Herleitung Koordinaten

·) Kartesische Koordinaten

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \qquad \vec{r}\ldots \text{Ortsvektor}$$

·) Kreiszylinder Koordinaten

$$x = \rho\cos(\alpha)\ ,\ y = \rho\sin(\alpha)\ ,\ z = z$$

$$\vec{e}_i = \frac{\partial r/\partial i}{|\partial r/\partial i|} \ , \quad r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial s}{\partial \rho} = \frac{\partial x}{\partial \rho}\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \rho}\vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \rho}\vec{e}_z = \cos(\alpha)\vec{e}_x + \sin(\alpha)\vec{e}_y$$

$$h_\rho = \left|\frac{\partial s}{\partial \rho}\right| = \sqrt{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)} = 1$$

$$\vec{e}_\rho = \frac{1}{h_\rho}\cdot\frac{\partial s}{\partial \rho} = \cos(\alpha)\vec{e}_x + \sin(\alpha)\vec{e}_y$$

$$\frac{\partial s}{\partial \alpha} = \frac{\partial x}{\partial \alpha}\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \alpha}\vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \alpha}\vec{e}_z = -\rho\sin(\alpha)\vec{e}_x + \rho\cos(\alpha)\vec{e}_y$$

$$h_\alpha = \left|\frac{\partial s}{\partial \alpha}\right| = \sqrt{\rho^2\sin^2(\alpha) + \rho^2\cos^2(\alpha)} = \rho$$

$$\vec{e}_\alpha = \frac{1}{h_\alpha}\cdot\frac{\partial s}{\partial \alpha} = -\sin(\alpha)\vec{e}_x + \cos(\alpha)\vec{e}_y$$

$$\frac{\partial s}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z}\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial z}\vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial z}\vec{e}_z = \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_z = \vec{e}_z$$

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_\rho \\ \vec{e}_\alpha \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} = \underline{A}\begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix}^T$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{e}_x &= \cos(\alpha)\vec{e}_\rho - \sin(\alpha)\vec{e}_\alpha \\ \vec{e}_y &= \sin(\alpha)\vec{e}_\rho + \cos(\alpha)\vec{e}_\alpha \\ \vec{e}_z &= \vec{e}_z \end{aligned}}$$

$$\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$$

·) Kugelkoordinaten

$x = r\sin(\theta)\cos(\alpha)\ ,\ y = r\sin(\theta)\sin(\alpha)\ ,\ z = r\cos(\theta)$

$$\frac{\partial s}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial r}\vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial r}\vec{e}_z = \sin(\theta)\cos(\alpha)\vec{e}_x + \sin(\theta)\sin(\alpha)\vec{e}_y + \cos(\theta)\vec{e}_z$$

$$h_r = \left|\frac{\partial s}{\partial r}\right| = \sqrt{\sin^2(\theta)\cos^2(\alpha) + \sin^2(\theta)\sin^2(\alpha) + \cos^2(\theta)} = 1$$

$$\underline{\underline{\vec{e}_r}} = \frac{1}{h_r}\cdot\frac{\partial s}{\partial r} = \underline{\underline{\sin(\theta)\cos(\alpha)\vec{e}_x + \sin(\theta)\sin(\alpha)\vec{e}_y + \cos(\theta)\vec{e}_z}}$$

$$\frac{\partial s}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta}\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \theta}\vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \theta}\vec{e}_z = r\cos(\theta)\cos(\alpha)\vec{e}_x + r\cos(\theta)\sin(\alpha)\vec{e}_y - r\sin(\theta)\vec{e}_z$$

$$h_\theta = \left|\frac{\partial s}{\partial \theta}\right| = \sqrt{r^2\cos^2(\theta)\cos^2(\alpha) + r^2\cos^2(\theta)\sin^2(\alpha) + r^2\sin^2(\theta)} = r$$

