VEKTORALGEBRA

WICHTIGE RECHENREGELN:

i) Das SPATPRODUKT (zyklisches Vertauschen)

$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$

Kann zyklisch nach Links & RECHTS geschoben werden!

ii) Doppeltes x-Produkt auflösen:

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \cancel{bac} \; \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$

Spruch: BAC MINUS CAB

iii) ANTIKOMMUTATIVITÄT DES X-PRODUKTS

$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$

IV) KOMMUTATIVITÄT DES INPRODUKTS:

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

V) RECHENREGELN FÜR RÄUML. ABLEITUNGEN $\vec{\nabla}$

(gereiht nach Wichtigkeit)

a) $\vec{\nabla}\cdot(f\vec{g}) = f\vec{\nabla}\cdot\vec{g} + \vec{g}\cdot\underbrace{\vec{\nabla}f}$

das $\vec{\nabla}\cdot f$ degradiert zu $\vec{\nabla}f$
da $\vec{\nabla}\cdot f$ nicht möglich ist &
die Inproduktbildung wandert
zwischen $\vec{g}$ und $\vec{\nabla}f$ => checken ob erlaubt!

b) $\vec{\nabla}\times(f\vec{g}) = f\vec{\nabla}\times\vec{g} + \underbrace{(\vec{\nabla}f)}\times\vec{g}$

Selbe Argumentation wie bei a) => $\vec{\nabla}\times f$ macht keinen Sinn => und die Exproduktbildung wandert wieder zwischen $\vec{\nabla}f$ & $\vec{g}$

-> nicht vertauschen wegen iii)!

c) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{f}\times\vec{g}) = \vec{g}\cdot\underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{f})} - \vec{f}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{g})$

merken: wird zuerst rotiert!

ORTSVEKTOR IN KARTESISCHEN K.

$\vec{r} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$

! $\vec{\nabla}\cdot\vec{r} = 3$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{e_r} = \frac{2}{r}$!

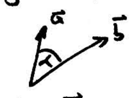
$\vec{\nabla}\times\vec{r} = 0$, $\vec{\nabla}\times\vec{e_r} = 0$

$\vec{\nabla}r = \vec{e_r}$

=> Zeigt in die Richtung des „Anstiegs"

Inprodukt & Exprodukt

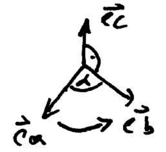
$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\alpha$



$\vec{a}\times\vec{b} = ab\sin(\alpha)\vec{e_c}$

$\vec{e_c}$ ... entsteht aus der Rechtsschraubigen Zuordnung

$\vec{e_a}\times\vec{e_b} = \vec{e_c}$



d.) Identitäten:

$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{f}) = 0 = \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}f)$

tief — Rotes — Rot Grad (Merken!)

Divergenz einer Rotation = 0

Rotation eines Gradienten = 0

$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}f) = \nabla^2 f$ ... Laplace Operator (aufpassen: kein Vektorpfeil)

e.) $\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$

=> immer auf die Vektorwertigkeit der Summanden aufpassen um eventuelle Fehler korrigieren zu können.

f.) GARSTIGE RECHENREGELN

$\vec{\nabla}(\vec{f}\cdot\vec{g}) = \vec{f}\cdot\vec{\nabla}\vec{g} + \vec{g}\cdot\vec{\nabla}\vec{f} + \vec{f}\times(\vec{\nabla}\times\vec{g}) + \vec{g}\times(\vec{\nabla}\times\vec{f})$

$\vec{\nabla}\times(\vec{f}\times\vec{g}) = \vec{f}\vec{\nabla}\cdot\vec{g} - \vec{g}\vec{\nabla}\cdot\vec{f} + \vec{g}\cdot\vec{\nabla}\vec{f} - \vec{f}\cdot\vec{\nabla}\vec{g}$

g.) $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{f}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{f}) - \nabla^2\vec{f}$

gratis grad (Div) ohne Laplace (Merken!)

WICHTIGE BEISPIELE:

z.B. $\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{e_r} = 2}$ mit $\vec{r} = r\vec{e_r}$ => $\vec{e_r} = \frac{\vec{r}}{r}$

$\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{r}\vec{r}\right)$ = mit Va.) = $\frac{1}{r}\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{r}}_{=3} + \vec{r}\cdot\underbrace{\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)}$ -> Aufpassen!

