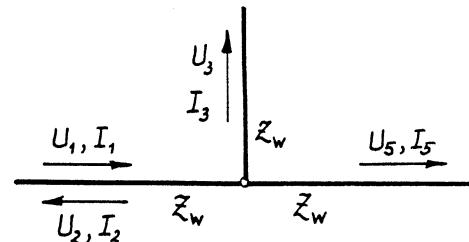


Abb. A 5.3.8 B

A5.3.9 Thomson-Kabel:

Mit Bezug auf die Ersatzschaltung Abb. A 5.3.9 eines Leitungselementes schreiben wir

$$\begin{aligned} -U + R'dz(I + \partial_z I dz) + U + \partial_z U dz &= 0, \\ -I + C'dz \partial_t U + I + \partial_z I dz &= 0 \end{aligned}$$

und erhalten daraus

$$\partial_z^2 U + R'C' \partial_t U = 0,$$

nach Elimination von I also

$$\partial_z^2 U = R'C' \partial_t U.$$

Diese Differentialgleichung ist vom parabolischen Typus. Es handelt sich um eine Diffusionsgleichung, nicht um eine Wellengleichung. ■

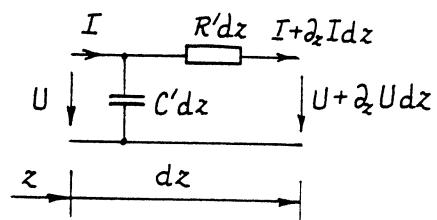


Abb. A 5.3.9

A5.3.10 Spannungspuls an Thomson-Kabel:

(i) Der Spannungsverlauf $U(z, t_1)$ für einen festen Zeitpunkt ist in Abb. A5.3.10 angegeben.

(ii) Aus der Bedingung

$$\partial_z U(z, t_1) = \frac{\Phi_0}{t_1 \sqrt{\pi}} (1 - 2\zeta^2) e^{-\zeta^2} \partial_z \zeta = U(z, t_1) \frac{1 - 2\zeta^2}{z} \stackrel{!}{=} 0$$

folgt

$$\zeta = \frac{z_1}{2} \sqrt{\frac{R'C'}{t_1}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

d.h. der Extremwert von $U(z, t_1)$ tritt an der Stelle

$$z_1 = \sqrt{\frac{2t_1}{R'C'}}$$

auf und beträgt

$$U(z_1, t_1) = \frac{\Phi_0}{t_1 \sqrt{2\pi e}}.$$

(iii) Der Extremwert läuft mit

$$v(t) = \left. \frac{dz_1}{dt_1} \right|_{t_1=t} = \frac{1}{\sqrt{2R'C't}}.$$

Diese Geschwindigkeit ist anfänglich sehr groß und nimmt mit dem flacher werdenden Puls ab. Es handelt sich hier nicht um eine Wellenausbreitung im eigentlichen Sinn, sondern um einen Diffusionsvorgang. ■

A5.3.11 Gleichstromkabel:

Ausgehend von der Ersatzschaltung Abb. A5.3.11B eines Leitungselementes erhalten wir

$$\frac{dU}{dx} = -R'I, \quad \frac{dI}{dx} = -G'U$$

$$U(0) = U_0, \quad U(l) = R_A I(l)$$

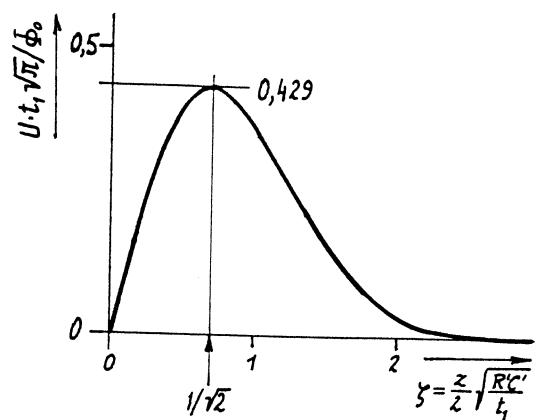


Abb. A5.3.10

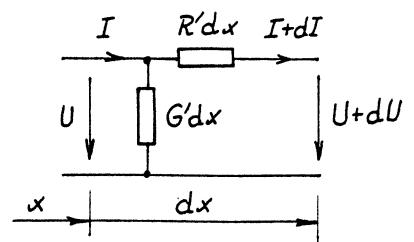


Abb. A5.3.11B

und daraus

$$0 \leq x \leq l : \quad \frac{d^2 U}{dx^2} = \alpha^2 U, \quad \alpha = \sqrt{R'G'},$$