$$\underline{\underline{\vec{e}_\theta}} = \frac{1}{h_\theta}\cdot\frac{\partial s}{\partial \theta} = \underline{\underline{\cos(\theta)\cos(\alpha)\vec{e}_x + \cos(\theta)\sin(\alpha)\vec{e}_y - \sin(\theta)\vec{e}_z}}$$

$$\frac{\partial s}{\partial \alpha} = \frac{\partial x}{\partial \alpha}\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \alpha}\vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \alpha}\vec{e}_z = -r\sin(\theta)\sin(\alpha)\vec{e}_x + r\sin(\theta)\cos(\alpha)\vec{e}_y$$

$$h_\alpha = \left|\frac{\partial s}{\partial \alpha}\right| = \sqrt{r^2\sin^2(\theta)\sin^2(\alpha) + r^2\sin^2(\theta)\cos^2(\alpha)} = r\sin(\theta)$$

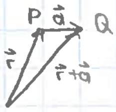
$$\underline{\underline{\vec{e}_\alpha}} = \frac{1}{h_\alpha}\cdot\frac{\partial s}{\partial \alpha} = \underline{\underline{-\sin(\alpha)\vec{e}_x + \cos(\alpha)\vec{e}_y}}$$

$$\begin{pmatrix}\vec{e}_r\\ \vec{e}_\theta\\ \vec{e}_\alpha\end{pmatrix} = \underline{A}\begin{pmatrix}\vec{e}_x\\ \vec{e}_y\\ \vec{e}_z\end{pmatrix}^T$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{e}_x &= \sin(\theta)\cos(\alpha)\vec{e}_r + \cos(\theta)\cos(\alpha)\vec{e}_\theta - \sin(\alpha)\vec{e}_\alpha\\ \vec{e}_y &= \sin(\theta)\sin(\alpha)\vec{e}_r + \cos(\theta)\sin(\alpha)\vec{e}_\theta + \cos(\alpha)\vec{e}_\alpha\\ \vec{e}_z &= \cos(\theta)\vec{e}_r - \sin(\theta)\vec{e}_\theta\end{aligned}}$$

$\underline{\vec{r} = r\vec{e}_r}$

Räumliche Ableitung von Feldern



$$\underset{\sim}{F}(\vec r+\vec a) = \underset{\sim}{F}(\vec r) + \vec a\cdot \underset{\sim}{G}(\vec r) + \underset{\sim}{o}(\vec a) \quad , \ \vec a = a\vec e$$

$$\lim_{a\to 0}\frac{1}{a}\Big[\underset{\sim}{F}(\vec r+a\vec e) - \underset{\sim}{F}(\vec r) - \underbrace{\underset{\sim}{o}(a\vec e)}_{0}\Big] = \vec e\cdot \underset{\sim}{G}(\vec r)$$

Gradient: $\underset{\sim}{G} = \vec\nabla \otimes \underset{\sim}{F}$

Richtungsableitung: $\vec e\cdot \underset{\sim}{G}(\vec r) = \vec e\cdot \vec\nabla \underset{\sim}{F}(\vec r)$

Maxwell-Gleichungen

I: Induktionsgesetz: $U(\partial\mathcal{A}) = -\dot{\Phi}(\mathcal{A})$

II: Satz vom magnetischen Hüllenfluss: $\Phi(\partial\mathcal{V}) = 0$

$$U(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} \vec{s}\cdot\vec{E}\,ds \quad , \quad \Phi(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} \vec{n}\cdot\vec{B}\,dA$$

