1. Abstand zwischen 2 Punkten in Kugelkoordinaten (r, θ, α):

$P_1\ (2m, 36°, 14°)$, $P_2\ (3m, 118°, 229°)$

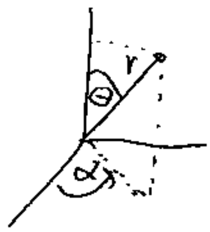
$\vec{r} = r \cdot \vec{e}_r$, $r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$

$x = r \cdot \sin(\theta) \cdot \cos\alpha$
$y = r \sin(\theta) \sin\alpha$
$z = r \cdot \cos(\theta)$

$\vec{e}_r = \sin(\theta)\cos(\alpha)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\sin(\alpha)\,\vec{e}_y + \cos(\theta)\,\vec{e}_z$

$$r_{12} = \sqrt{\left[r_1 \sin(\theta_1)\cos(\alpha_1) - r_2 \sin(\theta_2)\cos(\alpha_2)\right]^2 + \left[r_1 \sin(\theta_1)\sin(\alpha_1) - r_2 \sin(\theta_2)\sin(\alpha_2)\right]^2 + \left[r_1\cos(\theta_1) - r_2\cos(\theta_2)\right]^2}$$

$$r_{12} = \sqrt{9{,}64 + 5{,}1 + 9{,}16} = \underline{\underline{4{,}88\ m}}$$



$$(\overline{e_1} \otimes \overline{e_2}) \cdot \overline{e_3} = \overline{e_1} \otimes (\overline{e_2} \cdot \overline{e_3})$$

2. Anisotropes Dielektrikum $\boxed{A.\ 2.1.12}$

? Winkel zwischen $\vec{E}$ und $\vec{D}$.

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = (2{,}6\ \vec{e}_x \otimes \vec{e}_x + 1{,}2\ \vec{e}_y \otimes \vec{e}_y + 1{,}7\ \vec{e}_z \otimes \vec{e}_z)$$

$$\vec{E} = \frac{E_0}{\sqrt{21}}\left(\vec{e}_x - 4\vec{e}_y + 2\vec{e}_z\right)$$

$$\vec{D} = \underset{\sim}{\varepsilon} \cdot \vec{E} = \frac{\varepsilon_0 E_0}{\sqrt{21}}\left(2{,}6\,\vec{e}_x - 4{,}8\,\vec{e}_y + 3{,}4\,\vec{e}_z\right)$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{|\vec{E}| \cdot |\vec{D}|}$$

$$\vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{21} \cdot (2{,}6 + 19{,}2 + 6{,}8) = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{21} \cdot 28{,}6$$

$$|\vec{E}| = \frac{E_0}{\sqrt{21}} \cdot \sqrt{1 + 16 + 4}$$

$$|\vec{D}| = \varepsilon_0 \cdot \frac{E_0}{\sqrt{21}} \cdot \sqrt{41{,}36} \implies \cos\alpha = \frac{28{,}6}{\sqrt{21 \cdot 41{,}36}} = 0{,}97$$

$$\underline{\underline{\alpha = 13{,}94°}}$$

$$\varphi(r,\Theta) = \frac{E_0}{2} \cdot r_0 \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right) \cdot \cos(\Theta)$$

i, berechne $\frac{r}{r_0} = f(\Theta, \frac{|\vec{E}|}{E_0})$.

ii, zeichne Kurve für $|\vec{E}| - E_0$.

i, $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = E_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^3 \cos(\Theta)\, \vec{e}_r + \frac{E_0}{2} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\cancel{2}\,3} \sin(\Theta)\, \vec{e}_\Theta$

$$= E_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^3 \left(\cos(\Theta)\vec{e}_r + \frac{1}{2}\sin(\Theta)\vec{e}_\Theta\right)$$

$$|\vec{E}| = E_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^3 \cdot \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1{,}12 \cdot E_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^3$$

$$\left(\frac{r}{r_0}\right)^3 = \frac{E_0}{|\vec{E}|} \cdot \sqrt{1{,}25} \Rightarrow \frac{r}{r_0} = \sqrt[3]{\frac{E_0}{|\vec{E}|} \cdot \sqrt{1{,}25}}$$

ii, $\frac{r}{r_0} = \sqrt[6]{1{,}25}$

Transversalwelle ⊥ auf z, y

(4.) Berechne den Mittelwert des Poynting-Vektors:

$\vec{B} = \hat{B} \cdot [\cos(\omega t - kz)]\, \vec{e}_x$ (oder ähnlich) $\quad e_x\, e_y\, e_z$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \qquad \vec{E} = -Z_0(\vec{k} \times \vec{H}) = -Z_0(\vec{e}_z \times H \cdot \vec{e}_x)$$

$$= -Z_0 H\, \vec{e}_y$$

$$\vec{S} = -Z_0 H \vec{e}_y \times H\vec{e}_x = Z_0 H^2\, \vec{e}_z$$

$$= Z_0 \left(\hat{B} \cos(\omega t - kz)\right)^2 \vec{e}_z$$

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{Z_0 \cdot \hat{H}^2}{2}$$

- $\vec{H} = H \vec{e}_x$
- $\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H}$

Bestimme Maxwell-geeichtes Vektorpotential :

A) (i) $\vec{B} = B_0 \left[\sin\left(\frac{z}{a}\right) \vec{e}_x + \cos\left(\frac{z}{a}\right) \vec{e}_y \right]$ $\boxed{A.3.4.7}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \implies \partial_z A = 0 \implies \underline{A_z = 0}$$

$\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}}$ $\quad B_x = -\partial_z A_y \;, \quad B_y = \partial_z A_x$

$$A_x = \int B_y \, dz = a \cdot \sin\left(\frac{z}{a}\right) \cdot B_0$$

$$A_y = -\int B_x \, dz = a \cdot \cos\left(\frac{z}{a}\right) \cdot B_0$$

$$\underline{\vec{A} = a \cdot B_0 \left[\sin\left(\frac{z}{a}\right) \vec{e}_x + \cos\left(\frac{z}{a}\right) \vec{e}_y \right] = a \cdot \vec{B}}$$

ii) Zeige daß Magnetfeld kräftefrei ist:

Kraftdichte $\vec{f} = \vec{J} \times \vec{B}$

$B = \mu_0 \cdot H \;, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \implies \mu_0 \vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{B}$

$$\vec{J} = \vec{e}_x \left[-\partial_z B_y \right] + \vec{e}_y \left[\partial_z B_x \right] = \frac{B_0}{\mu_0 \cdot a} \left[\sin\left(\frac{z}{a}\right) \vec{e}_x + \cos\left(\frac{z}{a}\right) \vec{e}_y \right]$$

$\implies \vec{J}$ prop. $\vec{B}$ $\implies$ $\vec{J} \times \vec{B} = 0$ $\implies$ Kraftdichte $\vec{f}$ verschwindet.
gleiche Richtung

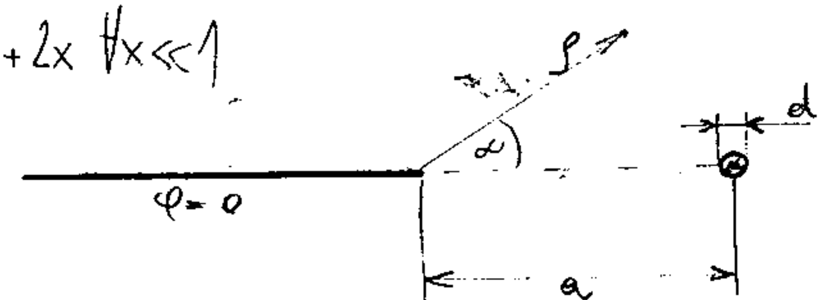
(6.) Neben einer Metallplatte liegt ein Leiter.
Berechne die längenbezogene Kapazität C':

$Q = C \cdot U$

$Q' = C' \cdot U$

$U = \frac{Q'}{C'}$

$(1+x)^2 = 1 + 2x \;\; \forall x \ll 1$



geg.: $$\varphi_{(\rho,\alpha)} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \ln \left\{ \frac{1 + \left(\frac{\rho}{a}\right)^{2\nu} + 2\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\nu} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \left(\frac{\rho}{a}\right)^{2\nu} - 2\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\nu} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right\}$$

Hinweis: $(1+\delta)^{\gamma} \approx 1 + \gamma\delta \;, \quad |\delta| \ll 1$

./.

(6.) $C' = ?$ $C = \frac{Q}{U} \Rightarrow C' = \frac{Q'}{U} = \frac{\tau}{U}$

$$U = \varphi_{Leiter} - \varphi_{Platte} = \varphi(a-\tfrac{d}{2}, 0°) - 0 =$$

$= \ln a - \ln b =$

$$= \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \ln \left\{ \frac{1 + (1-\frac{d}{2a})^{2\nu} + \cancel{2(1-\frac{d}{2a})^{\nu} \cdot \overbrace{\sin(0°)}^{0}}}{1 + (1-\frac{d}{2a})^{2\nu} - 2(1-\frac{d}{2a})^{\nu} \cdot \underbrace{\cos(0°)}_{1}} \right\}$$

$$= \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \ln \left\{ \frac{1 + (1-\frac{d}{2a})^{2\nu}}{\left[1 - (1-\frac{d}{2a})^{\nu}\right]^2} \right\}$$

mit $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

{Hinweis verwenden

$1 + \sqrt{\ldots}$

$$\approx \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \ln \left\{ \frac{1 + 1 - 2\nu \cdot \frac{d}{2a}}{\left[\cancel{1} - \cancel{1} + \nu \frac{d}{2a}\right]^2} \right\} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \ln \left\{ \frac{2 - 2\nu \frac{d}{2a}}{\left[\nu \cdot \frac{d}{2a}\right]^2} \right\}$$

$1 - \sqrt{\ldots}$

$$\boxed{C' = \frac{\tau}{U} = 4\pi\varepsilon_0 / \ln\{\ldots\}}$$

$\ln\left\{\frac{8a}{d}\right\}$

(7.) <u>Sendereichweite:</u>

$$\vec{E} = Re\left[\vec{\mathcal{E}} \cdot e^{j\omega t - \gamma \vec{\kappa} \cdot \vec{r}}\right]$$

$\gamma = \alpha + j\beta$

$\alpha = \ldots$

$\beta = \ldots$

Bei welcher Entfernung $\vec{a}$ vom Sender beträgt der Betrag der Feldstärke nur noch 1% ?

$(\vec{a} = a \cdot \vec{\kappa})$

$\vec{\kappa} \cdot \vec{r} = r$

$$\frac{|\vec{E}(\vec{a})|}{|\vec{E}(0)|} = 0{,}01$$

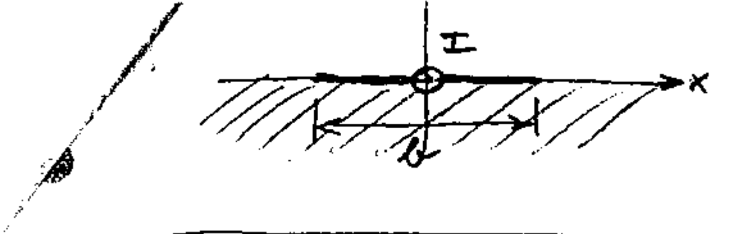
$|e^{j(\ldots)}| = 1$

$$\frac{|\vec{\mathcal{E}} \cdot e^{-\alpha a} \cdot e^{j(\omega t - \beta a)}|}{|\vec{\mathcal{E}} \cdot e^{j\omega t}|} = \underbrace{\frac{|\vec{\mathcal{E}}|}{|\vec{\mathcal{E}}|}}_{1} \cdot e^{-\alpha a} = 0{,}01$$

$|\cos x + j \sin x| = 1$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{\ln\left(\frac{1}{0{,}01}\right)}{\alpha}}$$

$$|e^{a} \cdot e^{jb}| = |e^{a}| \cdot |e^{jb}|$$



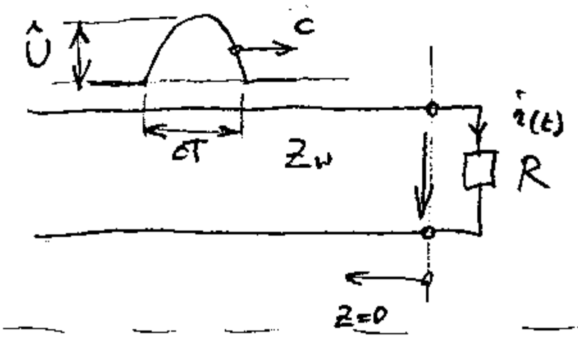
im Gebiet $y \geq 0$.

$\boxed{A.3.5.3}$

(9.)

$\boxed{A.4.2.6}$

(10.)



Eine sin.-Welle bewegt sich auf der Leitung.

Berechne $i(t)$:

$$\text{I:}\quad U_{(z,t)} = U_1 \cdot f(t-\tfrac{z}{c}) + U_2\, f(t+\tfrac{z}{c})$$

$$\text{II:}\quad I_{(z,t)} = I_1 \cdot f(t-\tfrac{z}{c}) + I_2\, f(t+\tfrac{z}{c})$$

$$U_1 = Z_W I_1 \quad , \quad U_2 = -Z_W I_2$$

$$U_{(0,t)} = I_{(0,t)} \cdot R$$

$$U_{(0,t)} = U_1 \cdot f(t) + U_2\, f(t) = \left[I_1\, f(t) + I_2\, f(t)\right] \cdot R =$$

$$= \left[\frac{U_1}{Z_W} \cdot f(t) - \frac{U_2}{Z_W} \cdot f(t)\right] \cdot R$$

$$\Rightarrow U_1 \left(1 - \frac{R}{Z_W}\right) = - U_2 \left(1 + \frac{R}{Z_W}\right)$$

$$\underline{\underline{U_2}} = U_1 \cdot \frac{\frac{R}{Z_W} - 1}{1 + \frac{R}{Z_W}} = \underline{\underline{U_1 \cdot \overbrace{\frac{R - Z_W}{R + Z_W}}}}$$

$\hat{=}$ Reflexionsfaktor $\Rightarrow$ OK.

$$\text{in II:}\quad \underline{\underline{I_{(0,t)}}} = \frac{U_1}{Z_W} \cdot \sin\Big(\overbrace{2\pi \cdot \tfrac{1}{2T}}^{\omega} \cdot t\Big) - \frac{U_1 (R - Z_W)}{Z_W (R + Z_W)} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{T} \cdot t\right) =$$

$$= \frac{U_1}{Z_W} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \left[1 - \frac{R - Z_W}{R + Z_W}\right] = \frac{U_1}{\cancel{Z_W}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \frac{2 \cancel{Z_W}}{R + Z_W}$$

$$= \underline{\underline{\hat{U} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \frac{2}{R + Z_W}}} \quad .$$

Abstand zu 2 Punkten in Kugelkoord.: 25.10.2007

(r, θ, φ)

$P_1 (2m, 36°, 14°)$ $P_2 = (3m, 78°, 228°)$

$d = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2}$

$x = r \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi)$ $\quad x_1 = 1{,}14 \quad x_2 = -1{,}73$

$y = r \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi)$ $\quad y_1 = 0{,}28 \quad y_2 = -1{,}99$

$z = r \cos(\theta)$ $\quad z_1 = 1{,}61 \quad z_2 = -1{,}40$

$d = 4{,}738$

---

(2) Anisotropes Diel.: A 2.1.12 Winkel zu $\vec{E}$ u. $\vec{D}$

$\underset{\sim}{\varepsilon} = 2{,}6 \vec{e_x} \otimes \vec{e_x} + 1{,}2 \vec{e_y} \otimes \vec{e_y} + 1{,}7 \vec{e_z} \otimes \vec{e_z} (\varepsilon_0)$

$\vec{E} = E_0 \frac{(e_x - 4e_y + 2e_z)}{\sqrt{21}}$

$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} =$ $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$

$\vec{D} = \frac{E_0}{\sqrt{21}} \cdot (2{,}6 \cdot \vec{e_x} \otimes \vec{e_x} \cdot \vec{e_x} - 4{,}8 \vec{e_y} + 3{,}4 \vec{e_z} \varepsilon_0)$ $\quad \vec{D} = \frac{E_0}{\sqrt{21}} \varepsilon_0 (2{,}6 e_x - 4{,}8 e_y + 2 e_z)$

$\cancel{\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} =}$ $\quad \cancel{|\vec{D}| = \frac{E_0}{\sqrt{21}} \varepsilon_0 \sqrt{\ldots}}$

$\cos(\varphi) = \frac{\frac{E_0}{\sqrt{21}}^2 \cdot 2{,}6 + 19{,}2 + 6{,}6}{\frac{E_0}{\sqrt{21}} \cdot \frac{E_0}{\sqrt{21}} \cdot \frac{1}{\sqrt{21} \cdot 6{,}43}} = \frac{28{,}6}{\frac{1}{6{,}43}} = 183{,}93$

$|\vec{D}| =$

$\cos(\varphi) = 183{,}93$ $\quad \vec{D} = \frac{\varepsilon_0 E_0}{\sqrt{21}} \cdot (2{,}6 \vec{e_x} - 4{,}8 \vec{e_y} + 3{,}4 \vec{e_z})$

$|\vec{D}| = \frac{\varepsilon_0 E_0}{\sqrt{21}} \sqrt{2{,}6^2 + 4{,}8^2 + 3{,}4^2}$ $\quad \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{|\vec{E}| \cdot |\vec{D}|} = \cos(\varphi) = \frac{\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{21}} \varepsilon_0 (24 + \ldots)}{\ldots}$

$|\vec{E}| = \frac{E_0}{\sqrt{21}} \sqrt{21}$ $\quad \frac{4{,}7}{\sqrt{21}}$

(3) $\varphi(r,\theta) = \frac{E_0}{2} \cdot r_0 \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \cos(\theta)$ ... Berechne $\frac{r}{r_0} = f\left(\theta, \frac{|\vec{E}|}{E_0}\right)$

in Bereich gilt für $|\vec{E}| = E_0$

$\cancel{\vec{E} = -\nabla\varphi = \frac{E_0}{2} r_0 \frac{r_0^2}{r^3} \cos(\theta) \vec{e_r} + \frac{E_0}{E_0} r \left(\frac{r_0^2}{r^2}\right) \sin(\theta) \vec{e_\theta}}$

$\vec{E} = -\nabla\varphi = \frac{E_0}{\cancel{2}} \frac{r_0^3}{r^3} \cos(\theta) \vec{e_r} + \frac{E_0}{2} \cdot \frac{r_0^3}{r^3} \cdot \sin(\theta) \vec{e_\theta}$

$\vec{E} = E_0 \cdot \left(\frac{r_0^3}{r^3}\right) \left[\cos(\theta) \vec{e_r} + \frac{1}{2} \sin(\theta) \vec{e_\theta}\right]$

in Kart.

$\vec{E} = E_0 \left(\frac{r_0^3}{r^3}\right) \cancel{\cos(\theta) \cdot \sin}(\theta)$

$|\vec{E}| = \sqrt{E_0 \left(\frac{r_0^3}{r^3}\right)^2 \cos(\theta)^2 + \frac{1}{4} E_0^2 \left(\frac{r_0^3}{r^3}\right)^2 \sin^2(\theta)}$

$= E_0 \frac{r_0^3}{r^3} \sqrt{\cos^2(\theta) + \frac{1}{4} \sin^2(\theta)}$

$\cos^2 + \sin^2 = 1$

$\sin^2 = 1 - \cos^2$

$|\vec{E}| = E_0 \frac{r_0^3}{r^3} \sqrt{\frac{3\cos^2 + 1}{4}}$

$\cos^2 + 1 - \frac{\cos^2}{4} = \frac{3}{4}\cos^2 + \frac{1}{4} =$

$3\cos^2$

$|\vec{E}| = E_0 \cdot \frac{r_0^3}{r^3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3\cos^2(\theta) + 1}$

$\frac{r}{r_0} = \sqrt[3]{E_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3\cos^2(\theta) - 1}}$

?

(4) Transversale Welle auf z, y. Berechne Mittelwert des Poynting-Vektors

$\vec{B} = B \cdot [\cos(\omega t - kz) \vec{e_x}]$

$\vec{x} = e_z$

$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$

$\vec{E} = -Z_0 \vec{x} \times \vec{H} =$

$\vec{E} = -Z_0 \cdot \vec{e_z} \times H \vec{e_x}$

$\vec{E} = E \cdot -\vec{e_y}$

$\vec{H} = \frac{B}{\mu_0} (\cos(\omega t - kz) \vec{e_x}$

z

e

$\vec{E} = +Z_0 \cdot \frac{B}{\mu_0} \cdot \cos(\omega t - kz) - \vec{e_y}$

$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = Z_0 \frac{B}{\mu_0} \cdot \frac{B}{\mu_0} \cdot \cos^2(\omega t - kz) + \vec{e_z}$

$= Z_0 \cdot \frac{B^2}{\mu_0^2} \cdot \cos^2(\omega t - kz)$

$= Z_0 \cdot \frac{B^2}{2\mu_0^2}$

Potential gesucht Vektorpot. 3.47

i) $\vec{B} = B_0 [\sin(\frac{z}{a}) \vec{e_x} + \cos(\frac{z}{a}) \vec{e_y}]$

ii) zeige, dass Feld kraftfrei

$\vec{A} = A(x,y) \vec{e_z}$

$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = (\partial_x A_y - \partial_y A_x) \vec{e_z}$

$\partial_x A_y = \cos(\frac{z}{a})$

$A_y = \cos(\frac{z}{a}) \cdot y + f(x)$

$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{e_x} \partial_y A_z + \vec{e_y} \cdot - \partial_x A_z$

$-\partial_x A_z = \cos$

$\vec{B} = B(z) \qquad A = A(z) \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \partial_z A_z = 0$

$A_z = \text{const} = 0$

$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{e_x} \cdot (\partial_y A_z) + \vec{e_y} (\partial_z A_x)$

$-B_0 \cdot \sin(\frac{z}{a}) = \partial_z A_y \quad A_y = +B_0 \cdot \cos(\frac{z}{a}) \cdot a + f(x)$

$\partial_z A_x = B_0 \cdot \cos(\frac{z}{a})$

$A_x = B_0 \cdot \sin(\frac{z}{a}) a$

$\underline{\vec{A} = B_0 (\sin(\frac{z}{a}) \vec{e_x} + \cos(\frac{z}{a}) \vec{e_y}) = B_0 \cdot a}$

ii) $f = \vec{J} \times \vec{B} \qquad B = \mu_0 \cdot H$

$\vec{\nabla} \times H = \vec{J}$

$\vec{\nabla} \times \vec{B} = J \mu_0$

$\vec{\nabla} \times \vec{B} = A \vec{e_x} \cdot (\vec{0} \cdot + \sin(\frac{z}{a}) \frac{1}{a} \cdot) + \vec{e_y} (\cos(\frac{z}{a}) \frac{1}{a})) = J_\mu = \frac{B_0}{a}$

$\underline{\vec{J} \times \vec{B} = 0}$

$$\varphi/g = \frac{I}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{(1+\frac{r}{a})^{2\nu} + 2(\frac{r}{a})^{\nu} \cdot \sin(\frac{\nu\varphi}{2})}{(1+\frac{r}{a})^{2\nu} + 2(\frac{r}{a})^{\nu} \cdot \cancel{\sin}\cos(\frac{\nu\varphi}{2})}\right)$$

$$(1+\delta)^{\gamma} = 1+\gamma\delta \qquad |\delta| \ll 1$$

$\vec{r} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$ 25.10.2007

	P_1	P_2
$x = r\sin(\theta)\cos(\alpha) =$	~~0,284~~ 1,140	$-1,737$
$y = r\sin(\theta)\sin(\alpha) =$	0,284	-2
$z = r\cos(\theta) =$	1,84	$-1,968$

$\vec{r} = \sqrt{\quad}$ $\vec{r} = \cancel{5,363}$ 4,738

---

(2) $\underset{\sim}{\varepsilon} = (2,6\,\vec{e_x}\otimes\vec{e_x} + 1,2\,\vec{e_y}\otimes\vec{e_y} + 1,7\,\vec{e_z}\otimes\vec{e_z})\,\varepsilon_0$

$\vec{E} = E_0 \dfrac{\vec{e_x} - 4\vec{e_y} + 2e_z}{\sqrt{21}}$

$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$

$\vec{D} = E_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \left(\dfrac{2,6}{\sqrt{21}}\vec{e_x} + \dfrac{4,8}{\sqrt{21}}\vec{e_y} + \dfrac{3,4}{\sqrt{21}}\vec{e_z} \right)$

$\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

$\vec{D}\cdot\vec{e} = \dfrac{E_0^2\varepsilon_0}{21}\cdot(2,6 + \cancel{E_0^2}\,4,48 + 6,8) = \dfrac{E_0^2\varepsilon_0}{21}.$ $\quad E_0^2\varepsilon_0 \cdot \dfrac{28}{21}$

$|\vec{D}| = \dfrac{E_0\varepsilon_0}{\sqrt{21}}\sqrt{(2,6^2+4,8^2+3,4^2}$ $\quad |\vec{D}| = \dfrac{E_0\varepsilon_0}{\sqrt{21}}\cdot\sqrt{47,36}$

$|\vec{E}| = E_0$

$\dfrac{\vec{D}\cdot\vec{E}}{|\vec{E}|\cdot|\vec{D}|} = \dfrac{\frac{28}{21}}{\frac{\sqrt{47,36}}{\sqrt{21}}} = 0,95 \sim \cancel{18,19^\circ}$

$13,96^\circ$

$\vec{B} = \hat{B} \cdot \cos(\omega t - kx)\vec{e_x}$ $\quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ $\quad \vec{E}, \vec{B}, \vec{\varkappa}$

$\vec{E} = -Z \cdot \vec{\varkappa} \times \vec{H}$ $\quad \vec{\varkappa} = \vec{e_z}$

$\vec{E} = -Z_0 \cdot H (\vec{e_z} \times \vec{e_x})$

$\vec{E} = -Z_0 \hat{H} \cdot \vec{e_y}$

$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = -Z_0 \cdot \frac{\hat{B}}{\mu_0} \cdot \cos(\omega t - kx)\vec{e_y} \times \frac{\hat{B}}{\mu_0} \cos(\omega t - kx)\vec{e_x}$

$\vec{S} = Z_0 \cdot \left(\frac{\hat{B}}{\mu_0}\right)^2 \cdot \cos^2(\omega t - kx)\vec{e_z}$

$\underline{\bar{S}} = \frac{Z_0}{2}\left(\frac{\hat{B}}{\mu_0}\right)^2$

---

5 $\quad$ 3.4.7 $\quad \vec{B} = B(z) \Rightarrow \vec{A} = A(z) \quad \vec{\nabla}\vec{A} = 0 \quad \partial_z A_z = 0 \quad A_z = 0$

$\vec{B} = B_0[\sin(\frac{z}{a})\vec{e_x} + \cos(z/a)\vec{e_y})$ maxwell feali

$\vec{A} = A(z)\vec{e_z}$

$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B} = \vec{e_x}(\partial_y A_z - \partial_z A_y) + \vec{e_y}(\partial_z A_x - \partial_x A_z)$

$-\vec{e_x}\partial_z A_y = B_0 \sin(\frac{z}{a})\vec{e_x} \quad -A_y = -B_0 \cos(\frac{z}{a}) \cdot a \cdot \vec{e_x}$

$\vec{e_y}\partial_z A_x = B_0 \cos(\frac{z}{a})\vec{e_y} \quad A_x = B_0 \sin(\frac{z}{a}) \, a \cdot \vec{e_y}$

$\vec{A} = a \cdot B_0 \cdot (\sin(\frac{z}{a}) \cdot \vec{e_x} + \cos(\frac{z}{a})\vec{e_y})$

$\vec{A} = a \cdot \vec{B}$

ii) $\vec{f} = \vec{J} \times \vec{B}$ $\quad \vec{B} = \mu_0 \cdot \cancel{\vec{H}}$ $\quad \cancel{\mu_0}\vec{J}$ $\quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$

$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{J}$

$= -\vec{e_x}\partial_z B_y + \vec{e_y}\partial_z B_x = \frac{B_0}{a}(\sin(\frac{z}{a})\vec{e_x} + \cos(\frac{z}{a})\vec{e_y})$

$\vec{J} = \cancel{B_0} \; \frac{\vec{B}}{a}$

$\vec{J} \times \vec{B} = 0$ ... nei!!!

p. 3 (8)

$\vec{A} = A(x,y)\vec{e_z}$

$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ $B_x = \partial_y A$ $B_y = -\partial_x A$

$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H}$ Stromfreiheit für $r \neq 0$ gilt

$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \partial_x H_y - \partial_y H_x \vec{e_z}$ $\partial_x^2 A + \partial_y^2 A = 0$

$\vec{e_y} \times [[\vec{H}]] = \vec{e_y} \times (H \times \vec{e_z})$ bei $y = 0+$

$= \frac{1}{\mu_0} \cdot (\partial_y A)\vec{e_z}$ (bei $y = 0+$) $= K_z \cdot \vec{e_z}$

wobei $K_z = \frac{I}{b}$ für $|x| < \frac{b}{2}$ und $K_z = 0$ für $|x| \geq \frac{b}{2}$

für groß

$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ wird $A \to \frac{\mu_0 I}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) \to$

für $y > 0$: $\partial_x^2 A + \partial_y^2 A = 0$

für $y = 0+$ $\partial_y A = 0$ für $|x| > b/2$

für $|x| < b/2$: $\partial_y A = -\mu_0 \frac{I}{b}$

$y > 0$ $\rho = \sqrt{x^2+y^2} \to \infty$ $A \to \frac{\mu_0 I}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)$

⑨ 4.26 Frequenzselektivität.

$Z = \frac{U}{I}$

$U = \int \vec{s} \cdot E ds| = J_0 \frac{d}{\gamma}$

$I = b \int_0^{\infty} J_0 \cdot e^{j\omega t - (1+j)\frac{x}{\delta}} = -\frac{b \cdot \delta}{(1+j)} J_0 \cdot e^{j\omega t - (1+j)\frac{x}{\delta}} \Big|_0^{\infty} =$

$Z = \frac{U}{I} = \frac{d \frac{J_0}{\gamma}}{\frac{b \cdot \delta \cdot J_0}{-(1+j)}} = \frac{d \cdot (1+j)}{b \cdot d \gamma} = \frac{d}{b} \cdot \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}$

$= |Z| \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}$ mit $(1+j) = e^{j\pi/4}$

---

⑩ Impuls: $\hat{U} \cdot g(t - x/c) = \{ \cancel{0 \quad t<T \quad \sin}$

mit $g(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < T \\ \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) & 0 < t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases}$

Überlagerung $r \cdot \hat{U} \cdot g(t + x/c \quad r = (R - Z_w)/(R + Z_w)$

$\hat{U} \cdot g(t) + r \cdot \hat{U} g(t) = R i(t) \quad i(t) = 2 \cdot \hat{U} g(t) / (R + Z_w)$

---

(9) $\vec{E} = \mathrm{Re}\left(\vec{\mathcal{E}}\, e^{j\omega t - \gamma \vec{\kappa}\cdot\vec{r}}\right)$

$$\frac{|\vec{E}|_{r=R}}{|\vec{E}|_{r=0}} = 0{,}01$$

$$\vec{E}_0\, e^{-\gamma\vec{\kappa}\cdot\vec{r}} = \vec{E}\cdot 0{,}01$$

$$e^{-\gamma\cdot\vec{\kappa}\cdot\vec{r}} = 0{,}01$$

$$-\gamma\cdot\vec{\kappa}\cdot\vec{r} = \ln(0{,}01) \qquad \vec{\kappa}\cdot\vec{r} = r$$

$\gamma = \alpha + j\beta$ Phase cycle

$$-\gamma\cdot r = \ln(0{,}01)$$

$$-\alpha\cdot r = \ln(0{,}01)$$

$$r = \frac{\ln(0{,}01)}{-\alpha}$$

7.9.04 ohy

Elektrodynamik, 24. 09. 2003

1) Sei V ein räumlicher Bereich mit der Hülle dV, $\vec{F}$ und $\vec{G}$ seien zwei hinreichend glatte Vektorfelder. Formen Sie das Hüllenintegral

$$\int_{\partial V} \vec{n}\cdot[\vec{F}\times(\vec{\nabla}\times\vec{G})-\vec{G}\times(\vec{\nabla}\times\vec{F})]dA$$

In ein Volumenintegral über V um. Die entstehende Gleichung ist eine vektorielle Verallgemeinerung der zweiten Green-Identität.

2) Drücken Sie das in ebenen Polarkoordinaten (ρ,α) gegeben Vektorfeld

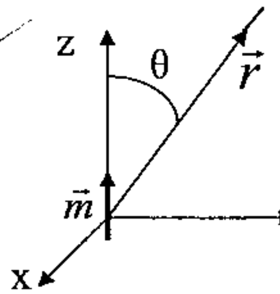
$$\vec{F}=K\cdot[2\rho\cos(\alpha)\cdot\vec{e}_\rho+\rho\cdot\vec{e}_\alpha], K=const.$$

in kartesischen Koordinaten (x,y) aus.

3) ein statischer magnetischer Dipol erzeugt im sonst leeren Raum bekanntlich eine magnetische Flussdichte, die sich bei passender Koordinatenwahl durch

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 m}{4\pi}\cdot\frac{3\cos(\theta)\cdot\vec{e}_r-\vec{e}_z}{r^3}$$

darstellen lässt. Zusätzlich herrsche ein homogenes elektrisches Feld mit der Feldstärke $\vec{E}=E\cdot\vec{e}_z$.



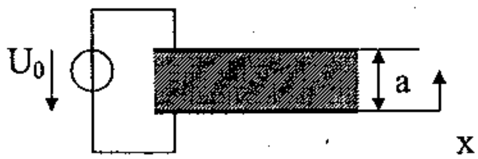
(i) Geben Sie das Feld des Poynting-Vektors $\vec{S}$ an.

(ii) Wie sehen die zu $\vec{S}$ gehörenden Vektorlinien aus?

(iii) Berechnen Sie die Quellendichte und Wirbeldichte von $\vec{S}$.

4)

2.1.2.



Eine beidseitig metallisch beschichtete, isolierende, im inneren ladungsfreie Schicht besitzt die ortsabhängige Permittivität

$$\varepsilon(x)=\varepsilon_0\cdot\frac{2a}{a+x}.$$

Zwischen den Metallschichten liegt die elektrische Spannung U_0.

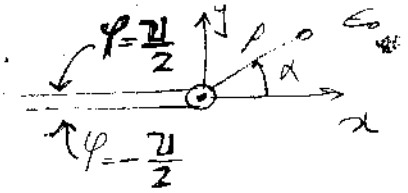
(i) Bestimmen sie die zum entstehenden Polarisationsfeld gehörende fiktive Ladungsverteilung.

(ii) Berechnen Sie die flächenbezogene Kapazität.

5) Für die Untersuchung des elektrostatischen Feldes in der Umgebung des Randes einer Metallplattenanordnung wird das rechts skizzierte Modell der Doppelschicht verwendet. Setzen Sie Unabhängigkeit von der z-Koordinate voraus und berechnen Sie (am besten in Kreiszylinderkoordinaten) das elektrostatische Skalarpotential und die elektrische Feldstärke.

3.2.17

[Zeichnung fehlt leider!] 3.2.17



6) Berechnen Sie für das eben magnetische Feld mit der Flussdichte

$$\vec{B} = \frac{B_0}{a} \cdot [(2x - y) \cdot \vec{e}_x - (x + 2y) \cdot \vec{e}_y]$$

ein Maxwell-geeichtes Vektorpotential.

7) Eine stromdurchflossene Kreisschleife, angenähert durch einen Linienleiter, erzeugt in ihrer Ebene (z = 0) das magnetische Vektorpotential

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot f\left(\frac{\rho}{a}\right) \cdot \vec{e}_\alpha, \quad 0 \le \rho \le a$$

mit einer Funktion f, die durch das Integral

$$f(\zeta) = -\int \frac{\cos(\alpha) d\alpha}{\sqrt{1 + \zeta^2 + 2\zeta\cos(\alpha)}}, \quad 0 \le \zeta < 1$$

definiert ist und die sich an den Intervallrändern durch

$$f(\zeta) \approx \frac{\pi}{2}\zeta, \quad \text{für } 0 \le \zeta << 1$$

$$f(\zeta) \approx \ln\left(\frac{8}{1-\zeta}\right) - 2, \quad \text{für } 0 < 1 - \zeta << 1$$

approximieren lässt.
Berechnen Sie damit näherungsweise die (äußere) Induktivität solch einer Kreisschleife, die von einem dünnen Draht mit dem Durchmesser d << 2a gebildet wird.

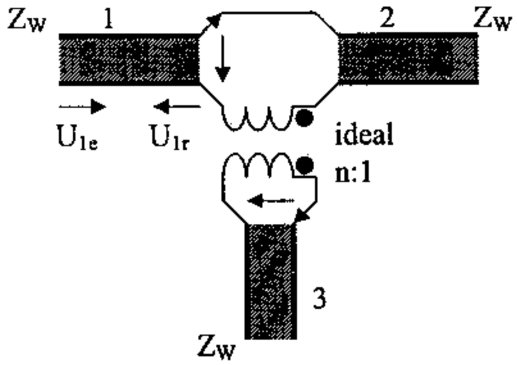
8) Zeitlich sinusförmig veränderliche elektromagnetische Felderlassen sich bekanntlich in der Form

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}[\vec{E}(\vec{r})e^{j\omega t}], \quad \vec{H}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}[\vec{H}(\vec{r})e^{j\omega t}]$$

4.2.2 mit komplexen Amplitudenvektoren $\vec{E}(\vec{r})$, $\vec{H}(\vec{r})$ darstellen. Zeigen sie, dass dann der
5.1.1 zeitliche Mittelwert $<\vec{S}>$ des Poynting-Vektors als Realteil eines komplexen Vektors $\bar{S}(\vec{r})$ angegeben werden kann. Wie definieren Sie diesen komplexen Poynting-Vektor?

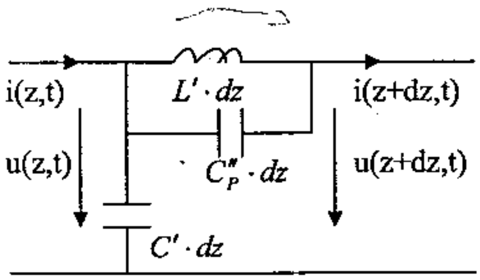
(2)

9)



Im Zuge einer verlustfreien Leitung mit der Wellenimpedanz Z_W wird über einen idealen Transformator eine weitere Leitung, ebenfalls mit der Wellenimpedanz Z_W, angekoppelt. Auf den Leitungsteil 1 fällt ein bekannter Spannungsimpuls U_1e ein. Bestimmen sie den dann in den Abzweig 3 übertragenen Spannungsimpuls U_3 unter der Voraussetzung, dass dieser Leitungsteil, wie auch der Leitungsteil 2, reflexionsfrei, d.h. mit Z_W abgeschlossen ist.

10) Zur grundsätzlichen Untersuchung rascher Vorgänge an ausgedehnten Spulen erweist sich häufig ein Leitungsmodell mit den angegebenen Ersatzschaltbild eines Leitungselements als brauchbar. L' und C' sind dabei die üblichen Beläge der Induktivität und der Kapazität. Cp'' ist eine kapazitive Ersatzgröße der Dimension Kapazität x Länge (modelliert z.B. die kapazitive Kopplung benachbarter Windungen).
Stellen Sie für dieses Modell als Erweiterung der üblichen Leitungsgleichungen die beiden gekoppelten partiellen Differentialgleichungen für u(z,t) und i(z,t) auf.