$$x = 0 : \quad U = U_0,$$

$$x = l : \quad U = -\frac{R_A}{R'} \frac{dU}{dx}.$$

Die Anpassung der allgemeinen Lösung

$$U(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}$$

an die Randbedingungen liefert mit den Abkürzungen

$$\alpha = \sqrt{R'G'}, \quad \beta = \alpha R_A / R' = R_A \sqrt{G'/R'}$$

den gesuchten Spannungsverlauf

$$U(x) = \frac{(1+\beta)e^{\alpha(l-x)} - (1-\beta)e^{-\alpha(l-x)}}{(1+\beta)e^{\alpha l} - (1-\beta)e^{-\alpha l}} U_0 = \frac{\sinh[\alpha(l-x)] + \beta \cosh[\alpha(l-x)]}{\sinh(\alpha l) + \beta \cosh(\alpha l)} U_0,$$

dargestellt in Abb. A 5.3.11 c. ■

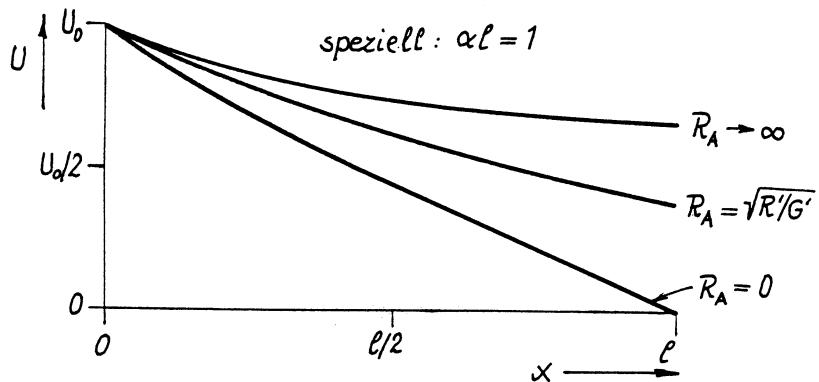


Abb. A 5.3.11c

A5.3.12 Leitungsimpedanzen:

Aus den Zweitordgleichungen der Leitung erhalten wir die allgemeinen Ausdrücke für die Eingangsimpedanzen bei leerlaufendem bzw. bei kurzgeschlossenem Ausgang,

$$\underline{Z}_{E,LL} = \underline{Z}_w \coth(yl), \quad \underline{Z}_{E,KS} = \underline{Z}_w \tanh(yl).$$

Daraus folgt sofort für die Wellenimpedanz

$$\underline{Z}_w = \sqrt{\underline{Z}_{E,LL} \cdot \underline{Z}_{E,KS}} = (377 - j157)\Omega = 408\Omega e^{-j23^\circ},$$

und über

$$\tanh(\underline{y}\ell) = \sqrt{\underline{Z}_{E,KS}/\underline{Z}_{E,LL}}$$

für den komplexen Ausbreitungskoeffizienten

$$\underline{y} = \frac{1}{\ell} \operatorname{artanh} \sqrt{\underline{Z}_{E,KS}/\underline{Z}_{E,LL}} = (0,504 + j1,160) \cdot 10^{-3} / \text{km}.$$

Tatsächlich ist die Leitung relativ kurz. Sie gestattet beispielsweise die Näherung $\tanh(\underline{y}\ell) \approx \underline{y}\ell$ und damit auch

$$\underline{Z}_{E,LL} \approx 1/(Y'\ell), \quad \underline{Z}_{E,KS} \approx Z'\ell. \blacksquare$$

A5.3.13 Energiebilanz:

Nach Multiplikation der beiden angegebenen Leitungsgleichungen mit I bzw. mit U und Addition erhalten wir

$$I \partial_z U + U \partial_z I + L' I \partial_t I + C' U \partial_t U + R' I^2 + G' U^2 = 0,$$

d.h.

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} L' I^2 + \frac{1}{2} C' U^2 \right) + \partial_z (UI) + R' I^2 + G' U^2 = 0.$$

Dieser Ausdruck besitzt bereits die gewünschte Form, wobei die Identifikationen

$$W' = L' I^2/2 + C' U^2/2 \quad \text{Energiebelag,}$$

$$Q = UI \quad \text{Energiefluß,}$$

$$P_v' = R' I^2 + G' U^2 \quad \text{Verlustleistungsbelag}$$

zu treffen sind. ■

A5.3.14 Leistungsverlauf:

