TU WIEN

ELEKTRODYNAMIK

VU-351.019

Prüfungen

Beispiele

Angaben

Wir können die Unterlagen von denen wir gelernt haben nicht ändern,
aber wir können der Nachwelt bessere hinterlassen.

1. April 2017

Inhaltsverzeichnis

Werter Student!

Diese Unterlagen werden dir **kostenlos** zur Verfügung gestellt, damit sie dir im Studium behilflich sind. Sie wurden von vielen Studierenden zusammengetragen, digitalisiert und aufgearbeitet. Ohne der Arbeit der Studierenden wären diese Unterlagen nicht entstanden und du müsstest dir jetzt alles selber zusammensuchen und von schlecht eingescannten oder abfotografierten Seiten lernen. Zu den Beispielen gibt es verschiedene Lösungen, welche du dir auch erst mühsamst raussuchen und überprüfen müsstest. Die Zeit die du in deine Suche und Recherche investierst wäre für nachfolgende Studenten verloren. Diese Unterlagen leben von der Gemeinschaft die sie betreuen. Hilf auch du mit und erweitere diese Unterlagen mit deinem Wissen, damit sie auch von nachfolgenden Studierenden genutzt werden können. Geh dazu bitte auf https://github.com/Painkilla/VU-351.019-Elektrodynamik.git/issues und schau dir in der TODO Liste an was du beitragen möchtest. Selbst das Ausbessern von Tippfehlern oder Rechtschreibung ist ein wertvoller Beitrag für das Projekt. Nütze auch die Möglichkeit zur Einsichtnahme von Prüfungen zu gehen und die Angaben Anderen zur Verfügung zu stellen, damit die Qualität der Unterlagen stetig besser wird. LaTeX und Git sind nicht schwer zu lernen und haben auch einen Mehrwert für das Studium und das spätere Berufsleben. Sämtliche Seminar oder Bachelorarbeiten sind mit LaTeX zu schreiben. Git ist ideal um gemeinsam an einem Projekt zu arbeiten und es voran zu bringen. Als Student kann man auf GitHub übrigens kostenlos unbegrenzt private Projekte hosten.
Mit dem Befehl:

```
$ git clone --recursive https://github.com/Painkilla/VU-351.019-Elektrodynamik.g
```

erstellst du eine lokale Kopie des Repositoriums. Du kannst dann die Dateien mit einem LaTeX-Editor deiner Wahl bearbeiten und dir das Ergebnis ansehen. Bist du auf GitHub registriert, kannst du einen Fork (englisch für Ableger) erstellen und mit den Befehlen:

```
$ git commit -m ‘‘Dein Kommentar zu den Änderungen’’
$ git push
```

werden deine Ergänzungen auf deinen Ableger am Server gesendet. Damit deine Ergänzungen auch in das zentrale Repositorium gelangen und allen

Studierenden zur Verfügung stehen, musst du nur noch einen Pull-Request erstellen.

1 Einführung

1.1 Analytische Werkzeug

Celbsch-Potentiale 1.

Angenommen f und g sind zwei Skalarfelder im Dreidimensionalen euklidischen Raum. Daraus lässt sich ein Vektorfeld $\vec{v} = (\vec{\nabla} f) \times (\vec{\nabla} g)$ bestimmen, dessen Vektorlinien durch die Schnittkurven der beiden Flächenscharen $f = const$ und $g = const$ gebildet werden. f und g werden dann die CLEBSCH-Potentiale von $\vec{v}$ genannt. Berechnen Sie die Quellendichte von $\vec{v}$.
Hinweis:

Ortsvektor 2.
Stellen Sie das Feld $\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times (x\vec{r})]$ in kartesischen Koordinaten dar, wobei $\vec{r}$ den Ortsvektor bezüglich des Ursprungs und x die x-Koordinate bedeutet.
Hinweis:

Ableitung eines Skalarfeldes 3.
Berechnen Sie die Ableitung des Skalarfeldes $G(\vec{r}) = K \cdot (x^3 + 4y^2y + 2z^3)$ im Punkt $(x, y, z) = (1; -3; 2)$ in Richtung $\vec{n} = (\vec{e}_x - 2\vec{e}_y + \vec{e}_z)/\sqrt{6}$.
Hinweis:

Ableitung eines Skalarfeldes 4.
Berechnen Sie die Ableitung des Skalarfeldes $H(\vec{r}) = C \cdot (3x^2y - y^2z + 2z^3x)$ im Punkt $(x, y, z) = (1; 1; 1)$ in der radialen Richtung $\vec{e}_r = \vec{r}/r$ mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
Hinweis:

Satz von Stokes 5.