Skalar, Vektor

$= \frac{3}{r} + \vec{r}\cdot\left(-\frac{\vec{e_r}}{r^2}\right) = \frac{3}{r} - r\underbrace{\vec{e_r}\cdot\vec{e_r}}_{=1}\frac{1}{r^2} = \underline{\underline{\frac{2}{r}}}$ ✓

-> $\vec{\nabla}(r^{-1}) = -1r^{-2}\vec{\nabla}r$ (innere Abl.!)

Bei Grad.Bild. $= \vec{e_r}$ von Potenzen die innere Ableitung nicht vergessen!

Fällt ja normalerweise weg z.B. bei $f(x) = x^2 \to f'(x)\ 2x\cdot(1)$ (innere Abl. x'!)

z.B. $\boxed{\vec{p}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)}$ wieder mit Va): $\frac{1}{r^3}\underbrace{\vec{\nabla}\vec{r}} + \vec{r}\,\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^3}\right)$

muss eigentlich ⊗ sein!, oder man nimmt gleich das $\vec{p}$ zu Hilfe um dies zu „entschärfen".

=> $\vec{p}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3}\underbrace{\vec{p}\cdot\vec{\nabla}\vec{r}}_{\text{wird separat berechnet}} + \vec{r}\,\vec{p}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^3}\right)$ => jetzt passt die Vektorwertigkeit wieder!

$\vec{p}\cdot\vec{\nabla} = (p_x\partial x + p_y\partial y + p_z\partial z)$ => jetzt kann's mit $\vec{r}$ multipliziert werden.

HERLEITUNGS - BEZIEHUNGEN

Das elektromagnetische Feld im engeren Sinn: $U(\partial A)$, $\Phi(A)$

gekoppelt mit

$\boxed{U(\partial A) = -\dot{\Phi}(A)}$ globalen Induktionsgesetz

$U(\partial A) = \int_{\partial A} \vec{s} \cdot \vec{E}\, ds$ $\qquad \Phi(A) = \int_A \vec{n} \cdot \vec{D}\, dA$

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$ 1. Maxwell

$\vec{n} \times [\![\vec{E}]\!] = 0$ S.B.

und mit dem Satz vom mag. Hüllenfluss:

$\boxed{\Phi(\partial V) = 0}$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ 2. Maxwell

$\vec{n} \cdot [\![\vec{B}]\!] = 0$ S.B.

HAUPTGLEICHUNGEN

Verbindung der beiden Felder:

Ampere-Maxwell-Satz: $\boxed{V(\partial A) = I(A) + \dot{\Psi}(A)}$

$V(\partial A) = \int_{\partial A} s \cdot \vec{H}\, ds$

$I(A) = \int_A \vec{n} \cdot \vec{J}\, dA + \int_{\varrho} (\vec{S} \times \vec{n}) \cdot \vec{K}\, ds$

$\Psi(A) = \int_A \vec{n} \cdot \vec{D}(A)\, dA$

Führt zum:

Lokalen Satz v. d. Erhaltung d. el. Ladung:

$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\partial_t \varrho$

$\vec{n} \cdot [\![\vec{J}]\!] = -\partial_t \sigma$

Strom-Ladungs-Feld $I(A)$, $Q(V)$

gekoppelt mit

$\boxed{I(A) = -\dot{Q}(V)}$ Satz v. d. Erhaltung d. el. Ladung

wobei $A = \partial V$

$I(A) = \int_A \vec{n} \cdot \vec{J}\, dA + \int_{\varrho} (\vec{S} \times \vec{n}) \cdot \vec{K}\, ds$ $\qquad Q(V) = \int_V \varrho\, dV + \int_{\varrho} \sigma\, dA$

Führt zu!

$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}$ 3. Maxwell

$\vec{n} \times [\![\vec{H}]\!] = \vec{K}$ S.B.

und mit dem Satz vom el. Hüllenfluss:

$\boxed{\Psi(A) = Q(V)}$

$\Psi(A) = \int_A \vec{n} \cdot \vec{D}\, dA$ $\qquad Q(V) = \int_V \varrho\, dV + \int_{A=\varrho} \sigma\, dA$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \varrho$ 4. Maxwell

$\vec{n} \cdot [\![\vec{D}]\!] = \sigma$ S.B.

NEBENGLEICHUNGEN (ersetzbar durch Materialbezieh.)

Maxwell 1 & 2 sind deshalb die Hauptgleichungen, da sie das elektromagnetische Feld im engeren Sinne & die beiden Gleichungen Maxwell 3 & 4 durch die Materialbeziehungen ersetzt werden können.

Vom Materiefreien Raum zur Anwesenheit von Materie:

VAKUUM

Materialbeziehungen:

$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$

$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}$

Wieder: $\vec{D}$ & $\vec{H}$ werden durch E & B ausgedrückt, ersetzt.

$\rho, \vec{J}, \sigma, \vec{M} = \vec{0}, \vec{P} = 0$, γ

ε_0, μ_0

→ Verknüpft über die Maxwell-Beziehung:

$\boxed{\mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot c_0^2 = 1}$

Materie

TRANSFORMATIONEN betreffen nur Maxwell 3 & 4

Materialgleichungen:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{H} &= \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}\end{aligned}}$$

$\vec{P}$ … el. Polarisation

$\vec{M}$ … mag. Polarisation

mit

$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$

$\vec{M} = \kappa \vec{H}$

χ (xi) … el. Suszeptibilität

$\chi = \varepsilon_r - 1$ aus: $\varepsilon_r = \chi + 1$

κ (kappa) … mag. Suszeptibilität

$\kappa = \mu_r - 1$ aus $\mu_r = \kappa + 1$

den Übergang der Mat. Gl. in die Maxwellgl. 3 & 4 eingesetzt:

$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}$ mit $\vec{H} \to \vec{H} - \vec{M}$

$\to \vec{\nabla} \times (\cancel{E}\,\frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}) = \vec{J} + \partial_t \vec{D}$

$\to \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \partial_t \vec{D} + \vec{\nabla} \times \vec{M}$

$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \partial_t \varepsilon_0 \vec{E} = \vec{J} + \underbrace{\partial_t \vec{P} + \vec{\nabla} \times \vec{M}}$

durch Vergleich: $\vec{J}^f$!

Das gleiche gilt bei ρ:

$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$ mit $\vec{D} \to \vec{D} + \vec{P}$

$\vec{\nabla} \cdot (\vec{D} + \vec{P}) = \rho$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \underbrace{- \vec{\nabla} \cdot \vec{P}}_{\rho^f\,!}$

weiters verändern sich 2 Größen:

$\vec{J} \to \vec{J} - \cancel{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{P} + \vec{\nabla} \times \vec{M}$

$\rho \to \rho + \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\vec{P}} + \cancel{\vec{\nabla} \times \vec{M}} - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$

dies kann interpretiert werden als:

Effektiver Wert = „Wahrer" Wert + „Fiktiver" Wert

$\vec{J}^e = \vec{J} + \vec{J}^f = \vec{J} + \cancel{-\vec{\nabla} \cdot \vec{P}} + \partial_t P + \vec{\nabla} \times M$

$\rho^e = \rho + \rho^f = \rho + \cancel{\frac{\partial}{\partial t}P} + \cancel{\vec{\nabla} \times M} - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$

$\vec{K}^e = \vec{K} + \vec{K}^f = \vec{K} + \vec{n} \times [\![\vec{M}]\!]$

$\sigma^e = \sigma + \sigma^f = \sigma + - n \cdot [\![\vec{P}]\!]$

Sprungbedingungen:

$\vec{K}^f$:

$\vec{n} \times [\![\vec{H}]\!] = \vec{K}$

$\vec{n} \times [\![\vec{H} - \vec{M}]\!] = \vec{K}$

$\vec{n} \times [\![\vec{H}]\!] = \vec{K} + \underbrace{\vec{n} \times [\![\vec{H}]\!]}_{\vec{K}^f}$

$\Rightarrow$

$(\vec{n} \cdot [\![\vec{J}]\!] = -\partial_t \sigma) \to$ Kontinuitätsgl.

$\vec{\sigma}^f$:

$\vec{n} \cdot [\![\vec{D}]\!] = \sigma$ mit $\vec{D} \to \vec{D} + P$

$\vec{n} \cdot [\![\vec{D}]\!] = \sigma \underbrace{- \vec{n} \cdot [\![P]\!]}_{\sigma^f}$

ENERGIE & IMPULS

$$\overset{\circ}{W}(V) + Q(\partial V) = R(V)$$

Energie inhalt (∂t) — Energie Fluss — Prod. Rate

in einem zeitl. sich nicht ändernden Volumen V:

- Energieinhalt : $W(V)$
- Impulsinhalt : $G(V)$

$$\overset{\circ}{\vec{G}}(V) + \vec{P}(\partial V) = \vec{F}(V)$$

Impuls inhalt (∂t) — Impuls Fluss — Prod. Rate

* Mit: $W(V) = \int_V w \, dV$

$Q(\partial V) = \int_{\partial V} \vec{n} \cdot \vec{q} \, dA \overset{\text{Gauß}}{=} \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{q} \, dV$

$R(V) = \int_V r \, dV + \int_{\varphi'} r^s \, dA$ ← SURFACE

** Mit: $\vec{G}(V) = \int_V \vec{g} \, dV$

$\vec{P}(\partial V) = \int_{\partial V} \vec{n} \cdot \vec{p} \, dA \overset{\text{Gauß}}{=} \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{p} \, dV$

$\vec{F}(V) = \int_V \vec{f} \, dV + \int_{\varphi'} \vec{f}_s \, dA$ ← Surface

Übergang zu Dichten*: $w \quad \vec{q} \quad r$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V w \, dV + \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{q} \, dV = \int_V r \, dV \quad / \frac{\partial}{\partial V}$$

$$\boxed{\dot{w} + \vec{\nabla} \cdot \vec{q} = r}$$

Übergang zu Dichten**: $\vec{g} \quad \vec{p} \quad \vec{f}$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \vec{g} \, dV + \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{p} \, dV = \int_V \vec{f} \, dV \quad / \frac{\partial}{\partial V}$$

$$\boxed{\dot{\vec{g}} + \vec{\nabla} \cdot \vec{p} = \vec{f}}$$

INDEX e steht für elektromagnet. bei der Aufspaltung in Teilsysteme:

e … e.magnet.

m … mechanisch

AUFSPALTUNG IN: elektromagnetisches & mechanisches TEILSYSTEM!!!

$$\left[\begin{array}{l} w = w_e + w_m \\ q = q_e + q_m \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{l} \vec{g} = \vec{g}^e + \vec{g}^m \\ \mathfrak{p} = \mathfrak{p}^e + \mathfrak{p}^m \end{array}\right]$$

IM vollständigem System gilt:

$$r_e + r_m = 0$$

$$\vec{f}_e + \vec{f}_m = \vec{0}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r^{es} + r^{ms} = 0 \\ \vec{f}^{es} + \vec{f}^{ms} = \vec{0} \end{array} \right.$$

An den Oberflächen: $r^s, \vec{f}^s$

$$\left. \begin{array}{l} -V_n [\![w]\!] + \vec{n} \circ [\![\vec{q}]\!] = r^s \\ -V_n [\![\vec{g}]\!] + \vec{n} \circ [\![\mathfrak{p}]\!] = \vec{f}^s \end{array} \right\}$$

IM Teilsystem a.d. Oberfläche:

$r^{sm} = -r^{se} = \vec{K}^e \cdot \langle \vec{E} \rangle$ … Arithmet. Mittel $\langle \vec{E} \rangle = \frac{1}{2}[\vec{E}^1 + \vec{E}^2]$

$\vec{f}^{sm} = -\vec{f}^{se} = \sigma^e \langle \vec{E} \rangle + \vec{K}^e \times \langle \vec{B} \rangle$

=> Starke Analogie zur Leistungs-, Kraftdichte →

IM TEILSYSTEM

Wechselwirkung zwischen Körpern & elektromagnetischen Feldern nur mit Ladungen & Strömen:

$\vec{J}^e = \vec{J} + \partial_t \vec{P} + \vec{\nabla} \times \vec{M}$

$\varrho^e = \varrho - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$

Leistungsdichte somit:

$r^m = -r^e = \vec{J}^e \cdot \vec{E} \quad : [\frac{A}{m^2}] \cdot [\frac{V}{m}] = [\frac{W}{m^3}]$

Kraftdichte somit:

$\vec{f}^m = -\vec{f}^e = \varrho^e \vec{E} + \vec{J}^e \times \vec{B}$

Energie & Impuls II

$\Rightarrow$ KRÄFTE

... Die Gleichungen:

- $\partial_t w + \vec{\nabla} \circ \vec{q} = r$ (Energie)
- $\partial_t \vec{g} + \vec{\nabla} \circ \underset{\sim}{p} = \vec{f}$ (Impuls)

werden nun über ein paar eher komplizierte Umformungen mit den $\vec{E}$ & $\vec{B}$ Feldern verknüpft.

über: $r^e = -\vec{J}^e \circ \vec{E}$, $\vec{J}^e = \vec{J} + \partial_t \vec{P} + \vec{\nabla} \times \vec{M}$

zu: $\partial_t \underbrace{\left(\frac{\varepsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right)}_{w^e} + \vec{\nabla} \circ \underbrace{\left(\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right)}_{\vec{q}^e} = r^e$

über: $\vec{f}^e = -\varsigma^e \vec{E} - \vec{J}^e \times \vec{B}$, $\varsigma^e = \varsigma - \vec{\nabla} \circ \vec{P}$

zu: $\partial_t \underbrace{\left(\varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} \right)}_{\vec{g}^e} + \vec{\nabla} \cdot \underbrace{\left[\underbrace{\left(\frac{\varepsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right)}_{w^e} \underset{\sim}{\delta} - \varepsilon_0 \vec{E} \otimes \vec{E} - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \otimes \vec{B} \right]}_{\underset{\sim}{p}^e} = \vec{f}^e$

somit wurden w^e, $\vec{q}^e$, $\vec{g}^e$ und $\underset{\sim}{p}^e$ gefunden:

$$\boxed{\begin{aligned} w^e &= \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 & \vec{q}^e &= \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \\ \vec{g}^e &= \varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} & \underset{\sim}{p}^e &= w^e \underset{\sim}{\delta} - \varepsilon_0 \vec{E} \otimes \vec{E} - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \otimes \vec{B} \end{aligned}}$$

$\rightarrow$ Leistungsflussdichte, Poynting-Vektor: $\boxed{\vec{S} = \vec{q}^e = \vec{E} \times \vec{H}}$

Nun ist $-\vec{P}(\partial V)$ gefragt. In ähnlicher Herangehensweise wie zuvor wird der Impulsfluss durch die Hülle ∂V durch das Hüllenintegral über die Impulsflussdichte dargestellt.

$$-\vec{P}(\partial V) = -\int_{\partial V} \vec{n} \circ \underset{\sim}{p}^e \, dA$$

Da die Impulsflussdichtetensoren für dominant el. und dominant magnetisch unterschieden werden können:

i) d. el. $\underset{\sim}{p}^e = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \underset{\sim}{\delta} - \varepsilon_0 \vec{E} \otimes \vec{E}$

ii) d. mag. $\underset{\sim}{p}^e = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \underset{\sim}{\delta} - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \otimes \vec{B}$

$\Rightarrow$ Resultierende Kräfte auf einen Körper in der vollständigen Hülle ∂V, die wiederum komplett im materiefreien Raum verlaufen muss:

i) $\vec{F}_R^e = -\int_{\partial V} \varepsilon_0 \left[\frac{1}{2} E^2 \vec{n} - \vec{n} \cdot \vec{E} \vec{E} \right] dA$

ii) $\vec{F}_R^e = -\int_{\partial V} \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{1}{2} B^2 \vec{n} - \vec{n} \cdot \vec{B} \vec{B} \right] dA$

Die auf einen Körper resultierende Kraft ist ja die zeitliche Änderungsrate des Impulses.

$$\vec{F}_R^e = \dot{G}(V)$$

Da in einem abgeschlossenem, <u>vollständigem</u> System die Produktionsraten verschwinden: (Hülle herum & alles was erzeugt wird, wird auch drinnen verbraucht $\rightarrow$ vollständig) gilt:

$$\dot{G}(V) + \vec{P}(\partial V) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \dot{G}(V) = -\vec{P}(\partial V)$$

KRÄFTE