24.9.07

(1) $\int_{\partial V} \vec{n} \cdot [\vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{G}) - \vec{G} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \, dA$ mit $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$

$\int \vec{n} \cdot [\cancel{\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \cdot \vec{G})} - \vec{G} \cdot (\vec{F} \cdot \vec{\nabla}) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{G} \cdot \vec{F}) + (\vec{F} \cdot (\vec{G} \cdot \vec{\nabla})] \, dA$

$= \int \vec{n} (\vec{G} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{G})) \, dA =$ mit $\partial_n = \vec{n} \cdot \vec{\nabla}$ und

$\int_{\partial V} u \partial_n v - v \partial_n u \, dA = \int_V u \nabla^2 v - v \nabla^2 u \, dV =$

$= \int_{\partial V} \vec{G} \cdot (\underbrace{\vec{n} \cdot \vec{\nabla}}_{\partial_n} \cdot \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\underbrace{\vec{n} \cdot \vec{\nabla}}_{\partial_n}) \cdot \vec{G} \, dA = \int_{\partial A} \vec{G} \partial_n \vec{F} - \vec{F} \partial_n \vec{G} \, dA =$

$= \int_V \vec{G} \nabla^2 \vec{F} - \vec{F} \nabla^2 \vec{G} \, dV$

---

(2) $\vec{F} = H \cdot [2\rho \cos(\alpha) \vec{e_\rho} + \vec{\rho} \cdot \vec{e_\alpha}] =$ in kart. $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\cancel{\rho = \frac{x}{\cos(\alpha)}}$ $x = \rho \cos(\alpha)$ $y = \rho \cdot \sin(\alpha)$ $\vec{e_\alpha} = -\sin(\alpha) \vec{e_x} + \cos(\alpha) \vec{e_y}$

$\vec{e_\rho} = \cos(\alpha) \vec{e_x} + \sin(\alpha) \vec{e_y}$

$\vec{F} = [2\rho \cos(\alpha) \cdot (\cos(\alpha) \vec{e_x} + \sin(\alpha) \vec{e_y}) + \vec{\rho} \cdot (-\sin(\alpha) \vec{e_x} + \cos(\alpha) \vec{e_y})$

$\vec{F} = 2 \cdot x \cdot (\cos(\alpha) \vec{e_x} + \sin(\alpha) \vec{e_y}) - y \vec{e_x} + x \vec{e_y})$

$\vec{F} = 2x \cdot (\frac{x}{\rho} \vec{e_x} + \frac{y}{\rho} \vec{e_y} - y \vec{e_x} + x \vec{e_y})$

$= H / 2x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{e_x} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{e_y} - y \vec{e_x} + x \vec{e_y} /$

(3) $\vec{e_z} = \cos(\theta)\vec{e_r} - \sin(\theta)\vec{e_\theta}$

$\vec{E} = E\cdot\vec{e_z} = E\cdot(\cos(\theta)\vec{e_r} - \sin(\theta)\vec{e_\theta})$

i) $\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H}$

$$\vec{H} = \frac{m}{4\pi r^3}\cdot \underbrace{3\cos(\theta)\vec{e_r} - \cos(\theta)\vec{e_r}}_{2\cos(\theta)} + \sin(\theta)\vec{e_\theta}$$

$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} = E\cdot(\cos(\theta)\vec{e_r} - \sin(\theta)\vec{e_\theta}) \times \frac{m}{4\pi r^3}\cdot(2\cos(\theta)\vec{e_r} + \sin(\theta)\vec{e_\theta}) =$$

$\vec{e_r}\times\vec{e_\theta}$

$$= \frac{Em}{4\pi r^3}\cdot(\cancel{2\cos^2(\theta)}\, 2\cos(\theta)\sin(\theta)\vec{e_\alpha} - 2\cos(\theta)\sin(\theta)(-\vec{e_\alpha}))$$

$$= \frac{Em}{4\pi r^3}\cdot(4\cos(\theta)\sin(\theta)\vec{e_\alpha}) \quad \text{mit } \sin(x)\cos(x) = 0{,}5\cdot(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$= \frac{E\cdot m}{4\pi r^3}\cdot 2\sin(2\theta)\vec{e_\alpha} = \frac{Em}{2\pi r^3}\sin(2\theta)\vec{e_\alpha}$$

ii) Kreise!

iii) Quelldichte: $\vec{\nabla}\cdot\vec{S} = \frac{\partial_r(r^2 f_r)}{r^2} + \frac{\partial_\theta[\sin(\theta) f_\theta]}{r\sin(\theta)} + \frac{\partial_\alpha f_\alpha}{r\sin(\theta)}$

$$= \cancel{\frac{Em}{2\pi r}\sin(2\theta)\; \frac{\partial_\theta\left(\frac{Em}{2\pi r^3}\sin(\theta)\cdot\sin(2\theta)\right)}{r\sin(\theta)}}$$

Wirbeldichte: $\cancel{\vec{\nabla}\times\vec{S} = \vec{e_r}\cdot\frac{-\partial_\alpha f_\theta}{r\sin(\theta)} + \vec{e_\alpha}\frac{(\partial_r(r f_\theta)}{r}}$

$= \vec{e_\alpha}$

$$= \frac{\partial_\alpha f_\alpha}{r\sin(\theta)} = \underline{\underline{0}} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{S} = \vec{e_r}\frac{(\partial_\theta[\sin(\theta) f_\alpha)}{r\sin(\theta)} + \vec{e_\theta}\frac{-\partial_r(r f_\alpha)}{r}$$

$= \vec{e_r}\cdot\partial_\theta($

4) $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} - \rho = 0 \quad \vec{D} = D_x \vec{e_x} \quad \vec{E} = \vec{D}/\varepsilon = E_x \vec{e_x}$

$U = \int_0^a D_x \frac{dx}{\varepsilon} \rightarrow U = \int_0^a D_x \cdot \frac{a+x}{2a} \, dx =$

$= \frac{D_x}{2a} \cdot ax + \frac{x^2}{2}\Big|_0^a = \frac{D_x}{\varepsilon_0 2a} \cdot a^2 + \frac{a^2}{2} = D_x \cdot \frac{3a}{4\varepsilon_0}$

$D_x = -\frac{U 4\varepsilon_0}{3a} \quad E_x = \frac{D_x}{\varepsilon} = \frac{4U\varepsilon_0}{3a} \cdot \frac{a+x}{2a\varepsilon_0} = \underline{\underline{-\frac{2U(a+x)}{3a^2}}}$

~~$-\partial_x \varphi = E_x \quad E_x = -\frac{\partial}{\partial x}\varphi \rightarrow \varphi = -\int E_x dx =$~~

$\rho^f = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$

$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} \quad \vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \cdot \vec{E}$

$\sigma^f = -\vec{n}\cdot[\vec{P}]$

$\vec{P} = \left(\frac{\varepsilon_0 2a}{a+x} - \varepsilon_0\right) \cdot -\frac{2U}{3a^2}(a+x)$

$\vec{P} = \varepsilon_0 \cdot \left(\frac{2a}{a+x} - 1\right) \cdot -\frac{2U}{3a^2}(a+x) =$

$= \varepsilon_0 \cdot \frac{2a}{\cancel{a+x}} \cdot -\frac{2U}{3a^2}\cancel{(a+x)} + \varepsilon_0 \frac{2U}{3a^2}(a+x)$

$\vec{P} = -\varepsilon_0 \frac{4U}{3a} + \varepsilon_0 \frac{2U}{3a^2}(a+x) \, \vec{e_x}$

$\rho^f = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = e_x \partial_x \vec{P} = \underline{-\varepsilon_0 \frac{2U}{3a^2}}$

$\sigma^f = \vec{n}\cdot[\vec{P}]\big|_{x=a} = -\vec{e_x}\cdot\left[\varepsilon_0 \frac{4U}{3a} - \frac{2U}{3a}\right] = \underline{-\varepsilon_0 \frac{2U}{3a}}$

$\sigma^f = \vec{n}\cdot[\vec{P}]\big|_{x=0} = \vec{e_x}\cdot\left[+\varepsilon_0 \frac{4U}{3a} - \frac{4U}{3a}\right] = 0$

ii) $C = \frac{Q}{U} = \frac{\vec{D}\cdot A}{U} = \frac{U\frac{4\varepsilon_0}{3a}A}{U} = \frac{4}{3}\frac{\varepsilon_0}{a}\cdot A$?

$\underline{C = \frac{4}{3}\cdot\frac{\varepsilon_0}{a}}$

(5) 3.27

$\nabla^2 \varphi = 0$ mit $\varphi(\rho,\alpha) = R(\rho) \cdot S(\alpha)$ mit

$R(\rho) = A_1 + A_2 \ln(a/\rho) \quad S(\alpha) = B_1 + B_2 \alpha$

Randbed: (1) φ beschränkt für $\rho \to \infty$ (1)

(2) $\cancel{\varphi(2\pi)}$ $\varphi(\rho, \pm \varphi) = \pm \frac{V}{2}$ (2)

$\varphi(\rho, 0) = 0$ (3)

Ansatz $\varphi(\rho,\alpha) = C_1 + C_2 \cdot \alpha + C_3 \left(\ln \frac{a}{\rho}\right) + C_4 \cdot \ln\left(\frac{a}{\rho}\right) \alpha$

$\varphi(\rho, 0) = 0 \Rightarrow C_1, C_3 = 0$

$C_4 = 0$

$\varphi(\rho, \frac{\pi}{2}) = \frac{V}{2} = C_2 \cdot \pi \qquad C_2 = \frac{V}{2\pi}$

$\varphi(\rho, -\frac{\pi}{2}) = -\frac{V}{2} = C_2 \cdot -\pi$

$\varphi(\rho,\alpha) = \underline{\underline{\frac{V}{2\pi} \cdot \alpha}}$

$\vec{E} = -\nabla \varphi = -\frac{V}{2\pi\rho} \cdot \vec{e_\alpha} \qquad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$

$\vec{D} = \nabla \times \vec{V}$

$-\varepsilon_0 \frac{V}{2\pi\rho} \vec{e_\alpha} = \cancel{\vec{e_\rho} \cdot (\partial_z V_\rho - \partial_\rho V_z)} \qquad \vec{V} = V \vec{e_z}$

$= \vec{e_\rho} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \partial_\alpha V_z - \vec{e_\alpha} \partial_\rho V_z\right)$

$-\vec{e_\alpha} \partial_\rho V_z \overset{!}{=} -\varepsilon_0 \frac{V}{2\pi\rho} \vec{e_\alpha}$

$V_z = \frac{\varepsilon_0 V}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{\rho}{a}\right) + f(\alpha)$

$\partial_\alpha V_z = 0 \Rightarrow f'(\alpha) = 0 \quad f(\alpha) = \text{const} = 0$

$\underline{V = \frac{\varepsilon_0 V}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{\rho}{a}\right)}$

6) $\vec{B} = \frac{B_0}{a}\left[(2x-y)\vec{e_x} - (2x+y)\vec{e_y}\right]$

$B = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ maxwell frei $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0 \Rightarrow \vec{A} = A \cdot \vec{e_z}$

$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{e_x}(\partial_y A_z - \partial_z A_y) - \vec{e_y}\, \partial_x A_z$

$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{e_x}(\partial_y A) - \vec{e_y}\, \partial_x A)$

$\vec{e_x}\, \partial_y A \overset{!}{=} \frac{B_0}{a}(2x-y)\vec{e_x}$

$A = \left(\frac{B_0}{a} \cdot 2xy - \frac{y^2}{2}\right) + f(x)$

$\partial_x A = \frac{B_0}{a} \cdot 2y \; \cancel{= By} \; f'(x)$

$\frac{B_0}{a} \cdot 2y + f'(x) \overset{!}{=} \frac{B_0}{a}(2y + x)$

$f'(x) = \frac{B_0}{a} \cdot x \quad f(x) = \frac{B_0 x^2}{a 2}$

$\vec{A} = \cancel{\frac{B_0}{a}\left(2y + \frac{x^2}{2}\right) \vec{e_z}} = \underline{\frac{B_0}{a}\left(2xy - \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2}\right) \cdot \vec{e_z}}$

Probe: $\partial_y A = \frac{B_0}{a}\left(2x - \frac{2y}{2}\right)$

$\partial_x A = \frac{B_0}{a}(2y + x)$ okay!

$\cancel{-\partial_z U + \partial_z U_L + dz(U + \partial_z U) = 0}$

Maschen $\partial_z U_L' + \partial_z U = 0$ $U_L' = U_L''$ $I_z = C\frac{dU}{dt}$

$U_L = L\frac{dI}{dt}$

Knoten: $I_{C'} = \frac{dU}{dt}C = I_L + I_{L''}$

$C\frac{dU}{dt} = C''\frac{dU}{dt} +$

$U_{L'} = L'\partial z\partial t I_L$ $U_L' = \partial z\partial t I_L$

$\partial_z I = -C'\partial t U$

$i_L + i_{Cp} = i(z) + \partial z i(z) dz$

$i_{Cp} = C_p' dz\, \partial t\, u_p$

$U_{L'} = L' dz\, \partial t\, (i(z) + \partial z i(z) dz) - L' C_p' dz\, \partial t^2 U_L$

Maschen: Knoten: $i(z) - i_{Cs} - i(z) - \partial z i(z) dz = 0$

$i_{Cs} = C_s\, dz\, dt\, u(z)$

$C_s' dz\, \partial t\, u(z) + \partial z\, i(t) dz = 0$

$\partial z i(z) + C_s' \partial t\, u(z) = 0$

Maschen $u_p = L' dz\, \partial t\, i_L$

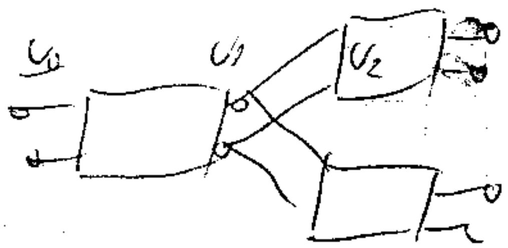
$i_L + i_{Cp} = i(z) + \partial z i(z) dz$

$i_{Cp} = C_p' \partial z\, \partial t\, u_p$

$u_p = L' dz\, \partial t\, (i(z) + \partial z i(z) dz) - L' C_p' dz\, \partial t^2 u_p$

* $\partial_z U = L' \partial t\, (i(z) - C_p' \partial t\, \partial z) U$

$$\begin{pmatrix} U(0) \\ I(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\gamma l) & \sinh(\gamma l)/Z_w \\ \sinh(\gamma l)/Z_w & \cosh(\gamma l) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U(l) \\ I(l) \end{pmatrix}$$



1) $U_0 = U_l \cosh(\gamma l) + I_l Z_w \sinh(\gamma l)/Z_w$

$I_0 = \frac{U(0)}{Z_w} \cdot \sinh(\gamma l) + I_l \cosh(\gamma l)$

$U_{l_2} = \frac{U_0 - I_0 Z_w \sinh(\gamma l)}{\cosh(\gamma l)}$

$\cancel{I}_{l_2} =$

2) $\underline{U_2(0)} = U_2(l) \cdot \cosh(\gamma l)$

$U_3(0) = U_3'(l) \cdot \cosh(\gamma l)$

$U_3^k = n \cdot U_1'$

Vermögens Management

$$U_L = U_C'' \qquad \partial_t U_L = L' \partial_t^2 I_L \qquad I_L = I - I_C$$

$$I_C = C' \partial_t U_L$$

$$\partial_z U + L' \partial_t (I - I_C) = 0 \qquad I_L = (I - I_C)$$

$$\partial_z U + L' \partial_t (I - C' \partial_t U_L) = 0$$

$$\partial_z U + L' \partial_t I - C' L' \partial_t^2 U_L = 0$$

$$\partial_z U + L' \partial_t I - C' L' \partial_t^2 (L' \partial_t I) = \partial_z U + L' \partial_t I - L'^2 C' \partial_t^3 I = 0$$

$$U = U_L + U_C'' + U_L' + \cancel{U} + \partial_z I$$

$$0 = C'_t U + L' \partial_t U_L + I_L + \partial_z I$$

$$C' \partial_t U + C' \partial_t U_L + I - C' \partial_t U_L + \partial_z I \qquad U_L =$$

24.09.2003

$\cancel{U + U_{LP} + U + \partial_z U = 0}$ $\quad U_L = L\, \partial_t I$ $\quad I_C = C\, \partial_t U$

$U_{LP} = L \cdot \partial_t I_L \qquad I_C + I_L = I + \partial_z I$

$U_{LP} = L \cdot \partial_t (I + \partial_z I - I_C)$

$U_{LP} = L' \partial_t (I + \partial_z I - C \partial_t U_{LC})$

$U_{LC} = L' \cdot \partial_t I + \partial_z \partial_t I - C' L' \partial_t^2 U_{LC}$

$U_{LC} \cdot (1 + C' L' \partial_t^2) = L' \partial_t I + \partial_z \partial_t I$

$$U_{LC} = \frac{L' \partial_t I + \partial_z \partial_t I}{1 + C' L' \partial_t^2}$$

$\Rightarrow L' \partial_t I + \partial_z \partial_t I + \partial_z U = 0$

$\cancel{I = I_{CS} + I_L + I_{CP} + I + \partial_z I}$

$C' \partial_t U + \partial_z I = 0$

8

$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ mit $\quad \vec{E} = \mathrm{Re}[\vec{E}(r)\, e^{j\omega t}]$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \vec{H} = \mathrm{Re}[\vec{H}(r)\, e^{j\omega t}]$

$\vec{S} = \frac{1}{2} \mathrm{Re}(\vec{E}(r) \times \vec{H}(r)^* + \frac{1}{2} \vec{E}(r) \times \vec{H}(r) e^{2j\omega t})$

Zeitl. mittelwert $\Rightarrow 0$

$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re}(\vec{E}(r) \times \vec{H}(r)^*)$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{c\omega^2} (\vec{\nabla} \times \partial_t \Pi \ldots) =$$

$$\vec{e_z} = \cos(\theta)\,\vec{e_r} - \sin(\theta)\,\vec{e_\theta}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \sin(\theta)\, \partial_t p(t - r/c)\, \vec{e_\varphi} +$$

$$\text{Zero: } \sin(\theta) = \sin(\tfrac{\pi}{2}) \Rightarrow r = \text{const}$$

TET 2 20.11.2002

FET

① Vektorfeld $\vec{V} = C \cdot \frac{1}{\rho^2} \left(\vec{e}_\rho \otimes \vec{e}_\rho - \vec{e}_\alpha \otimes \vec{e}_\alpha \right)$

C = konstant.

Ges: $\vec{V}(x,y,z)$

$\vec{V} = (x^2-y^2)\, \vec{e}_x \otimes \vec{e}_x + (y^2-x^2)\, \vec{e}_y \otimes \vec{e}_y + 2xy(\vec{e}_x \otimes \vec{e}_y + \vec{e}_y \otimes \vec{e}_x$

② Raum: ε_r, linear, isotrop … ρ … Raumladungsdichte gegeb

Ges: $\rho^f = f(\rho)$

$\rho^f = (1-\varepsilon_r)\rho$ (?)

③ Leitung: $Z_w^{(1)}$ $Z_w^{(2)}$ $Z_w^{(3)}$

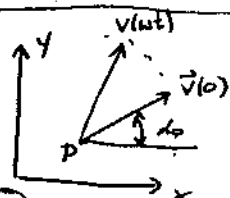
$U = 10\,kV$ 400Ω 50Ω 400Ω

v

Gesucht: Spitzenwert der in Bereich 3 vorlaufenden Spg.-Well

④ Gegeben: Stromdichte $\vec{J}$, Raumlich begrenzt (d.h. In kugel m endlichen Radius)

② Zeige: $W_m = \frac{1}{2} \int \vec{J} \cdot \vec{A}\, dV$

⑤ 

Gegeben: Vektor $\vec{v}$, konstanter Betrag

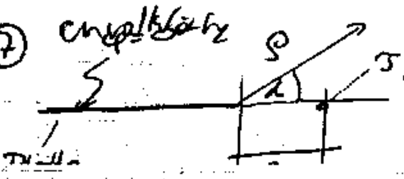
$\vec{v} = \mathrm{Re}\{ \underline{\vec{v}}\, e^{j\omega t} \}$ Siehe 4.2.04

Ges: $\underline{\vec{v}}$

$\underline{\vec{v}} = |\vec{v}| \cdot \{ e^{j\alpha_0} \vec{e}_x - j\, e^{j\alpha_0} \vec{e}_y \}$

⑥ Geg: $\vec{B} = (x^2+y^2)\, \vec{e}_x + 2xy\, \vec{e}_y$

Ges: $\vec{A}$, $\vec{A}$ in Polarkoordinaten, Feldbild

⑦ 

$\varphi(\rho, \alpha) = \frac{J}{4\pi\varepsilon_0} \ln \left(\frac{1+(\frac{\rho}{a})^{2\nu} + 2 \cdot (?)}{1+(\frac{\rho}{a})^{2\nu} - 2 \cdot (?) \cdots} \right)$

$$v = \begin{cases} 1/2 & \rho < a \\ -1/2 & \rho > a \end{cases}$$

(7)

Ges: C' wenn Linienladung durch Draht ersetzt wird

Tip: $(1+\delta)^{v} = 1+v\delta$

(8) Zeige in karthesischen Koordinaten:

$$\int_{\partial V} n_i f \, dA = \int_V \partial_i f \, dV \qquad i = x, y, z$$

Danach löse allgemein:

$$\int_{\partial V} \vec{n} f \, dA = ?$$

$\rightarrow$ Lösung & Beweis mit Satz v. Gauß

(9) Geg: Ebene Welle: $\vec{E} = \hat{E} \cdot \cos\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right)\right) \cdot \vec{e_y}$

Ges: Zeitl. Mittelwert der transportierten Energie ($\langle \vec{S} \rangle$)

(10) Geg: φ, $\vec{A}$ (waren Funktionen gegeben, <u>nicht</u> allgem.

Ges: $\vec{S}$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

$\vec{V} = C \cdot \frac{1}{\rho^2}\left(\vec{e_\rho}\otimes\vec{e_\rho} - \vec{e_\alpha}\otimes\vec{e_\alpha}\right)$

Vermögens Management

$C = \text{konst}$

~~Gesucht~~ $V(x, y, z) = ?$

$\rho^2 = x^2 + y^2 \qquad \vec{e_\rho} = \cos(\alpha)\vec{e_x} + \sin(\alpha)\vec{e_y}$

$\vec{e_\alpha} = -\sin(\alpha)\vec{e_x} + \cos(\alpha)\vec{e_y}$

$\vec{V} = C \cdot \frac{1}{x^2+y^2}\Big((\cos(\alpha)\vec{e_x} + \sin(\alpha)\vec{e_y}) \otimes (\cos(\alpha)\vec{e_x} + \sin(\alpha)\vec{e_y}) -$

$- (-\sin(\alpha)\vec{e_x} + \cos(\alpha)\vec{e_y}) \otimes (-\sin(\alpha)\vec{e_x} + \cos(\alpha)\vec{e_y}) =$

$= C \cdot \frac{1}{x^2+y^2}\Big(\cos^2(\alpha)\vec{e_x}\otimes\vec{e_x} + \cos(\alpha)\sin(\alpha)\vec{e_x}\otimes\vec{e_y} + \sin(\alpha)\vec{e_y}\otimes\vec{e_x} + \sin^2(\alpha)\vec{e_y}\otimes\vec{e_y}$

$- (\sin^2(\alpha)\vec{e_x}\otimes\vec{e_x}) - \sin(\alpha)\cos(\alpha)\vec{e_x}\otimes\vec{e_y} - \sin(\alpha)\cos(\alpha)\vec{e_y}\otimes\vec{e_x} + \cos^2(\alpha)\vec{e_y}\otimes\vec{e_y}$

$- \qquad + \qquad + \qquad -$

$= C \cdot \frac{1}{x^2+y^2}\Big(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)\,\vec{e_x}\otimes\vec{e_x}\Big) + 2\cos(\alpha)\sin(\alpha)\vec{e_x}\otimes\vec{e_y} + 2\cos(\alpha)\sin(\alpha)\vec{e_y}\otimes\vec{e_x} +$

$+ \sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha)\,\vec{e_y}\otimes\vec{e_y}\Big) =$

$= C \cdot \frac{1}{x^2+y^2}\Big(\cos(2\alpha)\,\vec{e_x}\otimes\vec{e_x} + \sin(2\alpha)\,\vec{e_x}\otimes\vec{e_y} + \sin(\alpha)\vec{e_y}\otimes\vec{e_x} - \cos(2\alpha)\vec{e_y}\otimes\vec{e_y}\Big)$

---

mit $\cos(2\alpha) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

und $2\sin(x)\cdot\cos(x) = \sin(2x)$

$\cos(\alpha) = \frac{x}{\rho} \quad \sin(\alpha) = \frac{y}{\rho}$

$= \frac{1}{C \cdot \rho^2} \cdot \frac{x^2}{\rho^2} - \frac{y^2}{\rho^2}(\vec{e_x}\otimes\vec{e_x}) + 2\frac{xy}{\rho}\cdot(\vec{e_x}\otimes\vec{e_y}) + 2\frac{xy}{\rho})\vec{e_y}\otimes\vec{e_x} + [illegible]$

$\frac{1}{x^2+y^2} \cdot \left(\frac{x^2 y^2}{(x^2+y^2)}\right) (\vec{e_x}\otimes\vec{e_x} + [illegible]$

$x = \rho \cos(\alpha) \qquad \cos(\alpha) = \frac{x}{\rho}$

$\cos(\alpha)\vec{e_x} + \sin(\alpha)\vec{e_y} \qquad \sin(\alpha) = \frac{y}{\rho}$

$-\sin(\alpha)\vec{e_x} + \cos(\alpha)\vec{e_y}$ 09:55 – 09:58

$\rho^f = f(\rho)$ $\qquad -\rho^f = \vec{\nabla}\cdot\vec{P} \quad (1)$

$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \quad (2)$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho \quad (3) \qquad \vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\cdot\vec{E}$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \qquad \vec{\nabla}\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\cdot\vec{\nabla}\vec{E}$

$-\rho^f = (\varepsilon - \varepsilon_0)\cdot\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad \varepsilon = \varepsilon_0\cdot\varepsilon_r$

$\underline{\rho^f = \left(\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{\varepsilon}\right)\rho = \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} - 1\right)\rho}$

09:59 – 10:09

$U_{I1} + U_{I2} = U_{II1} \quad (1) \qquad I_{I1} = \frac{U_{I1}}{Z_{wI}} \qquad \hat{U} = 10\,kV$

$I_{I1} + I_{I2} = I_{II1} \quad (2) \qquad I_{I2} = \frac{-U_{I2}}{Z_{wI}} \qquad Z_{w1} = 400\,\Omega = Z_{w3}$

$Z_{w2} = 50\,\Omega$

$\frac{U_{I1}}{Z_{wI}} - \frac{U_{I2}}{Z_{wI}} = \frac{U_{II1}}{Z_{wII}} \quad (3) \qquad$ aus (1): $U_{I2} = U_{II1} - U_{I1}$

$\frac{U_{I1}}{Z_{w1}} - \frac{U_{II1} + U_{I1}}{Z_{w1}} = \frac{U_{II1}}{Z_{wII}} \qquad \frac{U_{II1}}{Z_{wII}} = \frac{2U_{I1} - U_{II1}}{Z_{wI}}$

$U_{II1} Z_{w1} = 2U_{I1} Z_{wII} - U_{II1} Z_{w2}$

$U_{II1}(Z_{w1} + Z_{w2}) = 2U_{I1} Z_{wII}$

$U_{II1} = \frac{2U_{I1} Z_{wII}}{Z_{wI} + Z_{wII}} \qquad U_{III1} = \left(\frac{2Z_{wIII}}{Z_{wII} + Z_{wIII}}\right)\cdot\left(\frac{2U_{I1} Z_{wII}}{Z_{wI} + Z_{wII}}\right)$

$U_{III1} = \frac{2U_{II1}\cdot Z_{wIII}}{Z_{wII} + Z_{wIII}} \qquad \underline{U_{III1} = 3950{,}67\,V}$

$\vec{B} = (x^2 + y^2)\vec{e_x} - 2xy\,\vec{e_y}$ 20-28

$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{e_x}\,\partial_y A_z - \vec{e_y}\,\partial_x A_z$

$\partial_y A_z = x^2 + y^2 \quad A_z = x^2 y + \frac{y^3}{3}$

$\partial_x A_z = 2xy +$

$\vec{A_z} = \left(x^2 y\right) + \frac{y^3}{3}\Big)e_z \qquad x = \varrho \cdot \cos(\alpha)$

$y = \varrho \cdot \sin(\alpha)$

$= \varrho^3 \cos^2(\alpha)\sin(\alpha) + \varrho \frac{^3\sin^3(\alpha)}{3}\,\vec{e_z}$

$= \varrho^3 \left(\cos(\alpha)\cdot\cos(\alpha)\cdot\sin(\alpha)\right) + \varrho\ \sin(\sin$

$= \varrho^3 \cdot \sin(\alpha)\cdot\left(\frac{3\cos^2}{3} + \frac{\sin^2(\alpha)}{3}\right)$

$-\sin^2 = 1 + \cos^2$

$= \varrho^3 \sin(\alpha)\cdot\left(\frac{3\cos^2 + \sin^2}{3}\right)$

$= \varrho^3 \sin(\alpha)\ \left(\frac{4\cos^2 - 1}{3}\right)$

Zeichnen: $A = \text{const}$:

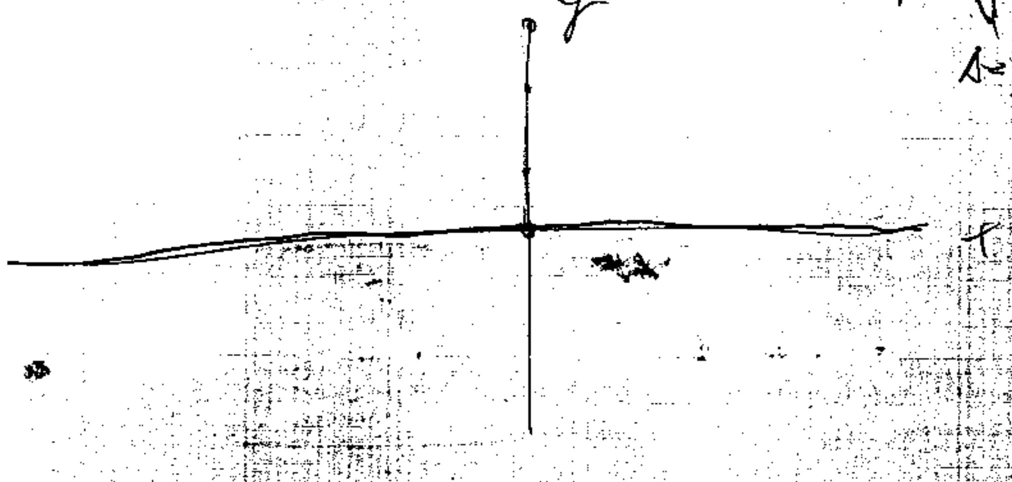
$\alpha = 0$: $\sin(3\alpha) = 1$

$\alpha =$

$\bar{A} = \frac{\varrho^3}{3}\sin(3\alpha)\,e_z$

$A = \left(x^2 y - \frac{y^3}{3}\right) z$

$A = \text{const}$



6 1026

$\vec{B} = (x^2+y^2)\vec{e_x} + 2xy\,\vec{e_y}$ $\qquad \vec{A} = A(x,y)\,\vec{e_z}$

$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{e_x}\,(\partial_y A_z) + \vec{e_y}\,(-\partial_x A_z)$

$\partial_y A_z = \cancel{2xy\,\vec{e_y}} = (x^2+y^2) \Rightarrow A_z = x^2 y + \frac{y^3}{3} + f(x)$

$\cancel{A_z = 2x\frac{y^3}{3}\vec{e_y} \Rightarrow \partial_x A_z =} \; 2\frac{y^3}{3}$

$\cancel{A_z = 2xy + \frac{2xy^2}{3} + f(x)}$

$\partial_y A = (x^2+y^2) \quad A_z = x^2 y + \frac{y^3}{3} + f(x)$

$\cancel{\partial_x A = 2xy + f'(x) =}$

$\vec{A} = \left((x^2 y) + \frac{y^3}{3}\right)\vec{e_z}$

$$\int_{\partial V} n_i f \, dA = \int_V \partial_i f \, dV \quad i = x, y, z$$

Satz von Gauß $\quad \int_V \vec{\nabla} \cdot f \, dV = \int_{\partial V} \vec{n} \cdot f \, dA$

~~$\int \vec{n} \cdot f \, dA = ?$~~

$$\int n_x f_x + n_y f_y + n_z f_z \, dA = \int \partial_x f_x + \partial_y f_y + \partial_z f_z \, dV$$

$$\int \vec{n} \cdot \vec{F} \, dA = \int (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) \, dA$$

Satz von Gauß

$$\int \vec{n} \cdot f \, dA$$

---

(9) $\vec{E} = \hat{A} \cdot \cos\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right)\right) \cdot \vec{e_y}$ $\qquad \vec{E} = \vec{e_y}$

$\vec{\varkappa} = \vec{e_z}$

$\langle S \rangle =$

lin. pol: $\langle S \rangle = \frac{E^2 \varkappa}{2 Z_0}$

Zirk. pol: $S = \langle S \rangle = \frac{E^2 \varkappa}{Z_0}$

$$\langle S \rangle = A^2 \cdot \frac{\cos^2\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right)\right)}{Z_0} = Re\{\underline{A}^2 \cdot e^{j(\omega t - kz)}$$

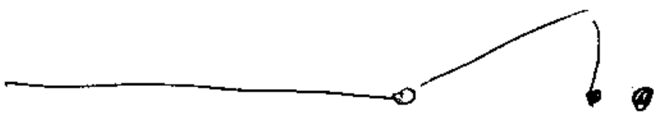
$$= \frac{A^2 \cdot \cos^2\left(-\frac{z}{\lambda}\right)}{2 Z_0}$$

10:28

$$\varphi(\rho,\alpha) = \frac{I}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{1+\left(\frac{\rho}{a}\right)^{2\nu} + 2\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\nu}\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{1+\left(\frac{\rho}{a}\right)^{2\nu} - 2\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\nu}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\right)$$

Vermögen Management

$$\nu = \begin{cases} \frac{1}{2} & \rho < a \\ -\frac{1}{2} & \rho > a \end{cases}$$



$$C' = ((1+\delta)^{\nu} + 1 + y\delta$$

$$C' = \frac{\cancel{Q}'\, U'}{A'}$$

$$\varphi(\cancel{\rho}^{\,a-d}, 0) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \ln\left(1 + \frac{a-d}{\ }\right.$$

---

9 $\vec{J}, \vec{A}$

$$U_m = \frac{1}{2}\int_V \vec{J}\cdot\vec{E}\,dV$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B}$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\partial_t(\vec{\nabla}\times\vec{A})$$

---

10 $\varphi, \vec{A}$ $\quad\vec{S}$

$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} \qquad \vec{E} = -\nabla\varphi \qquad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

$$\frac{\vec{B}}{\mu} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

$$\vec{S} = -\vec{\nabla}\varphi\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})$$

$$\vec{S} = \cancel{-\vec{\nabla}\varphi}\,\Big(-\vec{\nabla}\cdot(-\vec{\nabla}\varphi\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(-\vec{\nabla}\varphi\times\vec{\nabla}) \Big)$$

(1) $\vec{H}(\vec{r}) = C(3xy^2 - y^2z + 2z^2x)$, $P(1,1,1)$ Ableitung in ?

(1.2.6) nochmal

Vermögens Management

(2) $\vec{\nabla} \times \vec{H} - \partial_t \vec{D} = \vec{J} - \vec{\nabla}\varphi$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho + \mu_0 c_0 \partial_t \varphi$ wann ist kausal erfüllt

(3) $\varepsilon(x) = \varepsilon_0 \frac{2a}{a+x}$ $C' = ?$

$\rho^f_1 \, \sigma^f = ?$ $\pm\phi$ ρ_0

nochmal (2.1.8) (?) nochmal!

(4) $\vec{A} = K_1 \rho \vec{e_\varphi} + K_2 \ln\frac{\rho}{a} \vec{e_z}$ $\vec{B}$? wie kann erzeugt werden (Vektorlinie von $\vec{B}$)

(3.5.2)

(5) $(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2)\, u(\vec{r},t) = -f(\vec{r},t)$ d'Alembert Operator

$(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2})\, U(r,\omega) = -F(r,\omega)$ Helmholtz gleichung

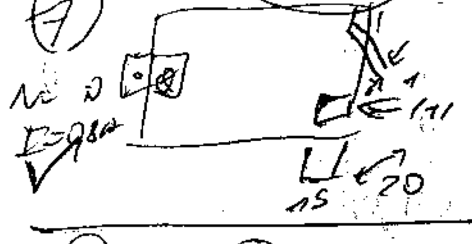
(6)

(1) isolierte Kugel $\vec{E}(0) = ?$

$\vec{P} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} 3\varepsilon_0 E_0$ $r < a$

nochmal (?)

(7) nochmal



F ? (2.3.14)

(8) ρ_0 $t=0$ ρ_0 $\vec{J} = ?$ Ladungsverteilung bei $t \to \infty$

nochmal Kugel (3.3.7)

9 nochmal P, Q, S bei Leitung mit Kurs (5.3.14)

(10) $F(r,t) = \mathrm{Re}(\vec{A}\, e^{j(\omega t - \gamma \vec{k}\vec{r})})$

$j\vec{k} \times \vec{E} = j\omega\mu\vec{H}$ ~~$j\vec{k}$~~ $j\vec{H} \times \vec{k} = -(\sigma + j\omega\varepsilon)\vec{E}$ $\alpha, \beta = ?$

nochmal nochmal (5.?)

$f = C(3x^2y - y^2z + 2z^2x)$; $P(1,1,1)$ Ableitung in Richtung r

$$(\nabla H)\cdot\vec e\Big|_{1,1,1} = C\left[(6xy+2z^2)\vec e_x + (3x^2-2zy)\vec e_y + (-y^2+4zx)\vec e_z\right]\frac{(x\vec e_x+y\vec e_y+z\vec e_z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = C\frac{12}{\sqrt3} = \underline{\underline{C\sqrt3\cdot 4}}$$

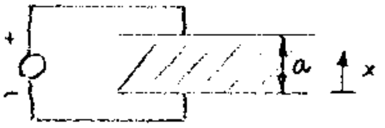
---

2) $\nabla\times\vec H - \partial_t\vec D = \vec J - \nabla G$, $\nabla\cdot\vec D = \rho + \mu_0\varepsilon_0\partial_t G$ Wann ist die Kontinuitätsgleichung erfüllt?

$$\underbrace{\nabla\cdot(\nabla\times\vec H)}_{0} - \underbrace{\nabla\partial_t\vec D}_{\partial_t\rho+\mu_0\varepsilon_0\partial_t^2 G} = \nabla\cdot\vec J - \nabla^2 G \Rightarrow \underline{\underline{\mu_0\varepsilon_0\partial_t^2 G + \nabla^2 G = 0}} \Rightarrow \nabla\cdot\vec J = -\partial_t\rho$$

---

3) $\varepsilon(x) = \varepsilon_0\frac{2a}{a+x}$; $C' = ?$
$\rho^f, \sigma^f = ?$



$$U = \int E\,dx = \int\frac{1}{\varepsilon}D\,dx = \int_0^a\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{a+x}{2a}D\,dx = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{3a}{4}D \Rightarrow \underline{\vec D = \frac{4}{3}\varepsilon_0\frac{U}{a}(-\vec e_x)}$$

$$\vec E = \frac{1}{\varepsilon}\cdot D = \frac{2U}{3a^2}(a+x)(-\vec e_x);\quad \vec P = \vec D - \varepsilon_0\vec E = \varepsilon_0 U\left(\frac{4}{3a} - \frac{2}{3a^2}(a+x)\right)(-\vec e_x)$$

$$\underline{\underline{\rho^f}} = -\nabla\vec P = \underline{\underline{-\frac{2}{3a^2}\varepsilon_0 U}}$$

$$\sigma^f_{x=0} = -n\cdot[\![\vec P]\!]\Big|_{x=0} = -\varepsilon_0 U\left(\frac{4}{3a} - \frac{2}{3a}\right) = \underline{\underline{-\varepsilon_0 U\frac{2}{3a}}}$$

$$\sigma^f_{x=a} = -n[\![\vec P]\!]\Big|_{x=a} = \underline{\underline{0}} \Rightarrow \varepsilon(a) = \varepsilon_0 \;!!$$

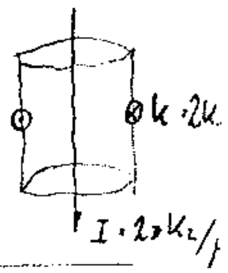
---

(4) $\vec A = K_1\rho\,\vec e_\varphi + K_2\ln\frac{\rho}{a}\,\vec e_z$ $\vec B = ?$ Feldlinien $\vec B$; wie kann $\vec B$ erzeugt werden?

$$\vec B = \nabla\times\vec A = -\vec e_\varphi\,\partial_\rho[K_2\ln(\tfrac{\rho}{a})] + \vec e_z\frac{1}{\rho}\partial_\rho(K_1\rho^2)] = -\frac{K_2}{\rho}\vec e_\varphi + 2K_1\vec e_z$$

B sind Schraubenlinien um die z-Achse $\tan(\alpha) = -\frac{K_1}{K_2}\cdot 2\rho$

Kreiszylinderspule und Linienleiter



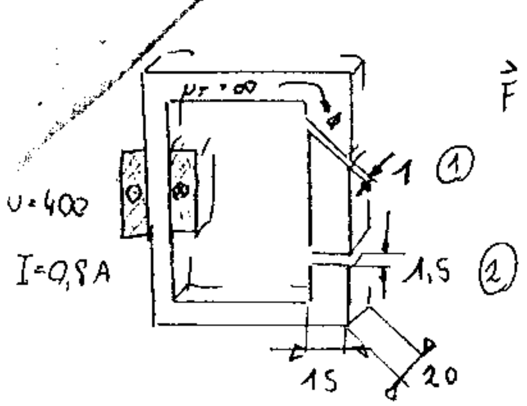
---

(6) E_0 isolierende Kugel ; $\vec E(a) = ?$

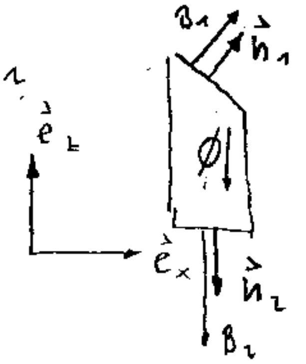
$\vec p = \frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+2}3\varepsilon_0\vec E_0$ $r<a$

$$\vec P = P_0\vec e_z = P_0\cdot(\cos\theta\,\vec e_r - \sin\theta\,\vec e_\theta);\quad \sigma^f = -\vec n\cdot[\![\vec P]\!] = -\vec e_r(-P_0(\cos\theta\,\vec e_r - \sin\theta\,\vec e_\theta)) = P_0\cos\theta$$

$$\underline{\underline{E(a)}} = \sigma^f\frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\vec e_r = \underline{\underline{\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+2}3E_0\cos\theta\,\vec e_r}}$$



$\vec{F} = ?$



$n_1 = \frac{\vec{e}_x}{\sqrt{2}} + \vec{e}_z \frac{1}{\sqrt{2}}$

$n_2 = -\vec{e}_z$

$$\oint H ds = \Theta \Rightarrow H = \frac{\Theta}{l_1 + l_2} = \frac{0{,}8 \cdot 500}{(1 + 1{,}5)} \cdot 10^3 = 160 \cdot 10^3 \, A/m$$

$$B_2 = \mu_0 \cdot H \; ; \; B_1 = B_2 \cdot \frac{A_2}{A_1} = B_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\mu_0 \cdot H}{\sqrt{2}} \; ; \; A_2 = A_1 \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{F}_R = \frac{1}{\mu_0} \int (\vec{n} \cdot \vec{B} \vec{B} - \frac{1}{2} B^2 \vec{n}) \, dA = \frac{1}{\mu_0} \left[\vec{n}_1 B_1^2 \frac{1}{2} A_1 + \vec{n}_2 B_2^2 A_2 \frac{1}{2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2\mu_0} \left[\vec{n}_1 \frac{H^2}{2} A_2 \cdot \sqrt{2} + \vec{n}_2 H^2 \cdot A_2 \right] \mu_0^2 = \frac{H^2}{2} \mu_0 \left[\frac{\vec{n}_1}{\sqrt{2}} + \vec{n}_2 \right] \cdot A_2 =$$

$$= \frac{H^2 A_2}{2} \mu_0 \left[\frac{\vec{e}_x}{2} + \frac{\vec{e}_z}{2} - \vec{e}_z \right] = \frac{H^2 A_2}{4} \mu_0 \left[\vec{e}_x - \vec{e}_z \right] =$$

$$= \frac{(160 \cdot 10^3)^2 (15 \cdot 10^{-3})(20 \cdot 10^{-3})}{4} \mu_0 \left[\vec{e}_x - \vec{e}_z \right] = \underline{\underline{2{,}41 \, N \, (\vec{e}_x - \vec{e}_z)}}$$

---

8) ρ_0, a Kugel $t<0 : \rho_0$ $\vec{J} = ?$; Ladungsverteilung bei $t \to \infty$

$T_h \partial_t \rho + \rho = 0$; $T_h = \frac{\varepsilon}{\gamma}$; $\rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, 0) \, e^{-t/T_h} = \rho_0 e^{-t/T_h}$

$$\oint_{\partial A} \vec{n} \vec{J} \, dA = -\frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV \Rightarrow J \, 4\pi r^2 = \frac{1}{T_h} \rho_0 \, e^{-t/T_h} \cdot \frac{4\pi r^3}{3} \Rightarrow \underline{\underline{\vec{J} = \frac{1}{T_h} \frac{\rho_0}{3} e^{-t/T_h} \cdot r \, \vec{e}_r}}$$

$$\underline{\underline{\sigma \Big|_{\substack{r=a \\ t \to \infty}}}} = \frac{Q}{A} = \frac{\rho_0 \frac{4\pi r^3}{3}}{4\pi r^2} = \underline{\underline{\rho_0 \frac{a}{3}}}$$

---

9) P, Q, S bei Leitung mit $\underline{Z}_w$

$\underline{U} = U_0 \cdot e^{-\gamma z}$ $\underline{Z}_w = Z_w \, e^{j\varphi}$; $\gamma = \alpha + j\beta \Rightarrow \underline{S} = \frac{U_0^2}{Z_w} \cdot e^{-j\varphi} e^{-2\alpha z}$; $P = Re[\underline{S}] = \frac{U_0^2}{Z_w} \cos\varphi \, e^{-2\alpha z}$

$\underline{I} = \frac{U_0}{\underline{Z}_w} e^{-\gamma z}$

$S = Im[\underline{S}] = \frac{U_0^2}{Z_w} \sin\varphi \, e^{-2\alpha z}$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\omega(\vec r,t) = -f(\vec r,t)$$; d'Lambert Operator

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)W(\vec r, j\omega) = -F(\vec r, j\omega)$$

Helmholz Operator

---

(10) $\vec F(\vec r,t) = \mathrm{Re}\left(\vec F e^{(j\omega t - \gamma \vec\kappa \vec r)}\right)$

$\gamma \vec\kappa \times \vec E = j\omega\mu \vec H \qquad \gamma \vec\kappa \times \vec H = -(\sigma + j\omega\varepsilon)\vec E \qquad \alpha, \beta = ?$

$\gamma = \alpha + j\beta$

$$\vec\kappa \times (\gamma \vec\kappa \times \vec E) = j\omega\mu\, \vec\kappa \times \vec H = j\omega\mu\left[-\frac{(\sigma + j\omega\varepsilon)}{\gamma}\vec E\right]$$

$$-\gamma^2 \vec E = (-j\omega\mu\sigma + \omega^2\varepsilon\mu)\vec E \qquad \Big|\ \kappa \times (\kappa \times E) = \vec\kappa(\underbrace{\vec\kappa \cdot \vec E}_{0}) - \vec E(\underbrace{\vec\kappa \vec\kappa}_{1})$$

$$\gamma^2 = \alpha^2 + 2j\beta\alpha - \beta^2 = +j\omega\mu\sigma - \omega^2\varepsilon\mu$$

$$2\beta\alpha = +\omega\mu\sigma \ ; \quad \alpha^2 - \beta^2 = -\omega^2\varepsilon\mu$$

$$\beta = \frac{+\omega\mu\sigma}{2\alpha} \Rightarrow \alpha^4 + \omega^2\varepsilon\mu\alpha^2 - \left(\frac{1}{2}\omega\mu\sigma\right)^2 = 0$$

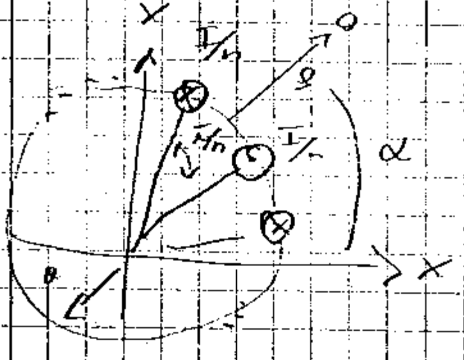
$$\underline{\underline{\alpha = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1\right]}}} \qquad \underline{\underline{\beta = \frac{\omega\mu\sigma}{2\alpha}}}$$

(1) Richtungsableitung 1.3.04 ohy (1) 97

(2) $P = |\vec{P}| = \text{const}$

ges. el. Moment $\vec{p}$

(3)



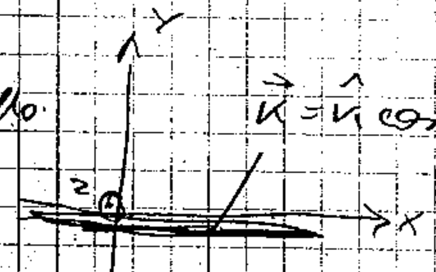
ges. $\vec{A} \approx -\frac{\mu_0 I}{\pi}\left(\frac{a}{\rho}\right)^n \cos(n\alpha)\vec{e}_z$

ges. i) magnet. Flußdichte & deren Beträge in Polarkoord.

ii) vergleiche die Beträge für $\rho = 10a$ mit $n=1$, $n=3$

---

(4)



μ_0 $\quad \vec{K} = \hat{K}_1 \cos(\omega t - kx)\vec{e}_z \qquad \left|\frac{\omega}{k}\right| \ll c_0$

$\mu \to \infty$

dominant magnet. Feld mit $\vec{B} = \mu_0 \hat{K} e^{-ky}[\cos(\omega t - kx)\vec{e}_x + \sin(\omega t - kx)\vec{e}_y]$, $y > 0$

i) berechne $\vec{E} = E\vec{e}_z$ allein durch Induktion

ii) welches $\vec{E}'$ für $v = \frac{\omega}{k}\vec{e}_x$

---

(5) $\nabla^2\varphi = 0 \qquad \varphi(x,y,z) = F_1(x) + F_2(y) + F_3(z)$

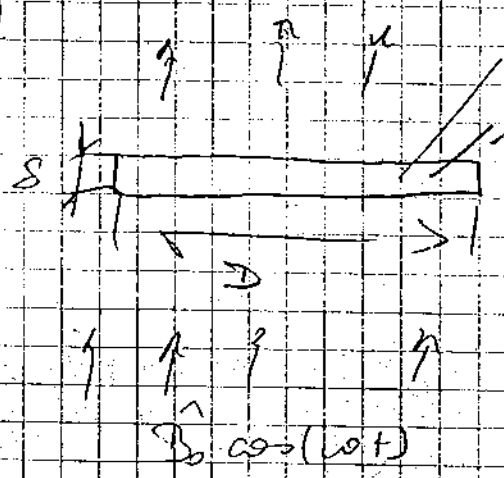
) ebenes magnet. Feld

$$H = \frac{H_0}{a^2}\left[2xy\vec{e_x} + (x^2 - y^2)\vec{e_y}\right]$$

ges. magnet. Pot. $\varphi(x,y)$, so dass $\vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi$

---

(7)

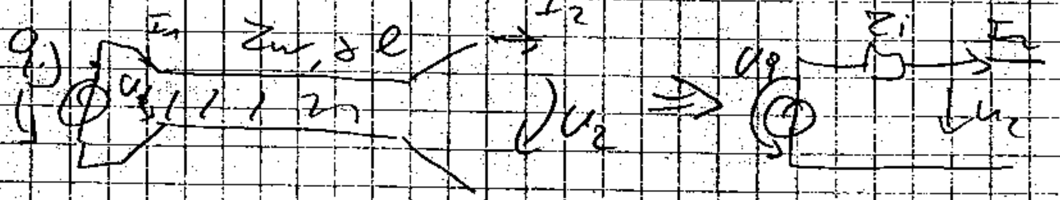


ges. resultierenden Wirbelverluste

8.) $\vec{B}(\theta) = \frac{\vec{e} \times \vec{E}(\theta)}{c_0}$ im leeren Raum

ges. $\vec{q}^e$, $\vec{g}^e$, $\underline{p}^e$ durch w^e

9.)



geg. Zweitorgleichung $U_1 = \times U_2 + \sim I_2$
$I_1 = \times U_2 + \sim I_2$

ges. U_q & Z_i

---

(10) geg. $\int_{\partial A} s \times f\, ds = \int_A (r_y \partial_z f - r_z \partial_y f)\, dA$ → allg. gültig durch Anwenden des Satzes von ...

$\int_{\partial A} \vec{s}\, f\, ds$ drücke dies koordinatenfrei aus

$\vec{P} \cdot e_\varphi$

$$\vec{p} = \int \rho \, dV = \rho_0 l \int_a^b \int_0^\pi \rho \, \vec{e_\varphi} \, d\rho \, d\alpha$$

$$\vec{e_\varphi} = \cos(\alpha)\vec{e_x} + \sin(\alpha)\vec{e_y}$$

$$\vec{p} = \rho_0 l \, \frac{b^2 - a^2}{2} \cdot \int_0^\pi \cos(\alpha)\vec{e_x} + \sin(\alpha)\vec{e_y} \, d\alpha =$$

$$\frac{\rho}{\rho^4} = \rho^3$$

$$\vec{p} = \rho_0 l \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} \cdot \left(\sin(\alpha)\vec{e_x} - \cos(\alpha)\vec{e_y} \right) \Big|_0^\pi =$$

$$\frac{1}{\rho^2}$$

$$\vec{p} = \rho_0 l \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} \cdot \Big| 0 + (+1) - (0 - 1))$$

$$\underline{\underline{\vec{p} = \rho_0 l \cdot (b^2 - a^2) \, \vec{e_y}}}$$

---

(3) mit $\vec{e_z}$

$$\vec{A} \approx \frac{\mu_0 I}{\pi} \left(\frac{a}{\rho} \right)^n \cos(n\alpha) \, \vec{e_z}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{e_\rho} \cdot \left(\frac{\partial_\alpha A_z}{\rho} - \partial_z A_\alpha \right) + \vec{e_\alpha} \left(\partial_z A_\rho - \partial_\rho A_z \right) + \frac{\vec{e_z}}{\rho} \cdot \left(\partial_\rho (\rho A_\alpha) - \partial_\alpha A_\rho \right)$$

$$= \frac{\vec{e_z}}{\rho} \cdot \left(\partial_\rho \left(\frac{\mu_0 I}{\pi} \left(\frac{a^n}{\rho^{n-1}} \right) \cos(n\alpha) \right) + n \cdot \frac{\mu_0 I}{\pi} \cdot \left(\frac{a}{\rho} \right)^n \sin(n\alpha) \right.$$

$$= \frac{\vec{e_z}}{\rho} \cdot \left[\frac{\mu_0 I}{\pi} \cdot a^n \right] \left(-(n-1) \cdot \frac{1}{\rho^{n}} \cos(n\alpha) + \frac{1}{\rho^n} \sin(n\alpha) \right)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{\pi} \, a^n \cdot \left[(n-1) \cdot \frac{1}{\rho^{(n-1)}} \cos(n\alpha) + \frac{1}{\rho^{(n-1)}} \cdot \sin(n\alpha) \right] =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{\pi \rho} \cdot \left(\frac{a}{\rho} \right)^n \cdot \left((1-n) \cos(n\alpha) - n \sin(n\alpha) \right)$$

5.2) Einfache Wellengleichung

$$\left.\begin{array}{ll} \vec{\nabla}\times\vec{E} + \partial_t\vec{B} = 0 & \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} - \mu\varepsilon\partial_t\vec{E} = \mu j & \vec{\nabla}\cdot E = \frac{\varrho}{\varepsilon} \end{array}\right\} \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\omega = -f$$

inhomogene Wellengleichung

Ausbreitungsgeschwindigkeit : $c_0^2 \mu_0 \varepsilon_0 = 1$

5.3) Der Hertz Dipol

$P(\vec{r},t)$ .. Polarisationsfeld Ladungsdichte $\varrho^t = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$

$j^t = \partial_t \vec{P}$

$$\vec{A} = \frac{1}{c_0^2}\partial_t\vec{\pi} \qquad \varphi = -\vec{\nabla}\vec{\pi}$$

$$\text{mit } \vec{\pi} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{P'(t)}{R}\,dV'$$

Nahzone $kr \ll 1$ mit $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ $\vec{B}\left(\frac{1}{r^2}\right)$ $\vec{E}\left(\frac{1}{r^3}\right)$

Fernzone $kr \gg 1$ mit $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ $\vec{B}\left(\frac{1}{r}\right)$ $\vec{E}\left(\frac{1}{r}\right)$

Raumbezogene Strahlungsleistung $\frac{dP}{d\Omega} = \vec{e_r}\,\langle\vec{S}\rangle r^2$

Strahlungsleistung $P = \int \frac{dP}{d\Omega}\,d\Omega = \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\alpha\, \frac{dP}{d\Omega}$

Charakteristische Impedanz $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$

5.4) Typen von Wellen Begriffe und Bemerkungen

FREIE WELLEN

EIN TRÄGER – Ortskoordinate $\hat{=}$ einfache Welle

Zwei TRÄGER – Flächenwellen (gerade Wellen) – parallele Wellen – ZT längs // Fronte

Kreiswellen – ZT konz. Kreise

DREI TRÄGER – Raumwelle
- ebene Wellen ZT // Ebene
- Kreiszylinderwelle ZT koaxialer Kreise
- Kugelwelle ZT konzentr. Kugeln

GEFÜHRTE WELLEN

EINSEITIG – KANALWELLE

ZWEISEITIG – Radwelle
- Kanten kalt
- Oszillation freie Oszillation
- Grenzschichtwelle zwei Trägern

longitudinal $\leftrightarrow$ transversal

...swelle – elliptische Polarisation
- linear
- zirkular

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{\pi}\left(\frac{a}{\rho}\right)^n \cos(n\alpha)\vec{e_z}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{e_\rho}\left(\frac{1}{\rho}\partial_\alpha f_z - \partial_z f_\alpha\right) + \vec{e_\alpha}(\partial_z f_\rho - \partial_\rho f_z) + \frac{\vec{e_z}}{\rho}\left(\partial_\rho(\rho f_\alpha) - \partial_\alpha f_\rho\right)$$

$$\vec{B} = +\frac{\mu_0 I}{\pi}\cdot\frac{a^n}{\rho^n}\cdot\frac{1}{\rho}\left(-n\sin(n\alpha)\vec{e_\rho}\right) - \left(-n\cdot\frac{\mu_0 I}{\pi}\cdot a^n\cdot\left(\frac{1}{\rho^{n+1}}\right)\cos(n\alpha)e_z\right.$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{\pi}\cdot\frac{a^n}{\rho^n}\cdot\frac{n}{\rho}\cdot\left(\cos(n\alpha)\vec{e_z} - \sin(n\alpha)\vec{e_\rho}\right)$$

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{\pi}\left(\frac{a}{\rho}\right)^n\cdot\frac{n}{\rho}\cdot\left(\underbrace{\sqrt{\cos^2(n\alpha)+\sin^2(n\alpha)}}_{1}\right)$$

$\rho = 10a \quad n = 1:$

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{\pi}\cdot\left(\frac{a}{10a}\right)\cdot\frac{1}{10a} = \frac{\mu_0 I}{\pi}\cdot\frac{1}{100a}$$

$\rho = 10a \quad n = 3$

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{\pi}\cdot\left(\frac{a}{10a}\right)^3\cdot\frac{3}{10a} = \frac{3}{10000a}\cdot\frac{\mu_0 I}{\pi}$$

---

(4) $\vec{H} = \vec{H}\cos(\omega t - kz)\vec{e_z}$

$$\vec{B} = -\mu_0 \hat{H}\cdot e^{-ky}\cdot\left(\cos(\omega t - kx)\vec{e_x} + \sin(\omega t - kx)\vec{e_y}\right)$$

$$-\partial_t\vec{B} = \mu_0\cdot\hat{H}\cdot e^{-ky}\cdot\omega\cdot(- \text{''} \quad \text{——} \quad)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B} \qquad \vec{E} = E_z(x,y)\vec{e_z}$$

$$\cancel{\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{e_z}(\partial_x f_y - \partial_y f_x)} \quad \underline{\underline{E_x = 0}}$$

$$\cancel{\mu_0 H\cdot e^{-ky}\cdot\omega\cdot(\cos(\omega t}$$

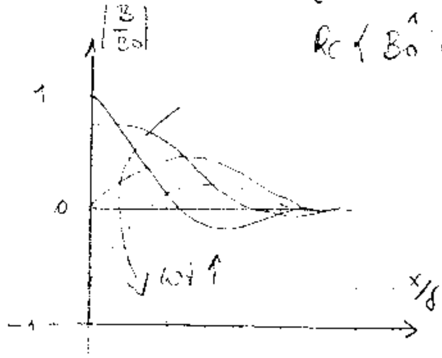
4.4.) Zeitlich sinusförmig verlaufende Randfeldstärke

$\vec{H} = H\vec{e_y}$ $\quad H(0,t) = \hat{H_0} \cos \omega t$

$\vec{B} = B\vec{e_y}$ $\quad B(x,t) = \mathrm{Re}\{\hat{B_0}\, e^{j(\omega t - kx)}\}$

Diffusionsgleichung: $\nabla^2 \vec{B} = \mu \gamma\, \dot{\vec{B}}$

$\mathrm{Re}\{\hat{B_0}(-jk)(-jk)\, e^{j(\omega t - kx)}\} = \mu\gamma\, \mathrm{Re}\{\hat{B_0}\, j\omega\, e^{j(\omega t - kx)}\}$

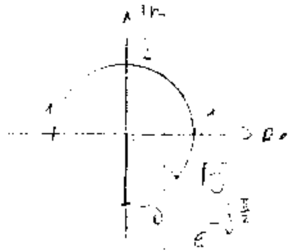


$-k^2 = j\mu\gamma\omega$

$k^2 = -j\, \mu\gamma\omega$

$k = \frac{1-j}{\sqrt{2}} \sqrt{\mu\gamma\omega}$

$k = \frac{1-j}{\delta}$ $\quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\gamma\omega}}$ Eindringtiefe



$\Rightarrow B(x,t) = \hat{B_0}\, e^{-\frac{x}{\delta}} \cos(\omega t - \frac{x}{\delta})$ $\qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{J}$

Wirbelströme $\hat{=}$ Joul Verluste $\qquad \vec{E} = (J/\gamma)\, \vec{e_z}$ $\quad H = (\frac{B}{\mu})\vec{e_y}$

$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$

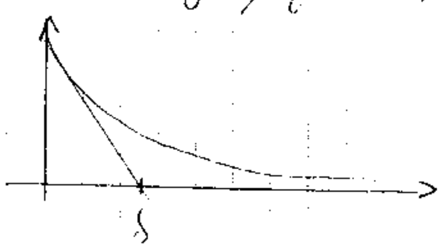
4.5.) Stromverdrängung

$i(t) = \mathrm{Re}\{I\sqrt{2}\, e^{j\omega t}\}$

$\vec{B} = B(x,t)\vec{e_y}$ $\quad B(x,t) = \mathrm{Re}\{\hat{B}(x)\, e^{j\omega t}\}$ $\qquad$ Diffusionsgl.: $\nabla^2 \vec{B} = \mu\gamma\dot{\vec{B}}$

$B''(x) = j\omega\mu\gamma\, \hat{B}(x)$ $\qquad \hat{B}(0) = \phi$ $\quad B(b) = \mu_0 \frac{I\sqrt{2}}{b}$

$\delta = \sqrt{\frac{2}{\gamma\omega\mu}}$



Aussage: Stromverdrängung bewirkt größere Joul Verluste

$\Rightarrow$ Widerstandszunahme

$\cancel{\partial_t \vec{B}} = \mu_0 \cdot \hat{H} \cdot e^{-ky} \cdot \omega \cdot (\cos(\omega t - kx)\vec{e_x}) + \sin(\omega t - kx)\vec{e_y})]$

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \qquad \vec{E} = E \cdot \vec{e_z}$

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{e_x}(\partial_y E_z) - \vec{e_y}\, \partial_x E\cancel{z}$

$\cancel{\partial_y E_z} = \partial_y E_z = \mu_0 \cdot \hat{h} \cdot e^{-ky} \cdot \omega \cdot (\cos(\omega t - kx))$

$-\partial_x E_z = \mu_0 \cdot \hat{h} \cdot e^{-ky} \cdot \omega \cdot (\sin(\omega t - kx))$

$E_{z_1} = \cancel{-\mu_0} \mu_0 \cdot \hat{h} \cdot e^{-ky} \cdot \omega (\cos(\omega t - kx)) \cdot \frac{1}{\cancel{-}k}$

$\partial_x E_z = \mu_0 \cdot \hat{H} \cdot e^{-ky} \cdot \omega \cdot (\cancel{-}\sin(\omega t - kx)) \cdot \frac{1}{\cancel{-k}} \cdot \cancel{-k}$

$-\partial_x E_z \quad - \,''$

$$\underline{E_z = -\mu_0 \cdot \frac{\hat{H_0}}{K} \cdot e^{-ky} \cdot \omega \cdot (\cos(\omega t - kx))}$$

ii) $\vec{E'} = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$

ii) $v = \frac{\omega}{k} \vec{e_x}$

$\vec{v} \times \vec{B} = \frac{\omega}{k} \vec{e_x} \times (-\mu_0 \hat{H} e^{-ky} (\cos(\omega t - kx)\vec{e_x} + \sin(\omega t - kx)\vec{e_y}))$

$\vec{v} \times \vec{B} = \frac{\omega}{k} \cdot -\mu_0 \hat{H} \cdot e^{-ky} \cdot \sin(\omega t - kx) \cdot \vec{e_z}$

$$\underline{\underline{E' = -\mu_0 \cdot \hat{H_0} \cdot e^{-ky} \cdot \frac{\omega}{k} \cdot (\cos(\omega t - kx)\vec{e_z} + \sin(\omega t - kx)\vec{e_z})}}$$

3.16) Drehsymmetrische Magnetfelder

Voraussetzung: stationär magnetische Felder, drehsymmetrisch bezüglich z Achse (azimutale Felder)

1) mit $\vec{H} = H_\alpha \vec{e_\alpha}$ $\quad H_\alpha = f(\rho, z)$ $\quad$ Lösung über Durchflutungsgesetz
$\vec{J} = J_\rho \vec{e_\rho} + J_z \vec{e_z}$ $\quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$

2) mit $\vec{H} = H_\rho \vec{e_\rho} + H_z \vec{e_z}$ $\quad H_\rho, H_z = f(\rho, z)$ $\quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$
$\vec{J} = J(\rho, z) \vec{e_\alpha}$ $\quad \vec{A} = A(\rho, z) \vec{e_\alpha}$

$\Rightarrow \quad B_\rho = -\partial_z A \quad B_z = \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho A)$

mit $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu J$ $\Rightarrow$ Lösung über die Besselfunktion

4.1) Quasistationäre Felder (Allgemeine Eigenschaften)

Vorgänge zeitlich veränderte magn. Flüsse, elektrische Ströme in ausgedehnten, elektr. gut leitfähigen Körpern
$\Rightarrow$ Induktionsgesetz aber kein Verschiebungsstrom

Voraussetzung: dominant magnetisches Feldsystem

global $\quad \Phi(\partial V) = \phi \quad ; \quad V(\partial A) = I(A) \quad ; \quad U(\partial A) = -\dot{\Phi}(A)$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \phi \qquad \vec{n} \cdot [\![B]\!] = \phi$

$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \qquad \vec{n} \times [\![\vec{H}]\!] = \vec{J}$

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \qquad \vec{n} \times [\![\vec{E}]\!] = v_n [\![\vec{B}]\!]$

aus $\quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \emptyset$

$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \vec{\nabla} \times \partial_t \vec{A} = \emptyset$

$\vec{\nabla} \times (E + \partial_t \vec{A}) = \phi \quad \hat{=}$ wirbelfrei

$\vec{E} = -\partial_t A - \vec{\nabla} \varphi$

Maxwell Eichung: $\quad \vec{E} = -\partial_t \vec{A} \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \phi$

⑤ $\varphi(x,y,z) = F_1(x) + F_2(y) + F_3(z)$

$$F_1''(x) + F_2''(y) + F_3''(z) = 0$$

$$\Rightarrow F_1''(x) = -(F_2''(y) + F_3''(z))$$

aus üblichem Sep. argument konst

$$F_1''(x) = A_1 = \text{const.}$$

$$F_2''(y) = [-A_1 + F_3''(z)] = A_2 = \text{const}$$

$$F_3''(z) = -(A_1 + A_2) = A_3$$

$$F_1''(x) = A_1 \quad F_1(x) = \frac{A_1 x^2}{2} + B_1 x + C_1$$

$$F_2''(y) = A_2 \quad F_2(y) = \frac{A_2 y^2}{2} + B_2 y + C_2$$

$$F_3''(z) = A_3 \quad F_3(z) = \frac{A_3 z^2}{2} + B_3 y + C_3$$

$$\Rightarrow \varphi(x,y,z) = \frac{A_1 x^2 + A_2 y^2 + A_3 z^2}{2} + B_1 x + B_2 y + B_3 z + C$$

wobei $A_1 + A_2 + A_3 = 0$

---

⑥ $\vec{H} = \frac{H_0}{a^2}\left(2xy\,\vec{e_x} + (x^2 - y^2)\vec{e_y}\right)$

ges. $\varphi(x,y)$ für $\vec{H} = -\nabla\varphi$

$$\vec{H} = -\nabla\varphi = -\vec{e_x}\partial_x\varphi - \vec{e_y}\partial_y\varphi$$

$$-\partial_x\varphi = \frac{H_0}{a^2}2xy \quad \Rightarrow \varphi = -\frac{H_0}{a^2}\,\cancel{2}\frac{x^2}{\cancel{2}}y + C(y)$$

$$-\partial_y\varphi = \frac{H_0}{a^2}(x^2 - y^2) \qquad \partial_y\varphi = -\frac{H_0}{a^2}x^2 + C'(y)$$

$$\partial_y\varphi = -\frac{H_0}{a^2}(x^2 - y^2)$$

$$C'(y) = \frac{H_0}{a^2}y^2$$

$$C(y) = \frac{H_0}{a^2}\frac{y^3}{3}$$

$$\varphi = -\frac{H_0}{a^2}\left(\frac{y^3}{3} + xy^2\right)$$

Probe: $-\frac{H_0}{a^2} \cdot 2xy\,\vec{e_x} + (x^2 - y^2) \cdot -\frac{H_0}{a^2}$

3.12.) Relaxation und Konvektion

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla}\cdot(\rho \vec{v}) + \frac{1}{T_R}\rho = \phi \qquad T_R = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$

$$T_R\,(\partial_t \rho + \vec{\nabla}\cdot(\rho \vec{v}\,')) + \rho = \phi$$

aus'n Satz von Gauß $\Rightarrow$

$$T_R\,\dot{Q}(V) + Q(V) = \phi \qquad Q(V) = \int_V \rho\, dV$$

Aussage: In einem homogenen Material strebt die elektr. Ladung jedes materiellen Volumselements, [illegible] gegen Null, sofern keine Ladungsinjektion erfolgt.

3.13.) Allgemeine Eigenschaften stationärer magn. Felder und Stromverteilungen

Aussage: magn. Fluss, magn. Spannung, elektrischer Strom, keine mag. Ladung

global: $\Phi(\partial V) = \phi$, $V(\partial A) = I(A)$, $I(\partial V) = \phi$

1) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \phi \qquad \vec{n}\cdot[\![\vec{B}]\!] = \phi$

2) $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} \qquad \vec{n}\times[\![\vec{H}]\!] = \vec{K}$

3) $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = \phi \qquad \vec{n}\cdot[\![\vec{J}]\!] = \phi$

$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}$

Aussage 1) gilt nicht nur für ∂V sondern für jede Fläche

2) Quellenfreiheit der magn. Flussdichte

3) Quellenfreiheit der Stromdichte

magnetisches Vektorpotential

$$\Phi(A) = \int_A \vec{n}\cdot\vec{B}\,dA = \oint_{\partial A} \vec{s}\cdot\vec{A}\,ds \; ; \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0 \checkmark$$

Eichung:

$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{\nabla}\times\vec{A}'$ mit gleicher Rotation

$\vec{\nabla}\times(\vec{A}' - \vec{A}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{A}' - \vec{A} = \vec{\nabla}c$

Aussage: Ist A ein zu B gehörendes Vektorpotential, so erfüllt $\underbrace{\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}c}$ mit einem beliebigen Skalarfeld auch die gleiche $\vec{B}$

Eichtransformation

Maxwell Eichung: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \phi$

Metall Kreisplatte

$\vec{B} = B e_z$ $\quad U(\partial A) = -\dot{\Phi}(A)$

$U = \int_{\partial A} \vec{s} \cdot \vec{E} = 2\pi \varrho E$ $\quad \phi = \vec{B} \cdot \cos(\omega t)\, \varrho^2 \pi$ $\quad \overset{\partial A}{U} = -\dot{\Phi}(A)$

$\vec{E} = \frac{\omega \vec{B} \cdot \sin(\omega t)}{2}$ $\quad p = \gamma E^2 = \frac{\gamma(\omega \vec{B} \cdot \sin(\omega t))^2}{4}$

$\bar{p} = \cancel{\gamma E}\ \gamma\left(\frac{\omega \vec{B} \cdot \varrho}{\gamma}\right)^2 \frac{1}{8}$

$\vec{P} = \int_V \bar{p}\, dV$ mit $dV = \delta \cdot 2\pi \varrho\, d\varrho$

$= \int_0^{D/2} \frac{1}{8} \cdot \gamma (\omega B)^2 \cdot \delta \cdot 2\pi \varrho^3\, d\varrho =$

$= \frac{\pi \gamma \delta (\omega B)^2 \cdot D^4}{256}$

---

(8) $\vec{B}(\theta) = \vec{\varkappa} \times \frac{\vec{E}(\theta)}{c_0}$

ges: $\vec{g}^e, \vec{S}, \mathcal{L}^e$ durch w_e

$\underline{w_e = \varepsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}}$

für ebene Wellen: $\cancel{\vec{B} = \frac{\vec{E}}{c_0}}$ $\quad B^2 = \frac{E^2}{c_0} = \varepsilon_0 \cdot E^2$

$\vec{S} = \frac{\vec{E}}{\mu_0} \times \vec{B} = \frac{E^2 \vec{\varkappa}}{\mu_0 c_0} \quad \underline{= c_0 \varkappa \cdot w_e}$

$\vec{g}^e = \varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} = \underline{\frac{1}{c_0} \cdot \vec{w_e}}$

$P_e^2 = w_e \underset{\sim}{I} - \varepsilon_0 \vec{E} \otimes \vec{E} - \frac{\vec{B}}{\mu_0} \otimes \vec{B}$

$\cancel{\vec{E} = \vec{E}\, e_E}$ $\quad \vec{E} = E \cdot \vec{e_0}$ $\quad \vec{B} = B \cdot \vec{e_0}$ $\quad B^2 = \frac{E^2}{c_0^2}$

mit $\mathcal{L} = \vec{e_E} \otimes \vec{e_E} + \vec{e_B} \otimes \vec{e_B} \cdot \vec{\varkappa} \otimes \vec{\varkappa} \ldots = \underline{w_e \cdot \varkappa \otimes \varkappa}$

$\varphi(x,y) = (A_1 e^{kx} + A_2 e^{-kx})[B_1 \cos ky + B_2 \sin ky]$

Grundform: $\varphi(x,y) = C e^{-kx} \sin(ky)$, $\vec{E}(x,y) = -\vec{\nabla}\varphi$

3.6) Zweidimensionale Lösung der Laplace Gleichung in Polarkoordinaten

Voraussetzung: keine z abhängigkeit

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = \phi$$

$$\varphi(\rho,\alpha) = R(\rho) \cdot S(\alpha) \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$$

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - k^2(\rho) = \phi \,, \quad S''(\alpha) + k^2 S(\alpha) = \phi$$

$$R(\rho) = A_1 \rho^k + A_2 \rho^{-k} \quad S(\alpha) = B_1 \cos k\alpha + B_2 \sin k\alpha$$

für $k=\phi$: $R(\rho) = A_1 + A_2 \ln \frac{a}{\rho}$ $\quad S(\alpha) = B_1 + B_2 \alpha$

Grundform $\varphi(\rho,\alpha) = C_k \rho^k \cos(k\alpha)$

3.7.) Das elektrostatische Vektorpotential

Aussage: ladungsfreier Bereich !!

global $\Psi(\partial V) = \phi$ $\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \phi \Rightarrow \Psi(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} \vec{\nabla} \times \vec{V} ds$ $\quad \vec{D} = \vec{\nabla} \times \vec{V}$

$\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{0} \quad \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V}) = \vec{0}$

Ebenes Problem $x,y \Rightarrow$ Invarianz gegenüber $z \Rightarrow \vec{V} = V\vec{e_z}$

$$\Psi(\mathcal{A}) = l[V(\vec{r_2}) - V(\vec{r_1})] \qquad \vec{D} = -\vec{e_z} \times \vec{\nabla} V$$

$$\vec{E} = -\vec{e_z} \times \vec{\nabla} \frac{V}{\varepsilon}$$

3.8.) Ebene Feldprobleme holomorphe Funktion

Funktionentheorie: komplexe Funktion f mit komplexen variablen

$$\zeta = x + jy \Rightarrow f(\zeta) = u(x,y) + j v(x,y)$$

holomorph: $f(\zeta)$ ist stetig in jedem Punkt differenzierbar

längs Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung

$\partial_x u = \partial_y v$, $\partial_y u = -\partial_x v$ $\qquad \rightarrow$ konforme Abbildung von ζ-Ebene w-Ebene

Beispiel $\quad \vec{E} = E_x \vec{e_x} + E_y \vec{e_y}$

$\partial_x E_x = -\partial_y E_y \quad \partial_y E_x = \partial_x E_y \quad \Rightarrow u = E_x \quad v = -E_y$

$E(\zeta) = E_x(x,y) - j E_y(x,y)$

$F(\zeta) = \varphi(x,y) + j \chi(x,y)$

(9) ?

---

(10) $$\int_{\partial a} \vec{s} \times \vec{f}\, ds = \int_A n_y \partial_z f - n_z \partial_y f)\, dA$$

Zeige Gültigkeit durch Anwendung von Satz von Gauß

$$S \int_{\partial A} \vec{s} \cdot \vec{f}\, ds = \int \vec{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{f})\, dA$$

also $$\int_{\partial a} \vec{s_x} \vec{f_x} + \vec{s_y} \vec{f_y} + \vec{s_z} \vec{f_z} = \int_A \vec{n} \cdot (\vec{\nabla} \times f)\, dA =$$

$$\int \vec{s_x} f_x + \vec{s_y} \vec{f_y} + s_z f_z = \int \vec{n} \begin{pmatrix} \partial_y f_z - \partial_z f_y \\ \partial_z f_x - \partial_x f_z \\ \partial_x f_y - \partial_y f_x \end{pmatrix} dA$$

$$\int s_x f_x + s_y f_y + s_z f_z = \oint_K \vec{n_x} \cdot (\partial_y f_z - \partial_z f) + \vec{n_y} \cdot (\partial_z f_x - \partial_x f_z) + n_z \cdot (\partial_x f_y - \partial_y f_x)\, dA$$

✓

$$\int \vec{s} \vec{f}\, ds = \int \vec{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{f})$$

3.1 Allgemeine Eigenschaften des elektrostatischen Feldes und Ladungsverteilungen

Aussage elektr. Spannung, elektrische Feld

global $U(\partial A) = \phi$, $\Psi(\partial V) = Q(V)$

lokal $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$ $\vec{n} \times [\![\vec{E}]\!] = \vec{0}$

$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

$\vec{\nabla} \vec{D} = \rho$ $n \cdot [\![\vec{D}]\!] = \sigma$

elektrostatische Spannungsbegriff $U(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} \vec{E}\, d\vec{s} = \varphi(\vec{r_1}) - \varphi(\vec{r_2})$

$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ Fundamentalsatz

wichtig Falls $\partial \mathcal{C} = \phi$ $\vec{r_1} = \vec{r_2} \Rightarrow U(\mathcal{C}) = \phi \Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\varphi) = \phi$ Integrabilität

3.2 Poisson und Laplace Gleichung

Aussage konstante Permeabilität

$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$ $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ $E = -\vec{\nabla}\varphi$

PG Poissongleichung $\vec{\nabla} \cdot \varepsilon(-\vec{\nabla}\varphi) = \rho \Rightarrow -\nabla^2 \varphi = \frac{\rho}{\varepsilon}$

LG Laplace: $-\nabla^2 \varphi = \phi$ (falls keine Ladungen vorhanden)

Bemerkung PG ist eine inhomogene, die LP ist eine homogene lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

Lösung $\nabla'^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{-1}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}$

3.3 Darstellungssätze der Potentialtheorie

Aussage ganze dreidimensionale, euklidische Raum

Richtungsableitung in bezug auf $\vec{n}$ $\partial_n = \vec{n} \cdot \vec{\nabla}$

gerichtete Abstand $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$

Fundamentalsatz der Vektoranalysis $\vec{v} = \vec{v}_\infty - \vec{\nabla} u + \vec{\nabla} \times \vec{a}$

3.4.) Randwertprobleme der Elektrostatik

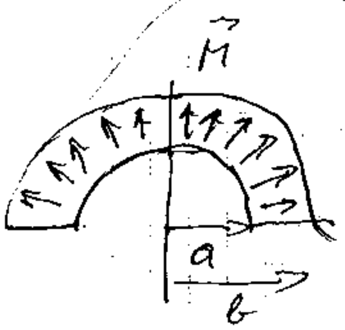
Aussage: harmonische Felder lassen sich aus Randdaten vollständig berechnen.

? 3: 1) Werte von φ am Rand (Elektrodenpotential)

2) Normalprojektion der Feldstärke am Rand

TET 2 30.9.88

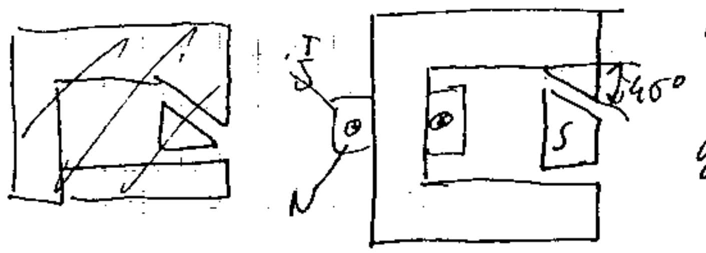
1.)



Geg: Dickwandiger, gleichmäßig Magnetisierter Hohlzylinder, $\vec{M} = M\vec{a}$

ges: $\vec{m}$: Magn. Moment!

2.)

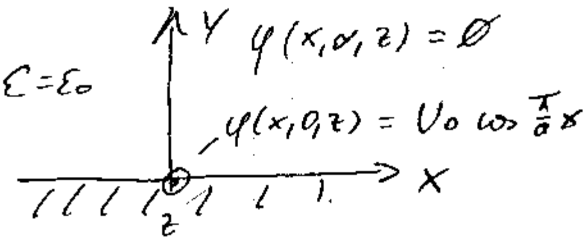


geg.: alle Abmessungen und Winkel, N, I

ges: Resultierende Kraft auf das Stück S als Vektor

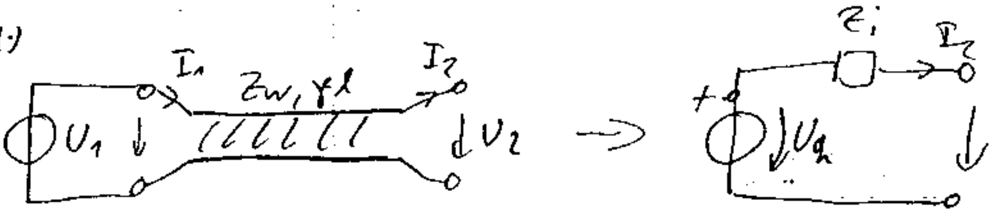
$$\vec{F}^R = \frac{1}{\mu_0}\oint_{\partial V}\left((\vec{n}\cdot\vec{B})\vec{B} - \frac{1}{2}B^2\cdot\vec{n}\right)dA$$

3.) Ebenes Dirichlet-Problem



ges: Feldstärke bei $y = 0+$

4.)



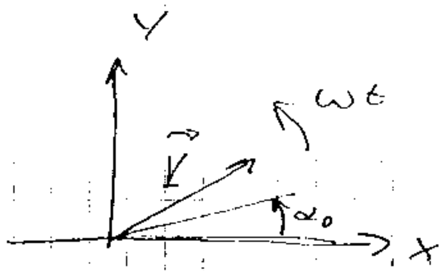
$$U_1 = \cosh(\gamma l)U_2 + Z_w \sinh(\gamma l)\, I_2$$
$$I_1 = \frac{1}{Z_w}\sinh(\gamma l)U_2 + \cosh(\gamma l)\, I_2$$

Ges: U_q, Z_i der Ersatzschaltung für ein Leitungsstück

5.) Beispiel aus Buch Kap. 5

γ^2 = geg. ges.: $\underline{\underline{\alpha}}$

6.)

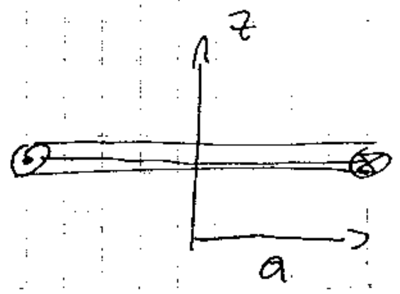


Geg: Rot. Vektor

Ges: Kompl. Amplitude für Darstellung

$\vec{V} = \mathrm{Re}(\underline{\vec{V}}\, e^{j\omega t})$

7.)



Dünne Kreisspule: Näherungsweise als Linienstrom mit ⌀ a

$\vec{A} = K\, f\left(\frac{\varrho}{a}\right) \vec{e}_\alpha$

$$f(\xi) = \int_0^\pi \frac{\cos\alpha\, d\alpha}{\sqrt{1+\cdots}}$$

$f(\xi)$ an den Grenzen $0 < \xi \ll 1$

und $0 < 1-\xi \ll 1$ gegeben

Gesucht: Induktivität der Kreisspule

8.) Leiten Sie für eine verlustbehaftete aber verzerrungsfreie Leitung die Wellenimpedanz ab.

9.) Geg: $\varphi(r)$

Ges: Zugehörige Ladungsverteilung

$\vec{B} = -\vec{\nabla} \cdot \varphi$ Achtung $\vec{\nabla}$ in Kugelkoordinaten!

$\varrho = \vec{\nabla} \cdot \vec{D}$ $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{B}$

10.) Geg. Skalarfeld $\varphi(x, y, z)$

Gesucht: Richtungsableitung in Richtung $\vec{n}$ im Punkt P

Pl. Koordinaten v. P gegeben, Richtung $\vec{n}$ angegeben!

1. Abstand zwischen 2 Punkten in Kugelkoordinaten (r, Θ, α):

$P_1\,(2m, 36°, 14°)$, $P_2\,(3m, 118°, 229°)$

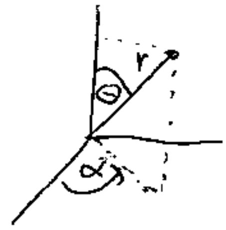
$\vec{r} = r \cdot \vec{e}_r$, $r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$

$x = r \cdot \sin(\theta) \cdot \cos\alpha$
$y = r \sin(\theta) \sin\alpha$
$z = r \cdot \cos(\theta)$

$\vec{e}_r = \sin(\Theta)\cos(\alpha)\,\vec{e}_x + \sin(\Theta)\sin(\alpha)\,\vec{e}_y + \cos(\Theta)\,\vec{e}_z$

$$r_{12} = \sqrt{\left[r_1 \sin(\theta_1)\cos(\alpha_1) - r_2 \sin(\theta_2)\cos(\alpha_2)\right]^2 + \left[r_1 \sin(\theta_1)\sin(\alpha_1) - r_2 \sin(\theta_2)\sin(\alpha_2)\right]^2 + \left[r_1\cos(\theta_1) - r_2\cos(\theta_2)\right]^2}$$

$$r_{12} = \sqrt{9{,}64 + 5{,}1 + 9{,}16} = \underline{4{,}88\ m}$$



$$(\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \otimes (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3)$$

2. Anisotropes Dielektrikum $\boxed{A.\ 2.1.12}$

? Winkel zwischen $\vec{E}$ und $\vec{D}$.

$\underset{\sim}{\varepsilon} = (2{,}6\ \vec{e}_x \otimes \vec{e}_x + 1{,}2\ \vec{e}_y \otimes \vec{e}_y + 1{,}7\ \vec{e}_z \otimes \vec{e}_z)$

$\vec{E} = \frac{E_0}{\sqrt{21}}\,(\vec{e}_x - 4\vec{e}_y + 2\vec{e}_z)$

$\vec{D} = \underset{\sim}{\varepsilon} \cdot \vec{E} = \frac{\varepsilon_0 E_0}{\sqrt{21}}\,(2{,}6\,\vec{e}_x - 4{,}8\,\vec{e}_y + 3{,}4\,\vec{e}_z)$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{E}\cdot\vec{D}}{|\vec{E}|\cdot|\vec{D}|}$$

$\vec{E}\cdot\vec{D} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{21} \cdot (2{,}6 + 19{,}2 + 6{,}8) = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{21} \cdot 28{,}6$

$|\vec{E}| = \frac{E_0}{\sqrt{21}} \cdot \sqrt{1+16+4}$

$|\vec{D}| = \varepsilon_0 \cdot \frac{E_0}{\sqrt{21}} \cdot \sqrt{41{,}36}$ $\Longrightarrow \cos\alpha = \frac{28{,}6}{\sqrt{21 \cdot 41{,}36}} = 0{,}97$

$$\underline{\underline{\alpha = 13{,}94°}}$$

3. $\varphi(r,\theta) = \frac{E_0}{2} \cdot r_0 \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \cdot \cos(\theta)$

i) berechne $\frac{r}{r_0} = f\left(\theta, \frac{|\vec{E}|}{E_0}\right)$.

ii) zeichne Kurve für $|\vec{E}| = E_0$.

i) $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = E_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^3 \cos(\theta)\,\vec{e}_r + \frac{E_0}{2}\left(\frac{r_0}{r}\right)^3 \sin(\theta)\,\vec{e}_\theta$

$= E_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^3 \left(\cos(\theta)\,\vec{e}_r + \frac{1}{2}\sin(\theta)\,\vec{e}_\theta\right)$?!

$|\vec{E}| = E_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^3 \cdot \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1{,}12 \cdot E_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^3$

$\left(\frac{r}{r_0}\right)^3 = \frac{E_0}{|\vec{E}|} \cdot \sqrt{1{,}25} \implies \frac{r}{r_0} = \sqrt[3]{\frac{E_0}{|\vec{E}|} \cdot \sqrt{1{,}25}}$

ii) $\frac{r}{r_0} = \sqrt[6]{1{,}25}$

Transversalwelle $\perp$ auf z, y

4. Berechne den Mittelwert des Poynting-Vektors!

$\vec{B} = \hat{B} \cdot \left[\cos(\omega t - kz)\right] \vec{e}_x$ (oder ähnlich) $e_x\, e_y\, e_z$

$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ $\qquad \vec{E} = -Z_0 (\vec{\kappa} \times \vec{H}) = -Z_0 (\vec{e}_z \times H \cdot \vec{e}_x)$

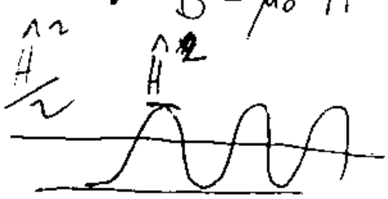
$= -Z_0 H\, \vec{e}_y$

$\vec{S} = -Z_0 H\, \vec{e}_y \times H\, \vec{e}_x = Z_0 H^2\, \vec{e}_z$

$= Z_0 \left(\hat{B}\cos(\omega t - kz)\right)^2 \vec{e}_z$

$\langle \vec{S} \rangle = \frac{Z_0 \cdot \hat{H}^2}{2}$

- $\vec{H} = H\,\vec{e}_x$
- $\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H}$



5.) Bestimme Maxwell-geeichtes Vektorpotential:

$\vec{A}$ i. $\odot$ $\quad \vec{B} = B_0 \left[\sin\left(\frac{z}{a}\right) \vec{e}_x + \cos\left(\frac{z}{a}\right) \vec{e}_y \right]$ $\quad \boxed{A.3.4.7}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad \rightarrow \quad \partial_z A = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{A_z = 0}}$$

$\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}}$ $\qquad B_x = -\partial_z A_y \;,\; B_y = \partial_z A_x$

$$A_x = \int B_y \, dz = a \cdot \sin\left(\frac{z}{a}\right) \cdot B_0$$

$$A_y = -\int B_x \, dz = a \cdot \cos\left(\frac{z}{a}\right) \cdot B_0$$

$$\vec{A} = a \cdot B_0 \left[\sin\left(\frac{z}{a}\right) \vec{e}_x + \cos\left(\frac{z}{a}\right) \vec{e}_y \right] = a \cdot \vec{B}$$

ii, Zeige daß Magnetfeld kräftefrei ist:

Kraftdichte $\vec{f} = \vec{J} \times \vec{B}$

$B = \mu_0 \cdot H \;,\; \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \implies \mu_0 \vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{B}$

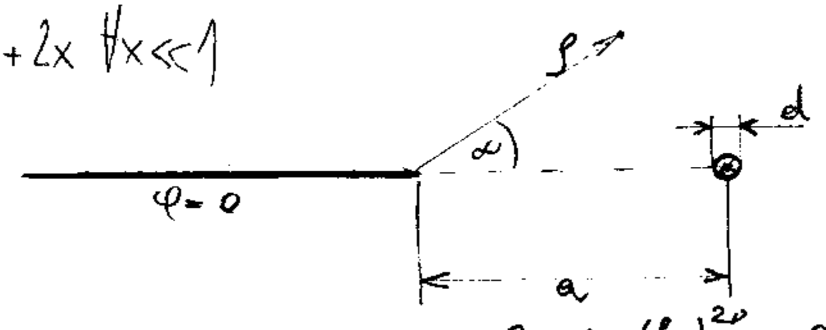
$$\vec{J} = \vec{e}_x \left[-\partial_z B_y \right] + \vec{e}_y \left[\partial_z B_x \right] = \frac{B_0}{\mu_0 \cdot a} \left[\sin\left(\frac{z}{a}\right) \vec{e}_x + \cos\left(\frac{z}{a}\right) \vec{e}_y \right]$$

$\implies \vec{J}$ prop. $\vec{B}$ $\implies$ $\vec{J} \times \vec{B} = 0$ $\implies$ Kraftdichte $\vec{f}$ verschwindet.
gleiche Richtung

6.) Neben einer Metallplatte liegt ein Leiter.
Berechne die längenbezogene Kapazität C':

$(1+x)^2 = 1 + 2x \;\; \forall x \ll 1$

$Q = C \cdot U$
$Q' = C' \cdot U$
$U = \frac{Q'}{C'}$



geg.: $\quad \varphi_{(\rho,\alpha)} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \ln \left\{ \frac{1 + \left(\frac{\rho}{a}\right)^{2\nu} + 2\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\nu} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \left(\frac{\rho}{a}\right)^{2\nu} - 2\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\nu} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right\}$

Hinweis: $(1+\delta)^{\gamma} \approx 1 + \gamma\delta \;,\; |\delta| \ll 1$.

./.

ad (6.) $C' = ?$ $C = \frac{Q}{U} \Rightarrow C' = \frac{Q'}{U} = \frac{\tau}{U}$

$U = \varphi_{Leiter} - \varphi_{Platte} = \varphi(a-\frac{d}{2}, 0°) - 0 =$ $= \ln a - \ln b =$

$$= \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \ln\left\{\frac{1+(1-\frac{d}{2a})^{2\nu} + \cancel{2(1-\frac{d}{2a})^{\nu}\cdot \underbrace{\sin(0°)}_{0}}}{1+(1-\frac{d}{2a})^{2\nu} - 2(1-\frac{d}{2a})^{\nu}\cdot \underbrace{\cos(0°)}_{1}}\right\}$$

$$= \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \ln\left\{\frac{1+(1-\frac{d}{2a})^{2\nu}}{\left[1-(1-\frac{d}{2a})^{\nu}\right]^2}\right\}$$

mit $(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$

{Hinweis verwenden}

$1+\sqrt{\ldots}$

$$\approx \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \ln\left\{\frac{1+1-2\nu\cdot\frac{d}{2a}}{\left[\cancel{1}-\cancel{1}+\nu\cdot\frac{d}{2a}\right]^2}\right\} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\cdot \ln\left\{\frac{2-2\nu\frac{d}{2a}}{\left[\nu\cdot\frac{d}{2a}\right]^2}\right\}$$

$1-\sqrt{\ldots}$

$$\boxed{C' = \frac{\tau}{U} = 4\pi\varepsilon_0 \,/\, \ln\{\ldots\}}$$

$\ln\left\{\frac{8a}{d}\right\}$

(7.) Sendereichweite:

$\vec{E} = Re\left[\vec{\mathcal{E}}\cdot e^{j\omega t - \underline{\gamma}\,\vec{\kappa}\cdot\vec{r}}\right]$

$\gamma = \alpha + j\beta$

$\alpha = \ldots$

$\beta = \ldots$

Bei welcher Entfernung $\vec{a}$ vom Sender beträgt der Betrag der Feldstärke nur noch 1% ?

$(\vec{a} = a\cdot\vec{\kappa})$

$\vec{\kappa}\cdot\vec{r} = r$

$$\frac{|\vec{E}(\vec{a})|}{|\vec{E}(0)|} = 0{,}01$$

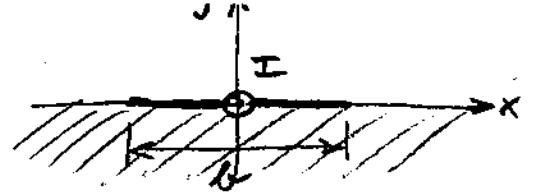
$|e^{j(\ldots)}| = 1$

$$\frac{|\vec{\mathcal{E}}\cdot e^{-\alpha a}\cdot e^{j(\omega t-\beta a)}|}{|\vec{\mathcal{E}}\cdot e^{j\omega t}|} = \underbrace{\frac{|\vec{\mathcal{E}}|}{|\vec{\mathcal{E}}|}}_{1}\cdot e^{-\alpha a} = 0{,}01$$

$|\cos x + j\sin x| = 1$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{\ln\left(\frac{1}{0{,}01}\right)}{\alpha}}$$

$$|e^{a}\cdot e^{jb}| = |e^{a}|\cdot|e^{jb}|$$



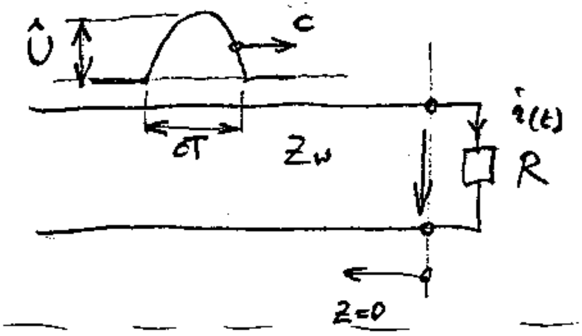
Berechne A im Gebiet $y \geq 0$.

$\boxed{A.3.5.3}$

(9.)

$\boxed{A.4.2.6}$

(10.)



Eine sin.-Welle bewegt sich auf der Leitung.
Berechne $i(t)$:

$$\text{I:}\quad U_{(z,t)} = U_1 \cdot f(t - \tfrac{z}{c}) + U_2\, f(t + \tfrac{z}{c})$$

$$\text{II:}\quad I_{(z,t)} = I_1 \cdot f(t - \tfrac{z}{c}) + I_2\, f(t + \tfrac{z}{c})$$

$$U_1 = Z_W I_1 \quad , \quad U_2 = -Z_W I_2$$

$$U_{(0,t)} = I_{(0,t)} \cdot R$$

$$U_{(0,t)} = U_1 \cdot f(t) + U_2\, f(t) = \left[I_1\, f(t) + I_2\, f(t) \right] \cdot R =$$

$$= \left[\frac{U_1}{Z_W} \cdot f(t) - \frac{U_2}{Z_W} \cdot f(t) \right] \cdot R$$

$$\Rightarrow U_1 \left(1 - \frac{R}{Z_W}\right) = -U_2 \left(1 + \frac{R}{Z_W}\right)$$

$$\underline{\underline{U_2}} = U_1 \cdot \frac{\frac{R}{Z_W} - 1}{1 + \frac{R}{Z_W}} = \underline{\underline{U_1 \cdot \underbrace{\frac{R - Z_W}{R + Z_W}}}}$$

$\hat{=}$ Reflexionsfaktor $\Rightarrow$ OK.

$$\text{in II:}\quad \underline{\underline{I_{(0,t)}}} = \frac{U_1}{Z_W} \cdot \sin\left(\overbrace{2\pi \cdot \frac{1}{2T}}^{\omega} \cdot t\right) - \frac{U_1 (R - Z_W)}{Z_W (R + Z_W)} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{T} \cdot t\right) =$$

$$= \frac{U_1}{Z_W} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \left[1 - \frac{R - Z_W}{R + Z_W} \right] = \frac{U_1}{\cancel{Z_W}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \frac{2\, \cancel{Z_W}}{R + Z_W}$$

$$\underline{\underline{= \hat{U} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \frac{2}{R + Z_W}}} \; .$$

Blatt 1

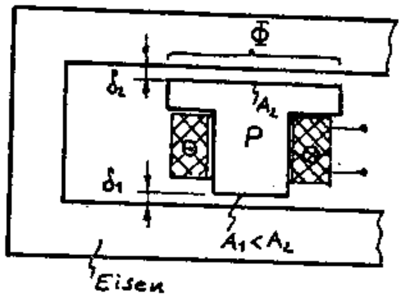
Institut für Grundlagen und Theorie der Elektrotechnik

Prüfung aus Theoretische Elektrotechnik 2

30. September 1992

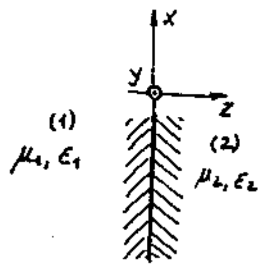
MNr:	Familienname:								Vorname:	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Datum	S/M/U	Note	Datum	S/M/U	Note	Datum	S/M/U	Note		

1



Berechnen Sie anhand des skizzierten Modells vereinfacht (Vernachlässigung der Streuung) die resultierende Kraft auf das Eisenteil P samt Wicklung, wenn der magnetische Fluß bekannt ist. Geben Sie insbesondere die Richtung der Kraft an.

2



Eine ebene elektromagentische Welle, deren elektrische Feldstärke durch

$$\vec{E}_e = f(t - z/c_1)\,\vec{e}_x$$

mit der bekannten Funktion f(.) gegeben ist, läuft durch das näherungsweise verlustfreie Medium (1) und trifft bei z=o senkrecht auf die ebene Grenzfläche zum ebenfalls verlustfreien Medium (2).

Bestimmen Sie

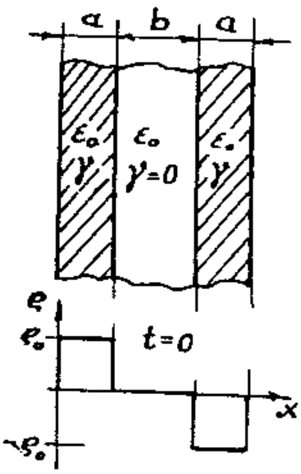
(i) die zu $\vec{E}_e$ gehörende magnetische Feldstärke $\vec{H}_e$,

(ii) die Komponenten $\vec{E}_r$, $\vec{H}_r$, der reflektierten Welle,

(iii) die Komponenten $\vec{E}_t$, $\vec{H}_t$ der transmittierten Welle.

3 Leiten Sie die Differentialgleichung für die Ausbreitung von Spannungsstörungen entlang einer Leitung ab, für die der Induktivitätsbelag L' und der Leitwertbelag G' vernachlässigt werden können, der Kapazitätsbelag C' und der Widerstandsbelag R' aber berücksichtigt werden müssen (Thomson-Kabel). Läßt sich eine Ausbreitungsgeschwindigkeit angeben? (Begründung!)

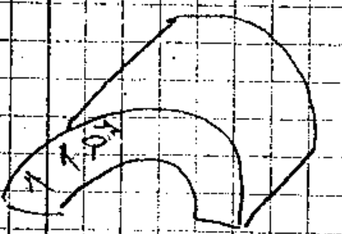
5



Die beiden äußeren, elektrisch schwach leitfähigen Schichten, getrennt durch eine isolierende Schicht, sind zum Zeitpunkt t=0 gleichförmig mit der Dichte ϱ_0 bzw. $-\varrho_0$ elektrisch geladen. Berechnen Sie die elektrische Feldstärke als Orts- und Zeitfunktion. Skizzieren Sie deren Verlauf für die Zeitpunkte t=0, $t=T_R$ und $t \gg T_R$. (T_R ist die Relaxationszeitkonstante)

(1) Richtungsableitung

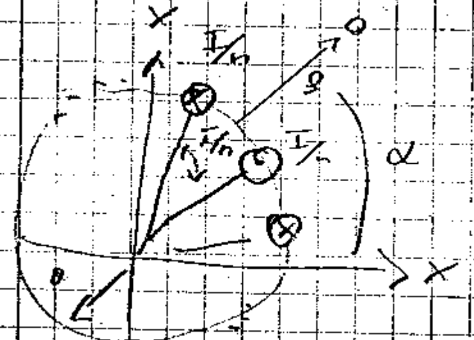
(2)



$P = |\vec{P}| = const$

ges. el. Moment $\vec{p}$

(3)

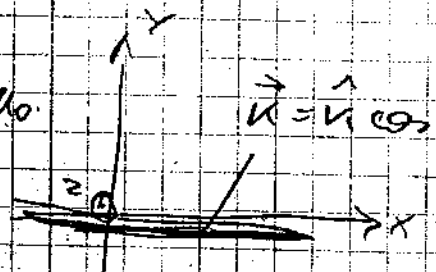


ges. $\vec{A} \approx -\frac{\mu_0 I}{\pi}\left(\frac{a}{\rho}\right)^n \cos(n\alpha)\vec{e_z}$

ges. i) magnet. Flussdichte & deren Betrag in Polarkoord.

ii) vergleiche die Beträge für $\rho = 10a$ mit $n = 1$, $n = 3$

(4)



$\vec{K} = \hat{K}\cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$ $\quad \left|\frac{\omega}{k}\right| \ll c_0$

dominant magnet. Feld mit $\vec{B} = \mu_0 \hat{K} e^{-ky}\left[\cos(\omega t - kx)\vec{e_x} + \sin(\omega t - kx)\vec{e_y}\right]$

$y > 0$

i) berechne $\vec{E} = E\vec{e_z}$ allein durch Induktion

ii) welches $\vec{E}'$ für $v = \frac{\omega}{k}\vec{e_x}$

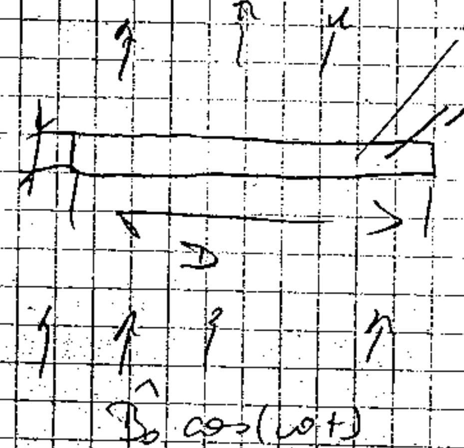
(5) $\nabla^2\varphi = 0$ $\quad \varphi(x,y,z) = F_1(x) + F_2(y) + F_3(z)$

(6) elektr.-magnet. Feld

$$H = \frac{H_0}{a^2}\left[2xy\vec{e_x} + (x^2 - y^2)\vec{e_y}\right]$$

ges. magnet. Pot. $\psi(x,y)$, für $\vec{H} = -\nabla\psi$

(17)

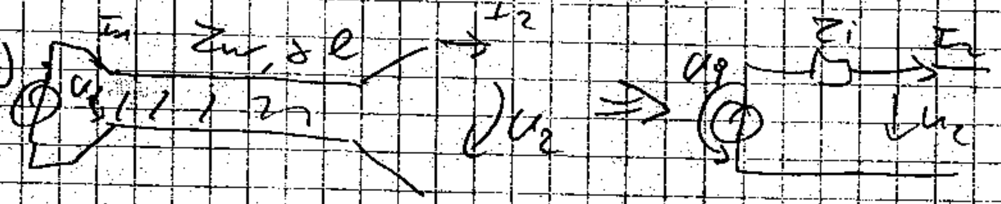


ges. resultierenden Wirbelverluste

8.) $\vec{B}(0) = \vec{\kappa} \times \frac{\vec{E}(0)}{c_0}$ im leeren Raum

ges.: q^e, $\vec{g}^e$, $\underline{\rho}^e$ durch w^e

9.)



geg. Zweitorgleichung $U_1 = x\, U_2 + \sim I_2$

$I_1 = y\, U_2 + \sim I_2$

ges. U_q & Z_i

(10) geg. $\int_{\partial A} s \times f\, ds = \int_A (n_1 \partial_2 f - n_2 \partial_1 f)\, dA$ → zeigt Gültig durch Anwenden des Satzes von (

$\int_{\partial A} \vec{s}\, f\, ds$ drücke dies koordinatenfrei aus

TET 2 ca. Juni 98

•) $f(r,\theta,\alpha) = r^2 \sin\theta \cos\alpha$

$\vec{r} \times \vec{\nabla} f = ?$

•) 3.2.2 Kugel

•) magn. Vektorpot. A

$\vec{B} = (\cdot \; \vec{e}_z \; \ldots \; \vec{e}_y)$

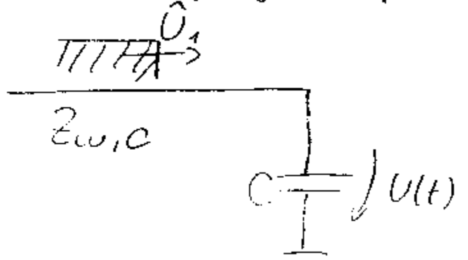
•) 2.3.18

•) $\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) w(\vec{r}, t) = -f(\vec{r}, t)$

$W(\vec{r}, j\omega) = 2\pi \ldots -$

F(

welcher Glg. genügen Fourierkoeff.?

•) 

Sprungwelle

Verlauf v. U(t) ?

•) $\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} C_n f^{(2n)}(x)\, y^{2n}$

C_n ?

$\varphi(x,0) = f(x)$

$f(x, -y) = f(x, y)$ gerade Fkt

•) <u>3.5.7</u>

① $H(\vec r) = C(3x^2y - y^2z + 2z^2x)$; $P(1,1,1)$ Ableitung in Richtung $\vec r$

$$(\vec\nabla H)\cdot\vec e\big|_{1,1,1} = C\left[(6xy+2z^2)\vec e_x + (3x^2-2zy)\vec e_y + (-y^2+4zx)\vec e_z\right]\frac{(x\vec e_x+y\vec e_y+z\vec e_z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = C\frac{12}{\sqrt3} = C\sqrt3\cdot4$$

---

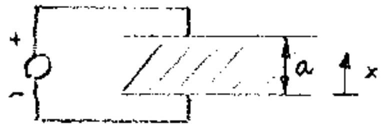
② $\vec\nabla\times\vec H - \partial_t\vec D = \vec J - \vec\nabla G$; $\vec\nabla\vec D = \rho + \mu_0\varepsilon_0\partial_t G$ Wann ist die Kontinuitätsgleichung erfüllt?

$$\underbrace{\vec\nabla\cdot(\vec\nabla\times\vec H)}_{\emptyset} - \underbrace{\vec\nabla\partial_t\vec D}_{\partial_t\rho+\mu_0\varepsilon_0\partial_t^2G} = \vec\nabla\cdot\vec J - \nabla^2 G \Rightarrow \mu_0\varepsilon_0\partial_t^2G+\nabla^2G=0 \Rightarrow \vec\nabla\cdot\vec J = -\partial_t\rho$$

---

③ $\varepsilon(x)=\varepsilon_0\frac{2a}{a+x}$; $C'=?$

$\rho^f, \sigma^f = ?$

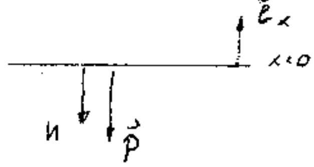


$$U=\int E\,dx = \int \frac1\varepsilon D\,dx = \int_0^a \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{a+x}{2a} D\,dx = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{3a}{4}D \Rightarrow \vec D = \frac43\varepsilon_0\frac Ua(-\vec e_x)$$

$$\vec E = \frac1\varepsilon\cdot D = \frac{2U}{3a^2}(a+x)(-\vec e_x);\quad \vec P = \vec D - \varepsilon_0\vec E = \varepsilon_0 U\left(\frac{4}{3a} - \frac{2}{3a^2}(a+x)\right)(-\vec e_x)$$

$$\rho^f = -\vec\nabla\vec P = -\frac{2}{3a^2}\varepsilon_0 U$$

$$\sigma^f_{x=0} = -n\cdot[\![\vec P]\!]\big|_{x=0} = -\varepsilon_0 U\left(\frac{4}{3a}-\frac{2}{3a}\right) = -\varepsilon_0 U\frac{2}{3a}$$



$$\sigma^f_{x=a} = -n[\![\vec P]\!]\big|_{x=a} = 0 \Rightarrow \varepsilon(a)=\varepsilon_0 \;!!$$

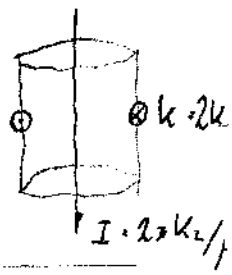
---

④ $\vec A = K_1\rho\,\vec e_x + K_2\ln\frac{\rho}{a}\vec e_z$ $\vec B=?$ Vektorlinien $\vec B$; wie kann $\vec B$ erzeugt werden?

$$\vec B = \vec\nabla\times\vec A = -\vec e_\alpha\partial_\rho[K_2\ln(\tfrac\rho a)] + \vec e_z\frac1\rho\partial_\rho(K_1\rho^2)] = -\frac{K_2}{\rho}\vec e_\alpha + 2K_1\vec e_z$$

B sind Schraubenlinien um die z-Achse $\tan(\alpha) = -\frac{K_1}{K_2}\cdot2\rho$

Kreiszylinderspule und Linienleiter



---

⑥ $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow E_0$ isolierende Kugel ; $\vec E(a)=?$

$\vec P = \frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+2}3\varepsilon_0\vec E_0$ $r<a$

$$\vec P = P_0\vec e_z = P_0(\cos\theta\,\vec e_r - \sin\theta\,\vec e_\theta);\quad \sigma^f = -\vec n[\![\vec P]\!] = -\vec e_r\left(-P_0(\cos\theta\,\vec e_r - \sin\theta\,\vec e_\theta)\right) = P_0\cos\theta$$

$$E(a) = \sigma^f\cdot\frac1{\varepsilon_0}\cdot\vec e_r = \frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+2}3E_0\cos\theta\,\vec e_r$$

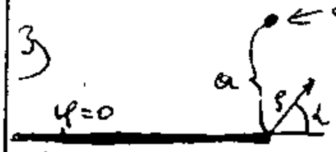
TET 2 Prüfung 6.5.98

1) geg: $\oint_{\partial A} s_x \vec{f}\, ds = \int_A (n_y f_z - n_z f_y)\, dA$ ges.: - Angabe beweisen

$\oint_{\partial A} \vec{s}\, f\, ds = ?$

2) geg.: $\varepsilon = \varepsilon_x \vec{e}_x \otimes \vec{e}_x + \varepsilon_y \vec{e}_y \otimes \vec{e}_y + \varepsilon_z \vec{e}_z \otimes \vec{e}_z$ ges.: Laplace-ähnliche Diff gl.

ladungsfrei herleiten (Potential einführ

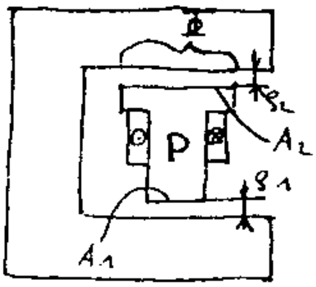
3) 

$\varphi(\varrho, \alpha) = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \ln \left\{ \frac{1 + \left(\frac{\varrho}{a}\right)^{2\nu} + 2\left(\frac{\varrho}{a}\right)^{\nu} \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \left(\frac{\varrho}{a}\right)^{2\nu} - 2\left(\frac{\varrho}{a}\right)^{\nu} \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \right\}$

$\nu = \begin{cases} \varrho < a & +\frac{1}{2} \\ \varrho > a & -\frac{1}{2} \end{cases}$

ges.: $C' = ?$ Hilfe: $(1+\delta)^{\nu} = 1 + \nu\delta$ für $|\delta| \ll 1$

4) Bspl.: A2.3.3. Übungsskript Pointing-Fluss in einem Leiter

5) 

Φ, A_1, A_2 bekannt

$A_1 < A_2$

ges.: Kraft und Kraftrichtung an Körper P

6) $\vec{B} = \frac{B_0}{\pi} (x^2 \vec{e}_x - 2xy \vec{e}_y)$

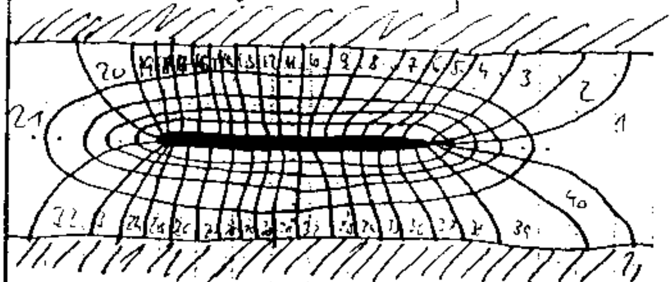
ges.: Maxwellgeeichtes Vektorpoten

7) Bspl.: 3.3.1. Übungsskript Punktuelle Ladungsinjektion

8) $\vec{E} = \frac{\hat{E}_0}{\varepsilon_0} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cos(\omega t)\, \vec{e}_z$ $a = 10\,mm$; $b = 10\,mm$; $L = 20\,mm$

Hohlraumresonator ges.: Schwingfrequenz $+ \vec{B}$-Feld

9) Doppelleitung - verlustfrei



... 40 Flusslinien $\stackrel{\text{Fluss}}{=} \varepsilon \Delta\varphi$

... 5 Potentialschritte $\cdot \Delta\varphi$

ges: $Z_W = ?$

siehe Bspl. $\approx$ 5.3.2. Leitungsparameter

10) $\vec{J} = \frac{I_0}{a^2 \pi} \left[\frac{\varrho z\, \vec{e}_\varrho + (\varrho^2 + z^2)\, \vec{e}_z}{(\varrho^2 + z^2)^2} \right]$ ges.: $\vec{H}$-Feld = ?

$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \dot{\vec{D}}$

$\varphi_{m_i} = A\varrho\cos\vartheta \qquad \varphi_{ma} = B\varrho^{-2}\cos\vartheta$

1) $n\,[\![B]\!] = 0$ $\qquad$ 2) $\vec{n}\times[\![\vec{H}]\!] = \cancel{\vec{K}} + \vec{n}\times[\![\vec{M}]\!]$

$\vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi_m \qquad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} + \vec{M} \qquad \vec{K}=\vec{0}$

1) $B_{\varrho i} = B_{\varrho a}$ $\qquad \vec{H}_i = -A\cos\vartheta\,\vec{e}_\varrho + A\sin\vartheta\,\vec{e}_\vartheta \quad \boxed{M_0\cos\vartheta\,\vec{e}_\varrho}$ M_ϑ

$\vec{H}_a = +2B\varrho^{-3}\cos\vartheta\,\vec{e}_\varrho + B\frac{1}{\varrho^3}\sin\vartheta\,\vec{e}_\vartheta$

$+A\cancel{\cos\vartheta} = -2B\frac{1}{a^3}\cancel{\cos\vartheta} + M_0\cancel{\cos\vartheta}$

2) $\vec{n}\times[\![\vec{H}]\!] - \vec{n}\times[\![\vec{M}]\!] = 0$

$\left(+B\frac{1}{a^3}\cancel{\sin\vartheta} + A\cancel{\sin\vartheta}\right) - \left(M_0\cancel{\sin\vartheta}\right) = 0$

$+B\frac{1}{a^3} + A - M_0 = 0 \Rightarrow +B\frac{1}{a^3} - 2B\frac{1}{a^3} + M_0 - M_0 = 0 \Rightarrow B = 0$

$A = M_0$

$\vec{H}_i = M_0\sin\vartheta\,\vec{e}_\vartheta \qquad \vec{H}_a = \vec{0}$

•) TM-Welle

$\vec{E} = E_z\vec{e}_z + \underbrace{\frac{ik}{\varkappa^2}\vec{\nabla}_\perp E_z}_{\vec{E}_\perp} \qquad \vec{H}_\perp = \vec{e}_z\times\frac{\vec{E}_\perp}{Z} \qquad Z = \frac{k}{\varepsilon\omega}$

$\nabla_\perp^2 E_z = -\varkappa^2 E_z \qquad \varkappa^2 = \mu\varepsilon\omega^2 - k^2$

Beweise mit Hilfe der 1. Green Identität, daß der Impulsfluß
$P = \frac{\varepsilon\omega k}{2\varkappa^2 Z}\int_A |E_z|^2\,dA$ ist.

$S = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\vec{E}\times\vec{H}^* = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\left(E_z\vec{e}_z + \frac{ik}{\varkappa^2}\vec{\nabla}_\perp E_z\right)\times\left(\vec{e}_z\times\frac{\vec{E}_\perp}{Z}\right)^*\right] =$

$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[E_z\vec{e}_z\times\vec{e}_z\times\frac{\vec{E}_\perp}{Z} + \frac{ik}{\varkappa^2}\vec{\nabla}_\perp E_z\times\vec{e}_z\times\frac{\vec{E}^*}{Z}\right] =$

$$\vec B = \text{rot}\,\vec A = \text{rot}\left(\frac{1}{c_0^2}\,\frac{\partial_t\, p(t-\frac{r}{c_0})\,\vec e_z}{4\pi\varepsilon_0 r}\right) =$$

$$\text{rot}\left(\frac{1}{c_0^2\, 4\pi\varepsilon_0 r}\,\partial_t\, p(t-\frac{r}{c_0})\left[\cos\theta\,\vec e_r - \sin\theta\,\vec e_\theta\right]\right) =$$

$$= \cancel{\frac{\partial_\varphi^{\to 0}}{r\sin\theta}\,\frac{\partial_t\, p(t-\frac{r}{c_0})\sin\theta}{c_0^2\, 4\pi\varepsilon_0 r}}\,\vec e_r + \frac{1}{r}\,\partial_r\left(\cancel{r}\,\frac{\partial_t\, p(t-\frac{r}{c_0})}{c_0^2\, 4\pi\varepsilon_0 \cancel{r}}\right)\sin\theta\, -$$

$$\partial_\theta\,\frac{\cos(\theta)\,\partial_t\, p(t-\frac{r}{c_0})}{c_0^2\, 4\pi\varepsilon_0 r}\Bigg)\vec e_\varphi = \frac{1}{r}\left(\partial_r\,\frac{\partial_t\, p(t-\frac{r}{c_0})\sin\theta}{c_0^2\, 4\pi\varepsilon_0} + \frac{\partial_t\, p(t-\frac{r}{c_0})\sin\theta}{c_0^2\, 4\pi\varepsilon_0\, r}\right)\vec e_\varphi$$

speziell $p(t) = \frac{p_0}{t_0}\,t \quad \partial_t\, p(t) = \frac{p_0}{t_0}$

$$\vec B = \frac{\mu_0}{r\,4\pi}\sin\theta\left(\cancel{\ \ } + \frac{p_0}{t_0 r}\right)\vec e_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi}\sin\theta\left(\frac{p_0}{t_0 c_0^2 t_0^2}\right)\vec e_\varphi$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\sin\theta\,\frac{p_0}{t_0^3 c_0^2}$$

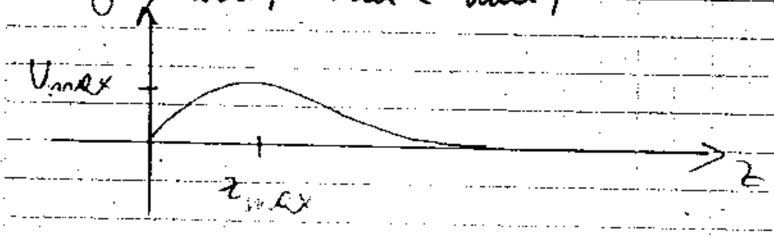
•) Leitung mit vernachlässigbarem L', G'

$\partial_z U + R' I = 0 \qquad \partial_z I + C'\partial_t U = 0$

ein Flußimpuls bewirkt eine Spannungswelle $U(z,t) = \frac{\phi_0}{\sqrt{\pi}\,t_1}\,\frac{z}{2}\sqrt{\frac{R'C'}{t_1}}\exp\left(-\frac{z^2}{4}\left(\frac{R'C'}{t_1}\right)\right)$.

ges: Breite des Spannungsverlaufs für $t = t_1$

z_{max}, $U_{max}(z_{max})$



$$U(z) = C z \exp(-z^2 D) \qquad C = \frac{\phi_0}{\sqrt{\pi}\,t_1}\sqrt{\frac{R'C'}{t_1}}\,\frac{1}{2} \quad D = +\frac{R'C'}{4t_1}$$

$$\frac{dU}{dz} = C\exp(-z^2 D) + C z(-2zD)\exp(-z^2 D) = 0$$

$$1 - 2z^2 D = 0$$

$\nabla^2 \varphi = 0$

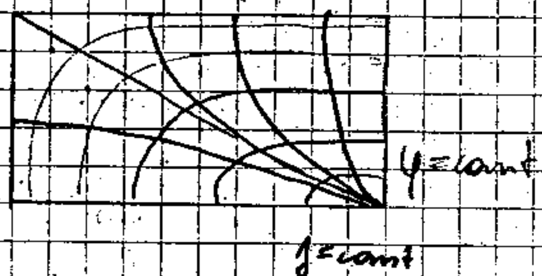
$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0 \qquad X(x) = A \cdot x \qquad Y(y) = B \cdot y$

$\varphi(x,y) = AB\,xy \qquad \varphi(a,b) = U = AB\,ab \Rightarrow AB = \frac{U}{ab}$

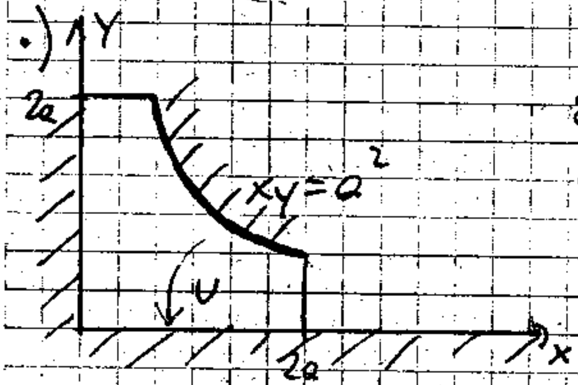
$\varphi(x,y) = \frac{U}{ab} xy$

$\vec{E} = -\frac{U}{ab} y \vec{e_x} - \frac{U}{ab} x \vec{e_y}$

$\vec{J} = \gamma \vec{E}$



•)



$\frac{\partial}{\partial z} = 0$

ges. Fluß der aus der dicken Fläche herausströmt (längsbezogen)

Hinweis: elektr. Vektorpotential

$\nabla^2 \varphi = 0 \qquad X(x) = Ax \qquad Y(y) = By$

$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \cancel{k^2}$

$\varphi = AB\,xy$

$\varphi(a^2) = U = ABa^2 \quad \varphi = \frac{U}{a^2} xy$

$\vec{E} = -\frac{U}{a^2} y \vec{e_x} - \frac{U}{a^2} x \vec{e_y}$

$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = -\vec{e_z} \times \vec{\nabla} V$

$$\begin{pmatrix} -\frac{U}{a^2} y \\ -\frac{U}{a^2} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial_x \frac{V}{\varepsilon} \\ \partial_y \frac{V}{\varepsilon} \\ 0 \end{pmatrix}$$

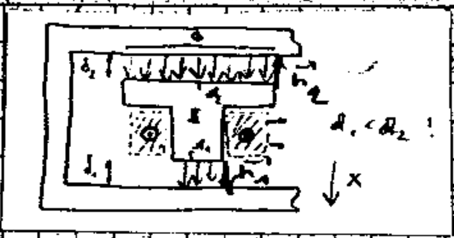
$-\frac{U}{a^2} y = \partial_y \frac{V}{\varepsilon} \qquad V = -\frac{\varepsilon U}{a^2} \frac{y^2}{2} + C(x)$

$+\frac{U}{a^2} x = \partial_x \frac{V}{\varepsilon}$

$V = \frac{U}{a^2} \varepsilon x = C'(x) \Rightarrow C(x) = \frac{U\varepsilon}{a^2} \frac{x^2}{2}$

$V = \frac{U\varepsilon}{2} (x^2 - y^2)$

•) geg: magnet. Anordnung mit konst. Fluß ϕ, beweglicher Teil II, keine Streuung



ges: resultierende Kraft auf Teil II, Richtung der Kraft

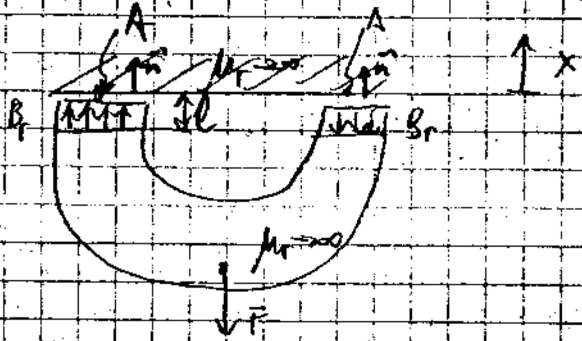
$$\vec{F} = \left[\int_{A_1} \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{n}\vec{B}\vec{B} - \frac{1}{2}B^2\vec{n}\right) dA_1 + \int_{A_2} \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{n}\vec{B}\vec{B} - \frac{1}{2}B^2\vec{n}\right) dA_2\right.$$

$$\left[\frac{1}{\mu_0}\frac{1}{2}B_1^2 A_1 - \frac{1}{\mu_0}\frac{1}{2}B_2^2 A_2\right]\vec{e_x} = \underline{\frac{1}{2\mu_0}\phi^2\left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2}\right)\vec{e_x}}$$

$$\phi = B \cdot A \Rightarrow B_1 = \frac{\phi}{A_1} \quad B_2 = \frac{\phi}{A_2}$$

•) geg: A, B_r, l

ges: Haftkraft eines Dauermagneten.



$$\vec{F} = \int_A \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{n}\vec{B}\vec{B} - \frac{1}{2}B^2\vec{n}\right) dA = \cancel{2}\frac{1}{\mu_0}\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \underline{B_r^2 A \vec{e_x}}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} + \vec{M}$$

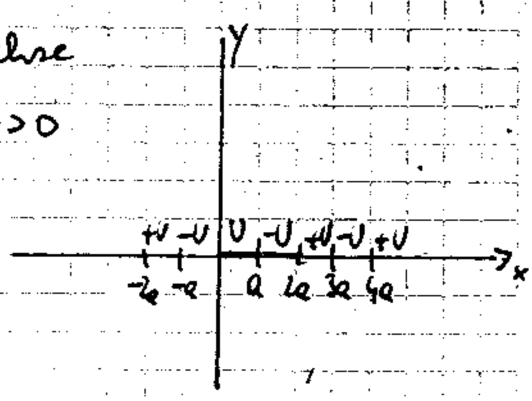
$$\vec{B_r} = \mu_0 \vec{M}$$

•) geg: Spannungsverteilung auf x-Achse

ges: Potential auf der Halbebene $y > 0$

Randbed.: $\varphi(x,0) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{4U}{n\pi} \sin\frac{n\pi x}{a}$

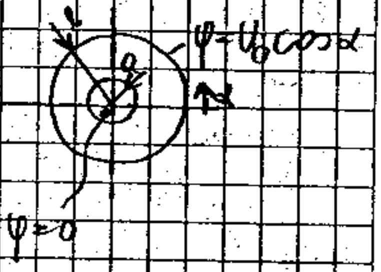
ges: geschlossene Form von φ



$$\varphi = \int \vec{\nabla} \, d\vec{s} = V\left(2a, \frac{a}{2}\right) - V\left(\frac{a}{2}, 2a\right) = \frac{U\varepsilon}{2a^2}\left[\left(4a^2 - \frac{a^2}{4}\right) - \left(\frac{a^2}{4} - 4a^2\right)\right]$$

$$= \frac{U\varepsilon}{2}\underbrace{\left(8 - \frac{1}{2}\right)}_{\frac{15}{2}} = \underline{\underline{\frac{U\varepsilon\, 15}{4}}}$$

•) geg: ringförmige Elektrodenanordnung mit Vorgabe des Potentials am Außenrand $\varphi(r=b) = U_0 \cos(\alpha)$



ges: Potentialverlauf $\varphi(r<b)$

$$\varphi = \sum_n A_n r^n \cos(n\alpha) + \sum_n B_n r^{-n} \cos(n\alpha)$$

$n=1$: $\quad \varphi = A r \cos\alpha + B \frac{1}{r} \cos\alpha$

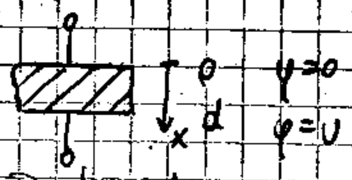
$\varphi(b,\alpha) = U_0 \cos\alpha = A b \cos\alpha + B \frac{1}{b} \cos\alpha \Rightarrow U_0 = Ab + B\frac{1}{b}$

$\varphi(a,0) = 0 = Aa + B\frac{1}{a} \Rightarrow Aa^2 + B = 0 \Rightarrow B = -Aa^2$

$U_0 = Ab - Aa^2\frac{1}{b} = A\left(b - \frac{a^2}{b}\right) \Rightarrow A = \frac{U_0}{b - \frac{a^2}{b}} = \frac{bU_0}{b^2 - a^2} \Rightarrow B = \frac{bU_0 a^2}{(b^2 - a^2)}$

$$\varphi = \frac{bU_0}{b^2 - a^2}\left[r\cos\alpha - a^2\frac{1}{r}\cos\alpha\right]$$

•) geg: Kondensator mit inhomogenem Materialverhalten $\varepsilon = \varepsilon_0 \frac{d}{x+d}$



ges: $\varphi(x)$, $\vec{E}(x)$, $\vec{D}(x)$

$\vec{\nabla}\vec{D} = 0 \Rightarrow D = \text{konst.}$

$$U = \int_0^d \vec{E}\, d\vec{s} = \int_0^d \frac{D}{\varepsilon}\, ds = \int_0^d \frac{D(x+d)}{\varepsilon_0 d}\, ds = \frac{D}{\varepsilon_0}\left(\frac{d}{2} + d\right) = \frac{D\, 3d}{2\varepsilon_0}$$

$$\underline{\underline{\vec{D} = \frac{2\varepsilon_0 U}{3d}\vec{e_x}}} \qquad \vec{E} = \frac{2\varepsilon_0 U(x+d)}{3d\,\varepsilon_0\, d}\vec{e_x} = \underline{\underline{\frac{2}{3}\frac{U(x+d)}{d^2}\vec{e_x}}}$$

$$\varphi(x) = -\int_0^x E\, dx = \underline{\underline{-\frac{2}{3}\frac{U}{d^2}\left(\frac{x^2}{2} + dx\right)}}$$

$$\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} \times \left[\!\!\left[\begin{pmatrix} C_2 2\cos\vartheta - C_1\cos\vartheta \\ C_2\sin\vartheta + C_1\sin\vartheta \\ 0\end{pmatrix}\right]\!\!\right] = -C_1\sin\vartheta - C_2\sin\vartheta = K_0\sin\vartheta$$

$$\Rightarrow -K_0 = C_1 + C_2$$

$$\vec{n}\cdot[\![\vec{B}]\!] = 0$$

$$-K_0 = 2C_2 + C_2 = 3C_2$$

$$C_2 2\cancel{\cos\vartheta} - C_1\cancel{\cos\vartheta} = 0$$

$$C_1 = 2C_2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{C_2 = -\frac{K_0}{3}}} \qquad \underline{\underline{C_1 = -\frac{2K_0}{3}}}$$

iii) $W_i = \int_V w\,dV = \int_V \frac{1}{2\mu_0}B^2\,dV = \frac{1}{2\cancel{\mu_0}}\mu_0^{\cancel{2}}\int_V \left(-\frac{2K_0}{3}\right)^2 dV =$

$$\frac{1}{\cancel{2}}\mu_0\frac{\cancel{4}K_0^2}{9}\cdot\frac{4a^3\pi}{3} = \frac{8}{27}K_0^2a^3\pi\mu_0$$

$$W_a = \int_{r=a}^{\infty}\int_{\vartheta=0}^{\pi}\int_{\alpha=0}^{2\pi}\frac{1}{2\cancel{\mu_0}}\cdot\mu_0^2\cdot\frac{K_0^2}{9}\cdot\frac{a^6}{r^6}\Big(\underbrace{2\cos\vartheta\,\vec{e}_r + \sin\vartheta\,\vec{e}_\vartheta}_{4\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta}\Big)^2 r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\alpha$$

$$= \frac{\mu_0}{2}\frac{K_0^2a^6}{9}\iiint_{r\,\vartheta\,\alpha}\frac{1}{r^4}\left(4\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta\right)\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\alpha =$$

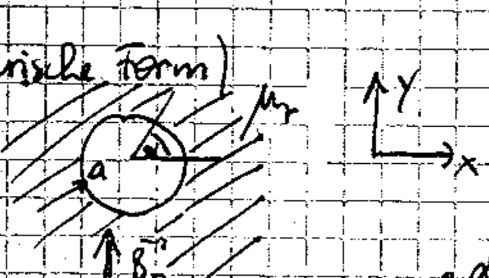
$$= \mu_0K_0^2a^3\pi\frac{4}{27} \qquad W_1 + W_2 = \frac{12}{27}K_0^2a^3\pi\mu_0 = \frac{LI^2}{2}$$

$$\frac{{}^{3}\cancel{12}}{27}\frac{N^2\cancel{I^2}}{\cancel{4a^2}}a^3\pi\mu_0 = \frac{L\cancel{I^2}}{2} \qquad \underline{L = \frac{6}{27}N^2a\pi\mu_0}$$

•) Hohlraum im magnet. Material (zylindrische Form)

für $r \gg a$ $\quad \vec{B} = \vec{B}_0$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

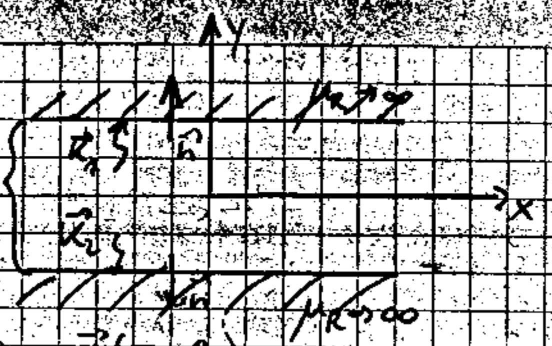


ges: ausgehend von Lösung der Gleichung $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{0}$ d.h. stromfrei

mit $\vec{A} = f(x, y, \alpha)$ bestimme man $\vec{B}$ im Hohlraum

•) $\vec{B} = B_0 \sin(4x)\,\vec{e}_y$ für $y=0$

ges. Flächenströme $\vec{K}_1, \vec{K}_2$



$\vec{n}\,[\vec{B}] = 0 \quad \vec{B}(x, -\frac{a}{2}) = B_0 \sin(4x)\,\vec{e}_y = \vec{B}(x, +\frac{a}{2})$

$\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ B_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y A_z - \cancel{\partial_z A_y} \\ -\partial_x A_z + \cancel{\partial_z A_x} \\ \cancel{\partial_x A_y - \partial_y A_x} \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{\vec{\nabla}\vec{A} = \vec{0}}}$

$\vec{A} = +\frac{1}{4} B_0 \cos(4x)\,\vec{e}_z \quad (y=0)$

$y = \pm a/2$: $\vec{n} \times [\![\vec{H}]\!]_{\text{Tangential}} = \vec{K} \qquad \vec{n} \times [\![\underbrace{\vec{B}}_{\vec{\nabla}\times\vec{A}}]\!] = \vec{K}\mu_0$

$[\![\vec{\nabla} \times \vec{A}]\!] = \vec{K}\mu_0 \times \vec{n} = \underline{\partial_y A} = -\mu_0 \vec{K}_1 \vec{e}_z = \mu_0 \vec{K}_2 \vec{e}_z$

nur 1 RB !! ⇒ nur 1 Konst.

$A(x,y) = A\left(e^{ky} + e^{-ky}\right)\cos kx$

$A(x,0) = A \;\cdot\cdot \cos kx = +\frac{1}{4} B_0 \cos(4x) \Rightarrow k = 4 \quad A = +\frac{B_0}{4}$

$\vec{A} = +\frac{B_0}{4}(\cosh 4y)\cos 4x\,\vec{e}_z$

$\vec{K}_1 = 4\frac{1}{\mu_0}\frac{B_0}{4}\sinh(2a)\cos(4x)\,\vec{e}_z$

$\vec{K}_2 = -4\frac{1}{\mu_0}\frac{B_0}{4}\sinh(2a)\cos(4x)\,\vec{e}_z$

•) μ_0 (M↑) $\vec{M}$, μ_0 Man berechne die magnetische Feldstärke $\vec{H}$ innerhalb u. außerhalb der Kugel mit Hilfe des magn. Skalarpotentials. $\vec{M} = M\vec{e}_z = M(\cos\vartheta\,\vec{e}_\varrho - \sin\vartheta\,\vec{e}_\vartheta)$ Radius $= a$

$\varphi_m = \sum (A_k \varrho^k + B_k \varrho^{-(k+1)})\cos\vartheta$

Innenfeld

$$= \frac{1}{2} Re \left[\left(\frac{jk}{\varkappa^2} \vec{\nabla}_\perp \mathcal{E}_z \right) \times \left(\vec{e}_z \times \frac{\vec{\mathcal{E}}_\perp}{Z} \right)^* \right] =$$

$$= \frac{1}{2} Re \left[\left(\frac{jk}{\varkappa^2} \vec{\nabla}_\perp \mathcal{E}_z \right) \times \left(\vec{e}_z \times \frac{-jk \vec{\nabla}_\perp \mathcal{E}_z^*}{\varkappa^2 Z} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{k^2}{\varkappa^4 Z} Re \left[\vec{e}_z \left(\vec{\nabla}_\perp \mathcal{E}_z \cdot \vec{\nabla}_\perp \mathcal{E}_z^* \right) - \cancel{\nabla_\perp \mathcal{E}_z^* \left(\vec{\nabla}_\perp \mathcal{E}_z \cdot \vec{e}_z \right)} \right] \qquad \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

$$= \frac{1}{2} \frac{k^2}{\varkappa^4 Z} Re \left[\vec{e}_z \left(\vec{\nabla}_\perp \mathcal{E}_z \cdot \vec{\nabla}_\perp \mathcal{E}_z^* \right) \right] =$$

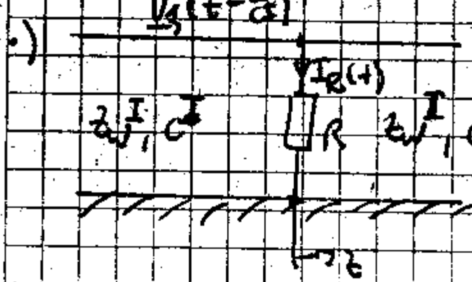
Green: $\int \vec{\nabla}_\perp \cdot (u \vec{\nabla}_\perp v)\, dV = \int \vec{n} (u \vec{\nabla}_\perp v)\, dA \qquad u = \mathcal{E}_z \quad v = \mathcal{E}_z^*$

$$= \int_V (\vec{\nabla}_\perp u)(\vec{\nabla}_\perp v) + u \nabla_\perp^2 v \, dV = \int_A (u\, \partial_n v)\, dA$$

$$\int_V (\vec{\nabla} u)(\vec{\nabla} v)\, dV = \cancel{\int_{\mathcal{E}} \mathcal{E}_z \underbrace{\partial_n}_{\vec{n} \cdot \partial_z \vec{e}_z} \mathcal{E}_z^*\, dA} - \int_{\mathcal{E}} \mathcal{E}_z \nabla_\perp^2 \mathcal{E}_z^*\, dV \qquad \vec{\nabla} = \vec{\nabla}_\perp + \partial_z \vec{e}_z$$

$$= \frac{1}{2} \frac{k^2}{\varkappa^4 Z} \int -\cancel{\varkappa^2} |\mathcal{E}_z|^2\, dV = \frac{1}{2} \frac{k^2}{\varkappa^2 Z} \int_V |\mathcal{E}_z|^2\, dV$$

•)



a) Wie groß muss R sein, damit keine Reflexion auftritt

b) $i_R(t)$

a) Abschluss muss Z_W^I sein $= R \,\|\, Z_W^{II} = \frac{R \cdot Z_W^{II}}{R + Z_W^{II}}$

$$Z_W^I R + Z_W^I Z_W^{II} = R Z_W^{II}$$

$$R (Z_W^I - Z_W^{II}) = - Z_W^I Z_W^{II}$$

$$\underline{\underline{R = \frac{Z_W^{II} Z_W^I}{Z_W^{II} - Z_W^I}}}$$

•) geg: Dipolantenne Fernfeld $kr \gg 1$ $\vec{E} = c_0 \vec{B} \times \vec{e_r} =$

$$= \frac{100V}{r} \sin\theta \cos(\omega t - kr) \vec{e_\vartheta}$$

ges: zeitlicher Mittelwert der gesamten Strahlungsleistung

$$\vec{E} = \left[\frac{100V}{r} \sin\theta\, e^{j(\omega t - kr)}\right] \vec{e_\vartheta} \qquad \text{Fernfeld } \vec{H} = \frac{\vec{E}}{Z} \vec{e_\alpha}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2} Re\left(\vec{E} \times \vec{H}^*\right) = \frac{1}{2} \frac{100^2}{Z r^2} \sin^2\theta\, \vec{e_r}$$

$$P = \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \frac{1}{2} \frac{100^2}{Z r^2} r^2 \sin^3\theta\, d\theta\, d\alpha = \frac{100^2}{4} 4\pi \frac{1{,}33 V^2}{377\Omega} = 111{,}2\, W$$

•) Vektorfeld läßt sich in 2 Komponenten zerlegen

$$\vec{f} = \vec{f_P} + \vec{f_T} \quad \text{mit} \quad \vec{f_T} = \vec{\nabla} \times (\vec{r} P) \qquad \vec{f_P} = \vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times (\vec{r} T)]$$

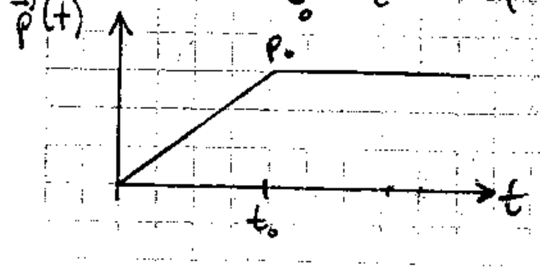
Nimmt man für $\vec{f}$ einerseits die magnet. Flußdichte und andererseits das magnet. Vektorpotential (mit Maxwell Eichung) so sieht man, daß $\vec{A_T}$ auf ein $\vec{B_P}$ führt (T, P Skalarfelder, $\vec{r}$ Ortsvektor) Man zeige nun umgekehrt, daß $\vec{A_P}$ auf ein $\vec{B_T}$ führt (Feldtyp)

$$\vec{A_P} = \vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times (\vec{r} T)] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot (\vec{r} T)) - \nabla^2 (\vec{r} T)$$

$$\vec{B_T} = rot\, \vec{A_P} = \vec{\nabla} \times \Big[\underbrace{\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot (\vec{r} T))}_{\emptyset \quad \text{rot grad} f = 0}\Big] - \vec{\nabla} \times \Big(\underbrace{\nabla^2 (\vec{r} T)}_{\vec{r} \underbrace{\nabla^2 T}_{P} + T \underbrace{\nabla^2 \vec{r}}_{\emptyset}}\Big) = o.k.$$

•) geg: Dipol $\vec{p}(t) = p(t) \vec{e_z}$

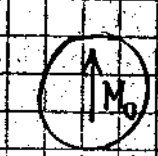
$$\vec{A} = \frac{1}{c_0^2} \partial_t \vec{\pi} \qquad \varphi = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi} \qquad \vec{\pi}(\vec{r}, t) = \frac{p(t - \frac{r}{c_0}) \vec{e_z}}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



ges: $\vec{B}$ zuerst allgemein, dann speziell für den geg. Verlauf $p(t)$ mit $r = c_0 t_0$

Prüfungsbeispiele

•) Fiktive Stromdichte von homogen magnetisierter Kugel



$$\vec{j}^f = \vec{\nabla}\times\vec{M} = 0 \qquad \vec{K}^f = \vec{n}\times[\![\vec{M}]\!] = \begin{pmatrix}\cos\varphi\sin\vartheta\\ \sin\varphi\sin\vartheta\\ -\cos\vartheta\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\M_0\end{pmatrix}$$

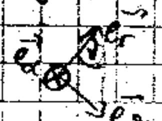
$$\vec{n} = \frac{\vec{x}_\varphi\times\vec{x}_\vartheta}{|\vec{x}_\varphi\times\vec{x}_\vartheta|} = \frac{1}{|\,|}\begin{pmatrix}-\sin\varphi\sin\vartheta\\ \cos\varphi\sin\vartheta\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\vartheta\\ \sin\varphi\cos\vartheta\\ -\sin\vartheta\end{pmatrix} = \frac{1}{|\,|}\begin{pmatrix}-\sin^2\vartheta\cos\varphi\\ -\sin^2\vartheta\sin\varphi\\ -\sin^2\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta-\cos^2\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta\end{pmatrix}$$

$$= \frac{-\cancel{\sin\vartheta}}{\sqrt{\sin^4\vartheta\,\cancel{\cos^2\varphi}+\sin^4\vartheta\,\cancel{\sin^2\varphi}+\cancel{\sin^2\vartheta}\cos^2\vartheta}}\begin{pmatrix}+\sin\vartheta\cos\varphi\\ \sin\vartheta\sin\varphi\\ \cos\vartheta\end{pmatrix}$$

$$\vec{K}^f = \begin{pmatrix}-\sin\varphi\sin\vartheta\,M_0\\ +\cos\varphi\sin\vartheta\,M_0\\ 0\end{pmatrix} = M_0\sin\vartheta\,\vec{e}_\varphi$$

•) homogen polarisierte Kugel umgeben von einer ideal leitfähigen Schicht

$\sigma=0$ ($\vec{j}=0$) ges.: $\vec{D}, \vec{E}, \rho^W, \sigma^W$ $\qquad \vec{P} = P\vec{e}_z$



$$\underset{\emptyset}{\rho} = \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{D}}_{\substack{\uparrow\\ \text{konst}\\ \emptyset}} - \underset{\emptyset}{\cancel{\vec{\nabla}\cdot\vec{P}_{\text{konst}}}} \qquad \vec{P} = P_0(\cos\vartheta\,\vec{e}_r + \sin\vartheta\,\vec{e}_\vartheta)$$

$\Rightarrow \rho^W = \underline{\underline{0}}$

$$\sigma^f = -\vec{n}\cdot[\![\vec{P}]\!] = -\vec{e}_r\cdot P_0(\cos\vartheta\,\vec{e}_r - \cancel{\sin\vartheta\,\vec{e}_\vartheta}) = -P_0\cos\vartheta$$

$$\underbrace{\vec{n}\cdot[\![\vec{D}]\!]}_{\emptyset} = \sigma^W - \sigma^f \Rightarrow \underline{\underline{\sigma^W}} = \sigma^f = \underline{\underline{-P_0\cos\vartheta}}$$

$\vec{n}\times[\![\vec{E}]\!] = 0 \Rightarrow E_\vartheta = 0$ (da ideal leitfähig)

$$\vec{P} = (\varepsilon-\varepsilon_0)\vec{E} \Rightarrow \underline{\underline{\vec{E}}} = \frac{\vec{P}}{\varepsilon-\varepsilon_0} = \underline{\frac{1}{\varepsilon-\varepsilon_0}P_0(\cos\vartheta\,\vec{e}_r - \cancel{\sin\vartheta\,\vec{e}_\vartheta})}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0\frac{1}{\varepsilon-\varepsilon_0}P_0\cos\vartheta\,\vec{e}_r + P_0(\cos\vartheta\,\vec{e}_r + \sin\vartheta\,\vec{e}_\vartheta) =$$

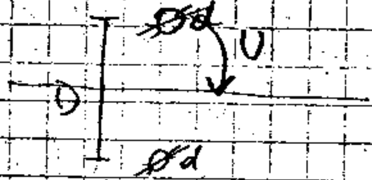
$$= \cancel{P_0\frac{\varepsilon}{\varepsilon-\varepsilon_0}\cos\vartheta\,\vec{e}_r + P_0\sin\vartheta\,\vec{e}_\vartheta}$$

Normalkomponente verschwindet.

iii) $i_R(t) = \frac{U_1(t)}{R}$ ξ

•) Für eine verzerrungsfreie Doppelleitung soll eine Formel für die Wellenimpedanz hergeleitet werden. (geg: d, D, μ)

$$\vec E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varrho}\vec e_\varrho$$



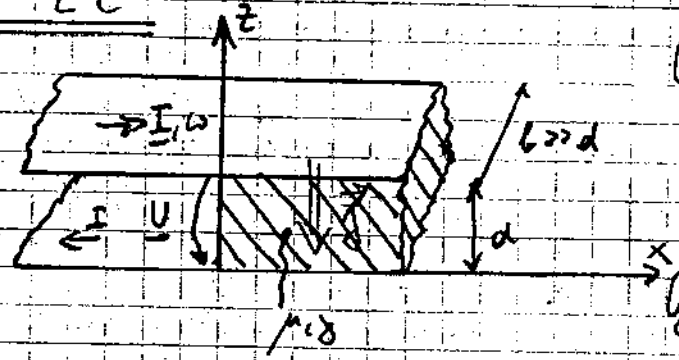
$$U = \int_{d/2}^{D/2} \vec E \cdot d\vec s = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{D}{d}\right) \qquad \tau = C'U \Rightarrow C' = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{D}{d}\right)}$$

$\varepsilon \to \frac{1}{\mu}$
Kehrwert
$\Rightarrow L'$

$$L' = \mu\frac{\ln\left(\frac{D}{d}\right)}{2\pi} \qquad Z = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \sqrt{\left[\frac{\ln\left(\frac{D}{d}\right)}{2\pi}\right]^2\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{\ln\frac{D}{d}}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$c^2 = \frac{1}{L'C'}$$

•)



Geg: $\vec J(x,t) = \mathrm{Re}\left[\hat J_0 e^{j\omega t-(1+j)\frac{x}{\delta}}\right]\vec e_z$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\gamma\omega}}$$

Ges: $\underline Z = \frac{\underline U}{\underline I}$ Verlauf von $\underline Z$ als Fkt. von ω

$$\vec H = \int(\vec J\cdot\vec e_z)\,dx = \mathrm{Re}\left(-\frac{\delta}{1+j}\hat J_0 e^{j\omega t-(1+j)\frac{x}{\delta}}\right)\vec e_y = \mathrm{Re}\left(\underbrace{-\frac{\delta}{1+j}\hat J_0}_{\hat H_0} e^{-\frac{x}{\delta}}e^{j(\omega t-\frac{x}{\delta})}\right)$$

$$\vec E = \frac{\vec J}{\gamma} = -\mathrm{Re}\left[\frac{\hat H_0}{\gamma}\frac{1+j}{\delta}e^{j\omega t-(1+j)\frac{x}{\delta}}\right]\vec e_z = \mathrm{Re}\left(\frac{\hat H_0}{\gamma}\frac{1+j}{\delta}e^{-\frac{x}{\delta}}e^{j(\omega t-\frac{x}{\delta})}\right)\vec e_z$$

$$\langle S\rangle = \frac{1}{2}\left(\hat{\vec E}\cdot\hat{\vec H}^*\right) = \frac{1}{2}\frac{\hat I^2\sqrt2}{b^2\gamma\delta}e^{-2\frac{x}{\delta}}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\hat I^2 Z^*}{2\cdot b\cdot d} =$$

$H\cdot b = I \quad B b = \mu I$ Durchflutungssatz

$$\underline Z' = \frac{d\sqrt2}{b\gamma\delta}e^{-2\frac{x}{\delta}} \qquad \underline Z = \frac{\underline U}{\underline I}$$

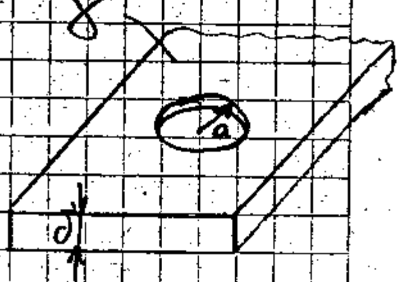
Generell stromfrei ⇒ magnet. Skalarpotential verwenden

$$\vec{H}(y=0) = \frac{\hat{B}}{\mu_0} \sin\left(\frac{\pi}{\tau_p} x\right)\vec{e_y} = -\vec{\nabla}\varphi_m = -\begin{pmatrix}\partial_x \\ \partial_y \\ 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\varphi_m \\ \varphi_m \\ \varphi_m\end{pmatrix}$$

$$\varphi_m(\theta) = -\frac{\hat{B}}{\mu_0} \sin\left(\frac{\pi}{\tau_p} x\right) \cdot y + \cancel{C(x)}$$

$$y = -\frac{\varphi_m \cdot \mu_0}{\hat{B}\sin(\;)} = +\frac{V_0 \mu_0}{\hat{B}\sin\left(\frac{\pi}{\tau_p}x\right)}$$

•) geg: Platte mit Dicke δ mit (ohne) Loch:



ohne Loch: $\vec{J} = J_0 (\cos \ldots)$

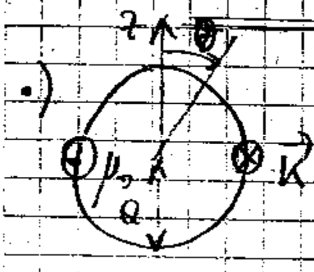
mit Loch: $\vec{J} = J_0 + J_0 \frac{\rho^2}{a^2}(\cos \ldots)$

ges: Leistungsverlust, der durch das Loch entsteht.

$$P = \int_V \frac{J^2}{\gamma} dV = \int_{\rho=0}^{a} \int_0^{2\pi} \int_{z=0}^{\delta} \frac{J_0^2 \rho^4}{a^4} \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz = J_0^2 \frac{1}{a^4} 5 \frac{\rho^6}{6} \quad 2\pi\delta \Big|_0^a$$

$$= J_0^2 \cdot \frac{10 a^2 \pi \delta}{6}$$

•)



geg: Kugel $\vec{K} = K_0 \sin\theta \, \vec{e_\alpha}$ $\quad K_0 = \frac{NI}{2a}$

innen $\vec{H} = C_1 \vec{e_z}$

außen $\vec{H} = C_2 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \left[2\cos(\theta)\vec{e_r} + \sin\theta \, \vec{e_\theta}\right]$

ges: i): C_1, C_2

ii) Induktivität der Kugel (Hinweis über Energie)

i) $\vec{n} \times [\![\vec{H}]\!] = \vec{K}$

$x = r\cos\alpha \sin\vartheta \qquad \vec{e_\rho} = \cos\alpha\sin\vartheta\,\vec{e_x} + \sin\alpha \ldots$

$y = r\sin\alpha\sin\vartheta$

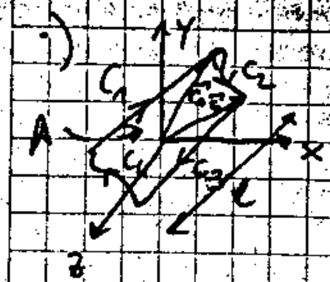
$z = r\cos\vartheta$

$\vec{e_\vartheta} = \cos\alpha\cos\vartheta\,\vec{e_x} + \sin\alpha\cos\vartheta\,\vec{e_y} - \sin\ldots$

$\vec{e_\alpha} = -\sin\alpha\,\vec{e_x} + \cos\alpha\,\vec{e_y}$

$\vec{e_z} = \cos\vartheta\,\vec{e_\rho} - \sin\vartheta\,\vec{e_\vartheta}$

$$\vec{H} = C_1(\cos\vartheta\,\vec{e_\rho} - \sin\vartheta\,\vec{e_\vartheta})$$

·) 

ges: Stromverteilung in der x/y Ebene

→ zeige, dass $I(A) = l\,[H(\vec{r_1}) - H(\vec{r_2})]$

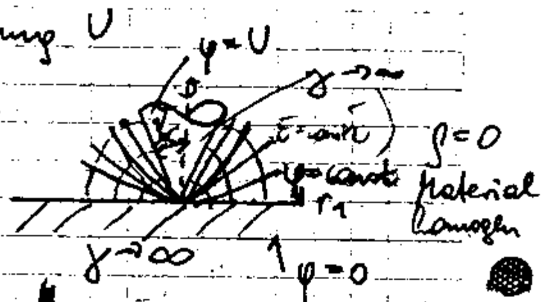
$$\underbrace{\int \vec{H}\vec{s}\,ds}_{V(\partial A)} = \underbrace{\int \vec{j}\,\vec{n}\,dA}_{I(A)} \qquad \vec{j} = \begin{pmatrix} j_0\cos\alpha \\ j_0\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\int \vec{H}\vec{s}\,ds = \int_{C_1} \vec{H}\vec{s}_1\,ds + \cancel{\int_{C_2} \vec{H}\vec{s}_2\,ds} + \int_{C_3} \vec{H}\vec{s}_3\,ds + \cancel{\int_{C_4} \vec{H}\vec{s}_4\,ds}$$

$\vec{H} = H\vec{e}_z$

$$= \int_0^l \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ H_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ds + \int_l^0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ H_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ds = \underline{\underline{l\,(H(\vec{r_1}) - H(\vec{r_2}))}}$$

·) geg: ideal leitf. Metallkegel steht isoliert auf ideal leitf. Unterlage und trägt die Spannung U



ges: i) Feldlinien von $\vec{E}$

Potentiallinien von φ

ii) $\vec{D}, \vec{E}, \varphi$

iii) Ladung der Fläche mit r_1 (Radius)

$E \to 0$, $D \to 0$, $\sigma \neq 0$

Hinweis $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln|\tan\frac{x}{2}|$

i) $\underline{\nabla^2\varphi = 0}_{(\rho=0)} = \cancel{\frac{\partial_r (r^2 \partial_r \varphi)}{r^2}} + \frac{\partial_\vartheta [\sin\vartheta\,\partial_\vartheta\varphi]}{r^2\sin\vartheta} + \cancel{\frac{\partial_\alpha^2\varphi}{r^2\sin^2\vartheta}} = 0$

$$0 = \frac{\partial_\vartheta \overbrace{[\sin(\vartheta)\partial_\vartheta\varphi]}^{const}}{\cancel{r^2\sin\vartheta}} \Rightarrow \underline{\underline{const}} = \sin\vartheta\,\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} \qquad \varphi = const\,\ln|\tan\tfrac{\vartheta}{2}|$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\cdot\varphi = -\left(\partial_r \vec{e}_r + \partial_\vartheta \frac{1}{r}\vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\alpha \vec{e}_\alpha\right) const\,\ln|\tan\tfrac{\vartheta}{2}| =$$

$$const\,\frac{1}{r}\,\vec{e}_\vartheta = \frac{\vec{D}}{\varepsilon}$$

$\varphi(x,y) = \sum_k C_k e^{ky} \sin(kx)$ $\quad \varphi(x,0) = \sum C_k \sin kx \Rightarrow$

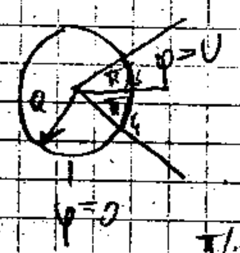
$C_k = \frac{4U}{n\pi} \quad k = \frac{n\pi}{a} \quad \varphi = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4U}{n\pi} e^{\frac{n\pi}{a}y} \sin\frac{n\pi}{a}x = \frac{4U}{\pi}\cdot$

$\mathrm{Im}\sum \frac{z^n}{n} = \underline{\frac{4U}{\pi}\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\ln\left(\frac{1-z}{1+z}\right)} \qquad z = e^{(x+jy)\frac{\pi}{a}}$

•) Kegel mit Potentialverlauf: Berechne mit Hilfe der Poisson Integrale das Potential und die Feldstärke an der Stelle $\rho = a$

$\varphi(\rho,\alpha) = \frac{a^2-\rho^2}{2\pi}\int_\alpha \frac{\varphi(a,\alpha')}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\alpha-\alpha')}\,d\alpha' \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{atan} x = \frac{1}{1+x^2}$

$\int \frac{1}{a+b\cos x}\,dx = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{atan}\left(\frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}}\tan\frac{x}{2}\right)$



$\varphi = \frac{a^2-\rho^2}{2\pi}\int_{\alpha'-\pi/4}^{\pi/4}\frac{U}{\underbrace{a^2+\rho^2}_{c}\underbrace{-2a\rho}_{d}\cos(\alpha-\alpha')}\,d\alpha' = \frac{a^2-\rho^2}{2\pi}\int_{\alpha-\pi/4}^{\alpha+\pi/4}\frac{U}{c+d\cos u}$

$\alpha'-\alpha = u$
$d\alpha' = du$ $\quad = \frac{a^2-\rho^2}{2\pi}U\cdot\frac{2}{\sqrt{c^2-d^2}}\operatorname{atan}\left(\frac{c-d}{\sqrt{c^2-d^2}}\tan\frac{u}{2}\right)\Bigg|_{\alpha-\pi/4}^{\alpha+\pi/4} =$

$\frac{\cancel{a^2-\rho^2}}{2\pi}U\cdot\frac{2}{\cancel{\sqrt{(a^2+\rho^2)^2-4a^2\rho^2}}}\Bigg[\operatorname{atan}\Bigg(\underbrace{\frac{(a+\rho)^2}{a^2-\rho^2}\tan\left(\frac{\alpha+\frac{\pi}{4}}{2}\right)}_{x^{(1)}}\Bigg)$

$-\operatorname{atan}\Bigg(\underbrace{\frac{(a+\rho)^2}{a^2-\rho^2}\tan\left(\frac{\alpha-\frac{\pi}{4}}{2}\right)}_{x^{(2)}}\Bigg)$

$\nabla \times \vec{H}$ ... $\Delta \vec{A} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) - \nabla(\nabla \cdot \vec{A})$ $\nabla \cdot \vec{A} = 0$

stromfrei   konst.

Ableitung ρ, α $\vec{A} = A(\rho, \varphi)\vec{e_z}$

$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = \vec{0}$

$A_i(\rho, \alpha) = C_1 \rho \cos\alpha$

$A_a(\rho, \alpha) = C_2 \frac{1}{\rho} \cos\alpha + C_3 \rho \cos\alpha$

$x = \rho\cos\alpha$
$y = \rho\sin\alpha$
$z = z$

$\vec{n} \cdot [\![\vec{B}]\!] = 0$

$\vec{B} = B_0 (\sin\alpha\, \vec{e_\rho} + \cos\alpha\, \vec{e_\alpha})$

$\vec{B}(\infty) = B_0 \vec{e_y}$

$\vec{e_\rho} = \cos\alpha\, \vec{e_x} + \sin\alpha\, \vec{e_y} + z\vec{e_z}$
$\vec{e_\alpha} = -\sin\alpha\, \vec{e_x} + \cos\alpha\, \vec{e_y}$
$\vec{e_x} = \cos\alpha\, \vec{e_\rho} - \sin\alpha\, \vec{e_\alpha}$
$\vec{e_y} = \sin\alpha\, \vec{e_\rho} + \cos\alpha\, \vec{e_\alpha}$

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} \partial_\rho \\ \frac{1}{\rho}\partial_\alpha \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho}\partial_\alpha A_z \\ -\partial_\rho A_z \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{B_i} = -C_1 \sin\alpha\, \vec{e_\rho} - C_1 \cos\alpha\, \vec{e_\alpha}$

$\vec{B_a} = -C_2 \frac{1}{\rho^2} \sin\alpha\, \vec{e_\rho} + C_2 \frac{1}{\rho^2}\cos\alpha$
$- C_3 \sin\alpha\, \vec{e_\rho} - C_3 \cos\alpha\, \vec{e_\alpha}$

$\vec{B_a}(\infty) = B_0 \Rightarrow C_3 = -B_0$

$\rho = a$: $\quad B_{\rho i} = B_{\rho a} \qquad -C_1 = -\frac{C_2}{a^2} + B_0$
$\alpha = 0°$

$\vec{n} \times [\![\vec{H}]\!] = \vec{0} \qquad \mu_0 B_{\alpha i} = \mu_0 \mu_r B_{\alpha a}$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \left[\!\!\left[\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\mu}\left(C_2 \frac{1}{a^2} - C_3\right) + \frac{C_1}{\mu_0} \\ 0 \end{pmatrix} \right]\!\!\right] = \vec{0}$$

$\frac{1}{\cancel{\mu_0}\mu_r}\left(C_2 \frac{1}{a^2} - C_3\right) = -\frac{C_1}{\cancel{\mu_0}}$

$$\left.\begin{aligned} -C_1 &= -\frac{C_2}{a^2} + B_0 \\ -C_1 &= \frac{C_2}{\mu_r a^2} + \frac{B_0}{\mu_r} \end{aligned}\right\} \quad \frac{C_2}{\mu_r a^2} + \frac{B_0}{\mu_r} = -\frac{\mu_r C_2}{\mu_r a^2} + \frac{B_0 \mu_r}{\mu_r}$$

$\frac{1}{\mu_r a^2}(C_2 + \mu_r C_2) = \frac{1}{\mu_r}(B_0\mu_r - B_0)$

$$C_2 = \frac{B_0(\mu_r - 1)a^2}{\mu_r + 1}$$

$$C_1 = \frac{B_0(\mu_r - 1)}{(\mu_r + 1)} - B_0$$

Knoten: $i(z) - i(z+dz) = C' dz \frac{\partial u(z)}{\partial t}$

$\cancel{i(z)} - (\cancel{i(z)} + \frac{\partial i(z)}{\partial z} dz) = C' dz \frac{\partial u}{\partial t}$

$-\frac{\partial i}{\partial z} = C' \frac{\partial u}{\partial t} \quad \mathrm{II})$

ad I)
$\frac{\partial i}{\partial z} = -\frac{1}{R'} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = R'C' \frac{\partial u}{\partial t}$ Diffusionsgleichung
nicht Wellengleichung
⇒ keine Ausbreitungsgeschw. angebbar.

• geg: $\lambda/4$ Resonator kurzgeschlossen mit $\mu_r = 1$ $\varepsilon_r = 88{,}1$ $f_r = 750\,\mathrm{MHz}$
D, d (Koaxialkabel)

ges: i) Länge in mm
ii) Impedanzverlauf für $0 < f < 3f_r$ (graphisch und analytisch)

i) $\begin{bmatrix} U(0) \\ I(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma l) & \sinh(\gamma l)\cdot Z_W \\ \sinh(\gamma l)/Z_W & \cosh(\gamma l) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U(l) \\ I(l) \end{bmatrix}$

Kurzgeschlossen ⇒ $U(l) = 0$

$U(0) = \sinh(\gamma l)\cdot Z_W\, I(l)$

$I(0) = \cosh(\gamma l)\, I(l)$

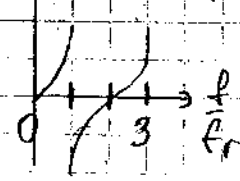
$\lambda f_r = c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$

$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}\, f_r} = 0{,}0426\,\mathrm{m}$

$\underline{\underline{l}} = \frac{\lambda}{4} = 1{,}065 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} = \underline{1{,}065\,\mathrm{cm}}$

ii)
$Z(0) = \tanh(\gamma l)\cdot Z_W = \tanh\left(j \frac{2\pi}{\underset{c/f}{\lambda}} \frac{1}{4\sqrt{\mu\varepsilon}\, f_r}\right) \underbrace{\frac{\ln\left(\frac{D}{d}\right)}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}_{Z_W}$

$= \tanh\left(j \frac{\pi}{2} \frac{f}{f_r}\right) \cdot Z_W = j \tan\left(\frac{\pi}{2} \frac{f}{f_r}\right) Z_W$

$\frac{Z(0)}{j(Z_W)}$


$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = -\frac{U}{\pi}\left[\left(\frac{1}{1+x^{(1)2}} \cdot \frac{2(a+\rho)(a^2-\rho^2)+(a+\rho)^2 2\rho}{(a^2-\rho^2)^2}\tan\left(\frac{\alpha+\pi/4}{2}\right)\right.\right.$$

$$\left. - \frac{1}{1+x^{(2)2}} \cdot \frac{2(a+\rho)(a^2-\rho^2)+(a+\rho)^2 2\rho}{(a^2-\rho^2)^2}\tan\left(\frac{\alpha-\pi/4}{2}\right)\right)\vec{e}_\rho$$

$$\left(\frac{1}{\rho}\frac{1}{1+x^{(1)2}} \cdot \frac{(a+\rho)^2}{a^2-\rho^2}\cdot\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{\alpha+\frac{\pi}{4}}{2}\right)\right) + \frac{1}{\rho}\frac{1}{1+x^{(2)2}}\frac{(a+\rho)^2}{a^2-\rho^2}\frac{1}{2}\cdot\right.$$

$$\left.\left(1+\tan^2\left(\frac{\alpha-\frac{\pi}{4}}{2}\right)\right)\vec{e}_\alpha\right)$$

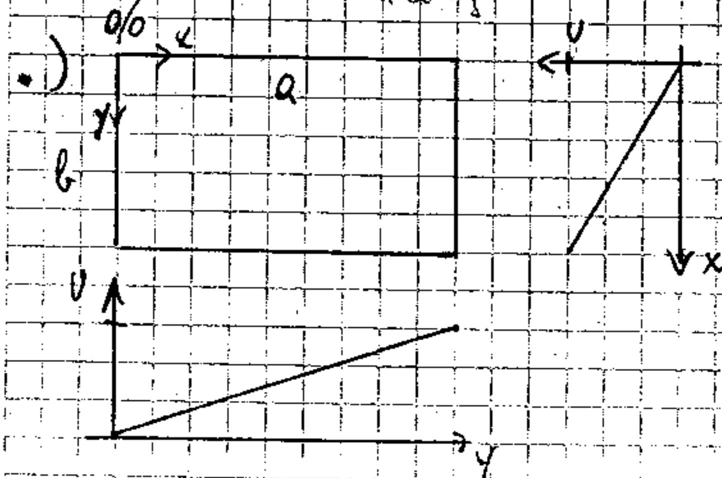
$$E_\alpha = \frac{U}{\pi}\frac{1}{\rho}\frac{1}{1+\left(\frac{(a+\rho)^2}{a^2-\rho^2}\right)^2\tan^2\left(\frac{\alpha-\frac{\pi}{4}}{2}\right)}\cdot\frac{(a+\rho)^2}{a^2-\rho^2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\alpha+\frac{\pi}{4}}{2}\right)}\right) + R$$

$$= \frac{U}{2\pi\rho}\frac{1}{\frac{\rho^2-\rho^2}{(a+\rho)^2}\cos^2(\ ) + \sin^2(\ )} + R\Bigg|_{\rho=a} = \frac{U}{2\pi a}\left(\frac{(2a)^2}{4a^2\sin^2\left(\frac{\alpha+\pi/4}{2}\right)}\right.$$

$$\left. + \frac{4a^2}{4a^2\sin^2\left(\frac{\alpha-\pi/4}{2}\right)}\right)$$

$$E_\rho = -\frac{U}{\pi}\left[\left(\frac{2(a+\rho)(a^2-\rho^2)+(a+\rho)^2 2\rho}{1+\left(\frac{(a+\rho)^2}{a^2-\rho^2}\right)^2\tan^2\left(\frac{\alpha-\pi/4}{2}\right)}\rho\ \tan\left(\frac{\alpha+\pi/4}{2}\right) + R\right]\right. \overset{!}{=} 0$$

•)



geg: Platte mit Dicke δ, Leitfähigkeit γ und Potentialvorgabe

ges: bei Vernachlässigung der Variation entlang der Dicke δ: berechne stationäres Strömungsfeld / zeichne qualitativ Feld-/Potentiale

Knoten: $i(z) - i(z+dz) = C' \frac{\partial u(z)}{\partial t}$

$$\cancel{i(z)} - \left(\cancel{i(z)} + \frac{\partial i(z)}{\partial z} dz\right) = C' dz \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial i}{\partial z} = C' \frac{\partial u}{\partial t} \qquad \text{II})$$

ad I)

$$\frac{\partial i}{\partial z} = -\frac{1}{R'} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = R'C' \frac{\partial u}{\partial t}$$

Diffusionsgleichung
nicht Wellengleichung
$\Rightarrow$ keine Ausbreitungsgeschw. angebbar.

Bsp $\lambda/4$ Resonator kurzgeschlossen mit $\mu_r = 1$ $\varepsilon_r = 88{,}1$ $f_r = 750\,MHz$
D, d (Koaxialkabel)
gesucht Länge in mm
ii) Impedanzverlauf für $0 < f < 3 f_r$ (graphisch und analytisch)

i)
$$\begin{bmatrix} U(0) \\ I(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma l) & \sinh(\gamma l) \cdot Z_W \\ \sinh(\gamma l)/Z_W & \cosh(\gamma l) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U(l) \\ I(l) \end{bmatrix}$$

Kurzgeschlossen $\Rightarrow U(l) = 0$

$U(0) = \sinh(\gamma l) \cdot Z_W \, I(l)$

$I(0) = \cosh(\gamma l) \, I(l)$

$\lambda f_r = c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$

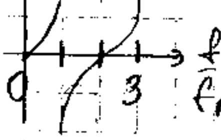
$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon} f_r} = 0{,}0426\,m$

$\underline{\underline{l}} = \frac{\lambda}{4} = 1{,}065 \cdot 10^{-2}\,m = \underline{\underline{1{,}065\,cm}}$

ii)

$$Z(0) = \tanh(\gamma l) \cdot Z_W = \tanh\left(j \frac{2\pi}{\underset{\frac{c}{f}}{\lambda}} \frac{1}{4\sqrt{\mu\varepsilon} f_r}\right) \underbrace{\frac{\ln\left(\frac{D}{d}\right)}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}_{Z_W}$$

$$= \tanh\left(j \frac{\pi}{2} \frac{f}{f_r}\right) \cdot Z_W = j \tan\left(\frac{\pi}{2} \frac{f}{f_r}\right) Z_W$$

$\frac{Z(0)}{j(Z_W)}$ 

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \gamma\mu \frac{T'(t)}{T(t)} = -k^2 \qquad X''(x) + k^2 X(x) = 0$$

$$\lambda^2 = -k^2 \qquad X(x) = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx$$

$x=0, t=0$: $\quad X(0) = 0 = C_1$

$$X(a) = 0 = C_2 \sin \underbrace{ka}_{n\pi} \qquad k = \frac{n\pi}{a}$$

$$X(x) = C_2 \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$$

$$T'(t) = -k^2 T(t) / \gamma\mu \qquad T'(t) + k^2 T(t)/\gamma\mu = 0 \Rightarrow \lambda + k^2/\gamma\mu = 0$$

$$\lambda = -k^2/\mu\gamma \qquad T = C e^{-k^2/\mu\gamma \, t} \qquad k^2/\mu\gamma = 1/\tau_N$$

$$H(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-t/\tau_N} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$$

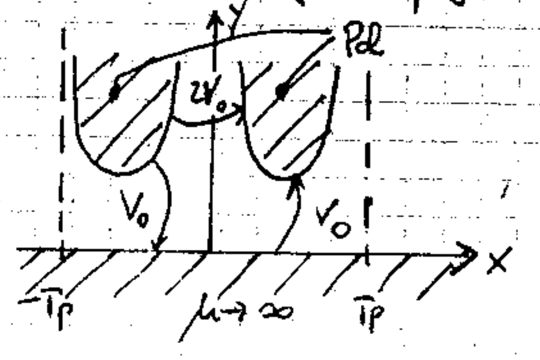
$$C_n = \frac{2}{a} \int_0^a H_0 \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx = \frac{2}{a} H_0 \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \cdot \frac{a}{n\pi} \Big|_0^a =$$

$$\underline{\underline{4 H_0 \cdot \frac{1}{n\pi}}} \qquad k^2/\mu\gamma = \frac{n^2\pi^2}{a^2} \Big/ \mu\gamma = \frac{1}{\tau_N} \Rightarrow \underline{\underline{\tau_N = \frac{a^2 \mu\gamma}{n^2\pi^2}}}$$

$$\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{H} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ H \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cancel{\partial_z H} \\ 0 \\ +\partial_x H \end{pmatrix} = \underline{\sum_n C_n e^{-t/\tau_n} \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \cdot \frac{n\pi}{a} e_z}$$

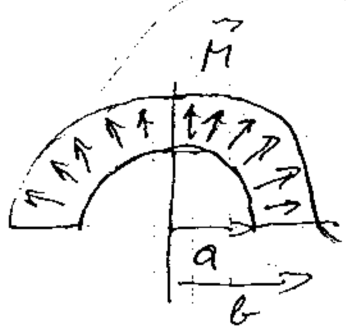
•) Auf der Geraden $y=0$ soll ein sinusförmiger Flußdichteverlauf mit $B(y=0) = \hat{B} \sin\left(\frac{\pi}{\tau_p} x\right)$ bei konst. magnet. Spg. V_0 erzeugt werden. $\partial_z = 0$

ges: Verlauf der „Pole" $y(x)$



TBT2 30.9.88

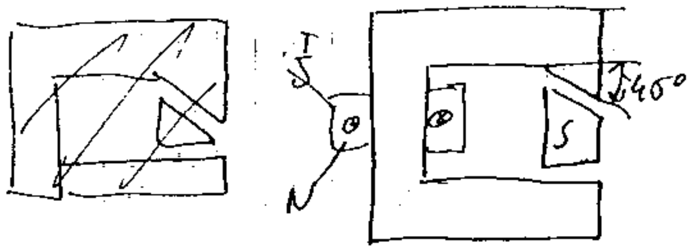
1.)



Geg: Dickwandiger, gleichmäßig magnetisierter Hohlzylinder, $\vec M = M\vec a$

ges: $\vec m$: Magn. Moment!

2.)

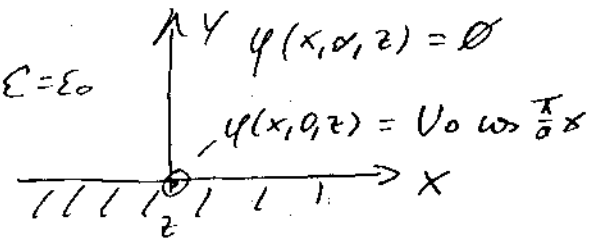


geg.: alle Abmessungen und Winkel, N, I

ges: Resultierende Kraft auf das Stück S als Vektor

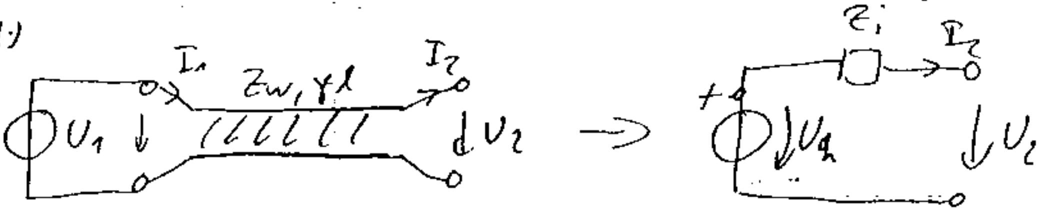
$$\vec F^R = \frac{1}{\mu_0} \oint_{\partial V} \left((\vec n \cdot \vec B)\vec B - \frac{1}{2} B^2 \vec n \right) dA \qquad \cancel{\vec F^R = \frac{1}{\mu_0} \oint_{\partial V} \vec B \cdot}$$

3.) Ebenes Dirichlet-Problem



ges: Feldstärke bei $y = 0+$

4.)



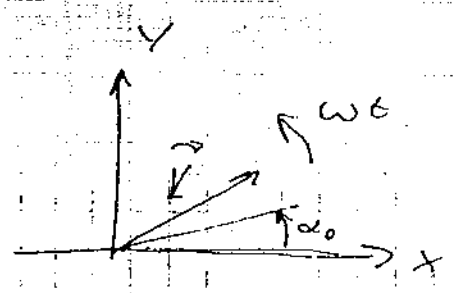
$$U_1 = \cosh(\gamma l) U_2 + Z_W \sinh(\gamma l) I_2$$

$$I_1 = \frac{1}{Z_W} \sinh(\gamma l) U_2 + \cosh(\gamma l) I_2$$

Ges: U_q, Z_i der Ersatzschaltung für ein Leitungsstück

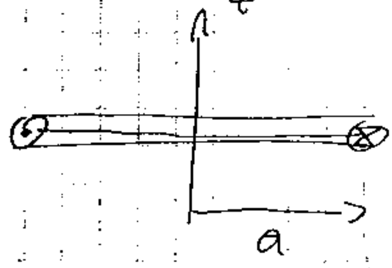
5.) Beispiel aus Buch Kap. 5

γ^2 = geg. ges: $\underline{\underline{\alpha}}$

6.) 

Geg: Rot. Vektor

Ges.: Kompl. Amplitude für Darstellung $\vec{V} = \mathrm{Re}(\underline{\vec{V}}\, e^{j\omega t})$

7.) 

Dünne Kreisspule:
Näherungsweise als Linienstrom mit ⌀ a

$$\vec{A} = K\, f\left(\frac{\varrho}{a}\right) \vec{e}_\alpha$$

$$f(\xi) = \int_0^\pi \frac{\cos\alpha \, d\alpha}{\sqrt{1 + \dots}}$$

$f(\xi)$ an den Grenzen $0 < \xi \ll 1$
und $0 < 1 - \xi \ll 1$ gegeben

Gesucht: Induktivität der Kreisspule

8.) Leiten Sie für eine verlustbehaftete aber verzerrungsfreie Leitung die Wellenimpedanz ab.

9.) Geg.: $\varphi(r)$

Ges.: Zugehörige Ladungsverteilung

$\vec{B} = -\vec{\nabla} \cdot \varphi$ Achtung $\vec{\nabla}$ in Kugelkoordinaten!

$\varrho = \vec{\nabla} \cdot \vec{D}$ $\quad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{B}$

10.) Geg. Skalarfeld $\varphi(x, y, z)$

Gesucht: Richtungsableitung in Richtung $\vec{n}$ im Punkt P

Pl. Koordinaten v. P gegeben, Richtung $\vec{n}$ angegeben!

1.9.88

$n = n \cdot e_y$

$$A_m = \int m\,dv = \varrho \int_0^{2\pi} \int_a^b S n \cdot r\,dr\,d\alpha =$$

$$e_y = (\cos(\alpha) e_x + \sin(\alpha) e_y)$$

$$= A \int_0^{2\pi} n \cdot e_y \cdot r\,dr\,d\alpha =$$

$$= \varrho \int_0^{2\pi} n_0 (\cos(\alpha) e_x + \sin(\alpha) e_y)\,d\alpha \int_a^b r\,dr$$

$$= \varrho \frac{r^2}{2} \Big|_a^b n \cdot \underbrace{\left(+\sin(\alpha)\Big|_{e_x} - \cos(\alpha)\Big|_{e_y} \right)^{\pi}_0}_{0 \;-\; 1 - (0+1)}$$

$$= \frac{\varrho \cdot n \cdot (a^2 - b^2)}{2} \cdot \varrho - 2 e_y = \underline{\varrho \cdot n (a^2 - b^2) \cdot - e_y}$$

---

(3) Ebenes Problem, Linienleiter, daher Zweischrägung

$\nabla^2 \varphi^{a} = 0 \quad$ ~~$\psi(\varrho, \alpha) = R(\varrho) S(\alpha)$ mit~~

~~$R(\varrho) = A_1 \varrho^{k} + A_2 \varrho^{-k}$~~ mit

$S(\alpha) = B_1 \cos(\frac{k\alpha}{ky}) + B_2 \sin(\frac{k\alpha}{ky})$

$\Rightarrow \varphi(\cancel{xy}) =$

mit $\varphi(x,y) = X(x)\,Y(y)$ mit

$X(x) = B_1 \cos(xk) + B_2 \sin(xk)$

$Y(y) = A_1 \cdot e^{ky} + A_2 e^{-ky}$ beschränkt für $y \to \infty$ daher $A_1 = 0$

$\Rightarrow \varphi(x,y) = C_1 \cdot e^{-ky} \cdot \cos(xk)$

$\varphi(x,y) = U_0 \cos(\frac{\pi}{a} x) \qquad k = \frac{\pi}{a}$

$\varphi(x,y) = C_1 \cdot e^{-\frac{\pi}{a} y} \cos(xk) \quad \underline{C_1 = U_0}$

$V_1 = \cosh(\gamma l) V_2 + Z_u \sinh(\gamma l) I_2$

$I_1 = \frac{1}{Z_u} \sinh(\gamma l) V_2 + \cosh(\gamma l) I_2$

$\cancel{I_2 = \frac{V_g}{Z_i} \quad V_2 = V_g + \frac{Z}{I_2} / Z_1}$

$\cancel{I_2 = \frac{V_g}{Z_i}} \quad V_2 = V_g - I_2 Z_i \quad I_2 = \frac{V_2 - V_g}{Z_i}$

$V_1 = \cosh(\gamma l)(V_g - I_2 Z_i) + Z_u \sinh(\gamma l) \cancel{I_2} \frac{V_2 - V_g}{Z_i}$

$I_1 = \frac{1}{Z_u} \sinh(\gamma l) \cdot (V_g - I_2 Z_i) + Z_u \sinh(\gamma l) \cdot \frac{V_2 - V_g}{Z_i}$

8) Leitungsgleichung für allgemei Verzerrungsbehaftet, ...

$$\partial_z U + L' \partial_t I + R' I = 0$$

$$\partial_z I + C' \partial_t U + G' U = 0$$

für verzerrungsfrei: $\frac{L'}{R'} = \frac{C'}{G'}$ $\quad R L' = \frac{C' G'}{R'}$

$$Z_w = \sqrt{Z'/Y'} = \sqrt{R' + j\omega L'} / \sqrt{G' + j\omega C'}$$

$$= \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} = \sqrt{\frac{R'}{G'}} \frac{\sqrt{1 + j\omega \frac{L'}{R'}}}{\sqrt{1 + j\omega \frac{C'}{G'}}} =$$

$\frac{R'}{G'}$

$R' = \frac{L' G'}{C'}$

$= \frac{L'}{C'}$

$$= \sqrt{\frac{R'}{G'}} = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

~~Gehen~~ Sie von der einfachen, inhomogenen Wellengleichung

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) w(\vec{r},t) = -f(\vec{r},t)$$

$A \overset{!}{=} B$ (?)

aus und führen Sie gemäß

$X(A) = X(B)$

$$X(\vec{r};j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\vec{r},t)e^{-j\omega t}dt\ , \quad x(\vec{r},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\vec{r};j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

die Fourier-Transformierten $W(\vec{r};j\omega)$ und $F(\vec{r};j\omega)$ der Funktionen $w(\vec{r},t)$ und $f(\vec{r},t)$ ein. Welcher Gleichung müssen dann die Fourier-Transformierten genügen?

$$\boxed{\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) w(\vec{r},t) = -f(\vec{r},t)}$$

$$\nabla^2 w(\vec{r},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \nabla^2 W(\vec{r};j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$\partial_t^2 w(\vec{r},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \partial_t^2\left[W(\vec{r};j\omega)e^{j\omega t}\right]d\omega = \frac{(j\omega)^2}{2\pi}\int W(\vec{r};j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\nabla^2\left[W(\vec{r};j\omega)e^{j\omega t}\right] - \frac{(j\omega)^2}{c^2}\left[W(\vec{r};j\omega)e^{j\omega t}\right]\right\}d\omega =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\nabla^2 - \frac{(j\omega)^2}{c^2}\right]\left(W(\vec{r};j\omega)e^{j\omega t}\right)d\omega = \frac{-1}{2\pi}\int F(\vec{r};j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)W(\vec{r};j\omega) = -F(\vec{r};j\omega)}$$

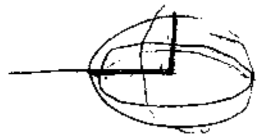
Eine ebene, homogene, elektromagnetische Sinuswelle, die sich im freien Raum in z-Richtung ausbreitet, wird durch

$$\vec{E}(z,t) = Re\left\{ \underline{\vec{\Sigma}}\, e^{j(\omega t - kz)} \right\}, \quad \vec{B}(z,t) = \frac{1}{Z}\, \vec{e_z} \times \vec{E}(z,t)$$

beschreiben. Sie sei elliptisch polarisiert, d.h.

$$\underline{\vec{\Sigma}} = \hat{E}_1 \vec{e_x} + \hat{E}_2 \vec{e_y}$$ mit reellen Konstanten $\hat{E}_1$ & $\hat{E}_2$.

Berechnen Sie den zugehoerigen zeitlichen Mittelwert des Poynting-Vektors.



$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = Re\left\{ \underline{\vec{\Sigma}}\, e^{j(\omega t - kz)} \right\} \times \frac{1}{\mu} \left[\frac{1}{Z}\, \vec{e_z} \times Re\left\{ \underline{\vec{\Sigma}}\, e^{j(\omega t - kz)} \right\} \right]$$

$\vec{e_x}$ $\vec{e_y}$ $\vec{e_z}$

$$= Re\left\{ \underline{\vec{\Sigma}}\, e^{j(\omega t - kz)} \right\} \times \left[\frac{\vec{e_z}}{\mu Z} \times Re\left\{ \underline{\vec{\Sigma}}\, e^{j(\omega t - kz)} \right\} \right]$$

$$\underline{F} = F' + jF''$$

$$= Re\left\{ (\hat{E}_1 \vec{e_x} + \hat{E}_2 \vec{e_y})\, e^{j(\omega t - kz)} \right\} \times \left[\frac{\vec{e_z}}{\mu Z} \times Re\left\{ (\hat{E}_1 \vec{e_x} + \hat{E}_2 \vec{e_y})\, e^{j(\omega t - kz)} \right\} \right]$$

$$= \frac{1}{\mu Z} Re\left\{ (\hat{E}_1 \vec{e_x} + \hat{E}_2 \vec{e_y})\, e^{j(\omega t - kz)} \right\} \times \left[Re\left\{ (\hat{E}_1 \vec{e_y} - \hat{E}_2 \vec{e_x})\, e^{j(\omega t - kz)} \right\} \right]$$

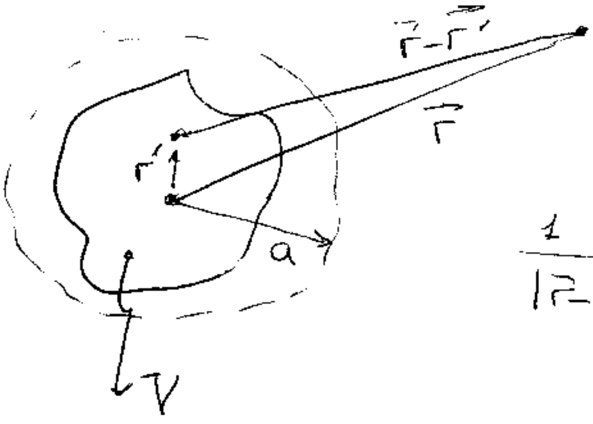
$$= \frac{1}{\mu Z} \left[(\hat{E}_1 \vec{e_x} + \hat{E}_2 \vec{e_y}) \cos(\omega t - kz) \right] \times \left[(\hat{E}_1 \vec{e_y} - \hat{E}_2 \vec{e_x}) \cos(\omega t - kz) \right]$$

$$= \frac{1}{\mu Z} \cos^2(\omega t - kz) \left[\hat{E}_1^2 \vec{e_z} + \hat{E}_2^2 \vec{e_z} \right] = \frac{\hat{E}_1^2 + \hat{E}_2}{\mu Z} \cos^2(\omega t - kz)$$

$$\boxed{\langle \vec{S} \rangle = \frac{\hat{E}_1^2 + \hat{E}_2^2}{2 \mu Z}}$$

$$\langle \vec{S} \rangle = Re\left\{ \underline{\vec{S}} \right\}$$

$|\vec r|^2 \gg a^2$



$$\int_V \rho(\vec r')\, dV' = 0$$

Hinweis:

$$\frac{1}{|\vec r - \vec r'|} = \frac{1}{|\vec r|}\left\{1 + \frac{\vec r \cdot \vec r'}{|\vec r|^2} + O\left(\frac{|\vec r'|^2}{|\vec r|^2}\right)\right\}$$

$$\varphi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_V \frac{\rho(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|}\, dV' =$$

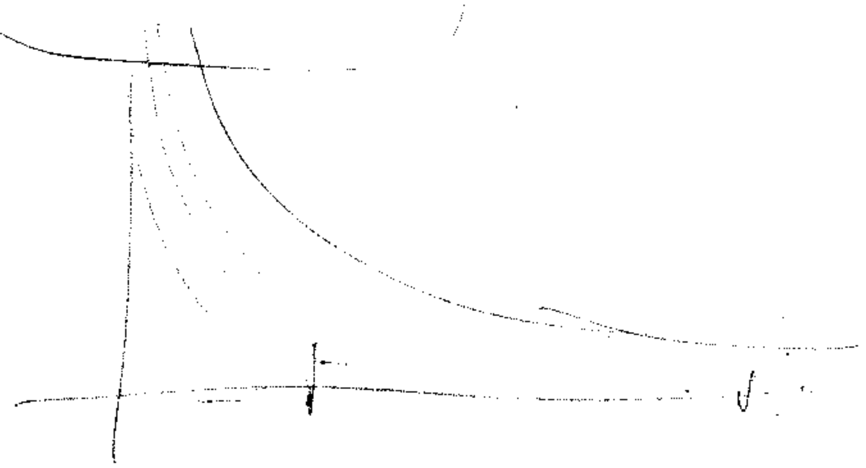
$$\frac{1}{4\pi\epsilon}\left[\underbrace{\int_V \frac{\rho(\vec r')}{|\vec r|}\, dV'}_{\text{Dieser Term verschwindet laut Angabe}} + \int \frac{\rho(\vec r')\ \vec r \cdot \vec r'}{|\vec r|^3}\, dV' + \overbrace{\int \frac{\rho(\vec r')}{|\vec r|}\, O\left(\frac{|\vec r'|^2}{|\vec r|^2}\right)}^{\text{vernachlaessigbar?}}\right]$$

$\vec r$ Terme koennen wir von Integral rausziehen

$$\boxed{= \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{\vec r}{|\vec r|^3}\int \rho(\vec r')\, \vec r'\, dV'}$$

Doppelleitung

$f = \frac{1}{x}, \quad f' = -\frac{1}{x^2}$



[redacted]

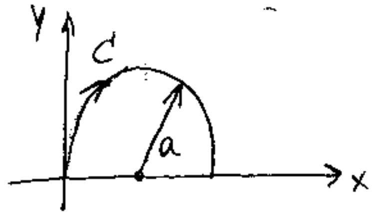
1) Sei $\vec{r}$ ein Ortsvektor bzgl. einen festem Pkt, $r=|\vec{r}|$ sein Betrag, $\vec{a}$ ein konstanter Vektor. Berechnen sie:

i) $\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{a}}{r}\right)$ $\quad -\frac{\vec{r}\cdot\vec{a}}{r^3}$

ii) $\vec{\nabla}\times\left[\vec{a}\times\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)\right] = \vec{\emptyset}$?

2) Berechne $I=\int\limits_{C}\vec{f}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$ des bezogenen Vektorfeldes

$\vec{f}(\vec{r}) = \frac{y}{a}\vec{e_x} - \frac{x}{a}\vec{e_y}$; $a=$ const. entlang C

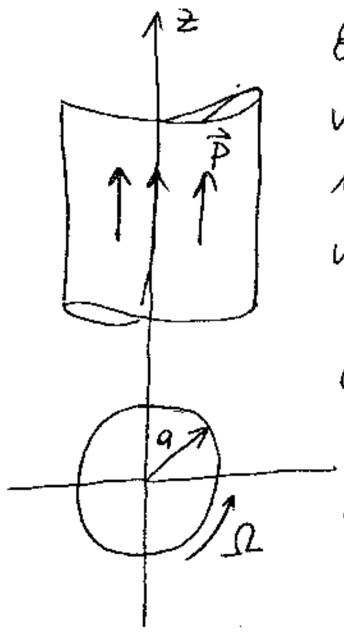


3) Ein Skalarpotential eines elektrostat. Liniendipols besitzt in Kreiszylinderkoo. das Potential

$$\varphi = \frac{p'}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\sin\alpha}{\rho}$$

Berechnen Sie das zugehörige elektrostat. Vektorpotential.

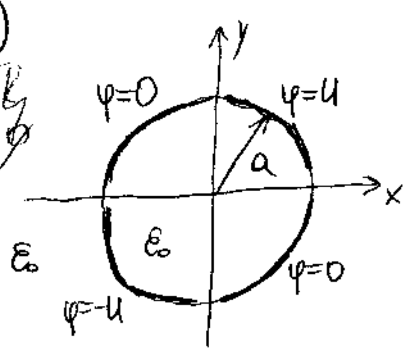
4)



Ein langer, kreiszylindr. Stab aus dielektr. Material ist axial homogen el. polarisiert, sonst aber ladungs- und stromfrei.
Angenommen, der Stab wird bzgl. ~~...~~ eines Inertialsystems in Drehung mit der Winkel= geschw. Ω um seine Achse versetzt. Geben Sie die elektr. Polarisation und Magnetisierung des Stabes in Bezug auf das Laborsystem in der nichtrel. Näherung an.

5) drehsym. Hubmagnet aus Skriptum

6)



Ein dünnwandiger, langer Kreiszylinder besteht aus 4 Metallteilen, die auf den jeweils angegebenen Werten des Potentials gehalten werden. Eine Feldberechnung liefert für den Innenraum:

$$\varphi = \frac{U}{\pi}\left[\arctan\left(\frac{2ay}{a^2-\rho^2}\right)+\arctan\left(\frac{2ax}{a^2-\rho^2}\right)\right]$$

$$\rho^2 = x^2+y^2 < a^2$$

Bestimmen Sie das el. Potential für $\rho > a$.
Folgende Eigenschaft nützlich: Erfüllt eine in ebenen Polarkoo. dargestellte Fkt. $\varphi(\rho, \alpha)$ die Laplace-Glg., so genügt auch die Funktion $\overline{\varphi}(\rho,\alpha) = \varphi\left(\frac{l^2}{\rho}, \alpha\right)$ der Laplace-Glg., wobei l eine beliebig feste Länge bedeutet.

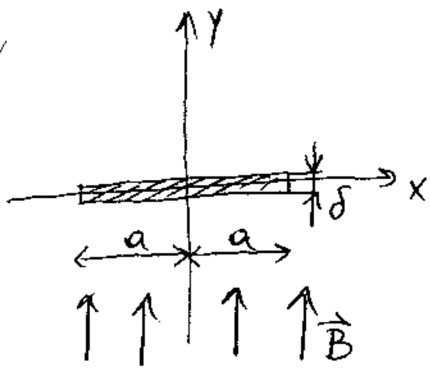
7)

$\varepsilon_0, \gamma_0 = 0$

Kugelfmg. Körper mit Radius a, ε konst, γ konst. und rel. klein, sonst leerer Raum
$t=0$: ρ_0 überall verteilt
$t>0$: Relaxation

ges.: $\vec{J}(\vec{r}, t)$ für $t>0$
Ladungsverteilung für $t \to \infty$

8)



Ein langer, nicht magn. Metallstreifen der Breite $2a$, $\delta \ll a$, γ liegt senkrecht im magn. Wechselfeld von $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t)\vec{e_y}$.
Berechnen Sie die Joule-Verluste im Streifen bezogen auf die Länge in z-Richtung, ohne Berücksichtigung des von den induzierten Strömen selbst erzeugten Magnetfeld, wobei für den Gesamtstrom im Streifen $I=0$ gilt.

9) Ausbreitung einer elektromagn. Sinuswelle in einem ionisierenden Gas kann abgeleitet werden als:

↳ hat geringe Dichte

$$k^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda_0^2}\left[1-\left(\frac{f_p}{f}\right)^2\right]$$

k... Kreiswellenzahl

f... Frequenz

f_p... charakt. Plasmafrequenz

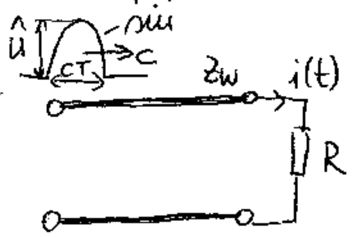
λ_0... zu f gehörende Wellenlänge im leeren Raum

Berechnen und Skizzieren Sie:

i) Phasengeschw.

ii) Gruppengeschw.

mit f; was ist, wenn $f < f_p$?