Sei $\mathscr{A}$ ein Flächenstück mit dem Rand $\partial\mathscr{A}$ und f ein differenzierbares Skalarfeld. Zeigen Sie durch Spezialisierung des Satzes von Stokes zuerst in kartesischen Koordinaten die Gültigkeit der Beziehung:

$$\int\limits_{\partial\mathscr{A}} s_x f ds = \int\limits_{\mathscr{A}} (n_y \partial_z f - n_z \partial_y f) dA \tag{1.1.1}$$

Zwei weitere Gleichungen dieser Art folgen daraus durch zyklische Vertauschung von x, y, z. Drücken Sie damit das Kurvenintegral

$$\int\limits_{\partial\mathscr{A}} \vec{s} f ds \tag{1.1.2}$$

koordinatenfrei durch ein Integral über $\mathscr{A}$ aus.

Hinweis:

Transformation 6.
Gegeben ist das Vektorfeld

$$\vec{f}(\varrho, \alpha, z) = \varrho^2[\cos(\alpha)\vec{e}_\varrho + \sin(\alpha)\vec{e}_\alpha] \tag{1.1.3}$$

Berechnen Sie mit Hilfe von Tab.1.3 in Kreiszylinderkoordinaten den Ausdruck $\vec{r} \times (\vec{\nabla} \times \vec{f})$, wobei $\vec{r}$ den Ortsvektor in Bezug auf den Ursprung bedeutet.
Hinweis:

2 Elektromagnetische Felder

2.1 Globale und Lokale Eigenschaften

Starre Magnetisierung 7.

Eine Schicht $0 \leqslant z \leqslant a$ trägt die Magnetisierung $\vec{M}$ unabhängig von x und y. Berechnen Sie die vollständige fiktive Stromverteilung.

$$\vec{M} \left\{ \begin{array}{ll} (1 - z/a) M_0 \vec{e}_x & \text{für} \quad 0 \leqslant z \leqslant a \\ \vec{0} & \text{für} \quad a < z < 0 \end{array} \right\} \tag{2.1.1}$$

Hinweis:

Halber Kreiszylinder 8.
Ein halber, dickwandiger Kreiszylinder der Länge l ist radial starr mit $M = |\vec{M}| = \text{const}$ magnetisiert, sonst aber stromfrei. Berechnen Sie sein gesamtes magnetisches Moment $\vec{m}$.
Hinweis:

Ableitung des Skalarfeldes 9.
Berechnen Sie die Ableitung des Skalarfeldes

$$f(\vec{r}) = K \cdot (x^3 y - 4y^4 - 2z^2 x^2), \quad K = const \tag{2.1.2}$$

im Punkt $\vec{r}_0 = (3\vec{e}_x - 3\vec{e}_y + \vec{e}_z)\ cm$ in die Richtung des Vektors $\vec{a} = \vec{e}_x - 3\vec{e}_y + 2\vec{e}_z$.

Hinweis:

Nachwirkungseffekte 10.

Zur Beschreibung linearer "Nachwirkungseffekte" haben Volterra und Boltzmann als Erweiterung der einfachen Materialgleichungen $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ Beziehungen der Art

$$\vec{D}(\vec{r},t) = \varepsilon[\vec{E}(\vec{r},t) + \int\limits_0^\infty g(t')\vec{E}(\vec{r},t-t')dt'] \tag{2.1.3}$$

vorgeschlagen, worin $g(t)$ eine geeignete gewählte "Gedächnisfunktion" mit $g(t) = 0$ für $t < 0$ darstellt. Wie sieht solch eine Beziehung im Frequenzbereich aus?

Hinweis:

Fourier-Transformation $\vec{D}(\vec{r};j\omega) = \mathscr{F}[\vec{D}(\vec{r},t)]$, etc.

2.2 Die Feldgleichungen in Sonderfällen

2.3 Energie und Impuls

Lorenzkraft an einem T-Stück 11.