Wegen des Abschlusses mit der Wellenimpedanz \underline{Z}_w haben wir für den Verlauf der komplexen Effektivwerte

$$\left. \begin{array}{l} \underline{U}(z) = \underline{U}_1 e^{-\gamma z}, \\ \underline{I}(z) = \underline{I}_1 e^{-\gamma z}, \end{array} \right\} \quad \underline{U}_1 = \underline{Z}_w \underline{I}_1, \quad \gamma = \alpha + j\beta,$$

$$\underline{U}(0) = \underline{U}_1 = U.$$

Mit der Polarform

$$\underline{Z}_w = |\underline{Z}_w| e^{j\varphi_w}$$

der Wellenimpedanz verläuft die komplexe Scheinleistung gemäß

$$\underline{S}(z) = \underline{U}(z) \underline{I}^*(z) = \frac{U^2}{|\underline{Z}_w|} e^{j\varphi_w} e^{-2\alpha z}.$$

Damit sind die Verläufe der Wirkleistung

$$P(z) = \operatorname{Re}[\underline{S}(z)] = \frac{U^2}{|\underline{Z}_w|} \cos(\varphi_w) e^{-2\alpha z},$$

der Blindleistung

$$Q(z) = \operatorname{Im}[\underline{S}(z)] = \frac{U^2}{|\underline{Z}_w|} \sin(\varphi_w) e^{-2\alpha z}$$

und der reellen Scheinleistung

$$S(z) = |\underline{S}(z)| = \frac{U^2}{|\underline{Z}_w|} e^{-2\alpha z}. \blacksquare$$

A5.3.15 Drei Leitungsstücke:

Die Eingangsimpedanz jedes der beiden offenen Endstücke ist $\underline{Z}'_E = Z_w \coth(j\ell)$. Somit bildet $\underline{Z}_A = \underline{Z}'_E / 2 = Z_w \coth(j\ell)/2$ die Abschlußimpedanz des ersten Stückes. Nun ist

$$\begin{aligned} \underline{Z}_E &= \frac{\cosh(j\ell) \underline{Z}_A + \sinh(j\ell) \underline{Z}_w}{\sinh(j\ell) \underline{Z}_A / \underline{Z}_w + \cosh(j\ell)} = \frac{\frac{1}{2} \frac{\cosh^2(j\ell)}{\sinh(j\ell)} + \sinh(j\ell)}{\frac{1}{2} \cosh(j\ell) + \cosh(j\ell)} \underline{Z}_w \\ &= Z_w \frac{\cosh^2(j\ell) + 2 \sinh^2(j\ell)}{3 \cosh(j\ell) \sinh(j\ell)} \end{aligned}$$

mit $\gamma = j\beta$, $\beta = 2\pi/\lambda = \omega/c$, also

$$\underline{Z}_E = \underline{Z}_W \frac{\cos^2(\beta l) - 2\sin^2(\beta l)}{j3\cos(\beta l)\sin(\beta l)} = \underline{Z}_W \frac{1 + \cos(2\beta l) - 2 + 2\cos(2\beta l)}{j3\sin(2\beta l)}.$$

Dies liefert als Ergebnis

$$\underline{Z}_E = -j\underline{Z}_W \frac{\cos(2\beta l) - 1/3}{\sin(2\beta l)}, \quad \beta l = 2\pi l/\lambda = \omega l/c.$$

Die Pole von \underline{Z}_E liegen bei $2\beta l = n\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$,

d.h. bei den Frequenzen

$$f = n \frac{c}{4l}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Die Nullstellen von \underline{Z}_E folgen aus $\cos(2\beta l) = 1/3$ (Abb. A5.3.15 b), d.h.

$$2\beta l = 2\pi n + \alpha_N, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{und } 2\beta l = 2\pi n - \alpha_N, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{mit } \alpha_N = \arccos(1/3) = 1,23096 \text{ (Hauptwert).}$$

Sie treten demnach bei den Frequenzen

$$f = \frac{\alpha_N}{\pi} \frac{c}{4l} = 0,392 \frac{c}{4l}$$

und

$$f = \left(2n \pm \frac{\alpha_N}{\pi}\right) \frac{c}{4l} = (2n \pm 0,392) \frac{c}{4l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

auf. ■

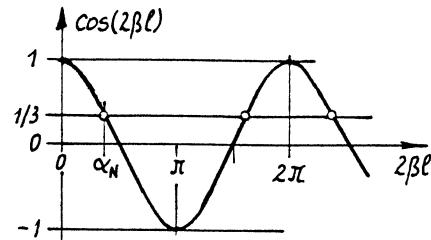


Abb. A5.3.15 b

A5.3.16 Spannungsüberhöhung:

Aus den Zweitorgleichungen des Leitungsstücks
lesen wir für den vorliegenden Fall sofort

$$\underline{U}(0) = \cos(2\pi l/\lambda) \underline{U}(l)$$

ab, wobei $\lambda = c_0/f = 60 \text{ m}$. Somit ist am offenen
Ausgang der Effektivwert

$$U(l) = 2V / \cos(2\pi \cdot 10m / 60m) = 4V$$

feststellbar, also eine Spannungsverdopplung
gegenüber dem Eingang. ■