Erweiterter Satz von Stokes

$$\text{I:}\quad U(\partial\mathcal{A}) + \dot{\Phi}(\mathcal{A}) = \int_{\partial\mathcal{A}} \vec{s}\cdot\vec{E}\,ds + \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{A}} \vec{n}\cdot\vec{B}\,dA = \int_{\mathcal{A}'} \vec{n}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E})\,dA + \int_{\mathcal{C}'} \vec{s}\cdot[\![\vec{E}]\!]\,ds + \int_{\mathcal{A}} \vec{n}\cdot\partial_t\vec{B}\,dA =$$

$$= \int_{\mathcal{A}'} \vec{n}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E} + \partial_t\vec{B})\,dA + \int_{\mathcal{C}'} \vec{s}\cdot[\![\vec{E}]\!]\,ds = 0$$

$$\vec{n}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E} + \partial_t\vec{B}) = 0 \quad , \quad \vec{s}\cdot[\![\vec{E}]\!] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B} \\ \vec{n}\times[\![\vec{E}]\!] = \vec{0} \end{array}}$$

Erweiterter Satz von Gauß

$$\text{II:}\quad \Phi(\partial\mathcal{V}) = \int_{\partial\mathcal{V}} \vec{n}\cdot\vec{B}\,dA = \int_{\mathcal{V}'} \vec{\nabla}\cdot\vec{B}\,dV + \int_{\mathcal{S}'} \vec{n}\cdot[\![\vec{B}]\!]\,ds = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ \vec{n}\cdot[\![\vec{B}]\!] = 0 \end{array}}$$

III: Erhaltung der elektrischen Ladung: $I(\partial V) = -\dot{Q}(V)$

IV: Ampère - Maxwell - Satz: $V(\partial \mathcal{A}) = I(\mathcal{A}) + \dot{\Psi}(\mathcal{A})$

V: Satz vom elektrischen Hüllenfluss: $\Psi(\partial V) = Q(V)$

$$I(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}'} \vec{n}\cdot\vec{j}\,dA + \int_{\mathcal{C}'} (\vec{s}\times\vec{n})\cdot\vec{K}\,ds \quad , \quad Q(V) = \int_{V'} \rho\,dV + \int_{\mathcal{A}'} \sigma\,dA$$

Flächenstrom wird vernachlässigt)

Erw. Satz von Gauß

$$\text{III}: \; I(\partial V) + \dot{Q}(V) = \int_{\partial V} \vec{n}\cdot\vec{j}\,dA + \frac{d}{dt}\int_{V'} \rho\,dV + \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{A}'} \sigma\,dA = \int_{V'} (\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \partial_t \rho)\,dV + \int_{\mathcal{S}'} (\vec{n}\cdot[\![\vec{j}]\!] + \partial_t\sigma)\,dA = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = -\partial_t \rho \\ \vec{n}\cdot[\![\vec{j}]\!] = -\partial_t \sigma \end{array}}$$

$$\text{IV}: \; V(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} \vec{s}\cdot\vec{H}\,ds \quad , \quad \Psi(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} \vec{n}\cdot\vec{D}\,dA$$

Erw. Satz von Stokes

$$V(\partial\mathcal{A}) - I(\mathcal{A}) - \dot{\Psi}(\mathcal{A}) = \int_{\partial\mathcal{A}} \vec{s}\cdot\vec{H}\,ds - \int_{\mathcal{A}'} \vec{n}\cdot\vec{j}\,dA - \int_{\mathcal{C}'} (\vec{s}\times\vec{n})\cdot\vec{K}\,ds - \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{A}} \vec{n}\cdot\vec{D}\,dA =$$

$$= \int_{\mathcal{A}'} \vec{n}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H} - \vec{j} - \partial_t \vec{D})\,dA - \int_{\mathcal{C}'} \vec{s}\cdot([\![\vec{H}]\!] - \vec{K}\times\vec{n})\,ds = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{j} + \partial_t \vec{D} \\ \vec{n}\times[\![\vec{H}]\!] = \vec{K} \end{array}}$$

Erw. Satz von Gauß

$$\text{V}: \; \Psi(\partial V) - Q(V) = \int_{\partial V} \vec{n}\cdot\vec{D}\,dA - \int_{V'} \rho\,dV - \int_{\mathcal{S}'} \sigma\,dA = \int_{V'} (\vec{\nabla}\cdot\vec{D} - \rho)\,dV + \int_{\mathcal{S}'} (\vec{n}\cdot[\![\vec{D}]\!] - \sigma)\,dA = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho \\ \vec{n}\cdot[\![\vec{D}]\!] = \sigma \end{array}}$$