Das linke Bild zeigt, wie die magnetische Flussdichte in der Umgebung eines gleichförmig Strom durchflossenen Streifens zu berechnen ist.
$\vec{B}(\mathscr{P}) = \frac{\mu_0 K}{2\pi}\left[\ln\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)\vec{e}_x + \alpha\vec{e}_y\right]$
Nutzen Sie dieses Ergebnis, um für einen Leiter mit dem rechts angegebenen Profil die längenbezogene resultierende Kraft zu berechnen, die von den beiden senkrechten Schenkeln auf den waagrechten Schenkel ausgeübt wird, also an der Verbindungsstelle V übertragen werden muss.
Hinweis:
$\int\left\{\begin{array}{c}\arctan(u)\\(u)\end{array}\right\}du = u\left\{\begin{array}{c}\arctan(u)\\(u)\end{array}\right\}\mp\ln(\sqrt{1+u^2}) + const$

3 Statische und Stationäre Felder

3.1 Elektrostatik und Quasi-Elektrostatik

Magnetische Skalarpotential 12.

Berechnen Sie für das ebene magnetische Feld mit der Feldstärke
$\vec{H} = \frac{H_0}{a^2}\left[2xy\vec{e}_x + (x^2 - y^2)\vec{e}_y\right]$ ein magnetisches Skalarpotential $\varphi(x, y)$, so dass $\vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi$.

Hinweis:

3.2 Spezielle elektrostatsische Felder

Elektrostatisches Potential 13.

An den beiden Mantelflächen eines dickwandigen, beidseitig unendlich langen Kreiszylinders ist das elektrostatische Potential wie angegeben vorgeschrieben. Berechnen Sie das Potential im Bereich $a \leqslant \varrho \leqslant b$.

Hinweis:

Bildbeschreibung: Das Potential entlang des inneren Kreises mit dem Radius a beträgt $\varphi = 0$, entlang des äußeren Kreises b beträgt $\varphi = U_0 \cos(\alpha)$.

Drehstromleitung 14.

Zu einer Drehstromleitung gehört in der skizzierten Anordnung ein Magnetfeld, dass sich für relativ große Abstände $\varrho >> c$ durch das Vektorpotential

$$\vec{A} \approx \Re \left\{ \frac{\mu_0 \sqrt{2}}{2\pi} \left[(\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3) \ln\left(\frac{c}{\varrho}\right) - (\underline{I}_1 - \underline{I}_3) \frac{c}{\varrho} \cos(\alpha) \right] e^{\jmath \omega t} \vec{e}_z \right\} \tag{3.2.1}$$

mit den komplexen Effektivwerten $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$ der Leiterströme darstellen läßt. Berechnen Sie daraus für ein <u>symetrisches</u> Drehstromsystem den Betrag der magnetischen Flußdichte $|\vec{B}|(\varrho, \alpha, t)$ in reeller Darstellung.

Hinweis:

Elektrostatisches Feld 15.
Von einem ebenen elektrostatischen Feld ist das Vektorpotential $\vec{V} = \frac{\varepsilon_0 U}{a^2}(x^2 - y^2 - 2xy)\vec{e}_z$ bekannt. Berechnen Sie den längenbezogenen elektrischen Fluß durch den Streifen mit der Spur C.
Hinweis:

Elektrischer Dipol 16.

Ein statischer elektrischer Dipol erzeugt im sonst leeren Raum bekanntlich eine elektrische Feldstärke, die sich bei passender Koordinatenwahl durch $\vec{E}$ darstellen lässt. Zusätzlich herrsche ein homogenes Magnetfeld der Flussdichte $\vec{B} = B\vec{e}_z$.

$$\vec{E} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\cos(\vartheta)\vec{e}_r - \vec{e}_z}{r^3} \tag{3.2.2}$$

1. Geben Sie das Feld des Poynting-Vektors $\vec{S}$ an.

2. Wie sehen die zu $\vec{S}$ gehörenden Vektorlinien aus?

3. Berechnen Sie die Quellendichte und die Wirbeldichte von $\vec{S}$.

Hinweis:

Skalarpotential 17.
Bei einem ebenen elektrostatischen Problem ist das Skalarpotential am Rand wie angegeben vorgeschrieben. Bestimmen Sie daraus das Potential im ladungsfreien Bereich $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$.
Hinweis:

Elektrisch schwach leitfähige Platte 18.
An einer beidseitig metallisch beschichteten, inhomogenen elektrisch schwach leitfähigen Platte liegt die elektrische Spannung U. Berechnen Sie die sich einstellende Ladungsverteilung. (Flächen- und Raumladungen)
Hinweis:

Kreiszylindrischer ladungsfreier Bereich 19.

