Zylinderkoordinaten

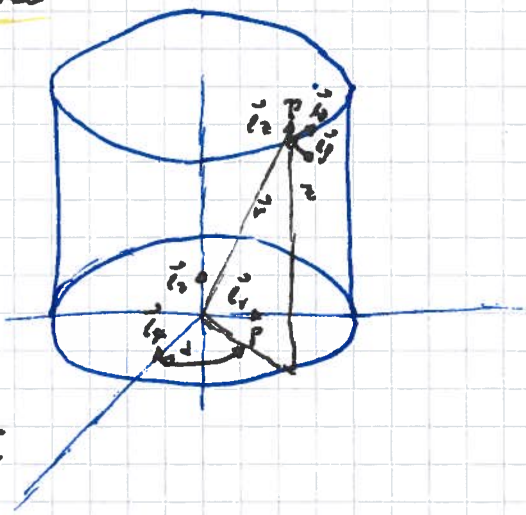
$x = \rho\cos(\alpha) \qquad y = \rho\sin(\alpha) \qquad z = z$

$\vec{r} = \rho\cos(\alpha)\vec{e_x} + \rho\sin(\alpha)\vec{e_y} + z\,\vec{e_z}$

$$\vec{e_\rho} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}\right|} = \frac{\cos(\alpha)\vec{e_x} + \sin(\alpha)\vec{e_y}}{\sqrt{\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)}} = \cos(\alpha)\vec{e_x} + \sin(\alpha)\vec{e_y}$$

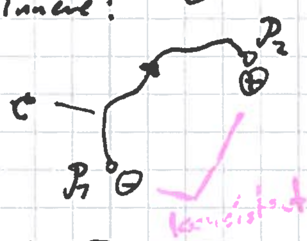
$$\vec{e_\alpha} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha}\right|} = \frac{-\rho\sin(\alpha)\vec{e_x} + \rho\cos(\alpha)\vec{e_y}}{\sqrt{\rho^2(\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha))}} = -\sin(\alpha)\vec{e_x} + \cos(\alpha)\vec{e_y}$$

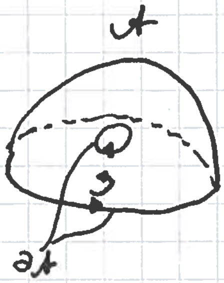
$$\vec{e_z} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}\right|} = \frac{\vec{e_z}}{\sqrt{1^2}} = \vec{e_z}$$

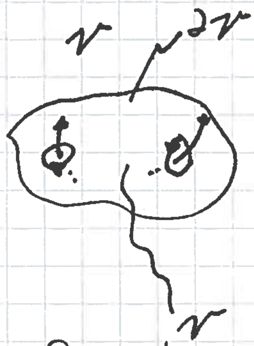


Orientierung

Innere:







$\partial C = P_1 + P_2$

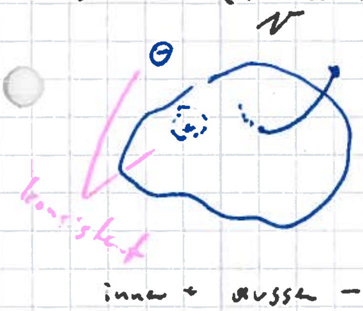
$\partial C_{\text{geschlossen}} = 0$

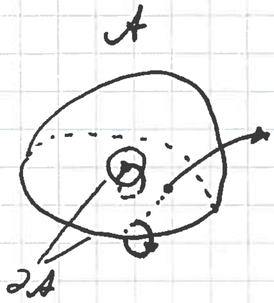
Durchlaufsinn

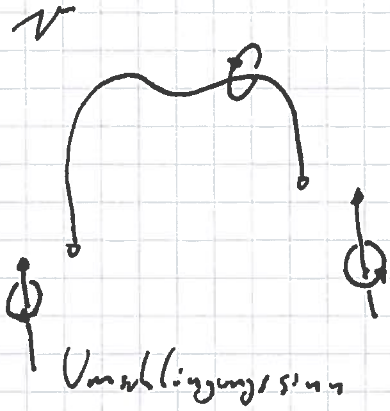
Drehsinn

Schraubsinn

äußere (transversal):







Durchschnittssinn

Umschlingungssinn

- Nicht immer orientierbar
- Wird ganzer Raum einheitlich orientiert so braucht man nicht zu unterscheiden weil umkehrbar eindeutig zusammen hängen
- Wichtig bei Spiegelung!

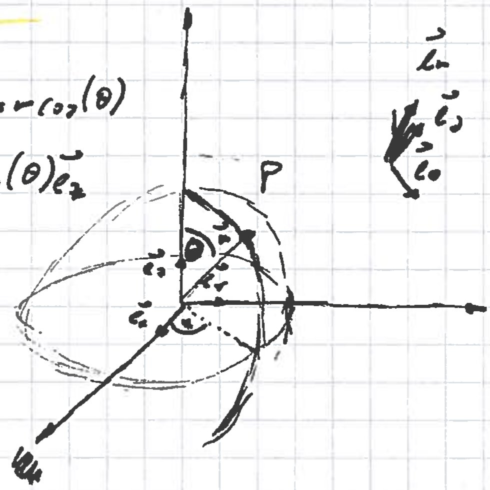
  innere bleibt gleich (z.B. $\vec{E}$)
  äußere drehen sich um (z.B. $\vec{H}$)

Vektoren

$$\vec a\cdot(\vec b\times\vec c) = \vec b\cdot(\vec c\times\vec a) = \vec c\cdot(\vec a\times\vec b) \qquad (\vec a\cdot\vec b)\vec c = \vec a\cdot\vec b\,\vec c$$

$$\vec a\times(\vec b\times\vec c) = \vec b(\vec a\cdot\vec c) - \vec c(\vec a\cdot\vec b)$$

Kugelkoordinaten



$x = r\sin(\theta)\cos(\varphi) \qquad y = r\sin(\theta)\sin(\varphi) \qquad z = r\cos(\theta)$

$$\vec r = r\sin(\theta)\cos(\varphi)\vec e_x + r\sin(\theta)\sin(\varphi)\vec e_y + r\cos(\theta)\vec e_z$$

$$\vec e_r = \frac{\frac{\partial\vec r}{\partial r}}{\left|\frac{\partial\vec r}{\partial r}\right|} = \frac{\sin(\theta)\cos(\varphi)\vec e_x + \sin(\theta)\sin(\varphi)\vec e_y + \cos(\theta)\vec e_z}{\sqrt{\sin^2(\theta)\cos^2(\varphi) + \sin^2(\theta)\sin^2(\varphi) + \cos^2(\theta)}}$$

$$= \sin(\theta)\cos(\varphi)\vec e_x + \sin(\theta)\sin(\varphi)\vec e_y + \cos(\theta)\vec e_z$$

$$\vec e_\theta = \frac{\frac{\partial\vec r}{\partial\theta}}{\left|\frac{\partial\vec r}{\partial\theta}\right|} = \frac{r\cos(\theta)\cos(\varphi)\vec e_x + r\cos(\theta)\sin(\varphi)\vec e_y - r\sin(\theta)\vec e_z}{\sqrt{r^2\cos^2(\theta)\cos^2(\varphi) + r^2\cos^2(\theta)\sin^2(\varphi) + r^2\sin^2(\theta)}}$$

$$\sqrt{r^2\underbrace{\left(\cos^2(\theta)\underbrace{(\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi))}_{1} + \sin^2(\theta)\right)}_{1}}$$

$$1$$

$$= \cos(\theta)\cos(\varphi)\vec e_x + \cos(\theta)\sin(\varphi)\vec e_y - \sin(\theta)\vec e_z$$

$$\vec e_\varphi = \frac{\frac{\partial\vec r}{\partial\varphi}}{\left|\frac{\partial\vec r}{\partial\varphi}\right|} = \frac{-r\sin(\theta)\sin(\varphi)\vec e_x + r\sin(\theta)\cos(\varphi)\vec e_y + 0\vec e_z}{\sqrt{r^2\sin^2(\theta)\sin^2(\varphi) + r^2\sin^2(\theta)\cos^2(\varphi)}} = -\sin(\varphi)\vec e_x + \cos(\varphi)\vec e_y$$

$$\sqrt{r^2\sin^2(\theta)\underbrace{(\sin^2(\varphi)+\cos^2(\varphi))}_{1}}$$

$$r\sin(\theta)$$

Räumliche Ableitung

$\boxed{\text{grad}}$ lokal stärkste Anstieg — Fläche f = konst senkrecht

Verschwindet über Bereich → Feld dort konstant

$\boxed{\text{div}}$ Quellendichte — $(\underbrace{\vec\nabla\cdot\vec f}_{\text{Flussgröße}})V$ ... Fluss durch Hülle

Verschwindet → quellenfrei

$\boxed{\text{rot}}$ Wirbeldichte — Kugel Flüssigkeit: $\vec\omega = \vec\nabla\times\vec v/2$

Verschwindet → wirbelfrei

$\vec{\nabla}$

$$\lim_{a\to 0} \frac{1}{a}\left[\underset{\sim}{F}(\vec{r}+a\vec{e})-\underset{\sim}{F}(\vec{r})\right]=\vec{e}\cdot\underset{\sim}{G}(\vec{r})$$

$\vec{a}\to\vec{0}$ $\quad \underset{\sim}{F}(\vec{r}+\vec{a})=\underset{\sim}{F}(\vec{r})+\vec{a}\cdot\underset{\sim}{G}(\vec{r})+\underset{\sim}{o}(\vec{a})$

$\underset{\sim}{o}(\vec{a})/a \to \underset{\sim}{0}$

$\vec{a}=a\vec{e}$

$\underset{\sim}{G}$ ... gradient von $\underset{\sim}{F}$

$\underset{\sim}{G}=\vec{\nabla}\otimes\underset{\sim}{F}$ $\qquad \vec{e}\cdot\underset{\sim}{G}(\vec{r})=\vec{e}\cdot\vec{\nabla}\underset{\sim}{F}(\vec{r})$

Gauß

$$\underbrace{\int_{V} \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{F}}_{\text{Quellendichte}}\,dV}^{\text{Quellenstärke}} = \overbrace{\int_{\partial V} \vec{n}\cdot\vec{F}\,dA}^{\text{Ergiebigkeit}} = \int_{V'} \vec{\nabla}\cdot\vec{f}\,dV + \int_{\mathcal{F}'} \vec{n}\cdot[\![\vec{f}\,]\!]\,dA$$

Stokes

$$\underbrace{\int_{\mathcal{A}} \vec{n}\cdot(\overbrace{\vec{\nabla}\times\vec{F}}^{\text{Wirbeldichte}})\,dA}_{\text{Wirbelstärke}} = \underbrace{\int_{\partial\mathcal{A}} \vec{s}\cdot\vec{F}\,ds}_{\text{Zirkulation}} = \int_{\mathcal{A}'} \vec{n}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{f})\,dA + \int_{\mathcal{C}'} \vec{s}\cdot[\![\vec{f}\,]\!]\,ds$$

$U(\mathcal{C})$ bzw. $\Phi(\mathcal{A})$ linear $\Rightarrow$ $U(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} \vec{s}\cdot\vec{E}\,ds$

Spannung immer orientiert; magn. Fluss immer orientiert

$\Phi(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} \vec{n}\cdot\vec{B}\,dA$

Induktionsgesetz $U(\partial\mathcal{A}) = -\dot{\Phi}(\mathcal{A})$

Faraday Komplex

el. magn. Feld

U, Φ

$$U(\partial\mathcal{A}) + \dot{\Phi}(\mathcal{A}) = 0$$

$$\int_{\partial\mathcal{A}} \vec{s}\cdot\vec{E}\,ds + \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{A}} \vec{n}\cdot\vec{B}\,dA = 0$$

$$\int_{\mathcal{A}'} \vec{n}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E})\,dA + \int_{\mathcal{C}'} \vec{s}\cdot[\![\vec{E}\,]\!]\,ds + \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{A}} \vec{n}\cdot\vec{B}\,dA = 0$$

$$\int_{\mathcal{A}'} \vec{n}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{d}{dt}\vec{B}\right)dA + \int_{\mathcal{C}'} \vec{s}\cdot[\![\vec{E}\,]\!]\,ds = 0$$

$\Rightarrow \vec{n}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E} + \partial_t\vec{B}) = 0$ $\qquad \vec{s}\cdot[\![\vec{E}\,]\!] = 0$

$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \partial_t\vec{B} = 0$ $\qquad \vec{n}\times[\![\vec{E}\,]\!] = \vec{0}$

$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B}$ $\qquad \vec{n}\times[\![\vec{E}\,]\!] = \vec{0}$

Satz vom mag. Hüllenfluss: $\Phi(\partial V) = 0$

$$\int_{\partial V} \vec{n}\cdot\vec{B}\,dA = 0$$

$$\int_{V'} \vec{n}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})\,dV + \int_{\mathcal{F}'} \vec{n}\cdot[\![\vec{B}\,]\!]\,dA = 0$$

$\Rightarrow \vec{n}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) = 0$ $\qquad \vec{n}\cdot[\![\vec{B}\,]\!] = 0$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ $\qquad \vec{n}\cdot[\![\vec{B}\,]\!] = 0$

$I(\mathcal{A})$ bzw $Q(\mathcal{V})$ linear $I(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}'} \vec{n}\cdot\vec{J}\,dA + \int_{\mathcal{E}'} (\vec{s}\times\vec{n})\cdot\vec{K}\,ds$

Strom Ladung

Satz Erhaltung d. el. Ladung $I(\partial\mathcal{V}) = -\dot{Q}(\mathcal{V})$ $Q(\mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}'} \rho\,dV + \int_{\mathcal{F}'} \sigma\,dA$

transversal orientiert

$I(\partial\mathcal{V}) + \dot{Q}(\mathcal{V}) = 0$

Maxwell-Komplex

$\int_{\partial\mathcal{V}} \vec{n}\cdot\vec{J}\,dA + \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}'} \rho\,dV + \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{F}'} \sigma\,dA = 0$

$\int_{\mathcal{V}'} \vec{\nabla}\cdot\vec{J}\,dA + \int_{\mathcal{F}'} \vec{n}\cdot[\![\vec{J}]\!]\,dA + \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}'} \rho\,dV + \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{F}'} \sigma\,dA = 0$

$\int_{\mathcal{V}'} (\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \partial_t\rho)\,dA + \int_{\mathcal{F}'} (\vec{n}\cdot[\![\vec{J}]\!] + \partial_t\sigma)\,dA = 0$

$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \partial_t\rho = 0$ $\quad \vec{n}\cdot[\![\vec{J}]\!] + \partial_t\sigma = 0$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = -\partial_t\rho$ $\quad \vec{n}\cdot[\![\vec{J}]\!] = -\partial_t\sigma$ Ladungserhaltung Kontinuitätsgleichung

transversal transversal

$V(\mathcal{C})$ bzw $\Psi(\mathcal{A})$ linear $V(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} \vec{s}\cdot\vec{H}\,ds$

magn. Spannung el. Fluss $\Psi(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} \vec{n}\cdot\vec{D}\,dA$

Durchflutungsgesetz

Ampere Maxwell-Satz $\underbrace{V(\partial\mathcal{A}) = I(\mathcal{A}) + \dot{\Psi}(\mathcal{A})}$

$V(\partial\mathcal{A}) - I(\mathcal{A}) - \dot{\Psi}(\mathcal{A}) = 0$

$\int_{\partial\mathcal{A}} \vec{s}\cdot\vec{H}\,ds - \int_{\mathcal{A}'} \vec{n}\cdot\vec{J}\,dA - \int_{\mathcal{E}'} (\vec{s}\times\vec{n})\cdot\vec{K}\,ds - \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{A}} \vec{n}\cdot\vec{D}\,dA = 0$

$\int_{\mathcal{A}} \vec{n}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H})\,dA + \int_{\mathcal{E}'} \vec{s}\cdot[\![\vec{H}]\!]\,ds - \int_{\mathcal{A}'} \vec{n}\cdot\vec{J}\,dA - \int_{\mathcal{E}'} (\vec{s}\times\vec{n})\cdot\vec{K}\,ds - \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{A}} \vec{n}\cdot\vec{D}\,dA = 0$

$\int_{\mathcal{A}} \vec{n}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H} - \vec{J} - \partial_t\vec{D})\,dA + \int_{\mathcal{E}'} (\vec{s}\cdot[\![\vec{H}]\!] - (\vec{s}\times\vec{n})\cdot\vec{K})\,ds = 0$

$\vec{\nabla}\times\vec{H} - \vec{J} - \partial_t\vec{D} = 0$ $\quad [\![\vec{H}]\!] - \vec{K}\times\vec{n} = 0$

$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \partial_t\vec{D}$ $\quad \vec{n}\times[\![\vec{H}]\!] = \vec{K}\underbrace{(\vec{n}\cdot\vec{n})}_{1} - \vec{n}\underbrace{(\vec{n}\cdot\vec{K})}_{0}$

$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \partial_t\vec{D}$ $\quad \vec{n}\times[\![\vec{H}]\!] = \vec{K}$

el. Hüllenfluss: $\Psi(\partial\mathcal{V}) = Q(\mathcal{V})$

$\Psi(\partial\mathcal{V}) - Q(\mathcal{V}) = 0$

$\int_{\partial\mathcal{V}} \vec{n}\cdot\vec{D}\,dA - \int_{\mathcal{V}'} \rho\,dV - \int_{\mathcal{F}'} \sigma\,dA = 0$