Strom-Ladungsverteilungen

Maxwell-Gleichungen:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}+\partial_t\vec{B}=\vec{0} \qquad \vec{n}\times\llbracket\vec{E}\rrbracket=\vec{0}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \qquad \vec{n}\cdot\llbracket\vec{B}\rrbracket=0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}-\partial_t\vec{D}=\vec{J} \qquad \vec{n}\times\llbracket\vec{H}\rrbracket=\vec{K}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho \qquad \vec{n}\cdot\llbracket\vec{D}\rrbracket=\sigma$$

Wahre Verteilungen:

$$\underline{\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}}\ ,\quad \underline{\vec{H}=\frac{1}{\mu_0}\vec{B}}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}+\partial_t\vec{B}=\vec{0} \qquad \vec{n}\times\llbracket\vec{E}\rrbracket=\vec{0}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \qquad \vec{n}\cdot\llbracket\vec{B}\rrbracket=0$$

$$\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{B}-\varepsilon_0\partial_t\vec{E}=\underline{\vec{J}} \qquad \frac{1}{\mu_0}\vec{n}\times\llbracket\vec{B}\rrbracket=\underline{\vec{K}}$$

$$\varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\underline{\rho} \qquad \varepsilon_0\vec{n}\cdot\llbracket\vec{E}\rrbracket=\underline{\sigma}$$

Fiktive Verteilungen:

$$\underline{\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}}\ ,\quad \underline{\vec{H}=\frac{1}{\mu_0}\vec{B}-\vec{M}}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}+\partial_t\vec{B}=\vec{0} \qquad \vec{n}\times\llbracket\vec{E}\rrbracket=\vec{0}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \qquad \vec{n}\cdot\llbracket\vec{B}\rrbracket=0$$

$$\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{B}-\varepsilon_0\partial_t\vec{E}=\underline{\vec{J}+\vec{\nabla}\times\vec{M}+\partial_t\vec{P}} \qquad \frac{1}{\mu_0}\vec{n}\times\llbracket\vec{B}\rrbracket=\underline{\vec{K}+\vec{n}\times\llbracket\vec{M}\rrbracket}$$

$$\varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\underline{\rho-\vec{\nabla}\cdot\vec{P}} \qquad \varepsilon_0\vec{n}\cdot\llbracket\vec{E}\rrbracket=\underline{\sigma-\vec{n}\cdot\llbracket\vec{P}\rrbracket}$$

$$\vec{J}^e=\vec{J}+\vec{J}^f\ ,\quad \vec{K}^e=\vec{K}+\vec{K}^f$$

$$\rho^e=\rho+\rho^f\ ,\quad \sigma^e=\sigma+\sigma^f$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \vec{J}^f=\partial_t\vec{P}+\vec{\nabla}\times\vec{M}\ , & \vec{K}^f=\vec{n}\times\llbracket\vec{M}\rrbracket \\ \rho^f=-\vec{\nabla}\cdot\vec{P}\ , & \sigma^f=-\vec{n}\cdot\llbracket\vec{P}\rrbracket \end{array}}$$

Herleitung Poynting-Satz

I: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \partial_t \vec{B} \quad / \cdot \vec{H}$

II: $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \partial_t \vec{D} \quad / \cdot \vec{E}$

I: $\vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = - \vec{H} \cdot \partial_t \vec{B}$

II: $\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{E} \cdot \partial_t \vec{D}$

I-II: $\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = - \vec{H} \cdot \partial_t \vec{B} - \vec{E} \cdot \vec{J} - \vec{E} \cdot \partial_t \vec{D}$