Am Rand $\varrho = a$ eines kreiszylindrischen, ladungsfreien Bereiches $0 \leqslant \varrho \leqslant a$ ist die Radialprojektion der elektrischen Feldstärke mit

$$E_\varrho(a, \alpha) = E_0 \cos(n\alpha), \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.2.3}$$

vorgeschrieben. Berechnen Sie daraus die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\varrho, \alpha)$ im Bereich $0 \leqslant \varrho \leqslant a$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$.

Hinweis:

3.3 Relaxion und Konvektion elektrischer Ladungen

Magnetischer Punktdipol 20.

Das Vektorpotential eines statischen magnetischen Punktdipols besitzt in Kugelkoordinaten bekanntlich die Form

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{\sin(\theta)}{\pi^2} \vec{e}_\alpha \tag{3.3.1}$$

Bestimmen Sie ein zugehöriges magnetische Skalarpotential.

Hinweis:

Laplace-Gleichung 21.

Angenommen, die Funktion $\varphi(x,y)$ erfüllt die Laplace-Gleichung, ist beliebig oft stetig differenzierbar und ist bezüglich y gerade, d.h. $\varphi(x,-y) = \varphi(x,y)$. Die Werte von φ entlang der x-Achse seien bekannt, also $f(x) = \varphi(x,0)$ ist gegeben. Zeigen Sie, dass sich φ dann durch eine Reihe der Form

$$\varphi(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n f^{(2n)}(x) y^{2n} \tag{3.3.2}$$

darstellen lässt und bestimmen Sie dabei die Koeffizienten C_n.

Hinweis:

3.4 Stationäre Magnetfelder

Kreisschleife 22.

Das magnetische Vektorpotential einer stromdurchflossenen Kreisschleife Abb. ergibt sich in Kreiszylinderkoordinaten zu
$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{2a}{\sqrt{(a+\varrho)^2+z^2}} G\left[\sqrt{\frac{(a-\varrho)^2+z^2}{(a+\varrho)^2+z^2}}\,\right]\vec{e}_\alpha$
mit einer Funktion G, die durch das Integral
$G(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_0^\pi \frac{\cos(\alpha)d\alpha}{\sqrt{1+\eta^2+(1-\eta^2)\cos(\alpha)}}$
definiert ist und sich für kleine η im Bereich $0 < \eta << 1$ durch
$G(\eta) \approx \ln\left(\frac{4}{\eta}\right) - 2$
approximieren lässt. Berechnen Sie damit näherungsweise die gegenseitige Induktivität zweier gleicher, koaxialer Kreisspulen Abb. mit den Radien a und den Windungszahlen N, die in relativ kleinem Abstand b zueinander liegen. $(b^2 << a^2)$

Hinweis:

Statischen magnetischen Dipol 23.

In der Umgebung eines statischen magnetischen Dipols mit dem magnetischen Moment $\vec{m} = m\vec{e}_z$ stellt sich im sonst leeren Raum bekanntlich die magnetische Flussdichte $\vec{B}$ (Kugelkoordinaten!) ein. Berechnen Sie den zugehörigen Inhalt an magnetischer Energie, der dem Bereich außerhalb einer konzentrischen Kugel mit dem Radius a zukommt.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\left[3\cos(\vartheta)\vec{e}_r - \vec{e}_z\right] \tag{3.4.1}$$

Hinweis:

Feld eines Dauermagneten 24.

Der Berechnung des Feldes eines Dauermagneten, in dessen näherer Umgebung sich keine magnetisierbaren Körper befinden, wird folgendes Modell zugrundegelegt:

Im sonst leeren Raum befindet sich ein starr inhomogen magnetisierter, endlich ausgedehnter Körper $\mathscr{V}$ mit der Mangetisierung $\vec{M}(\vec{r})$. Der ganze Raum ist frei von (wahren) elektrischen Strömen, sodass sich die magnetische Feldstärke als (negativer) Gradient $\vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi_M$ eines magnetischen Skalarpotentials φ_M darstellen lässt.