10) 

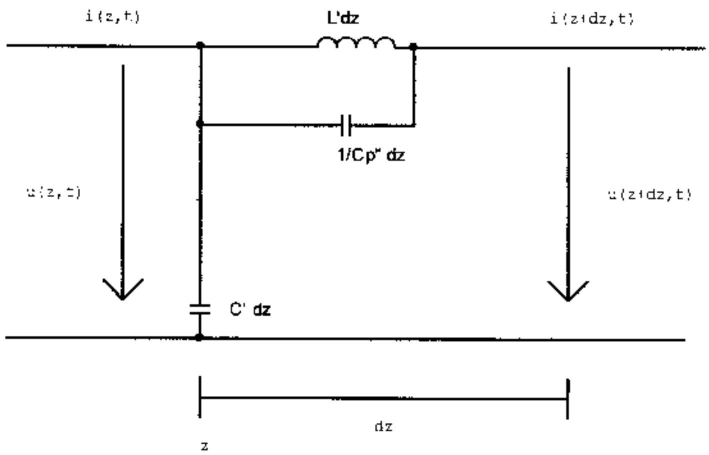
Annähernd verlustfreie Leitung mit Zw – Spgspuls in Form von Sinushalbwelle fällt ein

Berechne und skizz. Stromverlauf in R

Elektrodynamik

vom 15.12.04

1. Bsp. 5.2.18
2. Bsp. 1.2.6
3. Bsp. 2.3.1
4. Bsp. 3.5.3
5. Bsp. 3.3.1
6. geg.: ein Skalarpotential $\varphi = \frac{p}{4 \cdot \pi \cdot r^2} \sin(\theta)$
   ges.: elektrostatisches Vektorpotential
7. Ein Sender erzeugt ein Feld mit den Komponenten:
   $\vec{H} = \hat{I}_0 \frac{\sin(\theta)}{r} \cos(\omega t - kr) \vec{e}_\alpha$ mit $\hat{I}_0 = 0{,}8$ A
   $\vec{E} = Z_0 \vec{H} \times \vec{e}_r$
   ges: die gesamte abgestrahlte mittlere Leistung
8. geg.: ein Würfel der Kantenlänge a mit der Magnetisierung $\vec{M} = M\vec{e}_z = const.$
   ges.: die fiktive Stromverteilung
9. geg.: eine radialsymmetrische Ladungsverteilung im sonst leeren Raum
   $\rho = \rho(0) \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^\alpha\right]$ für $r < a$ mit $a > 0$ und $\alpha > 0$ (α ist eine Konstante!)
   $\rho = 0$ sonst
   ges.: a) die gesamte Ladung
   b) Ort und Betrag des Maximums der el. Feldstärke
10. geg.: eine Leitung (1/Cp" hat die Dimension Länge mal Kapazität)

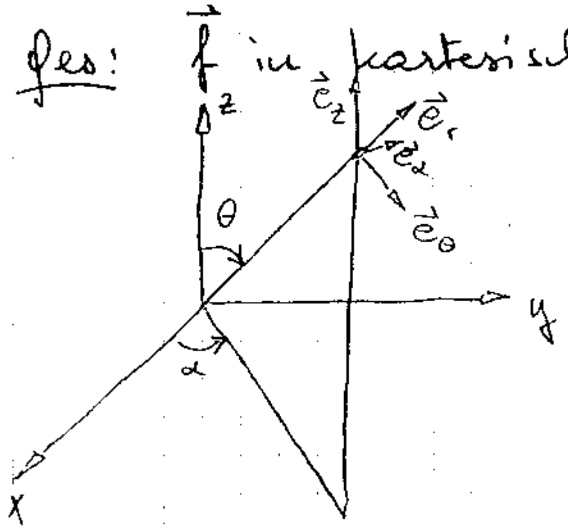


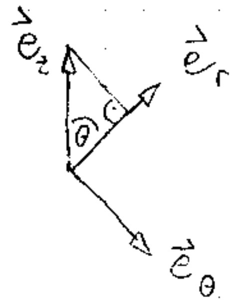
ges.: die Leitungsgleichungen

TET 2   5.Mn 2001

1.) Geg: $\vec{f} = \frac{1}{r^2}\left[\cos(\theta)\,\vec{e}_r - \sin(\theta)\,\vec{e}_\theta\right]$ (Kugelkoord.)

Ges: $\vec{f}$ in kartesischen Koordinaten



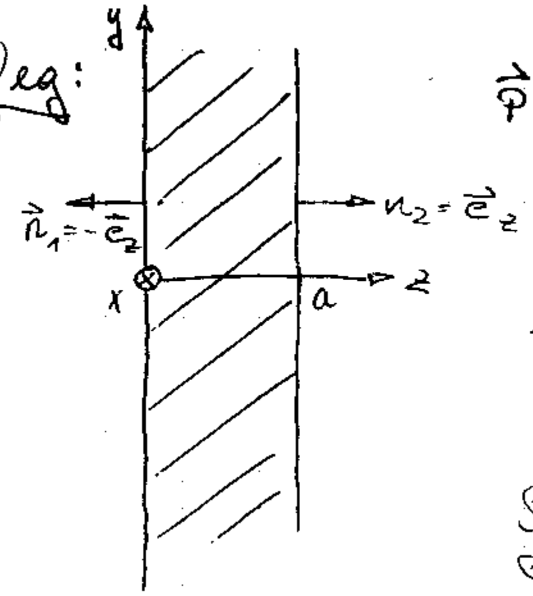


$\vec{e}_z = \cos(\theta)\,\vec{e}_r - \sin(\theta)\,\vec{e}_\theta$

$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$$\Rightarrow \quad \vec{f} = \frac{\vec{e}_z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

2.) geg:



$$\vec{P} = \begin{cases} \left[2 - \left(\frac{z}{a}\right)^2\right] P_0 \, \vec{e}_z & \text{f. } 0 \leq z \leq a \\ 0 & \text{f. } z < 0 \text{ und } z > a \end{cases}$$

ges: vollständige fiktive Ladungsverteilung

$$\rho^f = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$
$$\sigma^f = -\vec{n} \cdot [\![\vec{P}]\!]$$

$0 \leq z \leq a$:

$$\rho^f = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\partial_z P = \left(2 - \frac{2z}{a^2}\right) P_0 = 2P_0\left(1 - \frac{z}{a^2}\right)$$

$z < 0$ und $z > a$:

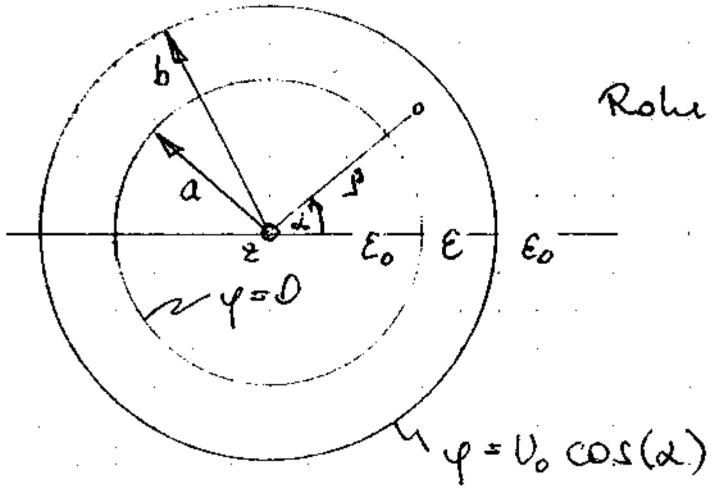
$$\rho^f = 0$$

$z = 0$:

$$\sigma^f = -\vec{n} \cdot [\![\vec{P}]\!] = \vec{e}_z \cdot \left[\vec{0} - 2P_0 \vec{e}_z\right] = -2P_0$$

$z = a$:

$$\sigma^f = -\vec{n} \cdot [\![\vec{P}]\!] = -\vec{e}_z \cdot \left\{\vec{0} - [2 - 1] P_0 \vec{e}_z\right\} =$$
$$= P_0$$

3.) Geg: 

Ges: φ im Bereich $a \le \rho \le b$

$\varphi(\rho,\alpha) = R(\rho)\, S(\alpha)$
$R(\rho) = A_1 \rho^k + A_2 \rho^{-k}$
$S(\alpha) = B_1 \cos(k\alpha) + B_2 \sin(k\alpha)$

$$\Rightarrow \varphi(b,\alpha) = \left(A_1 b^k + A_2 b^{-k}\right)\left[B_1 \cos(k\alpha) + B_2 \sin(k\alpha)\right] \stackrel{!}{=}$$
$$\stackrel{!}{=} U_0 \cos(\alpha)$$
$$\Rightarrow k = 1,\ B_1 = 1,\ B_2 = 0,\quad A_1 b + A_2 \frac{1}{b} = U_0 \quad (1)$$

$$\varphi(a,\alpha) = \left(A_1 a + A_2 \frac{1}{a}\right)\cos(\alpha) \stackrel{!}{=} 0$$
$$\Rightarrow A_1 a + A_2 \frac{1}{a} = 0 \rightarrow A_2 = -A_1 a^2 \quad (2)$$
$$(1),(2) \Rightarrow A_1\left(b - \frac{a^2}{b}\right) = U_0 \Rightarrow A_1 = U_0 \frac{b}{b^2 - a^2}$$
$$A_2 = U_0 \frac{a^2 b}{a^2 - b^2}$$
$$\Rightarrow \varphi(\rho,\alpha) = \frac{U_0}{a^2 - b^2}\left[\frac{a^2 b}{\rho} - b\rho\right]\cos(\alpha)$$

4.) $\vec{D}(\vec{r},t) = \varepsilon\left[\vec{E}(\vec{r},t) + \int_0^\infty g(t')\,E(\vec{r},t-t')\,dt'\right]$

ges: Beziehung im Frequenz-Bereich

Hinweis: $\mathcal{F}\left[\vec{D}(\vec{r},t)\right] = \underline{\vec{D}}(\vec{r},j\omega)$

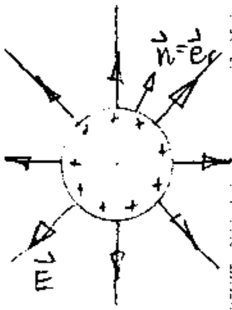
$$\int_0^\infty g(t')\,E(\vec{r},t-t')\,dt' = g(t) * \vec{E}(\vec{r},t) \quad \text{Faltung}$$

$$\mathcal{F}\left[x_1(t) * x_2(t)\right] \circ\!\!-\!\!\bullet\; X_1(j\omega)\,X_2(j\omega)$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{D}}(\vec{r},j\omega) = \varepsilon\left[\underline{\vec{E}}(\vec{r},j\omega) + \underline{g}(j\omega)\,\underline{\vec{E}}(\vec{r},j\omega)\right] =$$

$$= \varepsilon\,\underline{\vec{E}}(\vec{r},j\omega)\left[1 + \underline{g}(j\omega)\right]$$

5.) Im sonst leeren Raum befindet sich eine Kugel mit dem Radius a auf deren Oberfläche die Ladungsmenge Q gleichmäßig verteilt ist. Das Kugelinnere ist ladungsfrei.



Wie groß ist der Energieinhalt des zugehörigen elektrostatischen Feldes? Wie ändert sich dieser Energieinhalt, wenn die Ladung Q nicht auf der Kugeloberfläche sondern gleichförmig über das Kugelvolumen verteilt ist?

$\vec{E} = E\vec{e}_r$

$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} = D\vec{e}_r$

$$\vec{n} \cdot [\![\vec{D}]\!] = \sigma \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$$

$$\vec{e}_r \cdot [D\vec{e}_r - \vec{0}] = \frac{Q}{4\pi r^2} \qquad E\vec{e}_r = -\partial_r \varphi \vec{e}_r$$

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} \qquad \int \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = -\varphi$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C = -\varphi$$

$$\lim_{r\to\infty} \varphi = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$W = \int P\, dt = \int U(t) I(t)\, dt = C\int U(t)\dot{U}(t)\, dt = \frac{1}{2} C U^2(t)$$

$$Q = CU \Rightarrow W = \frac{1}{2} Q U(t, r=a) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

gleichförmige Ladungsverteilung:

Feld für $r \geq a$ ändert sich nicht

$\Rightarrow$ Energieinhalt bleibt gleich

$$w = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 \Rightarrow W = \int w\, dV = \int w\, r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, dr$$

6.) Ebenes Magnetfeld

$$\vec{B} = C(x^2+y^2)\,\vec{e}_x - 2Cxy\,\vec{e}_y \qquad C = \text{const.}$$

(i) Vektorpotential

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \qquad \vec{A} = A(x,y)\,\vec{e}_z$$

$$\vec{B} = \partial_y A(x,y)\,\vec{e}_x - \partial_x A(x,y)\,\vec{e}_y$$

$$\partial_y A \overset{!}{=} Cx^2 + Cy^2 \quad\longrightarrow\quad -\partial_x A = -2Cxy - f'(x) = -2xy$$

$$A = Cx^2 y + C\frac{y^3}{3} + f(x) \qquad \Rightarrow f(x) = \text{const.} = 0 \text{ o.B.d.A.}$$

$$\Rightarrow \vec{A} = C\left(x^2 y + \frac{1}{3}y^3\right)\vec{e}_z$$

Hinweis: $\sin(3\alpha) = \sin(\alpha)\left[4\cos^2(\alpha) - 1\right]$

(ii) Vektorpotential in ebenen Polarkoordinaten

$$x = \rho\cos(\alpha), \quad y = \rho\sin(\alpha)$$

$$\vec{A} = C\left[\rho^2\cos^2(\alpha)\,\rho\sin(\alpha) + \frac{1}{3}\rho^3\sin^3(\alpha)\right]\vec{e}_z =$$

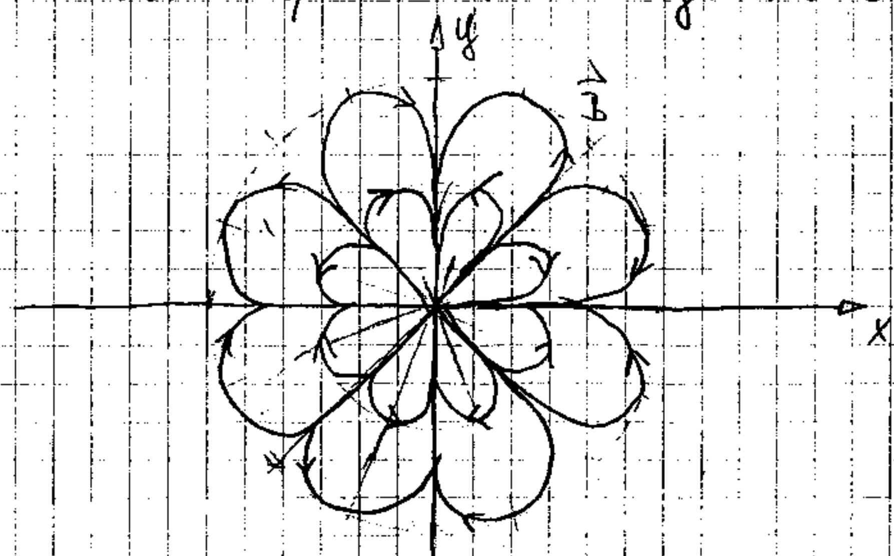
$$= C\rho^3\left[\frac{1}{4}\sin(3\alpha) + \frac{\sin(\alpha)}{4} + \frac{1}{3}\sin^3(\alpha)\right]\vec{e}_z$$

$$= C\rho^3\left[\frac{1}{4}\sin(3\alpha) + \frac{1}{4}\sin(\alpha) + \frac{1}{12}\sin(\alpha) - \frac{1}{12}\sin(3\alpha)\right]\vec{e}_z$$

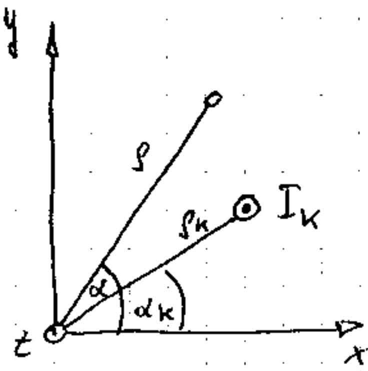
$$= C\rho^3\left[\frac{1}{3}\sin(\alpha) + \frac{1}{6}\sin(3\alpha)\right]\vec{e}_z =$$

$$= \frac{C}{3}\rho^3\left[\sin(\alpha) + \frac{1}{2}\sin(3\alpha)\right]\vec{e}_z$$

(iii) Skizziere qualitativ richtiges Feld



7.)



Um das magn. Feld mehrerer parallel zur z-Achse verlaufender Linienströme in relativ großem Abstand durch Überlagerung zu berechnen wird zunächst das Feld eines Einzelstroms I_k mit allg. Lage bestimmt. Das liefert das Vektorpotential in ebenen Polarkoordinaten

$$\vec{A}_k = -\frac{\mu_0 I_k}{2\pi}\,\mathrm{Re}\left[\ln\left(1-\zeta/\zeta_k\right)\right]\vec{e}_z,\quad \zeta = \rho e^{j\alpha},\quad \zeta_k = \rho_k e^{j\alpha_k}$$

Hinweis: $\ln(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$, $|z|<1$

__Ges:__ Reelle Reihenentwicklung für $\vec{A}_k$ (Multipolentwicklung) für $\rho > \rho_k$

Ist das ein Angabefehler.

Ich habe bei der Prüfung einfach

$\frac{\zeta}{\zeta_k} = z$ eingesetzt

$$\frac{\zeta}{\zeta_k} = \frac{\rho e^{j\alpha}}{\rho_k e^{j\alpha_k}} = \underbrace{\frac{\rho}{\rho_k}}_{|z|>1} e^{j(\alpha-\alpha_k)}$$

$|z| > 1$ => Bedingung verletzt

2 Möglichkeiten:

a) Formel nicht anwendbar

b) $\rho < \rho_k$ annehmen gegebene Formel anwenden und weiterrechnen

8.) Die elektrische Komponente einer ebenen elektromagnetischen Sinuswelle die sich in einem dünnen Medium mit konstanten Werten μ, ε und der Konduktivität σ ausbreitet läßt sich in der Form $\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}\, e^{j\omega t - \gamma \vec{\varkappa}\cdot\vec{r}}\right]$

$\gamma = \alpha + j\beta$, $\alpha = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{1+(\omega T_R)^{-2}} - 1\right]}$ $\qquad c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$

$\beta = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{1+(\omega T_R)^{-2}} + 1\right.}$ $\qquad T_R = \frac{\varepsilon}{\sigma}$

ges: Reichweite in Meerwasser $\varepsilon = 80\varepsilon_0$

(Abstand in dem Amplitude $\mu = \mu_0$

auf 1% des urspr. Wertes $\sigma = 5\,\frac{S}{m}$

Abgesunken ist)

für (i) $f = 25\,kHz$ (ii) $f = 25\,MHz$

$$e^{-\alpha r} = 0{,}01$$

$$r = \frac{-\ln(0{,}01)}{\alpha}$$

$$T_R = \frac{8{,}854\cdot 10^{-12}\,\frac{As}{Vm}}{5\,\frac{S}{m}} = 2{,}513\cdot 10^{-7}\,s$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\, 80\varepsilon_0}} = 3{,}352\cdot 10^{7}\,\frac{m}{s}$$

$$\omega_1 = 2\pi\cdot 25\cdot 10^{3}\,\frac{1}{s} = 1{,}571\cdot 10^{5}\,\frac{1}{s}$$

$$\omega_2 = 2\pi\cdot 25\cdot 10^{6}\,\frac{1}{s} = 1{,}571\cdot 10^{8}\,\frac{1}{s}$$

$\Rightarrow \alpha_1 = 1{,}635\cdot 10^{-2}\,\frac{1}{m}$ $\qquad \alpha_2 = 16{,}352\,\frac{1}{m}$

$r_1 = 281{,}622\,m$ $\qquad r_2 = 0{,}282\,m$

9.) A 5.3.5

10.) PR 6

PR 1 Modifikation der Maxwell-Gleichungen nach Watson

Eine Modifikation der Maxwell-Gleichungen in der Form
$$\vec{\nabla}\times\vec{H} - \partial_t\vec{D} = \vec{J} - \vec{\nabla}G \qquad (1)$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho + \varepsilon\mu\,\partial_t G \qquad (2)$$
nach Watson führt bei manchen Problemen zu Vereinfachungen. Welcher Gleichung muß die Funktion G genügen.

1

$$\underbrace{\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H})}_{0} - \partial_t \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{D}}_{\rho+\varepsilon\mu\partial_t G} = \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{J}}_{-\partial_t\rho} - \nabla^2 G$$
2

$$\cancel{-\partial_t\rho} - \varepsilon\mu\,\partial_t G = \cancel{-\partial_t\rho} - \nabla^2 G$$

$$\nabla^2 G - \varepsilon\mu\,\partial_t G = 0 \qquad \varepsilon\mu = \frac{1}{c^2}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t\right)G = 0$$

homogene Wellengleichung für G

1 $\boxed{\vec{\nabla}\cdot(\partial_t\vec{f}) = \partial_t(\vec{\nabla}\cdot\vec{f})}$

2 $\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = -\partial_t\rho}$

PR 2

$$\vec{J} = \frac{I_0}{\pi} \frac{\rho z \vec{e}_\rho + (a^2+z^2)\vec{e}_z}{(a^2+z^2)^2}, \quad I_0 \text{ und } a \text{ sind konstant}$$

ges: magnetische Feldstärke

Tab. 1.3 $$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{e}_\rho \left(\frac{1}{\rho}\partial_\alpha H_z - \partial_z H_\alpha\right) + \vec{e}_\alpha \left(\partial_z H_\rho - \partial_\rho H_z\right) + \vec{e}_z \frac{1}{\rho}\left[\partial_\rho(\rho H_\alpha) - \partial_\alpha H_\rho\right]$$

$$= \vec{e}_\rho \frac{I_0 \rho z}{\pi(a^2+z^2)^2} + \vec{e}_z \frac{I_0}{\pi(a^2+z^2)}$$

$$\boxed{\text{Hat } \vec{J} \text{ nur eine } \rho \text{ und eine } \alpha\text{-Komponente, so gilt } \vec{H} = H_\alpha \vec{e}_\alpha}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = -\vec{e}_\rho \partial_z H_\alpha + \vec{e}_z \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho H_\alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho H_\alpha) = \frac{I_0}{\pi(a^2+z^2)}$$

$$\partial_\rho(\rho H_\alpha) = \frac{I_0 \rho}{\pi(a^2+z^2)}$$

$$\rho H_\alpha = \frac{\frac{1}{2} I_0 \rho^2}{\pi(a^2+z^2)} + f(\alpha, z)$$

$$H_\alpha = \frac{I_0 \rho}{2\pi(a^2+z^2)} + \frac{f(\alpha,z)}{\rho}$$

$$-\partial_z H_\alpha = + \frac{\frac{1}{2} I_0 \rho}{\pi(a^2+z^2)^2} 2z - \underbrace{\frac{\partial_z f(\alpha,z)}{\rho}}_{0} \stackrel{!}{=} \frac{I_0 \rho z}{\pi(a^2+2z)^2}$$

$$\partial_z f(\alpha,z) = 0 \Rightarrow f(\alpha,z) = \text{const} = 0$$

o.B.d.A

$$\vec{H} = \frac{-I_0 \rho}{2\pi(a^2+z^2)} \vec{e}_\alpha$$

PR 3 $\vec{f} = r^2 \sin(\theta) \cos(\alpha)$

Res: $\vec{r} \times \vec{\nabla} f$

Tab. 1.3 $\vec{\nabla} f = \vec{e}_r \, 2r \sin(\theta)\cos(\alpha) + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} r^2 \cos(\theta)\cos(\alpha) +$
$+ \vec{e}_\alpha \frac{-r^2 \sin(\theta) \sin(\alpha)}{r \sin(\theta)} =$

$= \vec{e}_r \, 2r \sin(\theta)\cos(\alpha) + \vec{e}_\theta \, r \cos(\theta)\cos(\alpha) - \vec{e}_\alpha \, r \sin(\alpha)$

$\boxed{\vec{r} = r\vec{e}_r}$

$\vec{r} \times \vec{\nabla} f = \vec{e}_\alpha \, r^2 \cos(\theta)\cos(\alpha) + \vec{e}_\theta \, r^2 \sin(\alpha) =$

$= \vec{e}_\theta \, r^2 \sin(\alpha) + \vec{e}_\alpha \, r^2 \cos(\theta)\cos(\alpha)$

$\boxed{\vec{e}_r \times \vec{e}_r = \vec{0}}$ $\boxed{\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta = \vec{e}_\alpha}$ $\boxed{\vec{e}_r \times (-\vec{e}_\alpha) = \vec{e}_\theta}$

PR4 Feld eines Linienleiters dargestellt durch längenbezogene Magnetisierung m' und längenbezogene Polarisation P':

$$\vec{A} = -\frac{\mu_0 m'}{2\pi}\frac{\cos(\alpha)}{\rho}\vec{e}_z, \qquad \varphi = -\frac{P'}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\cos(\alpha)}{\rho}$$

ges: Feld des Poynting-Vektors

$$\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}} \overset{\text{Tab. 1.3}}{=} -\frac{\mu_0 m'}{2\pi}\left\{\vec{e}_\rho \frac{1}{\rho}\frac{-\sin(\alpha)}{\rho} + \vec{e}_\alpha \frac{1}{\rho^2}\cos(\alpha)\right\} =$$

$$= \frac{\mu_0 m'}{2\pi\rho^2}\left\{\sin(\alpha)\vec{e}_\rho - \cos(\alpha)\vec{e}_\alpha\right\}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi =}$$

$$\text{Tab. 1.3} = \frac{P'}{2\pi\varepsilon_0}\left\{\vec{e}_\rho\left(-\frac{1}{\rho^2}\right)\cos(\alpha) + \vec{e}_\alpha\frac{1}{\rho}\frac{[-\sin(\alpha)]}{\rho}\right\} =$$

$$= -\frac{P'}{2\pi\varepsilon_0\rho^2}\left\{\cos(\alpha)\vec{e}_\rho + \sin(\alpha)\vec{e}_\alpha\right\}$$

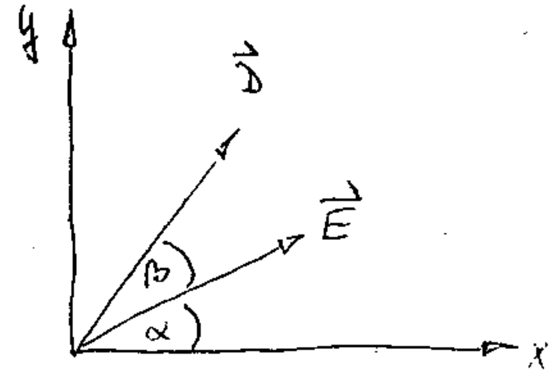
$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} = \vec{E}\times\frac{\vec{B}}{\mu_0} = -\frac{P'}{2\pi\varepsilon_0\rho^2}\frac{m'}{2\pi\rho^2}\left\{\left[\cos(\alpha)\vec{e}_\rho + \sin(\alpha)\vec{e}_\alpha\right]\times\right.$$
$$\left.\times\left[\sin(\alpha)\vec{e}_\rho - \cos(\alpha)\vec{e}_\alpha\right]\right\} =$$

$$= -\frac{P'm'}{4\pi^2\varepsilon_0\rho^4}\left\{-\cos^2(\alpha)\vec{e}_z - \sin^2(\alpha)\vec{e}_z\right\} =$$

$$= \frac{P'm'}{4\pi^2\varepsilon_0\rho^4}\vec{e}_z$$

$$\boxed{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1}$$

PR 5



$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \left(5\, \vec{e}_x \otimes \vec{e}_x + 10\, \vec{e}_y \otimes \vec{e}_y\right) \varepsilon_0$$

ges: Winkel β durch Winkel α darstellen

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\alpha)}$$

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}}$$

$$\boxed{(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j)\cdot\vec{e}_k = \vec{e}_i\,\delta_{jk}}$$

$$\vec{e}_x \cdot \vec{E} = |\vec{E}|\cos(\alpha)$$

$$\vec{E}\cdot\vec{D} = |\vec{D}|\,|\vec{E}|\cos(\beta)$$

$$\frac{\cos(\beta)\,|\vec{D}|\,|\vec{E}|}{\cos(\alpha)\,|\vec{E}|} = \frac{\vec{E}\cdot\vec{D}}{\vec{e}_x\cdot\vec{E}} = \frac{\vec{D}\cdot\vec{e}_x}{\underbrace{\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x}_{1}} = \vec{D}\cdot\vec{e}_x$$

FALSCH

$$\cos(\beta) = \frac{\vec{D}}{|\vec{D}|}\cdot\vec{e}_x\cdot\cos(\alpha)$$

$$\vec{D} = \underset{\sim}{\varepsilon}\cdot\vec{E} = \left(5\,\vec{e}_x\otimes\vec{e}_x + 10\,\vec{e}_y\otimes\vec{e}_y\right)\varepsilon_0\left(E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y\right) =$$

$$= E_x 5\varepsilon_0\,\vec{e}_x + E_y 10\varepsilon_0\,\vec{e}_y = 5\varepsilon_0\left(E_x\vec{e}_x + 2E_y\vec{e}_y\right)$$

$$\boxed{E_x = |\vec{E}|\cos(\alpha)}, \quad \boxed{E_y = |\vec{E}|\sin(\alpha)}$$

$$\vec{D} = 5\varepsilon_0\,|\vec{E}|\left[\cos(\alpha)\,\vec{e}_x + 2\sin(\alpha)\,\vec{e}_y\right]$$

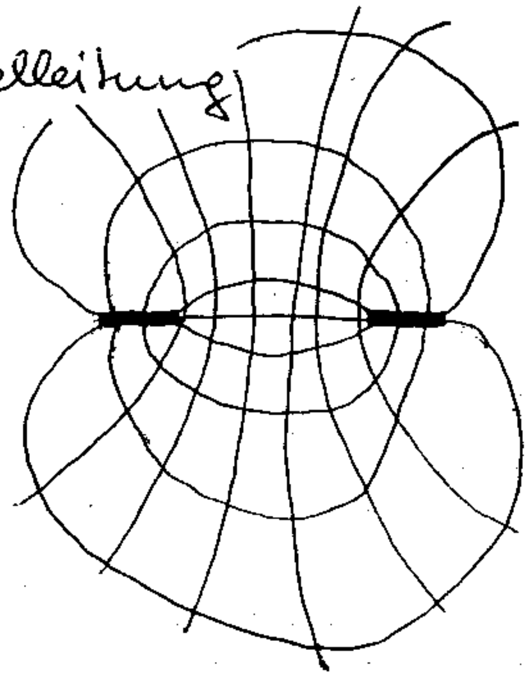
$$\vec{D}\cdot\vec{e}_x = 5\varepsilon_0\,|\vec{E}|\cos(\alpha) \qquad \boxed{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1}$$

$$|\vec{D}| = 5\varepsilon_0\,|\vec{E}|\sqrt{\cos^2(\alpha) + 4\sin^2(\alpha)} = 5\varepsilon_0\,|\vec{E}|\sqrt{1+3\sin^2(\alpha)}$$

$$\beta = \arccos\left\{\frac{\vec{D}\cdot\vec{e}_x}{|\vec{D}|}\cos(\alpha)\right\} = \arccos\left\{\frac{5\varepsilon_0\,|\vec{E}|\cos^2(\alpha)}{5\varepsilon_0\,|\vec{E}|\sqrt{1+3\sin^2(\alpha)}}\right\} =$$

$$= \arccos\left\{\frac{\cos^2(\alpha)}{\sqrt{1+3\sin^2(\alpha)}}\right\}$$

7R6 Doppelleitung



Geg: $\Delta\varphi$, $\Delta\psi' = \varepsilon_0 \Delta\varphi$

Ges: (i) Kapazitätsbelag
(ii) äußeren Induktivitätsbelag (ideal met. RB)
(iii) Wellenimpedanz für verlustfreie Ausbreitung von TEM-Wellen

Anz. Flußröhren: $n_1 = 10$
Anz. Potentialflächen: $n_2 = 10$

(i) $\boxed{Q = CU} \Rightarrow C = \frac{Q}{U} \Rightarrow C' = \frac{Q'}{U} = \frac{\psi'}{U} = \frac{\Delta\psi' n_1}{\Delta\varphi\, n_2} = \varepsilon_0 \frac{n_1}{n_2} = \varepsilon_0 =$

$\boxed{Q(V) = \psi(\partial V)}$

$= 8{,}8542 \cdot \frac{pF}{m}$

(ii) ideale, verlustfreie Leitungen:
(S. 106) $L'C' = \mu\varepsilon = \frac{1}{c^2}$

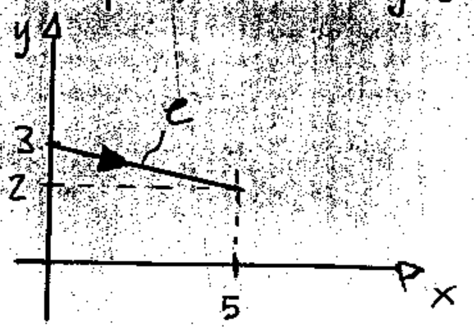
$$L' = \frac{1}{C' c_0^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 c_0^2} = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{F}{m} = 1{,}2566 \frac{\mu F}{m}$$

$\varepsilon_0 \mu_0 c_0^2 = 1$

(iii) $\boxed{Z_W = \sqrt{\frac{L'}{C'}}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 376{,}7301\ \Omega$

Prüfung aus TET 2 vom 7.3.2001

① geg: Vektorfeld $\vec{f}(\vec{r}) = 2x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$



Berechne das Integral $\int_{\mathcal{C}} \vec{f}(\vec{r})\, d\vec{r}$ entlang der Kurve $\mathcal{C}$!

Lösung: $d\vec{r} = \vec{e}_x dx + \vec{e}_y dy$

$$\rightarrow \int_{\mathcal{C}} (2x\vec{e}_x + y\vec{e}_y)\cdot(\vec{e}_x dx + \vec{e}_y dy) = \int_0^5 2x\,dx + \int_3^2 y\,dy = \underline{\underline{22{,}5}}$$

② geg: Drücken Sie folgendes Integral

$$\int_V \vec{\nabla}\times\vec{f}\, dV$$

durch ein Hüllintegral aus, in dem keine Koordinaten-zerlegung mehr vorkommt, und verwenden Sie dabei folgende Identität:

$$\int_{\partial V} n_i f\, dA = \int_V \partial_i f\, dV$$

Lösung: $\int_V \vec{\nabla}\times\vec{f}\, dV = \int_V \left\{\vec{e}_x[\partial_y f_z - \partial_z f_y] + \vec{e}_y[\partial_z f_x - \partial_x f_z] + \vec{e}_z[\partial_x f_y - \partial_y f_z]\right\} dV =$

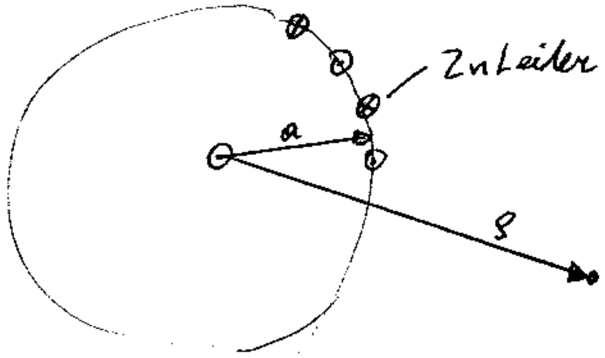
$$= \int_{\partial V} \left\{\vec{e}_x[n_y f_z - n_z f_y] + \vec{e}_y[n_z f_x - n_x f_z] + \vec{e}_z[n_x f_y - n_y f_z]\right\} dA =$$

$$= \underline{\underline{\int_{\partial V} \vec{n}\times\vec{f}\, dA}}$$

das ist übrigens eine Form der Green Integraltransformationen!

③ geg: $\vec{A} = -\frac{\mu_0 I}{\pi}\left(\frac{a}{\varrho}\right)^n \cos(n\alpha)\,\vec{e}_z$

Dieser Ausdruck entspricht dem Vektorpotential für folgende Anordnung:



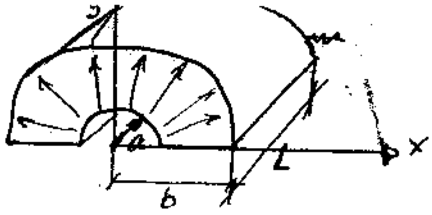
ges: Berechnen Sie die magnetische Flußdichte in ebenen Polarkoordinaten, und vergleichen Sie deren Beträge für n=3 und n=1 und $\varrho = 10a$!

Lösung: $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \dots = \frac{\mu_0 I n}{\pi a}\left(\frac{a}{\varrho}\right)^{n+1}\left\{\vec{e}_\varrho \sin(n\alpha) + \vec{e}_\alpha \cos(n\alpha)\right\}$

Betrag: $|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I n}{\pi a}\left(\frac{a}{\varrho}\right)^{n+1}$

Vergleich: $\left.\frac{|\vec{B}|_{n=3}}{|\vec{B}|_{n=1}}\right|_{\varrho=10a} = \frac{\frac{\mu_0 I\, 3}{\pi a}\left(\frac{1}{10}\right)^4}{\frac{\mu_0 I}{\pi a}\left(\frac{1}{10}\right)^2} = \underline{\underline{0{,}03}}$

④ geg:



Dieses Teil [redacted] ist konstant mit $\vec{M}$ magnetisiert. $\vec{e}_\varrho$

ges: Berechnen Sie das magnetische Moment der Anordnung!

Lösung: $\underline{\underline{\vec{m}}} = \int_V \vec{M}\, dV = \int_a^b \int_0^\pi M L r\, \vec{e}_\varrho \, d\alpha\, dr = L \cdot M \int_a^b \int_0^\pi [\cos\alpha\, \vec{e}_x + \sin\alpha\, \vec{e}_y]\, r\, d\alpha\, dr =$

mit $dV = L\, r\, d\alpha\, dr$

und $\vec{e}_\varrho = \cos\alpha\, \vec{e}_x + \sin\alpha\, \vec{e}_y$

und $\vec{M} = M\, \vec{e}_\varrho$ $M = \text{const.}$

$$= L M \int_a^b r\, dr \int_0^\pi [\cos\alpha\, \vec{e}_x + \sin\alpha\, \vec{e}_y]\, d\alpha = \frac{1}{2} L M (b^2 - a^2) \underbrace{\left\{ \sin\alpha\, \vec{e}_x - \cos\alpha\, \vec{e}_y \right\}_0^\pi}_{2} =$$

$$= \frac{1}{2} L M (b^2 - a^2) \cdot 2 = \underline{\underline{L M (b^2 - a^2)}}$$

⑤ A2.3.18:

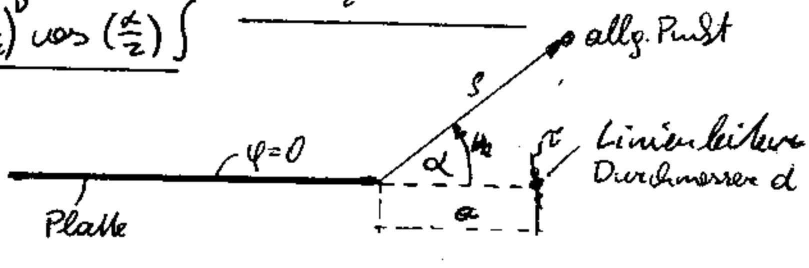
zusätzlich gegeben:

$$\underline{F = \int_{\partial V} \frac{1}{\mu_0} \left(\vec{n} \cdot \vec{B}\vec{B} - \frac{1}{2} B^2 \vec{n} \right) dA}$$

⑥ geg: In dieser Anordnung ~~hab~~ (dünne Platte, Linienleiter) haben Sie folgende Lösung für ein Potential:

$$\underline{\varphi = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \ln \left\{ \frac{1 + \left(\frac{\varrho}{a}\right)^{2\nu} + 2\left(\frac{\varrho}{a}\right)^{\nu} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \left(\frac{\varrho}{a}\right)^{2\nu} - 2\left(\frac{\varrho}{a}\right)^{\nu} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right\}} \qquad \underline{\nu = \begin{cases} \frac{1}{2} & \varrho < a \\ -\frac{1}{2} & \varrho > a \end{cases}}$$

Anordnung:



ges: Berechnen Sie die längenbezogene Kapazität der Anordnung! 4/5

Hinweis: $(1+\xi)^\nu \approx 1+\nu\xi$ für $|\xi| \ll 1$

Lösung: ~~das~~ aus der Skizze entnehmen wir:

$$\alpha = 0 \quad \varrho = a - \frac{d}{2} \quad \nu = \frac{1}{2}$$

auf dem Linienleiter sitzt die längenbezogene Ladung τ!

$$\rightarrow \varphi = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left\{\frac{1+\left(\frac{\varrho}{a}\right)+2\left(\frac{\varrho}{a}\right)^{\frac{1}{2}}}{1+\left(\frac{\varrho}{a}\right)-2\left(\frac{\varrho}{a}\right)^{\frac{1}{2}}}\right\} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left\{\frac{\left[1+\left(\frac{\varrho}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2}{\left[1-\left(\frac{\varrho}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2}\right\} =$$

$$= \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left\{\frac{\left[1+\left(1-\frac{d}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2}{\left[1-\left(1-\frac{d}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2}\right\} \cong \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left\{\frac{\left[1+1-\frac{d}{4a}\right]^2}{\left[\cancel{1}-\cancel{1}+\frac{d}{4a}\right]^2}\right\} =$$

$$= \dots = \frac{\tau}{\cancel{4}_2\pi\varepsilon_0}\ln\left[\left(\frac{8a}{d}-1\right)^{\cancel{2}}\right] =$$

$$\underline{= \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{8a}{d}-1\right)} \quad (= U)$$

$$\rightarrow Q' = C'U \rightarrow C' = \frac{\overset{=\tau}{Q'}}{U}$$

$$\rightarrow C' = \frac{\tau}{U} = \underline{\underline{\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left[\frac{8a}{d}-1\right]}}}$$

(4) geg: $\vec{B} = \frac{B_0}{a}\left\{(x-2y)\vec{e}_x + (2x-y)e_y\right\}$

ges: Berechnen Sie ein Maxwell geeichtes magnet. Vektorpotential!

Lösung: $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{e}_x\,\partial_y A - \vec{e}_y\,\partial_x A$

$$\rightarrow \partial_y A = \frac{B_0}{a}(x-2y$$

$$A = \frac{B_0}{a}(xy-y^2)+f(x)$$

$$\rightarrow \partial_x A = \frac{B_0}{a}(y)+f'(x) \overset{!}{=} -\frac{B_0}{a}(2x-y) \rightarrow f'(x) = -\frac{B_0}{a}2x$$

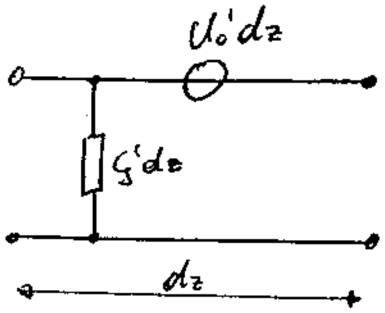
$$f(x) = -\frac{B_0}{a}x^2$$

$$\rightarrow \underline{\underline{\vec{A} = \frac{B_0}{a}\left(xy-y^2-x^2\right)\vec{e}_z}} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \partial_z A_z = 0 \checkmark$$

$\rightarrow$ Maxwell geeicht

⑧ A4.2.5

⑨ geg:



RB: $i(0) = i(\ell) = 0$

ges: Berechnen und zeichnen Sie den Stromverlauf in der Leitung von $z = 0$ bis $z = \ell$!

Lösung:

$$-\cancel{U} + U_0' dz + \cancel{U} + \partial_z U dz = 0$$

$$U_0' + \partial_z U = 0$$

$$\cancel{I} - U G' dz - \cancel{I} - \partial_z I dz = 0$$

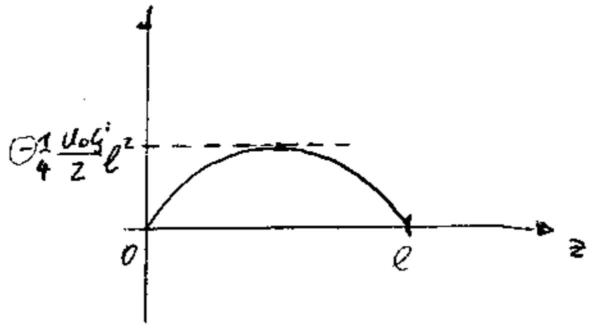
$$U G' + \partial_z I = 0 \quad | \partial_z$$

$$\partial_z U G' + \partial_z^2 I = 0$$

$$-U_0 G' + \partial_z^2 I = 0$$

$$\partial_z I = U_0 G' z + C_1$$

$$I = U_0 G' z^2/2 + C_1 z + C_2$$



$z = 0$: $\boxed{0 = C_2}$

$z = \ell$: $0 = U_0 G' \frac{\ell^2}{2} + C_1 \ell \Rightarrow \boxed{C_1 = -U_0 G' \frac{\ell}{2}} \Rightarrow \underline{\underline{I}} = U_0 G' \frac{z^2}{2} - U_0 G' \frac{\ell}{2} z = \underline{\underline{\frac{U_0 G'}{2}(z^2 - \ell z)}}$

⑩ so ähnlich wie A5.3.2

bestimmen sie ~~...~~ die Wellenimpedanz der Anordnung!

① $H(\vec r) = C(3x^2y - y^2z + 2z^2x)$; $P(1,1,1)$ Ableitung in Richtg $\vec r$

$$(\vec\nabla H)\cdot\vec e\Big|_{1,1,1} = C\left[(6xy + 2z^2)\vec e_x + (3x^2 - 2zy)\vec e_y + (-y^2 + 4zx)\vec e_z\right]\frac{(x\vec e_x + y\vec e_y + z\vec e_z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = C\frac{11}{\sqrt3} = \underline{\underline{C\sqrt3^{1}\cdot 4}}$$

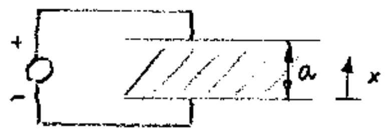
---

② $\vec\nabla\times\vec H - \partial_t\vec D = \vec J - \vec\nabla G$; $\vec\nabla\vec D = \rho + \mu_0\varepsilon_0\partial_t G$ Wann ist die Kontinuitätsgleichung erfüllt?

$$\underbrace{\vec\nabla\cdot(\vec\nabla\times\vec H)}_{\varnothing} - \underbrace{\vec\nabla\partial_t\vec D}_{\partial_t\rho + \mu_0\varepsilon_0\partial_t^2 G} = \vec\nabla\vec J - \nabla^2 G \Rightarrow \underline{\underline{\mu_0\varepsilon_0\partial_t^2 G + \nabla^2 G = 0}} \Rightarrow \vec\nabla\cdot\vec J = -\partial_t\rho$$

---

③ $\varepsilon(x) = \varepsilon_0\dfrac{2a}{a+x}$; $C' = ?$
$\rho^f, \sigma^f = ?$

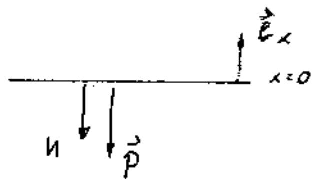


$$U = \int E\,dx = \int\frac{1}{\varepsilon}D\,dx = \int_0^a\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{a+x}{2a}D\,dx = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{3a}{4}D \Rightarrow \underline{\vec D = \frac{4}{3}\varepsilon_0\frac{U}{a}(-\vec e_x)}$$

$$\vec E = \frac{1}{\varepsilon}D = \frac{2U}{3a^2}(a+x)(-\vec e_x); \quad \vec P = \vec D - \varepsilon_0\vec E = \varepsilon_0 U\left(\frac{4}{3a} - \frac{2}{3a^2}(a+x)\right)(-\vec e_x)$$

$$\underline{\underline{\rho^f}} = -\vec\nabla\vec P = \underline{\underline{-\frac{2}{3a^2}\varepsilon_0 U}}$$

$$\sigma^f_{x=0} = -n\cdot[\![\vec P]\!]\Big|_{x=0} = -\varepsilon_0 U\left(\frac{4}{3a} - \frac{2}{3a}\right) = \underline{\underline{-\varepsilon_0 U\frac{2}{3a}}}$$



$$\sigma^f_{x=a} = -n[\![\vec P]\!]\Big|_{x=a} = \underline{\underline{0}} \Rightarrow \varepsilon(a) = \varepsilon_0 \;!!$$

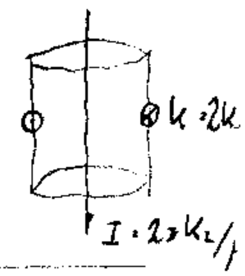
---

④ $\vec A = K_1\rho\,\vec e_\varphi + K_2\ln\frac{\rho}{a}\,\vec e_z$ $\vec B = ?$ Vektorlinien $\vec B$; wie kann $\vec B$ erzeugt werden?

$$\vec B = \vec\nabla\times\vec A = -\vec e_\varphi\,\partial_\rho[K_2\ln(\tfrac{\rho}{a})] + \vec e_z\frac{1}{\rho}\partial_\rho(K_1\rho^2)] = -\frac{K_2}{\rho}\vec e_\varphi + 2K_1\vec e_z$$

B sind Schraubenlinien um die z-Achse $\tan(\alpha) = -\dfrac{K_1}{K_2}\cdot 2\rho$

Kreiszylinderspule und Linienleiter



---

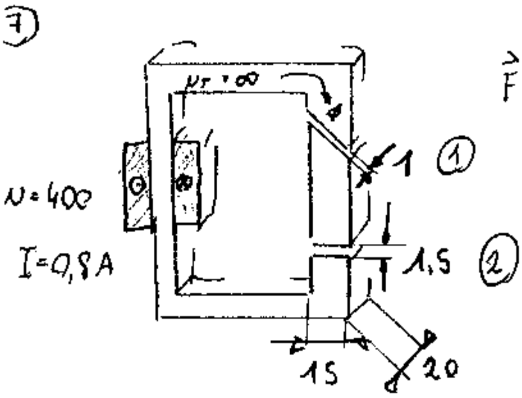
⑥ $\vec E_0$ isolierende Kugel ; $\vec E(a) = ?$

$\vec p = \dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}3\varepsilon_0\vec E_0 \quad r < a$

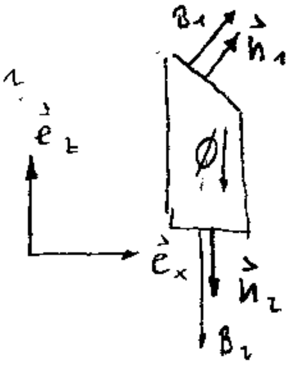
$$\vec P = P_0\vec e_z = P_0\cdot(\cos\theta\,\vec e_r - \sin\theta\,\vec e_\theta) ; \; \sigma^f = -\vec n\cdot[\![\vec P]\!] = -\vec e_r(-P_0(\cos\theta\,\vec e_r - \sin\theta\,\vec e_\theta)) = P_0\cos\theta$$

$$\underline{\underline{E(a)}} = \sigma^f\cdot\frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\vec e_r = \underline{\underline{\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}3\varepsilon_0\cos\theta\,\vec e_r}}$$

7



$\vec{F} = ?$



$$n_1 = \frac{\vec{e}_x}{\sqrt{2}} + \vec{e}_z \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$n_2 = -\vec{e}_z$$

$$\oint H ds = \Theta \Rightarrow H = \frac{\Theta}{l_1 + l_2} = \frac{0{,}8 \cdot 500}{(1 + 1{,}5)} \cdot 10^3 = 160 \cdot 10^3 \, A/m$$

$$B_2 = \mu_0 \cdot H \; ; \; B_1 = B_2 \cdot \frac{A_2}{A_1} = B_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\mu_0 \cdot H}{\sqrt{2}} \; ; \; A_2 = A_1 \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{F}_R = \frac{1}{\mu_0} \int (\vec{n} \cdot \vec{B} \vec{B} - \frac{1}{2} B^2 \vec{n}) \, dA = \frac{1}{\mu_0} \left[\vec{n}_1 B_1^2 \frac{1}{2} A_1 + \vec{n}_2 B_2^2 A_2 \frac{1}{2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2\mu_0} \left[\vec{n}_1 \frac{H^2}{2} A_2 \cdot \sqrt{2} + \vec{n}_2 H^2 \cdot A_2 \right] \mu_0^2 = \frac{H^2}{2} \mu_0 \left[\frac{\vec{n}_1}{\sqrt{2}} + \vec{n}_2 \right] \cdot A_2 =$$

$$= \frac{H^2 A_2}{2} \mu_0 \left[\frac{\vec{e}_x}{2} + \frac{\vec{e}_z}{2} - \vec{e}_z \right] = \frac{H^2 A_2}{4} \mu_0 \left[\vec{e}_x - \vec{e}_z \right] =$$

$$= \frac{(160 \cdot 10^3)^2 (15 \cdot 10^{-3})(20 \cdot 10^{-3})}{4} \mu_0 \left[\vec{e}_x - \vec{e}_z \right] = \underline{\underline{2{,}41 \, N \, (\vec{e}_x - \vec{e}_z)}}$$

---

8 $\quad \rho_0$, a Kugel $\quad t < 0 : \rho_0 \quad \vec{J} = ?$; Ladungsverteilg bei $t \to \infty$

$$T_h \partial_t \rho + \rho = 0 \; ; \; T_h = \frac{\varepsilon}{\gamma} \; ; \; \rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, 0) \, e^{-t/T_h} = \rho_0 e^{-t/T_h}$$

$$\oint_{\partial A} \vec{n} \cdot \vec{J} \, dA = -\frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV \Rightarrow J \cancel{4\pi r^2} = \frac{1}{T_h} \rho_0 e^{-t/T_h} \cdot \frac{\cancel{4\pi} r^{\cancel{3}}}{3} \Rightarrow \underline{\underline{\vec{J} = \frac{1}{T_h} \frac{\rho_0}{3} e^{-t/T_h} \cdot r \, \vec{e}_r}}$$

$$\underline{\underline{\sigma \Big|_{\substack{r=a \\ t \to \infty}}}} = \frac{Q}{A} = \frac{\rho_0 \frac{4\pi r^3}{3}}{4\pi r^2} = \underline{\underline{\rho_0 \frac{a}{3}}}$$

---

9 $\quad P, Q, S$ bei Leitung mit $\underline{Z}_w$

$$\underline{U} = U_0 \cdot e^{-\gamma z} \quad \underline{Z}_w = Z_w \, e^{j\varphi} \; ; \; \gamma = \alpha + j\beta \Rightarrow \underline{S} = \frac{U_0^2}{\underline{Z}_w} \cdot e^{-j\varphi} e^{-2\alpha z} \; ; \; P = \mathrm{Re}[\underline{S}] = \frac{U_0^2}{Z_w} \cos\varphi \, e^{-2\alpha z}$$

$$\underline{I} = \frac{U_0}{\underline{Z}_w} e^{-\gamma z} \qquad S = \mathrm{Im}[\underline{S}] = \frac{U_0^2}{Z_w} \sin\varphi \, e^{-2\alpha z}$$

(5) $$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\omega(\vec r,t) = -f(\vec r,t)$$; d'Lambert Operator

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)W(\vec r, j\omega) = -F(\vec r, j\omega)$$

Helmholz Operator

---

(10) $$\vec F(\vec r,t) = \mathrm{Re}\left(\vec F e^{(j\omega t - \gamma \vec k \vec r)}\right)$$

$$\gamma \vec k \times \vec E = j\omega\mu \vec H \qquad \gamma \vec k \times \vec H = -(\sigma + j\omega\varepsilon)\vec E \qquad \alpha, \beta = ?$$

$\gamma = \alpha + j\beta$

$$\vec k \times (\gamma \vec k \times \vec E) = j\omega\mu\, \vec k \times \vec H = j\omega\mu\left[-\frac{(\sigma + j\omega\varepsilon)}{\gamma}\vec E\right]$$

$$-\gamma^2 \vec E = (-j\omega\mu\sigma + \omega^2\varepsilon\mu)\vec E \qquad \Big| \; k \times (k \times E) = \vec k(\underbrace{\vec k \cdot \vec E}_{0}) - \vec E(\underbrace{\vec k \vec k}_{1})$$

$$\gamma^2 = \alpha^2 + 2j\beta\alpha - \beta^2 = +j\omega\mu\sigma - \omega^2\varepsilon\mu$$

$$2\beta\alpha = +\omega\mu\sigma \; ; \; \alpha^2 - \beta^2 = -\omega^2\varepsilon\mu$$

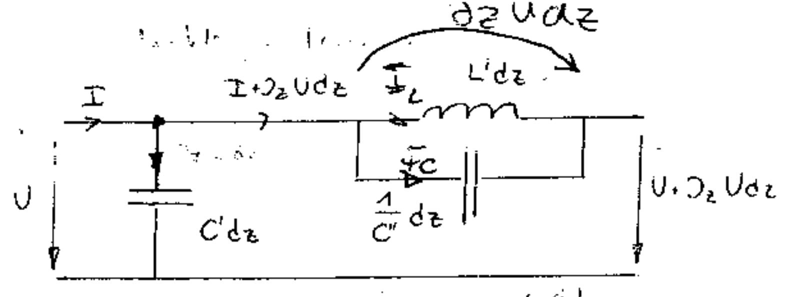
$$\beta = \frac{+\omega\mu\sigma}{2\alpha} \Rightarrow \alpha^4 + \omega^2\varepsilon\mu\alpha^2 - \left(\frac{1}{2}\omega\mu\sigma\right)^2 = 0$$

$$\underline{\underline{\alpha = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1\right]}}} \qquad \underline{\underline{\beta = \frac{\omega\mu\sigma}{2\alpha}}}$$

---

(10)

Ges. Leitungsgleichungen



$$\underline{\partial_z I + C' \partial_t U = 0}$$ 1. Leitungsgleichung

- $\partial_z U dz = L' dz \frac{d I_L}{dt}$, $I_C = \frac{1}{C''} dz \frac{d(\partial_z U dz)}{dt}$

$$I + \partial_z I dz = I_L + I_C = I_L + \frac{1}{C''} dz \frac{d(\partial_z U dz)}{dt}$$

$$\Rightarrow \underline{I_L = I + \partial_z I dz - \frac{1}{C''} dz \frac{d(\partial_z U dz)}{dt}}$$

- $\partial_z U dz = L' dz\, \partial_t \left[I + \partial_z I dz - \frac{1}{C''} dz\, \partial_t \partial_z U dz \right]$

$$\underline{\partial_z U - L' \partial_t I - L' \partial_t \left(\partial_z I - \frac{1}{C''} dz\, \partial_z \partial_t U \right) = 0}$$ 2. Leitungsgleichung

3) $\vec{E}(\vec{r},t) = Re\left[\vec{E}\, e^{j\omega t - \gamma z} \right]$ $\mu = \mu_0$ $\varepsilon = 80\varepsilon_0$ $G = 5 S/m$

Wie groß ist die Eindringtiefe von Radiowellen in Meerwasser i) 25kHz ii) 25MHz

mit $e^{-\gamma z} = e^{(-\alpha - j\beta) \cdot z} = \underbrace{e^{-\alpha z}}_{\text{Dämpfung}} \cdot e^{-j\beta z}$

$\alpha(\omega) = \omega \sqrt{\mu\varepsilon} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{G}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1 \right]}$

mit $G \gg \varepsilon \omega_2$ $(5 \gg 80 \cdot 8{,}8542 \cdot 25 \cdot 10^6 \cdot 10^{-12})$

$\Rightarrow \alpha(\omega) \approx \omega \sqrt{\mu\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{G}{\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{1}{2} \omega \mu G}$ $\boxed{\Rightarrow \delta(\omega) = \frac{1}{\alpha(\omega)}} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu G}}$

$\delta(\omega_1) = \sqrt{\frac{2}{\omega_1 \mu_0 G}} = \sqrt{\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\pi \cdot 25 \cdot 10^3 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5}} = 1{,}42 m$

$\delta(\omega_2) = \sqrt{\frac{2}{\omega_2 \mu_0 G}} = \sqrt{\frac{2}{2\pi \cdot 25 \cdot 10^6 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5}} = 0{,}045 m$

$e^{-\alpha z} = e^{-\frac{z}{\delta}} = 0{,}01 \Rightarrow z = -\delta \ln 0{,}01$

$\rightarrow z_1 = -\delta_1 \ln 0{,}01 = \underline{6{,}5556 m = z_1}$

$\rightarrow z_2 = -\delta_2 \ln 0{,}01 = \underline{0{,}2073 m = z_2}$

TET 2 20.11.2002

FET ✓

① Vektorfeld $\vec{V} = C \cdot \frac{1}{\rho^2} \left(\vec{e_\rho} \otimes \vec{e_\rho} - \vec{e_\alpha} \otimes \vec{e_\alpha} \right)$

C = konstant.

Ges: $\vec{V}(x,y,z)$

$\vec{V} = (x^2 - y^2)\, \vec{e_x} \otimes \vec{e_x} + (y^2 - x^2)\, \vec{e_y} \otimes \vec{e_y} + 2xy(\vec{e_x} \otimes \vec{e_y} + \vec{e_y} \otimes \vec{e_x}$

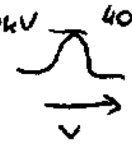
② Raum: ε_r, linear, isotrop … ρ … Raumladungsdichte gegeb

Ges: $\rho^f = f(\rho)$

$\rho^f = (1 - \varepsilon_r)\rho$ (?)

③ Leitung: $Z_w^{(1)}$ $Z_w^{(2)}$ $Z_w^{(3)}$

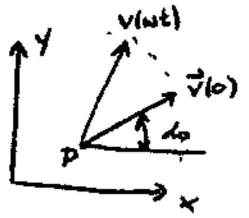
$U = 10\,kV$ 400 Ω 50 Ω 400 Ω



Gesucht: Spitzenwert der in Bereich 3 vorlaufenden Spg.-Wel

④ Gegeben: Stromdichte $\vec{J}$, Räumlich begrenzt (d.h. in Kugel m endlichen Radius)

Zeige: $W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{J} \cdot \vec{A}\, dV$

⑤ 

Gegeben: Vektor $\vec{v}$, konstanter Betrag

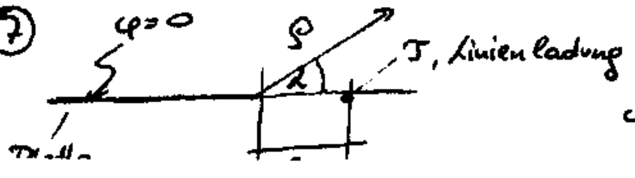
$\vec{v} = \mathrm{Re}\{\underline{\vec{v}}\, e^{j\omega t}\}$

Ges: $\underline{\vec{v}}$

$\underline{\vec{v}} = |\vec{v}| \cdot \{ e^{j\alpha_0}\, \vec{e_x} - j\, e^{j\alpha_0}\, \vec{e_y} \}$

⑥ Geg: $\vec{B} = (x^2 + y^2)\, \vec{e_x} + 2xy^2\, \vec{e_y}$

Ges: $\vec{A}$, $\vec{A}$ in Polarkoordinaten, Feldbild

⑦ 

$\varphi(\rho, \alpha) = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{1 + \left(\frac{\rho}{a}\right)^{2\alpha} + 2 \cdot (?)}{1 + \left(\frac{\rho}{a}\right)^{2\alpha} - 2 \cdot (?) \cdots} \right)$

$$v = \begin{cases} 1/2 & \rho < a \\ -1/2 & \rho > a \end{cases}$$

Ges: C' wenn Linienladung durch Draht ersetzt wird
Tip: $(1+\delta)^{v} = 1+v\delta$

(8) Zeige in Karthesischen Koordinaten:

$$\int_{\partial V} n_i f \, dA = \int_V \partial_i f \, dV \qquad i = x, y, z$$

Danach löse allgemein:

$$\int_{\partial V} \vec{n} f \, dA = ?$$

$\rightarrow$ Lösung & Beweis mit Satz v. Gauß

(9) Geg: Ebene Welle: $\vec{E} = \hat{E} \cdot \cos\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right)\right) \cdot \vec{e}_y$
Ges: Zeitl. Mittelwert der transportierten Energie ($\langle \vec{S} \rangle$)

(10) Geg: φ, $\vec{A}$ (waren Funktionen gegeben, nicht allgem
Ges: $\vec{S}$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

1) Sinuswelle (ebene) $S = 1{,}36\ \mathrm{kW/m}$ (zeitlicher Mittelwert)

wie groß ist die Amplitude von E und H

---

2) $$P' = \frac{\hat{H}_0}{\delta \sigma} \frac{\sinh(d/\delta) - \sin(d/\delta)}{\cosh(d/\delta) + \cos(d/\delta)}$$

bei welchem d ist P' ein Maximum

---

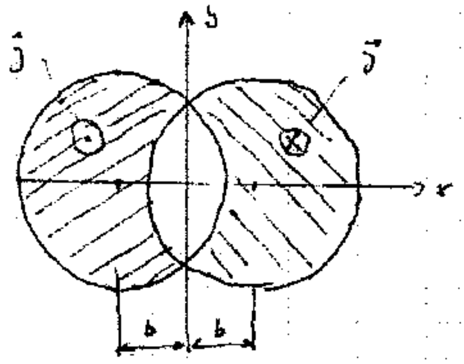
3) Aufgabe 5.3.2

---

4) $$\vec{J} = \frac{I_0}{\pi} \frac{\rho z \vec{e}_z + (a^2 + z^2)\vec{e}_\rho}{(a^2+z^2)^2} \qquad \vec{H} = ?$$

---

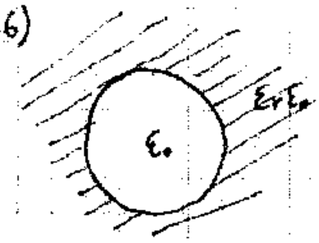
5)



$\vec{H}$ im stromfreien Bereich

---

6)



Kugelförmiger Hohlraum im Material mit Permittivität ε

Ansatz $\varphi = (Ar + B/r^2)\cos(\theta)$

$\varphi_0 = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\cos(\theta)}{r^2}$ φ_a: φ im Außenraum

---

7) Aufgabe 2.3.12

---

8) $\underline{\varepsilon} = 87\varepsilon_0 (\vec{e}_x \otimes \vec{e}_x + \vec{e}_y \otimes \vec{e}_y) + 173\,\varepsilon_0\, \vec{e}_z \otimes \vec{e}_z$

$\alpha = 30°$

welchen Winkel schließt $\vec{D}$ mit der z-Achse ein?

---

9) 1) zuerst beweisen

in Flächenintegral umformen → $\oint \vec{s} f\, ds = \int_A (\vec{e}_y \partial_x f - \vec{e}_x \partial_y f)\, dA$

2) $\oint \vec{s} f\, ds = ?$ $\left(-\int \vec{n} \times \nabla f\, dA\right)$

1. berechnen

10) $P(r, \theta, \alpha)$ $P_1 = (2m, 36°, 14°)$

$P_2 = (3m, 118°, 229°)$

Abstand zwischen P_1 und P_2 = ?

TET2 schriftlich 5.6.2002

1) Berechnen: $\vec{\nabla}\cdot(\vec{a}/r)$, $\vec{\nabla}\times(\vec{a}\times\vec{r}/r^3)$

$\vec{a}$ … konst. Vektor ; $\vec{r}$ … Vektor zu einem Punkt , $r = |\vec{r}|$

2) A 2.1.10

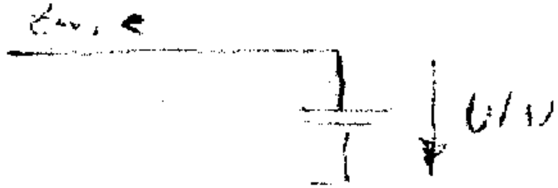
3) A 3.5.2.

4) dom. magn. Feldsystem: Herleitung Poynting Satz

5) A 3.2.7.

6) $\vec{B} = \frac{B_0}{a}\left[(2x-y)\vec{e}_x - (x+2y)\vec{e}_y\right]$ $\vec{A} = ?$

7) A 3.2.17 $u(0)$



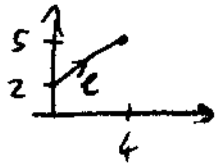
$U(t) = ?$

8) A 4.2.8

9) A 5.2.4. ähnlich 5.3.4.

TET 2 schriftlich 9. Mai 2001

① $\vec{g}(\vec{r}) = \cancel{\;} \; x\vec{e}_x - 2y\vec{e}_y$



ges.: $\int_C \vec{g}(\vec{r})$

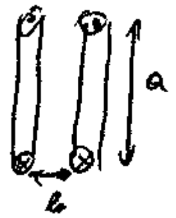
Lsg.: $\vec{g}(\vec{r}) = \nabla f \rightarrow \int_C \vec{g}(\vec{r}) = f(\vec{r}_2) - f(\vec{r}_1)$

② 5.2.11

③ 3.3.1

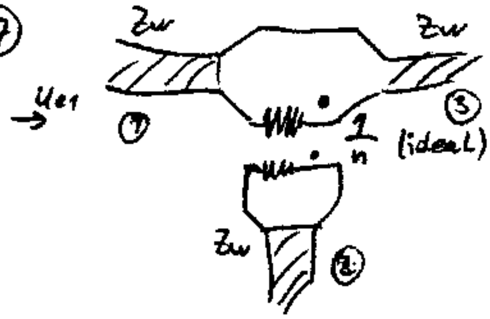
④ für dominant elektr. Feld: Pointingsatz in Integralform herleiten

⑤  dünne Spule: geg. $\vec{A}$

ges: gegenseitige Induktivität 2er Spulen:  $a^2 \gg b^2$

⑥ geg.: $\vec{A}$

ges: ϑ_M

⑦ 

geg.: U_{e1}

ges.: ges.: Spannungsimpuls, der auf die Leitg. ② übertragen wird

wobei ③ u. ② mit Zw abgeschl. sind

⑧ Kugelschale mit $\sigma = \sigma_0 \cdot \cos\Theta$

ges.: elektr. Moment $\vec{p}$

⑨ 

$\vec{M} = M_0 \cdot \vec{e}_\alpha$

Zylinder: Innend. a Außend. b
Höhe h

ges.: $\vec{H}$ u. $\vec{B}$ innen u. im Außenraum

⑩ 

geg.: ε = konst. $\gamma = \gamma_0 \cdot \frac{1}{(1+\frac{z}{l})}$ ges.: Ladungsverteilung

TET2 10.01.01

① $\int_{\partial V} \vec{n}\cdot\left(\vec{F}\times(\vec{r}\times\vec{G}) - \vec{G}\times(\vec{r}\times\vec{F})\right) dA$

in ein Volumenintegral verwandeln

② Beziehung zw. $\vec{S}$ und $\vec{S}'$ (bewegtes Inertialsystem)

i) dom. elektr. ii) dom. magn.

③ ähnlich wie 3.2.12.

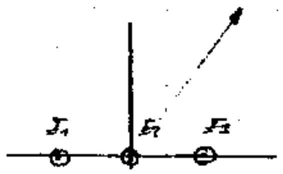
$\psi = C_1 \sqrt{\frac{r}{a}} \cos(\varphi/2)$ C_1? damit Halbebene die Ladung Q' trägt

④ $\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(3\cos\theta\,\vec{e}_r - \vec{e}_z)$ gespeicherte Energie außerhalb einer Kugel mit dem Radius a

⑤ wie 3.2.3 nur ii)

⑥ ähnlich 3.5.6 $\vec{J} = \frac{I_0}{\pi}\frac{\rho z\vec{e}_\rho + (a^2+z^2)\vec{e}_z}{(a^2+z^2)^2}$ $\vec{H}$?

⑦



$\vec{A} = \mathrm{Re}\left\{\frac{\mu_0\sqrt{2}}{2\pi}\left((I_1+I_2+I_3)\ln\left(\frac{a}{\rho}\right) - (I_1 - I_3)\frac{a}{\rho}\cos(\varphi)\right) e^{j\omega t}\,\vec{e}_z\right\}$

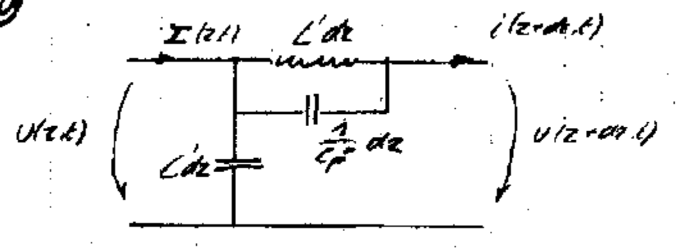
sym. Drehstromnetz

$\vec{B} = ?$

⑧ ähnlich 4.2.3 statt Kreisscheibe → Metallstreifen (Breite 2a) längenbezogene Verlustleistung

⑨ wie 5.2.3

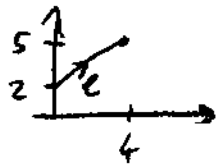
⑩



Leitungsgleichung?

TET 2 schriftlich 9. Mai 2001

① $\vec{g}(\vec{r}) = x\vec{e}_x - 2y\vec{e}_y$



ges.: $\int_C \vec{g}(\vec{r})$

Lsg.: $\vec{g}(\vec{r}) = \nabla f \rightarrow \int_C \vec{g}(\vec{r}) = f(\vec{r}_2) - f(\vec{r}_1)$

② 5.2.11

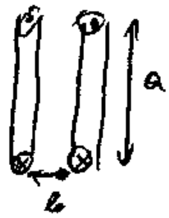
③ 3.3.1

④ für dominant elektr. Feld: Pointingsatz in Integralform herleiten

⑤ 

dünne Spule: geg. $\vec{A}$

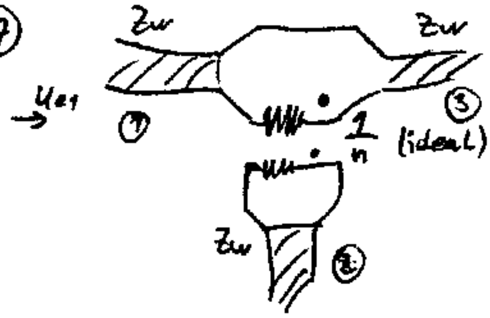
ges: gegenseitige Induktivität 2er Spulen:



$a^2 \gg b^2$

⑥ geg.: $\vec{A}$

ges: ϑ_M

⑦ 

geg.: U_{e1}

ges.: ~~ges.:~~ Spannungsimpuls, der auf die Leitg. ② übertragen wird

wobei ③ u. ② nicht Zw abgeschl. sind

⑧ Kugelschale mit $\sigma = \sigma_0 \cdot \cos\Theta$

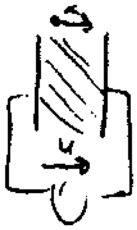
ges.: elektr. Moment $\vec{p}$

⑨ Zylinder

$\vec{M} = M_0 \cdot \vec{e}_a$

Zylinder: Innend. a Außend. b
Höhe h

ges.: $\vec{H}$ u. $\vec{B}$ innen u. im Außenraum

⑩ 

geg.: ε = konst. $\gamma = \gamma_0 \cdot \frac{1}{(1+\frac{z}{a})}$ ges.: Ladungsverteilung

Tet 2 schriftlich, 28.02.2002

1. $F(\vec r) = C\left(2xz^2 - y^2 + 4yz^2\right)$

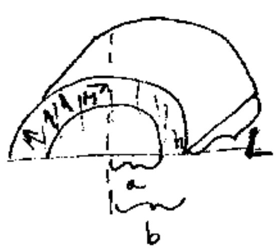
$\vec\nabla$! $P(-2;1;1)$

$\vec e = (2\vec e_x - 2\vec e_y + \vec e_z)/3$

2. $\vec f = \frac{1}{\varrho}\sin^2\alpha\,\vec e_\varrho - \frac{1}{\varrho}\cos^2\alpha\,\vec e_\alpha$ → kartesische Koord.

3. $\vec A = -\frac{\mu_0 I}{\pi}\left(\frac{a}{\varrho}\right)^n \cos(n\alpha)\,\vec e_z$

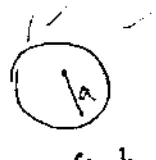
gs.: $\vec B$ in ebenen Polarkoord.

4. 

$M = |\vec M| = \text{const.}$

$\vec m = ?$

$\left(\vec m = \int_V \vec M\, dV\right)$



5. el. Dipol – $\vec E = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3\cos\theta\,\vec e_r - \vec e_z\right]$, $\vec p = p\,\vec e_z$ $w = \frac{\varepsilon}{2}E^2$

Energie ausserhalb „a"

6. $\varphi(x,y,z)$ $\tilde\varphi(x,y,z) = \frac{a}{r}\varphi\left(\frac{a^2}{r^2}x, \frac{a^2}{r^2}y, \frac{a^2}{r^2}z\right)$ $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$a = \text{const.}$, $r \neq 0$

$\varphi = -E_0 z$ $\tilde\varphi$ neu?

7. $\vec B = \frac{B_0}{a}\left[(x-2y)\vec e_x + (2x-y)\vec e_y\right]$ $\vec A = ?$ $\vec A = A(x,y)\vec e_z$

8. $\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) w(\vec r,t) = -f(\vec r,t)$ FOURIER-BEDINGUNG (Wellengl. f. Fourier-Transformierte)

9. Quaderhohlraum $0\le x\le a$, $0\le y\le a$, $0\le z\le L$

allseitig ideal metallisch $\vec E = \hat E_0 \sin(\pi x/a)\sin(\pi y/a)\cos(\omega t)\,\vec e_z$

– erforderliche Freq.?

– $\vec H$

10. Erweitertes Leitungsmodell $\partial_z i = -C'\partial_t u$, $\partial_z u = -L'\partial_t\left(i + C_p'\partial_t\partial_z u\right)$

$$\begin{Bmatrix} u(z,t) \\ i(z,t) \end{Bmatrix} = \mathrm{Re}\begin{Bmatrix} \hat u \\ \hat i \end{Bmatrix} e^{j(\omega t - \beta z)}$$ gs.: $Z_W(\omega)$

TET 2 12.10.98

1.) $\int_{\delta V} \vec{n}\cdot[\vec F\times(\nabla\times\vec G) - \vec G\times(\nabla\times\vec F)]\,dA$

in ein Volumsintegral umformen

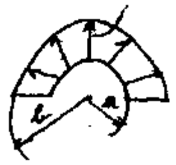
2.) $\underset{\sim}{T} = \vec e_x \otimes [x\vec e_x - y\vec e_y]$ in Kreiszylinderkoord.

3.) ebenes Problem geg: $\vec B = B(x,y)\,\vec e_x + B(x,y)\,\vec e_y$

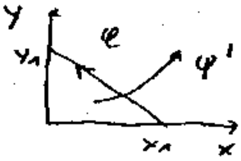
ges: $\vec E$ und $\vec E'$ mit $\vec v = \frac{\omega}{k}\vec e_x$

4.) geg.:

$\vec P$ ... Polarisation

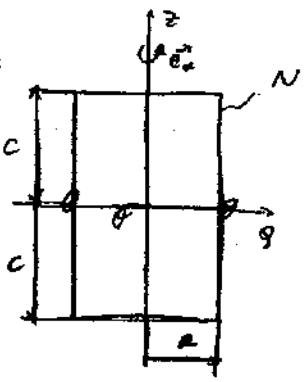


ges: elekt. Moment $\vec p$

5.) geg: 

$\vec V = (x^2 - y^2 - 2xy)\,\vec e_z$

ges: ψ'

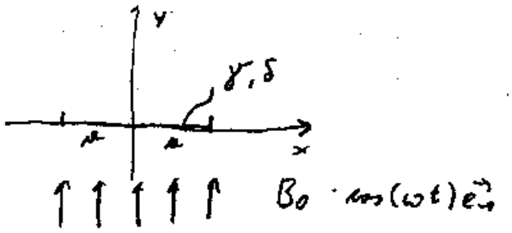
6.) 

geg: $\vec B = b\,\vec e_z$

$\vec A = \frac{\varrho}{2}\left[b(0) + \frac{db(0)}{dz}z + \frac{d^2b}{dz^2}z^2 + \dots\right]$

ges: Verhältnis von $\frac{a}{c}$ damit Verkettungsfluß möglichst proportional der Flußdichte im Ursprung ist

7.) Thomson-Kabel: Differentialgl. herleiten

8.) 

geg.: γ, $\vec B$

ges: Joule-Verluste bezogen auf axiale Länge

9.) Skriptum Kapitel 5. aus $\underline{\gamma}$ α und β herleiten

10.) Skriptum Kapitel 3.2

TET2 Prüfung vom 08.01.2003

Prof. Prechtl

Beispiel 1 $\vec{F}(\vec{r}) = f(x^2 + y^2 + z^2)\vec{e}_x$
mit allgemeiner Funktion f in Kreiszylinderkoordinaten

Beispiel 2 A 2.1.7

Beispiel 3 $\varphi = K \cdot \frac{e^{-\frac{r}{a}}}{r}$
$K, a = const$, gesucht ist die Ladungsverteilung

Beispiel 4 Poyntingsatz im dominant elektrischen Feld aus Maxwellgleichungen herleiten.

Beispiel 5 $\vec{J} = \frac{I_0}{\pi} \frac{\rho z \vec{e}_\rho + (a^2+z^2)\vec{e}_z}{(a^2+z^2)^2}$
ges. $\vec{H}$

Beispiel 6 A 3.3.1

Beispiel 7 $\varphi = \frac{p'}{2\pi\epsilon_0} \frac{\sin(\alpha)}{\rho}$
ges. $\vec{V}$

Beispiel 8 A 4.2.4

Beispiel 9 A 5.2.8

Beispiel 10 erweiterte Leitungsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_z i &= -C'\partial_t u \\ \partial_z u &= -L'\partial_t(i + C''_p \partial_t \partial_z u) \end{aligned}$$

ausgehend von

$$\left\{ \begin{array}{c} u(z,t) \\ i(z,t) \end{array} \right\} = \mathrm{Re} \left\{ \begin{array}{c} \hat{u} \\ \hat{i} \end{array} e^{j(\omega t - \beta z)} \right\}$$

$Z_W(\omega)$ berechnen