$\Rightarrow \quad \vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} + \vec{H} \cdot \partial_t \vec{B} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = - \vec{J} \cdot \vec{E}$

$$\int_V \vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} + \vec{H} \cdot \partial_t \vec{B} \, dV + \int_{\partial V} \vec{n} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \, dA = - \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} \, dV \quad \ldots \text{ Poynting-Satz}$$

Interpretation für linear homogen isotropes Material:

1.) $\vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} + \vec{H} \cdot \partial_t \vec{B} = \partial_t \left(\frac{\varepsilon E^2}{2} \right) + \partial_t \left(\frac{B^2}{2\mu} \right) = \partial_t w_e + \partial_t w_m$

2.) $\int_{\partial V} \vec{n} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \, dA$ gesamter elektromagnetischer Energiefluß von innen nach außen durch ∂V

$\vec{E} \times \vec{H} = \vec{S}$ ... Poynting-Vektor

3.) $- \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} \, dV = - \int_V \frac{J^2}{\gamma} \, dV$ ... Joule-Verluste

Relaxation und Konvektion elektrischer Ladung

$$\vec\nabla \cdot \vec D = \rho \quad , \quad \vec D = \varepsilon \vec E$$

$$\vec\nabla \cdot \vec J = -\partial_t \rho \qquad \vec J = \gamma \vec E + \rho \vec v$$

$$\vec\nabla \cdot (\gamma \vec E) + \vec\nabla \cdot (\rho \vec v) = -\partial_t \rho$$

$$\underbrace{\vec\nabla \cdot \left(\frac{\gamma}{\varepsilon} \vec D\right)}_{\frac{\gamma}{\varepsilon}\rho} + \vec\nabla \cdot (\rho \vec v) = -\partial_t \rho$$

$$\Rightarrow \partial_t \rho + \vec\nabla \cdot (\rho \vec v) + \frac{\gamma}{\varepsilon} \rho = 0 \quad \ldots \text{Relaxationsgleichung}$$

$$T_R = \frac{\varepsilon}{\gamma}$$

Ladungsrelaxation ohne Bewegung:

$\vec v = 0$

$$T_R \, \partial_t \rho + \rho = 0 \rightarrow \rho(\vec r, t) = \rho(\vec r, 0)\, e^{-t/T_R}$$

→ Im Inneren eines linearen, homogenen Materials gibt es im stationären Zustand keine Überschuss-Ladung.
Ladungsansammlungen können nur an Materialinhomogenitäten auftreten, z.B: Grenzflächen.

Ladungsrelaxation mit Bewegung:

$$T_R \Big[\underbrace{\partial_t \rho + \vec\nabla \cdot (\rho \vec v)}_{\text{mitgeschleppte Zeitableitung}}\Big] + \rho = 0$$

→ Lösung liefert wieder einen zeitlichen exponentiell abklingenden Verlauf.

→ In einem homogenen Material strebt die elektrische Ladung jedes materiellen Volumelements, das sich auch bewegen und verformen kann gegen Null, sofern keine räumlich verteilte Ladungsinjektion erfolgt.

Elektrostatische Potenziale:

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$, $\vec{n} \times [\![\vec{E}]\!] = \vec{0}$

$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon \vec{E}$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$, $\vec{n} \cdot [\![\vec{D}]\!] = \sigma$

elektrostatisches Potenzial:

$$U(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} \vec{s} \cdot E \, ds = \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2) \Rightarrow \underline{\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi}$$

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\varphi) = 0$ ... Gleichung gelöst ✓

$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \varepsilon \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}\varphi) = \rho \Rightarrow \underline{\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}}$ ... Poisson-Gleichung

ladungsfrei: $\underline{\nabla^2 \varphi = 0}$ ... Laplace-Gleichung

elektrostatisches Vektorpotenzial:

Voraussetzung: Ladungsfreier einfach zusammenhängender Bereich

$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$

$$\Psi(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} \vec{n} \cdot \vec{D} \, dA = \int_{\partial \mathcal{A}} \vec{s} \cdot \vec{V} \, ds \Rightarrow \underline{\vec{D} = \vec{\nabla} \times \vec{V}}$$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = 0$ ... Gleichung gelöst ✓

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \underline{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = 0}$ (analog zur Laplace-Gleichung von φ)

Stationäre magnetische Felder:

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ $\qquad$ $\vec{n} \cdot [\![\vec{B}]\!] = 0$

$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$ $\qquad$ $\vec{n} \times [\![\vec{H}]\!] = \vec{k}$

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$ $\qquad$ $\vec{n} \times [\![\vec{E}]\!] = v_n [\![B]\!]$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$$

Magnetisches Skalarpotenzial:

Voraussetzung: Der ganze Bereich muss stromfrei sein.

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{0}$$

$$V(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} \vec{s} \cdot \vec{H} \, ds = \varphi_M(\vec{r}_1) - \varphi_M(\vec{r}_2) \implies \underline{\vec{H} = -\vec{\nabla} \varphi_M}$$

$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla} \varphi_M) = 0$ ... Gleichung gelöst ✓

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = -\mu \, \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi_M) = 0 \implies \underline{\nabla^2 \varphi_M = 0 \text{ ... Laplace-Gleichung}}$

Magnetisches Vektorpotenzial:

$$\Phi(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} \vec{n} \cdot \vec{B} \, dA = \int_{\partial \mathcal{A}} \vec{s} \cdot \vec{A} \, ds \implies \underline{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}}$$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$ ... Gleichung gelöst ✓

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{J} \rightarrow \nabla(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 A = \mu \vec{J}$$

mit Maxwell-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$: $\quad \underline{\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} \text{ ... Poisson-Gleichung}}$

stromfrei: $\quad \underline{\nabla^2 \vec{A} = 0 \text{ ... Laplace-Gleichung}}$

Elektrodynamische Potenziale:

$\vec{\nabla}\times\vec{E}+\partial_t\vec{B}=\vec{0}$ $\quad$ $\vec{n}\times[\![\vec{E}]\!]=\vec{0}$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ $\quad$ $\vec{n}\cdot[\![\vec{B}]\!]=0$

$\vec{\nabla}\times\vec{H}-\partial_t\vec{D}=\vec{J}$ $\quad$ $\vec{n}\times[\![\vec{H}]\!]=\vec{K}$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho$ $\quad$ $\vec{n}\cdot[\![\vec{D}]\!]=\sigma$

$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$

$\vec{H}=\frac{1}{\mu}\vec{B}$

$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$

$\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{E}+\partial_t\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{E}+\partial_t(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\vec{\nabla}\times(\vec{E}+\partial_t\vec{A})=\vec{0} \rightarrow \vec{E}+\partial_t\vec{A}$ ist wirbelfrei

$$U(\varphi)=\int_{\varphi}\vec{s}\cdot\vec{E}\,ds=-\partial_t\int_{\varphi}\vec{s}\cdot\vec{A}\,ds+\varphi(\vec{r}_1)-\varphi(\vec{r}_2) \Rightarrow \underline{\vec{E}=-\partial_t\vec{A}-\vec{\nabla}\varphi}$$

$$\Phi(\mathcal{A})=\int_{\mathcal{A}}\vec{n}\cdot\vec{B}\,dA=\int_{\partial\mathcal{A}}\vec{s}\cdot\vec{A}\,ds \Rightarrow \underline{\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}}$$

Eichtransformation:

Zwei Felder $\vec{A}$ und $\vec{A}'$ mit gleicher Rotation liefern die gleiche Flussdichte $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{\nabla}\times\vec{A}'$.

Ihre Differenz ist wirbelfrei $\vec{\nabla}\times(\vec{A}'-\vec{A})=\vec{0}$ und lässt sich als Gradient eines Skalarfeldes darstellen. $\vec{A}'-\vec{A}=\vec{\nabla}c$.

$$\left.\boxed{\begin{aligned}\vec{A}'&=\vec{A}+\vec{\nabla}c\\ \varphi'&=\varphi-\partial_t c\end{aligned}}\right\}\text{ Eichtransformation}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}-\partial_t\vec{D}=\frac{1}{\mu}[\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})]-\varepsilon\,\partial_t(-\partial_t\vec{A}-\vec{\nabla}\varphi)=\vec{J}$$

$$\rightarrow \underline{\nabla^2\vec{A}-\mu\varepsilon\,\partial_t^2\vec{A}-\vec{\nabla}[\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\mu\varepsilon\,\partial_t\varphi]=-\mu\vec{J}}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\varepsilon\,\vec{\nabla}\cdot(-\partial_t\vec{A}-\vec{\nabla}\varphi)=\rho$$

$$\rightarrow \underline{\nabla^2\varphi-\mu\varepsilon\,\partial_t^2\varphi+\partial_t[\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\mu\varepsilon\,\partial_t\varphi]=-\frac{\rho}{\varepsilon}}$$

Maxwell-Eichung: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$

Lorentz-Eichung: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\mu\varepsilon\,\partial_t\varphi=0$

Herleitung Bullard-Gleichung

Gültigkeit der Gleichungen des dominant magnetischen Feldsystems vorausgesetzt!

$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$, $\vec{J} = \gamma \vec{E}' = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \rightarrow \vec{E} = \frac{1}{\gamma}\vec{J} - \vec{v} \times \vec{B}$

$$\frac{1}{\mu}\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{J}$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\gamma}\vec{J} - \vec{v} \times \vec{B}\right) = -\partial_t \vec{B}$$

$$\frac{1}{\gamma}\vec{\nabla} \times \vec{J} - \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) = -\partial_t \vec{B}$$

$$-\frac{1}{\gamma \cdot \mu} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) = \partial_t \vec{B}$$

$$-\frac{1}{\gamma\mu}\left[\nabla^2 \vec{B} + \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{B}}_{0}\right] + \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) = \partial_t \vec{B}$$

$$\Rightarrow \underline{\frac{1}{\gamma\mu} \nabla^2 \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{v}) + \partial_t \vec{B}} \quad \text{... Bullard-Gleichung}$$

Beschreibt die Verteilung magnetischer Flüsse in el. leitfähigen, bewegten Medien mit $\mu, \gamma = \text{const}$

Spezialfälle:

$\mu \cdot \gamma \rightarrow \infty$: $\partial_t \vec{B} + \vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{v}) = \vec{0}$, entspricht dem Verschwinden der mitgeschleppten Zeitableitung von $\vec{B}$.

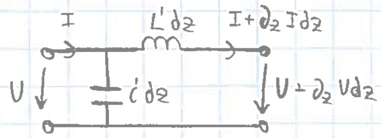
Die Flussverteilung wird dann durch die Bewegung vollständig mitgeschleppt, erscheint also gleichsam in dem Körper eingefroren.

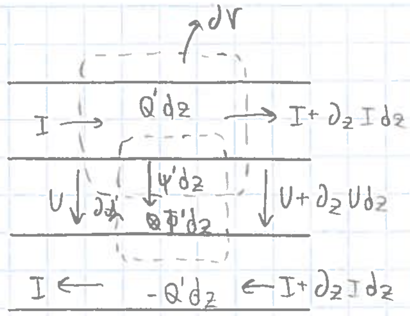
$\vec{v} = \vec{0}$: $\nabla^2 \vec{B} = \mu\gamma \partial_t \vec{B}$ ... Diffusionsgleichung

$\partial_t \vec{B} = \vec{0}$: zeitlich konstante Flussverteilung

$$\frac{1}{\mu\gamma} \nabla^2 \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{v})$$

Verlustfreie Doppelleitung





Induktionsgesetz auf $\partial A'$: $\partial_z U + \partial_t \Phi' = 0$

Ladungserhaltung auf ∂V: $\partial_z I + \partial_t Q' = 0$

$\Psi' = Q' = C'U \quad , \quad \Phi' = L'V = L'I$

Leitungsgleichungen:

$$\boxed{\begin{aligned} \partial_z U + L' \partial_t I &= 0 \\ \partial_z I + C' \partial_t U &= 0 \end{aligned}}$$

Wellengleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \partial_z U + L'\partial_t I = 0 \;\; /\cdot \partial_z \;\; &\rightarrow \;\; \partial_z^2 U + L' \partial_z \partial_t I = 0 \\ \partial_z I + C'\partial_t U = 0 \;\; /\cdot \partial_t \;\; &\rightarrow \;\; \partial_z \partial_t I + C' \partial_t^2 U = 0 \end{aligned}\right\} \; \partial_z^2 U - L'C' \partial_t^2 U = 0$$

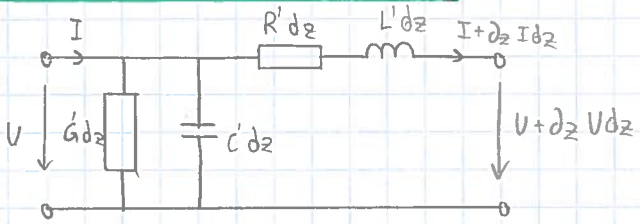
$$\left.\begin{aligned} \partial_z U + L'\partial_t I = 0 \;\; /\cdot \partial_t \;\; &\rightarrow \;\; \partial_z \partial_t U + L' \partial_t^2 I = 0 \\ \partial_z I + C'\partial_t U = 0 \;\; /\cdot \partial_z \;\; &\rightarrow \;\; \partial_z^2 I + C' \partial_z \partial_t U = 0 \end{aligned}\right\} \; \partial_z^2 I - L'C' \partial_t^2 I = 0$$

$$L' C' = \mu \cdot \varepsilon = \frac{1}{c^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \left(\partial_z^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) U &= 0 \\ \left(\partial_z^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) I &= 0 \end{aligned}}$$

$$Z_W = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

Verlustbehaftete Doppelleitung



Leitungsgleichungen:

$$\boxed{\begin{aligned} &\partial_z U + L' \partial_t I + R' I = 0 \\ &\partial_z I + C' \partial_t U + G' U = 0 \end{aligned}}$$

Telegraphengleichungen:

$$\partial_z U + L' \partial_t I + R' I = 0 \quad / \cdot \partial_z \rightarrow \partial_z^2 U + L' \partial_z \partial_t I + R' \partial_z I = 0$$

$$\partial_z I + C' \partial_t U + G' U = 0 \quad / \cdot \partial_t \rightarrow \partial_z \partial_t I + C' \partial_t^2 U + G' \partial_t U = 0$$

$$\Rightarrow \partial_z U^2 - L'C' \partial_t^2 U - L'G' \partial_t U - R'C' \partial_t U - R'G' U = 0$$

$$\partial_z U + L' \partial_t I + R' I = 0 \quad / \cdot \partial_t \rightarrow \partial_z \partial_t U + L' \partial_t^2 I + R' \partial_t I = 0$$

$$\partial_z I + C' \partial_t U + G' U = 0 \quad / \cdot \partial_z \rightarrow \partial_z^2 I + C' \partial_z \partial_t U + G' \partial_z U = 0$$

$$\Rightarrow \partial_z^2 I - L'C' \partial_t^2 I - R'C' \partial_t I - L'G' \partial_t I - R'G' I = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} &\left[\partial_z^2 - L'C' \partial_t^2 - (R'C' + G'L') \partial_t - R'G'\right] U = 0 \\ &\left[\partial_z^2 - L'C' \partial_t^2 - (R'C' + G'L') \partial_t - R'G'\right] I = 0 \end{aligned}}$$

$Z' = R' + j\omega L'$

$Y' = G' + j\omega C'$

$$\underline{Z_W = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}}$$

Verzerrungsfreie Leitung:

$$\underline{\frac{L'}{R'} = \frac{C'}{G'}}$$