1. Welchen Differentialgleichungen muss φ_M im Innenraum $\mathscr{V}$ und im Außenraum$\hat{\mathscr{V}}$ genügen?

2. Welche Sprungbedingungen muss φ_M am Rand $\partial\mathscr{V}$ erfüllen?

Hinweis:

Magnetisches Vektorpotential 25.
Berechnen Sie für das ebene magnetische Feld mit der Flussdichte $\vec{B}$ ein Vektorpotential $\vec{A} = A(x,y)\vec{e}_z$.

$$\vec{B} = \frac{B_0}{a}\left[(x-2y)\vec{e}_x + (2x-y)\vec{e}_y\right] \tag{3.4.2}$$

Hinweis:

3.5 Spezielle stationäre Magnetfelder

4 Induktionserscheinungen

4.1 Quasistationäre Felder

4.2 Diffusion magnetischer Felder

Parallele Schienen 26.
Zwei rechteckige, parallele Schienen (Konduktivität γ, Permeabilität μ) dienen zur Hin- und Rückleitung eines Sinusstroms mit dem Effektivwert I und der Frequenz f. Berechnen Sie näherungsweise die gesamte längenbezogene Verlustleistung für den Fall, dass die Eindringtiefe δ deutlich kleiner als die Schienenbreite b ist. Gehen Sie dazu von den Ausdrücken für den Halbraum aus:

$$\vec{H}(0,t) = \vec{H}_0 \cos(\omega t)\vec{e}_y \tag{4.2.1}$$

$$\vec{J}(x,t) = -\hat{H}_0 \frac{\sqrt{2}}{\delta} e^{-x/\delta} \cos(\omega t - x/\delta + \pi/4)\vec{e}_z, \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\gamma\omega}} \tag{4.2.2}$$

Hinweis:

5 Elektromagnetische Welllen

5.1 Grundgleichungen und Potentiale

Elektrodynamische Potentiale 27.
In einem leeren Raumbereich wird ein elektromagnetisches Feld in Bezug auf ein kartesisches Koordinatensystem durch die elektrodynamischen Potentiale $\vec{A}(\vec{r}, t) = f(x, y)\cos(\omega t)\vec{e}_z$, $\varphi(\vec{r}, t) = 0$ beschrieben.

1. Welcher Gleichung hat die Funktion $f(x, y)$ zu genügen?
2. Stellen Sie die zugehörigen Felder der elektrischen Feldstärke, der magnetischen Flussdichte und des Poynting-Vektor dar.

Hinweis:

Polarisierte elektromagnetische Sinuswelle 28.
Eine ebene, linear polarisierte elektromagnetische Sinuswelle soll im leeren Raum einen Energiefluss der mittleren Dichte $1,36\ kW/m^2$ tragen. Wie groß sind die zugehörigen Amplituden der elektrischen Feldstärke und der magnetischen Flussdichte?
Hinweis:

Wellengleichungen im Frequenzbereich 29.
Gehen Sie von der einfachen, inhomogenen Wellengleichung

$$(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2)w(\vec{r},t) = -f(\vec{r},t) \tag{5.1.1}$$

aus und führen Sie gemäß

$$X(\vec{r};\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\vec{r},t)e^{-\jmath\omega t}dt \qquad x(\vec{r},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\vec{r},\jmath\omega)e^{\jmath\omega t}d\omega \tag{5.1.2}$$

die Fourier-Transformierten $W(\vec{r};\jmath\omega)$ und $F(\vec{r};\jmath\omega)$ der Funktionen $w(\vec{r},t)$ und $f(\vec{r},t)$ ein. Welcher Gleichung müssen dann die Fourier-Transformierten genügen?
Hinweis:

Elektrischer Dipol 30.
In der Umgebung eines statischen elektrischen Dipols mit dem elektrischen Moment $\vec{p} = p\vec{e}_z$ stellt sich im sonst leeren Raum bekanntlich die elektrische Feldstärke (Kugelkoordinaten)

$$\vec{E} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3\cos(\theta)\vec{e}_r - \vec{e}_z\right] \tag{5.1.3}$$

ein. Berechnen Sie den zugehörigen Inhalt an elektrostatischer Energie, der dem Bereich außerhalb einer konzentrischen Kugel mit dem Radius a zukommt.
Hinweis:

Lorentz Eichung 31.
Für die Erfassung der Eigenschaften elektromagnetischer Felder in besonders einfachen, elektrisch leitfähigen Körpern gehen wir von den Maxwell-Gleichungen und den Materialgleichungen

