TU WIEN

ELEKTRODYNAMIK

VU-351.019

Skriptum

Beispiele

Hybrid

Wir können die Unterlagen von denen wir gelernt haben nicht ändern,
aber wir können der Nachwelt bessere hinterlassen.

1. April 2017

Inhaltsverzeichnis

Werter Student!

Diese Unterlagen werden dir **kostenlos** zur Verfügung gestellt, damit sie dir im Studium behilflich sind. Sie wurden von vielen Studierenden zusammengetragen, digitalisiert und aufgearbeitet. Ohne der Arbeit der Studierenden wären diese Unterlagen nicht entstanden und du müsstest dir jetzt alles selber zusammensuchen und von schlecht eingescannten oder abfotografierten Seiten lernen. Zu den Beispielen gibt es verschiedene Lösungen, welche du dir auch erst mühsamst raussuchen und überprüfen müsstest. Die Zeit die du in deine Suche und Recherche investierst wäre für nachfolgende Studenten verloren. Diese Unterlagen leben von der Gemeinschaft die sie betreuen. Hilf auch du mit und erweitere diese Unterlagen mit deinem Wissen, damit sie auch von nachfolgenden Studierenden genutzt werden können. Geh dazu bitte auf https://github.com/Painkilla/VU-351.019-Elektrodynamik.git/issues und schau dir in der TODO Liste an was du beitragen möchtest. Selbst das Ausbessern von Tippfehlern oder Rechtschreibung ist ein wertvoller Beitrag für das Projekt. Nütze auch die Möglichkeit zur Einsichtnahme von Prüfungen zu gehen und die Angaben Anderen zur Verfügung zu stellen, damit die Qualität der Unterlagen stetig besser wird. LaTeX und Git sind nicht schwer zu lernen und haben auch einen Mehrwert für das Studium und das spätere Berufsleben. Sämtliche Seminar oder Bachelorarbeiten sind mit LaTeX zu schreiben. Git ist ideal um gemeinsam an einem Projekt zu arbeiten und es voran zu bringen. Als Student kann man auf GitHub übrigens kostenlos unbegrenzt private Projekte hosten.
Mit dem Befehl:

```
$ git clone --recursive https://github.com/Painkilla/VU-351.019-Elektrodynamik.g
```

erstellst du eine lokale Kopie des Repositoriums. Du kannst dann die Dateien mit einem LaTeX-Editor deiner Wahl bearbeiten und dir das Ergebnis ansehen. Bist du auf GitHub registriert, kannst du einen Fork (englisch für Ableger) erstellen und mit den Befehlen:

```
$ git commit -m ‘‘Dein Kommentar zu den Änderungen’’
$ git push
```

werden deine Ergänzungen auf deinen Ableger am Server gesendet. Damit deine Ergänzungen auch in das zentrale Repositorium gelangen und allen

Studierenden zur Verfügung stehen, musst du nur noch einen Pull-Request erstellen.

1 Einführung

1.1 Analytische Werkzeug

Elementare Vektoralgebra 1.

In Bezug auf eine kartesische Basis sind die Vektoren $\vec{a} = \vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z$, $\vec{b} = \vec{e}_x - \vec{e}_y$, $\vec{c} = \vec{e}_x + 2\vec{e}_y - 2\vec{e}_z$ gegeben. Berechnen Sie $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} + \vec{c}$, $|\vec{a} - \vec{c}|$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{c}$, den Kosinus des Winkels zwischen $\vec{a}$ und $\vec{c}$, $\vec{a} \times \vec{b}$, den Sinus des Winkels zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$, $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$, $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$.

Hinweis:

Definition der Verknüpfungen "+", "·", "×" und des Vektorbetrages. Orthonormalität der kartesischen Basisvektoren, Rechtsschraube.

Lösung 1.

$$\vec{a} + \vec{b} = 2\vec{e}_x + 1\vec{e}_z \tag{1.1.1}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 1\vec{e}_x + 2\vec{e}_y - 2\vec{e}_z \tag{1.1.2}$$

$$\vec{a} + \vec{c} = 2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y - 1\vec{e}_z \tag{1.1.3}$$

$$|\vec{a} - \vec{c}| = |1\vec{e}_y + 3\vec{e}_z| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \tag{1.1.4}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{||\vec{a}||_2 ||\vec{c}||_2} = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{9}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \tag{1.1.5}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 - 1 = 0 \tag{1.1.6}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{e}_x + \vec{e}_y - 2\vec{e}_z \tag{1.1.7}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 7 \tag{1.1.8}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.1.9}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.1.10}$$

Abstand in Kreiszylinderkoordinaten 2.
Wie groß ist der Abstand zwischen den beiden in Kreiszylinderkoordinaten (ρ, α, z) festgelegten Orten $(5m, 3\pi/2, 0)$ und $(5m, \pi/2, 10m)$?
Hinweis:
Eine Skizze erspart oft formale Rechenarbeit.

Lösung 2.
Aus Abb. ist über den Pythagoras der Abstand sofort angebbar.

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{1.1.11}$$

$$l = \sqrt{(5+5)^2 + 10^2} = 10 \cdot \sqrt{2}m \tag{1.1.12}$$

2 Elektromagnetische Felder

2.1 Globale und Lokale Eigenschaften

Wahre und fiktive Stromdichte 3.
Stellen Sie für ein linear homogen isotrop magnetisierbares Material der Permeabilitätszahl μ_r einen Zusammenhang her zwischen der (fiktiven) Magnetisierungsstromdichte $\vec{J}^f$ und der (wahren) Leitungsstromdichte $\vec{J}$. Vernachlässigen Sie dabei Verschiebungsströme.
Hinweis:
Wie hängen die Vektorfelder $\vec{M}$ und $\vec{H}$ untereinander und mit den räumlichen Stromdichten zusammen?

Lösung 3.
Die Beziehung $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$ wird in den Ampere-Maxwell Satz $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + d_t\vec{D}$ eingesetzt. Da wir laut der Angabe die Verschiebungsströme Ver-

nachlässigen können, wird $\vec{D} = 0$.

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \tag{2.1.1}$$

$$\vec{\nabla} \times (\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}) = \vec{J} \tag{2.1.2}$$

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{J} \tag{2.1.3}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} \cdot \mu_r - \vec{J}^f = \vec{J} \tag{2.1.4}$$

$$\vec{J}^f = \vec{J} \cdot \mu_r - \vec{J} = \vec{J}(\mu_r - 1) \tag{2.1.5}$$

$$\vec{J}^f = \kappa \vec{J} \tag{2.1.6}$$

2.2 Die Feldgleichungen in Sonderfällen

2.3 Energie und Impuls

3 Statische und Stationäre Felder

3.1 Elektrostatik und Quasi-Elektrostatik

3.2 Spezielle elektrostatsische Felder

3.3 Relaxion und Konvektion elektrischer Ladungen

3.4 Stationäre Magnetfelder

3.5 Spezielle stationäre Magnetfelder

4 Induktionserscheinungen

4.1 Quasistationäre Felder

4.2 Diffusion magnetischer Felder

5 Elektromagnetische Welllen

5.1 Grundgleichungen und Potentiale

5.2 Typen von Wellen

Energieflussdichte 4.
Berechnen Sie die zu einer ebenen Sinuswelle im leeren Raum mit der elektrischen Feldstärke (kartesischen Koordinaten) $\vec{E}(z,t) = \hat{E}\cos[2\pi(t/T - z/\lambda)]\vec{e}_y$ gehörende, mittlere Energieflussdichte.
Hinweis:
Wie sieht die zugehörige magnetische Feldstärke aus? Berechnen Sie den Poynting-Vektor und dessen Mittelwert.

Lösung 4.
Der Poynting-Vektor ist durch $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ definiert. Da wir uns im leeren Raum befinden, können wir uns die Berechnung der magnetischen Feldstärke sparen, da im leeren Raum auch folgende Beziehung gilt:

$$\vec{S} = \frac{E^2}{Z_0} \tag{5.2.1}$$

$$\vec{S} = \frac{\hat{E}^2 \cdot \cos[2\pi(t/T - z/\lambda)]^2}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}} \tag{5.2.2}$$

$$\vec{S} = \frac{\hat{E}^2 \cdot (0,5 + 0,5\cos[4\pi(t/T - z/\lambda)])}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}} \tag{5.2.3}$$

$$< \vec{S} > = \frac{\hat{E}^2 \cdot 0,5}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}} \tag{5.2.4}$$

5.3 Wellen auf Doppelleitungen

Sprungwelle 5.
Eine angenähert verlustfreie Leitung mit der Wellenimpedanz Z_W ist nach Abb. mit einer RC-Parallelschaltung abgeschlossen. Es fällt eine Sprungwelle mit dem Spannungsscheitelwert $\hat{U}_1$ ein. Berechnen Sie allgemein den Zeitverlauf $U(t)$ der Spannung am Abschluss.
Hinweis:
Stellen Sie die Wellen als Überlagerung von hin- und rücklaufenden Komponenten dar. Geben Sie dann speziell eine Differentialgleichung für $U(t)$ an und lösen Sie diese.

Lösung 5.
Die Allgemeine Lösung für die Wellengleichung mit hin und rücklaufenden Komponenten sieht so aus, wobei mit Index 1 gekennzeichnete Terme die hinlaufende und mit 2 gekennzeichnete die rücklaufenden Welle darstellen.

$$U(z,t) = U_1(ct - z) + U_2(ct + z) \tag{5.3.1}$$

$$I(z,t) = I_1(ct - z) + I_2(ct + z) \tag{5.3.2}$$

Wir legen die Z-Achse in den Endpunkt der Leitung, somit sind die Gleichungen nur noch mehr von der Zeit abhängig. Der Strom am Leitungsende setzt sich aus dem Strom durch den Kondensator und durch den Widerstand zusammen. $I(t) = CdU/dt + U/R$ Der hinlaufende Strom hängt mit der hinlaufenden Spannung über $I_1 = U_1/Z_W$ zusammen. Der Rücklaufende Strom durch einsetzen in die erste Wellengleichung mit $(U(t) - U_1)/(-Z_W)$. Daraus ergibt sich dann die Differentialgleichung:

$$C\frac{dU(t)}{dt} + \frac{U(t)}{R} = \frac{\hat{U}_1}{Z_W} + \frac{U(t) - \hat{U}_1}{-Z_W} \tag{5.3.3}$$

$$\frac{dU(t)}{dt} + \frac{U(t)}{C} \cdot \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{Z_W}\right) = \frac{2\hat{U}_1}{Z_W C} \tag{5.3.4}$$

$$U(s)s + \frac{U(s)}{C} \cdot \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{Z_W}\right) = \frac{2\hat{U}_1}{Z_W C s} \tag{5.3.5}$$

$$U(s) = \frac{2\hat{U}_1}{Z_W C s} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{C} \cdot \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{Z_W}\right)} \tag{5.3.6}$$

$$U(s) = \frac{2\hat{U}_1 R}{(Z_W + R) \cdot s} - \frac{2\hat{U}_1 R}{Z_W + R} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{C} \cdot \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{Z_W}\right)} \tag{5.3.7}$$

$$U(t) = \frac{2\hat{U}_1 R}{Z_W + R} \cdot \left(1 - e^{\frac{-t(R+Z_W)}{CRZ_W}}\right) \varepsilon(t) \tag{5.3.8}$$