$\int_{\mathcal{V}'} \vec{\nabla}\cdot\vec{D}\,dV + \int_{\mathcal{F}'} \vec{n}\cdot[\![\vec{D}]\!]\,dA - \int_{\mathcal{V}'} \rho\,dV - \int_{\mathcal{F}'} \sigma\,dA = 0$

$\int_{\mathcal{V}'} (\vec{\nabla}\cdot\vec{D} - \rho)\,dV + \int_{\mathcal{F}'} (\vec{n}\cdot[\![\vec{D}]\!] - \sigma)\,dA = 0$

$\vec\nabla\cdot\vec D=\rho$ $\qquad$ $n\cdot[\![\vec D]\!]=\sigma$

Induktion

$U(\partial A)=-\dot\Phi(A)$ $\qquad$ $\int_{\partial A}\vec s\cdot\vec E\,ds=-\frac{d}{dt}\int_A\vec n\cdot\vec B\,dA$ $\qquad$ $\vec\nabla\times\vec E=-\partial_t\vec B$ $\qquad$ $\vec n\times[\![\vec E]\!]=\vec 0$

magn. Hüllefluss

$\Phi(\partial V)=0$ $\qquad$ $\int_{\partial V}\vec n\cdot\vec B\,dA=0$ $\qquad$ $\vec\nabla\cdot\vec B=0$ $\qquad$ $\vec n\cdot[\![\vec B]\!]=0$

Ampere-Maxwell

$\underbrace{V(\partial A)=I(A)}_{\text{DFS}}+\dot\Psi(A)$ $\qquad$ $\int_{\partial A}\vec s\cdot\vec H\,ds=\int_A\vec n\cdot\vec J\,dA+\frac{d}{dt}\int_A\vec n\cdot\vec D\,dA$ $\qquad$ $\vec\nabla\times\vec H=\vec J+\partial_t\vec D$ $\qquad$ $\vec n\times[\![\vec H]\!]=\vec K$

el. Hüllefluss

$\Psi(\partial V)=Q(V)$ $\qquad$ $\int_{\partial V}\vec n\cdot\vec D\,dA=\int_V\rho\,dV$ $\qquad$ $\vec\nabla\cdot\vec D=\rho$ $\qquad$ $\vec n\cdot[\![\vec D]\!]=\sigma$

Erhaltung el. Ladung

$I(\partial V)=-\dot Q(V)$ $\qquad$ $\int_{\partial V}\vec n\cdot\vec J\,dA=-\frac{d}{dt}\int_V\rho\,dV$ $\qquad$ $\vec\nabla\cdot\vec J=-\partial_t\rho$ $\qquad$ $\vec n\cdot[\![\vec J]\!]=-\partial_t\sigma$

$\frac{1}{\mu_0}\vec\nabla\times\vec B-\varepsilon_0\partial_t\vec E=\vec J+\partial_t\vec P+\vec\nabla\times\vec M$ $\qquad$ $\frac{1}{\mu_0}\vec n\times[\![\vec B]\!]=\vec K+\vec n\times[\![\vec M]\!]$

$\vec D=\varepsilon_0\vec E$ $\qquad$ $\vec H=\frac{1}{\mu_0}\vec B$ $\qquad$ $\varepsilon_0\vec\nabla\cdot\vec E=\rho-\vec\nabla\cdot\vec P$ $\qquad$ $\varepsilon_0\vec n\cdot[\![\vec E]\!]=\sigma-\vec n\cdot[\![\vec P]\!]$

Polarisationsladungsdichte

$\mu_0\varepsilon_0 c_0^2=1$

$\rho\to\rho\overbrace{-\vec\nabla\cdot\vec P}^{\text{fiktiv}}$ $\qquad$ $\vec P=\varepsilon_0\chi\vec E$ $\qquad$ $\vec M=\kappa\vec H$

$\vec J\to\vec J+\overbrace{\partial_t\vec P+\vec\nabla\times\vec M}^{\text{fiktiv}}$ $\qquad$ mit $\vec M$ magn. Polarisation

$\vec D=\varepsilon_0\vec E+\vec P$ $\qquad$ $\vec H=\frac{1}{\mu_0}\vec B-\vec M$

$\vec M,\vec P$ Dichte der gemittelten Dipolmomente

Polarisationsstromdichte $\qquad$ Magnetisierungsstromdichte

$\vec J=\gamma\vec E$ $\qquad$ $[P]=[D]=\frac{As}{m^2}$ $\qquad$ $[M]=\frac{A}{m}$

$\boxed{\begin{array}{ll} \vec E'=\vec E+\vec v\times\vec B \;① & \vec B'=\vec B \\ \vec H'=\vec H-\vec v\times\vec D \;② & \vec D'=\vec D \\ \vec M'=\vec M+\vec v\times\vec P & \vec P'=\vec P \\ \vec J'=\vec J-\vec v\rho & \rho'=\rho \end{array}}$

$\vec J'=\gamma\vec E'$

$\vec J-\vec v\rho=\gamma(\vec E+\vec v\times\vec B)$

Konduktionsstromdichte

Konvektionsstromdichte

① Rowland-Experiment

② bewegte Metallplatte in $\vec B$

$$\frac{d}{dt}\int_A \vec{n}\cdot\vec{F}\,dA = \int_A \vec{n}\cdot(\partial_t^c \vec{F})\,dA$$

$$\boxed{\partial_t^c \vec{F} = \partial_t \vec{F} + \vec{v}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\times(\vec{F}\times\vec{v})}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\times\vec{E}' &= -\partial_t^c \vec{B} & \qquad \vec{n}\times[[\vec{E}']] &= \vec{0}\\
\vec{\nabla}\cdot\vec{B} &= 0 & \vec{n}\cdot[[\vec{B}]] &= 0\\
\vec{\nabla}\times\vec{H}' &= \vec{J}' + \partial_t^c \vec{D} & \vec{n}\times[[\vec{H}']] &= \vec{K}'\\
\vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= \rho & \vec{n}\cdot[[\vec{D}]] &= \sigma
\end{aligned}$$

$$\vec{n}\times\vec{v}\times[[\vec{B}]] = \vec{v}(\overbrace{\vec{n}\cdot[[\vec{B}]]}^{0}) - [[\vec{B}]](\vec{n}\cdot\vec{v})$$

$$\vec{n}\times[[\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}]] = \vec{0}$$

$$\vec{n}\times[[\vec{E}]] - v_n[[\vec{B}]] = \vec{0}$$

$$\vec{n}\times[[\vec{E}]] = v_n[[\vec{B}]]$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{E}+\cancel{\vec{v}\times\vec{B}}) = -\partial_t\vec{B} - \vec{v}\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{B}}_{0} - \cancel{\vec{\nabla}\times(\vec{B}\times\vec{v})}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B}$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{H}-\cancel{\vec{v}\times\vec{D}}) = \vec{J}' + \partial_t\vec{D} + \vec{v}\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{D}}_{\rho} + \cancel{\vec{\nabla}\times(\vec{D}\times\vec{v})}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}' + \partial_t\vec{D} + \vec{v}\rho$$

$$\vec{n}\times[[\vec{H}']] = \vec{K}'$$

$$\vec{n}\times[[\vec{H} - \vec{v}\times\vec{D}]] = \vec{K}'$$

$$\vec{n}\times[[\vec{H}]] - \vec{v}(\underbrace{\vec{n}\cdot[[\vec{D}]]}_{\sigma}) + [[\vec{D}]](\vec{n}\cdot\vec{v}) = \vec{K}'$$

$$\vec{n}\times[[\vec{H}]] = \vec{K}' + \vec{v}\sigma - v_n[[\vec{D}]]$$

$$\boxed{\begin{aligned}
\vec{\nabla}\times\vec{E} &= -\partial_t\vec{B} & \qquad \vec{n}\times[[\vec{E}]] &= v_n[[\vec{B}]]\\
\vec{\nabla}\cdot\vec{B} &= 0 & \vec{n}\cdot[[\vec{B}]] &= 0\\
\vec{\nabla}\times\vec{H} &= \vec{J}' + \vec{v}\rho + \partial_t\vec{D} & \vec{n}\times[[\vec{H}]] &= \vec{K}' + \vec{v}\sigma - v_n[[\vec{D}]]\\
\vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= \rho & \vec{n}\cdot[[\vec{D}]] &= \sigma
\end{aligned}}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \qquad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}' + \vec{v}\times\vec{P}$$

$$\vec{J}' \qquad \vec{K}' \qquad \vec{M}'$$

Bezogene Feldgrößen

$\tilde{\vec E} = \vec E / E_0 \qquad \tilde{\vec B} = \vec B / B_0 \qquad \tilde{\vec H} = \vec H \mu / B_0 \qquad \tilde{\vec D} = \vec D / (\varepsilon E_0) \qquad \tilde{\vec J} = \vec J / (\gamma E_0)$

$\tilde\rho = \rho L / (\varepsilon E_0) \qquad \tilde{\vec K} = \vec K \mu / B_0 \qquad \tilde\sigma = \sigma / (\varepsilon E_0) \qquad \tilde{\vec v} = \vec v / v_0$

$\tilde\nabla = L \nabla \qquad \tilde\partial_t = T \partial_t$

$T_R = \frac{\varepsilon}{\gamma} \qquad R_e = \frac{\varepsilon v_0}{\gamma L} \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}$

Relaxationszeitkonstante

Reynoldszahl

$$\vec\nabla \times \vec E = -\partial_t \vec B \qquad \vec n \times [\![\vec E]\!] = v_n [\![\vec B]\!] \qquad \vec E' = \vec E + \vec v \times \vec B \qquad \vec B' = \vec B$$

$$\vec\nabla \cdot \vec B = 0 \qquad \vec n \cdot [\![\vec B]\!] = 0 \qquad \vec H' = \vec H - \vec v \times \vec D \qquad \vec D' = \vec D$$

$$\vec\nabla \times \vec H = \vec J + \partial_t \vec D \qquad \vec n \times [\![\vec H]\!] = \vec K - v_n [\![\vec D]\!] \qquad \vec J' = \vec J - \vec v \rho \qquad \rho' = \rho$$

$$\vec\nabla \cdot \vec D = \rho \qquad \vec n \cdot [\![\vec D]\!] = \sigma \qquad \vec K' = \vec K - \vec v \sigma \qquad \sigma' = \sigma$$

$$\frac{E_0}{L} \tilde\nabla \times \tilde E = -\frac{B_0}{T} \tilde\partial_t \tilde B \qquad \boxed{\tilde\nabla \times \tilde E = -\left[\frac{L B_0}{T E_0}\right] \tilde\partial_t \tilde B}$$

$$\frac{B_0}{L} \tilde\nabla \cdot \tilde B = 0 \qquad \boxed{\tilde\nabla \cdot \tilde B = 0}$$

$$\frac{B_0}{\mu L} \tilde\nabla \times \tilde H = \gamma E_0 \tilde J + \frac{\varepsilon E_0}{T} \tilde\partial_t \tilde D \qquad \tilde\nabla \times \tilde H = \left[\frac{\mu \gamma L E_0}{B_0}\right] \tilde J + \left[\frac{\mu \varepsilon L E_0}{T B_0}\right] \tilde\partial_t \tilde D$$

$$\boxed{\tilde\nabla \times \tilde H = \left[\frac{L}{c T_R} \cdot \frac{E_0}{c B_0}\right] \tilde J + \left[\frac{L}{c T} \cdot \frac{E_0}{c B_0}\right] \tilde\partial_t \tilde D}$$

$$\cancel{\frac{\varepsilon E_0}{L}} \tilde\nabla \cdot \tilde D = \cancel{\frac{\varepsilon E_0}{L}} \tilde\rho \qquad \boxed{\tilde\nabla \cdot \tilde D = \tilde\rho}$$

$$E_0 \vec n \times [\![\tilde E]\!] = B_0 v_0 \tilde v_n [\![\tilde B]\!] \qquad \boxed{\vec n \times [\![\tilde E]\!] = \left[\frac{v_0 B_0}{E_0}\right] \tilde v_n [\![\tilde B]\!]}$$

$$\boxed{\vec n \cdot [\![\tilde B]\!] = 0}$$

$$\frac{B_0}{\mu} \vec n \times [\![\tilde H]\!] = \frac{B_0}{\mu} \tilde K - v_0 \varepsilon E_0 \tilde v_n [\![\tilde D]\!] \qquad \boxed{\vec n \times [\![\tilde H]\!] = \tilde K - \left[\frac{v_0}{c} \cdot \frac{E_0}{c B_0}\right] \tilde v_n [\![\tilde D]\!]}$$

$$\boxed{\vec n \cdot [\![\tilde D]\!] = \tilde\sigma}$$

$$E_0 \tilde E' = E_0 \tilde E + v_0 B_0 \tilde v \times \tilde B \qquad \tilde E' = \tilde E + \left[\frac{v_0 B_0}{E_0}\right] \tilde v \times \tilde B \qquad \tilde B' = \tilde B$$

$$\frac{B_0}{\mu} \tilde H' = \frac{B_0}{\mu} \tilde H - v_0 \varepsilon E_0 \tilde v \times \tilde D \qquad \tilde H' = \tilde H - \left[\frac{v_0}{c} \cdot \frac{E_0}{c B_0}\right] \tilde v \times \tilde D \qquad \tilde D' = \tilde D$$

$$\gamma E_0 \tilde J' = \gamma E_0 \tilde J - \frac{v_0 \varepsilon E_0}{L} \tilde v \tilde\rho \qquad \tilde J' = \tilde J - [R_e] \tilde v \tilde\rho \qquad \tilde\rho' = \tilde\rho$$

$$\frac{B_0}{\mu} \tilde K' = \frac{B_0}{\mu} \tilde K - v_0 \varepsilon E_0 \tilde v \tilde\sigma \qquad \tilde K' = \tilde K - \left[\frac{v_0}{c} \cdot \frac{E_0}{c B_0}\right] \tilde v \tilde\sigma \qquad \tilde\sigma' = \tilde\sigma$$

dominant elektrisch

$\frac{LB_0}{TE_0} \ll 1$ $\qquad$ $\frac{v_0 B_0}{E_0} \ll 1$

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ $\qquad$ $\vec{n} \times [\![\vec{E}]\!] = \vec{0}$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$ $\qquad$ $n \cdot [\![D]\!] = \sigma$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\partial_t \rho$ $\qquad$ $\vec{E}' = \vec{E}$ $\quad$ $\vec{D}' = \vec{D}$ $\quad$ $\rho' = \rho$ $\quad$ $\sigma' = \sigma$

$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \partial_t \vec{D}$ $\qquad$ $\vec{H}' = \vec{H} - \vec{v} \times \vec{D}$ $\quad$ $\vec{J}' = \vec{J} - \vec{v}\rho$ $\quad$ $\vec{K}' = \vec{K} - \vec{v}\sigma$

zeitlich nach typisch $E_0 = cB_0$ $\Rightarrow$ $\frac{L}{cT} \ll 1$

auch hohe Frequenzen wenn $L \ll$

dominant magnetisch

$\frac{L}{cT} \cdot \frac{E_0}{cB_0} \ll 1$ $\qquad$ $\frac{v_0}{c} \cdot \frac{E_0}{cB_0} \ll 1$

el. Leitfähig: $R_e \ll 1$ $\qquad$ $T_R / T \ll 1$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ $\qquad$ $\vec{n} \cdot [\![\vec{B}]\!] = 0$

$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$ $\qquad$ $n \times [\![\vec{H}]\!] = \vec{K}$

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$ $\qquad$ $\vec{n} \times [\![E]\!] = v_n [\![\vec{B}]\!]$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$

$\vec{B}' = \vec{B}$ $\quad$ $\vec{H}' = \vec{H}$ $\quad$ $\vec{J}' = \vec{J}$ $\quad$ $\vec{K}' = \vec{K}$

$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$

Energie & Impuls

Energieinhalt, Energiefluss, Produktionsrate

$$\dot{W}(\mathcal{V}) + Q(\partial\mathcal{V}) = R(\mathcal{V})$$
$$\dot{\vec{G}}(\mathcal{V}) + \vec{P}(\partial\mathcal{V}) = \vec{F}(\mathcal{V})$$

Bilanzgleichungen

Impulsinhalt, Impulsfluss, Produktionsrate

Bei vollständigen Systemen $R(\mathcal{V}), \vec{F}(\mathcal{V})$ 0!

$\Rightarrow$ Erhaltungsgleichungen

$$W(\mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}} w\, dV \qquad Q(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} \vec{n}\cdot\vec{q}\, dA \qquad R(\mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}'} r\, dV + \int_{\mathcal{F}'} r^s\, dA$$

Energiedichte, Energieflussdichte, Leistungsdichte, Flächenleistungsdichte

$$\boxed{\partial_t^c f = \partial_t f + \vec{\nabla}\cdot(f\vec{v})}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}} w\, dV + \int_{\partial\mathcal{V}} \vec{n}\cdot\vec{q}\, dA = \int_{\mathcal{V}'} r\, dV + \int_{\mathcal{F}'} r^s\, dA$$

$$\int_{\mathcal{V}} \partial_t^c w\, dV + \int_{\mathcal{V}'} \vec{\nabla}\cdot\vec{q}\, dV + \int_{\mathcal{F}'} \vec{n}\cdot[\![\vec{q}]\!]\, dA = \int_{\mathcal{V}'} r\, dV + \int_{\mathcal{F}'} r^s\, dA$$

$$\boxed{\partial_t w + \vec{\nabla}\cdot\vec{q} = r} \qquad \boxed{-v_n[\![w]\!] + \vec{n}\cdot[\![\vec{q}]\!] = r^s}$$

$$\vec{G}(\mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}} \vec{g}\, dV \qquad \vec{P}(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} \vec{n}\cdot\underset{\sim}{p}\, dA \qquad \vec{F}(\mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}'} \vec{f}\, dV + \int_{\mathcal{F}'} \vec{f}^s\, dA$$

Impulsdichte, Impulsflussdichte, Kraftdichte, Flächenkraftdichte

$$\boxed{\partial_t\vec{g} + \vec{\nabla}\cdot\underset{\sim}{p} = \vec{f}} \qquad \boxed{-v_n[\![\vec{g}]\!] + \vec{n}\cdot[\![\underset{\sim}{p}]\!] = \vec{f}^s}$$

Teilsysteme:

$$w = w^m + w^e \qquad \vec{q} = \vec{q}^m + \vec{q}^e$$
$$\vec{g} = \vec{g}^m + \vec{g}^e \qquad \underset{\sim}{p} = \underset{\sim}{p}^m + \underset{\sim}{p}^e$$
$$0 = r^m + r^e \qquad 0 = r^{sm} + r^{se}$$
$$\vec{0} = \vec{f}^m + \vec{f}^e \qquad \vec{0} = \vec{f}^{sm} + \vec{f}^{se}$$

$$w^e = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2 \qquad \vec{q}^e = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$$
$$\vec{g}^e = \varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B} \qquad \underset{\sim}{p}_e = w_e\underset{\sim}{\delta} - \varepsilon_0\vec{E}\otimes\vec{E} - \frac{1}{\mu_0}\vec{B}\otimes\vec{B}$$

Poynting Satz + Vektor

$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{E}}_{-\partial_t \vec{B}}) - \vec{E} \cdot (\underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{H}}_{\vec{J} + \partial_t \vec{D}}) = -\vec{H} \cdot \partial_t \vec{B} - \vec{E} \cdot \vec{J} - \vec{E} \cdot \partial_t \vec{D}$$

$$\vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} + \vec{H} \cdot \partial_t \vec{B} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{E} \cdot \vec{J}$$

$$\int_V (\vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} + \vec{H} \cdot \partial_t \vec{B})\, dV + \int_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H})\, dV = -\int_V \vec{E} \cdot \vec{J}\, dV$$

$$\boxed{\int_V (\vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} + \vec{H} \cdot \partial_t \vec{B})\, dV + \int_{\partial V} \vec{n} \cdot (\underbrace{\vec{E} \times \vec{H}}_{\vec{S}})\, dA = -\int_V \vec{E} \cdot \vec{J}\, dV}$$

$P = U \cdot I = E \cdot l \cdot J \cdot A = E \cdot J \cdot V$

$\frac{P}{V} = J \cdot E$

$r^m = -r^l = \vec{J} \cdot \vec{E}$

$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \partial_t \vec{D}$

$\vec{J} = -\partial_t \vec{D} + \vec{\nabla} \times \vec{H}$

$r^l = -\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H} + \vec{E} \cdot \partial_t \vec{D}$

$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H})$

$r^l = \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \partial_t (\vec{E} \cdot \vec{D}) - \vec{D} \cdot (\partial_t \vec{E})$

$\partial_t (\vec{E} \cdot \vec{D}) = \vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} + \vec{D} \cdot \partial_t \vec{E}$

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$

$$= \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \partial_t (\vec{E} \cdot \vec{D}) + \underbrace{\vec{H} \cdot (\partial_t \vec{B}) - \vec{D} \cdot (\partial_t \vec{E})}_{-\partial_t \tilde{w}}$$

$d\tilde{w}(\vec{E}, \vec{B}) = \vec{D} \cdot d\vec{E} - \vec{H} \cdot d\vec{B}$

Dichtefunktion

$\partial_t \tilde{w} = \vec{D} \cdot \partial_t \vec{E} - \vec{H} \cdot \partial_t \vec{B}$

$$r^l = \partial_t (\overbrace{\vec{E} \cdot \vec{D} - \tilde{w}}^{w^l}) + \vec{\nabla} (\underbrace{\vec{E} \times \vec{H}}_{\vec{q}^l})$$

$r = \partial_t w + \vec{\nabla} \vec{q}$

$w^l = \vec{E} \cdot \vec{D} - \tilde{w}$

Energiedichte

$\boxed{\vec{q}^l = \vec{E} \times \vec{H} = \vec{S}}$ ..... Energieflussdichte

Vorstufe zu Energiesatz

$U(\partial A) = 0$ $\qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{0}$ $\qquad \vec{n}\times[\![\vec{E}]\!] = \vec{0}$ $\qquad \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$

$\Psi(\partial V) = Q(V)$ $\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho$ $\qquad \vec{n}\cdot[\![\vec{D}]\!] = \sigma$

$\varphi: \quad U(C) = \int_C \vec{s}\cdot\vec{E}\,ds = \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2) \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$

Anfang $\qquad$ Ende

→ Skalarfeld; einfacher zu berechnen

Poisson / Laplace Gleichung:

$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho \qquad \vec{D} = \varepsilon\vec{E} \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$

$\rho = \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \vec{\nabla}\cdot\varepsilon\vec{E} = -\vec{\nabla}\cdot\varepsilon\vec{\nabla}\varphi \rightarrow \rho = -\varepsilon\nabla^2\varphi \Rightarrow \nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$ Poisson

konstantes ε $\qquad \nabla^2\varphi = 0$ Laplace

lineare partielle DGL elliptischen Typus

Grundlösung: $\nabla'^2 G(\vec{r},\vec{r}\,') = -\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$

$$G(\vec{r},\vec{r}\,') = G(\vec{r}\,',\vec{r}) = \underbrace{\frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}_{\text{partikulär}} + \underbrace{g(\vec{r},\vec{r}\,')}_{\text{homogen}}$$

Vorgangsweise:

- best. part. Lösung zur Funktion $\rho(\vec{r})$

$$\varphi_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \underbrace{\frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV'}$$

über ganzen Trägerbereich ρ

- Überlagerung der homogenen Lösung um Randdaten an Randbedingungen anzupassen

in jedem Punkt stetig diffbar ~~absolut~~ konv. Taylorreihe

Dirichlet: vorgegebene Randwerte $\boxed{\varphi = f}$ $\boxed{\text{analytische } f \rightarrow \text{genau eine Lsg } \varphi}$

Neumann: vorgegebene Normalableitung $\boxed{\partial_n\varphi = -E_n}$

Ladungsfrei

analytisches E_n
$\oint_{\partial V} E_n\,dA = 0$ } bis auf willkürliche Konstante eindeutig Lsg φ

nur inneres Neumann Problem

BRUNNEN

mit Raumladung

Dirichlet: $\varphi = \varphi_h + \varphi_p$

Partikulärlösung z.B. $\varphi_p(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV'$

Homogene Lösung ein in V harmonisches Skalarfeld φ_h das am Rand ∂V Werte $f - \varphi_p$ annimmt

vorgegebene Randwert

im Endlichen 2 mal stetig diffbar + $\nabla^2 u = 0$

im ∞ gegen u_∞ konvergiert

Neumann: $\varphi = \varphi_h + \varphi_p$

Partikulärlösung z.B. $\varphi_p(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV'$

φ_h das am Rand $-E_n - \partial_n \varphi_p$ annimmt

vorgegebener Randwert

Falls ∂V Hülle $\mathcal{S}_1$ enthält (inneres Problem)

$$\int_{\partial V} E_n \, dA - \frac{1}{\varepsilon}\int_V \rho \, dV = 0$$ Integrabilitätsbedingung

Laplace 2d / 3d

$\nabla^2 \varphi = 0 \qquad \partial_x^2 \varphi + \partial_y^2 \varphi + \partial_z^2 \varphi = 0$

Ansatz: $\varphi(x,y) = X(x)Y(y)$

$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

$\to$ Seiten können nur konstante sein

$\frac{X''(x)}{X(x)} = k^2 \qquad -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = k^2$

$X''(x) - k^2 X(x) = 0 \qquad Y''(y) + k^2 Y(y) = 0$

$X(x) = A_1 e^{kx} + A_2 e^{-kx} \qquad Y(y) = B_1 \cos(ky) + B_2 \sin(ky)$

$$\boxed{\varphi(x,y) = C e^{-kx} \sin(ky)}$$

Grundform

Durch linearkombination erweiterbar auf beliebig

$\to$ Fourier-Reihen

Ansatz: $\varphi(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$

$X''(x)Y(y)Z(z) + X(x)Y''(y)Z(z) + X(x)Y(y)Z''(z) = 0$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0$$

α, β positiv vorausgesetzt

$-\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 = 0$

$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\alpha^2$

$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\beta^2$

$\frac{Z''(z)}{Z(z)} = \gamma^2$

$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$

$$\boxed{\begin{aligned} X(x) &= A_1 \cos(\alpha x) + A_2 \sin(\alpha x) \\ Y(y) &= B_1 \cos(\beta y) + B_2 \sin(\beta y) \\ Z(z) &= C_1 e^{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\, z} + C_2 e^{-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\, z} \end{aligned}}$$

können nicht alle 3 Ce^x sein

Laplace 2d Polar/Kreiszyl.

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} = 0$$

$$\varphi(\rho,\alpha) = R(\rho)S(\alpha)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho R'(\rho)S(\alpha) + \frac{1}{\rho^2}R(\rho)S''(\alpha) = 0$$

$$\frac{1}{\rho}R'(\rho)S(\alpha) + \frac{1}{\cancel{\rho}}\cancel{\rho}R''(\rho)S(\alpha) + \frac{1}{\rho^2}R(\rho)S''(\alpha) = 0$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{R'(\rho)}{R(\rho)} + \frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \frac{1}{\rho^2}\frac{S''(\alpha)}{S(\alpha)} = 0$$

$$\rho\frac{R'(\rho)}{R(\rho)} + \rho^2\frac{R''(\rho)}{R(\rho)} = -\frac{S''(\alpha)}{S(\alpha)}$$

$$\rho^2R''(\rho) + \rho R'(\rho) - k^2R(\rho) = 0 \qquad S''(\alpha) + k^2S(\alpha) = 0$$

$$R(\rho) = A_1\rho^k + A_2\rho^{-k} \qquad S(\alpha) = B_1\cos(k\alpha) + B_2\sin(k\alpha)$$

bzw. f $k=0$

$$R(\rho) = A_1 + A_2\ln(a/\rho) \qquad S(\alpha) = B_1 + B_2\alpha \qquad a>0$$

3 Terme: $\varphi_1(\rho) = C_1\ln(a/\rho)$ $\quad\varphi_2(\alpha) = C_2\alpha$ $\quad\varphi_3(\rho,\alpha) = C_3\alpha\ln(a/\rho)$

$$\boxed{\varphi(\rho,\alpha) = C_k\rho^k\cos(k\alpha)}$$

Grundform

holomorphe Fkt.

$f(\zeta) = u(x,y) + j\,v(x,y)$ $\qquad \zeta = x + jy$

holomorph wenn in jedem Punkt stetig diffbar

$\Downarrow$

u, v stetig partiell diffbar +

$\partial_x u = \partial_y v \qquad \partial_y u = -\partial_x v$

Cauchy-Riemann-Diffgleichung

ladungsfreies Gebiet el. stat

$\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y \qquad \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \qquad \varepsilon \dots$ konst.

$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$

$\Rightarrow \partial_x E_x = -\partial_y E_y \qquad \partial_y E_x = \partial_x E_y$

$\Rightarrow \quad u = E_x \qquad v = -E_y$

$$\boxed{E(\zeta) = E_x(x,y) - j\,E_y(x,y)}$$

konforme Abbildung ... winkeltreu

elstat. Vektorpotential

$\Psi(\partial V) = 0$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$

$\Psi(A) = \int_{\partial A} \vec{s} \cdot \vec{V} \, ds \qquad \vec{D} = \vec{\nabla} \times \vec{V}$

$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ mit ε konst $\to \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$

$\to \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \vec{0}$

$\vec{D}, \vec{E}$ in x, y mit invariant in z $\to \vec{V} = V \vec{e}_z$ mit V unabhängig z

$\Psi(A) = \ell [V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1)] \qquad \vec{D} = -\vec{e}_z \times \vec{\nabla} V$

ε konst ... $\nabla^2 V = 0$

$\vec{E}$ od φ bekannt $\to \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = -\vec{e}_z \times \vec{\nabla}(V/\varepsilon)$

Relaxion

quasi dominant el.

$$\vec\nabla\times\vec E=\vec 0 \qquad \vec n\times[\![\vec E]\!]=\vec 0$$
$$\vec\nabla\cdot\vec D=\rho \qquad \vec n\cdot[\![\vec D]\!]=\sigma$$
$$\vec\nabla\cdot\vec J=-\partial_t\rho \qquad \vec n\cdot[\![\vec J]\!]=-\partial_t\sigma$$
$$\vec D=\varepsilon\vec E \qquad \vec J=\gamma\vec E+\rho\vec v$$

ε,γ … konstant:

$$\vec J=\gamma\cdot\frac{\vec D}{\varepsilon}+\rho\vec v$$
$$0=-\vec\nabla\cdot\vec J+\vec\nabla\cdot(\rho\vec v)+\frac{\gamma}{\varepsilon}\vec\nabla\cdot\vec D$$
$$\boxed{\partial_t\rho+\vec\nabla\cdot(\rho\vec v)+\frac{\gamma}{\varepsilon}\rho=0}$$

Relaxationsgleichung

2. Term ab $R_e\gtrsim 1$ konvektive Ladungstransport

Ladung ändert sich nicht mit

$\left\{\begin{array}{l} T_R>>T \;\; \hat\partial_t\rho\approx 0 \rightarrow \text{isolator} \\ T_R<<T \;\ldots\; \rho\approx 0 \rightarrow \text{relaxiert sofort Leiter}\end{array}\right.$

$$\boxed{\frac{T_R}{T}\hat\partial_t\rho+R_e\hat\nabla\cdot(\rho\hat v)+\rho=0}$$

bezogen $\hat\nabla=L\vec\nabla \quad \hat\partial_t=T\partial_t$

$\hat v=\vec v/v_0$

$$\boxed{T_R=\frac{\varepsilon}{\gamma}} \qquad \boxed{R_e=\frac{\varepsilon v_0}{\gamma L}}$$

Relaxationszeitkonst. Reynoldszahl

$\vec v=0$

ohne Bewegung:

$$\boxed{T_R\cdot\partial_t\rho+\rho=0 \qquad \rho(\vec r,t)=\rho(\vec r,0)e^{-\frac{t}{T_R}}}$$

in linearen, homogenem Material im stationären Zustand keine Überschussladungen!

→ Ladung nur an Materialinhomogenitäten

$\vec v(\vec r,t)$

mit Bewegung:

$$\boxed{T_R[\underbrace{\partial_t\rho+\vec\nabla\cdot(\rho\vec v)}_{\text{mitgekoppelte Zeitableitung}}]+\rho=0}$$

$$T_R\partial_t^c\rho+\rho=0$$
$$T_R\dot Q(V)+Q(V)=0 \qquad Q(V)=\int_V\rho\,dV$$

wieder exponentiell abklingend

homogenes Material → Ladung → 0 (falls keine eingebracht)

T_R: soll el. Raumladung in Medium (v_0) über L transportiert

→ L/v_0 nicht wesentlich relaxieren → $T_R>L/v_0$ bzw $R_e=T_R v_0/L>1$

magn. Vektorpotential

$$\Phi(\partial V) = 0 \qquad V(\partial A) = I(A)$$

gilt f. alle A mit $\partial A = 0$!

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad n\cdot[\![\vec{B}]\!] = 0 \qquad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} \qquad n\times[\![\vec{H}]\!] = \vec{K}$$

Stromverteilung Quellenfrei

$$I(\partial V) = 0 \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0 \quad \vec{n}\cdot[\![\vec{J}]\!] = 0$$

$$\Phi(A) = \int_A \vec{n}\cdot\vec{B}\,dA = \int_{\partial A}\vec{s}\cdot\vec{A}\,ds \qquad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

Stokes

$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0 \rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{B}$ tut noch

nur Rotation bzw Wirbelstärke festgelegt

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{\nabla}\times\vec{A}' \quad \rightarrow \quad \left.\begin{array}{l}\vec{\nabla}\times(\vec{A}'-\vec{A}) = \vec{0}\\ \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}C) = \vec{0}\end{array}\right\}\ \vec{A}'-\vec{A} = \vec{\nabla}C$$

$$\boxed{\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}C}$$ Eichtransformation

$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ kann passend gewählt werden

$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ Maxwelleichung / Coulombeichung

$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \mu\varepsilon\,\partial_t\varphi = 0$ Lorentz-Eichung

magn. Skalarpotential

$$V(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}}\vec{s}\cdot\vec{H}\,ds = \varphi_m(\vec{r}_1) - \varphi_m(\vec{r}_2) \qquad H = -\vec{\nabla}\varphi_m$$

$V(\partial A) = 0$ bzw $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{0}$ für stromfrei erfüllt
(rot div $= \vec{0}$)

ideal magnetisierbar $\rightarrow$ konstantes Skalarpotential
$\rightarrow$ notwendig Stromfrei

Laplace / Poisson magnet.

$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \qquad \vec{H} = \vec{B}/\mu \qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{J}$

$$\boxed{\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 A = \mu \vec{J}}$$

mit Maxwellgleichung $(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0)$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}}$$ Poisson

bzw. Stromfrei:

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} = 0}$$ Laplace

$$\boxed{\vec{A}_p(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}' dV'}{R}}$$

$+ \vec{A}_h$
außer Feldbereich ganzer Raum
μ einheitlich und $\vec{J}$ im ganzen Raum

$$\vec{B}_p(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}_p(\vec{r})$$

$$= \frac{\mu}{4\pi} \vec{\nabla} \times \int_V \vec{J}' \frac{1}{R} dV'$$

$$= -\frac{\mu}{4\pi} \int_V \vec{J}' \times \left(\vec{\nabla} \frac{1}{R}\right) dV'$$ Kettenregel!

$$\boxed{\vec{B}_p(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}' \times \vec{e}_R}{R^2} dV'}$$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \vec{B} = \mu \vec{H} \qquad \vec{H} = -\vec{\nabla} \varphi_m$

$-\vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{\nabla} \varphi_m) = 0$

$$\boxed{\nabla^2 \varphi_m = 0}$$

Ebene Magnetfelder

$\vec{B}, \vec{H}$ jedem Punkt $\parallel$ x,y Ebene + Translationsinvariant gegenüber z

$\Rightarrow \vec{A} = A\vec{e}_z$ $\quad \vec{J} = J\vec{e}_z$ ($\vec{A}$ bzw $\vec{J}$ in z-gerichtet)

$\Phi(A) = \ell\,[A(\vec{r}_2) - A(\vec{r}_1)]$ $\qquad \vec{B} = -e_z \times \vec{\nabla} A$

$\vec{B}$ Vektorlinien gleich Linien wo A = konst

$\partial_x B_x + \partial_y B_y = 0 \qquad \partial_x H_y - \partial_y H_x = J$

$B_x = \partial_y A \qquad B_y = -\partial_x A$

für μ const

$\partial_x^2 A + \partial_y^2 A = -\mu J$

Bullardgleichung

dom. magnetisch: $\Phi(\partial V)=0$ $\quad V(\partial A)=I(A)$ $\quad U(\partial A)=-\dot{\Phi}(A)$

$\vec\nabla\cdot\vec B=0$ $\quad \vec n\cdot[\vec B]=0$ $\quad \vec\nabla\times\vec H=\vec J$ $\quad \vec n\times[\vec H]=\vec K$ $\quad \vec\nabla\times\vec E=-\partial_t\vec B$ $\quad \vec n\times[\vec E]=v_n[\vec B]$

el. Stromverteilungen quellenfrei
elektrostatischer Spannungsbegriff nicht anwendbar
(Spannung nicht als differenz skalarer Potentialwerte)

$\vec B'=\vec B \quad \vec H'=\vec H \quad \vec J'=\vec J \quad \vec K'=\vec K \quad \vec E'=\vec E+\vec v\times\vec B$

$\vec B=\mu\vec H \qquad \vec J=\gamma\vec E'=\gamma(\vec E+\vec v\times\vec B)$

$\Phi(A)=\int_A\vec n\cdot\vec B\,dA=\int_{\partial A}\vec s\cdot\vec A\,ds \quad\Rightarrow\quad \vec B=\vec\nabla\times\vec A$ magn. Vektorpotential

$\vec\nabla\times\vec E=-\partial_t\vec B$

$\vec\nabla\times\vec E=-\partial_t\vec\nabla\times\vec A$

$\boxed{\vec\nabla\times(\vec E+\partial_t\vec A)=\vec 0} \quad\Rightarrow\quad \vec E+\partial_t\vec A=-\vec\nabla\varphi$

$\vec E=-\partial_t\vec A-\vec\nabla\varphi$

dominant magn. Feld $\varphi=0$ $\rightarrow$

$\boxed{\vec E=-\partial_t\vec A}$ $\quad \boxed{\vec\nabla\cdot\vec A=0}$ $\quad$ impliziert $\vec\nabla\cdot\vec E=0$

Maxwelleichung $\quad \gamma$ konstant

$\left.\begin{array}{l}\vec\nabla\times\vec H=\vec J\\ \vec B=\mu\vec H\end{array}\right\}\ \frac{1}{\mu}\vec\nabla\times\vec B=\vec J \qquad \vec\nabla\times\vec E=-\partial_t\vec B$

$\vec J=\gamma(\vec E+\vec v\times\vec B) \quad \frac{1}{\mu\gamma}\vec J=\vec E+\vec v\times\vec B \quad \frac{1}{\mu\gamma}\vec\nabla\times\vec J=\vec\nabla\times\vec E+\vec\nabla\times(\vec v\times\vec B)$

$\frac{1}{\mu\gamma}\vec\nabla\times(\vec\nabla\times\vec B)=-\partial_t\vec B+\vec\nabla\times(\vec v\times\vec B)$

$\frac{1}{\mu\gamma}(\vec\nabla(\underbrace{\vec\nabla\cdot\vec B}_{0})-\nabla^2\vec B)=-\partial_t\vec B-\vec\nabla\times(\vec B\times\vec v)$

$\boxed{\frac{1}{\mu\gamma}\vec\nabla^2\vec B=\partial_t\vec B+\vec\nabla\times(\vec B\times\vec v)}$ $\quad \mu,\gamma$ ... konst.

Bullardgleichung

$\mu\gamma\to\infty$ mitgeschleppte Zeitableitung $\vec B$ verschwindet → Flussverteilung eingefroren
..... L und dann klein gegenüber

$\boxed{T_d=\mu\gamma L^2}$ Diffusionszeitkonstante

$$\frac{1}{\mu\gamma}\nabla^2\vec{B} = \partial_t\vec{B} + \vec{\nabla}\times(\vec{B}\times\vec{v})$$

Geschwindigkeitsfeld Zeitunabhängig:

$$\boxed{\frac{1}{\mu\gamma}\nabla^2\vec{B} = \vec{\nabla}\times(\vec{B}\times\vec{v})}$$ zeitl. konstant

Im Feldbereich keine bewegten el. leitfähige Körper:

$$\boxed{\nabla^2\vec{B} = \mu\gamma\,\partial_t\vec{B}}$$

Diffusionsgleichung
vom Typ Wärmeleitungsgleichung
lineare PDE 2. Ordnung parabol.

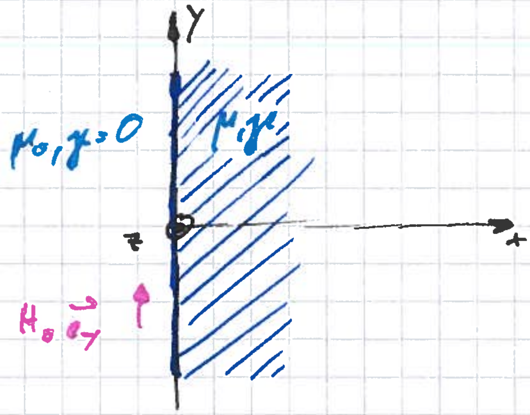
auch für $\vec{J}$ und $\vec{A}$ bei: $\vec{v} = \vec{0}$

unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit
gilt wegen Vernachlässigung Verschiebungsströme in dominant Magnetisch!

Eindringen des magnetischen Flusses in Halbraum

zu $t=0$ sprunghaft $\vec{H} = H_0 \vec{e}_y$
(z.B. $\vec{K} = K\vec{e}_z$ ∥ Grenzfläche)

$\rightarrow \vec{B} = B(x,t)\,\vec{e}_y$ bzw. $\vec{J} = J(x,t)\,\vec{e}_z$



$$\partial_x^2 B = \mu\gamma\, \partial_t B$$

mit: $x=0 \quad t>0: \quad B = B_0 = \mu H_0 \qquad x\to\infty \quad B=0$

$\qquad x>0 \quad t=0+: \quad B=0$

$T_d = \mu\gamma L^2 \qquad x = \xi L \qquad t = \tau T_d \qquad \partial_\xi = L\,\partial_x$

$\xi = 0 \quad t>0: \quad B = B_0 \qquad \xi\to\infty \quad B = 0$

$\xi > 0 \quad t = 0+: \quad B = 0$

$\xi > 0 \quad t > 0: \quad \partial_\xi^2 B = \partial_\tau B$

$\tilde{B}''(\xi;s) = s\tilde{B}(\xi;s) \qquad \tilde{B}(0;s) = \frac{1}{s}B_0 \qquad \tilde{B}(\infty;s) = 0$

$\tilde{B}(\xi;s) = C_1 e^{\xi\sqrt{s}} + C_2 e^{-\xi\sqrt{s}} \rightarrow \tilde{B}(\xi;s) = C_2 e^{-\xi\sqrt{s}} \rightarrow C_2 = \frac{1}{s}B_0$

$\tilde{B}(\xi;s) = \frac{B_0}{s} e^{-\xi\sqrt{s}}$

$$\boxed{\frac{1}{s}e^{-k\sqrt{s}} \quad k>0 \;\circ\!-\!\bullet\; \mathrm{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{\tau}}\right) \qquad \mathrm{erfc}(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_\zeta^\infty e^{-t^2}\,dt}$$

$B(\xi;\tau) = B_0\,\mathrm{erfc}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right)$

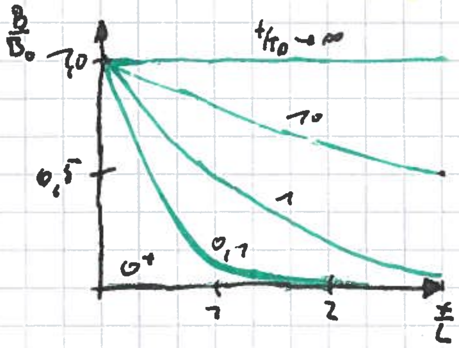
$\vec{B}(x;t) = B_0\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x/L}{2\sqrt{\frac{t}{\mu\gamma L^2}}}\right)\vec{e}_y$

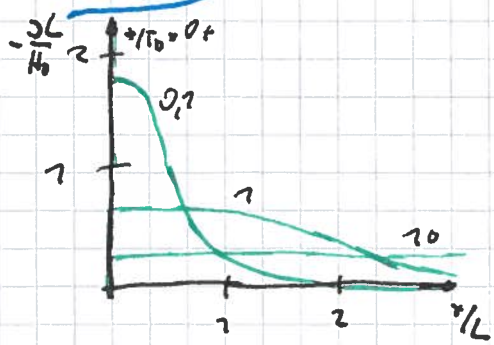
$$\boxed{\vec{B}(x;t) = B_0\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{\mu\gamma}{t}}\right)\vec{e}_y}$$

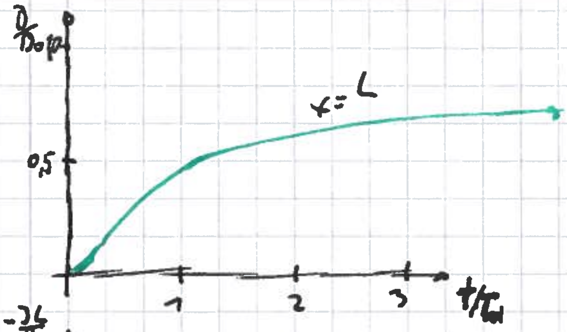
$$\boxed{\vec{J}(x,t) = -H_0\sqrt{\frac{\mu\gamma}{\pi t}}\; e^{-\frac{x^2\mu\gamma}{4t}}\;\vec{e}_z}$$

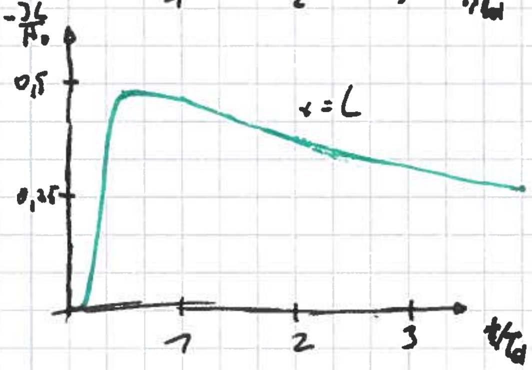
$\vec{J} = \frac{1}{\mu}\vec{\nabla}\times\vec{B}$

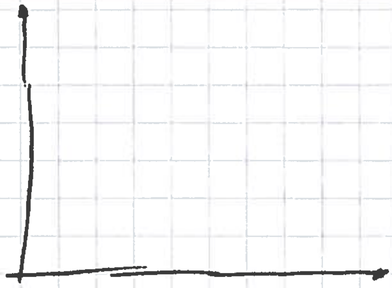
T_d!











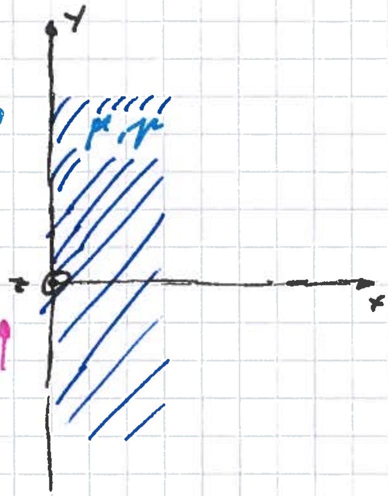
Sprungartiges Anlegen   Idealisierung

z.B. wenn mit Bezug auf L $t_{anstieg} \ll T_d$

Unendliche Flächenstrom bei $x=0$, $t=0_+$

→ Abschirmstrom in Randschicht $\ll L$

zeitlich sinusförmig verlaufende Randfeldstärke



$\vec{H} = H\vec{e}_y \qquad H(0,t) = \hat{H}_0 \cos(\omega t)$

$\vec{B} = B\vec{e}_y \qquad B(x,t) = \mathrm{Re}\{\hat{\vec{B}}_0 e^{j(\omega t - kx)}\}$

Ansatz

gedämpfte Sinuswelle

k... komplex

$\partial_x^2 B = \mu\gamma\, \partial_t B \qquad \partial_x^2 B = -\mathrm{Re}\{\hat{\vec{B}}_0 e^{j(\omega t - kx)} k^2\}$

$\partial_t B = \mathrm{Re}\{\hat{\vec{B}}_0 e^{j(\omega t - kx)} j\omega\}$

$\mathrm{Re}\{\hat{\vec{B}}_0 e^{j(\omega t - kx)} k^2\} = \mathrm{Re}\{\hat{\vec{B}}_0 e^{j(\omega t - kx)} (-j\mu\gamma\omega)\}$

$k^2 = -j\mu\gamma\omega$

$k = \pm\sqrt{-j\mu\gamma\omega} = \pm\sqrt{\frac{-2j}{2}\mu\gamma\omega} = \pm\frac{\sqrt{1-2j-1}}{\sqrt{\frac{2}{\mu\gamma\omega}}} = \pm\frac{(1-j)}{\sqrt{\frac{2}{\mu\gamma\omega}}}$

$k = \pm\frac{1-j}{\delta} \qquad \boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\gamma\omega}}}$ Eindringtiefe

negativ nicht möglich, da B sonst mit x anwächst

$\vec{B} = B\vec{e}_y \qquad B = \mathrm{Re}\{\hat{\vec{B}}_0 e^{j(\omega t - \frac{1-j}{\delta}x)}\} = \mathrm{Re}\{\hat{\vec{B}}_0 e^{-\frac{x}{\delta} + j(\omega t - \frac{x}{\delta})}\}$

$\boxed{B = \hat{B}_0 \cdot e^{-\frac{x}{\delta}} \cdot \cos(\omega t - \frac{x}{\delta})}$

$\vec{J} = J\vec{e}_z \qquad J = \frac{1}{\mu}\partial_x B = \mathrm{Re}\{\hat{H}_0 \cdot (-\frac{1+j}{\delta}) e^{-\frac{x}{\delta} + j(\omega t - \frac{x}{\delta})}\} \qquad 1+j = \sqrt{2}\cdot e^{j\frac{\pi}{4}}$

$\boxed{J = -\hat{H}_0 \frac{\sqrt{2}}{\delta} e^{-x/\delta} \cos(\omega t - \frac{x}{\delta} + \frac{\pi}{4})}$

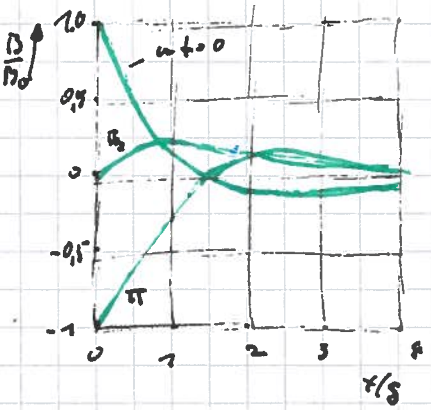
Felder dringen nicht wesentlich tiefer als δ ein

$\vec{E} = \frac{J}{\gamma}\vec{e}_z \qquad \vec{H} = \frac{B}{\mu}\vec{e}_y \qquad e_x \times [\![\vec{E}]\!] = \vec{0} \qquad \vec{e}_x \times [\![\vec{H}]\!] = \vec{0}$

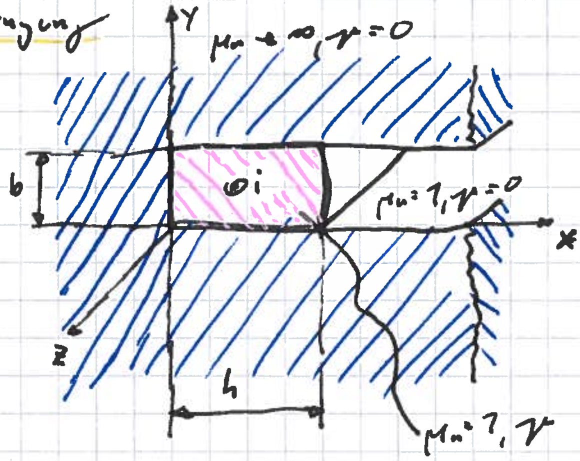
$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = S(x,t)\vec{e}_x$

$S(0,t) = -\frac{1}{\gamma} J(0,t) H(0,t) = \frac{\hat{H}_0^2 \sqrt{2}}{\gamma\delta} \cos(\omega t) \cos(\omega t + \frac{\pi}{4})$

$P'' = \bar{S}(0) = \frac{H_0^2}{2\gamma\delta} = \frac{H_0^2}{2}\sqrt{\frac{\mu\omega}{2\gamma}}$



Stromverdrängung



$i(t) = \mathrm{Re}(I\sqrt{2}\,e^{j\omega t})$

$x>0 \quad 0<y<b \quad \vec{H}, \vec{B} : \vec{e}_y$

$\vec{J} = J(x,t)\,\vec{e}_z$

DFS: $V(\partial A) = I(A)$:

$B(0,t) = 0 \qquad B(h,t) = \mu_0 i(t)/b$

Ansatz:

$\vec{B} = B(x,t)\,\vec{e}_y \qquad B(x,t) = \mathrm{Re}[\underline{\hat{B}}(x)\,e^{j\omega t}]$

komplexwertig

$\hat{B}''(x) = j\mu_0\gamma\omega\,\hat{B}(x) \qquad \hat{B}(0) = 0 \qquad \hat{B}(h) = \mu_0 I\sqrt{2}/b$

$\hat{B}(x) = \frac{\mu_0}{b} I\sqrt{2}\,\frac{\sinh(kx)}{\sinh(kh)} \qquad k = (1-j)/\delta \qquad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}$

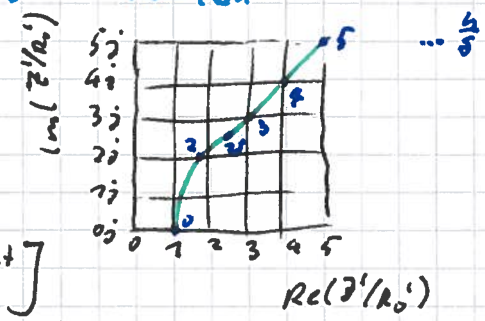
$\vec{J} = J(x,t)\,\vec{e}_z \qquad J(x,t) = \mathrm{Re}[\hat{J}(x)\,e^{j\omega t}]$

$\hat{J}(x) = \frac{I\sqrt{2}}{bh}\,kh\,\frac{\cosh(kx)}{\sinh(kh)}$

$k\to 0$ ($\Leftrightarrow \omega\to 0$) gleichförmiges $J = I\sqrt{2}/bh$

$\omega\uparrow$ → Zusammendrängen bei $x=h$

$\omega\to\infty$ gesamte Strom $x=h$



$\hat{E}(h) = \hat{J}(h)/\gamma \qquad \hat{H}(h) = \hat{B}(h)/\mu_0 = I\sqrt{2}/b$

$-b\,S_x(h,t) = b\,\mathrm{Re}[\hat{E}(h)e^{j\omega t}]\,\mathrm{Re}[\hat{H}(h)e^{j\omega t}]$

$= \frac{1}{2} b\,\mathrm{Re}[\hat{E}(h)\hat{H}^*(h) + \hat{E}(h)\hat{H}(h)e^{j2\omega t}]$

$S' = \frac{1}{2} b\,\hat{E}(h)\hat{H}^*(h) = \frac{|I|^2}{\gamma b h}\cot(kh) \qquad P' = \mathrm{Re}(S') \qquad Q' = \mathrm{Im}(S')$

$\boxed{Z' = S'/|I|^2 = R_0'\,kh\cot(kh)} \qquad \boxed{R_0' = 1/(\gamma b h)} \qquad \boxed{k = (1-j)/\delta}$

Einfache Wellengleichungen

(1) $\vec\nabla\times\vec E + \partial_t \vec B = \vec 0$ $\qquad \vec\nabla\cdot\vec B = 0$ (2) $\qquad \vec H = \frac{1}{\mu}\vec B \qquad \vec D = \varepsilon \vec E$

$\vec\nabla\times\vec H - \partial_t\vec D = \vec J \qquad \vec\nabla\cdot\vec D = \rho$

$\frac{1}{\mu} \vec\nabla\times\vec B - \varepsilon\partial_t\vec E = \vec J \qquad \varepsilon\vec\nabla\cdot\vec E = \rho$

(3) $\vec\nabla\times\vec B - \mu\varepsilon\partial_t\vec E = \mu\vec J \qquad \vec\nabla\cdot\vec E = \frac{\rho}{\varepsilon}$ (4)

$\vec\nabla\times$(1) $\quad \vec\nabla\times\vec\nabla\times\vec E + \partial_t\vec\nabla\times\vec B = \vec 0$

$\vec\nabla\vec\nabla\cdot\vec E - \nabla^2\vec E + \mu\varepsilon\partial_t^2\vec E + \mu\partial_t\vec J = \vec 0$

$$\boxed{\nabla^2\vec E - \mu\varepsilon\partial_t^2\vec E = \vec\nabla\frac{\rho}{\varepsilon} + \mu\partial_t\vec J} \qquad \cdot\varepsilon$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec D - \mu\varepsilon\partial_t^2\vec D = \vec\nabla\rho + \mu\varepsilon\partial_t\vec J}$$

$\vec\nabla\times$(3) $\quad \vec\nabla\times\vec\nabla\times\vec B - \mu\varepsilon\partial_t\vec\nabla\times\vec E = \vec\nabla\times\mu\vec J$

$\vec\nabla\vec\nabla\cdot\vec B - \nabla^2\vec B + \mu\varepsilon\partial_t^2\vec B = \mu\vec\nabla\times\vec J$

$$\boxed{\nabla^2\vec B - \mu\varepsilon\partial_t^2\vec B = -\mu\vec\nabla\times\vec J} \qquad \cdot\frac{1}{\mu}$$

$$\boxed{\nabla^2\vec H - \mu\varepsilon\partial_t^2\vec H = -\vec\nabla\times\vec J}$$

$(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2) u = -f \qquad u(\vec r,t); f(\vec r,t); c$ ... reellwertig

d'Alembert-Operator $\quad \Box = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2$

$c = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ .... Ausbreitungsgeschwindigkeit

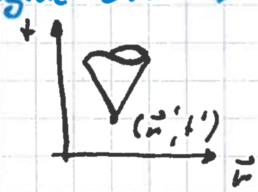
$$\boxed{\Box' G(\vec r,\vec r',t,t') = -\delta(\vec r-\vec r')\,\delta(t-t')}$$

$$\boxed{G(\vec r,\vec r',t,t') = \frac{1}{4\pi|\vec r-\vec r'|}\,\delta(t-t'-|\vec r-\vec r'|/c)}$$ ... Grundlösung

.... $+ \underbrace{g(\vec r,\vec r',t,t')}_{\text{homogene Lösung}}$

$(\vec r,t)$ für feste $(\vec r',t')$ auf Halbkegel

$c^2(t-t')^2 - |\vec r-\vec r'|^2 = 0 \qquad t > t'$



$u_p(\vec r,t) = \iint G(\vec r,\vec r',t,t')\, f(\vec r',t')\, dV'\, dt'$

$$\boxed{u_p(\vec r,t) = \int \frac{f(\vec r', t-|\vec r-\vec r'|/c)}{4\pi|\vec r-\vec r'|}\, dV'}$$ vollst. formale Lsg im unbegrenzten Raum

$u_p = \int_V \frac{f'_{ret}}{4\pi R}\, dV' \qquad f'_{ret} = f(\vec r', t - R/c) \qquad R = |\vec r-\vec r'|$

Elektromagnetische Wellen

Induktion $U(\partial A) + \dot{\Phi}(A) = 0$ $\qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \partial_t\vec{B} = \vec{0}$ $\qquad \vec{n}\times[\vec{E}] = \vec{0}$ ①

magn. Hüllenfluss $\Phi(\partial V) = 0$ $\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ $\qquad \vec{n}\cdot[\vec{B}] = 0$ ②

Ampere-Maxwell $V(\partial A) - \dot{\Psi}(A) = I(A)$ $\qquad \vec{\nabla}\times\vec{H} - \partial_t\vec{D} = \vec{J}$ $\qquad \vec{n}\times[\vec{H}] = \vec{K}$ ③

el. Hüllenfluss $\Psi(\partial V) = Q(V)$ $\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho$ $\qquad \vec{n}\cdot[\vec{D}] = \sigma$ ④

$$U(\mathcal{C}) \int_{\mathcal{C}} \vec{s}\cdot\vec{E}\, d_s = -\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{C}} \vec{s}\cdot\vec{A}\, d_s + \varphi(P_1) - \varphi(P_2) \qquad \vec{E} = -\partial_t\vec{A} - \vec{\nabla}\varphi$$

für bewegt $\mathcal{C}$!

$$\left.\begin{array}{l}\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \\ ①\end{array}\right\} \quad \vec{\nabla}\times(\vec{E} + \partial_t\vec{A}) = \vec{0} \rightarrow \vec{E} + \partial_t\vec{A} = -\vec{\nabla}\varphi$$

$$\Phi(A) = \int_A \vec{n}\cdot\vec{B}\, dA = \int_{\partial A} \vec{s}\cdot\vec{A}\, d_s \qquad \vec{B}_t = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

gilt auch für bewegt

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}$$

$$U(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} \vec{s}\cdot\vec{E}'\, d_s = -\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{C}} \vec{s}\cdot\vec{A}\, d_s + (\vec{v}\cdot\vec{A} - \varphi)\Big|_{P_1}^{P_2}$$

$$\vec{H} = \vec{B}/\mu \qquad \vec{D} = \varepsilon\vec{E}$$

③ $$\frac{1}{\mu}\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} + \varepsilon\partial_t\partial_t\vec{A} + \varepsilon\vec{\nabla}\partial_t\varphi = \vec{J}$$

$$\nabla^2\vec{A} - \vec{\nabla}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A} - \mu\varepsilon\partial_t^2\vec{A} - \mu\varepsilon\vec{\nabla}\partial_t\varphi = -\mu\vec{J}$$

$$\boxed{\nabla^2\vec{A} - \mu\varepsilon\partial_t^2\vec{A} - \vec{\nabla}[\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \mu\varepsilon\partial_t\varphi] = -\mu\vec{J}}$$

④ $$\varepsilon\,\vec{\nabla}\cdot(-\partial_t\vec{A} - \vec{\nabla}\varphi) = \rho$$

$$\nabla^2\varphi + \partial_t\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\boxed{\nabla^2\varphi - \mu\varepsilon\partial_t^2\varphi + \partial_t[\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \mu\varepsilon\partial_t\varphi] = -\frac{\rho}{\varepsilon}}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \mu\varepsilon\partial_t\varphi = 0 \qquad \text{Lorentz Eichung}$$

$$\boxed{\nabla^2\vec{A} - \mu\varepsilon\partial_t^2\vec{A} = -\mu\vec{J}} \qquad \boxed{\nabla^2\varphi - \mu\varepsilon\partial_t^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}}$$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}C \qquad \varphi' = \varphi - \partial_t C$$

falls Lorentz Eichung nicht erfüllt ist:

$$\nabla^2 C - \mu\varepsilon\partial_t^2 C = -\vec{\nabla}\cdot\vec{A} - \mu\varepsilon\partial_t\varphi$$

Potentiale noch nicht eindeutig!

$$\rightarrow \nabla^2 C - \mu\varepsilon\partial_t^2 C = 0$$

Hertz-Dipol

$\cancel{A}\ \partial_t$

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}_{ret}}{R}\,dV' \qquad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho'_{ret}}{R}\,dV'$$

$$\rho^f = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} \qquad \vec{J}^f = \partial_t \vec{P}$$

$$\boxed{\vec{A} = \partial_t \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{P}'_{ret}}{R}\,dV'} \qquad \boxed{\varphi = -\vec{\nabla}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\vec{P}'_{ret}}{R}\,dV'}$$

$$t' = t - R/c_0 \qquad c_0 = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$$

$$\vec{A} = \frac{1}{c_0^2}\partial_t \vec{\Pi} \qquad \varphi = -\vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi}$$

$$\cancel{A}\ \boxed{\vec{\Pi} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\vec{P}'_{ret}}{R}\,dV'}$$ Hertz Vektor

$$\rightarrow \Box\vec{\Pi} = -\vec{P}/\varepsilon_0$$

Annahme $\vec{P}(\vec{r},t) = \vec{p}(t)\,\delta(\vec{r})$

Dipol Ursprung

$$\rightarrow \boxed{\vec{\Pi}(\vec{r},t) = \frac{\vec{p}(t - r/c_0)}{4\pi\varepsilon_0 r}} \qquad \boxed{r = |\vec{r}|}$$

Lösung für bel. Zeitabhängigkeit

sinusförmig

$$\vec{p}(t) = \mathrm{Re}[\underline{\vec{p}}\,e^{j\omega t}] \qquad F(\vec{r},t) = \mathrm{Re}[\underline{F}(\vec{r})e^{j\omega t}]$$

Muster für Felder

$$\vec{\Pi}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\frac{\underline{\vec{p}}\,e^{j\omega(t - r/c_0)}}{4\pi\varepsilon_0 r}\right] = \mathrm{Re}[\underline{\vec{\Pi}}(\vec{r})e^{j\omega t}]$$

$$\rightarrow \underline{\vec{\Pi}}(\vec{r}) = \frac{\underline{\vec{p}}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{-jkr}}{r} \qquad k = \omega/c_0$$

harmonische Kugelwelle d. Kreiswellenzahl k

$$\underline{\vec{A}} = \frac{j\omega}{c_0^2}\underline{\vec{\Pi}} = \frac{\underline{\vec{p}}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{jk e^{-jkr}}{c_0 r}$$

$$\underline{\varphi} = -\vec{\nabla}\cdot\underline{\vec{\Pi}} = \frac{\vec{e}_r\cdot\underline{\vec{p}}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{jk}{r}\right)e^{-jkr} \qquad \underline{\varphi} = -\frac{\underline{\vec{p}}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e^{-jkr}(-jk\vec{e}_r)r - \vec{e}_r e^{-jkr}}{r^2}$$

$$\underline{\vec{B}} = \vec{\nabla}\times\underline{\vec{A}} = -\frac{\vec{e}_r\times\underline{\vec{p}}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{jk}{r}\right)\frac{jk e^{-jkr}}{c_0}$$

$$\underline{\vec{E}} = -j\omega\underline{\vec{A}} - \vec{\nabla}\underline{\varphi} = \frac{3\vec{e}_r\,\vec{e}_r\cdot\underline{\vec{p}} - \underline{\vec{p}}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^3} + \frac{jk}{r^2}\right)e^{-jkr} - \frac{\vec{e}_r\times(\vec{e}_r\times\underline{\vec{p}})}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{k^2 e^{-jkr}}{r}$$

$k \to 0$ ($\omega \to 0$) $\Rightarrow \vec{A} = \vec{0}$ $\vec{B} = \vec{0}$ $\varphi, \vec{E}$ statisches Feld el. Dipol

Nahzone $kr \ll 1$ dominant elektrostatische Feldkomponente $\rightarrow$ TM Welle

Fernzone $kr \gg 1$ $\rightarrow$ TEM Welle

typisch $\circ$förmige Strahlenamplitude klingt $\frac{1}{r}$ ab eldyn. Potentiale → Lorentzeichung

$$\Box \vec{A} = -\mu \vec{J} \qquad \Box \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}_{ret}}{R}\, dV' \qquad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho_{ret}}{R}\, dV'$$

sinusförmig:

$$w(\vec{r},t) = Re[\underline{w}(\vec{r})e^{j\omega t}] \qquad f(\vec{r},t) = Re[\underline{f}(\vec{r})e^{j\omega t}]$$

$$f(\vec{r}\,', t - |\vec{r}-\vec{r}\,'|/c) = Re[\underline{f}(\vec{r}\,')e^{j\omega(t-|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c)}]$$

$k = \omega/c$ ... Kreiswellenzahl

$$\underline{w}_p(\vec{r}) = \int_V \frac{\underline{f}(\vec{r}\,')e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, dV'$$

$$\underline{\vec{A}}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \underline{\vec{J}}(\vec{r}\,')\frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, dV'$$

$$\underline{\varphi}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \underline{\rho}(\vec{r}\,')\frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, dV'$$

$\vec{\nabla}\cdot\underline{\vec{A}} = -j\mu\varepsilon\omega\underline{\varphi}$

Lorentzeichung

$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} = \mathrm{Re}(\underline{\vec{E}} e^{j\omega t}) \times \mathrm{Re}(\underline{\vec{H}} e^{j\omega t})$$
$$= \frac{1}{4}(\underline{\vec{E}} e^{j\omega t} + \underline{\vec{E}}^* e^{-j\omega t}) \times (\underline{\vec{H}} e^{j\omega t} + \underline{\vec{H}}^* e^{-j\omega t})$$
$$= \frac{1}{4}(\underline{\vec{E}}\times\underline{\vec{H}} e^{2j\omega t} + \underline{\vec{E}}^*\times\underline{\vec{H}}^* e^{-2j\omega t} + \underline{\vec{E}}\times\underline{\vec{H}}^* + \underbrace{\underline{\vec{E}}^*\times\underline{\vec{H}}}_{=(\underline{\vec{E}}\times\underline{\vec{H}}^*)^*})$$
$$= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}\underline{\vec{E}}\times\underline{\vec{H}}^* + \frac{1}{2}\underline{\vec{E}}\times\underline{\vec{H}} e^{j2\omega t}\right)$$

$$\langle\vec{S}\rangle = \mathrm{Re}(\underline{\vec{S}}) \qquad \underline{\vec{S}} = \frac{1}{2}\underline{\vec{E}}\times\underline{\vec{H}}^*$$

$$\boxed{\langle\vec{S}\rangle = \frac{|\vec{e}_r\times\vec{p}|^2}{32\pi^2\varepsilon_0}\cdot\frac{c_0 k^4}{r^2}\vec{e}_r}$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \vec{e}_r\cdot\langle\vec{S}\rangle r^2 = \frac{|p|^2 c_0 k^4}{32\pi^2\varepsilon_0}\sin^2(\theta)$$

$$P = \int\frac{dP}{d\Omega}d\Omega = \int_0^{\pi} d\theta\sin(\theta)\int_0^{2\pi} d\varphi\frac{dP}{d\Omega} = \frac{|p|^2 c_0 k^4}{12\pi\varepsilon_0} = \frac{\omega^2|p|^2}{12\pi}k^2 Z_0$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \mu_0 c_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c_0} = 376{,}73\,\Omega$$

offene Antennen $l < \lambda = 2\pi/k = c_0/f$

Ladung an $z = \pm l/2$ Sinusstrom mit eff. I

$$\vec{p} = -j\sqrt{2}\, I l/\omega\,\vec{e}_z$$
$$P = \frac{2\pi}{3}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 Z_0 I^2$$
$$P = R_s I^2 \qquad R_s = \frac{2\pi}{3}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 Z_0$$ Strahlungswiderstand

Ladung gleichförmig verteilt:
$$P = R_s I^2 \qquad R_s = \frac{\pi}{6}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 Z_0$$

gilt für lin. Antennen ($\leq 0{,}2\lambda$)

Fitzgeraldtransformation

$\vec{E}\to\vec{H}Z_0 \qquad \vec{H}\to -\vec{E}/Z_0$ duales el. mag. Problem

$\vec{B}\to -\vec{D}Z_0 \qquad \vec{D}\to\vec{B}/Z_0$

$\vec{P}\to\vec{M}/c_0 \qquad \vec{M}\to -\vec{P}c_0$

um z.B. el. Dipol in magnetischen überzuführen

Wellen

... einsinnige örtliche Verlagerung eines bestimmten Zustandes mit der Zeit

freie Welle: Ausbreitung auf ein-, zwei- od. dreidimensionalen Trägern

einfache Welle: zur Beschreibung d. Ortsabhängigkeit reicht eine Ortskoordinate

gilt für:
- alle auf eindimensionalen Trägern
- auf zweidimensionalen für gerade ~~bzw.~~ Kreiswellen
- auf dreidimensionalen für ebene Wellen, und für Kreiszylinderwellen, Kugelwellen

Raumwellen: zur ausdrücklichen Abgrenzung von Oberflächenwelle

Flächenwellen: ($\hat{=}$ 2d Raumwellen) zur ausdrücklichen Abgrenzung von Kantenwellen

---

geführte Wellen: Ausbreitung erfolgt an Grenzflächen (3d) od. Grenzlinien (2d)

Kanalwelle: auf 2 Seiten eingeschlossen

Randwelle: Grenzfläche auf 1 Seite Grenzschicht, Oberfläche bzw. Kantenwelle

---

Sinuswelle: zeitlicher Verlauf an jedem Ort durch Sinusschwingung einheitlicher Frequenz darstellbar

Nullphasenwinkel und Amplitude Ortsabhängig

z. B. $\vec{F}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}[\vec{\mathcal{F}} e^{j\omega t - \gamma \vec{e}\cdot\vec{r}}]$ ebene Sinuswelle

$\vec{\mathcal{F}}$ ... komplex $\qquad \gamma$ ... komplexer Ausbreitungskoeffizient

ω ... Kreisfrequenz $\qquad \vec{e}$ ... Einsvektor Ausbreitungsrichtung

$\gamma = \underbrace{\alpha}_{\text{Dämpfungskoeffizient}} + j\underbrace{\beta}_{\text{Phasenkoeffizient}}$

ungedämpft ($\alpha = 0$) k statt β ... Kreiswellenzahl

$$\vec{F}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}[\vec{\mathcal{F}} e^{j(\omega t - k\vec{e}\cdot\vec{r})}]$$

$c = \frac{\omega}{\beta}$ Ausbreitungsgeschwindigkeit falls ~~[illegible]~~ $\omega \sim \beta$

hängt c von ω oder β ab dann ist die Welle dispergierend:

$c_{ph} = \frac{\omega}{\beta}$ Phasengeschwindigkeit $\qquad c_{gr} = \frac{d\omega}{d\beta}$ Gruppengeschwindigkeit longitudinal: Zustandsgröße parallel/antiparallel zur Ausbreitungsrichtung

$\vec{k} \times \vec{\mathfrak{F}} = \vec{0}$

transversal: Zustandsgröße senkrecht zur Ausbreitungsrichtung

$\vec{k} \cdot \vec{\mathfrak{F}} = 0$

linear polarisiert: Richtung der Zustandsgröße ändert sich nicht während Ausbreitung

$\vec{\mathfrak{F}}^* \times \vec{\mathfrak{F}} = \vec{0}$ bzw. für $\vec{\mathfrak{F}} = \vec{F}' + j\vec{F}''$: $\vec{F}' \times \vec{F}'' = \vec{0}$

$\rightarrow \vec{\mathfrak{F}} = \vec{F}_0 e^{j\alpha_0}$ $\vec{F}(\vec{r},t) = \vec{F}_0 \operatorname{Re}[e^{j\omega t - j\alpha_0 - j\vec{k}\cdot\vec{r}}]$

zirkular polarisiert: $\vec{\mathfrak{F}} \cdot \vec{\mathfrak{F}} = 0$ Zustandsgröße $\vec{F}$ vom Betrag konstant und senkrecht zur Ausbreitungsr. und dreht sich mit Kreisfrequenz ω

$|\vec{\mathfrak{F}}'| = |\vec{\mathfrak{F}}''|$ $\vec{\mathfrak{F}}' \cdot \vec{\mathfrak{F}}'' = 0$

Drehsinn mit Ausbreitungsrichtung:

Rechtsschraube	positive	Helizität	linkszirkular
Linksschraube	negative		rechtszirkular

Freie ebene Raumwellen

ε, μ konstant
leeren Raum

1 $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \mu \partial_t \vec{H} = \vec{0}$ $\qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ 3

2 $\vec{\nabla} \times \vec{H} - \varepsilon \partial_t \vec{E} = \vec{0}$ $\qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$ 4

Existenz $\vec{E}(\theta)$ $\vec{H}(\theta)$ mit $\theta(\vec{r}, t) = ct - \vec{k} \cdot \vec{r}$?

3 $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{k} \cdot \frac{d\vec{E}}{d\theta} = -\frac{d}{d\theta}(\vec{k} \cdot \vec{E}) = 0 \quad \rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E} = \text{const.}$

4 $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = -\vec{k} \cdot \frac{d\vec{H}}{d\theta} = -\frac{d}{d\theta}(\vec{k} \cdot \vec{H}) = 0 \quad \rightarrow \vec{k} \cdot \vec{H} = \text{const.}$

$\rightarrow$ o.B.d.A.: $\boxed{\vec{k} \cdot \vec{E} = 0}$ $\quad \boxed{\vec{k} \cdot \vec{H} = 0}$

$\rightarrow$ transversal

1 $\vec{k} \times \frac{d\vec{E}}{d\theta} - \mu c \frac{d\vec{H}}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}[\vec{k} \times \vec{E} - \mu c \vec{H}] = \vec{0} \quad \Rightarrow \vec{k} \times \vec{E} - \mu c \vec{H} = \text{const.}$

$\vec{k} \times \frac{d\vec{H}}{d\theta} + \varepsilon c \frac{d\vec{E}}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}[\vec{k} \times \vec{H} + \varepsilon c \vec{E}] = \vec{0} \quad \Rightarrow \vec{k} \times \vec{H} + \varepsilon c \vec{E} = \text{const.}$

$\vec{k} \times \vec{E} - \mu c \vec{H} = \vec{0} \qquad \vec{k} \times \vec{H} + \varepsilon c \vec{E} = \vec{0}$

$\vec{k} \times \left(\frac{1}{\mu c} \vec{k} \times \vec{E}\right) + \varepsilon c \vec{E} = \vec{0}$

$\vec{k} \underbrace{(\vec{k} \cdot \vec{E})}_{0} - \vec{E} \underbrace{(\vec{k} \cdot \vec{k})}_{1} + \mu \varepsilon c^2 \vec{E} = \vec{0}$

$\mu \varepsilon c^2 \vec{E} = \vec{E} \qquad \rightarrow \mu \varepsilon c^2 \stackrel{!}{=} 1$ Maxwellbeziehung

$\vec{E}, \vec{H}, \vec{k}$ bilden orthogonales Dreibein (Rechtsschraube)

mit $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \vec{H} = \frac{1}{Z} \vec{k} \times \vec{E} & \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{k} \times \vec{E} \\ \vec{E} = -Z \vec{k} \times \vec{H} & \vec{D} = -\frac{1}{c} \vec{k} \times \vec{H} \end{array}}$$

$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = (-Z \vec{k} \times \vec{H}) \times \vec{H} = Z \vec{H} \times (\vec{k} \times \vec{H}) = Z H^2 \vec{k}$

$= \vec{E} \times \left(\frac{1}{Z} \vec{k} \times \vec{E}\right) = \frac{1}{Z} E^2 \vec{k}$

ebene Sinuswelle el. nicht leitfähig μ, ε konstant

$\vec{E}(\theta) = \mathrm{Re}[\vec{\mathcal{E}} e^{jk\theta}] \qquad \vec{H}(\theta) = \mathrm{Re}[\vec{\mathcal{H}} e^{jk\theta}]$

$\rightarrow$ ungedämpfte Welle $\quad c = \omega / k \qquad \vec{k} \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0 \quad \vec{k} \cdot \vec{\mathcal{H}} = 0$

$\vec{\mathcal{H}} = \vec{k} \times \vec{\mathcal{E}} / Z$

$\rightarrow$ transversal, elliptisch polarisiert

zirkular: $\vec{k} \times \vec{\mathcal{E}} = \pm j \vec{\mathcal{E}} \qquad \vec{\mathcal{H}} = \pm j \vec{\mathcal{E}} / Z \quad \rightarrow |\vec{E}| = Z |\vec{H}| = \text{const}$

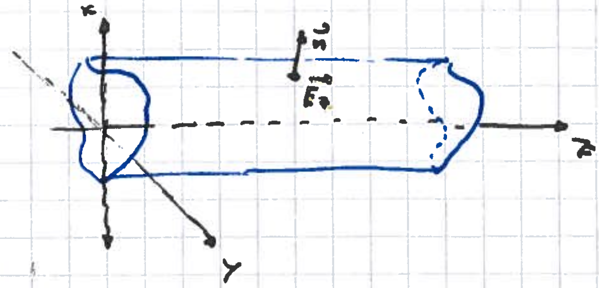
$\rightarrow S$ räumlich, zeitlich konstant

Geführte Wellen in zyl. Anordnungen

(1) $\vec\nabla\times\vec E+\mu\partial_t\vec H=\vec 0$ $\quad\quad$ $\vec\nabla\times\vec H-\varepsilon\partial_t\vec E=\vec 0$ (2)

(3) $\vec\nabla\cdot\vec E=0$ $\quad\quad$ $\vec\nabla\cdot\vec H=0$ (4)

z.B.:



aufspalten in:

$\vec E=\vec E_\perp+E_z\vec e_z$ $\quad$ $\vec H=\vec H_\perp+H_z\vec e_z$ $\quad$ $\vec\nabla=\vec\nabla_\perp+\partial_z\vec e_z$

(1) $(\vec\nabla_\perp+\vec e_z\partial_z)\times(\vec E_\perp+\vec e_z E_z)+\mu\partial_t(\vec H_\perp+\vec e_z H_z)=\vec 0$

$$\underbrace{\vec\nabla_\perp\times\vec E_\perp}_{\vec e_z}+\vec\nabla_\perp\times\vec e_z E_z+\vec e_z\partial_z\times\vec E_\perp+\underbrace{\vec e_z\partial_z\times\vec e_z E_z}_{\vec 0}+\mu\partial_t\vec H_\perp+\underbrace{\mu\partial_t\vec e_z H_z}_{\vec e_z}=\vec 0$$

$$\boxed{\vec\nabla_\perp\times\vec E_\perp=-\mu\partial_t\vec e_z H_z}$$

$$\vec e_z\times(\vec\nabla_\perp\times\vec e_z E_z)+\vec e_z\times(\vec e_z\partial_z\times\vec E_\perp)+\mu\partial_t\vec e_z\times\vec H_\perp=\vec 0$$

$$\vec\nabla_\perp(\vec e_z\cdot\vec e_z E_z)-\vec e_z E_z(\underbrace{\vec e_z\cdot\vec\nabla_\perp}_{0})+\vec e_z\partial_z(\underbrace{\vec e_z\cdot\vec E_\perp}_{0})-\vec E_\perp(\vec e_z\cdot\vec e_z\partial_z)+\mu\partial_t\vec e_z\times\vec H_\perp=\vec 0$$

$$\vec\nabla_\perp E_z-\partial_z\vec E_\perp+\mu\partial_t\vec e_z\times\vec H_\perp=\vec 0$$

$$\boxed{\partial_z\vec E_\perp-\mu\partial_t\vec e_z\times\vec H_\perp=\vec\nabla_\perp E_z}$$

(2) $(\vec\nabla_\perp+\vec e_z\partial_z)\times(\vec H_\perp+\vec e_z H_z)-\varepsilon\partial_t(\vec E_\perp+\vec e_z E_z)=\vec 0$

$$\underbrace{\vec\nabla_\perp\times\vec H_\perp}_{\vec e_z}+\vec\nabla_\perp\times\vec e_z H_z+\vec e_z\partial_z\times\vec H_\perp+\underbrace{\vec e_z\partial_z\times\vec e_z H_z}_{\vec 0}-\varepsilon\partial_t\vec E_\perp-\underbrace{\varepsilon\partial_t\vec e_z E_z}_{\vec e_z}=\vec 0$$

$$\boxed{\vec\nabla_\perp\times\vec H_\perp=\varepsilon\partial_t\vec e_z E_z}$$

$$\vec e_z\times(\vec\nabla_\perp\times\vec e_z H_z)+\vec e_z\times(\vec e_z\partial_z\times\vec H_\perp)-\varepsilon\partial_t\vec e_z\times\vec E_\perp=\vec 0$$

$$\vec\nabla_\perp(\vec e_z\cdot\vec e_z H_z)-\vec e_z H_z(\underbrace{\vec e_z\cdot\vec\nabla_\perp}_{0})+\vec e_z\partial_z(\underbrace{\vec e_z\cdot\vec H_\perp}_{0})-\vec H_\perp(\vec e_z\cdot\vec e_z\partial_z)-\varepsilon\partial_t\vec e_z\times\vec E_\perp=\vec 0$$

$$\vec\nabla_\perp H_z-\partial_z\vec H_\perp-\varepsilon\partial_t\vec e_z\times\vec E_\perp=\vec 0$$

$$\boxed{\partial_z\vec H_\perp+\varepsilon\partial_t\vec e_z\times\vec E_\perp=\vec\nabla_\perp H_z}$$

(3) $(\vec\nabla_\perp+\partial_z\vec e_z)\cdot(\vec E_\perp+\vec e_z E_z)=\vec 0$

$$\vec\nabla_\perp\cdot\vec E_\perp+\underbrace{\vec\nabla_\perp\cdot\vec e_z E_z}_{0}+\underbrace{\partial_z\vec e_z\cdot\vec E_\perp}_{0}+\partial_z\vec e_z\cdot\vec e_z E_z=\vec 0$$

$$\boxed{\vec\nabla_\perp\cdot\vec E_\perp=-\partial_z E_z}$$

$(\vec{\nabla}_\perp + \vec{e}_z \partial_z) \cdot (\vec{H}_\perp + \vec{e}_z H_z) = \vec{0}$

$$\boxed{\vec{\nabla}_\perp \cdot \vec{H}_\perp = -\partial_z H_z}$$

ideal metallisch:

$\vec{n} \times \vec{E} = \vec{0} \qquad \vec{n} \cdot \vec{H} = 0$

$\downarrow$

$$\boxed{E_z = 0}$$

$\vec{n} \cdot \partial_z \vec{H}_\perp + \vec{n} \cdot \varepsilon \partial_t (\vec{e}_z \times \vec{E}_\perp) = \vec{n} \cdot \vec{\nabla}_\perp H_z$

$\vec{n} \cdot \partial_z \vec{H}_\perp + \varepsilon \partial_t \vec{e}_z (\vec{E}_\perp \times \vec{n}) = \partial_n H_z$

$0 + 0 = \partial_n H_z$

$\boxed{\partial_n H_z = 0} \qquad \Rightarrow E_z = 0 \quad H_z = 0 \quad \Rightarrow$ TEM Welle

$$\boxed{\begin{array}{ll} \vec{\nabla}_\perp \times \vec{E}_\perp = \vec{0} & \vec{\nabla}_\perp \cdot \vec{E}_\perp = 0 \\ \vec{\nabla}_\perp \times \vec{H}_\perp = \vec{0} & \vec{\nabla}_\perp \cdot \vec{H}_\perp = 0 \end{array}}$$

$\partial_z \vec{E}_\perp - \mu \partial_t \vec{e}_z \times \vec{H}_\perp = \vec{\nabla}_\perp E_z \qquad \partial_z \vec{H}_\perp + \varepsilon \partial_t \vec{e}_z \times \vec{E}_\perp = \vec{\nabla}_\perp H_z$

$\partial_z \varepsilon \partial_t \vec{e}_z \times \vec{E}_\perp - \mu\varepsilon \partial_t^2 \vec{e}_z \times (\vec{e}_z \times \vec{H}_\perp) = \vec{0}$

$-\partial_z^2 \vec{H}_\perp - \mu\varepsilon \partial_t^2 (\vec{e}_z \underbrace{(\vec{e}_z \cdot \vec{H}_\perp)}_{0} - \vec{H}_\perp \underbrace{(\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z)}_{1}) = \vec{0}$

$-\partial_z^2 \vec{H}_\perp + \mu\varepsilon \partial_t^2 \vec{H}_\perp = \vec{0}$

$\boxed{(\partial_z^2 - \mu\varepsilon \partial_t^2) \vec{H}_\perp = \vec{0}} \qquad \boxed{(\partial_z^2 - \mu\varepsilon \partial_t^2) \vec{E}_\perp = \vec{0}}$

$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}} \qquad \boxed{\vec{k} = \vec{e}_z} \qquad \boxed{\vec{E}_\perp \cdot \vec{H}_\perp = 0}$

ideale Leitfähigkeit des Körpers → Linie konstantes Potential → E überall 0 → keine TEM Welle nicht möglich.

Benötigt min. zwei ~~[illegible]~~ nicht zusammenhängende Oberfläche

Geführte Wellen zyl. Anordnung Sinuswellen

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \mathrm{Re}[\vec{\mathcal{E}}(x,y)e^{j(\omega t - kz)}]$$
$$\vec{H}(x,y,z,t) = \mathrm{Re}[\vec{\mathcal{H}}(x,y)e^{j(\omega t - kz)}]$$
$$\partial_z \vec{E}_\perp - \mu \partial_t \vec{e}_z \times \vec{H}_\perp = \vec{\nabla}_\perp E_z$$
$$\partial_z \vec{H}_\perp + \varepsilon \partial_t \vec{e}_z \times \vec{E}_\perp = \vec{\nabla}_\perp H_z$$

$\Downarrow$

$$\vec{\mathcal{E}}_\perp = \frac{-j}{\mu\varepsilon\omega^2 - k^2}(k\vec{\nabla}_\perp \mathcal{E}_z - \omega\mu \vec{e}_z \times \vec{\nabla}_\perp \mathcal{H}_z)$$
$$\vec{\mathcal{H}}_\perp = \frac{-j}{\mu\varepsilon\omega^2 - k^2}(k\vec{\nabla}_\perp \mathcal{H}_z + \omega\varepsilon \vec{e}_z \times \vec{\nabla}_\perp \mathcal{E}_z)$$

$$(\nabla_\perp^2 + \mu\varepsilon\omega^2 - k^2)\mathcal{E}_z = 0 \qquad (\nabla_\perp^2 + \mu\varepsilon\omega^2 - k^2)\mathcal{H}_z = 0$$

TEM-Welle: $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ $\qquad (\mathcal{E}_z = 0,\ \mathcal{H}_z = 0)$

$\mathcal{E}_z = 0 \qquad \partial_n \mathcal{H}_z = 0$ $\qquad$ Randwertprobleme durch ideal nichtleit. Bedingung nicht gekoppelt

→ 2 Systeme

TM $\quad$ überall $\mathcal{H}_z = 0$ $\quad$ am Rand $\mathcal{E}_z = 0$

TE $\quad$ überall $\mathcal{E}_z = 0$ $\quad$ am Rand $\partial_n \mathcal{H}_z = 0$

$\kappa^2 = \mu\varepsilon\omega^2 - k^2$

TM: $\vec{\mathcal{E}}_\perp = -\frac{jk}{\kappa^2}\vec{\nabla}_\perp \mathcal{E}_z$ $\qquad$ TE: $\vec{\mathcal{H}}_\perp = -\frac{jk}{\kappa^2}\vec{\nabla}_\perp \mathcal{H}_z$

$$\vec{\mathcal{H}}_\perp = \vec{e}_z \times \vec{\mathcal{E}}_\perp / Z$$

			Rand
TM:	$Z = \frac{k}{\varepsilon\omega} = \frac{kc}{\omega}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$	$(\nabla_\perp^2 + \kappa^2)\psi = 0$	$\psi = 0$
TE:	$Z = \frac{\mu\omega}{k} = \frac{\omega}{kc}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$	$(\nabla_\perp^2 + \kappa^2)\psi = 0$	$\partial_n \psi = 0$

Eigenwertproblem $\kappa_\nu^2 \quad \psi_\nu$

Moden

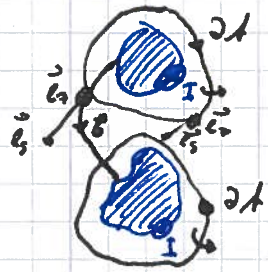
$\omega_\nu = \kappa_\nu c \qquad c = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ $\quad$ Grenzkreisfrequenz

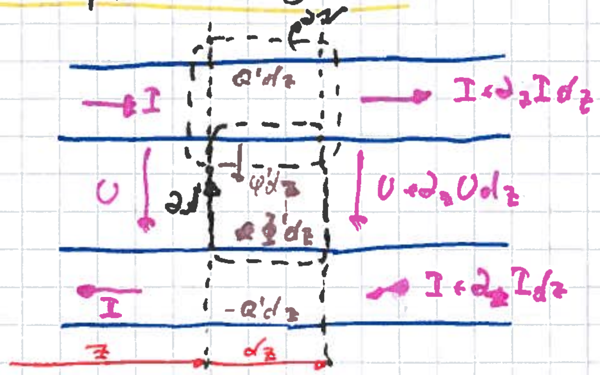
$k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_\nu^2}}{c}$ → Kreisfrequenz oberhalb Grenzkreisfrequenz

$c_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\frac{\omega_\nu}{\omega})^2}}$ $\quad$ liegt oberhalb c!

$c_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = c\sqrt{1 - (\frac{\omega_\nu}{\omega})^2}$ $\quad$ stets kleiner c $\qquad c_{ph} \cdot c_{gr} = c^2$

Wellen auf Doppelleitungen





$$\vec\nabla_\perp \times \vec E_\perp = \vec 0 \qquad \vec\nabla_\perp\cdot\vec E_\perp = 0 \qquad \vec n \times \vec E_\perp = \vec 0$$

$$\vec\nabla_\perp \times \vec H_\perp = \vec 0 \qquad \vec\nabla_\perp\cdot\vec H_\perp = 0 \qquad \vec n \cdot \vec H_\perp = 0$$

(1) $\vec e_z \times \vec E_\perp = \mu c \vec H_\perp \qquad \vec e_z \times \vec H_\perp = -\varepsilon c \vec E_\perp$ (2)

(3) $U(z,t) = \int_C \vec e_s \cdot \vec E_\perp \, ds \qquad \Phi'(z,t) = \int_C (\vec e_z \times \vec e_s)\cdot \mu \vec H_\perp \, ds$ (4)

(5) $I(z,t) = V(z,t) = \oint_{\partial A} \vec e_s \cdot \vec H_\perp \, ds \qquad Q'(z,t) = \Psi'(z,t) = \oint_{\partial A} (\vec e_s \times \vec e_z)\cdot \varepsilon \vec E_\perp \, ds$ (6)

(4) $\Phi'(z,t) = -\mu \int_C \vec e_s \cdot (\vec e_z \times \vec H_\perp)\, ds \overset{(2)}{=} \mu\varepsilon c \int_C \vec e_s \cdot \vec E_\perp \, ds \overset{(3)}{=} \mu\varepsilon c\, U(z,t) \qquad \mu\varepsilon c^2 = 1$

$$\boxed{U = c\,\Phi'}$$

(6) $Q'(z,t) = \varepsilon \oint_{\partial A} \vec e_s \cdot (\vec e_z \times \vec E_\perp)\, ds \overset{(1)}{=} \varepsilon\mu c \oint_{\partial A} \vec e_s \cdot \vec H_\perp \, ds \overset{(5)}{=} \mu\varepsilon c\, I(z,t)$

$\boxed{I = c\,Q'}$ bzw. $\boxed{V = c\,\Psi'}$

$$U(\partial A) + \dot\Phi(A) = 0 \qquad I(\partial V) + \dot Q(V) = 0$$

$\boxed{\partial_z U + \partial_t \Phi' = 0} \qquad \boxed{\partial_z I + \partial_t Q' = 0}$ bzw. $\boxed{\partial_z V + \partial_t \Psi' = 0}$

Wegen Linearität und μ ε konstant $\to$ Proportionalität zu Spannungen und Flüssen

$\boxed{\Psi' = Q' = C'U} \qquad \boxed{\Phi' = C'V = L'I}$

$\frac{I}{c} = C' c\, \Phi' \qquad \frac{I}{c} = C' c\, L' I$

$$\boxed{L'C' = \frac{1}{c^2} = \mu\varepsilon}$$

$\partial_z U + L'\partial_t I = 0 \qquad \partial_z I + C'\partial_t U = 0$

$\partial_z^2 U + L'\partial_t \partial_z I = 0 \qquad \partial_z^2 I + C'\partial_t\partial_z U = 0$

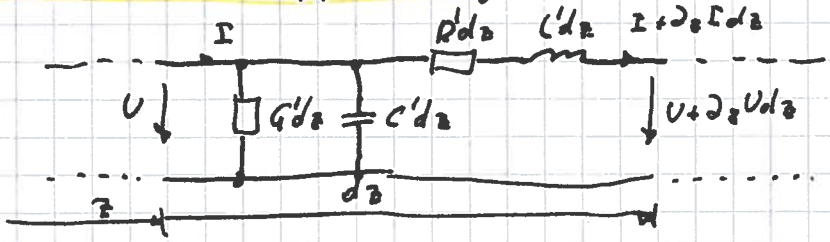
$\partial_z^2 U - L'C'\partial_t^2 U = 0 \qquad \partial_z^2 I - L'C'\partial_t^2 I = 0$

$\boxed{\left(\partial_z^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) U = 0} \qquad \boxed{\left(\partial_z^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) I = 0}$

$$I(z,t) = I_1(ct - z) + I_2(ct + z)$$
$$U(z,t) = U_1(ct - z) + U_2(ct + z)$$
$$U_1 = Z_w I_1 \qquad U_2 = -Z_w I_2 \qquad Z_w = \sqrt{L'/C'}$$

Verlustbehaftete Doppelleitung

TEM Welle → I, U können überall ausgedrückt werden



$$\partial_z U + L'\partial_t I + R'I = 0 \qquad \partial_z I + C'\partial_t U + G'U = 0$$
$$\partial_z^2 U + L'\partial_t(-C'\partial_t U - G'U) + R'(-C'\partial_t U - G'U) = 0$$
$$\boxed{\begin{aligned}&[\partial_z^2 - L'C'\partial_t^2 - (R'C' + G'L')\partial_t - R'G']I = 0\\ &[\partial_z^2 - L'C'\partial_t^2 - (R'C' + G'L')\partial_t - R'G']U = 0\end{aligned}}$$

einfache Telegraphengleichungen

$$I(z,t) = \mathrm{Re}[\underline{I}(z)\sqrt{2}e^{j\omega t}] \qquad U(z,t) = \mathrm{Re}[\underline{U}(z)\sqrt{2}e^{j\omega t}]$$
$$\partial_z \underline{U}(z)\cancel{\sqrt{2}e^{j\omega t}} + L'j\omega \underline{I}(z)\cancel{\sqrt{2}e^{j\omega t}} + R'\underline{I}(z)\cancel{\sqrt{2}e^{j\omega t}} = 0$$
$$\partial_z \underline{U}(z) + \underline{Z}'\underline{I}(z) = 0 \qquad \underline{Z}' = R' + j\omega L'$$
$$\partial_z \underline{I}(z) + \underline{Y}'\underline{U}(z) = 0 \qquad \underline{Y}' = G' + j\omega C'$$

Lösungen:
$$\boxed{\begin{aligned}&\underline{I}(z) = \underline{I}_1 e^{-\gamma z} + \underline{I}_2 e^{\gamma z}\\ &\underline{U}(z) = \underline{U}_1 e^{-\gamma z} + \underline{U}_2 e^{\gamma z}\\ &\gamma = \sqrt{\underline{Y}'\underline{Z}'} = \sqrt{(G' + j\omega C')(R' + j\omega L')}\\ &\underline{U}_1 = \underline{Z}_w \underline{I}_1 \qquad \underline{U}_2 = -\underline{Z}_w \underline{I}_2 \qquad \underline{Z}_w = \sqrt{\underline{Z}'/\underline{Y}'}\end{aligned}}$$

$\beta = \mathrm{Im}(\gamma)$ nicht $\sim \omega$ → dispergierende Welle

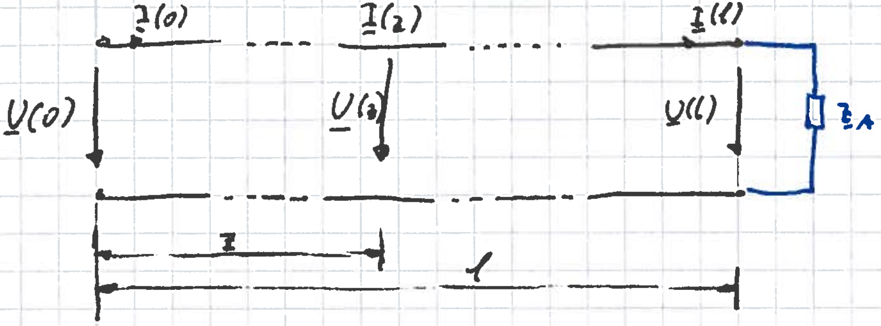
Fourierkomponenten von Signal unterschiedliche $c_{ph} = \frac{\omega}{\beta}$ → verzerrt

ist $L'/R' = C'/G'$

$\gamma = \alpha + j\beta \qquad \alpha = \sqrt{R'G'} \qquad \beta = \omega\sqrt{L'C'}$

→ Signal gedämpft aber nicht dispergierend

verzerrungsfrei



$\rightarrow \; U(l) = Z_A \cdot I(l) \qquad U_1 = Z_w I_1 \qquad U_2 = -Z_w I_2$

$\cancel{U(l)} = Z_A \cdot I(l) = U_1 e^{-\gamma l} + U_2 e^{\gamma l}$

$Z_A \cdot (I_1 e^{-\gamma l} + I_2 \cdot e^{\gamma l}) = U_1 e^{-\gamma l} + U_2 e^{\gamma l}$

$\frac{Z_A}{Z_w} (U_1 e^{-\gamma l} - U_2 \cdot e^{\gamma l}) = U_1 e^{-\gamma l} + U_2 e^{\gamma l}$

$\frac{Z_A}{Z_w} (U_1 e^{-\gamma l} - U(0) e^{\gamma l} + U_1 e^{\gamma l}) = U_1 e^{-\gamma l} + U(0) e^{\gamma l} - U_1 e^{\gamma l}$

$$U_1 \Big(\underbrace{\frac{Z_A}{Z_w} e^{-\gamma l} + \frac{Z_A}{Z_w} e^{\gamma l}}_{2\cosh(\gamma l)} \underbrace{- e^{-\gamma l} + e^{\gamma l}}_{2\sinh(\gamma l)} \Big) = U(0) \Big(\frac{Z_A}{Z_w} \cdot e^{\gamma l} + e^{\gamma l} \Big)$$

$$\boxed{U_1 = \frac{(Z_A + Z_w) e^{\gamma l}}{Z_A \cosh(\gamma l) + Z_w \sinh(\gamma l)} \cdot \frac{U(0)}{2}}$$

$$\boxed{U_2 = \frac{(Z_A - Z_w) e^{-\gamma l}}{Z_A \cosh(\gamma l) + Z_w \sinh(\gamma l)} \cdot \frac{U(0)}{2}}$$

Bei: $Z_A = Z_w$ verschwindet U_2, I_2 $\rightarrow U_1 = Z_w I_1 = U(0)$

keine rücklaufende Welle! (als ob $l = \infty$)

Rückeinsetzen

$$I(z) = \frac{Z_A \sinh(\gamma(l-z)) + Z_w \cosh(\gamma(l-z))}{Z_A \cosh(\gamma l) + Z_w \sinh(\gamma l)} \cdot \frac{U(0)}{Z_w}$$

$$U(z) = \frac{Z_A \cosh(\gamma(l-z)) + Z_w \sinh(\gamma(l-z))}{Z_A \cosh(\gamma l) + Z_w \sinh(\gamma l)} \cdot U(0)$$

für $Z_A = Z_w$

$I(z) = \frac{U(0)}{Z_w} e^{-\gamma z} \qquad U(z) = U(0) e^{-\gamma z}$

verlustfrei: $\gamma = j\beta = j\, 2\pi/\lambda \qquad Z_w$ reell $\rightarrow$ Effektivwerte entlang Leitung ändern sich nicht

$P_{wirk} = U^2 / Z_w$

offen: $\frac{U(l)}{U(0)} = \frac{1}{\cos(2\pi l/\lambda)} \qquad Z_E = \frac{U(0)}{I(0)} = -j Z_w \cot(2\pi l/\lambda) = -j Z_w \cot(\omega l/c)$

kurzgeschl.: $Z_E = \frac{U(0)}{I(0)} = j Z_w \tan(2\pi l/\lambda) = j Z_w \tan(\omega l/c)$

① $\vec f = \frac{1}{r^2}[\cos\vartheta\, \vec e_r - \sin\vartheta\, \vec e_\vartheta]$

$\vec e_r = \sin(\vartheta)\cos(\alpha)\vec e_x + \sin(\vartheta)\sin(\alpha)\vec e_y + \cos(\vartheta)\vec e_z$

$\vec e_\vartheta = \cos(\vartheta)\cos(\alpha)\vec e_x + \cos(\vartheta)\sin(\alpha)\vec e_y - \sin(\vartheta)\vec e_z$

$\vec e_\alpha = -\sin(\alpha)\vec e_x + \cos(\alpha)\vec e_y$

$$\vec f = \frac{1}{r^2}\Big[\cos(\vartheta)[\sin(\vartheta)\cancel{\cos(\alpha)\vec e_x} + \sin(\vartheta)\cancel{\sin(\alpha)\vec e_y} + \cos(\vartheta)\vec e_z]$$
$$-\sin(\vartheta)[\cos(\vartheta)\cancel{\cos(\alpha)\vec e_x} + \cos(\vartheta)\cancel{\sin(\alpha)\vec e_y} - \sin(\vartheta)\vec e_z]\Big]$$

~~$\sin x\cos y = \frac12(\sin(x-y)+\sin(x+y))$~~

$$\cancel{\vec f = \frac{1}{r^2}\Big[\frac12\sin(2\vartheta)\cos(\alpha)\vec e_x + \frac12\sin(2\vartheta)\sin(\alpha)\vec e_y + \cos^2\vartheta\,\vec e_z - \frac12\sin(2\vartheta)\cos(\alpha)\vec e_x}$$

$$\vec f = \frac{1}{r^2}[\underbrace{\cos^2(\vartheta) + \sin^2(\vartheta)}_{1}]\vec e_z = \underline{\underline{\frac{1}{r^2}\vec e_z}}$$

$\vec e_z = \cos(\vartheta)\vec e_r - \sin(\vartheta)\vec e_\vartheta$

---

② $\vec f = \vec f(\tau)$ $\qquad \tau = t - \vec k\cdot\vec r/c$

$\vec\nabla\cdot\vec f = ?$ $\qquad \vec\nabla\times\vec f = ?$

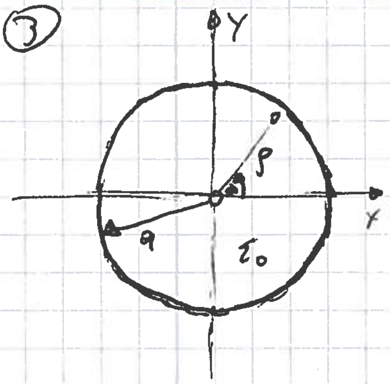
$\vec\nabla\cdot\vec f = (\vec\nabla\tau)\cdot\frac{d\vec f}{d\tau}$

$$\boxed{\vec\nabla\cdot\vec f = -\frac1c\vec k\cdot\frac{d\vec f}{d\tau} = -\frac{1}{c}\frac{d}{d\tau}(\vec k\cdot\vec f)}$$

$$\boxed{\vec\nabla\times\vec f = (\vec\nabla\tau)\times\frac{d\vec f}{d\tau} = -\frac1c\vec k\times\frac{d\vec f}{d\tau} = \frac1c\frac{d\vec f}{d\tau}\times\vec k = \frac1c\frac{d}{d\tau}(\vec f\times\vec k)}$$

---

③



inneres Neumann $\qquad \oint_{\partial V} E_n\, dA \overset{!}{=} 0$

$E_\rho(a,\alpha) = E_0\cos(n\alpha)$ $\qquad n\in\mathbb N$

$\vec E(\rho,\alpha) = ?$ $\qquad 0\le\rho\le a$ ... Ladungsfrei

$0\le\rho\le a$ $\qquad 0\le\alpha\le 2\pi$

$\vec E = -\vec\nabla\varphi$ $\quad \vec D = \varepsilon\cdot\vec E$ $\quad \vec\nabla\cdot\vec D = \rho$ $\quad \rho = 0$

→ Laplace ($\nabla^2\varphi = 0$) ~~Ansatz~~:

$\vec E = -\vec\nabla\varphi = -\vec e_\rho\partial_\rho\varphi_\rho - \vec e_\alpha\frac1\rho\partial_\alpha\varphi_\alpha - \vec e_z\partial_z\varphi_z$ $\qquad$ → Ansatz: $\varphi = R(\rho)\cos(n\alpha)$

$\vec\nabla\cdot\vec E = +\frac1\rho\partial_\rho(\rho E_\rho) + \frac1\rho\partial_\alpha E_\alpha$ $\qquad \vec E = -\vec e_\rho R'(\rho)\cos(n\alpha) + \vec e_\alpha\frac1\rho R(\rho)\sin(n\alpha)n$

$= -\frac1\rho(R'(\rho)\cos(n\alpha) + \rho R''(\rho)\cos(n\alpha)) + \frac{1}{\rho^2}R(\rho)\cos(n\alpha)n^2 \overset{!}{=} 0$

$\rho^2R''(\rho) + \rho R'(\rho) - n^2R(\rho) \overset{!}{=} 0$ $\qquad$ Ansatz: $R(\rho) = k\rho^\beta$ $\quad R'(\rho) = k\beta\rho^{\beta-1}$ $\quad R''(\rho) = k\beta(\beta-1)\rho^{\beta-2}$

$\cancel{\rho^2}\cancel{k}\beta(\beta-1)\rho^{\beta-2} + \cancel{\rho}\cancel{k}\beta\rho^{\beta-1} - n^2\cancel{k\rho^\beta} = 0$ $\qquad \beta^2 = n^2$ $\quad \beta = n$ $\quad$ sonst φ nicht beschränkt

$\varphi = (k_1 \rho^{n} + k_2 \rho^{-n}) \cos(n\alpha)$ $\qquad k_2 = 0$ damit φ beschränkt für $\rho \to 0$

$\varphi = k_1 \rho^n \cos(n\alpha)$

$\vec{E} = -\vec{e}_\rho n k_1 \rho^{n-1} \cos(n\alpha) + \vec{e}_\alpha \frac{1}{\rho} k_1 \rho^n n \sin(n\alpha)$

$-n k_1 a^{n-1} \cancel{\cos(n\alpha)} = E_0 \cancel{\cos(n\alpha)}$

$k_1 = -\frac{E_0}{n a^{n-1}}$

$$\boxed{\vec{E}(\rho,\alpha) = E_0 \frac{\rho^{n-1}}{a^{n-1}} \cdot \left[\vec{e}_\rho \cos(n\alpha) - \vec{e}_\alpha \sin(n\alpha)\right]}$$

---

④ $\boxed{5.3.2}$ $\quad$ 6 Spannungsschichten $\to$ $U = 6\Delta\varphi$

(i) $\quad$ 13 Flussröhren $\quad \Psi' = 13 \cdot \varepsilon_0 \Delta\varphi$

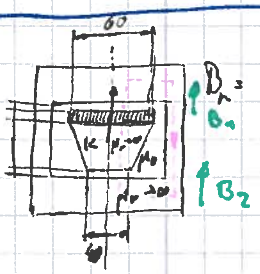
$Q' = \Psi' = C'U \qquad C' = \frac{\Psi'}{U} = \frac{13 \varepsilon_0 \Delta\varphi}{6\Delta\varphi} = \frac{13}{6}\varepsilon_0 = \frac{13}{6} 8{,}8542 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}$

(ii) $\quad L'C' = \frac{1}{c^2} = \mu_0 \varepsilon_0$

$L' = \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{C'} = \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{\frac{13}{6}\varepsilon_0} = \frac{6}{13} 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m}$

---

⑤ $\qquad \boxed{2.3.16}$



$B_r = \mu_0 M = 0{,}9\,T \qquad \vec{F}_k = ?$

DES

$\oint(\partial V) = 0 \qquad \Phi = B \cdot A \qquad V(\partial A) = I(A) \qquad V = H \cdot l \qquad B = \mu \cdot H$

$H_1 l_1 + H_M l_M + H_2 l_2 = 0 \qquad H_1 = \frac{B_1}{\mu_0} \qquad H_2 = \frac{B_2}{\mu_0}$

$B_1 A_1 = B_2 A_2 \qquad B_1 = \mu_0 H_M + \mu_0 M \qquad \frac{1}{\mu_0}(B_1 - \mu_0 M) = H_M$

$\frac{1}{\mu_0} B_1 l_1 + H_M l_M + \frac{1}{\mu_0} B_2 l_2 = 0 \qquad B_1 \frac{A_1}{A_2} = B_2$

$\frac{1}{\mu_0} B_1 l_1 + \frac{l_M}{\mu_0}(B_1 - \mu_0 M) + \frac{1}{\mu_0} B_1 \frac{A_1}{A_2} l_2 = 0$

$B_1 \frac{l_1}{l_M} + B_1 + B_1 \frac{A_1}{A_2}\frac{l_2}{l_M} = \mu_0 M$

$B_1 = \frac{\mu_0 M}{1 + \frac{l_1}{l_M} + \frac{A_1}{A_2}\frac{l_2}{l_M}} = \ldots \qquad B_2 = B_1 \frac{A_1}{A_2} = \ldots$

$\vec{B}_1 = B_1 \vec{e}_z \qquad \vec{B}_2 = B_2 \vec{e}_z$

$\vec{F}_\Omega = \int_{\partial V_1} \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{n} \cdot \vec{B}\vec{B} - \frac{1}{2} B^2 \vec{n}\right) dA \qquad \vec{F} = \frac{B_1^2}{2\mu_0} A_1 \vec{e}_z - \frac{B_2^2}{2\mu_0} A_2 \vec{e}_z = \ldots$

⑥ DLB $\boxed{2}$

$\underset{\sim}{\varepsilon} = \varepsilon_x \vec{e}_x \otimes \vec{e}_x + \varepsilon_y \vec{e}_y \otimes \vec{e}_y + \varepsilon_z \vec{e}_z \otimes \vec{e}_z$ in Ladungsfreien Gebiet

ges.: L-ähnliche DG herleiten (Potential einführen)

$\vec{D} = \underset{\sim}{\varepsilon} \cdot \vec{E} \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$

$\vec{\nabla} \cdot (\underset{\sim}{\varepsilon} \cdot \vec{E}) = 0$

$(\vec{\nabla} \cdot \underset{\sim}{\varepsilon}) \cdot \vec{E} + \underset{\sim}{\varepsilon} : \vec{\nabla}\vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla} \cdot \underset{\sim}{\varepsilon} \overset{!}{=} 0 \quad (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z \ldots \text{konst})$

Skalarprodukt f. Dyade

$(a \otimes b) : (c \otimes d) = (a \cdot b)(c \cdot d)$

$\underset{\sim}{\varepsilon} : \vec{\nabla}\vec{E} = 0$

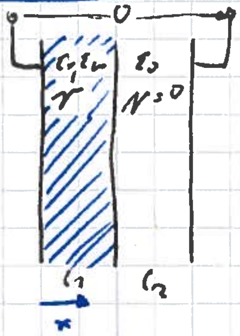
$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$

$-\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\varphi = 0$

$\nabla^2 \varphi = 0$

---

⑦



$t = 0$ Spannung U angelegt

$\sigma, J \quad t > 0$ an Grenzflächen

$\vec{E} = E \vec{e}_x$

$\vec{D} = D \vec{e}_x \qquad E = \frac{D}{\varepsilon}$

$U = \int_0^{l_1 + l_2} E \, dx = \int_0^{l_1} \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} dx + \int_{l_1}^{l_2} \frac{D}{\varepsilon_0} dx = \frac{D}{\varepsilon_0}\left(\frac{l_1}{\varepsilon_r} + l_2 - l_1\right)$

$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

$D = \frac{\varepsilon_0 U}{\frac{l_1}{\varepsilon_r} + l_2 - l_1} = \sigma_0$

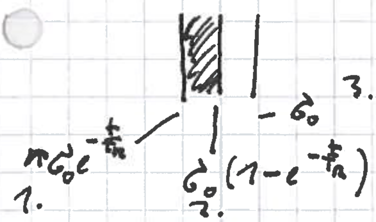
$\sigma = \vec{n} \cdot [\![\vec{D}]\!]$

$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) + \frac{\gamma}{\varepsilon}\rho = 0 \qquad \vec{v} = \vec{0}$

$\partial_t \rho + \frac{\gamma}{\varepsilon}\rho = 0$

$\rightarrow \rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{T_R}} \qquad T_R = \frac{\varepsilon}{\gamma} \qquad \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$

sammelt sich als Flächenladung an Grenzen (linear homogen) = keine Raumladung



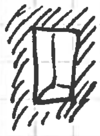
$\vec{n} \cdot [\![\vec{J}]\!] = -\partial_t \sigma$

$\vec{J} = J \vec{e}_x$

$3: J = 0$

$1: J = -\sigma_0 e^{-\frac{t}{T_R}} \cdot \left(\frac{1}{T_R}\right) = \frac{\sigma_0}{T_R} \cdot e^{-\frac{t}{T_R}}$

$2: J = \sigma_0 e^{-\frac{t}{T_R}} \cdot \left(\frac{1}{T_R}\right) = -\frac{\sigma_0}{T_R} e^{-\frac{t}{T_R}}$

⑧ 

$0 \le x \le a \qquad 0 \le y \le b \qquad 0 \le z \le c$

$a > b > c$

$\vec{E}(x,y,z,t) = E_0 \sin(k_x x)\sin(k_y y)\cos(\omega t)\vec{e}_z$

kleinste mögliche Resonanzfrequenz?

$\Box E_z = 0$

$(\nabla^2 - \frac{1}{c_0^2}\partial_t^2)E_z = 0$

$(\partial_x^2 + \partial_y^2 - \frac{1}{c_0^2}\partial_t^2)E_z = 0$

$-E_0 \sin(k_y y)\cos(\omega t)\sin(k_x x)k_x^2 - E_0\sin(k_x x)\cos(\omega t)\sin(k_y y)k_y^2 + \frac{1}{c_0^2} E_0 \sin(k_x x)\sin(k_y y)\cos(\omega t)\omega^2 = 0$

$-\cancel{\ldots}k_x^2 - \cancel{\ldots}k_y^2 + \frac{\omega^2}{c_0^2}\cancel{\ldots} = 0$

$\left.\begin{array}{l}\vec{E}(0,y,z,t)=0\\ \vec{E}(x,0,z,t)=0\\ \cancel{\vec{E}(x,y,0,t)=0}\end{array}\right\}$ durch sin erfüllt

$\vec{E}(a,y,z,t)=0 \quad \rightarrow k_x = \frac{n\pi}{a}$

$\vec{E}(x,b,z,t)=0 \quad \rightarrow k_y = \frac{m\pi}{b}$ $\Big\}$ kleinste $n, m = 1, 1$

$\frac{\omega^2}{c_0^2} = k_x^2 + k_y^2$

$\omega = c_0\pi\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}} \qquad \omega = 2\pi f$

$f = \frac{1}{2}c_0\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}$

---

9) geg. magn. Vektorpotential $\vec{A}$ $\qquad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$

ges.: magn. Skalarpotential φ_m $\qquad \vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi_m$

$\vec{A} = K\ln(\frac{\rho}{a})\vec{e}_z \qquad K, a = $ konst. $\qquad$ leerer Raum

$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = -\vec{e}_\alpha \partial_\rho A = -\frac{K}{\rho}\vec{e}_\alpha$

$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} = -\frac{K}{\mu_0}\cdot\frac{1}{\rho}\vec{e}_\alpha$

$\vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi_m \Rightarrow -\frac{K}{\mu_0}\cdot\frac{1}{\rho}\vec{e}_\alpha = -\vec{e}_\alpha\frac{1}{\rho}\partial_\alpha\varphi_m$

$\frac{K}{\mu_0} = \partial_\alpha\varphi_m$

$\underline{\underline{\varphi_m = \frac{K}{\mu_0}\alpha + C}}$

10 geg.: $\vec{H}, \vec{E}$ geg.: $\vec{H} = ...$

ges.: Mittelwert d. Strahlungsleistung

$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = ...$

$\langle \vec{S} \rangle = ...$

$P = \int_0^{\pi} \vec{e_r} \cdot \langle \vec{S} \rangle \underbrace{2\pi r^2 \sin(\theta)\, d\theta}_{dA} = ...$