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{J} = \gamma \vec{E} \tag{5.1.4}$$

mit konstanten Werten ε, μ, γ aus. Führen Sie nun die üblichen elektromagnetischen Potentiale durch

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \vec{\nabla} \varphi \tag{5.1.5}$$

ein und leiten Sie damit zwei Gleichungen für $\vec{A}$ und φ ab. Wie ist die Lorentz-Eichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu\varepsilon \partial_t \varphi = 0 \tag{5.1.6}$$

zu modifizieren, damit die beiden Gleichungen für $\vec{A}$ und φ enkoppelt sind?
Hinweis:

5.2 Typen von Wellen

Homogene Elektromagnetische Sinuswellen 32.
Für die Ausbreitung ebener homogener elektromagnetischer Sinuswellen in einem einfachen Material mit konstanten Werten der Permitivität ε, der Permeabilität μ und der Konduktivität σ liefern die beiden Maxwell-Rotorgleichungen über Ansätze der Form

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = \Re\left[\vec{\mathscr{F}} e^{\jmath\omega t - \gamma\vec{\kappa}\cdot\vec{r}}\right] \tag{5.2.1}$$

die Zusammenhänge $\gamma\vec{\kappa} \times \vec{\mathscr{E}} = \jmath\omega\mu\vec{\mathscr{H}}$, und $\gamma\vec{\kappa} \times \vec{\mathscr{H}} = -(\sigma + \jmath\omega\varepsilon)\vec{\mathscr{E}}$. Stellen Sie damit den Dämpfungskoeffizienten $\alpha > 0$ und den Phasenkoeffizienten $\beta > 0$ als Funktion der Kreisfrequenz dar.
Hinweis:

Plasmamodell 33.
In einem besonders einfachen Plasmamodell ergibt sich für elektromagnetische Sinusfelder

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \Re\{\underline{\vec{E}}(\vec{r})e^{\jmath\omega t}\} \tag{5.2.2}$$

die reduzierte Wellengleichung (Helmholtz-Gleichung)

$$\nabla^2\underline{\vec{E}} + \frac{1}{c_0^2}\left(\omega^2 - \omega_p^2\right)\underline{\vec{E}} = \vec{0} \tag{5.2.3}$$

worin die Konstante $w_p = \sqrt{n_e e^2/(\varepsilon m_e)}$ mit der Elektronendichte n_e, der Elementarladung e und der Elektronenmasse m_e eine charakteristische Kreisfrequenz bedeutet. Dieselbe Gleichung gilt für $\underline{\vec{B}}(\vec{r})$.

1. Ermitteln Sie die zugehörtige Dispersionsbeziehung $F(\omega,\beta) = 0$ für homogene, ebene Sinuswellen.

2. Zeichnen und diskutieren Sie das Dispersionsdiagramm (Graphische Darstellung der Dispersionsbeziehung).

Hinweis:

5.3 Wellen auf Doppelleitungen

Leitungsmodell für Spulen 34.

Zur grundsätzlichen Untersuchung rascher Vorgänge erweist sich häufig ein Leitungsmodell mit dem angegebenen Ersatzschaltbild eines Leitungselements als brauchbar. L und C sind dabei die üblichen Beläge der Induktivität und der Kapazität. Cp ist eine kapazitive Ersatzgröße der Dimension Kapazität $\times$Länge (modelliert z.B. die kapazitive Kopplung benachbarter Windungen.

Stellen Sie für dieses Modell als Erweiterung der üblichen Leitungsgleichungen die beiden gekoppelten partiellen Differentialgleichungen für $u(z,t)$ und $i(z,t)$ auf.

Hinweis:

Homogene Leitung 35.

Spannungen und Ströme am Eingang bzw. Ausgang einer homogenen Leitung sind bei Sinuserregung im eingeschwungenen Zustand bekanntlich durch die Zweitorgleichungen miteinander verknüpft. Bestimmen Sie damit die Parameter U_q und Z_i einer Ersatzspannungsquelle.

$$U_1 = \cosh(\gamma l)U_2 + Z_w \sinh(\gamma l)I_2 \tag{5.3.1}$$

$$I_1 = \frac{1}{Z_w} \sinh(\gamma l)U_2 + \cosh(\gamma l)I_2 \tag{5.3.2}$$

Hinweis: