



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

Vienna University of Technology

**Institute of Electrodynamics,
Microwave and
Circuit Engineering**

1040 Wien, Gußhausstraße 27
Tel. (01) 588 01

Vorlesungen über

Elektrodynamik

von

A. Prechtel

Inhaltsverzeichnis

1	EINFÜHRUNG	1
1.1	Historische Entwicklung	1
	Ursprung der Begriffe	1
	Das Entstehen der elektrodynamischen Theorien	3
	Die Maxwell-Gleichungen	6
	Ausgewählte Literatur	8
1.2	Das analytische Werkzeug	9
	Bereiche und Orientierungen	9
	Vektoren und Tensoren	11
	Koordinaten	14
	Räumliche Ableitungen von Feldern	16
	Transformation von Integralen	20
	Ausgewählte Literatur	23
2	EIGENSCHAFTEN ELEKTROMAGNETISCHER FELDER	25
2.1	Globale und lokale Eigenschaften	25
	Das elektromagnetische Feld im engeren Sinn	25
	Das Strom-Ladungs-Feld	27
	Die Maxwell-Gleichungen	29
	Verknüpfungsbeziehungen	31
	Materialgleichungen	34
	Ergänzungen für bewegte Körper	38
	Ausgewählte Literatur	40
2.2	Die Feldgleichungen in Sonderfällen	41
	Statische elektrische Felder	41
	Stationäre elektromagnetische Felder	41
	Bezogene Feldgrößen und charakteristische Parameter	42
	Das dominant elektrische Feldsystem	44
	Das dominant magnetische Feldsystem	45
	Ausgewählte Literatur	45
2.3	Energie und Impuls	47
	Bilanzgleichungen für Energie und Impuls	47
	Elektromagnetische Teilsysteme	50
	Dominant elektrische und dominant magnetische Feldsysteme	54
	Resultierende Kräfte und Leistungen	55
	Ausgewählte Literatur	58

3	STATISCHE UND STATIONÄRE FELDER	59
3.1	Elektrostatik und Quasi-Elektrostatik	59
	Allgemeine Eigenschaften des elektrostatischen Feldes und Ladungsverteilungen	59
	Poisson- und Laplace-Gleichung	60
	Darstellungssätze der Potenzialtheorie	62
	Randwertprobleme der Elektrostatik	66
	Formale Lösungen elektrostatischer Randwertprobleme	68
	Ausgewählte Literatur	69
3.2	Spezielle elektrostatische Felder	69
	Zweidimensionale Lösungen der Laplace-Gleichung in kartesischen Koordinaten	70
	Zweidimensionale Lösungen der Laplace-Gleichung in Polarkoordinaten	72
	Das elektrostatische Vektorpotenzial	76
	Ebene Feldprobleme und holomorphe Funktionen	76
	Die Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten	78
	Ausgewählte Literatur	84
3.3	Relaxation und Konvektion elektrischer Ladung	84
	Die Grundgleichungen	84
	Ladungsrelaxation ohne Bewegung	86
	Relaxation und Konvektion	88
	Ausgewählte Literatur	91
3.4	Stationäre Magnetfelder	91
	Allgemeine Eigenschaften des stationären magnetischen Feldes und Stromverteilungen	92
	Laplace- und Poisson-Gleichung	93
	Ausgewählte Literatur	95
3.5	Spezielle stationäre Magnetfelder	95
	Ebene Magnetfelder	96
	Drehsymmetrische Magnetfelder	100
	Ausgewählte Literatur	104
4	INDUKTIONSERSCHEINUNGEN	105
4.1	Quasistationäre Felder	105
	Allgemeine Eigenschaften	105
	Spezielle Gleichungen	106
4.2	Diffusion magnetischer Felder	108
	Eindringen des magnetischen Flusses in einen Halbraum	108
	Stromverdrängung	114
	Ausgewählte Literatur	116
5	ELEKTROMAGNETISCHE WELLEN	117
5.1	Grundgleichungen und Potenziale	117
	Allgemeine Eigenschaften elektromagnetischer Felder	117
	Elektrodynamische Potenziale	118
	Einfache Wellengleichungen	120
	Der Hertz-Dipol	123

5.2	Typen von Wellen	129
	Begriffe und Benennungen	129
	Freie ebene Raumwellen	132
	Geführte Wellen in zylindrischen Anordnungen	134
5.3	Wellen auf Doppelleitungen	139
	Die verlustfreie Doppelleitung	139
	Die verlustbehaftete Doppelleitung	141
	Die Doppelleitung als Zweitor	144
	Ausgewählte Literatur	145

Kapitel 1

Einführung

1.1 Historische Entwicklung der Begriffe und Theorien der Elektrodynamik

Ursprung der Begriffe

Elektrische, magnetische und optische Erscheinungen waren vermutlich in allen großen Kulturen bekannt, bemerkenswerte systematische Untersuchungen finden wir jedoch erst im späten Mittelalter. Interessanterweise stammen die ersten wichtigen Beiträge nicht aus dem begrifflich einfacheren Bereich der statischen Elektrizität, sondern aus dem Bereich des Magnetismus, zweifellos angeregt durch die eigenartigen und nützlichen Eigenschaften des magnetischen Kompasses. Von Pierre le Pèlerin de Maricourt (Petrus Peregrinus), einem französischen Kreuzfahrer, ist aus dem 13. Jahrhundert eine detaillierte Beschreibung dieses Navigationsinstrumentes überliefert. Er untersuchte mit Magnetnadeln auch natürliche, in Kugelform gebrachte Magnetsteine, fand auf diesen Kugeln die magnetischen Meridiane und bezeichnete ihre Schnittpunkte als Pole.

William Gilbert (1544 – 1603), ein englischer Arzt, gilt als der Pionier auf dem Gebiet des Magnetismus und der Elektrizität. Sein Buch „De Magnete ...“, erschienen 1600, stellt nicht nur eine systematische Diskussion des Magnetismus, im Speziellen des Erdmagnetismus, dar, auch die Kraft zwischen zwei durch Reibung elektrisierte Körper wird untersucht. Diese Kraft nannte er „elektrisch“ (nach dem griechischen Wort „elektron“ für Bernstein oder eine bernsteinfarbene Münzlegierung). Gilbert führte die Elektrisierung eines Körpers durch Reibung auf das Entfernen eines Fluids „humour“ zurück, wodurch sich um den Körper ein besonderer Zustand „effluvium“ einstellt.

Das 17. und das frühe 18. Jahrhundert bringen ein steigendes Interesse an elektrostatischen Erscheinungen. Der Engländer Stephen Gray trifft 1729 eine Einteilung der Körper in elektrische Leiter und Isolatoren, und Charles François de Cisternay Dufay, französischer Hofgärtner, gibt 1733 neben der bereits bekannten anziehenden auch eine abstoßende elektrostatische Kraft an. Diese Beobachtungen werden von dem amerikanischen Erfinder und Politiker Benjamin Franklin (1706 – 1790) systematisiert. Er erkennt zwei Arten von Elektrizität, später (1778), nach einem Vorschlag von Georg Christoph Lichtenberg, mit (+) und (–) bezeichnet,

und formuliert ein Gesetz, das im Wesentlichen der Erhaltung der elektrischen Ladung entspricht. Das Experimentieren mit statischer Elektrizität wird möglich durch zwei Erfindungen: Der Reibungselektisiermaschine durch Otto von Guericke 1663 in Magdeburg und des Kondensators — bekanntgeworden als Leydener Flasche — durch Ewald Georg von Kleist 1745 in Pommern.

Erstaunlich ist, dass die bereits 1687 von Isaac Newton veröffentlichte Entdeckung des Gravitationsgesetzes bis zur Mitte des 18. Jahrhunderts wenig Einfluss auf die Vorstellungen über elektrische Wechselwirkungen nimmt. Es gab zwar einige Spekulationen über die Eigenschaften der Kräfte zwischen geladenen Körpern, deutlicher werden die Begriffe jedoch erst um 1767, als der englische Chemiker Joseph Priestley nach einer Anregung Benjamin Franklins zeigt, dass im Hohlraum einer geladenen geschlossenen Metallschale auf (neutrale) Testkörper keine elektrischen Kräfte ausgeübt werden. Er schließt daraus auf die Gültigkeit eines Kraftgesetzes nach dem Vorbild des Gravitationsgesetzes. Genauere experimentelle Untersuchungen werden von Henry Cavendish (1772) und Charles-Augustin de Coulomb (1785) veröffentlicht; von Coulomb stammt die klare Formulierung des elektrostatischen Kraftgesetzes. In den Arbeiten des Franzosen Simeón-Denis Poisson (1781 – 1840) findet die mathematische Seite der Elektrostatik mit dem Begriff des Potenzials ihren vorläufigen Abschluss.

Während sich die Ansichten über die elektrostatischen Erscheinungen festigten, begann die systematische Untersuchung der „strömenden“ Elektrizität. Luigi Galvani (1737 – 1798), Anatom in Bologna, beobachtet um 1780 an einem seziierten Frosch Muskelkontraktionen, wenn in einer benachbarten Elektrisiermaschine Funken erzeugt werden. Ähnliche Kontraktionen kann er auch beim Herstellen einer metallischen Verbindung zwischen Muskeln und Nerven zeigen, wobei sich manche Metalle besser eignen als andere. Galvani schließt daraus, dass ein Fluid, das er als elektrische Ladung erkennt, durch das Metall vom Nerv zum Muskel transportiert wird und dort die Kontraktion bewirkt. Seine Ergebnisse werden 1791 veröffentlicht. Kurz darauf (1792) vermutet der Physiker Alessandro Volta (1745 – 1827) in Pavia den Ursprung des von Galvani beobachteten Effekts im Kontakt zwischen dem Metall und dem feuchten Gewebe. In Weiterverfolgung dieses Gedankens gelingt ihm um 1800 die Konstruktion der ersten Batterie, bestehend aus einer Anordnung von durch feuchte Paste getrennten Kupfer- und Zinkscheiben. Durch große Säulen dieser Art zeigt er schließlich die vollständige Äquivalenz mit der statischen Elektrizität. Erst mit der Erfindung der Volta-Säule steht eine zuverlässige Elektrizitätsquelle zur Verfügung, mit der sich elektrische Ströme kontinuierlich erzeugen lassen.

Die begrifflichen Grundlagen des Magnetismus hatten sich von Gilbert bis zum Ende des 18. Jahrhunderts kaum weiterentwickelt. Zwar hatte Coulomb sein elektrostatisches Kraftgesetz auch auf Kräfte zwischen magnetischen Polen ausgedehnt und es entstand auch eine magnetische Potenzialtheorie, tragfähige Vorstellungen über die Entstehung der magnetischen Erscheinungen gab es jedoch nicht. Dies änderte sich 1820 mit der Veröffentlichung einer Beobachtung des dänischen Physikers Hans Christian Ørsted: Er bemerkt die Ablenkung einer Kompassnadel in der Nähe eines stromdurchflossenen Leiters. Bereits 1803 berichtet der italienische Jurist Gian Domenico Romagnosi in einer Zeitung von der gleichen Entdeckung, die Nachricht wurde jedoch nicht beachtet. In Frankreich zeigt François Arago (1786 – 1853), dass ein elektrischer Strom hinsichtlich des Anziehens von Eisenfeilspänen

und beim Magnetisieren von Stahlnadeln wie ein gewöhnlicher Magnet wirkt, André-Marie Ampère (1775 – 1836) gibt Anziehung und Abstoßung gleichsinnig bzw. gegensinnig parallel stromdurchflossener Drähte an, Jean-Baptiste Biot (1774 – 1862) und Félix Savart (1791 – 1841) formulieren ein Gesetz für die Kraft zwischen stromdurchflossenen Drahtelementen. Das alles geschieht 1820. 1825 legt Ampère eine im Wesentlichen vollständige mathematische Fassung der Wechselwirkung stationärer elektrischer Ströme vor und führt die ferromagnetischen Erscheinungen auf molekulare Kreisströme zurück.

Die mehr oder weniger ausgeprägte Fähigkeit von Stoffen, Elektrizität zu leiten, wurde schon früher u.a. von Cavendish mit einiger Systematik untersucht, eine quantitative Fassung gelingt jedoch erst dem deutschen Physiker Georg Simon Ohm (1789 – 1854). Sein 1826 veröffentlichtes Gesetz trug wesentlich zur Klärung des elektrischen Spannungsbegriffes bei. Dass ein elektrischer Strom in Leitern mit einer Wärmeentwicklung verknüpft ist, war auch schon früher bekannt, wird aber ebenfalls erst relativ spät quantitativ formuliert: 1841 von James Prescott Joule (1818 – 1889) in England.

Das Entstehen der elektrodynamischen Theorien

Im Jahr 1813 beruft der Chemiker Humphrey Davy den bis dahin als Buchbin- der tätigen, von den Naturwissenschaften begeisterten Michael Faraday (1791 – 1867) als seinen Assistenten an die Royal Institution in London. Faraday arbeitet an vielen Themen der Physik und der physikalischen Chemie. Seinen Platz in der Wissenschaftsgeschichte gewinnt er vor allem durch die Entdeckung der elektromagnetischen Induktion und durch die Einführung des Begriffs der elektrischen und magnetischen Kraftlinien. Er gilt damit als Begründer der elektromagnetischen Feldvorstellung. Sein Induktionsgesetz wird 1831 veröffentlicht. Der Begriff der Kraftlinien beeinflusst besonders den schottischen Physiker James Clerk Maxwell (1831 – 1879), dessen Forschungen 1864 in einer Formulierung der elektromagnetischen Gleichungen gipfeln.

Während Faraday in England vorwiegend experimentelle Untersuchungen durchführte, werden parallel dazu, hauptsächlich in Deutschland, mathematische Theorien der Elektrizität und des Magnetismus entwickelt. In diese Periode fallen Arbeiten von Franz Ernst Neumann (1798 – 1895) über die elektromagnetische Induktion und von Wilhelm Eduard Weber (1804 – 1891), dessen auf der Fernwirkungsvorstellung beruhende Elektrodynamik eine Erklärung für die Gesetze von Coulomb, Ampère und Neumann liefert. Etwa zur gleichen Zeit klären Joule und William Thomson (später Lord Kelvin of Largs, 1824 – 1907) in England und Hermann von Helmholtz (1821 – 1894) in Deutschland die Beziehung der Elektrizität zu anderen Energieformen. Helmholtz, Thomson, Joseph Henry (1797 – 1878), ein amerikanischer Physiker, Gustav Kirchhoff (1824 – 1887) in Deutschland und George Gabriel Stokes (1819 – 1903) in England weiten die Theorie der elektrischen Leitung und der Fortpflanzung elektrischer Effekte in leitfähigen Körpern aus.

Es gibt zu dieser Zeit zwei unterschiedliche Grundeinheiten für die elektrische Stromstärke, eine kommt aus der Elektrostatik und die andere aus dem Magnetismus. Weber und sein Kollege Rudolph Kohlrausch (1809 – 1858) bestimmten 1856 das Verhältnis dieser beiden Einheiten: Es stimmte mit der Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum überein. Mit diesem Ergebnis kann Kirchhoff 1857 zeigen, dass

sich elektrische Störungen auf einem idealen Leiter mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Die Verbindung des Elektromagnetismus mit der Optik liegt also um 1860 auf der Hand. Der letzte entscheidende Schritt wird von Maxwell ausgeführt. Ihm gelingt es, das Licht als eine elektromagnetische Erscheinung in seine Feldtheorie einzubauen. Nach einer Reihe von Einzelarbeiten veröffentlicht Maxwell 1873 das zweibändige Werk „Treatise on Electricity and Magnetism“.

Das große Verdienst Maxwells liegt in der Synthese der Theorien von Elektrizität, Magnetismus, Wärmestrahlung und Optik zu einem geschlossenen Ganzen. Wichtig dafür war seine Annahme, dass ein zeitlich sich änderndes elektrisches Feld ein magnetisches Feld hervorruft, ähnlich wie Faraday in seinem Induktionsgesetz ein zeitlich sich änderndes Magnetfeld ein elektrisches Feld erzeugen lässt. Er nimmt weiters an, dass sich die elektrodynamischen Vorgänge in einem hypothetischen Medium, dem überall vorhandenen Äther („Himmelsluft“) abspielen. Die Maxwell-Gleichungen in ihrer ursprünglichen Form beschreiben die lokale Dynamik dieses Äthers. Mathematisch folgt aus ihnen, dass sich elektrische und magnetische Kräfte nur mit endlicher Geschwindigkeit — eben der Lichtgeschwindigkeit — ausbreiten können, und auch die Existenz transversaler elektromagnetischer Wellen, die Maxwell mit Lichtwellen identifizierte. Spätere Ergebnisse der relativistischen Physik und der Quantentheorie haben das durch die Maxwell-Gleichungen theoretisierte Gebäude nicht erschüttert, eher gefestigt, obwohl sich die physikalische Interpretation der verwendeten Größen teilweise geändert hat. Der Feldbegriff, von Faraday eingeführt und von Maxwell in mathematische Form gebracht, hat sich als außerordentlich fruchtbar für die Entwicklung der Physik erwiesen.

Mit den Maxwell-Gleichungen stand den Physikern und auch den in der wachsenden Elektroindustrie tätigen Ingenieuren eine vollständige Beschreibung des elektromagnetischen Feldes zur Verfügung. Trotzdem konnte sich die neue Theorie bis zum Ende des 19. Jahrhunderts nur zögernd durchsetzen. Den Ingenieuren erschien sie als zu esoterisch und rein hypothetisch, für die Mehrzahl der Physiker schien sie nichts Neues zu bringen, für das sich das Aufgeben gewohnter Vorstellungen lohnte. Anhänger gewinnen die neuen Ideen zuerst in einer Gruppe meist jüngerer Physiker in England, unter ihnen George Francis Fitzgerald (1851 – 1901), John Henry Poynting (1852 – 1914) und Oliver Heaviside (1850 – 1925). Poynting und Heaviside stellen nahezu gleichzeitig (1884) und unabhängig voneinander einen Energiesatz für das elektromagnetische Feld auf, der heute als Poynting-Satz bekannt ist. Von Heaviside und dem amerikanischen Physiker Josiah Willard Gibbs (1839 – 1903) stammt die heute meist benutzte, vektoranalytische Schreibweise der Maxwell-Gleichungen. Zwei Physiker des deutschsprachigen Raums erkennen schon in den 70er Jahren die Bedeutung von Maxwells Theorie: Helmholtz und der Österreicher Josef Stefan (1835 – 1893). Besonders Helmholtz fördert ihre Verbreitung, weil er darin eine Bestätigung seines Naturbildes sieht, die Zurückführung aller Erscheinungen auf die Mechanik. Er regt auch seinen Schüler Heinrich Rudolf Hertz (1857 – 1894) an, den experimentellen Nachweis des Maxwellschen Verschiebungsstroms zu führen. Tatsächlich gelingt Hertz 1887/88 in einer legendären Versuchsreihe die Erzeugung, die Freiraumübertragung und der Empfang elektromagnetischer Wellen im Radiofrequenzbereich. Er zeigt auch, dass sich diese Wellen grundsätzlich gleich wie Lichtwellen verhalten. Die Versuche werden mit großem Interesse aufgenommen und bringen gleichzeitig eine Anerkennung

der Maxwell-Theorie. Das Hauptinteresse der Physik liegt zu dieser Zeit jedoch nicht bei den elektromagnetischen Effekten im freien Raum, sondern man sucht nach deren Ursprung in der Struktur der Materie.

Bereits seit der Mitte des 18. Jahrhunderts sind Leuchterscheinungen bei elektrischen Entladungen in verdünnten Gasen bekannt. Sie werden aber wenig beachtet, ausgenommen von Faraday, der 1838 eine exakte Beschreibung liefert. Eine systematische Untersuchung beginnt 1850 nach der Erfindung guter Vakuumpumpen. Zwischen 1896 und 1898 identifiziert Joseph John Thomson (1856 – 1940) in Cambridge die von der Kathode ausgehenden Strahlen als einen Strom elektrisch negativ geladener Teilchen, deren Masse viel kleiner ist als die der leichtesten Atome. Er gilt damit als Entdecker des Elektrons.

Beginnend etwa 1890 arbeitet Wilhelm Wien (1864 – 1928) in München an der Thermodynamik der Wärmestrahlung in einem Hohlraum: Er gelangt zu einem Ausdruck für die Energiedichte, der nur bei großen Frequenzen mit Messungen übereinstimmt. Zwei englische Physiker, John William Strutt (Lord Rayleigh, 1842 – 1919) und James Hopwood Jeans (1877 – 1946) führen bis 1900 ähnliche Untersuchungen unter Verwendung der statistischen Mechanik durch. Ihre Ergebnisse gelten nur auf der anderen Seite des Spektrums, bei kleinen Frequenzen. Diese Unstimmigkeit löst der deutsche Physiker Max Planck (1858 – 1947) durch die Formulierung eines Strahlungsgesetzes, dessen Interpretation ihn zu der Tatsache führt, dass sich elektromagnetische Strahlung der Frequenz f immer nur in ganzzahligen Vielfachen kleiner Energieportionen hf ausbreitet. h ist eine universelle Konstante, das Wirkungsquantum (Planck-Konstante). Plancks Ergebnisse, im Dezember 1900 veröffentlicht, kennzeichnen den Anfang der Quantenphysik.

Nach 1900 wird das von J.J. Thomson entdeckte Elektron allgemein als ein universeller Baustein der Materie angesehen. Es ist deshalb verständlich, dass zu Beginn des Jahrhunderts viele Physiker bemüht sind, die elektromagnetischen Eigenschaften von Metallen, Isolatoren und Magneten über das Verhalten von Elektronen zu erklären. Der bemerkenswerteste Beitrag aus dieser Periode stammt von Hendrik Antoon Lorentz (1853 – 1928) aus Leiden. Seine Elektronentheorie, deren Zusammenfassung Lorentz 1909 veröffentlicht, wurde zwar durch die Quantentheorie modifiziert, sie leistet aber auch heute noch durch ihre hohe Erklärungsfähigkeit und wegen ihrer Anschaulichkeit wertvolle Dienste.

Die begrifflichen Grundlagen der Elektrodynamik wurden noch durch eine weitere Theorie beeinflusst, durch die spezielle Relativitätstheorie. Gegen Ende des 19. Jahrhunderts hatte sich in der Physik ein mechanistisches Weltbild durchgesetzt. So versteht man Licht und andere elektromagnetischen Wellen als die Ausbreitung transversaler Störungen in einem Medium, dem Äther, ähnlich wie sich der Schall als die Ausbreitung longitudinaler Störungen in Luft erklären lässt. Damit stellt sich die Frage nach der Bewegung der Erde durch diesen Äther und ob die Lichtgeschwindigkeit, wie sie ein relativ zum Äther bewegter Beobachter misst, durch diese Bewegung beeinflusst wird oder nicht. Albert Abraham Michelson (1852 – 1931) und Edward Williams Morley (1838 – 1923) können 1887 durch ein in Cleveland mit dem von Michelson erfundenen Interferometer ausgeführten Experiment eine Beeinflussung dieser Art mit großer Zuverlässigkeit ausschließen. Dies ist umso interessanter, als Lorentz und der französische Mathematiker Henri Poincaré (1854 – 1912) zeigen, dass sich das Ergebnis des Michelson-Morley-Experiments mit den Maxwell-Gleichungen erklären lässt, der Äther also kein wesentlicher Be-

standteil der Elektrodynamik ist. Damit sind die Grundlagen für die Ausbildung unseres heutigen, abstrakten Feldbegriffs geschaffen. Poincaré prägt 1904 anlässlich eines Vortrages in St. Louis, Missouri, erstmals den Ausdruck „Prinzip der Relativität“, und Planck formuliert 1906 eine relativistische Dynamik; es ist aber Albert Einstein (1879 – 1955), der 1905 das (spezielle) Relativitätsprinzip in seiner allgemeinen Form angibt und mit dessen Namen die relativistische Physik seitdem untrennbar verbunden bleibt.

Die Maxwell–Gleichungen

In seiner Veröffentlichung „A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field“ (Royal Society Transactions, Vol. CLV. Received October 27, — Read December 8, 1864) stellt J. Clerk Maxwell in „Part III“ zum ersten Mal seine elektromagnetischen Gleichungen zusammen. Zu ihrer Wiedergabe verwende ich die heute gebräuchlichen Größensymbole im Internationalen Einheitensystem und die vektoranalytischen Differenzialoperatoren grad, div und rot. Sie standen Maxwell in dieser Form noch nicht zur Verfügung. ∂_t bedeutet die partielle Ableitung nach der Zeit. Komplikationen durch bewegte, elektrisch polarisierbare und magnetisierbare Körper, von Maxwell durchwegs berücksichtigt, lasse ich weg, behalte aber die ursprünglichen Gleichungsbezeichnungen bei.

Er beginnt mit seiner zentralen Hypothese: Die gesamte Stromdichte ist die Summe aus der Leitungsstromdichte („true conduction“) und der Verschiebungsstromdichte („variation of electric displacement“),

$$\vec{J}^g = \vec{J} + \partial_t \vec{D} . \quad (\text{A})$$

Dann führt er aus seinem Wirbelmodell des Äthers mit μ („coefficient of magnetic induction“, hier gleich μ_0 gesetzt) die magnetische Feldstärke („magnetic intensity“) als proportional zur Wirbeldichte des magnetischen Vektorpotenzials („electromagnetic momentum“) ein,

$$\mu_0 \vec{H} = \text{rot} \vec{A} , \quad (\text{B})$$

und verknüpft deren Wirbeldichte mit der gesamten Stromdichte,

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J}^g . \quad (\text{C})$$

Das Faradaysche Induktionsgesetz formuliert Maxwell ebenfalls aus seinem dynamischen Äthermodell heraus als Darstellung der elektrischen Feldstärke („electromotive force“) durch das Vektorpotenzial und das Skalarpotenzial („electric potenzial“),

$$\vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \text{grad} \varphi . \quad (\text{D})$$

Nach der Verknüpfung der elektrischen Feldstärke mit der elektrischen Flussdichte („electric displacement“) über eine Konstante k (hier $1/\varepsilon_0$ gesetzt) („equations of electric elasticity“),

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{D} , \quad (\text{E})$$

folgen das lokale ohmsche Gesetz (F), die Beziehung der elektrischen Raumladungsdichte („quantity of free electricity“) zur elektrischen Flussdichte,

$$\varrho = \operatorname{div} \vec{D} , \quad (\text{G})$$

und die aus (C) mit (A) und (G) ableitbare Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div} \vec{J} = 0 . \quad (\text{H})$$

Weitere Gleichungen betreffen Ausdrücke für mechanische Kräfte.

Im acht Jahre später erschienenen Lehrbuch „Treatise on Electricity and Magnetism“ (Autorisierte deutsche Übersetzung: Lehrbuch der Electricität und des Magnetismus, Bd 1, 2. Berlin: Springer 1883) verwendet Maxwell dann auch die von Faraday favorisierte magnetische Flussdichte („magnetic induction“) \vec{B} zusammen mit einer Verknüpfung, hier als

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (\text{E}')$$

geschrieben. Die in seiner Interpretation des magnetischen Vektorpotenzials als Impulsgröße notwendige Eigenschaft der Quellenfreiheit,

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0 , \quad (\text{B}')$$

heute als Maxwell–Eichung bekannt, wird explizit angegeben. In den Art. 618 und 619 findet sich schließlich eine sehr übersichtliche Zusammenstellung der Gleichungen unter Verwendung des Quaternionenkalküls.

Die heute meist gebrauchte vektoranalytische Schreibweise der Gleichungen finden wir ab 1885. Sie stammt von O. Heaviside, der außerdem das Vektorpotenzial und das Skalarpotenzial eliminiert. Für den leeren Raum bzw. in nicht elektrisch polarisierbaren und nicht magnetisierbaren Medien gilt dann im SI

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\partial_t \vec{B} , \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 , \quad (\text{I})$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \partial_t \vec{D} + \vec{J} , \quad \operatorname{div} \vec{D} = \varrho , \quad (\text{II})$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} , \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} . \quad (\text{III})$$

Die Potenzialdarstellungen

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} , \quad \vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \operatorname{grad} \varphi \quad (\text{IV})$$

ergeben sich damit als formale Konsequenz der Gln. (I), und die lokale Formulierung der Ladungserhaltung

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div} \vec{J} = 0 \quad (\text{V})$$

ist in den Gln. (II) enthalten.

Die relativistische Elektrodynamik bedient sich, um ihren Invarianzforderungen gerecht zu werden, einer Darstellung der elektromagnetischen Größen nicht im dreidimensionalen Raum, sondern in der vierdimensionalen Raum–Zeit. Als besonders vorteilhaft erweist sich hier die Verwendung des Kalküls der alternierenden Differenzialformen, weil er die formale Struktur des Elektromagnetismus

deutlich hervortreten lässt und außerdem eine elegante und damit klare Schreibweise ermöglicht. Grundlegende Größen in dieser Formulierung sind die 2-Form F des elektromagnetischen Feldes und die 2-Form G des Strom-Ladungs-Feldes, wobei die Koeffizienten von F in Bezug auf ein lokales Inertialsystem die magnetische Flussdichte und die elektrische Feldstärke darstellen und die Koeffizienten von G die magnetische Feldstärke und die elektrische Flussdichte. Im gleichen Sinn fasst eine 3-Form J die elektrische Stromdichte und die Ladungsdichte zusammen und eine 1-Form V das magnetische Vektorpotenzial und das Skalarpotenzial. Mit der Operation d der äußeren Ableitung ergeben sich dann für die Gleichungen (I) und (II)

$$dF = 0 , \quad (\text{I}')$$

$$dG = J . \quad (\text{II}')$$

Die Verknüpfungen (III) werden mit der Impedanz des leeren Raumes $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = \mu_0 c_0$ über die $*$ -Operation der Hodge-Dualität, die explizit die Maßbestimmung in der Raumzeit (Messung von Längen- und Zeitintervallen) enthält, vorgenommen,

$$G = *F/Z_0 . \quad (\text{III}')$$

Die Potenzialdarstellungen (IV) ergeben sich als Konsequenz von (I') zu

$$F = dV , \quad (\text{IV}')$$

und die lokale Ladungserhaltung (V) folgt aus (II'),

$$dJ = 0 , \quad (\text{V}')$$

weil die zweimalige Anwendung der äußeren Ableitung immer auf Null führt. Diese Schreibweise der Maxwell-Gleichungen findet sich in der feldphysikalischen Literatur seit den sechziger Jahren.

Ausgewählte Literatur

Eine ausführliche Darstellung der Geschichte des Elektromagnetismus von den Anfängen bis 1926 bietet

E. Whittaker: *A History of the Theories of Aether and Electricity*, vol. 1, 2. New York: Humanities Press, 1973.

Knapper gehalten, aber gut lesbar und bebildert ist

J. Meya, H.O. Sibum: *Das fünfte Element*. Wirkungen und Deutungen der Elektrizität. Hamburg: Rowolt Taschenbuch Verlag, 1987.

Zuverlässige biographische Daten finden sich in

The New Encyclopedia Britannica in 32 vol., 15th ed. Chicago, 1989.

L. Pearce Williams: *Michael Faraday*. New York: Da Capo Press, 1987

stellt Leben und Werk von M. Faraday ausführlich dar. Eine besonders einfühlsam geschriebene Biographie ist

I. Tolstoy: *James Clerk Maxwell*. Edinburgh: Canongate, 1981.

Auch heute noch gut lesbar sind die Arbeiten Maxwells, etwa

J. Clerk Maxwell: *A Dynamical Theory of the Electromagnetic field*.
Royal Society Transactions, vol. CLV (1864)

und natürlich das richtungsweisende Werk

J. Clerk Maxwell: *Lehrbuch der Electricität und des Magnetismus*, Bd.
1, 2. Berlin: Springer, 1883.

1.2 Das analytische Werkzeug

Wir werden uns hier bei der Formulierung der elektrodynamischen Theorie der vektoranalytischen Hilfsmittel für den dreidimensionalen euklidischen Raum bedienen, weil diese für Ingenieuraufgaben derzeit am besten geeignet erscheinen. Alle Größen sind auf ein festes Inertialsystem („Laborsystem“) bezogen, außer es wird etwas anderes behauptet. Die Zeit wird durch einen absoluten Parameter dargestellt. Sollten wir Größen in Bezug auf bewegte Systeme zu interpretieren haben, werden wir in der Regel stillschweigend nichtrelativistische Näherungen benutzen.

Bereiche und Orientierungen

Als geometrische Objekte im Raum betrachten wir Punkte, Kurven, Flächen und räumliche Bereiche (Volumina). Sie sind häufig mit einer Orientierung auszustatten, d.h. Punkten wird ein Pluszeichen oder ein Minuszeichen zugeordnet, Kurven ein Durchlaufsinne, Flächen ein Drehsinn und räumlichen Bereichen ein Schraubensinn. Es handelt sich dabei um sogenannte *innere Orientierungen*, die ohne Bezug auf den umgebenden Raum festgelegt werden können.

Der **Rand** $\partial\mathcal{C}$ einer einfachen, orientierten Kurve \mathcal{C} besteht aus dem Anfangspunkt \mathcal{P}_1 und dem Endpunkt \mathcal{P}_2 , $\partial\mathcal{C} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$ (Abb. 1.1a). Wird dem Anfangspunkt das Minuszeichen und dem Endpunkt das Pluszeichen zugeordnet, so sprechen wir von einer konsistenten Orientierung des Randes. Eine Kurve kann aus mehreren, auch getrennten Teilen bestehen, ihr vollständiger Rand wird dann durch mehrere Punkte gebildet. Der Rand einer geschlossenen Kurve verschwindet,

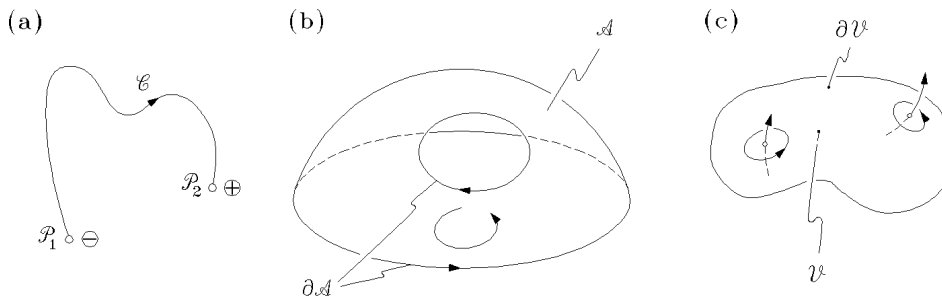


Abb.1.1: Kurven (a), Flächen (b) und räumliche Bereiche (c) mit inneren Orientierungen und konsistent orientierten Rändern. In (c) ist speziell eine Rechtsschraube angenommen.

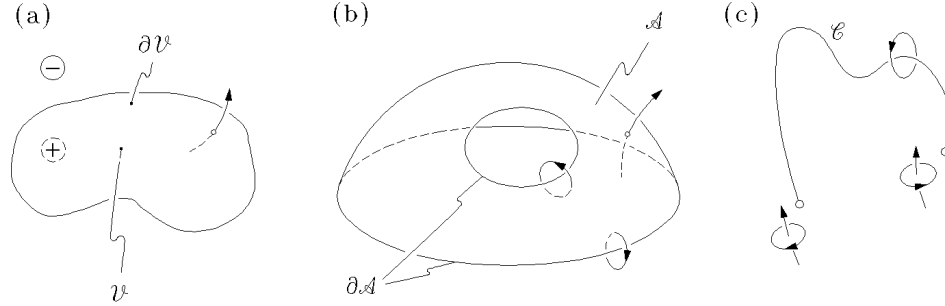


Abb. 1.2: Räumliche Bereiche (a), Flächen (b) und Kurven (c) mit äußeren (transversalen) Orientierungen und konsistent orientierten Rändern.

$\partial\mathcal{C} = 0$. Eine orientierte Fläche \mathcal{A} besitzt als Rand $\partial\mathcal{A}$ im Allgemeinen mehrere geschlossenen Kurven. Sie sind mit der Fläche dann konsistent orientiert, wenn ihr Durchlaufsinne mit dem Drehsinn der Fläche zusammenpasst (Abb. 1.1b). Geschlossene Flächen sind randlos, $\partial\mathcal{A} = 0$. Die innere Orientierung eines räumlichen Bereichs \mathcal{V} ist schließlich durch einen Schraubsinn, also durch eine Rechtsschraube oder durch eine Linksschraube festgelegt. Sein Rand $\partial\mathcal{V}$, bestehend aus einer oder mehreren geschlossenen Flächen, ist dann mit dem Bereich konsistent orientiert, wenn sich der Drehsinn der Flächen bei Annäherung von innen aus dem Schraubsinn ableitet (Abb. 1.1c).

Neben den inneren Orientierungen finden auch noch **äußere (transversale) Orientierungen** von Bereichen Anwendung, wobei räumlichen Bereichen ein Pluszeichen oder ein Minuszeichen, Flächen ein Durchtrittssinn, Kurven ein Umschlingungssinn und Punkten ein Schraubsinn zugeordnet wird. Ist im Raum ein Bereich \mathcal{V} abgegrenzt und belegen wir beispielsweise den Innenraum mit Plus und den Außenraum mit Minus, so weist der Durchtrittssinn des konsistent orientierten Randes $\partial\mathcal{V}$ von innen nach außen, also immer vom Plusbereich zum Minusbereich (Abb. 1.2a). Ähnlich wird der Umschlingungssinn einer konsistent transversal orientierten Randkurve $\partial\mathcal{A}$ vom Durchtrittssinn der berandeten Fläche \mathcal{A} abgeleitet (Abb. 1.2b). Den Randpunkten $\partial\mathcal{C}$ einer Kurve \mathcal{C} ordnen wir bei konsistenter Orientierung jeweils den Schraubsinn zu, der sich bei Annäherung an den Randpunkt von innen zusammen mit dem Umschlingungssinn ergibt (Abb. 1.2c).

Bereiche sind nicht immer orientierbar, wie das bekannte Beispiel des Möbius-Bandes zeigt. Wegen der vorausgesetzten euklidischen Struktur können wir aber für den ganzen Raum immer eine einheitliche Orientierung wählen und brauchen dann nicht zwischen inneren und äußeren Orientierungen von Bereichen zu unterscheiden, weil jeder inneren Orientierung umkehrbar eindeutig eine äußere entspricht. Wir werden hier einer üblichen Konvention folgen und den Raum im Sinn einer Rechtsschraube („rechtswendig“) orientieren. Ist nun irgendein räumlicher Bereich ebenfalls nach einer Rechtsschraube innen orientiert, so entspricht ihm das Pluszeichen der äußeren Orientierung, bei einer Linksschraube das Minuszeichen. Ähnliches gilt für Punkte. Aus dem Durchlaufsinne einer Kurve ergibt sich mit der universellen Rechtsschraube ein Umschlingungssinn und aus dem Drehsinn

einer Fläche der Durchtrittssinn. Obwohl wir dieser Konvention in der Regel stillschweigend folgen werden, müssen wir gelegentlich darauf achten, dass es sich dabei um eine willkürliche Festlegung handelt. Dies ist wichtig, wenn die Eigenschaften physikalischer Größen gegenüber räumlichen Spiegelungen („Parität“) untersucht werden.

Vektoren und Tensoren

Zur Darstellung gerichteter Größen verwenden wir euklidische Vektoren im 3-dimensionalen Raum. Sie besitzen einen Betrag und eine Richtung, können (bei passender physikalischer Dimension) linear kombiniert werden, und zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} sind über das kommutative Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ oder über das antikommutative Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ miteinander verknüpfbar. Eine spezielle Linearkombination ist die Zerlegung (Entwicklung) eines Vektors \vec{a} in Bezug auf eine Basis, d.h. auf einen im betrachteten Punkt festgelegten Satz von drei linear unabhängigen Vektoren $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$:

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = \sum_i a_i \vec{e}_i . \quad (1.1)$$

a_1, a_2, a_3 sind die Koeffizienten von \vec{a} bezüglich der gewählten Basis. Wir werden hier stets Basisvektoren benutzen, die ein orthonormiertes System bilden,

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j , \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (1.2)$$

(δ_{ij} heißt Kronecker-Symbol) und die außerdem in der angegebenen Reihenfolge eine Rechtsschraube definieren,

$$\vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_k) = \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 \\ -1 \\ 0 \end{cases} \text{ wenn} \quad (1.3)$$

$$(i, j, k) \begin{cases} \text{eine gerade} \\ \text{eine ungerade} \\ \text{keine} \end{cases} \text{ Permutation von } (1, 2, 3) \text{ ist.}$$

(ε_{ijk} heißt Permutationssymbol). Die Koeffizienten entsprechen dann den Normalprojektionen auf die Basisrichtungen,

$$a_i = \vec{e}_i \cdot \vec{a} , \quad i = 1, 2, 3 , \quad (1.4)$$

für das Skalarprodukt und das Vektorprodukt haben wir

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_i a_i b_i , \quad \vec{a} \times \vec{b} = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} a_i b_j \vec{e}_k , \quad (1.5)$$

und für den Betrag gilt bekanntlich

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{\sum_i a_i^2} . \quad (1.6)$$

1	$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$
2	$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$
3	$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \cdot \vec{d})$ $= \vec{a} \cdot [\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d})]$
4	$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{c}[(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{d}] - \vec{d}[(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}]$ $= \vec{b}[(\vec{c} \times \vec{d}) \cdot \vec{a}] - \vec{a}[(\vec{c} \times \vec{d}) \cdot \vec{b}]$
5	$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$

Tab.1.1: Einige Formeln der Vektoralgebra.

Einige Vektorformeln sind in Tab. 1.1 zusammengestellt.

Neben dem Skalarprodukt und dem Vektorprodukt benötigen wir noch das nichtkommutative Tensorprodukt $\vec{a} \otimes \vec{b}$. Das entstehende Objekt ist kein Skalar und kein Vektor, sondern ein spezieller Tensor (zweiter Stufe). Die neun möglichen Tensorprodukte von je zwei Vektoren einer orthonormierten Basis bilden zusammen eine Basis für Tensoren, sodass sich ein allgemeiner Tensor (zweiter Stufe) \tilde{T} als Linearkombination solcher Basiselemente angeben lässt,

$$\begin{aligned} \tilde{T} = & T_{11}\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + T_{12}\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + T_{13}\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_3 + \\ & T_{21}\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1 + T_{22}\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 + T_{23}\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_3 + \\ & T_{31}\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_1 + T_{32}\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_2 + T_{33}\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3 = \sum_{i,j} T_{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j . \end{aligned} \quad (1.7)$$

Die neun Größen T_{ij} sind die Koeffizienten von \tilde{T} bezüglich der gewählten Basis. Es ist sinnvoll, das Tensorprodukt auf die Multiplikation von Skalaren mit Vektoren auszudehnen und mit dem gewöhnlichen Produkt zu identifizieren,

$$c \otimes \vec{a} = c\vec{a} = \vec{a} \otimes c . \quad (1.8)$$

Wir können damit Tensoren von links oder von rechts mit einem Vektor über das Skalarprodukt verknüpfen und erhalten dann wieder einen Vektor, im Speziellen

$$\begin{aligned} \vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j \otimes \vec{e}_k) &= (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) \otimes \vec{e}_k = \delta_{ij}\vec{e}_k , \\ (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \cdot \vec{e}_k &= \vec{e}_i \otimes (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k) = \vec{e}_i \delta_{jk} \end{aligned} \quad (1.9)$$

und im Allgemeinen

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \tilde{T} &= \sum_{i,j,k} a_i T_{jk} \vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j \otimes \vec{e}_k) = \sum_{i,j,k} a_i T_{jk} \delta_{ij} \vec{e}_k = \sum_{i,k} a_i T_{ik} \vec{e}_k , \\ \tilde{T} \cdot \vec{b} &= \sum_{i,j,k} T_{ij} b_k (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \cdot \vec{e}_k = \sum_{i,j,k} T_{ij} b_k \delta_{jk} \vec{e}_i = \sum_{i,j} T_{ij} b_j \vec{e}_i . \end{aligned} \quad (1.10)$$

Dies liefert eine Beziehung zur Berechnung der Koeffizienten in Bezug auf die gewählte Basis,

$$T_{ij} = \vec{e}_i \cdot \tilde{T} \cdot \vec{e}_j . \quad (1.11)$$

Wir nennen einen Tensor symmetrisch, wenn er ein symmetrisches Koeffizientenschema $T_{ij} = T_{ji}$ besitzt, und antisymmetrisch, wenn $T_{ij} = -T_{ji}$ gilt. Diese Eigenschaften sind unabhängig von der speziellen (orthonormierten) Basiswahl. Ein

spezieller Tensor ist der Einstensor $\underline{\delta}$. Seine Koeffizienten sind in jeder orthonormierten Basis durch das Kroneckersymbol gegeben, also

$$\underline{\delta} = \sum_{i,j} \delta_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \sum_i \vec{e}_i \otimes \vec{e}_i . \quad (1.12)$$

In Verallgemeinerung der Vektoren dienen Tensoren zur Darstellung physikalischer Größen, denen, grob gesprochen, mehr als eine Richtung zukommt. Wichtig dabei ist, dass der Tensor selbst als lokaler Repräsentant einer physikalischen Größe nicht von der speziellen Basiswahl abhängt. Daraus folgt für seine Koeffizienten eine spezielle Transformationsvorschrift bei einem Basiswechsel. Die skalare Multiplikation eines Tensors von links oder von rechts mit einem Vektor bewirkt eine lineare Transformation des Vektors, der dabei i.A. einen anderen Betrag und eine andere Richtung erhält. Beispielsweise wird die Permittivität eines linearen anisotropen Dielektrikums durch einen symmetrischen Tensor $\underline{\varepsilon}$ erfasst. Die Beziehung zwischen der elektrischen Feldstärke \vec{E} und der elektrischen Flussdichte \vec{D} ist dann $\vec{D} = \underline{\varepsilon} \cdot \vec{E}$, oder nach einer Basiswahl,

$$\sum_i D_i \vec{e}_i = \sum_{i,j} \varepsilon_{ij} E_j \vec{e}_i , \quad (1.13)$$

d.h.

$$D_i = \sum_j \varepsilon_{ij} E_j , \quad i = 1, 2, 3, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} . \quad (1.14)$$

Es gibt also i.A. sechs Permittivitätskoeffizienten, deren Werte von der gewählten Basis abhängen. Der Permittivitätstensor fasst sie basisunabhängig zusammen.

Ein weiteres Beispiel ist der Spannungstensor $\underline{\sigma}$ zur Beschreibung der inneren Kräfteverteilung in Körpern. Ist \vec{n} ein Einsvektor, so gibt $\vec{n} \cdot \underline{\sigma}$ den zugehörigen Spannungsvektor an, also die flächenbezogene Kraft, die an einem Flächenelement senkrecht zu \vec{n} im betrachteten Punkt angreift.

Das Tensorprodukt lässt sich ohne weiteres auf mehr als zwei Vektoren ausdehnen, und auf dieser Grundlage können wir auch Tensoren höherer Stufe konstruieren. Beispielsweise ist der piezoelektrische Materialtensor

$$\underline{d} = \sum_{i,j,k} d_{ijk} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \quad (1.15)$$

ein Tensor dritter Stufe und der elastische Materialtensor für anisotrope Körper

$$\underline{c} = \sum_{i,j,k,l} c_{ijkl} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l \quad (1.16)$$

ein Tensor vierter Stufe. Beide Tensoren sind wichtig z.B. für die Formulierung der linearen piezoelektrischen Materialgleichungen.

In einer allgemeinen Klassifikation mathematischer Objekte zur lokalen Darstellung physikalischer Größen werden Skalare als Tensoren nullter Stufe und Vektoren als Tensoren erster Stufe bezeichnet. Ist jedem Punkt eines Bereichs (zu jedem Zeitpunkt in einem Intervall) der Wert eines Tensors zugeordnet, so sprechen wir von einem Tensorfeld, im Speziellen von einem Skalarfeld oder einem Vektorfeld. Zentral für den Tensorbegriff ist in jedem Fall die Basisunabhängigkeit.

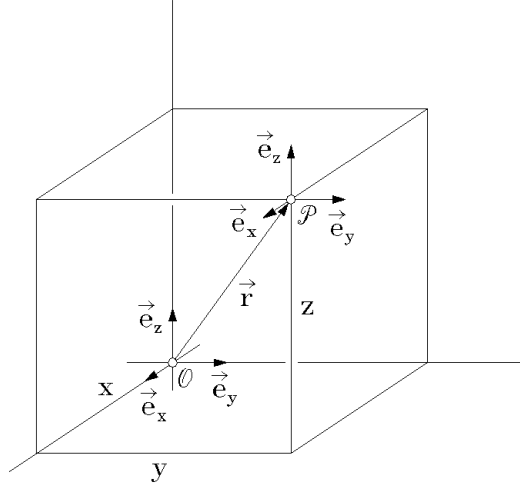


Abb. 1.3: Kartesische Koordinaten eines Punktes \mathcal{P} mit dem Ortsvektor \vec{r} in Bezug auf den Ursprung \mathcal{O} . Eine kartesische Basis $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ ist räumlich konstant.

Koordinaten

Die Lage von Punkten in unserem dreidimensionalen euklidischen Raum beschreiben wir durch ein spezielles Vektorfeld, den Ortsvektor \vec{r} . Wir wählen dazu einen festen Punkt \mathcal{O} als Ursprung und ordnen jedem Punkt \mathcal{P} einen Vektor \vec{r} zu, dessen Betrag $|\vec{r}| = r$ den Abstand der beiden Punkte \mathcal{O} und \mathcal{P} angibt und dessen Richtung von \mathcal{O} nach \mathcal{P} weist. Wird nun im Ursprung eine rechtswendige, orthonormierte Basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} = \{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ festgelegt, so lässt sich daraus durch Parallelverschiebung ein für den ganzen Raum **konstantes** Basisfeld erzeugen. Wir sprechen in diesem Fall von einem **kartesischen Basisfeld**. Die Zerlegung

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \quad (1.17)$$

des Ortsvektors eines Punktes \mathcal{P} liefert dessen **kartesische Koordinaten** $\{x, y, z\}$ bezüglich des Ursprungs und bezüglich der gewählten kartesischen Basis (Abb. 1.3).

Im Prinzip könnte man im dreidimensionalen euklidischen Raum allein mit kartesischen Koordinaten und kartesischen Basen das Auslangen finden. Es erweist sich aber in den Anwendungen häufig als günstig, ein der Geometrie des vorliegenden Problems besser angepasstes Koordinatensystem zu benutzen. Von der Vielzahl der Möglichkeiten werden wir hier die beiden wichtigsten behandeln.

Die **Kreiszyylinderkoordinaten** $\{\varrho, \alpha, z\}$ eines Punktes \mathcal{P} sind in Bezug auf ein kartesisches Achsenkreuz gemäß Abb. 1.4 erklärt.

Zwischen den kartesischen Koordinaten des Punktes \mathcal{P} und seinen Kreiszyylinderkoordinaten gilt dann der Zusammenhang

$$x = \varrho \cos(\alpha), \quad y = \varrho \sin(\alpha), \quad z = z. \quad (1.18)$$

Die zugehörige orthonormierte Basis besteht aus drei Einsvektoren $\{\vec{e}_\varrho, \vec{e}_\alpha, \vec{e}_z\}$ in Richtung der Koordinatenzuwächse. Sie ist im Gegensatz zur kartesischen Basis $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ nicht konstant, sondern über

$$\left. \begin{aligned} \vec{e}_\varrho &= \cos(\alpha)\vec{e}_x + \sin(\alpha)\vec{e}_y, \\ \vec{e}_\alpha &= -\sin(\alpha)\vec{e}_x + \cos(\alpha)\vec{e}_y, \\ \vec{e}_z &= \vec{e}_z, \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \vec{e}_x &= \cos(\alpha)\vec{e}_\varrho - \sin(\alpha)\vec{e}_\alpha, \\ \vec{e}_y &= \sin(\alpha)\vec{e}_\varrho + \cos(\alpha)\vec{e}_\alpha, \\ \vec{e}_z &= \vec{e}_z, \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

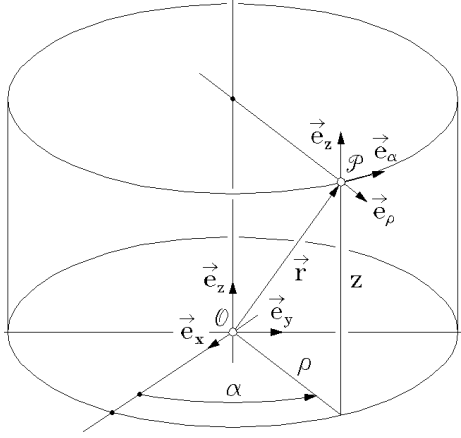


Abb.1.4: Kreiszylinderkoordinaten $\rho \geq 0$, $0 \leq \alpha < 2\pi$ und z eines Punktes \mathcal{P} . Die Richtungen der Basisvektoren \vec{e}_ρ und \vec{e}_α sind ortsabhängig.

mit dieser verknüpft. Ist ein Vektor \vec{a} bezüglich der kartesischen Basis bekannt, $\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$, so können wir daraus über Gl. (1.4) die Koeffizienten seiner Darstellung $\vec{a} = a_\rho \vec{e}_\rho + a_\alpha \vec{e}_\alpha + a_z \vec{e}_z$ in der lokalen Kreiszylinderbasis leicht berechnen, z.B.

$$\begin{aligned} a_\rho &= \vec{e}_\rho \cdot \vec{a} = [\cos(\alpha) \vec{e}_x + \sin(\alpha) \vec{e}_y] \cdot (a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z) \\ &= a_x \cos(\alpha) + a_y \sin(\alpha) . \end{aligned} \quad (1.20)$$

Analog lassen sich über Gl. (1.11) auch Koeffizienten von Tensoren angeben. Natürlich funktioniert diese Transformation auch in der umgekehrten Richtung. Für den Ortsvektor bezüglich \mathcal{O} haben wir speziell

$$\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z . \quad (1.21)$$

Die **Kugelkoordinaten** $\{r, \theta, \alpha\}$ eines Punktes \mathcal{P} definieren wir in Bezug auf

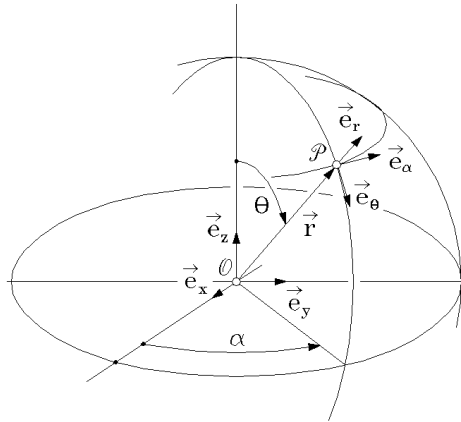


Abb.1.5: Kugelkoordinaten $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$ und $0 \leq \alpha < 2\pi$ eines Punktes \mathcal{P} . Die Richtungen der Basisvektoren sind ortsabhängig.

ein kartesisches Achsenkreuz gemäß Abb. 1.5, wobei der Zusammenhang

$$x = r \sin(\theta) \cos(\alpha), \quad y = r \sin(\theta) \sin(\alpha), \quad z = r \cos(\theta) \quad (1.22)$$

besteht. Die lokale orthonormierte Basis wird durch das Tripel $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\alpha\}$ von Einsvektoren in Richtung der Koordinatenzuwächse gebildet. Wir haben hier

$$\left. \begin{aligned} \vec{e}_r &= \sin(\theta) \cos(\alpha) \vec{e}_x + \sin(\theta) \sin(\alpha) \vec{e}_y + \cos(\theta) \vec{e}_z, \\ \vec{e}_\theta &= \cos(\theta) \cos(\alpha) \vec{e}_x + \cos(\theta) \sin(\alpha) \vec{e}_y - \sin(\theta) \vec{e}_z, \\ \vec{e}_\alpha &= -\sin(\alpha) \vec{e}_x + \cos(\alpha) \vec{e}_y, \end{aligned} \right\} \quad (1.23a)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{e}_x &= \sin(\theta) \cos(\alpha) \vec{e}_r + \cos(\theta) \cos(\alpha) \vec{e}_\theta - \sin(\alpha) \vec{e}_\alpha, \\ \vec{e}_y &= \sin(\theta) \sin(\alpha) \vec{e}_r + \cos(\theta) \sin(\alpha) \vec{e}_\theta + \cos(\alpha) \vec{e}_\alpha, \\ \vec{e}_z &= \cos(\theta) \vec{e}_r - \sin(\theta) \vec{e}_\theta, \end{aligned} \right\} \quad (1.23b)$$

womit sich wiederum die Koeffizienten der Darstellungen von Vektoren und Tensoren in kartesischen und Kugelbasen ineinander umrechnen lassen.

Alle hier besprochenen Koordinatensysteme sind **orthogonale Koordinatensysteme**, d.h. die Tangentenvektoren der Koordinatenlinien in einem Punkt — man erhält die Koordinatenlinien durch fixieren von je zwei Koordinaten und variieren der dritten — stehen paarweise aufeinander senkrecht und bilden die lokale Vektorbasis. Falls nötig, sind diese Tangentenvektoren zu normieren.

Räumliche Ableitungen von Feldern

Die Formulierung der lokalen Eigenschaften von Feldern erfolgt durch Aussagen über ihre räumlichen Änderungsraten. Angenommen, \tilde{F} ist ein Tensorfeld (Skalar, Vektor oder Tensor höherer Stufe), das im Punkt \mathcal{P} mit dem Ortsvektor \vec{r} den Wert $\tilde{F}(\vec{r})$ besitzt. Wir interessieren uns für seinen Wert $\tilde{F}(\vec{r} + \vec{a})$ in irgend einem benachbarten Punkt \mathcal{Q} mit dem Ortsvektor $\vec{a} = a\vec{e}$ bezüglich \mathcal{P} : $a = |\vec{a}|$ ist der Abstand der beiden Punkte, der Einsvektor \vec{e} gibt die Richtung von \mathcal{P} nach \mathcal{Q} an. Das Feld \tilde{F} heißt in \mathcal{P} **differenzierbar**, wenn ein von \vec{a} unabhängiger Tensor $\tilde{G}(\vec{r})$ derart existiert, dass

$$\tilde{F}(\vec{r} + \vec{a}) = \tilde{F}(\vec{r}) + \vec{a} \cdot \tilde{G}(\vec{r}) + \varrho(\vec{a}) \quad \text{für } \vec{a} \rightarrow \vec{0}, \quad (1.24)$$

wobei $\varrho(\vec{a})/a \rightarrow 0$ für $a \rightarrow 0$. Wenn wir den Rest $\varrho(\vec{a})$ weglassen, stellt die rechte Seite demnach die lineare Approximation von \tilde{F} in der Umgebung des betrachteten Punktes dar. Äquivalent dazu ist die Festlegung

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \left[\tilde{F}(\vec{r} + a\vec{e}) - \tilde{F}(\vec{r}) \right] = \vec{e} \cdot \tilde{G}(\vec{r}) \quad (1.25)$$

für alle Richtungen \vec{e} . Das Ausführen dieser Vorschrift für alle Punkte \mathcal{P} eines Bereiches liefert ein gegenüber \tilde{F} um eine Stufe erhöhtes Tensorfeld \tilde{G} , den **Gradienten** von \tilde{F} , und $\vec{e} \cdot \tilde{G}(\vec{r})$ ist die zugehörige **Richtungsableitung** in Richtung \vec{e} im betrachteten Punkt. Der Gradient eines Skalarfeldes ist demnach ein Vektorfeld, der Gradient eines Vektorfeldes ein Tensorfeld zweiter Stufe usw.

Die tatsächliche Berechnung des Gradienten und der Richtungsableitung erfolgt durch die Anwendung des vektoriellen Differenzialoperators $\vec{\nabla}$, genannt Nabla, in der Form

$$\vec{G} = \vec{\nabla} \otimes \underset{\sim}{F}, \quad \vec{e} \cdot \vec{G}(\vec{r}) = \vec{e} \cdot \vec{\nabla} \underset{\sim}{F}(\vec{r}). \quad (1.26)$$

Bezeichnen wir in einem orthogonalen Koordinatensystem mit dem zugehörigen Basisfeld $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ die partielle Ableitung nach der Länge auf der i -ten Koordinatenlinie (die beiden anderen Koordinaten sind dabei festzuhalten) mit ∂_i , so besitzt Nabla die Zerlegung

$$\vec{\nabla} = \sum_i \vec{e}_i \partial_i, \quad (1.27)$$

in kartesischen Koordinaten also

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (1.28)$$

in Kreiszylinderkoordinaten

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_\varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} + \vec{e}_\alpha \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.29)$$

und in Kugelkoordinaten

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\alpha \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \alpha}. \quad (1.30)$$

Algebraisch lässt sich Nabla wie ein gewöhnlicher Vektor behandeln (sein Betrag ist allerdings nicht definiert), seine Eigenschaften als Differenzialoperator (Produktregel, Kettenregel) müssen wir aber zusätzlich beachten. Insbesondere muss sein Wirkungsbereich jeweils klar gemacht werden, wenn nötig durch Abgrenzung mit Klammern. Beispielsweise schreiben wir für Produkte von Skalarfeldern f und g und Vektorfeldern \vec{f} und \vec{g}

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}(fg) &= (\vec{\nabla}f)g + f\vec{\nabla}g, \\ \vec{\nabla}(\vec{f} \cdot \vec{g}) &= (\vec{\nabla} \otimes \vec{f}) \cdot \vec{g} + (\vec{\nabla} \otimes \vec{g}) \cdot \vec{f}, \\ \vec{\nabla} \otimes (f\vec{g}) &= (\vec{\nabla}f) \otimes \vec{g} + f\vec{\nabla} \otimes \vec{g}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

In seiner Eigenschaft als vektorieller Differenzialoperator können wir Nabla mit Vektorfeldern \vec{f} als Operanden auch über das Skalarprodukt oder das Vektorprodukt verknüpfen. Die entstehenden Felder heißen **Divergenz** bzw. **Rotation** und werden manchmal mit vorgesetzten Operatorzeichen „div“ bzw. „rot“ angegeben,

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{f} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{f}, \\ \text{rot} \vec{f} &= \vec{\nabla} \times \vec{f}, \\ \text{und } \text{grad} f &= \vec{\nabla} f, \end{aligned} \quad (1.32)$$

letzteres für den Gradienten eines Skalarfeldes. Auch den Ausdruck $\vec{\nabla} \cdot \underset{\sim}{F}$ mit einem Tensorfeld $\underset{\sim}{F}$ zweiter oder höherer Stufe nennt man Divergenz von $\underset{\sim}{F}$.

Beim Ausführen der Differenzialoperationen in speziellen Koordinaten ist gegebenenfalls auf die Ortsabhängigkeit der Basisvektoren zu achten. Kartesische Basen sind immer konstant, für Kreiszylinderbasen folgt aber aus Gln. (1.19)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \varrho} \{\vec{e}_\varrho, \vec{e}_\alpha, \vec{e}_z\} &= \{\vec{0}, \vec{0}, \vec{0}\} , \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} \{\vec{e}_\varrho, \vec{e}_\alpha, \vec{e}_z\} &= \{\vec{e}_\alpha, -\vec{e}_\varrho, \vec{0}\} , \\ \frac{\partial}{\partial z} \{\vec{e}_\varrho, \vec{e}_\alpha, \vec{e}_z\} &= \{\vec{0}, \vec{0}, \vec{0}\} ,\end{aligned}\tag{1.33}$$

und für Kugelbasen aus Gln. (1.23a), (1.23b)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} \{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\alpha\} &= \{\vec{0}, \vec{0}, \vec{0}\} , \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\alpha\} &= \{\vec{e}_\theta, -\vec{e}_r, \vec{0}\} , \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} \{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\alpha\} &= \{\sin(\theta)\vec{e}_\alpha, \cos(\theta)\vec{e}_\alpha, -\sin(\theta)\vec{e}_r - \cos(\theta)\vec{e}_\theta\} .\end{aligned}\tag{1.34}$$

Wir berechnen damit z.B. die Divergenz und die Rotation eines Vektorfeldes \vec{f} in kartesischen Koordinaten (∂_i bedeutet die partielle Ableitung nach der indizierten Koordinate)

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{f} &= (\vec{e}_x \partial_x + \vec{e}_y \partial_y + \vec{e}_z \partial_z) \cdot (f_x \vec{e}_x + f_y \vec{e}_y + f_z \vec{e}_z) \\ &= \partial_x f_x + \partial_y f_y + \partial_z f_z ,\end{aligned}\tag{1.35}$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{f} &= (\vec{e}_x \partial_x + \vec{e}_y \partial_y + \vec{e}_z \partial_z) \times (f_x \vec{e}_x + f_y \vec{e}_y + f_z \vec{e}_z) \\ &= \vec{e}_x (\partial_y f_z - \partial_z f_y) + \vec{e}_y (\partial_z f_x - \partial_x f_z) + \vec{e}_z (\partial_x f_y - \partial_y f_x) ,\end{aligned}\tag{1.36}$$

die Rotation in Kreiszylinderkoordinaten

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{f} &= \left(\vec{e}_\varrho \partial_\varrho + \vec{e}_\alpha \frac{1}{\varrho} \partial_\alpha + \vec{e}_z \partial_z \right) \times (f_\varrho \vec{e}_\varrho + f_\alpha \vec{e}_\alpha + f_z \vec{e}_z) \\ &= \vec{e}_\varrho \times (\vec{e}_\varrho \partial_\varrho f_\varrho + \vec{e}_\alpha \partial_\varrho f_\alpha + \vec{e}_z \partial_\varrho f_z) + \\ &\quad + \frac{1}{\varrho} \vec{e}_\alpha \times (\vec{e}_\varrho \partial_\alpha f_\varrho + \vec{e}_\alpha \partial_\alpha f_\alpha + \vec{e}_z \partial_\alpha f_\alpha - \vec{e}_\varrho f_\alpha + \vec{e}_z \partial_\alpha f_z) + \\ &\quad + \vec{e}_z \times (\vec{e}_\varrho \partial_z f_\varrho + \vec{e}_\alpha \partial_z f_\alpha + \vec{e}_z \partial_z f_z) \\ &= \vec{e}_\varrho \left(\frac{1}{\varrho} \partial_\alpha f_z - \partial_z f_\alpha \right) + \vec{e}_\alpha (\partial_z f_\varrho - \partial_\varrho f_z) + \\ &\quad + \vec{e}_z \left(\partial_\varrho f_\alpha + \frac{1}{\varrho} f_\alpha - \frac{1}{\varrho} \partial_\alpha f_\varrho \right) ,\end{aligned}\tag{1.37}$$

oder die Divergenz in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{f} &= \left(\vec{e}_r \partial_r + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \partial_\theta + \vec{e}_\alpha \frac{1}{r \sin(\theta)} \partial_\alpha \right) \cdot (f_r \vec{e}_r + f_\theta \vec{e}_\theta + f_\alpha \vec{e}_\alpha) \\
&= \vec{e}_r \cdot (\vec{e}_r \partial_r f_r + \vec{e}_\theta \partial_r f_\theta + \vec{e}_\alpha \partial_r f_\alpha) + \\
&\quad + \frac{1}{r} \vec{e}_\theta \cdot (\vec{e}_r \partial_\theta f_r + \vec{e}_\theta \partial_\theta f_\theta + \vec{e}_\alpha \partial_\theta f_\alpha - \vec{e}_r f_\theta + \vec{e}_\alpha \partial_\theta f_\alpha) + \\
&\quad + \frac{1}{r \sin(\theta)} \vec{e}_\alpha \cdot [\vec{e}_r \partial_\alpha f_r + \vec{e}_\alpha \sin(\theta) f_r + \vec{e}_\theta \partial_\alpha f_\theta + \vec{e}_\alpha \cos(\theta) f_\theta + \\
&\quad + \vec{e}_\alpha \partial_\alpha f_\alpha - \vec{e}_r \sin(\theta) f_\alpha - \vec{e}_\theta \cos(\theta) f_\alpha] \\
&= \frac{\partial_r (r^2 f_r)}{r^2} + \frac{\partial_\theta [\sin(\theta) f_\theta]}{r \sin(\theta)} + \frac{\partial_\alpha f_\alpha}{r \sin(\theta)} . \tag{1.38}
\end{aligned}$$

Die wichtigsten räumlichen Ableitungen von Feldern lassen sich anschaulich interpretieren. So gibt etwa der **Gradient** $\vec{\nabla} f$ eines Skalarfeldes den Vektor an, der in Richtung des lokal **stärksten Anstiegs** der Werte von f zeigt und dessen Betrag durch die Änderungsrate von f bezüglich einer Längenskala in dieser Richtung bestimmt ist. Auf Flächen $f = \text{konst.}$ steht der Gradient senkrecht. Verschwindet er über einem räumlichen Bereich, dann ist das Skalarfeld dort konstant. Die **Divergenz** $\vec{\nabla} \cdot \vec{f}$ eines Vektorfeldes erfasst lokal dessen **Quellendichte**. Repräsentiert \vec{f} eine Flussgröße und ist der betrachtete Punkt von einem kleinen Volumen des Inhalts V umgeben, so gibt $(\vec{\nabla} \cdot \vec{f})V$ den durch die Hülle austretenden Fluss an. Felder mit verschwindender Divergenz in einem ganzen Bereich nennt man dort **quellenfrei**. Die **Rotation** (der Rotor) $\vec{\nabla} \times \vec{f}$ eines Vektorfeldes steht schließlich für dessen lokale **Wirbeldichte**. In einer Flüssigkeit mit der Strömungsgeschwindigkeit \vec{v} gibt z.B. $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}/2$ die lokale Winkelgeschwindigkeit an (grob gesprochen, die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich eine kleine, rauhe Kugel in der Flüssigkeit um sich selbst dreht). Bei Verschwinden der Rotation in einem ganzen Bereich nennen wir das Vektorfeld dort **wirbelfrei**.

Räumliche Ableitungen können auch mehrfach ausgeführt werden, vorausgesetzt, die Felder sind hinreichend oft differenzierbar. Ausgehend von einem Skalarfeld f können wir etwa erst das Gradientenfeld $\vec{\nabla} f$ und dann dessen Divergenz bilden,

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \nabla^2 f . \tag{1.39a}$$

Man schreibt dafür auch

$$\text{div grad } f = \Delta f \tag{1.39b}$$

und nennt den skalaren Differenzialoperator zweiter Ordnung Δ **Laplace-Operator**. In kartesischen Koordinaten gilt

$$\nabla^2 f = \partial_x^2 f + \partial_y^2 f + \partial_z^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} . \tag{1.40}$$

Wichtig ist in diesem Zusammenhang das identische Verschwinden der Rotation des Gradienten eines Skalarfeldes,

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = \text{rot grad } f = \vec{0} , \tag{1.41}$$

	Summen von Feldern
1	$\vec{\nabla}(f + g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
2	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{f} + \vec{g}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{f} + \vec{\nabla} \cdot \vec{g}$
3	$\vec{\nabla} \times (\vec{f} + \vec{g}) = \vec{\nabla} \times \vec{f} + \vec{\nabla} \times \vec{g}$
	Produkt von Skalarfeldern
4	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$
	Produkte von Skalarfeldern mit Vektorfeldern
5	$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{g}) = f\vec{\nabla} \cdot \vec{g} + \vec{g} \cdot \vec{\nabla}f$
6	$\vec{\nabla} \times (f\vec{g}) = f\vec{\nabla} \times \vec{g} + (\vec{\nabla}f) \times \vec{g}$
	Skalares Produkt von Vektorfeldern
7	$\vec{\nabla}(\vec{f} \cdot \vec{g}) = \vec{f} \cdot \vec{\nabla}\vec{g} + \vec{g} \cdot \vec{\nabla}\vec{f} + \vec{f} \times (\vec{\nabla} \times \vec{g}) + \vec{g} \times (\vec{\nabla} \times \vec{f})$
	Vektorielle Produkte von Vektorfeldern
8	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{f} \times \vec{g}) = \vec{g} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{f}) - \vec{f} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{g})$
9	$\vec{\nabla} \times (\vec{f} \times \vec{g}) = \vec{f}\vec{\nabla} \cdot \vec{g} - \vec{g}\vec{\nabla} \cdot \vec{f} + \vec{g} \cdot \vec{\nabla}\vec{f} - \vec{f} \cdot \vec{\nabla}\vec{g}$
	Identitäten
10	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}f) = \nabla^2 f = \Delta f$
11	$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}f) = \vec{0}$
12	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{f}) = 0$
13	$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{f}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{f}) - \nabla^2 \vec{f}$

Tab. 1.2: Rechenregeln für räumliche Ableitungen. f und g sind Skalarfelder, \vec{f} und \vec{g} sind Vektorfelder.

d.h. **Gradientenfelder von Skalaren sind immer wirbelfrei**, und auch das identische Verschwinden der Divergenz von der Rotation eines Vektorfeldes,

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{f}) = \text{div rot } \vec{f} = 0, \quad (1.42)$$

d.h. **die Rotation von Vektorfeldern ist immer quellenfrei**. In Tab. 1.2 sind die wichtigsten Rechenregeln für räumliche Ableitungen zusammengestellt. Tab. 1.3 zeigt die Darstellungen der am häufigsten vorkommenden räumlichen Ableitungen in unseren drei Koordinatensystemen.

Transformation von Integralen

Um globale und lokale Eigenschaften von Feldern in Verbindung zu bringen, benötigen wir Beziehungen zwischen Integralen über Bereiche und deren Ränder im **dreidimensionalen euklidischen Raum**.

Wir betrachten zuerst einen räumlichen Bereich \mathcal{V} zusammen mit seinem vollständigen, konsistent orientierten, stückweise glatten Rand $\partial\mathcal{V}$. Jedem Punkt von $\partial\mathcal{V}$, ausgenommen auf Ecken und Kanten, ist eindeutig ein **von innen nach außen** weisender Einsnormalenvektor \vec{n} zugeordnet. Weiters sei \tilde{F} ein Tensorfeld beliebiger Stufe, differenzierbar überall in \mathcal{V} einschließlich $\partial\mathcal{V}$. Unter diesen

<p>Kartesische Koordinaten x, y, z</p> $\vec{\nabla} f = \vec{e}_x \partial_x f + \vec{e}_y \partial_y f + \vec{e}_z \partial_z f$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \partial_x f_x + \partial_y f_y + \partial_z f_z$ $\vec{\nabla} \times \vec{f} = \vec{e}_x (\partial_y f_z - \partial_z f_y) + \vec{e}_y (\partial_z f_x - \partial_x f_z) + \vec{e}_z (\partial_x f_y - \partial_y f_x)$ $\nabla^2 f = \partial_x^2 f + \partial_y^2 f + \partial_z^2 f$
<p>Kreiszyylinderkoordinaten ϱ, α, z</p> $\vec{\nabla} f = \vec{e}_\varrho \partial_\varrho f + \vec{e}_\alpha \frac{1}{\varrho} \partial_\alpha f + \vec{e}_z \partial_z f$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \frac{1}{\varrho} \partial_\varrho (\varrho f_\varrho) + \frac{1}{\varrho} \partial_\alpha f_\alpha + \partial_z f_z$ $\vec{\nabla} \times \vec{f} = \vec{e}_\varrho \left(\frac{1}{\varrho} \partial_\alpha f_z - \partial_z f_\alpha \right) + \vec{e}_\alpha (\partial_z f_\varrho - \partial_\varrho f_z) + \vec{e}_z \frac{1}{\varrho} [\partial_\varrho (\varrho f_\alpha) - \partial_\alpha f_\varrho]$ $\nabla^2 f = \frac{1}{\varrho} \partial_\varrho (\varrho \partial_\varrho f) + \frac{1}{\varrho^2} \partial_\alpha^2 f + \partial_z^2 f$
<p>Kugelkoordinaten r, θ, α</p> $\vec{\nabla} f = \vec{e}_r \partial_r f + \vec{e}_\theta \frac{\partial_\theta f}{r} + \vec{e}_\alpha \frac{\partial_\alpha f}{r \sin(\theta)}$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \frac{\partial_r (r^2 f_r)}{r^2} + \frac{\partial_\theta [\sin(\theta) f_\theta]}{r \sin(\theta)} + \frac{\partial_\alpha f_\alpha}{r \sin(\theta)}$ $\vec{\nabla} \times \vec{f} = \vec{e}_r \frac{\partial_\theta [\sin(\theta) f_\alpha] - \partial_\alpha f_\theta}{r \sin(\theta)} + \vec{e}_\theta \left[\frac{\partial_\alpha f_r}{r \sin(\theta)} - \frac{\partial_r (r f_\alpha)}{r} \right] + \vec{e}_\alpha \frac{\partial_r (r f_\theta) - \partial_\theta f_r}{r}$ $\nabla^2 f = \frac{\partial_r (r^2 \partial_r f)}{r^2} + \frac{\partial_\theta [\sin(\theta) \partial_\theta f]}{r^2 \sin(\theta)} + \frac{\partial_\alpha^2 f}{r^2 \sin^2(\theta)}$

Tab.1.3: Wichtige räumliche Ableitungen von Skalarfeldern f und Vektorfeldern \vec{f} in kartesischen Koordinaten, Kreiszyylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten.

Voraussetzungen gilt die **Green–Transformation**

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \otimes \vec{f} \, dV = \int_{\partial \mathcal{V}} \vec{n} \otimes \vec{f} \, dA. \quad (1.43)$$

Ein wichtiger Spezialfall ergibt sich daraus für ein Vektorfeld $\vec{F} = \vec{f}$ nach Reduktion des Tensorprodukts auf das Skalarprodukt: Der **Satz von Gauß**¹,

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot \vec{f} \, dV = \int_{\partial \mathcal{V}} \vec{n} \cdot \vec{f} \, dA, \quad (1.44)$$

verknüpft die gesamte Quellenstärke von \vec{f} in \mathcal{V} mit dem Gesamtfluss von \vec{f} durch $\partial \mathcal{V}$.

Eine ähnliche Beziehung gibt es auch zwischen Integralen über Flächen \mathcal{A} und über ihre vollständigen, konsistent orientierten, stückweise glatten Randkurven $\partial \mathcal{A}$. Bezeichnet \vec{n} wieder den Einsnormalenvektor von \mathcal{A} und außerdem \vec{s} den

¹Historisch richtiger wäre „Satz von Lagrange–Gauß–Ostrogradsky“

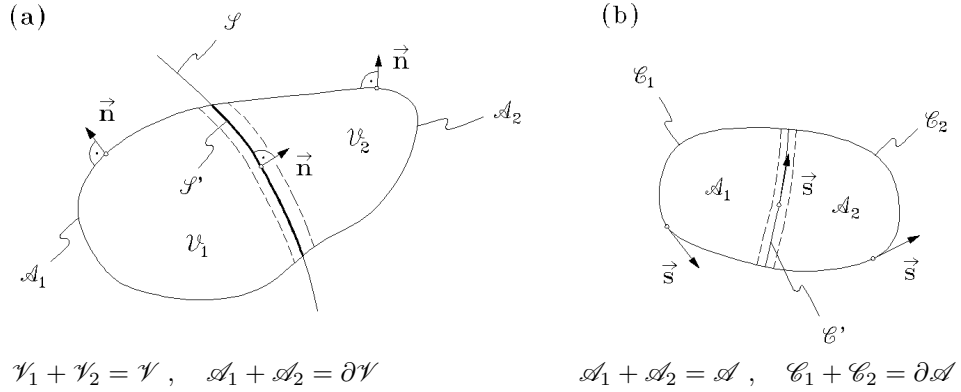


Abb.1.6: Zur Erweiterung der Sätze von Gauß (a) und Stokes (b) auf Bereiche, die von Sprungflächen \mathcal{S} geschnitten werden.

Einstangentenvektor von ∂A (Richtungen entsprechend der konsistenten Orientierungen „rechtswendig“ zugeordnet), so gilt für ein räumliches, differenzierbares Tensorfeld \tilde{F} die **Kelvin-Transformation**

$$\int_A (\vec{n} \times \vec{\nabla}) \otimes \tilde{F} dA = \int_{\partial A} \vec{s} \otimes \tilde{F} ds. \quad (1.45)$$

Auch hier folgt der wichtigste Spezialfall für ein Vektorfeld $\tilde{F} = \vec{f}$ nach Reduktion des Tensorprodukts auf das Skalarprodukt $[(\vec{n} \times \vec{\nabla}) \cdot \vec{f} = \vec{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{f})]$: Der **Satz von Stokes**²,

$$\int_A \vec{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{f}) dA = \int_{\partial A} \vec{s} \cdot \vec{f} ds, \quad (1.46)$$

stellt die Verbindung her zwischen der gesamten Wirbelstärke von \vec{f} auf A und der Zirkulation von \vec{f} entlang ∂A .

Schließlich haben wir unter ähnlichen Voraussetzungen für eine orientierte Kurve \mathcal{C} mit dem Einstangentenvektor \vec{s} , dem Anfangspunkt \mathcal{P}_1 und dem Endpunkt \mathcal{P}_2 und für ein räumliches, differenzierbares Tensorfeld \tilde{F}

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{s} \cdot \vec{\nabla} \tilde{F} ds = \tilde{F}_2 - \tilde{F}_1, \quad (1.47)$$

wenn \tilde{F}_1 und \tilde{F}_2 die Werte von \tilde{F} in \mathcal{P}_1 bzw. \mathcal{P}_2 angeben. Diese Aussage entspricht dem Fundamentalsatz der Integralrechnung.

Häufig stört bei den Anwendungen dieser Integraltransformationen die Voraussetzung über die Differenzierbarkeit der Felder. Beispielsweise gibt es in Feldräumen oft Flächen — etwa Körperperränder oder Wellenfronten —, an denen die Feldgrößen endliche Sprungunstetigkeiten besitzen: In jedem Punkt einer solchen Sprungfläche

²Historisch richtiger wäre „Satz von Kelvin-Ampère-Hankel“

\mathcal{S} existieren zwar die Grenzwerte $\widetilde{F}^{(2)}$ und $\widetilde{F}^{(1)}$ der Feldgröße \widetilde{F} bei Annäherung an \mathcal{S} von vorne bzw. von hinten (Orientierbarkeit von \mathcal{S} vorausgesetzt), ihre Differenz

$$[\![\widetilde{F}]\!] = \widetilde{F}^{(2)} - \widetilde{F}^{(1)}, \quad (1.48)$$

der **Sprung** von \widetilde{F} , ist aber i.A. ungleich Null und natürlich ist \widetilde{F} auf \mathcal{S} dann i.A. auch nicht differenzierbar. Wir werden uns hier auf den Fall solcher Sprungunstetigkeiten im Zusammenhang mit den Sätzen von Gauß und Stokes beschränken.

Wird der Bereich \mathcal{V} , auf den Gl. (1.44) angewendet werden soll, von einer Sprungfläche \mathcal{S} durchsetzt, so spalten wir nach Abb. 1.6a in zwei Bereiche auf und schreiben

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}_1} \vec{\nabla} \cdot \vec{f} dV + \int_{\mathcal{V}_2} \vec{\nabla} \cdot \vec{f} dV &= \int_{\mathcal{A}_1} \vec{n} \cdot \vec{f} dA + \int_{\mathcal{S}'} \vec{n} \cdot \vec{f}^{(1)} dA + \\ &\quad + \int_{\mathcal{A}_2} \vec{n} \cdot \vec{f} dA - \int_{\mathcal{S}'} \vec{n} \cdot \vec{f}^{(2)} dA. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Insgesamt ist damit der erweiterte Satz von Gauß

$$\int_{\partial \mathcal{V}} \vec{n} \cdot \vec{f} dA = \int_{\mathcal{V}'} \vec{\nabla} \cdot \vec{f} dV + \int_{\mathcal{S}'} \vec{n} \cdot [\![\vec{f}]\!] dA, \quad (1.50)$$

wobei \mathcal{V}' als \mathcal{V} ohne die Punkte von \mathcal{S} zu verstehen ist und \mathcal{S}' den in \mathcal{V} liegenden Teil von \mathcal{S} bezeichnet.

Ähnlich können wir bei Gl. (1.46) vorgehen, wenn die Fläche \mathcal{A} von einer Sprungfläche \mathcal{S} geschnitten wird. Aufspalten gemäß Abb. 1.6b liefert

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{A}_1} \vec{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{f}) dA + \int_{\mathcal{A}_2} \vec{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{f}) dA &= \\ = \int_{\mathcal{C}_1} \vec{s} \cdot \vec{f} ds + \int_{\mathcal{C}'} \vec{s} \cdot \vec{f}^{(1)} ds + \int_{\mathcal{C}_2} \vec{s} \cdot \vec{f} ds - \int_{\mathcal{C}'} \vec{s} \cdot \vec{f}^{(2)} ds \end{aligned} \quad (1.51)$$

oder, nach Zusammenfassen,

$$\int_{\partial \mathcal{A}} \vec{s} \cdot \vec{f} ds = \int_{\mathcal{A}'} \vec{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{f}) dA + \int_{\mathcal{C}'} \vec{s} \cdot [\![\vec{f}]\!] ds, \quad (1.52)$$

worin \mathcal{C}' die Schnittlinie von \mathcal{A} mit \mathcal{S} und \mathcal{A}' den Bereich \mathcal{A} ohne die Punkte von \mathcal{C}' angibt. \vec{n} ist der Einsnormalenvektor an \mathcal{A} .

Ausgewählte Literatur

Die hier benötigten mathematischen Methoden sind in vielen empfehlenswerten Mathematikbüchern dargelegt, z.B. in

H.J. Dirschmid: *Mathematische Grundlagen der Elektrotechnik*, 3. Aufl. Braunschweig: Vieweg, 1988.

Eine ältere Darstellung, aber sehr anschaulich und mit vielen Anwendungen ist

F. Ollendorff: *Die Welt der Vektoren*. Wien: Springer, 1950.

Eine weitgehend vollständige Zusammenstellung des traditionellen Materials findet sich in

Ph.M. Morse, H. Feshbach: *Methods of Theoretical Physics*, part I, II.
New York: McGraw-Hill, 1953.

Angenehm zu lesen ist

D. Lovelock, H. Rund: *Tensors, Differenzial Forms, and Variational Principles*, New York: Wiley, 1975

mit einem bemerkenswert guten Anhang, der den Anschluss an die in der modernen Feldphysik nötigen Hilfsmittel ermöglicht. Sehr empfehlenswert ist auch

Y. Choquet-Bruhat, et.al.: *Analysis, Manifolds and Physics*. Amsterdam: North Holland, 1977.

Dieses Buch erfordert allerdings eine gewisse Vertrautheit mit dem gerafften Stil der neueren mathematischen Fachliteratur.

Kapitel 2

Eigenschaften elektromagnetischer Felder

2.1 Globale und lokale Eigenschaften

Wir beginnen mit einer Zusammenstellung der formalen Eigenschaften elektromagnetischer Größen. Ausgehend von globalen Aussagen lassen sich mit Hilfe der Integraltransformationen daraus die zugehörigen lokalen Beziehungen ableiten.

Das elektromagnetische Feld im engeren Sinn

Unter einem elektromagnetischen Feld im engeren Sinn verstehen wir irgendwelche räumlichen Verteilungen elektrischer Spannungen und magnetischer Flüsse, d.h. zu jedem Zeitpunkt wird jeder innen orientierten Kurve \mathcal{C} ein Wert $U(\mathcal{C})$ der **elektrischen Spannung** und jeder innen orientierten Fläche \mathcal{A} ein Wert $\Phi(\mathcal{A})$ des **magnetischen Flusses** zugeordnet. Diese Zuordnungen sind linear. Besteht also insbesondere eine Kurve \mathcal{C} aus zwei orientierten Teilen \mathcal{C}_1 und \mathcal{C}_2 — wir schreiben dafür $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$ — oder wird an \mathcal{C} ein Orientierungswechsel vorgenommen — wir schreiben dann $-\mathcal{C}$ anstelle von \mathcal{C} — so gilt

$$U(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2) = U(\mathcal{C}_1) + U(\mathcal{C}_2), \quad U(-\mathcal{C}) = -U(\mathcal{C}). \quad (2.1)$$

Ähnlich haben wir für magnetische Flüsse

$$\Phi(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) = \Phi(\mathcal{A}_1) + \Phi(\mathcal{A}_2), \quad \Phi(-\mathcal{A}) = -\Phi(\mathcal{A}). \quad (2.2)$$

Zwischen diesen beiden Verteilungen besteht eine dynamische Kopplung, ausgedrückt im **Induktionsgesetz**: Für jede innen orientierte Fläche \mathcal{A} und ihren vollständigen, konsistent orientierten Rand $\partial\mathcal{A}$ ist die elektrische Spannung $U(\partial\mathcal{A})$ gleich der zeitlichen Abnahmerate des magnetischen Flusses $\Phi(\mathcal{A})$,

$$U(\partial\mathcal{A}) = -\dot{\Phi}(\mathcal{A}). \quad (2.3)$$

Außerdem sind magnetische Flussverteilungen stets geschlossen, d.h. es gilt der **Satz vom magnetischen Hüllenfluss**: Für jedes innen orientierte Volumen \mathcal{V}

und seinen vollständigen, konsistent orientierten Rand $\partial\mathcal{V}$ ist der magnetische Fluss $\Phi(\partial\mathcal{V})$ gleich Null,

$$\Phi(\partial\mathcal{V}) = 0 . \quad (2.4)$$

Etwas allgemeiner verschwindet der magnetische Fluss sogar an jeder geschlossenen (d.h. randlosen) Fläche, die nicht notwendig den vollständigen Rand eines räumlichen Bereichs bilden muss.

Auf Grundlage der in den Gln. (2.1) und (2.2) ausgedrückten Eigenschaften lassen sich für die Verteilungen der elektrischen Spannung und des magnetischen Flusses Darstellungen als additive Mengenfunktionen angeben. Wir verwenden dazu die euklidischen Vektorfelder \vec{E} der **elektrischen Feldstärke** und \vec{B} der **magnetischen Flussdichte** und schreiben

$$U(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} \vec{s} \cdot \vec{E} \, ds , \quad \Phi(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} \vec{n} \cdot \vec{B} \, dA , \quad (2.5)$$

wobei \vec{s} den Einstangentenvektor an die Kurve \mathcal{C} im Durchlaufsinne angibt und, nach Einführung der Rechtsschraube als einheitliche Orientierung des Raumes, \vec{n} den Einsnormalenvektor der Fläche \mathcal{A} bezeichnet, deren Orientierung rechtswendig zugeordnet. Für eine bezüglich des zugrundeliegenden Inertialsystems raumfeste, also zusammen mit ihrem Rand zeitlich unveränderliche Fläche liefern dann die Darstellungen (2.5) zusammen mit dem Induktionsgesetz (2.3) und dem Satz von Stokes in der Form (1.52)

$$\begin{aligned} U(\partial\mathcal{A}) + \dot{\Phi}(\mathcal{A}) &= \int_{\partial\mathcal{A}} \vec{s} \cdot \vec{E} \, ds + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} \vec{n} \cdot \vec{B} \, dA \\ &= \int_{\mathcal{A}'} \vec{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B}) \, dA + \int_{\mathcal{C}'} \vec{s} \cdot [\vec{E}] \, ds = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

(∂_t bezeichnet die partielle Zeitableitung). Diese Gleichung ist nur dann für alle Flächen \mathcal{A} und für alle Schnittkurven \mathcal{C}' von \mathcal{A} mit raumfesten Sprungflächen \mathcal{S} erfüllbar, wenn die Integranden selbst identisch null sind,

$$\vec{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B}) = 0 , \quad \vec{s} \cdot [\vec{E}] = 0 , \quad (2.7)$$

und zwar für beliebige \vec{n} und für beliebige Tangentenvektoren \vec{s} an \mathcal{S} . Damit muss der Klammerausdruck in (2.7)₁ als ganzes verschwinden und in (2.7)₂ die Tangentialkomponente von $[\vec{E}]$ bezüglich \mathcal{S} . Letzteres ist gleichbedeutend mit dem Verschwinden von $\vec{n} \times [\vec{E}]$, wenn wir den Einsnormalenvektor an der Sprungfläche ebenfalls mit \vec{n} bezeichnen. Als **lokalen Ausdruck des Induktionsgesetzes** haben wir daher

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} , \quad \vec{n} \times [\vec{E}] = \vec{0} , \quad (2.8)$$

wobei die erste Gleichung lokale Differenzierbarkeit voraussetzt und die zweite Gleichung an Sprungflächen gilt. Eine analoge Argumentation führt von Gl. (2.5)₂ über den Satz von Gauß in der Form (1.50) zum **lokalen Ausdruck des Satzes vom magnetischen Hüllenfluss**,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 , \quad \vec{n} \cdot [\vec{B}] = 0 , \quad (2.9)$$

gültig bei lokaler Differenzierbarkeit bzw. an Sprungflächen.

Das Strom–Ladungs–Feld

Die globale Erfassung von elektrischen Strom- und Ladungsverteilungen erfolgt wiederum durch die lineare Zuordnung von Größen zu Bereichen: Zu jedem Zeitpunkt wird jeder transversal orientierten Fläche \mathcal{A} ein Wert $I(\mathcal{A})$ der **elektrischen Stromstärke** und jedem transversal orientierten Volumen \mathcal{V} ein Wert $Q(\mathcal{V})$ der **elektrischen Ladung** zugeteilt. Aus der Linearität folgt insbesondere

$$\begin{aligned} I(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) &= I(\mathcal{A}_1) + I(\mathcal{A}_2), & I(-\mathcal{A}) &= -I(\mathcal{A}), \\ Q(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2) &= Q(\mathcal{V}_1) + Q(\mathcal{V}_2), & Q(-\mathcal{V}) &= -Q(\mathcal{V}). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Als fundamentale Eigenschaft haben wir hier die **Erhaltung der elektrischen Ladung**: Für jedes transversal orientierte Volumen \mathcal{V} und seinen vollständigen, konsistent orientierten Rand $\partial\mathcal{V}$ ist die elektrische Stromstärke $I(\partial\mathcal{V})$ gleich der zeitlichen Abnahmerate der elektrischen Ladung $Q(\mathcal{V})$,

$$I(\partial\mathcal{V}) = -\dot{Q}(\mathcal{V}). \quad (2.11)$$

Nach der einheitlichen Orientierung des Raums über die Rechtsschraube lassen sich die Verteilungen wegen der Eigenschaften (2.10) als Integrale von Vektorfeldern \vec{J} der **elektrischen Stromdichte** und von Skalarfeldern ϱ der **elektrischen Ladungsdichte** darstellen. Wir werden hier außerdem flächenhafte Verteilungen von Strömen und Ladungen berücksichtigen, beschrieben durch Vektorfelder \vec{K} der **elektrischen Flächenstromdichte** bzw. Skalarfelder σ der **elektrischen Flächenladungsdichte** und definiert auf einer Trägerfläche \mathcal{S} . Linienströme, Linienladungen und Punktladungen erfahren später eine getrennte Behandlung. Durch eine Fläche \mathcal{A} , die entlang der Schnittkurve \mathcal{C}' von \mathcal{A} mit \mathcal{S} von einem Flächenstrom durchsetzt sein kann, tritt dann ein Strom der Stärke

$$I(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}'} \vec{n} \cdot \vec{J} dA + \int_{\mathcal{C}'} (\vec{s} \times \vec{n}) \cdot \vec{K} ds, \quad (2.12)$$

wobei im ersten Integral \vec{n} den Einsnormalenvektor an \mathcal{A} , im zweiten Integral \vec{n} den Einsnormalenvektor an \mathcal{S} und \vec{s} den Einstangentenvektor an die Schnittkurve \mathcal{C}' angibt, alles konsistent orientiert. \mathcal{A}' bezeichnet \mathcal{A} ohne die Punkte von \mathcal{C}' . Ein Volumen \mathcal{V} , das von der Trägerfläche \mathcal{S} einer Flächenladung geschnitten werden kann, enthält die Ladung

$$Q(\mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}'} \varrho dV + \int_{\mathcal{S}'} \sigma dA. \quad (2.13)$$

Hier bezeichnet \mathcal{S}' den in \mathcal{V} liegenden Teil von \mathcal{S} und \mathcal{V}' ist als \mathcal{V} ohne die Punkte von \mathcal{S}' zu verstehen.

Mit den Darstellungen (2.12) und (2.13) lässt sich die Ladungserhaltung lokal formulieren. Um nicht näher auf die Flächengeometrie eingehen zu müssen, werden wir hier zunächst auf die Einbeziehung von Flächenströmen verzichten, Flächenladungen jedoch berücksichtigen. Einsetzen in Gl. (2.11) liefert dann mit

der Transformation (1.50) für raumfeste Bereiche

$$\begin{aligned} I(\partial\mathcal{V}) + \dot{Q}(\mathcal{V}) &= \int_{\partial\mathcal{V}} \vec{n} \cdot \vec{J} dA + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}'} \varrho dV + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{S}'} \sigma dA \\ &= \int_{\mathcal{V}'} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \partial_t \varrho \right) dV + \int_{\mathcal{S}'} \left(\vec{n} \cdot [\vec{J}] + \partial_t \sigma \right) dA = 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

und daraus folgt der **lokale Ausdruck der Ladungserhaltung** („Kontinuitätsgleichung“ und zugehörige Sprungbedingung ohne Flächenströme)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\partial_t \varrho, \quad \vec{n} \cdot [\vec{J}] = -\partial_t \sigma. \quad (2.15)$$

Zum Strom–Ladungs–Feld gehören außerdem Verteilungen der magnetischen Spannung und des elektrischen Flusses: Zu jedem Zeitpunkt wird jeder transversal orientierten Kurve \mathcal{C} ein Wert $V(\mathcal{C})$ der **magnetischen Spannung** und jeder transversal orientierten Fläche \mathcal{A} ein Wert $\Psi(\mathcal{A})$ des **elektrischen Flusses** zugeordnet. Wie auch bisher seien die Zuordnungen zu den Bereichen linear, insbesondere

$$\begin{aligned} V(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2) &= V(\mathcal{C}_1) + V(\mathcal{C}_2), & V(-\mathcal{C}) &= -V(\mathcal{C}), \\ \Psi(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) &= \Psi(\mathcal{A}_1) + \Psi(\mathcal{A}_2), & \Psi(-\mathcal{A}) &= -\Psi(\mathcal{A}). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Im Einklang mit der Ladungserhaltung sind diese Verteilungen so konzipiert, dass sie stets folgende Eigenschaften besitzen. Es gilt der **Ampère–Maxwell–Satz**: Für jede transversal orientierte Fläche \mathcal{A} und ihren vollständigen, konsistent orientierten Rand $\partial\mathcal{A}$ ist die magnetische Spannung gleich der Summe aus der Durchflutung $I(\mathcal{A})$ und der zeitlichen Änderungsrate des elektrischen Flusses,

$$V(\partial\mathcal{A}) = I(\mathcal{A}) + \dot{\Psi}(\mathcal{A}). \quad (2.17)$$

Und es gilt der **Satz vom elektrischen Hüllenfluss**: Für jedes transversal orientierte Volumen \mathcal{V} und seinen vollständigen, konsistent orientierten Rand $\partial\mathcal{V}$ ist der elektrische Ffluss $\Psi(\partial\mathcal{V})$ gleich der elektrischen Ladung $Q(\mathcal{V})$,

$$\Psi(\partial\mathcal{V}) = Q(\mathcal{V}). \quad (2.18)$$

Anwenden von Gl. (2.17) auf einen Rand $\mathcal{A} = \partial\mathcal{V}$ führt wegen $\partial\mathcal{A} = \partial\partial\mathcal{V} = 0$ und damit $V(\partial\mathcal{A}) = V(0) = 0$ nach Einsetzen von Gl. (2.18) zurück auf den Satz von der Erhaltung der elektrischen Ladung, Gl. (2.11).

Der Übergang zu den lokalen Gleichungen verläuft nach dem üblichen Schema. Wir wählen zuerst eine Rechtsschraube als einheitliche Raumorientierung, gehen dann auf Grundlage der Gln. (2.16) mit den euklidischen Vektorfeldern \vec{H} der **magnetischen Feldstärke** und \vec{D} der **elektrischen Flussdichte** zu den Integraldarstellungen

$$V(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} \vec{s} \cdot \vec{H} ds, \quad \Psi(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} \vec{n} \cdot \vec{D} dA \quad (2.19)$$

über und setzen diese zusammen mit den Darstellungen (2.12) und (2.13) für $I(\mathcal{A})$ bzw. $Q(\mathcal{V})$ in die Gln. (2.17) und (2.18) ein. Raumfeste Bereiche vorausgesetzt,

erhalten wir so mit den Integraltransformationen (1.50) bzw. (1.52) die Gleichungen

$$\begin{aligned}
 V(\partial\mathcal{A}) - I(\mathcal{A}) - \dot{\Psi}(\mathcal{A}) &= \int_{\partial\mathcal{A}} \vec{s} \cdot \vec{H} \, ds - \int_{\mathcal{A}'} \vec{n} \cdot \vec{J} \, dA \\
 &\quad - \int_{\mathcal{C}'} (\vec{s} \times \vec{n}) \cdot \vec{K} \, ds - \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} \vec{n} \cdot \vec{D} \, dA \\
 &= \int_{\mathcal{A}'} \vec{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H} - \vec{J} - \partial_t \vec{D}) \, dA - \int_{\mathcal{C}'} \vec{s} \cdot (\llbracket \vec{H} \rrbracket - \vec{K} \times \vec{n}) \, ds = 0, \quad (2.20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Psi(\partial\mathcal{V}) - Q(\mathcal{V}) &= \int_{\partial\mathcal{V}} \vec{n} \cdot \vec{D} \, dA - \int_{\mathcal{V}'} \varrho \, dV - \int_{\mathcal{S}'} \sigma \, dA \\
 &= \int_{\mathcal{V}'} (\vec{\nabla} \cdot \vec{D} - \varrho) \, dV + \int_{\mathcal{S}'} (\vec{n} \cdot \llbracket \vec{D} \rrbracket - \sigma) \, dA = 0, \quad (2.21)
 \end{aligned}$$

gültig für beliebige Flächen \mathcal{A} und räumliche Bereiche \mathcal{V} . Unter Verwendung von $\vec{n} \cdot \vec{K} = 0$ (die Flächenstromdichte liegt stets tangential zu ihrer Trägerfläche) folgen daraus schließlich der **lokale Ausdruck des Ampère–Maxwell–Satzes**

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \partial_t \vec{D}, \quad \vec{n} \times \llbracket \vec{H} \rrbracket = \vec{K} \quad (2.22)$$

und der **lokale Ausdruck des Satzes vom elektrischen Hüllenfluss**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \varrho, \quad \vec{n} \cdot \llbracket \vec{D} \rrbracket = \sigma, \quad (2.23)$$

jeweils zusammen mit den zugehörigen Sprungbedingungen.

Die Maxwell–Gleichungen

Eine Zusammenstellung der bisher behandelten formalen Eigenschaften elektromagnetischer Felder zeigt Tab. 2.1. Hervorgehoben sind vier lokale Gleichungen, üblicherweise **Maxwell–Gleichungen** genannt. Sie bilden zusammen mit den noch zu besprechenden Materialgleichungen den Ausgangspunkt für die Aufstellung von Differenzialgleichungen, deren Lösung die tatsächliche Berechnung der Feldgrößen auch in komplizierteren Situationen ermöglicht. Eine wichtige Rolle spielen dabei auch Bedingungen, denen die Feldgrößen an Bereichsrändern genügen müssen. Sie sind aus den angegebenen Sprungbedingungen ableitbar.

Die Maxwell–Gleichungen selbst zerfallen in zwei Paare. Das erste Paar enthält nur räumliche und zeitliche Ableitungen der Vektorfelder \vec{E} und \vec{B} , also der elektrischen Feldstärke und der magnetischen Flussdichte. Tatsächlich bilden diese beiden Vektorfelder eine Einheit, das elektromagnetische Feld im engeren Sinn, dessen Aufspaltung in eine elektrische und eine magnetische Komponente von der Wahl des Inertialsystems abhängt. In Bezug auf jedes solche System ist lokal die Wirbeldichte (die Rotation) der elektrischen Feldstärke gleich der zeitlichen Abnahmerate der magnetischen Flussdichte, und die Quellendichte (die Divergenz) der magnetischen Flussdichte ist gleich Null. Es wird damit eine strukturelle Aussage über die elektromagnetischen Feldgrößen getroffen und gleichzeitig festgestellt,

	Globale Gleichungen	Integraldarstellungen (Flächenströme und Flächenladungen unterdrückt)	Maxwell-Gleichungen	Sprungbedingungen an raumfesten Flächen
1	$U(\partial\mathcal{A}) = -\dot{\Phi}(\mathcal{A})$	$\int_{\partial\mathcal{A}} \vec{s} \cdot \vec{E} \, ds = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} \vec{n} \cdot \vec{B} \, dA$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$	$\vec{n} \times [\vec{E}] = \vec{0}$
2	$\Phi(\partial\mathcal{V}) = 0$	$\int_{\partial\mathcal{V}} \vec{n} \cdot \vec{B} \, dA = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\vec{n} \cdot [\vec{B}] = 0$
3	$V(\partial\mathcal{A}) = I(\mathcal{A}) + \dot{\Psi}(\mathcal{A})$	$\int_{\partial\mathcal{A}} \vec{s} \cdot \vec{H} \, ds = \int_{\mathcal{A}} \vec{n} \cdot \vec{J} \, dA + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} \vec{n} \cdot \vec{D} \, dA$	$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \partial_t \vec{D}$	$\vec{n} \times [\vec{H}] = \vec{K}$
4	$\Psi(\partial\mathcal{V}) = Q(\mathcal{V})$	$\int_{\partial\mathcal{V}} \vec{n} \cdot \vec{D} \, dA = \int_{\mathcal{V}} \varrho \, dV$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \varrho$	$\vec{n} \cdot [\vec{D}] = \sigma$
5	$I(\partial\mathcal{V}) = -\dot{Q}(\mathcal{V})$	$\int_{\partial\mathcal{V}} \vec{n} \cdot \vec{J} \, dA = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \varrho \, dV$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\partial_t \varrho$	$\vec{n} \cdot [\vec{J}] = -\partial_t \sigma$

Tab.2.1: Grundlegende globale und lokale Eigenschaften elektromagnetischer Felder. Die Feldgrößen sind in Bezug auf ein festes Inertialsystem definiert, die Bereiche sind raumfest angenommen. Die Sprungbedingung zur lokalen Ladungserhaltung ist ggf. durch die Flächendivergenz der Flächenstromdichte zu ergänzen.

dass zur Beschreibung der elektromagnetischen Erscheinungen nach unserem heutigen Kenntnisstand magnetische Ladungen und magnetische Ströme nicht erforderlich sind.

Das zweite Gleichungspaar betrifft die räumlichen und zeitlichen Ableitungen der Vektorfelder \vec{H} und \vec{D} , der magnetischen Feldstärke bzw. der elektrischen Flussdichte. Auch diese beiden Felder bilden zusammen eine Einheit, deren Aufspaltung in eine magnetische und in eine elektrische Komponente von der Wahl des Bezugssystems abhängt. Die strukturelle Aussage dieser Gleichungen über die Feldgrößen ist ganz ähnlich denen für die Felder \vec{E} und \vec{B} , die Wirbeldichte der magnetischen Feldstärke wird aber zusätzlich durch die elektrische Stromdichte bestimmt, und die Quelledichte der elektrischen Flussdichte ist gleich der elektrischen Ladungsdichte.

In ihrer nackten Form bilden die Maxwell-Gleichungen lediglich ein formales Gerüst. Erst durch die Verknüpfung der beiden Gleichungspaare entsteht die Beschreibung eines dynamischen Systems im Sinne der Feldphysik als Träger von Energie und Impuls.

Verknüpfungsbeziehungen

Die einfachsten Verknüpfungen zwischen Verteilungen der elektrischen Spannung sowie des magnetischen Flusses einerseits und des elektrischen Flusses bzw. der magnetischen Spannung andererseits finden wir in materiefreien Feldbereichen. Global erfolgen diese Verknüpfungen über die wesentlich geometrieabhängigen Kapazitäts- bzw. Induktivitätskoeffizienten, lokal über die Beziehungen

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}. \quad (2.24)$$

Obwohl die elektrische Feldkonstante ε_0 und die magnetische Feldkonstante μ_0 als universelle Konstanten aufzufassen sind, ist der physikalische Gehalt dieser Gleichungen beachtenswert. Es werden nämlich jeweils Flussdichten mit Feldstärken, strukturell also völlig unterschiedliche Größen miteinander in Verbindung gebracht. Dies erfordert die Einbeziehung geometrischer Eigenschaften, insbesondere der Maßbestimmung (Metrik), worin sich die physikalischen Eigenschaften des Ortsraums widerspiegeln. In Übereinstimmung mit den Erfahrungen der makroskopischen Physik für nicht extrem weit ausgedehnte Bereiche und für nicht extrem hohe Energiekonzentrationen haben wir von vornherein einen flachen Raum mit euklidischer Maßbestimmung angenommen und euklidische Vektoren verwendet, wodurch der geometrische Gehalt in den Hintergrund tritt. In kosmologischen aber auch in subnuklearen Bereichen ist die euklidische Geometrie als Modell für die physikalischen Eigenschaften des Ortsraums nicht mehr brauchbar.

Im Internationalen Einheitensystem wird die magnetische Feldkonstante μ_0 als exakter Wert durch die Definition des Ampere fixiert. Die Meter-Definition legt außerdem die Lichtgeschwindigkeit c_0 im leeren Raum exakt fest, sodass auch die elektrische Feldkonstante ε_0 über die Maxwell-Beziehung

$$\mu_0 \varepsilon_0 c_0^2 = 1 \quad (2.25)$$

beliebig genau zu berechnen ist.

Wir sehen zunächst von den materiellen Trägern ab und denken uns elektrische Ladungen und Ströme kontinuierlich verteilt im leeren Raum, eventuell auch konzentriert auf Flächen. Eintragen der Verknüpfungsbeziehungen (2.24) für den leeren Raum in die Maxwell-Gleichungen liefert dann das System

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} &= \vec{0}, & \vec{n} \times [\vec{E}] &= \vec{0}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, & \vec{n} \cdot [\vec{B}] &= 0, \\ \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \varepsilon_0 \partial_t \vec{E} &= \vec{J}, & \frac{1}{\mu_0} \vec{n} \times [\vec{B}] &= \vec{K}, \\ \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \varrho, & \varepsilon_0 \vec{n} \cdot [\vec{E}] &= \sigma,\end{aligned}\tag{2.26}$$

woraus sich die Felder \vec{E} und \vec{B} im Prinzip vollständig berechnen lassen, wenn \vec{J} und ϱ (bzw. \vec{K} und σ) als Orts- und Zeitfunktionen im ganzen Raum bekannt sind. Auch Punktladungen und Linienströme sind hier einbeziehbar. Da nun makroskopische Körper hauptsächlich aus leerem Raum bestehen, in dem sich Ladungsträger wie Elektronen und Kerne quasifrei oder gebunden bewegen, erscheinen die Gln. (2.26) als der geeignete Ausgangspunkt auch für die Beschreibung elektromagnetischer Felder innerhalb von Körpern. Tatsächlich versuchen Elektronentheorien in ihren klassischen oder quantenphysikalischen Ausprägungen die Verwirklichung eines solchen Programms, wobei aber zwei wesentliche Aspekte berücksichtigt werden müssen. Erstens sind die Orte und Geschwindigkeiten der Ladungsträger entweder grundsätzlich oder in ihrer Vielzahl nicht erfassbar und die kombinierten Prozesse so verwickelt, dass sie sich einer detaillierten Beschreibung entziehen. Zweitens ist für makroskopische Beobachtungen das mikroskopische elektromagnetische Feld mit seinen starken örtlichen und zeitlichen Fluktuationen ohne Bedeutung. Was in der Regel interessiert, sind Mittelwerte aus Bereichen groß gegenüber atomaren Abmessungen. Man wird also in jedem Fall auf statistische Methoden geführt.

Bei einem klassischen Modell dieser Art werden beispielsweise Punktladungen betrachtet, zum Teil quasifrei, zum Teil in stabilen Aggregaten („Atomen“) gebunden. Wie die Punktladungen eines Aggregates in ihrer Orts- und Geschwindigkeitsverteilung nach außen wirken, lässt sich mit wachsender Empfindlichkeit durch Ladungs- und Strommomente in aufsteigender Ordnung, durch sogenannte Multipolentwicklungen beschreiben. Die solcherart erfassten Ladungen und Ströme sind dann über die Maxwell-Gleichungen (2.26) links mit den stark fluktuierenden Feldern \vec{E} und \vec{B} in den Aggregatzwischenräumen verbunden. Der entscheidende Schritt zur makroskopischen Betrachtungsweise ist nun eine lineare Mittelung unter Verwendung von statistischen Verteilungsfunktionen. Das mikroskopische Modell wird damit auf ein Kontinuumsmodell abgebildet, die beschreibenden Felder werden in makroskopischen Bereichen glatt, also gewissermaßen verschmiert. Da, wie sich zeigen lässt, die räumlichen und zeitlichen Ableitungen mit dem Mittelungsprozess vertauschen, behalten die Maxwell-Gleichungen grundsätzlich ihre Form, wobei nun aber \vec{E} und \vec{B} die makroskopischen, mittleren Felder („Maxwell-Felder“) bedeuten und die Ladungs- und Stromverteilungen durch die geglätteten Multipolentwicklungen zu ersetzen sind,

$$\begin{aligned}\varrho &\rightarrow \varrho - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}, \\ \vec{J} &\rightarrow \vec{J} + \partial_t \vec{P} + \vec{\nabla} \times \vec{M}.\end{aligned}\tag{2.27}$$

ϱ und \vec{J} sind jetzt also die Dichten der „wahren“, makroskopisch feststellbaren Ladungen und Ströme, während die restlichen Terme über die Vektorfelder \vec{P} der **elektrischen Polarisation** und \vec{M} der **Magnetisierung** die makroskopische Wirkung der Ladungs- und Strommomente erster und höherer Ordnung als Dichten von „fiktiven“, gebundenen Ladungen und Strömen zusammenfassen. Andere Modelle, die mit unserem mikrophysikalischen Wissen besser im Einklang stehen als das klassische Punktladungsmodell, führen übrigens auf formal gleiche makroskopische Maxwell-Gleichungen.

Wesentlich ist die Einführung der Vektorfelder \vec{P} und \vec{M} . Da sich makroskopisch von den Ladungs- und Strommomenten meist nur die der nullten und ersten Ordnung bemerkbar machen, lässt sich in der Regel die **elektrische Polarisation** \vec{P} als **Dichte der statistisch gemittelten elektrischen Dipolmomente** und die **Magnetisierung** \vec{M} als **Dichte der statistisch gemittelten magnetischen Dipolmomente** interpretieren. Wir werden das im Folgenden stets tun, um die Stoffgleichungen und die Sprungbedingungen möglichst einfach zu halten.

Nach Eintragen von (2.27) in (2.26), speziell

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \varepsilon_0 \partial_t \vec{E} &= \vec{J} + \partial_t \vec{P} + \vec{\nabla} \times \vec{M}, \\ \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \varrho - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

sehen wir: Wenn die Gln. (2.24) durch die allgemeineren **Verknüpfungsbeziehungen**

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \quad (2.29)$$

ersetzt werden, lassen sich die Maxwell-Gleichungen in der in Tab. 2.1 angegebenen Form auch zur Beschreibung der makroskopischen Felder im Inneren von Körpern verwenden. Im Rahmen eines Kontinuumsmodells sind demnach magnetische Spannungen und elektrische Flüsse genauso wohldefinierte Größen wie elektrische Spannungen und magnetische Flüsse.

Wir setzen nun umgekehrt die Verknüpfungsbeziehungen (2.29) in die Maxwell-Gleichungen und in die zugehörigen Sprungbedingungen aus Tab. 2.1 ein,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} &= \vec{0}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \varepsilon_0 \partial_t \vec{E} &= \vec{J} + \partial_t \vec{P} + \vec{\nabla} \times \vec{M}, \\ \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \varrho - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}, \\ \vec{n} \times [\vec{E}] &= \vec{0}, \\ \vec{n} \cdot [\vec{B}] &= 0, \\ \frac{1}{\mu_0} \vec{n} \times [\vec{B}] &= \vec{K} + \vec{n} \times [\vec{M}], \\ \varepsilon_0 \vec{n} \cdot [\vec{E}] &= \sigma - \vec{n} \cdot [\vec{P}], \end{aligned} \quad (2.30)$$

was in Verbindung mit den Gln. (2.26) für den leeren Raum auf folgende Interpretation führt: In Bezug auf seine Wechselwirkung mit dem makroskopischen

elektromagnetischen Feld, erfasst in den Vektorfeldern \vec{E} und \vec{B} , lässt sich ein Körper beschreiben durch effektive, räumlich und flächenhaft verteilte elektrische Ströme und Ladungen,

$$\begin{aligned}\vec{J}^e &= \vec{J} + \vec{J}^f, & \vec{K}^e &= \vec{K} + \vec{K}^f, \\ \varrho^e &= \varrho + \varrho^f, & \sigma^e &= \sigma + \sigma^f.\end{aligned}\quad (2.31)$$

Diese effektiven Größen bestehen jeweils aus „wahren“ und aus „fiktiven“ Anteilen, wobei letztere über

$$\begin{aligned}\vec{J}^f &= \partial_t \vec{P} + \vec{\nabla} \times \vec{M}, & \vec{K}^f &= \vec{n} \times [\vec{M}], \\ \varrho^f &= -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}, & \sigma^f &= -\vec{n} \cdot [\vec{P}],\end{aligned}\quad (2.32)$$

durch die elektrische Polarisierung \vec{P} und durch die Magnetisierung \vec{M} bestimmt sind. $\partial_t \vec{P}$ heißt Polarisationsstromdichte und $\vec{\nabla} \times \vec{M}$ Magnetisierungsstromdichte oder Elementarstromdichte. $-\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ wird auch Polarisationsladungsdichte genannt.

Erwähnen möchte ich noch eine zweite Interpretation, weil auch sie manchmal eine Vorstellungshilfe bietet. Anstelle der Felder \vec{H} und \vec{D} können wir mit den Verknüpfungsbeziehungen (2.29) aus den Maxwell-Gleichungen und den zugehörigen Sprungbedingungen auch die Felder \vec{B} und \vec{E} eliminieren:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} + \mu_0 \partial_t \vec{H} &= -\partial_t(\mu_0 \vec{M}), & \vec{n} \times [\vec{E}] &= \vec{0}, \\ \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{H} &= -\vec{\nabla} \cdot (\mu_0 \vec{M}), & \mu_0 \vec{n} \cdot [\vec{H}] &= -\vec{n} \cdot [\mu_0 \vec{M}], \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} - \varepsilon_0 \partial_t \vec{E} &= \vec{J} + \partial_t \vec{P}, & \vec{n} \times [\vec{H}] &= \vec{K}, \\ \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \varrho - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}, & \varepsilon_0 \vec{n} \cdot [\vec{E}] &= \sigma - \vec{n} \cdot [\vec{P}],\end{aligned}\quad (2.33)$$

Das Vektorfeld $\mu_0 \vec{M}$ heißt in diesem Zusammenhang magnetische Polarisierung. Mit den „wahren“ Größen \vec{J} und ϱ treten hier als fiktive Größen neben der elektrischen Polarisationsstromdichte $\partial_t \vec{P}$ und der elektrischen Polarisationsladungsdichte $-\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ auch eine magnetische Polarisationsstromdichte $\partial_t(\mu_0 \vec{M})$ und eine magnetische Polarisationsladungsdichte $-\vec{\nabla} \cdot (\mu_0 \vec{M})$ auf. Wir haben hier also fiktive magnetische Ströme und Ladungen.

Materialgleichungen

Wie bereits erwähnt und später noch ausgeführt, sind elektromagnetische Felder \vec{E} , \vec{B} aus den Ladungen und Strömen, den „wahren“ und den „fiktiven“, im Prinzip berechenbar. Neben den Feldern ϱ , σ , \vec{J} und \vec{K} müssen dazu auch die Felder \vec{P} und \vec{M} bekannt sein. Diese Daten liegen jedoch selten vor. Vielmehr stellen sich die Probleme häufiger so, dass Teilinformationen über die Felder vorliegen — beispielsweise elektrische Spannungen zwischen Elektroden, Ströme in Spulen, einfallende elektromagnetische Wellen — und daraus andere Größen bestimmt werden sollen — etwa resultierende Ströme oder maximale Feldstärken, Kräfte und Leistungen, Eigenschaften gestreuter Wellen oder Übertragungscharakteristiken. Welche Ladungen, Polarisierungen oder Magnetisierungen sich dabei in den beteiligten Körpern einstellen, hängt über deren Eigenschaften von den noch unbekannten Feldern ab. Was wir also in der Regel zusätzlich brauchen, sind mathematische Modelle für das physikalische Verhalten der Materialien, aus denen die Körper aufgebaut sind. Dabei ergeben sich natürlich Verbindungen zur Festkörperphysik, zur Plasmaphysik u.Ä., zu den Werkstoffwissenschaften im Allgemeinen.

Wir werden uns hier in den meisten Fällen auf ganz einfache, phänomenologische Modelle beschränken, die das Materialverhalten weitgehend idealisiert wiedergeben. Ob ein solches Modell brauchbar ist, hängt von der Art des Problems ab, vom Variationsbereich und den Änderungsraten der physikalischen Variablen und von der geforderten Genauigkeit, aber auch davon, ob seine Verwendung zu mathematisch korrekt gestellten Aufgaben führt, die sich zudem mit vertretbarem Aufwand bewältigen lassen.

Ein (ruhender) Körper heißt **ideal elektrisch leitfähig**, wenn die elektrische Feldstärke in Bezug auf jeden inneren Körperpunkt und unabhängig von anderen physikalischen Variablen verschwindet, dort also stets $\vec{E} = \vec{0}$ gilt. Dies ist zu unterscheiden von einem supraleitenden Zustand, der zusätzlich das Verschwinden auch des Magnetfeldes im Körperinneren erfordert. Ein **ideal elektrisch isolierender** Körper kann dagegen in keiner Situation eine elektrische Stromdichte tragen, $\vec{J} = \vec{0}$. Wir sprechen von einem **linear homogen isotrop einfach elektrisch leitfähigen Körper**, wenn als Beziehung zwischen der elektrischen Stromdichte \vec{J} und der elektrischen Feldstärke \vec{E} in Bezug auf jeden inneren (ruhenden) Körperpunkt das lokale ohmsche Gesetz

$$\vec{J} = \gamma \vec{E} \quad (2.34)$$

mit einer konstanten elektrischen Leitfähigkeit $\gamma > 0$ besteht. Wesentlich für die Linearität ist, dass γ nicht selbst von \vec{E} abhängt. Weiterhin linear, isotrop und einfach, aber **inhomogen** elektrisch leitfähig ist ein Material dann, wenn die Leitfähigkeit auf eine vorgegebene Weise vom Ort abhängt, die skalarwertige Ortsfunktion $\gamma(\vec{r})$ also im Vorhinein **explizit bekannt** ist. Müssen Temperatureinflüsse berücksichtigt werden, so kann eine Inhomogenität dieser Art z.B. auch über ein vorgegebenes Temperaturfeld zustande kommen. Ähnliches gilt für eine explizite Zeitabhängigkeit, $\gamma(\vec{r}, t)$.

Bedingt durch den kristallinen Aufbau, durch ein Herstellverfahren oder unter dem Einfluss anderer Felder wie elastische Verformungen oder Geschwindigkeitsfelder in strömenden Medien kann eine Richtungsabhängigkeit, eine **Anisotropie** von physikalischen Eigenschaften bestehen. Im Fall der elektrischen Leitung liegt dann \vec{J} nicht mehr notwendig für alle Richtungen parallel zu \vec{E} (es gibt im Allgemeinen in jedem Körperpunkt drei Richtungen, die Leitfähigkeitshauptrichtungen, für die das weiterhin gilt). Liegt weiterhin Linearität zwischen \vec{J} und \vec{E} vor, so haben wir die Beziehung (2.34) zu ersetzen durch die allgemeinere Form

$$\vec{J} = \underline{\gamma} \cdot \vec{E} \quad (2.35)$$

mit dem Leitfähigkeitstensor $\underline{\gamma}$, einem möglicherweise explizit orts- und zeitabhängigen Tensor zweiter Stufe.

Durch die Einbeziehung mechanischer, magnetischer und thermischer Felder in die Variablenliste lassen sich **nicht einfache** Leitungsvorgänge wie piezogalvanische, magnetogalvanische oder thermogalvanische Effekte erfassen.

Formale Klassifizierungen ähnlicher Art erweisen sich auch bei der Darstellung der dielektrischen und magnetischen Materialeigenschaften als günstig. So nennen wir einen (ruhenden) Körper **elektrisch nicht polarisierbar** oder **nicht magnetisierbar**, wenn mit hinreichender Genauigkeit $\vec{P} = \vec{0}$ bzw. $\vec{M} = \vec{0}$ für alle

Körperpunkte und unabhängig von anderen physikalischen Variablen vorausgesetzt werden kann. **Linear isotrope elektrische Polarisierbarkeit** oder **Magnetisierbarkeit** wird durch Materialgleichungen

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} \quad \text{bzw.} \quad \vec{M} = \kappa \vec{H} = \frac{\kappa}{\mu_0(1 + \kappa)} \vec{B}, \quad (2.36)$$

oder, mit Gln. (2.29),

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad \text{bzw.} \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad (2.37)$$

dargestellt, wobei

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_0 \varepsilon_r, & \mu &= \mu_0 \mu_r, \\ \varepsilon_r &= 1 + \chi, & \mu_r &= 1 + \kappa. \end{aligned} \quad (2.38)$$

ε heißt Permittivität, ε_r Permittivitätszahl und χ elektrische Suszeptibilität, μ ist die Permeabilität, μ_r die Permeabilitätszahl und κ die magnetische Suszeptibilität. **Homogenes** Materialverhalten bedeutet dann konstante Werte dieser Materialgrößen, im **inhomogenen** Fall können sie auf explizite Weise ortsabhängig sein. **Nichtlinear** wirkende Stoffe sind mit den gleichen Benennungen der Materialgrößen auch durch Gleichungen der Art (2.37) beschreibbar, falls ein eindeutiger Zusammenhang zwischen \vec{D} und \vec{E} bzw. \vec{B} und \vec{H} besteht und falls weiterhin Isotropie vorausgesetzt werden kann. Die Werte der Skalaren ε und μ hängen dann von den Beträgen $|\vec{E}|$ bzw. $|\vec{H}|$ ab. Eine Erweiterung der linearen Gleichungen (2.37) vom isotropen auf den **anisotropen** Fall ist unter Verwendung des Permittivitätstensors $\underline{\underline{\varepsilon}}$ bzw. des Permeabilitätstensors $\underline{\underline{\mu}}$ möglich, beides Materialtensoren zweiter Stufe:

$$\vec{D} = \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \vec{E}, \quad \vec{B} = \underline{\underline{\mu}} \cdot \vec{H}. \quad (2.39)$$

Natürlich können auch hier andere physikalische Felder mit einbezogen werden. Bedeuten z.B. $\underline{\underline{\sigma}}$ den mechanischen Spannungstensor und $\underline{\underline{e}}$ den Verzerrungstensor der linearisierten Elastizitätstheorie, so stellen sich die **linearen piezoelektrischen Materialgleichungen** in Bezug auf eine körperfeste, orthogonale Basis als

$$\begin{aligned} P_i &= \sum_{k=1}^3 \varepsilon_0 \chi_{ik} E_k + \sum_{k,l=1}^3 \Pi_{kli} e_{kl}, \\ \sigma_{ij} &= \sum_{k,l=1}^3 c_{ijkl} e_{kl} - \sum_{k=1}^3 \Pi_{ijk} E_k \end{aligned} \quad (2.40)$$

dar. Darin sind die Konstanten χ_{ik} die Koeffizienten des elektrischen Suszeptibilitätstensors zweiter Stufe (mit dem Einstensor $\underline{\underline{\delta}}$ ist dann $\underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon_0(\underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{\chi}})$ der zugehörige Permittivitätstensor), die Konstanten Π_{ijk} die Koeffizienten des piezoelektrischen Tensors dritter Stufe und die Konstanten c_{ijkl} die Koeffizienten des elastischen Steifigkeitstensors vierter Stufe. Es bestehen immer die Vertauschungssymmetrien

$$\chi_{ik} = \chi_{ki}, \quad \Pi_{ijk} = \Pi_{jik}, \quad c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{klij},$$

sodass selbst im allgemeinsten Fall höchstens 6 unterschiedliche elektrische Suszeptibilitätskoeffizienten, 18 unterschiedliche piezoelektrische Koeffizienten und 21 unterschiedliche elastische Steifigkeitskoeffizienten existieren. Abhängig von der Symmetrieklasse (Kristallklasse), der das Material angehört, reduziert sich die Anzahl der unabhängigen Materialkoeffizienten weiter. Beispielsweise gibt es in zentralsymmetrischen (inversionssymmetrischen) Werkstoffen überhaupt keine nicht verschwindenden Materialtensoren ungerader Stufe und damit auch keinen piezoelektrischen Effekt.

Materialgleichungen der Form (2.39) oder (2.40) beschreiben das Werkstoffverhalten lokal und instantan, d.h. Werte physikalischer Größen werden in einem Körperpunkt zu einem Zeitpunkt mit Werten anderer physikalischer Größen im selben Körperpunkt zum selben Zeitpunkt verknüpft. Dies reicht aber nicht immer aus, z.B. dann nicht, wenn ein Wert $\vec{D}(\vec{r}, t)$ von allen Werten $\vec{E}(\vec{r}', t')$ mit \vec{r}' in einer Umgebung von \vec{r} und $t' \leq t$ abhängt. **Nichtlokales** Verhalten muss etwa bei sehr kurzen elektromagnetischen oder akustischen Wellen berücksichtigt werden, bei Wellenlängen in der Größenordnung der Gitterkonstanten. **Nichtinstantanes** Verhalten macht sich vor allem durch molekulare, atomare oder elektronische Trägheitseffekte bei großen zeitlichen Änderungsraten, also hohen Frequenzen bemerkbar. Im Allgemeinen benötigt man dann anstelle der Materialfunktionen Funktionale, d.h. es werden nicht Werte auf Werte, sondern Funktionen auf Werte abgebildet. In einfachen Fällen reicht die Aufnahme räumlicher und zeitlicher Ableitungen der Feldgrößen in die Variablenliste aus, oder auch Spektraldarstellungen der Art

$$\vec{D}(\vec{k}, \omega) = \underline{\varepsilon}(\vec{k}, \omega) \cdot \vec{E}(\vec{k}, \omega), \quad \vec{B}(\vec{k}, \omega) = \underline{\mu}(\vec{k}, \omega) \cdot \vec{H}(\vec{k}, \omega) \quad (2.41)$$

mit Materialtensoren $\underline{\varepsilon}$ und $\underline{\mu}$, deren Werte vom Ausbreitungsvektor \vec{k} und von der Kreisfrequenz ω abhängen.

Ferromagnetische, ferroelektrische und ähnliche Materialien bilden unterhalb gewisser Grenztemperaturen meist eine Domänenstruktur aus mit typischen Domänenabmessungen, die im Bereich zwischen einer mikroskopischen und einer makroskopischen Skala liegen. Wir betrachten die elektrischen und magnetischen Felder hier in der Regel wieder als mittlere Felder, berücksichtigen also nicht die räumlichen und zeitlichen Fluktuationen zufolge der Domänenstruktur.

Typisch für ferromagnetische Stoffe ist die Erscheinung der magnetischen Hysterese und damit die Möglichkeit einer groben Charakterisierung durch Kennwerte wie Remanenzflussdichte, Koerzitivfeldstärke und Sättigungsmagnetisierung. **Hartmagnetische Werkstoffe** besitzen vergleichsweise große Koerzitivfeldstärken. Ein besonders einfaches mathematisches Modell ist das der **starren Magnetisierung**

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{B}_r, \quad \vec{B}_r = \mu_0 \vec{M}(\vec{r}), \quad (2.42)$$

bei dem das Vektorfeld der Remanenzflussdichte oder, äquivalent, der Magnetisierung als Ortsfunktion explizit vorgegeben ist, unabhängig von den Werten von \vec{B} oder \vec{H} . Anwendbar ist diese Materialgleichung häufig für moderne Dauermagnetwerkstoffe im Bereich $|\vec{H}| \leq |\vec{B}_r|/\mu_0$. **Weichmagnetische Werkstoffe** sind dagegen durch kleine Koerzitivfeldstärken gekennzeichnet und, wenn Hysterese

überhaupt vernachlässigt werden kann, durch große Permeabilitätszahlen unterhalb der Sättigung. Als erste Näherung oder wenn hauptsächlich das Magnetfeld z.B. im angrenzenden Luftraum interessiert, erweist sich oft das Modell des **ideal magnetisierbaren Körpers** als brauchbar, d.h. $\vec{H} = \vec{0}$ in allen inneren Körperpunkten, unabhängig von \vec{B} , natürlich nur unterhalb der Sättigung. Ansonsten verwenden wir Materialgleichungen der Form (2.37)₂ oder (2.39)₂ mit konstanten oder feldstärke- bzw. flussdichteabhängigen Permeabilitätsgrößen. Voraussetzung dafür sind vernachlässigbare Remanenzflussdichten und Koerzitivfeldstärken.

Ergänzungen für bewegte Körper

Elektromagnetische Größen haben wir bisher in Bezug auf ein festgelegtes Inertialsystem („Laborsystem“) interpretiert und auch alle Körper als ruhend in diesem System angenommen. Gibt es bewegte Körper, so sind Ergänzungen erforderlich.

Angenommen, in einem Raumbereich ist ein Geschwindigkeitsfeld gegeben, das jedem Raumpunkt \vec{r} zu jedem Zeitpunkt t die Geschwindigkeit $\vec{v}(\vec{r}, t)$ des gerade dort befindlichen Körperpunktes zuordnet, und zwar in Bezug auf unser festes Inertialsystem. Ausgehend von den Feldern \vec{E} , \vec{B} , \vec{H} , \vec{D} , \vec{M} , \vec{P} , \vec{J} und ϱ definieren wir neue Felder

$$\begin{aligned}\vec{E}' &= \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}, & \vec{B}' &= \vec{B}, \\ \vec{H}' &= \vec{H} - \vec{v} \times \vec{D}, & \vec{D}' &= \vec{D}, \\ \vec{M}' &= \vec{M} + \vec{v} \times \vec{P}, & \vec{P}' &= \vec{P}, \\ \vec{J}' &= \vec{J} - \vec{v}\varrho, & \varrho' &= \varrho\end{aligned}\tag{2.43}$$

mit folgenden interessanten Eigenschaften. Sie lassen sich im Rahmen einer **nicht-relativistischen Kinematik** interpretieren als die elektrische Feldstärke, die magnetische Flussdichte usw. in Bezug auf die bewegten Körperpunkte. Wenn wir also die lokalen elektromagnetischen Größen von einem Bezugssystem aus betrachten, das sich momentan mit dem Körperpunkt bewegt, so lassen sich zwar die Werte von \vec{B} , \vec{D} , \vec{P} und ϱ direkt als Werte aus dem festen Raumpunkt übernehmen, der gerade mit unserem Körperpunkt zusammenfällt, die Werte von \vec{E} , \vec{H} , \vec{M} und \vec{J} sind jedoch wie angegeben zu transformieren. Tatsächlich stellen die Gln. (2.43) eine Version für kleine Geschwindigkeiten $|\vec{v}| \ll c_0$ der Lorentz-Transformation dar, die das Transformationsverhalten der lokalen elektromagnetischen Größen beim Übergang von einem Inertialsystem zu einem anderen im Rahmen der relativistischen Physik erfasst.

Als wichtigste Konsequenz dieser Interpretation haben wir **lokale Materialgleichungen** für bewegte Körper mit den **gestrichenen Größen** zu formulieren, also z.B. das lokale ohmsche Gesetz (2.34) in der Form

$$\vec{J}' = \gamma \vec{E}', \quad \text{d.h.} \quad \vec{J} - \vec{v}\varrho = \gamma \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)\tag{2.44}$$

zu schreiben. Verknüpft werden hier in Bezug auf den bewegten Körper die elektrische Feldstärke \vec{E}' und die elektrische Stromdichte \vec{J}' . Letztere heißt auch **Konduktionsstromdichte** (Leitungsstromdichte). Zusammen mit der **Konvektionsstromdichte** $\vec{v}\varrho$ bildet sie gemäß Gl. (2.43)₇ die im Laborsystem beobachtete

Stromdichte \vec{J} . Davon beeinträchtigt werden natürlich nicht die allgemeinen Verknüpfungsbeziehungen (2.29),

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}' \\ \vec{H} &= \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}' + \vec{v} \times \vec{P}' .\end{aligned}\quad (2.45)$$

Eine weitere wichtige Konsequenz betrifft die **globalen Eigenschaften** des elektromagnetischen Feldes, zusammengefasst in den Sätzen der zweiten Spalte von Tab. 2.1. Sie gelten in der gleichen Form auch für Bereiche und deren Ränder, die vom Geschwindigkeitsfeld mitgeführt werden, für **materielle Bereiche**. Allerdings sind in den Integraldarstellungen dann die gestrichenen Felder zu verwenden. Bemerkbar macht sich das in den Spannungen und in der Stromstärke,

$$U(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} \vec{s} \cdot \vec{E}' \, ds , \quad V(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} \vec{s} \cdot \vec{H}' \, ds , \quad I(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} \vec{n} \cdot \vec{J}' \, dA . \quad (2.46)$$

Insbesondere ist also einer bewegten Kurve \mathcal{C} i.A. ein anderer Wert der elektrischen Spannung zugeordnet als der raumfesten Kurve, mit der \mathcal{C} momentan zusammenfällt. Außerdem ist bei der Berechnung der zeitlichen Änderungsraten von Flüssen an materiellen Flächen Folgendes zu beachten. Sei Γ eine Flussgröße, \vec{F} das Vektorfeld der zugehörigen Flussdichte und $\dot{\Gamma}(\mathcal{A})$ die zeitliche Änderungsrate des Flusses an \mathcal{A} ,

$$\Gamma(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} \vec{n} \cdot \vec{F} \, dA , \quad \dot{\Gamma}(\mathcal{A}) = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} \vec{n} \cdot \vec{F} \, dA . \quad (2.47)$$

Im zweiten Integral kann nun die Zeitableitung nicht einfach wie für raumfeste Flächen als partielle Zeitableitung $\partial_t \vec{F}$ unter das Integral gezogen werden, weil sich \mathcal{A} mit der Zeit ebenfalls ändert, sondern es gilt die Vertauschungsregel

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} \vec{n} \cdot \vec{F} \, dA = \int_{\mathcal{A}} \vec{n} \cdot \left(\partial_t^c \vec{F} \right) \, dA , \quad (2.48)$$

wobei

$$\partial_t^c \vec{F} = \partial_t \vec{F} + \vec{v} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} \times \left(\vec{F} \times \vec{v} \right) \quad (2.49)$$

die **mitgeschleppte Zeitableitung** für vektorielle Flussdichten bedeutet. Damit ausgerüstet können wir über die Sätze von Gauß und Stokes wieder zu den **lokalen Formen** und den **Sprungbedingungen** an **materiellen Flächen** übergehen,

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E}' &= -\partial_t^c \vec{B} , & \vec{n} \times [\vec{E}'] &= \vec{0} , \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 , & \vec{n} \cdot [\vec{B}] &= 0 , \\ \vec{\nabla} \times \vec{H}' &= \vec{J}' + \partial_t^c \vec{D} , & \vec{n} \times [\vec{H}'] &= \vec{K}' , \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \varrho , & \vec{n} \cdot [\vec{D}] &= \sigma .\end{aligned}\quad (2.50)$$

\vec{K}' ist der konduktive Anteil der Flächenstromdichte. Die erste dieser Gleichungen, das lokale Induktionsgesetz, lautet mit (2.43)₁ und (2.49)

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) = -\partial_t \vec{B} - \vec{v} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} - \vec{\nabla} \times \left(\vec{B} \times \vec{v} \right) , \quad (2.51)$$

worin der zweite Term auf der rechten Seite wegen $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ verschwindet und sich der dritte Term rechts mit dem zweiten Term links weghebt. Wir werden also wieder auf unsere ursprüngliche lokale Form des Induktionsgesetzes zurückgeführt. Ähnliches lässt sich auch für die anderen Gleichungen zeigen, unser System ist also konsistent. Änderungen gegenüber den Ausdrücken in Tab. 2.1 erfahren lediglich die Sprungbedingungen, weil sie nun für bewegte Sprungflächen gelten. Zusammenfassend haben wir also bei **Anwesenheit bewegter Körper** die **Maxwell-Gleichungen** und **Sprungbedingungen an materiellen Flächen**

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\partial_t \vec{B}, & \vec{n} \times [\vec{E}] &= v_n [\vec{B}], \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, & \vec{n} \cdot [\vec{B}] &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{J}' + \vec{v} \varrho + \partial_t \vec{D}, & \vec{n} \times [\vec{H}] &= \vec{K}' + \vec{v} \sigma - v_n [\vec{D}], \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \varrho, & \vec{n} \cdot [\vec{D}] &= \sigma, \end{aligned} \quad (2.52)$$

($v_n = \vec{v} \cdot \vec{n}$ ist die Normalgeschwindigkeit der Sprungfläche) zusammen mit den allgemeinen Verknüpfungsbeziehungen

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}' + \vec{v} \times \vec{P}. \quad (2.53)$$

Wir lassen darin die gestrichenen Größen \vec{J}' , \vec{K}' und \vec{M}' stehen, weil meistens diese und nicht \vec{J} , \vec{K} bzw. \vec{M} durch Materialgleichungen bestimmt werden.

Ausgewählte Literatur

Von den vielen empfehlenswerten Büchern zur elektromagnetischen Feldtheorie möchte ich besonders hervorheben

H. Hofmann: *Das elektromagnetische Feld*, 3. Aufl. Wien: Springer, 1986.

J.D. Jackson: *Classical Electrodynamics*, 2nd ed. New York: Wiley, 1975.

R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands: *Feynman Vorlesungen über Physik*, Bd.2. München: Oldenbourg, 1987.

Das Werk von Hofmann enthält außerdem eine sehr klare Darstellung des Ursprungs und der Bedeutung der fiktiven Ströme und Ladungen wie auch der damit verknüpften Modelle. Saubere Begründungen für makroskopische Feldgrößen in Körpern auf mikrophysikalischer Basis bietet

S.R. de Groot, L.G. Suttorp: *Foundations of Electrodynamics*. Amsterdam: North-Holland, 1972.

Allgemeine makroskopische Eigenschaften von Kristallen finden sich besonders gut lesbar in

J.F. Nye: *Physical Properties of Crystals*. Oxford: Clarendon Press, 1976.

Zum Thema Materialgleichungen ist die Werkstoffliteratur interessant, besonders hervorzuheben

G. Fasching: *Werkstoffe der Elektrotechnik*. Wien: Springer, 1984.

Ein Klassiker ist

Ch. Kittel: *Einführung in die Festkörperphysik*, 7. Aufl. München: Oldenbourg, 1988.

2.2 Die Feldgleichungen in Sonderfällen

Die Kopplungen der Maxwell-Gleichungen untereinander erfolgen einerseits über die zeitlichen Änderungsraten der Felder, andererseits über Materialgleichungen und die Bewegung von Körpern. Sind einige dieser Kopplungen schwach oder überhaupt nicht vorhanden, so ergeben sich z.T. beträchtliche Vereinfachungen.

Statische elektrische Felder

Nehmen wir zuerst an, keines der Felder hänge von der Zeit ab. Für die Verteilungen der elektrischen Spannung und des elektrischen Flusses gilt dann im ganzen Raum

$$U(\partial\mathcal{A}) = 0, \quad \Psi(\partial\mathcal{V}) = Q(\mathcal{V}), \quad (2.54)$$

und über die Integraldarstellungen folgt

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \vec{0}, \quad \vec{n} \times [\vec{E}] = \vec{0}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \varrho, \quad \vec{n} \cdot [\vec{D}] = \sigma. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Gl. (2.54)₁ begründet den **elektrostatischen Spannungsbegriff**, im Speziellen, dass jeder Kurve \mathcal{C} gleicher Orientierung zwischen zwei vorgegebenen Punkten in einem elektrostatischen Feld der gleiche Wert $U(\mathcal{C})$ der elektrischen Spannung zugeordnet ist. Äquivalent dazu ist die Aussage der **Wirbelfreiheit der elektrischen Feldstärke**, lokal ausgedrückt in den Gln. (2.55)_{1,2}. Nicht an die Elektrostatik geknüpft ist Gl. (2.54)₂. In den zugehörigen lokalen Aussagen (2.55)_{3,4} werden die Quelledichten des elektrischen Flusses festgelegt. Zusätzlich benötigen wir noch eine Verknüpfung zwischen den Feldern \vec{E} und \vec{D} , direkt über Materialgleichungen oder über die allgemeine Verknüpfungsbeziehung

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (2.56)$$

\vec{P} , ϱ und σ sind entweder als zeitlich konstante Felder vorgegeben, oder sie hängen auf bekannte Weise von der elektrischen Feldstärke ab. Feldprobleme dieser Art werden wir in den Abschnitten 3.1 und 3.2 behandeln.

Stationäre elektromagnetische Felder

Die vorausgesetzte Zeitunabhängigkeit bedeutet für die Verteilungen des magnetischen Flusses und der magnetischen Spannung

$$\Phi(\partial\mathcal{V}) = 0, \quad V(\partial\mathcal{A}) = I(\mathcal{A}), \quad (2.57)$$

oder lokal

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, & \vec{n} \cdot [\vec{B}] &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{J}, & \vec{n} \times [\vec{H}] &= \vec{K}.\end{aligned}\quad (2.58)$$

Gl. (2.57)₁ ist nicht an die Zeitunabhängigkeit gebunden. Die zugehörigen Gln. (2.58)_{1,2} drücken die universelle Quellenfreiheit der magnetischen Flussdichte aus. Der Durchflutungssatz (2.57)₂ legt in der lokalen Form (2.58)_{3,4} die elektrische Stromdichte als Wirbeldichte der magnetischen Feldstärke fest. Daraus folgt weiters

$$I(\partial\mathcal{V}) = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0, \quad \vec{n} \cdot [\vec{J}] = 0, \quad (2.59)$$

die elektrische Stromdichte ist also quellenfrei. Voraussetzungsgemäß ändert sich die Stromverteilung nicht. Wir sprechen deshalb von einem stationären elektrischen Strömungsfeld und nennen ein damit verknüpft Magnetfeld ebenfalls stationär. Auch „statisches Magnetfeld“ oder „Magnetostatik“ sind als Benennungen gebräuchlich, wenn auch i.A. nicht ganz treffend.

Die zusätzlich notwendige Verknüpfung zwischen \vec{B} und \vec{H} wird direkt durch Materialgleichungen geliefert, oder über die allgemeine Verknüpfungsbeziehung

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}. \quad (2.60)$$

\vec{M} , \vec{J} und \vec{K} sind im Einklang mit (2.59) entweder als zeitlich konstante Felder vorgegeben, oder sie hängen auf bekannte Weise von \vec{B} bzw. \vec{H} ab. In den Abschnitten 3.4 und 3.5 werden wir diese Feldprobleme genauer untersuchen.

Bezogene Feldgrößen und charakteristische Parameter

In den meisten Anwendungen der elektromagnetischen Theorie kann vollständige Zeitunabhängigkeit nicht vorausgesetzt werden. Trotzdem sind für unterschiedliche Klassen von Problemen die Kopplungen zwischen den Gleichungen oft von ganz unterschiedlichem Gewicht. Um hier einen Ansatzpunkt für die Auswahl der passenden Feldgleichungen zu finden, brauchen wir eine Methode zur Abschätzung der relativen Größenordnungen der einzelnen Terme.

In Bezug auf ein vorliegendes Problem wählen wir als repräsentative Größen

L	charakteristische Länge,
T	charakteristische Dauer,
v_0	charakteristische materielle Geschwindigkeit,
γ, ε, μ	charakteristische Werte der Konduktivität, Permittivität und Permeabilität,
E_0, B_0	charakteristische Beträge der elektrischen Feldstärke und magnetischen Flussdichte,

und führen damit die bezogenen Variablen

$$\begin{aligned}\tilde{E} &= \vec{E}/E_0, & \tilde{B} &= \vec{B}/B_0, & \tilde{H} &= \vec{H}\mu/B_0, & \tilde{D} &= \vec{D}/(\varepsilon E_0), \\ \tilde{J} &= \vec{J}/(\gamma E_0), & \tilde{\varrho} &= \varrho L/(\varepsilon E_0), & \tilde{K} &= \vec{K}\mu/B_0, & \tilde{\sigma} &= \sigma/(\varepsilon E_0), \\ \tilde{v} &= \vec{v}/v_0\end{aligned}\quad (2.61)$$

ein, zusammen mit den Differenzialoperatoren

$$\tilde{\nabla} = L\vec{\nabla}, \quad \tilde{\partial}_t = T\partial_t. \quad (2.62)$$

Weiters verwenden wir als Abkürzungen die Relaxationszeitkonstante T_R , die elektrische Reynoldszahl R_e und die Geschwindigkeit c ,

$$T_R = \frac{\varepsilon}{\gamma}, \quad R_e = \frac{\varepsilon v_0}{\gamma L}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}. \quad (2.63)$$

Unsere Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\partial_t \vec{B}, & \vec{n} \times [\vec{E}] &= v_n [\vec{B}], \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, & \vec{n} \cdot [\vec{B}] &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{J} + \partial_t \vec{D}, & \vec{n} \times [\vec{H}] &= \vec{K} - v_n [\vec{D}], \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \varrho, & \vec{n} \cdot [\vec{D}] &= \sigma \end{aligned} \quad (2.64)$$

und die nichtrelativistischen Transformationsbeziehungen

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}, & \vec{B}' &= \vec{B}, \\ \vec{H}' &= \vec{H} - \vec{v} \times \vec{D}, & \vec{D}' &= \vec{D}, \\ \vec{J}' &= \vec{J} - \vec{v} \varrho, & \varrho' &= \varrho, \\ \vec{K}' &= \vec{K} - \vec{v} \sigma, & \sigma' &= \sigma. \end{aligned} \quad (2.65)$$

lassen sich damit in den bezogenen Formen

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla} \times \tilde{E} &= - \left[\frac{LB_0}{TE_0} \right] \tilde{\partial}_t \tilde{B}, \\ \tilde{\nabla} \cdot \tilde{B} &= 0, \\ \tilde{\nabla} \times \tilde{H} &= \left[\frac{L}{cT_R} \cdot \frac{E_0}{cB_0} \right] \tilde{J} + \left[\frac{L}{cT} \cdot \frac{E_0}{cB_0} \right] \tilde{\partial}_t \tilde{D}, \\ \tilde{\nabla} \cdot \tilde{D} &= \tilde{\varrho}, \\ \vec{n} \times [\tilde{E}] &= \left[\frac{v_0 B_0}{E_0} \right] \tilde{v}_n [\tilde{B}], \\ \vec{n} \cdot [\tilde{B}] &= 0, \\ \vec{n} \times [\tilde{H}] &= \tilde{K} - \left[\frac{v_0}{c} \cdot \frac{E_0}{cB_0} \right] \tilde{v}_n [\tilde{D}], \\ \vec{n} \cdot [\tilde{D}] &= \tilde{\sigma}, \end{aligned} \quad (2.66)$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{E}' &= \tilde{E} + \left[\frac{v_0 B_0}{E_0} \right] \tilde{v} \times \tilde{B}, & \tilde{B}' &= \tilde{B}, \\ \tilde{H}' &= \tilde{H} - \left[\frac{v_0}{c} \cdot \frac{E_0}{cB_0} \right] \tilde{v} \times \tilde{D}, & \tilde{D}' &= \tilde{D}, \\ \tilde{J}' &= \tilde{J} - [R_e] \tilde{v} \tilde{\varrho}, & \tilde{\varrho}' &= \tilde{\varrho}, \\ \tilde{K}' &= \tilde{K} - \left[\frac{v_0}{c} \cdot \frac{E_0}{cB_0} \right] \tilde{v} \tilde{\sigma}, & \tilde{\sigma}' &= \tilde{\sigma}, \end{aligned} \quad (2.67)$$

schreiben. Die als positiv vorausgesetzten Vorfaktoren in den eckigen Einfachklammern stellen typische Kombinationen der Dimension 1 dar. Angenommen, die Bezugswerte lassen sich für ein vorliegendes Problem so wählen, dass die Beträge von $\vec{\nabla} \times \vec{E}$, $\partial_t \vec{B}$, \vec{J} usw. jeweils die Größenordnung 1 besitzen. Es bestimmen dann die Vorfaktoren die Größenordnungen der einzelnen Terme und damit deren Bedeutung. Wir werden hier die beiden wichtigsten Fälle vereinfachter Feldgleichungen betrachten.

Das dominant elektrische Feldsystem

Nehmen wir zuerst an, die elektrischen Feldgrößen sind für die Beschreibung der dynamischen Vorgänge weit wichtiger als die magnetischen. Mit unseren Bezugsgrößen lässt sich das durch die Bedingungen

$$\frac{LB_0}{TE_0} \ll 1, \quad \frac{v_0 B_0}{E_0} \ll 1 \quad (2.68)$$

ausdrücken, wodurch die rechten Seiten der Gln. (2.66)_{1,5} und der zweite Term in Gl. (2.67)₁ vernachlässigbar klein sind. In nicht bezogenen Variablen folgen daraus die Gleichungen

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \vec{0}, \quad \vec{n} \times [\vec{E}] = \vec{0}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \varrho, \quad \vec{n} \cdot [\vec{D}] = \sigma \end{aligned} \quad (2.69)$$

und aus Gl. (2.66)₃,

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \partial_t \vec{D}, \quad (2.70)$$

folgt allgemein die Kontinuitätsgleichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\partial_t \varrho. \quad (2.71)$$

Weiters haben wir die Transformationsbeziehungen

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \vec{E}, \quad \vec{D}' = \vec{D}, \quad \varrho' = \varrho, \quad \sigma' = \sigma, \\ \vec{H}' &= \vec{H} - \vec{v} \times \vec{D}, \quad \vec{J}' = \vec{J} - \vec{v} \varrho, \quad \vec{K}' = \vec{K} - \vec{v} \sigma \end{aligned} \quad (2.72)$$

und noch weitere Gleichungen zur Beschreibung des Materialverhaltens.

Die Gln. (2.69) sind formal die Gln. (2.55) der Elektrostatik, obwohl nun die Felder durchaus zeitabhängig sein können. Magnetische Felder infolge konvektiven oder konduktiven Ladungstransports sind i.A. vorhanden, ihre Rückwirkung auf die elektrischen Felder über das Induktionsgesetz ist aber unbedeutend. Man spricht deshalb auch von **Quasi-Elektrostatik**. Es ist hier wichtig, Folgendes zu erkennen: Die Entscheidung, ob eine quasi-elektrostatische Situation vorliegt und damit z.B. der elektrostatische Spannungsbegriff (Wirbelfreiheit der elektrischen Feldstärke) anwendbar ist, hängt nicht allein von den zu erwartenden zeitlichen Änderungsraten der Felder ab. Beispielsweise ist bei zeitlich rasch veränderlichen Vorgängen typisch $E_0 = cB_0$ und damit folgt aus (2.68)₁ die Bedingung $L/(cT) \ll 1$. Sie kann selbst für große Frequenzen $f = 1/T$ durchaus erfüllt sein, wenn etwa typische Bauelementabmessungen L hinreichend klein sind. Eine Zusammenstellung der Gleichungen des dominant elektrischen Feldsystems gibt Tab. 2.2.

Das dominant magnetische Feldsystem

Im zweiten Fall sollen die magnetischen Feldgrößen für die Beschreibung der dynamischen Vorgänge weit wichtiger sein als die elektrischen, ausgedrückt mit unseren Bezugsgrößen durch die Bedingungen

$$\frac{L}{cT} \cdot \frac{E_0}{cB_0} \ll 1, \quad \frac{v_0}{c} \cdot \frac{E_0}{cB_0} \ll 1, \quad (2.73)$$

und in elektrisch leitfähigen Körpern zusätzlich

$$T_R/T \ll 1, \quad R_e \ll 1. \quad (2.74)$$

Wegen der letzten Bedingungen sind im Inneren von Körpern keine wesentlichen Ladungsansammlungen möglich, deren Änderungen zu merkbaren Verschiebungsströmen oder Konvektionsströmen führen. Aus den Gln. (2.66) folgt damit nach Rückkehr zu den Originalvariablen

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, & \vec{n} \cdot [\vec{B}] &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{J}, & \vec{n} \times [\vec{H}] &= \vec{K}, \end{aligned} \quad (2.75)$$

sowie

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}, \quad \vec{n} \times [\vec{E}] = v_n [\vec{B}]. \quad (2.76)$$

Gl. (2.75)₃ impliziert die Quellenfreiheit der elektrischen Stromdichte,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0. \quad (2.77)$$

Die allgemeinen nichtrelativistischen Transformationsbeziehungen reduzieren sich auf

$$\begin{aligned} \vec{B}' &= \vec{B}, & \vec{H}' &= \vec{H}, & \vec{J}' &= \vec{J}, & \vec{K}' &= \vec{K}, \\ \vec{E}' &= \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}, \end{aligned} \quad (2.78)$$

elektrische Ladungen spielen also in diesem System keine Rolle, und es gibt auch keine Konvektionsströme.

Die Gln. (2.75) entsprechen den Gln. (2.58) des stationären magnetischen Feldes, nur sind die Felder hier i.A. zeitabhängig. Infolge des Induktionsgesetzes und wegen der Leitungsströme gibt es zwar i.A. elektrische Felder, diese wirken aber höchstens über die quellenfreien Leitungsströme, nicht über Verschiebungsströme auf das Magnetfeld zurück. Man nennt dieses System deshalb auch **quasi-stationäres elektromagnetisches Feld**. Die zugehörigen Gleichungen sind in Tab. 2.2 nochmals zusammengestellt.

Ausgewählte Literatur

R.M. Fano, L.J. Chu, R.B. Adler: *Electromagnetic Fields, Energy, and Forces*. Cambridge, Mass.: M.I.T. Press, 1968

enthält eine Diskussion zeitlich veränderlicher Felder mit Hilfe von Zeitreihenentwicklungen. Die Begriffe des dominant elektrischen und des dominant magnetischen Feldsystems werden ausführlich behandelt in der sehr empfehlenswerten Monographie

		Globale Gleichungen	Lokale Gleichungen	Sprungbedingungen
1	Dominant elektrisches Feld- system (Quasi-Elektrostatik)	$U(\partial\mathcal{A}) = 0$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$	$\vec{n} \times [\vec{E}] = \vec{0}$
2		$\Psi(\partial\mathcal{V}) = Q(\mathcal{V})$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \varrho$	$\vec{n} \cdot [\vec{D}] = \sigma$
3		$I(\partial\mathcal{V}) = -\dot{Q}(\mathcal{V})$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\partial_t \varrho$	$\vec{n} \cdot [\vec{J}] = v_n [[\varrho]] - \partial_t \sigma$
4		Transformationen $\vec{E}' = \vec{E}, \quad \vec{D}' = \vec{D}, \quad \varrho' = \varrho, \quad \sigma' = \sigma, \quad \vec{J}' = \vec{J} - \vec{v} \varrho$		
5	Dominant magnetisches Feld- system (quasistationäres elektromagnetisches Feld)	$\Phi(\partial\mathcal{V}) = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\vec{n} \cdot [\vec{B}] = 0$
6		$V(\partial\mathcal{A}) = I(\mathcal{A})$	$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$	$\vec{n} \times [\vec{H}] = \vec{K}$
7		$U(\partial\mathcal{A}) = -\dot{\Phi}(\mathcal{A})$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$	$\vec{n} \times [\vec{E}] = v_n [[\vec{B}]]$
8		Transformationen $\vec{B}' = \vec{B}, \quad \vec{H}' = \vec{H}, \quad \vec{J}' = \vec{J}, \quad \vec{K}' = \vec{K}, \quad \vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$		

Tab. 2.2: Gleichungen des dominant elektrischen und des dominant magnetischen Feldsystems. Sie sind noch durch Gleichungen zu ergänzen, die das Materialverhalten beschreiben. Die Sprungbedingung in Zeile 3 ist ohne Flächenstrom formuliert.

P. Penfield, H.A. Haus: *Electrodynamics of Moving Media*. Cambridge, Mass.: M.I.T. Press, 1967.

Zahlreiche Anwendungen bringt

H.H. Woodson, J.R. Melcher: *Electromechanical Dynamics*, parts I, II, III. New York: Wiley, 1968.

2.3 Energie und Impuls

Vom Standpunkt der Feldphysik aus bilden elektromagnetische Felder selbst dynamische Systeme. Sie können Energie und Impuls speichern, fortleiten und auch mit anderen dynamischen Systemen austauschen. Die Wechselwirkungen, die zu einem Austausch von Energie und Impuls führen, zeigen sich in Leistungen und Kräften.

Bilanzgleichungen für Energie und Impuls

Wir betrachten zuerst ein abstraktes dynamisches System. In der Sprache der Feldphysik sind Größen wie Energie und Impuls im Raum oder zumindest in Raumbereichen im Wesentlichen kontinuierlich verteilt. In Bezug auf ein **Inertialsystem** ordnen wir dann jedem raumfesten Volumen \mathcal{V} zu jedem Zeitpunkt seinen **Energieinhalt** $W(\mathcal{V})$ und seinen **Impulsinhalt** $\vec{G}(\mathcal{V})$ zu. Durch jede orientierte Fläche \mathcal{A} tritt außerdem i.A. ein **Energiefluss** $Q(\mathcal{A})$ und ein **Impulsfluss** $\vec{P}(\mathcal{A})$, und wir haben i.A. auch mit **Produktionsraten** $R(\mathcal{V})$ von Energie und $\vec{F}(\mathcal{V})$ von Impuls zu rechnen. Wie diese Größen zusammenhängen, wird durch die **Bilanzgleichungen**

$$\begin{aligned}\dot{W}(\mathcal{V}) + Q(\partial\mathcal{V}) &= R(\mathcal{V}) , \\ \dot{\vec{G}}(\mathcal{V}) + \vec{P}(\partial\mathcal{V}) &= \vec{F}(\mathcal{V})\end{aligned}\tag{2.79}$$

beschrieben, konsistent orientierte Bereiche vorausgesetzt. Gl. (2.79)₁ besagt, dass die zeitliche Zunahmerate der in \mathcal{V} enthaltenen Energie zusammen mit dem Energiefluss durch den Rand $\partial\mathcal{V}$ genau gedeckt werden muss durch die Rate der Energieproduktion in \mathcal{V} , genannt **Leistung**. Verschwindet die Energieproduktion für beliebige Bereiche, wie das bei vollständigen Systemen immer der Fall ist, so ergibt sich die **Erhaltungsgleichung der Energie**. Analog drückt Gl. (2.79)₂ aus: Die zeitliche Änderungsrate des in \mathcal{V} enthaltenen Impulses wird zusammen mit dem Impulsfluss durch $\partial\mathcal{V}$ genau von der Rate der Impulsproduktion in \mathcal{V} , genannt **Kraft**, gedeckt. Bei vollständigen Systemen verschwindet immer die Impulsproduktion für beliebige Bereiche, wir werden dann auf die **Erhaltungsgleichung des Impulses** geführt.

Der Übergang zu den lokalen Formen der Bilanzgleichungen gelingt über die Darstellung der Größen als Integrale von Dichten. Wir werden hier wieder singuläre Flächen \mathcal{S} mit einbeziehen, die als Träger von Flächenverteilungen bzw. als Sprungflächen fungieren. Bezeichnet \mathcal{S}' den im Raumteil \mathcal{V} liegenden Teil von \mathcal{S} und \mathcal{V}' den Bereich \mathcal{V} ohne \mathcal{S}' , so schreiben wir

$$\begin{aligned}
W(\mathcal{V}) &= \int_{\mathcal{V}} w \, dV, & Q(\mathcal{A}) &= \int_{\mathcal{A}} \vec{n} \cdot \vec{q} \, dA, \\
R(\mathcal{V}) &= \int_{\mathcal{V}'} r \, dV + \int_{\mathcal{S}'} r^s \, dA
\end{aligned} \tag{2.80}$$

mit der **Energiedichte** w , der **Energieflussdichte** \vec{q} , der (Volums-) **Leistungsdichte** r und der **Flächenleistungsdichte** r^s . Flächenenergien und zugehörige Flüsse bleiben hier außer Betracht. Ähnlich führen wir über

$$\begin{aligned}
\vec{G}(\mathcal{V}) &= \int_{\mathcal{V}} \vec{g} \, dV, & \vec{P}(\mathcal{A}) &= \int_{\mathcal{A}} \vec{n} \cdot \underline{p} \, dA, \\
\vec{F}(\mathcal{V}) &= \int_{\mathcal{V}'} \vec{f} \, dV + \int_{\mathcal{S}'} \vec{f}^s \, dA
\end{aligned} \tag{2.81}$$

die **Impulsdichte** \vec{g} , den Tensor zweiter Stufe \underline{p} der **Impulsflussdichte**, die (Volums-) **Kraftdichte** \vec{f} und die **Flächenkraftdichte** \vec{f}^s ein. Damit folgen aus den Gln. (2.79) die **lokalen Bilanzgleichungen** von Energie und Impuls und die zugehörigen Sprungbedingungen an singulären Flächen (Normalgeschwindigkeit v_n)

$$\begin{aligned}
\partial_t w + \vec{\nabla} \cdot \vec{q} &= r, & -v_n \llbracket w \rrbracket + \vec{n} \cdot \llbracket \vec{q} \rrbracket &= r^s, \\
\partial_t \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \underline{p} &= \vec{f}, & -v_n \llbracket \vec{g} \rrbracket + \vec{n} \cdot \llbracket \underline{p} \rrbracket &= \vec{f}^s.
\end{aligned} \tag{2.82}$$

Bei der Untersuchung eines konkreten dynamischen Systems ist nun festzulegen, wie die eingeführten Dichten zumindest grundsätzlich von anderen lokalen Feldvariablen abhängen. Beispielsweise ist für ein **rein mechanisches, elastisches Medium** mit der Massendichte ϱ_m und dem materiellen Geschwindigkeitsfeld \vec{v}

$$\begin{aligned}
\vec{g} &= \varrho_m \vec{v}, & \underline{p} &= \varrho_m \vec{v} \otimes \vec{v} - \underline{\sigma}, \\
w &= \frac{1}{2} \varrho_m v^2 + e, & \vec{q} &= w \vec{v} - \underline{\sigma} \cdot \vec{v}, \\
r &= \vec{f} \cdot \vec{v}, & r^s &= \vec{f}^s \cdot \vec{v}.
\end{aligned} \tag{2.83}$$

Die Impulsflussdichte, in diesem Fall auch **Drucktensor** genannt, enthält neben dem kinetischen Druck $\varrho_m \vec{v} \otimes \vec{v}$ den negativen elastischen Spannungstensor $\underline{\sigma}$. Die Energiedichte setzt sich aus der Dichte der **kinetischen Energie** und der Dichte e der gespeicherten **elastischen Energie** (Verzerrungsenergie) zusammen, während die Leistungsdichten hier aus den Leistungen allein der Kraftdichten bestehen. Übrigens erfüllt die Massendichte die lokale Erhaltungsgleichung (Kontinuitätsgleichung)

$$\partial_t \varrho_m + \vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \varrho_m) = 0, \tag{2.84}$$

und damit folgt aus der lokalen Impulsbilanz (2.82)_{3,4} die kinetische Grundgleichung der Kontinuumsmechanik (1. Gesetz von Cauchy)

$$\varrho_m (\partial_t \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot \underline{\sigma} + \vec{f}, \quad -\vec{n} \cdot \llbracket \underline{\sigma} \rrbracket = \vec{f}^s. \tag{2.85}$$

Weitere Festlegungen betreffen die Abhängigkeiten der Größen $\underline{\sigma}$ und e von den Verformungsgrößen über Materialgleichungen.

In etwas komplizierteren Medien, etwa in Gasen bei großen Dichteänderungen oder in thermoelastischen Festkörpern, sind auch thermodynamische Variablen zu berücksichtigen. e wird dann zur Dichte der inneren Energie, \vec{q} enthält zusätzlich die Wärmestromdichte, und in den Leistungsdichten r und r^s kann es weitere Terme geben, z.B. infolge Absorption von Strahlung. Auch elektromagnetische Effekte lassen sich einbeziehen.

In der Wechselwirkung elektromagnetischer Felder mit Körpern entstehen Kräfte und Leistungen. Wenn aber Energie und Impuls universelle Erhaltungsgrößen sein sollen, deren Produktionsraten für ein vollständiges System immer verschwinden, so muss es entsprechende Energie- und Impulsgrößen auch für elektromagnetische Felder geben. Dass die Einführung solcher Größen tatsächlich möglich ist und damit die grundlegenden Erhaltungssätze gültig bleiben, werden wir gleich sehen.

Bei der Untersuchung anspruchsvoller Probleme des Verhaltens von Körpern unter dem Einfluss elektromagnetischer Felder ist das Arbeiten mit vollständigen Systemen häufig umständlich und konkreten Modellbildungen wenig zuträglich. Es erweist sich dann als hilfreich, ein vollständiges System in einzelne, ***miteinander wechselwirkende Teilsysteme*** aufzuspalten. Wir werden hier in der Regel ein ***materielles Teilsystem*** und ein ***elektromagnetisches Teilsystem*** betrachten,

$$\begin{aligned} \partial_t w^m + \vec{\nabla} \cdot \vec{q}^m &= r^m, & -v_n \llbracket w^m \rrbracket + \vec{n} \cdot \llbracket \vec{q}^m \rrbracket &= r^{sm}, \\ \partial_t \vec{g}^m + \vec{\nabla} \cdot \underline{p}^m &= \vec{f}^m, & -v_n \llbracket \vec{g}^m \rrbracket + \vec{n} \cdot \llbracket \underline{p}^m \rrbracket &= \vec{f}^{sm}, \end{aligned} \quad (2.86)$$

und

$$\begin{aligned} \partial_t w^e + \vec{\nabla} \cdot \vec{q}^e &= r^e, & -v_n \llbracket w^e \rrbracket + \vec{n} \cdot \llbracket \vec{q}^e \rrbracket &= r^{se}, \\ \partial_t \vec{g}^e + \vec{\nabla} \cdot \underline{p}^e &= \vec{f}^e, & -v_n \llbracket \vec{g}^e \rrbracket + \vec{n} \cdot \llbracket \underline{p}^e \rrbracket &= \vec{f}^{se}, \end{aligned} \quad (2.87)$$

die zusammen ein vollständiges System bilden, d.h.

$$\begin{aligned} w &= w^m + w^e, & \vec{q} &= \vec{q}^m + \vec{q}^e, \\ \vec{g} &= \vec{g}^m + \vec{g}^e, & \underline{p} &= \underline{p}^m + \underline{p}^e \end{aligned} \quad (2.88)$$

und

$$\begin{aligned} 0 &= r^m + r^e, & 0 &= r^{sm} + r^{se}, \\ \vec{0} &= \vec{f}^m + \vec{f}^e, & \vec{0} &= \vec{f}^{sm} + \vec{f}^{se}. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Die Summen der jeweiligen Dichten und Flussdichten ergeben also die entsprechenden Größen des vollständigen Systems. Innerhalb der Teilsysteme wird i.A. auch Energie und Impuls produziert; aber alles, was davon in einem Teilsystem auftaucht, muss gemäß Gln. (2.89) im anderen verschwinden.

Neben den Erhaltungsgleichungen für die Energie und den Impuls gibt es auch eine ***Erhaltungsgleichung für den Drehimpuls***. Sie wird dann wichtig, wenn Verteilungen des inneren Drehimpulses (Spin) makroskopisch berücksichtigt werden müssen. Als Produktionsterme in den Teilsystemen ergeben sich dann i.A. verteilte Drehmomente. Werden innere Drehimpulsverteilungen — d.h. Drehimpulse, die sich durch das makroskopische Geschwindigkeitsfeld und die Massenverteilung allein nicht erfassen lassen — vernachlässigt, was wir hier stets tun wollen,

so fordert die Drehimpulserhaltung die *Symmetrie* des Tensors zweiter Stufe \underline{p} **der Impulsflussdichte für ein vollständiges System**. Bei einer Aufspaltung in Teilsysteme können die Einzelbeiträge unsymmetrisch sein, ihre Summe muss aber einen symmetrischen Tensor bilden.

Elektromagnetische Teilsysteme

Durch die Aufspaltung vollständiger Systeme in Teilsysteme werden ursprünglich innere Wechselwirkungen als Energie- und Impulsaustausch zwischen den Teilsystemen, als Leistungen und Kräfte, zumindest teilweise explizit gemacht. Es gibt mehrere Möglichkeiten einer solchen Aufspaltung, und damit unterschiedliche elektromagnetische Teilsysteme.

Im **einfachsten makroskopischen Modell** erfolgt die Wechselwirkung zwischen Körpern und elektromagnetischen Feldern allein über Ladungen und Ströme, und zwar über jene Verteilungen, die gemäß Gln. (2.31) und (2.32) als effektive Größen

$$\begin{aligned}\vec{J}^e &= \vec{J} + \partial_t \vec{P} + \vec{\nabla} \times \vec{M}, & \vec{K}^e &= \vec{K} - v_n \llbracket \vec{P} \rrbracket + \vec{n} \times \llbracket \vec{M} \rrbracket, \\ \varrho^e &= \varrho - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}, & \sigma^e &= \sigma - \vec{n} \cdot \llbracket \vec{P} \rrbracket,\end{aligned}\quad (2.90)$$

in der Form (2.30) der Maxwell-Gleichungen für die Felder \vec{E} und \vec{B} vorkommen:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} &= \vec{0}, & \vec{n} \times \llbracket \vec{E} \rrbracket - v_n \llbracket \vec{B} \rrbracket &= \vec{0}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, & \vec{n} \cdot \llbracket \vec{B} \rrbracket &= 0, \\ \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \varepsilon_0 \partial_t \vec{E} &= \vec{J}^e, & \frac{1}{\mu_0} \vec{n} \times \llbracket \vec{B} \rrbracket + \varepsilon_0 v_n \llbracket \vec{E} \rrbracket &= \vec{K}^e, \\ \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \varrho^e, & \varepsilon_0 \vec{n} \cdot \llbracket \vec{E} \rrbracket &= \sigma^e.\end{aligned}\quad (2.91)$$

Die Sprungbedingungen wurden dabei so erweitert, dass sie auch an bewegten Flächen gelten, insbesondere an den Oberflächen bewegter Körper. Die Dichten der Produktionsraten von Energie (Leistungsdichte) und von Impuls (Kraftdichte) im materiellen Teilsystem sind demgemäß

$$\begin{aligned}r^m &= -r^e = \vec{J}^e \cdot \vec{E}, \\ \vec{f}^m &= -\vec{f}^e = \varrho^e \vec{E} + \vec{J}^e \times \vec{B},\end{aligned}\quad (2.92)$$

als einfache Verallgemeinerung der bekannten Ausdrücke für „wahre“ Ladungen und Ströme.

Wir führen nun ein paar Umformungen durch. Zuerst wird in Gl. (2.92)₁ \vec{J}^e durch die linke Seite von Gl. (2.91)₅ ersetzt,

$$\begin{aligned}r^e = -\vec{J}^e \cdot \vec{E} &= -\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \partial_t \vec{E} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \partial_t \vec{E},\end{aligned}$$

und dann $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ wegen (2.91)₁ durch $-\partial_t \vec{B}$. Dies liefert

$$\partial_t \left(\frac{\varepsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right) = -\vec{J}^e \cdot \vec{E} = r^e. \quad (2.93)$$

Weiters drücken wir in Gl. (2.92)₂ ϱ^e und \vec{J}^e ebenfalls durch die linken Seiten der Gln. (2.91)_{5,7} aus und benutzen wieder (2.91)₁:

$$\begin{aligned}\vec{f}^e &= -\varrho^e \vec{E} - \vec{J}^e \times \vec{B} = -\varepsilon_0 \vec{E} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \varepsilon_0 (\partial_t \vec{E}) \times \vec{B} \\ &= -\varepsilon_0 \vec{E} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) + \varepsilon_0 \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \varepsilon_0 \partial_t (\vec{E} \times \vec{B}) .\end{aligned}$$

Die Identität für Vektorfelder \vec{f} ,

$$\vec{f} \times (\vec{\nabla} \times \vec{f}) - \vec{f} (\vec{\nabla} \cdot \vec{f}) = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{2} f^2 \vec{\delta} - \vec{f} \otimes \vec{f} \right) , \quad (2.94)$$

mit dem Einstensor $\vec{\delta}$ führt schließlich mit $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ auf

$$\begin{aligned}\partial_t (\varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}) + \vec{\nabla} \cdot \left[\left(\frac{\varepsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) \vec{\delta} - \varepsilon_0 \vec{E} \otimes \vec{E} - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \otimes \vec{B} \right] &= \\ = -\varrho^e \vec{E} - \vec{J}^e \times \vec{B} = \vec{f}^e .\end{aligned} \quad (2.95)$$

Die Gln. (2.93) und (2.95) besitzen nun genau die Formen (2.87) links. Wenn wir also setzen

$$\begin{aligned}w^e &= \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 , \quad \vec{q}^e = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} , \\ \vec{g}^e &= \varepsilon_0 \vec{E} \otimes \vec{B} , \quad \vec{p}^e = w^e \vec{\delta} - \varepsilon_0 \vec{E} \otimes \vec{E} - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \otimes \vec{B} ,\end{aligned} \quad (2.96)$$

so haben wir damit das zu den Wechselwirkungstermen (2.92) gehörende elektromagnetische Teilsystem gefunden: Energiedichte w^e , Energieflussdichte \vec{q}^e , Impulsdichte \vec{g}^e und Impulsflussdichte \vec{p}^e des elektromagnetischen Feldes sind identifiziert.

Die mit (2.92) verträglichen Wechselwirkungen an Sprungflächen bestimmen wir am besten durch Einsetzen der Ausdrücke (2.96) in die Sprungbedingungen (2.87) rechts. Sprünge von Produkten lassen sich über die Identität

$$[\![\vec{f} \otimes \vec{g}]\!] = [\![\vec{f}]\!] \otimes \langle \vec{g} \rangle + \langle \vec{f} \rangle \otimes [\![\vec{g}]\!] \quad (2.97)$$

umformen, wobei

$$\langle \vec{f} \rangle = \frac{1}{2} (\vec{f}^{(2)} + \vec{f}^{(1)}) \quad (2.98)$$

das arithmetische Mittel aus den Werten der Feldgröße \vec{f} unmittelbar vor und hinter der Sprungfläche bedeutet und in (2.97) das Tensorprodukt auch durch das Skalarprodukt oder das Vektorprodukt ersetzt werden kann. Unter Verwendung der Sprungbedingungen (2.91) rechts erhalten wir dann

$$\begin{aligned}r^{sm} &= -r^{se} = \vec{K}^e \cdot \langle \vec{E} \rangle , \\ \vec{f}^{sm} &= -\vec{f}^{se} = \sigma^e \langle \vec{E} \rangle + \vec{K}^e \times \langle \vec{B} \rangle .\end{aligned} \quad (2.99)$$

Bevor wir die dynamischen Eigenschaften des elektromagnetischen Feldes weiter diskutieren, möchte ich auf eine andere Möglichkeit der Festlegung seiner dynamischen Größen eingehen. Die Aufspaltung in ein materielles und ein elektromagnetisches Teilsystem ist nämlich keineswegs eindeutig, sondern hängt davon

ab, welche Wechselwirkung zwischen den Teilsystemen herausgehoben wird. Wir könnten uns beispielsweise dazu entschließen, lediglich die Wechselwirkung über die „wahren“ Ströme und Ladungen explizit zu machen und demgemäß von den Leistungs- und Kraftdichten

$$\begin{aligned} r^m &= -r^e = \vec{J} \cdot \vec{E}, & r^{sm} &= -r^{se} = \vec{K} \cdot \langle \vec{E} \rangle, \\ \vec{f}^m &= -\vec{f}^e = \varrho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}, & \vec{f}^{sm} &= -\vec{f}^{se} = \sigma \langle \vec{E} \rangle + \vec{K} \times \langle \vec{B} \rangle \end{aligned} \quad (2.100)$$

auszugehen. Unter Verwendung der Maxwell-Gleichungen in der ursprünglichen Form (2.26) links erhalten wir daraus zunächst

$$\begin{aligned} r^e &= \partial_t (\vec{E} \cdot \vec{D}) - (\partial_t \vec{E}) \cdot \vec{D} + (\partial_t \vec{B}) \cdot \vec{H} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}), \\ \vec{f}^e &= \partial_t (\vec{D} \times \vec{B}) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{H} \delta - \vec{D} \otimes \vec{E} - \vec{B} \otimes \vec{H}) + \\ &\quad + (\vec{\nabla} \otimes \vec{E}) \cdot \vec{D} - (\vec{\nabla} \otimes \vec{B}) \cdot \vec{H}. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Angenommen, es gibt eine Dichtefunktion $\tilde{w}(\vec{E}, \vec{B})$ derart, dass

$$d\tilde{w}(\vec{E}, \vec{B}) = \vec{D} \cdot d\vec{E} - \vec{H} \cdot d\vec{B}. \quad (2.102)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{w} &= (\partial_t \vec{E}) \cdot \vec{D} - (\partial_t \vec{B}) \cdot \vec{H}, \\ \vec{\nabla} \tilde{w} &= (\vec{\nabla} \otimes \vec{E}) \cdot \vec{D} - (\vec{\nabla} \otimes \vec{B}) \cdot \vec{H}, \end{aligned} \quad (2.103)$$

und die Gln. (2.101) werden zu

$$\begin{aligned} r^e &= \partial_t (\vec{E} \cdot \vec{D} - \tilde{w}) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}), \\ \vec{f}^e &= \partial_t (\vec{D} \times \vec{B}) + \vec{\nabla} \cdot [(\vec{B} \cdot \vec{H} + \tilde{w}) \delta - \vec{D} \otimes \vec{E} - \vec{B} \otimes \vec{H}], \end{aligned} \quad (2.104)$$

besitzen also wieder die Form lokaler Bilanzgleichungen. Wenn wir schließlich setzen

$$\begin{aligned} w^e &= \vec{E} \cdot \vec{D} - \tilde{w}, & \vec{q}^e &= \vec{E} \times \vec{H}, \\ \vec{g}^e &= \vec{D} \times \vec{B}, & \vec{p}^e &= (\vec{B} \cdot \vec{H} + \tilde{w}) \delta - \vec{D} \otimes \vec{E} - \vec{B} \otimes \vec{H}, \end{aligned} \quad (2.105)$$

so haben wir damit ein neues elektromagnetisches Teilsystem definiert. Eine Dichtefunktion $\tilde{w}(\vec{E}, \vec{B})$ der benutzten Art gibt es für eine recht weite Klasse homogener Materialien — sie können durchaus nichtlinear und anisotrop sein — im Speziellen für linear homogen isotrope Werkstoffe mit $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, $\vec{H} = \vec{B}/\mu$:

$$\tilde{w}(\vec{E}, \vec{B}) = \frac{\varepsilon}{2} E^2 - \frac{1}{2\mu} B^2, \quad (2.106)$$

Der Spezialfall mit linearen homogenen Materialgleichungen ist übrigens auch der historische Ausgangspunkt. Die Energieflussdichte des Systems (2.105) wird traditionell mit dem Symbol \vec{S} bezeichnet und heißt nach ihrem Entdecker **Poynting-Vektor**,

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}. \quad (2.107)$$

Die zu Gl. (2.101)₁ äquivalente, allein aus den Maxwell-Gleichungen folgende Identität

$$\vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} + \vec{H} \cdot \partial_t \vec{B} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{J} \cdot \vec{E} \quad (2.108)$$

oder, in integrierter Form,

$$\int_{\mathcal{V}} (\vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} + \vec{H} \cdot \partial_t \vec{B}) dV + \int_{\partial \mathcal{V}} \vec{n} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) dA = - \int_{\mathcal{V}} \vec{J} \cdot \vec{E} dV \quad (2.109)$$

wird heute meist als **Poynting-Satz** bezeichnet. Sie bildet, wie wir gesehen haben, die Vorstufe zu einem Energiesatz der Elektrodynamik, d.h. zu einer Bilanzgleichung für die Energie eines elektromagnetischen Teilsystems.

Dass es mehrere sinnvolle Möglichkeiten der Definition von Energie- und Impulsgrößen in elektromagnetischen Feldern gibt, braucht weiters nicht zu stören. Es ist das vollständige dynamische System mit seinen Erhaltungsgleichungen, das physikalisch zählt! Die Aufspaltung in Teilsysteme hängt von zugrundeliegenden Modellen ab und kann den im speziellen Fall vorliegenden Wechselwirkungen weitgehend Rechnung tragen, ist letztlich aber willkürlich. Wichtig ist, dass bei allgemeinen Untersuchungen die Abhängigkeiten insbesondere der Größen des materiellen Teilsystems von den elektromagnetischen Variablen nicht zu stark eingeschränkt werden. So können wir beispielsweise i.A. nicht voraussetzen, dass die Impulsflussdichte \tilde{p}^m und damit der Spannungstensor oder auch die Energieflussdichte \tilde{q}^m nur von den mechanisch-thermodynamischen Variablen abhängt. Einschränkungen dieser Art kommen erst den Materialgleichungen zu.

Ein Blick auf die beiden vorgestellten elektromagnetischen Teilsysteme (2.96) und (2.105) mit (2.106) zeigt, dass ihre dynamischen Größen in **elektrisch nicht polarisierbaren und nicht magnetischen Medien** ($\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$, $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$) übereinstimmen, insbesondere in materiefreien Bereichen. Weil dies auch für alle anderen gebräuchlichen Systemaufspaltungen gilt, können wir dann einfach von einer „elektromagnetischen Energie“, einem „elektromagnetischen Impuls“ usw. sprechen. Diesen Fall werden wir im Folgenden näher betrachten.

Alle Ausdrücke (2.96) sind, das sei nochmals betont, in Bezug auf ein Inertialsystem erklärt. Sie ändern ihre Werte, wenn auf ein dagegen bewegtes System übergegangen wird. Es fällt zunächst auf, dass sich die **elektromagnetische Energiedichte** w^e additiv aus zwei Anteilen zusammensetzt, einem elektrischen und einem magnetischen. Jeder dieser Summanden lässt sich für sich durch quasistatische bzw. quasistationäre Betrachtungen gewinnen (langsam Aufladen eines leeren Kondensators, langsamer Aufbau eines Magnetfeldes in einer leeren Spule). Die „statischen“ Beiträge behalten also auch im allgemeinen Fall ihre Gültigkeit.

Ähnliches gilt für die **elektromagnetische Impulsflussdichte** \tilde{p}^e . In einem rein mechanisch-thermodynamischen (ruhenden) Medium bezeichnet man die Impulsflussdichte \tilde{p} meist als Drucktensor oder ihren negativen Wert $-\tilde{p}$ als Spannungstensor. Man nennt deshalb $-\tilde{p}^e$ nach ihrem Entdecker auch **Maxwell-Spannungstensor**. Im mechanischen Fall gibt $\vec{n} \cdot \tilde{p} A$ die Druckkraft an, die an einem (kleinen) Flächenstück des Inhaltes A und der Normalenrichtung \vec{n} von der Vorderseite auf die Hinterseite ausgeübt wird. Eine ähnliche Interpretation liefert

im elektromagnetischen Feld ein anschauliches Bild. Nehmen wir z.B. den magnetischen Teil von \underline{p}^e ,

$$\vec{n} \cdot \underline{p}^e = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{1}{2} B^2 \vec{n} - \vec{n} \cdot \vec{B} \vec{B} \right). \quad (2.110)$$

Steht das betrachtete Flächenstück senkrecht zur Flussdichte, \vec{n} also parallel oder antiparallel zu \vec{B} , $\vec{B} = \pm B \vec{n}$, so gilt

$$\vec{n} \cdot \underline{p}^e = -\frac{B^2}{2\mu_0} \vec{n}. \quad (2.111)$$

An einem Flächenstück parallel zur Flussdichte, $\vec{n} \cdot \vec{B} = 0$, ist dagegen

$$\vec{n} \cdot \underline{p}^e = \frac{B^2}{2\mu_0} \vec{n}. \quad (2.112)$$

Wir können uns also vorstellen, dass entlang der magnetischen Flussröhren eine Zugspannung wirkt und senkrecht dazu eine Druckspannung gleichen Betrages.

Die **elektromagnetische Energieflussdichte** \vec{q}^e und die **elektromagnetische Impulsdichte** \vec{g}^e hängen wegen $\mu_0 \varepsilon_0 c_0^2 = 1$ gemäß

$$\vec{g}^e = \frac{1}{c_0^2} \vec{q}^e \quad (2.113)$$

zusammen, eine Beziehung, die in der relativistischen Elektrodynamik ihre tiefere Begründung erfährt. Verglichen mit mechanischen Impulsen makroskopischer Körper sind elektromagnetische Impulse außerordentlich klein und deshalb meistens vernachlässigbar.

Dominant elektrische und dominant magnetische Feldsysteme

Wenn, wie im Abschnitt 2.2 besprochen, entweder die elektrische oder die magnetische Komponente des elektromagnetischen Feldes deutlich überwiegt, ergeben sich Vereinfachungen.

Für ein **dominant elektrisches Feldsystem** leiten wir ausgehend von

$$\begin{aligned} r^m &= -r^e = \vec{J}^e \cdot \vec{E} = \left(\vec{J} + \partial_t \vec{P} \right) \cdot \vec{E}, \\ \vec{f}^m &= -\vec{f}^e = \varrho^e \vec{E} = \left(\varrho - \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \right) \vec{E}, \end{aligned} \quad (2.114)$$

und

$$\begin{aligned} r^{sm} &= -r^{se} = \vec{K}^e \cdot \langle \vec{E} \rangle = \left(\vec{K} - v_n \llbracket \vec{P} \rrbracket \right) \cdot \langle \vec{E} \rangle, \\ \vec{f}^{sm} &= -\vec{f}^{se} = \sigma^e \langle \vec{E} \rangle = \left(\sigma - \vec{n} \cdot \llbracket \vec{P} \rrbracket \right) \langle \vec{E} \rangle \end{aligned} \quad (2.115)$$

über die Gln. (2.69) und (2.70) zusammen mit $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ wieder lokale Bilanzgleichungen der Form (2.87) für ein elektromagnetisches Teilsystem ab, wobei

$$\begin{aligned} w^e &= \frac{\varepsilon_0}{2} E^2, \quad \vec{q}^e = \vec{E} \times \vec{H}, \\ \vec{g}^e &= \vec{0}, \quad \underline{p}^e = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \underline{\delta} - \varepsilon_0 \vec{E} \otimes \vec{E}. \end{aligned} \quad (2.116)$$

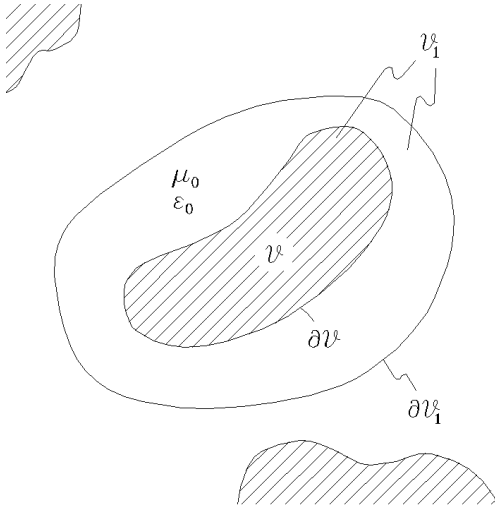


Abb. 2.1: Ein Körper beliebiger Beschaffenheit ist in ein elektromagnetisches Feld eingebettet. Berechnet werden die zugeführte Leistung und die resultierende Kraft elektromagnetischen Ursprungs.

Diesem Feldtyp ist also insbesondere die Impulsdichte Null zugeordnet.

Bei einem **dominant magnetischen Feldsystem** gehen wir dagegen aus von den Wechselwirkungstermen

$$\begin{aligned} r^m &= -r^e = \vec{J}^e \cdot \vec{E} = (\vec{J} + \vec{\nabla} \times \vec{M}) \cdot \vec{E}, \\ \vec{f}^m &= -\vec{f}^e = \vec{J}^e \times \vec{B} = (\vec{J} + \vec{\nabla} \times \vec{M}) \times \vec{B}, \end{aligned} \quad (2.117)$$

und

$$\begin{aligned} r^{sm} &= -r^{se} = \vec{K}^e \cdot \langle \vec{E} \rangle = (\vec{K} + \vec{n} \times \llbracket \vec{M} \rrbracket) \cdot \langle \vec{E} \rangle, \\ \vec{f}^{sm} &= -\vec{f}^{se} = \vec{K}^e \times \langle \vec{B} \rangle = (\vec{K} + \vec{n} \times \llbracket \vec{M} \rrbracket) \times \langle \vec{B} \rangle. \end{aligned} \quad (2.118)$$

Ein elektromagnetisches Teilsystem folgt daraus über die Gln. (2.75) und (2.76) zusammen mit $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$ und den Definitionen

$$\begin{aligned} w^e &= \frac{1}{2\mu_0} B^2, \quad \vec{q}^e = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}, \\ \vec{g}^e &= \vec{0}, \quad \vec{p}^e = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \vec{\delta} - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \otimes \vec{B}. \end{aligned} \quad (2.119)$$

Demnach verschwindet auch hier die Dichte des Feldimpulses.

Resultierende Kräfte und Leistungen

Wir stellen uns einen **Körper beliebiger Beschaffenheit** vor, der im betrachteten Zeitpunkt einen Raumbereich \mathcal{V} endlicher Ausdehnung belegt. Die nähere **Umgebung** des Körpers sei **materiefrei**. Eine geschlossene Fläche $\partial\mathcal{V}_1$ verlaufe ganz in diesem leeren Raum, und zwar so, dass der von ihr berandete Bereich \mathcal{V}_1 unseren Körper in seinem Inneren enthält (Abb. 2.1). Für vollständige Systeme ist die Energie eine Erhaltungsgröße, es gilt also Gl. (2.79)₁ in der Form

$$\dot{W}(\mathcal{V}_1) = -Q(\partial\mathcal{V}_1). \quad (2.120)$$

Nun verläuft aber $\partial\mathcal{V}_1$ ganz im materiefreien Bereich, sodass die Energieflussdichte \vec{q} allein durch den elektromagnetischen Beitrag $\vec{q}^e = \vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ gebildet wird, unabhängig von irgendwelchen Aufspaltungen in Teilsysteme. Wenn wir schließlich die Fläche $\partial\mathcal{V}_1$ auf den Körperperrand $\partial\mathcal{V}$ zusammenziehen, so folgt

$$\dot{W}(\mathcal{V}) = - \int_{\partial\mathcal{V}} \vec{n} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \, dA. \quad (2.121)$$

Die Zufuhrtrate an Energie für den ganzen Körper — die von außen insgesamt **zugeführte Leistung elektromagnetischen Ursprungs** — lässt sich allein über den Fluss des Poynting-Vektors durch die Hülle von außen nach innen berechnen. Wichtig ist, dass dazu die Feldgrößen \vec{E} und \vec{H} an der äußeren Seite des Randes verwendet werden. Einen **zusätzlichen Energieaustausch** mit der Umgebung auf **nicht-elektromagnetischem Weg**, z.B. als Wärmestrom oder als Leistung von Kontaktkräften nicht-elektromagnetischen Ursprungs, können wir durch einen zusätzlichen Energieflusstern $Q^{ne}(\partial\mathcal{V})$ berücksichtigen

$$\dot{W}(\mathcal{V}) + Q^{ne}(\partial\mathcal{V}) = - \int_{\partial\mathcal{V}} \vec{n} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \, dA. \quad (2.122)$$

Auch der **Impuls** eines vollständigen Systems ist eine **Erhaltungsgröße**, d.h. es gilt Gl. (2.79)₂ in der Form

$$\dot{\vec{G}}(\mathcal{V}_1) = -\vec{P}(\partial\mathcal{V}_1). \quad (2.123)$$

Der elektromagnetische Beitrag zum Gesamtimpuls ist für nahezu alle technischen Anwendungen vergleichsweise extrem klein (im dominant elektrischen oder dominant magnetischen Feldsystem ist er überhaupt gleich Null), braucht also praktisch nie berücksichtigt zu werden. Der \mathcal{V}_1 zugeordnete Gesamtimpuls reduziert sich damit auf den mechanischen Impuls zufolge der makroskopischen Bewegung des Körpers,

$$\vec{G}(\mathcal{V}_1) = \vec{G}(\mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}} \varrho_m \vec{v} \, dV. \quad (2.124)$$

Weiters verläuft die Fläche $\partial\mathcal{V}_1$ ganz im materiefreien Bereich, sodass als Impulsflussdichte lediglich die elektromagnetische auftritt, $\vec{p} = \vec{p}^e$. Die zeitliche Änderungsrate des gesamten mechanischen Impulses eines Körpers in Bezug auf ein Inertialsystem nennt man üblicherweise die resultierende Kraft auf den Körper. Wir haben daher mit

$$\dot{\vec{G}}(\mathcal{V}) = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \varrho_m \vec{v} \, dV = \vec{F}_R^e = - \int_{\partial\mathcal{V}_1} \vec{n} \cdot \vec{p}^e \, dA \quad (2.125)$$

eine Methode gefunden, die **resultierende Kraft elektromagnetischen Ursprungs** \vec{F}_R^e auf unseren Körper aus den Feldgrößen im umgebenden Raum zu berechnen. Im Speziellen gilt im **dominant elektrischen Feldsystem** (Gl. (2.116)₄)

$$\vec{F}_R^e = \int_{\partial\mathcal{V}_1} \varepsilon_0 \left(\vec{n} \cdot \vec{E} \vec{E} - \frac{1}{2} E^2 \vec{n} \right) dA \quad (2.126)$$

und im *dominant magnetischen Feldsystem* (Gl. (2.119)₄)

$$\vec{F}_R^e = \int_{\partial\mathcal{V}_1} \frac{1}{\mu_0} \left(\vec{n} \cdot \vec{B} \vec{B} - \frac{1}{2} B^2 \vec{n} \right) dA, \quad (2.127)$$

wobei die Integranden die zugehörigen *Maxwell-Spannungsvektoren* an der Fläche bilden. Es ist bemerkenswert, dass sich die resultierende Kraft elektromagnetischen Ursprungs auf den Körper allein aus den Feldern \vec{E} und \vec{B} an irgendeiner passend gewählten Hülle $\partial\mathcal{V}_1$ finden lässt. $\partial\mathcal{V}_1$ muss allerdings ganz im leeren Raum verlaufen und darf nur unseren Körper einschließen. Wir können $\partial\mathcal{V}_1$ auch mit der Körperoberfläche $\partial\mathcal{V}$ zusammenfallen lassen und dann für \vec{E} bzw. \vec{B} in den Gln. (2.126) oder (2.127) die Außenwerte an der Oberfläche einsetzen. Allerdings sollte dies nicht zu der Annahme verleiten, dass die Maxwell-Spannungsvektoren als Flächenkräfte an der Oberfläche lokalisierbar wären. Sie sind es tatsächlich i.A. nicht, weil sie einen Impulsfluss und nicht dessen lokale Senken darstellen. Denken Sie beispielsweise an einen Körper ohne Ladungen, Ströme, elektrische Polarisation und Magnetisierung in einem elektromagnetischen Feld. Er ist elektromagnetisch überhaupt nicht aktiv, trotzdem gibt es an seiner Oberfläche i.A. eine Impulsflussdichte, aber natürlich keine Flächenkraftdichte elektromagnetischen Ursprungs. Eine Integration über die ganze Oberfläche liefert in diesem Fall immer den Wert Null, und deshalb verschwindet \vec{F}_R^e . Nur in Sonderfällen, wenn eine Körperoberfläche eine ideale Senke für die elektromagnetische Impulsflussdichte darstellt, sind die Maxwell-Spannungsvektoren als dort an dem Körper angreifende Flächenkraftdichten aufzufassen. Dies gilt z.B. für ideal magnetisierbare Körper in einem stationären Magnetfeld oder für stromfreie Leiter in einem elektrostatischen Feld.

In den Anwendungen sind Körper in der Regel nicht frei in ein elektromagnetisches Feld eingebettet, sondern es wirken auf sie noch *Kräfte nicht-elektromagnetischen Ursprungs*, etwa die Schwerkraft, Lagerungsreaktionen oder ähnliches. Wir fassen auch diese zu einer resultierenden Kraft \vec{F}_R^{ne} zusammen. Da sich der mechanische Impuls eines Körpers der Masse m mit dem (zeitabhängigen) Ortsvektor \vec{r}_m des Massenmittelpunktes bezüglich eines Inertialsystems bekanntlich als $\vec{G} = m\dot{\vec{r}}_m$ schreiben lässt, erhalten wir schließlich als *erste Bewegungsgleichung* („Schwerpunktsatz“)

$$\dot{\vec{G}}(\mathcal{V}) = m\ddot{\vec{r}}_m = \vec{F}_R^{ne} + \vec{F}_R^e. \quad (2.128)$$

\vec{F}_R^e ist weiterhin über die Gln. (2.126) bzw. (2.127) oder mit dem vollständigen Ausdruck für \vec{p}^e zu berechnen. Falls erforderlich, kann $\partial\mathcal{V}_1$ auch Körper durchschneiden, solange an der Schnittfläche keine elektromagnetischen Felder auftreten und eine dabei freigelegte Schnittkraft (entsprechend dem Impulsfluss) in \vec{F}_R^{ne} berücksichtigt wird.

Häufig benötigt man zur Beschreibung der Bewegung eines Körpers neben der resultierenden Kraft auch das *resultierende Drehmoment elektromagnetischen Ursprungs* $\vec{T}_{R\mathcal{O}}^e$ in Bezug auf einen Punkt \mathcal{O} . Durch ein Vorgehen analog dem bei der Berechnung der resultierenden Kraft und unter den gleichen Voraussetzungen erhalten wir mit dem Abstandsvektor $\vec{r}_{\mathcal{O}}$ vom Bezugspunkt \mathcal{O} zum

laufenden Flächenpunkt im **dominant elektrischen Feldsystem**

$$\vec{T}_{R\mathcal{O}}^e = \int_{\partial\mathcal{V}_1} \varepsilon_0 \vec{r}_{\mathcal{O}} \times \left(\vec{n} \cdot \vec{E} \vec{E} - \frac{1}{2} E^2 \vec{n} \right) dA \quad (2.129)$$

und im **dominant magnetischen Feldsystem**

$$\vec{T}_{R\mathcal{O}}^e = \int_{\partial\mathcal{V}_1} \frac{1}{\mu_0} \vec{r}_{\mathcal{O}} \times \left(\vec{n} \cdot \vec{B} \vec{B} - \frac{1}{2} B^2 \vec{n} \right) dA . \quad (2.130)$$

$\vec{T}_{R\mathcal{O}}^e$ ist dann unabhängig vom Bezugspunkt \mathcal{O} , wenn die resultierende Kraft verschwindet. Verwendet wird $\vec{T}_{R\mathcal{O}}^e$ zusammen mit meist vorhandenen nicht-elektromagnetischen Drehmomenten $\vec{T}_{R\mathcal{O}}^{ne}$ in der **zweiten Bewegungsgleichung („Drallsatz“)**, in der Regel unter Vernachlässigung des elektromagnetischen Beitrages und auch des inneren Drehimpulses (Spin) zum gesamten Drehimpuls, der sich dann auf den rein mechanischen Drehimpuls der makroskopischen Bewegung (Drall) des Körpers reduziert.

Ausgewählte Literatur

Die Methode der Aufspaltung vollständiger Systeme in Teilsysteme wird ausführlich behandelt in

P. Penfield, H.A. Haus: *Electrodynamics of Moving Media*. Cambridge, Mass.: M.I.T. Press, 1967.

Welche Wechselwirkungsterme (Kraft- und Leistungsdichten) zu welchen Modellvorstellungen gehören, findet sich besonders klar dargestellt in

H. Hofmann: *Das elektromagnetische Feld*, 3. Aufl., Wien: Springer, 1986

und in den darin zitierten Originalarbeiten desselben Verfassers.

Kapitel 3

Berechnen statischer und stationärer Felder

3.1 Elektrostatik und Quasi-Elektrostatik

Das elektrische Feld einer Ansammlung von ruhenden Punktladungen im sonst vollständig leeren Raum können wir, ausgehend vom Coulomb-Gesetz und dem Überlagerungsprinzip, durch einfache Summationen berechnen. Bekanntlich lässt sich diese Methode auf kontinuierliche Ladungsverteilungen anwenden, und auch die makroskopischen Felder in Körpern sind damit berechenbar, vorausgesetzt, wir kennen tatsächlich alle Ladungen im ganzen Raum — neben den wahren Ladungen also auch die Polarisationsladungen. Allerdings liegt diese vollständige Information nur selten vor: Durch Influenz und Polarisierung entstehen effektive Ladungsverteilungen, die sich in der Regel erst aus dem zu berechnenden Feld bestimmen lassen. Meistens kennen wir Ladungsverteilungen nur zum Teil, zusätzlich stehen aber Daten über die Feldgrößen zur Verfügung. Mit der Formulierung von Feldproblemen dieser Art werden wir uns zuerst beschäftigen.

Allgemeine Eigenschaften des elektrostatischen Feldes und Ladungsverteilungen

Verteilungen der elektrischen Spannung U , des elektrischen Flusses Ψ und der elektrischen Ladung Q erfüllen im statischen Fall immer die globalen Beziehungen (2.54),

$$U(\partial\mathcal{A}) = 0, \quad \Psi(\partial\mathcal{V}) = Q(\mathcal{V}), \quad (3.1)$$

oder, gleichwertig, deren lokale Formen (2.55),

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \vec{0}, & \vec{n} \times [\vec{E}] &= \vec{0}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \varrho, & \vec{n} \cdot [\vec{D}] &= \sigma. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Zusätzlich besteht noch die allgemeine Verknüpfungsbeziehung (2.56),

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (3.3)$$

wobei wir voraussetzen, dass die Größen ϱ , σ und \vec{P} als zeitlich konstante Felder vorgegeben sind, oder auf bekannte Weise von \vec{E} abhängen.

Unser Feldraum sei nun so beschaffen, dass sich irgend zwei Kurven, die gleiche Anfangspunkte \mathcal{P}_1 und gleiche Endpunkte \mathcal{P}_2 besitzen, immer durch eine stetige Deformation ineinander überführen lassen (ohne dabei den Feldraum zu verlassen). Wir können diese Voraussetzung auch fallen lassen und statt dessen etwas allgemeiner fordern, dass Gl. (3.1)₁ nicht nur für alle vollständigen Flächenberandungen $\partial\mathcal{A}$, sondern für jede geschlossene Kurve (jede Kurve \mathcal{C} mit $\partial\mathcal{C} = 0$) gilt. In beiden Fällen lässt sich die Gl. (3.1)₁ oder ihre Verallgemeinerung und die Gln. (3.2)_{1,2} durch die Einführung eines Skalarfeldes φ — wir nennen es ein **elektrostatistisches Potenzial** und schreiben für seine Werte $\varphi(\vec{r})$ — formal lösen: Für jede Kurve \mathcal{C} mit dem Anfangspunkt \vec{r}_1 und dem Endpunkt \vec{r}_2 gelte

$$U(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} \vec{s} \cdot \vec{E} ds = \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2), \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi. \quad (3.4)$$

Falls $\partial\mathcal{C} = 0$ ist, folgt $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$ und damit $U(\mathcal{C}) = 0$, Gl. (3.1)₁ ist also immer erfüllt. Gl. (3.2)₁ besteht mit (3.4)₂ wegen der Identität (1.41), $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\varphi) = \vec{0}$. Der Zusammenhang zwischen den beiden Aussagen (3.4) wird durch Gl. (1.47) hergestellt. Zwei elektrostatische Potenziale, deren Werte sich im ganzen Feldraum um die gleiche, beliebige Konstante unterscheiden, liefern die gleiche Spannungsverteilung bzw. Feldstärke.

Die Lösung vieler elektrostatischer Aufgaben wird durch die Einführung des elektrostatischen Potenzials erleichtert, weil Skalarfelder in der Regel einfacher zu behandeln sind als Vektorfelder.

Die hier verwendeten **Ladungsverteilungen** sind stets als **makroskopische Modelle** aufzufassen, sie stellen also **mathematische Idealisierungen** dar. In diesem Sinn beschreiben wir Raumladungen durch Dichtefunktionen $\varrho(\vec{r})$ und ähnlich Ladungsverteilungen, die entlang Kurven oder auf Flächen konzentriert sind, durch Dichten $\tau(\vec{r})$ bzw. $\sigma(\vec{r})$ mit Kurven bzw. Flächen als Träger. Manchmal ist auch die Darstellung einer Punktladung Q am Ort \vec{r}' als Raumladungsverteilung mit Singularität nützlich,

$$\varrho(\vec{r}) = Q\delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (3.5)$$

wobei die räumliche Dirac-, „Funktion“ $\delta(\vec{r})$ über Testfunktionen $f(\vec{r})$ charakterisiert ist durch

$$\int_{\mathcal{V}} f(\vec{r})\delta(\vec{r}) dV = \begin{cases} f(\vec{0}), & \text{falls } \vec{r} = \vec{0} \text{ im Inneren von } \mathcal{V} \text{ liegt,} \\ 0, & \text{falls } \vec{r} = \vec{0} \text{ nicht im Inneren von } \mathcal{V} \text{ liegt.} \end{cases} \quad (3.6)$$

Unter Verwendung geeigneter singulärer Funktionen lassen sich übrigens auch Linien- und Flächenladungen auf ähnliche Weise darstellen.

Poisson– und Laplace–Gleichung

In einem Feldraum, der ganz mit einem Medium der konstanten Permittivität ε ausgefüllt ist (linear homogen isotropes Dielektrikum, insbesondere im leeren

Raum, $\varepsilon = \varepsilon_0$) folgt aus

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \varrho, \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi \quad (3.7)$$

für das elektrostatische Potenzial φ die **Poisson-Gleichung**

$$\nabla^2 \varphi = -\varrho/\varepsilon \quad (3.8)$$

oder, wenn im Feldraum keine Raumlading vorhanden ist, die **Laplace-Gleichung**

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (3.9)$$

Die Laplace-Gleichung ist eine homogene, die Poisson-Gleichung eine inhomogene, lineare, partielle Differenzialgleichung zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Koordinatendarstellungen für den Laplace-Operator ∇^2 sind in Tab. 1.3 angegeben.

Bei der Behandlung elektrostatischer Aufgaben haben wir häufig Lösungen der Gln. (3.8) oder (3.9) zu konstruieren, die an den Bereichsrändern bestimmte Bedingungen erfüllen, z.B. vorgegebene Werte annehmen.

Eine Funktion $G(\vec{r}, \vec{r}')$, die für feste \vec{r}' der Gleichung

$$\nabla'^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (3.10)$$

genügt, nennen wir **Grundlösung des Laplace-Operators**.

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = G(\vec{r}', \vec{r}) = \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (3.11)$$

ist eine solche Grundlösung, aber offensichtlich auch

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} + g(\vec{r}, \vec{r}'), \quad (3.12)$$

falls $g(\vec{r}, \vec{r}')$ für feste \vec{r}' die Laplace-Gleichung erfüllt. Multiplikation von Gl. (3.10) mit Q/ε liefert beispielsweise eine Poisson-Gleichung mit der speziellen Raumladungsverteilung (3.5). Aus Gl. (3.11) lässt sich dann der bekannte Ausdruck

$$\varphi(\vec{r}) = G(\vec{r}, \vec{r}')Q/\varepsilon = \frac{Q}{4\pi\varepsilon|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (3.13)$$

für das elektrostatische Potenzial einer Punktladung in \vec{r}' ablesen.

Um eine Poisson-Gleichung (3.8) mit zugehörigen Randbedingungen zu lösen, können wir z.B. so vorgehen: Wir bestimmen zuerst eine partikuläre Lösung zu der vorgegebenen Funktion $\varrho(\vec{r})$, etwa über die Grundlösung (3.11) durch das Integral

$$\varphi_p(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{\mathcal{V}} \frac{\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV', \quad (3.14)$$

zu erstrecken über den ganzen Trägerbereich von ϱ . Die Randbedingungen sind damit i.A. natürlich nicht erfüllt. Es wird daher eine Lösung φ_h der homogenen Gleichung, nämlich der Laplace-Gleichung, zu überlagern sein, die eine Korrektur der Randdaten auf die gewünschten Werte liefert. Entsprechend Gl. (3.12) werden wir also auch bei inhomogenen Problemen auf die Laplace-Gleichung zurückgeführt.

Darstellungssätze der Potenzialtheorie

Ich stelle hier einige, für die folgende Diskussion hilfreiche Ergebnisse der Potenzialtheorie zusammen.

Wir betrachten zuerst Skalarfelder und Vektorfelder im **ganzen, dreidimensionalen, euklidischen Raum** \mathcal{R} und werden dabei Voraussetzungen über deren stückweise Stetigkeit, stückweise stetige Differenzierbarkeit u.a. treffen. Das bedeutet, dass Sprünge der Funktionen und ggf. ihrer Ableitungen nur an endlich vielen, stückweise glatten, geschlossenen Flächen $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n$ auftreten. Jede dieser Flächen sei transversal orientiert und besitze ein Einsnormalenfeld \vec{n} . Die Operation der **Richtungsableitung in Bezug auf** \vec{n} (Normalableitung), wir bezeichnen sie mit ∂_n ,

$$\partial_n = \vec{n} \cdot \vec{\nabla}, \quad (3.15)$$

ist jeweils auf der Fläche, bei Sprüngen auf beiden Flächenseiten erklärt. Die Gesamtheit der Flächen fassen wir in $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 + \dots + \mathcal{S}_n$ zusammen. Den Ortsvektor des Aufpunktes (Feldpunktes) in Bezug auf einen festen Ursprung bezeichnen wir mit \vec{r} , den des laufenden Punktes (Integrationspunktes) mit \vec{r}' . Ihr gerichteter Abstand wird durch $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$, dessen Betrag durch

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'| \quad (3.16)$$

abgekürzt. Bezieht sich ein Funktionswert oder eine Operation auf die Variable \vec{r}' , so kennzeichnen wir dies in abgekürzter Schreibweise durch den Akzent, also z.B. $u' = u(\vec{r}')$, $\partial'_n = \vec{n}' \cdot \vec{\nabla}'$.

Im ganzen Raum \mathcal{R} sei ein **Skalarfeld** u mit folgenden Eigenschaften erklärt:

- u ist stückweise stetig differenzierbar in \mathcal{R} ,
- u ist zweimal stetig differenzierbar in \mathcal{R} ohne \mathcal{S} ,
- $\nabla^2 u$ ist jeweils einseitig stetig nach \mathcal{S} fortsetzbar.

Dann gilt in allen nicht auf \mathcal{S} gelegenen Punkten von \mathcal{R} die **Integralformel für skalare Felder**

$$u = u_\infty - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{R}} \frac{1}{R} \nabla'^2 u' dV' - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \left[\frac{1}{R} [\partial'_n u'] - [u'] \partial'_n \left(\frac{1}{R} \right) \right] dA'. \quad (3.17)$$

u lässt sich also vollständig darstellen durch seinen Wert u_∞ im unendlich fernen Punkt, seine Laplace-Ableitung $\nabla^2 u$, seine Sprünge $[u]$ und die Sprünge $[\partial_n u]$ seiner Normalableitung.

Eine ähnliche Darstellung gibt es auch für Vektorfelder \vec{v} . Sie lassen sich unter sehr schwachen einschränkenden Bedingungen immer in eine Konstante, einen Gradienten und eine Rotation zerlegen:

Im ganzen Raum \mathcal{R} sei ein **Vektorfeld** \vec{v} mit folgenden Eigenschaften erklärt:

- \vec{v} ist stückweise stetig in \mathcal{R} ,
- \vec{v} ist stetig differenzierbar in \mathcal{R} ohne \mathcal{S} ,

- $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ und $\vec{\nabla} \times \vec{v}$ sind jeweils einseitig stetig nach \mathcal{S} fortsetzbar.

Dann gilt in allen nicht auf \mathcal{S} gelegenen Punkten von \mathcal{R} der **Fundamentalsatz der Vektoranalysis** (Helmholtz–Darstellung)

$$\vec{v} = \vec{v}_\infty - \vec{\nabla} u + \vec{\nabla} \times \vec{a}, \quad (3.18)$$

wobei \vec{v}_∞ der Wert von \vec{v} im unendlich fernen Punkt ist, und das **Skalarpotenzial** u und das **Vektorpotenzial** \vec{a} durch

$$u = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{R}} \frac{1}{R} \vec{\nabla}' \cdot \vec{v}' dV' + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \frac{1}{R} \vec{n}' \cdot [\vec{v}'] dA', \quad (3.19)$$

$$\vec{a} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{R}} \frac{1}{R} \vec{\nabla}' \times \vec{v}' dV' + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \frac{1}{R} \vec{n}' \times [\vec{v}'] dA' \quad (3.20)$$

gegeben sind. In allen von \mathcal{S} verschiedenen Punkten von \mathcal{R} erfüllt das Vektorpotenzial die Bedingung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = 0. \quad (3.21)$$

Bei den Anwendungen dieser Darstellungsformeln sind die Felder u bzw. \vec{v} meistens nicht im ganzen Raum \mathcal{R} erklärt, sondern nur in einem Teilgebiet \mathcal{V} , z.B. \mathcal{R} ohne die durch \mathcal{S} berandeten Bereiche. Häufig werden dann im Komplementärgebiet von \mathcal{V} die Felder $u = 0$ und $\vec{v} = \vec{0}$ gesetzt und die Formeln für den ganzen Raum \mathcal{R} angewendet. u und \vec{v} können im Komplementärgebiet aber auch anders festgelegt werden.

Es ist leicht einzusehen, was die Integralformel (3.17) für den ganzen Raum im Fall des elektrostatischen Potenzials $u = \varphi$ bedeutet. Wir haben hier, wenn wir gleich mit effektiven Ladungen im leeren Raum arbeiten, $\nabla^2 \varphi = -\varrho^e/\varepsilon_0$; weiters $[\partial_n \varphi] = \vec{n} \cdot [\vec{\nabla} \varphi] = -\vec{n} \cdot [\vec{E}] = -\sigma^e/\varepsilon_0$, und der Sprung des Potenzials selbst kann als negative Kontaktspannung interpretiert werden, entstanden durch entgegengesetzt gleich (sehr) große Flächenladungen beidseits der Sprungfläche. Solch eine Flächendipolverteilung stellen wir durch die effektive Flächendichte λ^e dar und haben dann $[\varphi] = \lambda^e/\varepsilon_0$. Wenn dieser Beitrag zunächst nicht berücksichtigt wird, ist also

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi_\infty + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathcal{R}} \frac{\varrho^e(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathcal{S}} \frac{\sigma^e(\vec{r}') dA'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (3.22)$$

die bekannte Formel für das elektrostatische Potenzial einer kombinierten Raumladung und Flächenladung, eingebettet in den sonst leeren Raum. Für die elektrische Feldstärke $\vec{v} = \vec{E}$ verschwindet ein Vektorpotenzial \vec{a} für den ganzen Raum mit Gl. (3.20) wegen $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$ und $\vec{n} \times [\vec{E}] = \vec{0}$ identisch, während Gl. (3.19) wegen $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \varrho^e/\varepsilon_0$ und $\vec{n} \cdot [\vec{E}] = \sigma^e/\varepsilon_0$ mit $u = \varphi$ wieder auf den Ausdruck (3.22) führt, von der hier unerheblichen Konstante φ_∞ abgesehen. Gl. (3.18), $\vec{E} = \vec{E}_\infty - \vec{\nabla} \varphi$, ist unsere Gl. (3.4), wobei noch ein mögliches Homogenfeld \vec{E}_∞ explizit berücksichtigt wird.

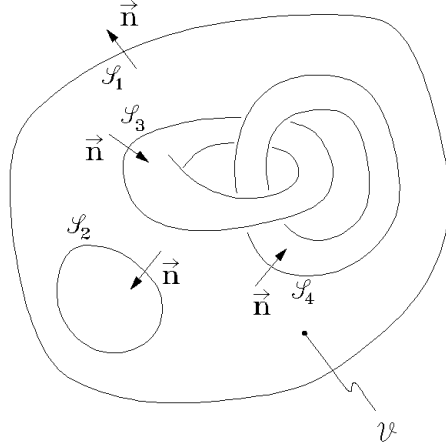


Abb. 3.1: Räumlicher Bereich \mathcal{V} . Sein vollständiger Rand wird durch endlich viele, stückweise glatte, geschlossene Flächen $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n$ gebildet, $\partial\mathcal{V} = \mathcal{S}_1 + \dots + \mathcal{S}_n$. Die äußere Fläche \mathcal{S}_1 kann auch entfallen, sodass \mathcal{V} den unendlich fernen Punkt einschließt.

Erfüllt ein Skalarfeld in einem räumlichen Bereich die Laplace-Gleichung, oder verschwinden für ein Vektorfeld dort dessen Divergenz und Rotation, so spricht man von einem harmonischen Skalarfeld bzw. von einem harmonischen Vektorfeld. Wir werden diese für die Potenzialtheorie wichtigen Begriffe etwas präziser fassen.

Sei \mathcal{V} ein offenes, teilweise oder ganz abgeschlossenes Gebiet des dreidimensionalen euklidischen Raumes \mathcal{R} . Der unendlich ferne Punkt kann auch in \mathcal{V} liegen, wenn alle Punkte außerhalb einer hinreichend großen Kugel um den Ursprung ebenfalls zu \mathcal{V} gehören. Ein in \mathcal{V} erklärtes **Skalarfeld** u heißt dann **in \mathcal{V} harmonisch**, wenn es

- im Endlichen zweimal stetig differenzierbar ist und der Laplace-Gleichung $\nabla^2 u = 0$ genügt,
- im Unendlichen gleichmäßig gegen seinen dortigen Wert u_∞ konvergiert.

Ein in \mathcal{V} erklärtes **Vektorfeld** \vec{v} heißt **in \mathcal{V} harmonisch**, wenn es

- im Endlichen stetig differenzierbar ist und den Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ und $\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{0}$ genügt,
- im Unendlichen gleichmäßig gegen seinen dortigen Wert \vec{v}_∞ konvergiert.

Harmonische Vektorfelder sind die räumlichen Verallgemeinerungen von holomorphen Funktionen über der komplexen Ebene.

Für harmonische Felder gibt es wichtige Spezialisierungen der Darstellungssätze. Wir betrachten dazu einen räumlichen Bereich \mathcal{V} nach dem Muster in Abb. 3.1 und setzen $u = 0$, $\vec{v} = \vec{0}$ im Komplement von \mathcal{V} bezüglich des ganzen Raumes \mathcal{R} , d.h. außerhalb von \mathcal{S}_1 und in den durch $\mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_n$ berandeten Gebieten. Ist u ein in \mathcal{V} harmonisches Skalarfeld, so folgt aus der Integralformel (3.17) die im Inneren von \mathcal{V} gültige **Green-Integralformel**

$$u = u_\infty + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\mathcal{V}} \left[\frac{1}{R} \partial'_n u' - u' \partial'_n \left(\frac{1}{R} \right) \right] dA'. \quad (3.23)$$

Für ein in \mathcal{V} harmonisches Vektorfeld \vec{v} folgt weiters aus dem Fundamentalsatz (3.18) die im Inneren von \mathcal{V} gültige **Cauchy-Integralformel**

$$\vec{v} = \vec{v}_\infty - \vec{\nabla} u + \vec{\nabla} \times \vec{a} \quad (3.24)$$

mit

$$u = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial\mathcal{V}} \frac{\vec{n}' \cdot \vec{v}'}{R} dA', \quad \vec{a} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial\mathcal{V}} \frac{\vec{n}' \times \vec{v}'}{R} dA', \quad (3.25)$$

und $\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = 0$.

Das Bemerkenswerte an diesen Formeln ist, dass sich harmonische Skalarfelder allein aus den Randwerten des Feldes und seiner Normalableitung berechnen lassen, und harmonische Vektorfelder allein aus den Randwerten — ein für die Behandlung von Randwertaufgaben offensichtlich wichtiges Ergebnis. Dies bedeutet allerdings nicht, dass diese Werte an den Rändern — man nennt sie **Cauchy-Daten** — beliebig vorgegeben werden können und daraus harmonische Felder entstehen. Wir kommen darauf zurück.

Durch die Green-Integralformel beherrschen wir also insbesondere ein harmonisches Skalarfeld in einem abgeschlossenen Gebiet, wenn wir seine Werte und die Werte seiner Normalableitung auf dem Rand kennen. Für den Sonderfall, dass der Rand eine Kugel ist, kommt man mit der Kenntnis der Funktionswerte allein aus:

Sei \mathcal{K} eine Kugelfläche mit dem Radius a , und ϱ sei der Abstand des Aufpunktes (d.h. des Punktes, in dem der Funktionswert berechnet werden soll) vom Kugelmittelpunkt. Die offenen Gebiete innerhalb und außerhalb von \mathcal{K} bezeichnen wir mit \mathcal{V} bzw. $\hat{\mathcal{V}}$. Für ein in \mathcal{V} einschließlich \mathcal{K} stetiges und in \mathcal{V} harmonisches Skalarfeld u gilt dann das **Poisson-Integral für das Kugellinnere**

$$u = \frac{a^2 - \varrho^2}{4\pi a} \int_{\mathcal{K}} \frac{u'}{R^3} dA', \quad 0 \leq \varrho < a. \quad (3.26)$$

Weiters haben wir für ein in $\hat{\mathcal{V}}$ einschließlich \mathcal{K} stetiges und in $\hat{\mathcal{V}}$ einschließlich des unendlich fernen Punktes harmonisches Skalarfeld u das **Poisson-Integral für das Kugeläußere**

$$u = \left(1 - \frac{a}{\varrho}\right) u_\infty + \frac{\varrho^2 - a^2}{4\pi a} \int_{\mathcal{K}} \frac{u'}{R^3} dA', \quad a < \varrho < \infty. \quad (3.27)$$

Gibt man umgekehrt eine beliebige stetige Funktion u auf \mathcal{K} vor und bestimmt dazu die Funktionswerte in \mathcal{V} aus Gl. (3.26), so ergibt sich ein in \mathcal{V} einschließlich \mathcal{K} stetiges und in \mathcal{V} harmonisches Skalarfeld, das auf \mathcal{K} die vorgegebenen Randwerte annimmt. Dasselbe gilt sinngemäß für eine auf \mathcal{K} und im Unendlichen vorgegebene Funktion u , die durch Gl. (3.27) nach $\hat{\mathcal{V}}$ fortgesetzt wird.

Von Interesse sind auch noch folgende Aussagen über die **Mittelwerte harmonischer Felder**: \mathcal{K} sei wieder eine Kugelfläche mit dem Radius a und \mathcal{V} das offene, von \mathcal{K} berandete Innengebiet. u und \vec{v} seien ein Skalarfeld bzw. ein Vektorfeld, stetig in \mathcal{V} einschließlich \mathcal{K} und harmonisch in \mathcal{V} . Dann stimmen die

Werte u_0 und \vec{v}_0 von u bzw. \vec{v} im Kugelmittelpunkt mit den Mittelwerten über \mathcal{V} und den Mittelwerten über \mathcal{K} überein,

$$u_0 = \frac{3}{4\pi a^3} \int_{\mathcal{V}} u' dV' = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\mathcal{K}} u' dA', \quad (3.28)$$

$$\vec{v}_0 = \frac{3}{4\pi a^3} \int_{\mathcal{V}} \vec{v}' dV' = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\mathcal{K}} \vec{v}' dA'. \quad (3.29)$$

Zum Abschluss noch einige Aussagen betreffend die **Maxima und Minima harmonischer Felder**

- Harmonische Skalarfelder und harmonische Vektorfelder, die in einem Teilgebiet ihres Definitionsbereiches konstant bzw. betraglich konstant sind (und damit ein lokales Extremum besitzen), sind im ganzen Definitionsbereich konstant. Daraus folgt:
- Stimmen zwei harmonische Skalarfelder in einem Teilgebiet überein, so sind sie überall gleich.
- In abgeschlossenen Definitionsbereichen nimmt ein harmonisches Skalarfeld seine Extrema (Maxima und Minima) und der Betrag eines harmonischen Vektorfeldes sein Maximum stets auf dem Rand an. Der unendlich ferne Punkt kann ebenfalls zum Definitionsbereich gehören, falls dort keine Quellen liegen. Daraus folgt:
- Ein harmonisches Skalarfeld ist in einem abgeschlossenen, endlichen Gebiet konstant, wenn es auf dem Rand konstant ist (Gemeint ist der vollständige Rand. Besteht er aus mehreren Teilen, so muss auf allen der gleiche konstante Wert auftreten). Insbesondere verschwindet es auch im Inneren, wenn alle Randwerte verschwinden.

Randwertprobleme der Elektrostatik

Wie wir gesehen haben, lassen sich harmonische Felder im Prinzip aus Randdaten (Funktionswerten und Werten der Normalableitung) vollständig berechnen. Für das elektrostatische Potenzial φ eines ladungsfreien Bereichs bedeutet dies z.B. die Vorgabe der Werte von φ am Rand — etwa der Potenziale von Elektroden — bzw. der Normalenprojektion der elektrischen Feldstärke am Rand. Es ist klar, dass diese Daten nicht beliebig vorgeschrieben werden können: Beispielsweise muss der elektrische Hüllenfluss aus einem ladungsfreien Bereich verschwinden. Nach der Art der vorliegenden Randdaten lässt sich eine Einteilung treffen.

Als Grundgebiet legen wir einen Bereich \mathcal{V} nach dem Muster der Abb. 3.1 zugrunde, den wir als leer oder vollständig mit einem linear homogen isotropen Medium ($\varepsilon = \text{konst}$) ausgefüllt, jedenfalls zunächst als ladungsfrei voraussetzen. Raumladungen in \mathcal{V} werden wir später berücksichtigen.

Beim **Dirichlet-Problem** wird nach harmonischen Skalarfeldern φ (Lösungen der Laplace-Gleichung (3.9)) mit vorgegebenen Randwerten von φ oder nach harmonischen Vektorfeldern \vec{E} (Lösungen von $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$ und $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$) mit vorgegebenen Tangentialkomponenten $\vec{E}_t = -\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E})$ am Rand gesucht. Die Aufgabe

lässt sich für beschränkte wie auch für unbeschränkte Gebiete formulieren, wobei im zweiten Fall die Forderung der Harmonität im Unendlichen und die Vorgabe des Wertes im unendlich fernen Punkt dazukommt.

Das **skalare (klassische) Dirichlet-Problem** stellt sich wie folgt: Gesucht sind stetige Skalarfelder φ im abgeschlossenen Bereich \mathcal{V} , die im Inneren von \mathcal{V} harmonisch sind und auf dem Rand $\partial\mathcal{V}$ vorgegebene Werte $\varphi = f$ annehmen. Das skalare Dirichlet-Problem für den Bereich \mathcal{V} besitzt zu analytischen Randwerten f auf $\partial\mathcal{V}$ **genau eine Lösung** φ . Diese ist in \mathcal{V} einschließlich des Randes analytisch (Eine reelle Funktion heißt reell analytisch oder kurz **analytisch**, wenn sie in jedem Punkt des Definitionsbereiches beliebig oft stetig differenzierbar ist und in jeder Umgebung, die zum Definitionsbereich gehört, durch eine absolut konvergente Taylorreihe dargestellt wird). Besteht $\partial\mathcal{V}$ nur aus der äußeren Fläche \mathcal{S}_1 (siehe Abb. 3.1), so sprechen wir vom **inneren Dirichlet-Problem**. Fehlt dagegen \mathcal{S}_1 und gibt es mindestens eine weitere Fläche \mathcal{S}_2 , dann liegt ein **äußeres Dirichlet-Problem** vor. Anstelle des Randwertes auf \mathcal{S}_1 wird dann φ_∞ vorgegeben. Die Lösung ist wieder eindeutig.

Beim **Neumann-Problem** sind harmonische Skalarfelder φ mit vorgeschriebenen Randwerten der Normalableitung $\partial_n\varphi = -E_n$ oder harmonische Vektorfelder \vec{E} mit vorgeschriebenen Normalenprojektionen $E_n = \vec{n} \cdot \vec{E}$ zu bestimmen.

Wir formulieren das **skalare (klassische) Neumann-Problem**: Gesucht sind stetige Skalarfelder φ im abgeschlossenen Bereich \mathcal{V} , die im Inneren von \mathcal{V} harmonisch sind und auf dem Rand $\partial\mathcal{V}$ eine Normalableitung $\partial_n\varphi$ mindestens im Sinne gleichmäßiger Konvergenz bei Annäherung an $\partial\mathcal{V}$ entlang der Flächennormale besitzen (daraus folgt die Stetigkeit der Grenzwerte $\partial_n\varphi$ auf $\partial\mathcal{V}$). Diese Normalableitung $\partial_n\varphi = -E_n$ ist vorgegeben. Das skalare Neumann-Problem für den Bereich \mathcal{V} besitzt zu analytischen Normalableitungen $-E_n$ auf $\partial\mathcal{V}$ (E_n ist die Normalenprojektion der elektrischen Feldstärke) eine bis auf eine willkürliche Konstante **eindeutig bestimmte Lösung** φ , sofern die notwendige und hinreichende Integrabilitätsbedingung

$$\int_{\partial\mathcal{V}} E_n \, dA = 0 \quad (3.30)$$

erfüllt ist (Satz vom elektrischen Hüllenfluss). Die Lösung ist einschließlich des Randes analytisch. Ein **inneres Neumann-Problem** liegt dann vor, wenn $\partial\mathcal{V}$ nur aus der äußeren Fläche \mathcal{S}_1 besteht (siehe Abb. 3.1). Beim **äußeren Neumann-Problem** fehlt \mathcal{S}_1 und die Integrabilitätsbedingung (3.30) entfällt.

In den Anwendungen kommen häufig auch **gemischte Randwertprobleme** vor: Es sind dabei auf einem Teil des Randes $\partial\mathcal{V}$ Dirichlet-Daten, auf dem restlichen Teil Neumann-Daten vorgeschrieben. Unter bestimmten Bedingungen lässt sich auch dafür die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen nachweisen.

Abschließend noch einige Anmerkungen zu **elektrostatischen Randwertproblemen mit Raumladungen**. Beim **skalaren Dirichlet-Problem** werden hier Lösungen φ der Poisson-Gleichung (3.8) im Bereich \mathcal{V} gesucht, die auf $\partial\mathcal{V}$ vorgeschriebene Randwerte f annehmen. Man bestimmt dazu, etwa über Gl. (3.14), eine Partikulärlösung φ_p und sucht anschließend ein in \mathcal{V} harmonisches Skalarfeld φ_h , das am Rand $\partial\mathcal{V}$ die Werte von $f - \varphi_p$ annimmt (Dirichlet-Problem für die Laplace-Gleichung). Dann ist $\varphi = \varphi_h + \varphi_p$ die eindeutige Lösung. Beim **skalaren**

Neumann-Problem wird nach Lösungen φ der Poisson-Gleichung in \mathcal{V} gefragt, deren Normalableitungen auf $\partial\mathcal{V}$ vorgegebene Werte $\partial_n\varphi = -E_n$ annehmen. Notwendig und hinreichend für die Existenz einer Lösung ist hier die aus dem Satz vom elektrischen Hüllenfluss folgende Integrabilitätsbedingung

$$\int_{\partial\mathcal{V}} E_n \, dA - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathcal{V}} \varrho \, dV = 0, \quad (3.31)$$

falls $\partial\mathcal{V}$ eine äußere Hülle \mathcal{S}_1 enthält (Abb. 3.1). Zu einer Partikulärlösung φ_p , etwa wieder über Gl. (3.14) gewonnen, wird dann ein harmonisches Skalarfeld φ_h in \mathcal{V} bestimmt mit den Normalableitungen $-E_n - \partial_n\varphi_p$ auf $\partial\mathcal{V}$ (Neumann-Problem für die Laplace-Gleichung). Die Summe $\varphi = \varphi_h + \varphi_p$ löst das gesamte Problem eindeutig bis auf eine additive Konstante.

Formale Lösungen elektrostatischer Randwertprobleme

Ausgehend von Grundlösungen (3.12) des Laplace-Operators lassen sich formale Lösungen für die skalaren Randwertprobleme der Elektrostatik angeben. Ich möchte das hier skizzieren, ohne auf die Voraussetzungen im Detail einzugehen.

Wir leiten zuerst zwei Identitäten ab und nehmen dazu im Satz von Gauß (1.44) das Vektorfeld in der Form $\vec{f} = u\vec{\nabla}v$ mit zwei Skalarfeldern u und v an:

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot (u\vec{\nabla}v) \, dV = \int_{\partial\mathcal{V}} \vec{n} \cdot (u\vec{\nabla}v) \, dA, \quad (3.32)$$

d.h.

$$\int_{\mathcal{V}} [u\nabla^2 v + (\vec{\nabla}u) \cdot (\vec{\nabla}v)] \, dV = \int_{\partial\mathcal{V}} u\partial_n v \, dA. \quad (3.33)$$

Dies ist die **erste Green-Identität**. Vertauschen von u und v und subtrahieren der entstehenden Gleichung von (3.33) liefert die **zweite Green-Identität**

$$\int_{\mathcal{V}} (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u) \, dV = \int_{\partial\mathcal{V}} (u\partial_n v - v\partial_n u) \, dA. \quad (3.34)$$

Wir gehen nun von der vektoriellen Ortsvariablen \vec{r} auf \vec{r}' über und setzen speziell für u das elektrostatische Potenzial φ sowie für v eine Grundlösung $G(\vec{r}, \vec{r}')$ des Laplace-Operators aus Gl. (3.12) ein. Zusammen mit der Poisson-Gleichung (3.8) und der Eigenschaft (3.10) einer Grundlösung folgt dann

$$\varphi = \int_{\mathcal{V}} G \frac{\varrho'}{\varepsilon} \, dV' + \int_{\partial\mathcal{V}} (G\partial'_n\varphi' - \varphi'\partial'_n G) \, dA'. \quad (3.35)$$

Für $\varphi = u$ und $\varrho = 0$ ergibt sich daraus, abgesehen von u_∞ , übrigens die Green-Integralformel (3.23), wenn wir speziell $G = 1/(4\pi R)$, d.h. (3.11) als Grundlösung wählen. Jedenfalls ist (3.35) wieder eine Darstellung des elektrostatischen Potentials zu einer gegebenen Ladungsdichte ϱ bei bekannten Randwerten von φ und

seiner Normalableitung. Die Freiheit in der Wahl von G , ausgedrückt in Gl. (3.12), kann nun dazu benutzt werden, dem Randintegral je nach vorliegenden Randdaten eine passende Form zu geben. Beim **Dirichlet-Problem** fordern wir

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \quad \text{für Punkte } \vec{r}' \text{ auf } \partial\mathcal{V} \quad (3.36)$$

und erhalten

$$\varphi = \int_{\mathcal{V}} G \frac{\rho'}{\varepsilon} dV' - \int_{\partial\mathcal{V}} \varphi' \partial_n' G dA' . \quad (3.37)$$

Beim **Neumann-Problem** kann zwar $\partial_n' G$ am Rand i.A. nicht Null, aber gleich einer passenden Konstanten gesetzt werden. Die Grundleistung G — wir nennen sie in diesen Fällen **Green-Funktion** — hängt also ab von der Art des Problems und von der Geometrie des Feldbereichs \mathcal{V} . Die Bestimmung ihres harmonischen Anteils $g(\vec{r}, \vec{r}')$ (siehe Gl. (3.12)) stellt selbst wieder ein Randwertproblem etwa gleichen Schwierigkeitsgrades dar, so dass für die aktuelle Lösung eines Problems mit der formalen Lösungsangabe meist nicht viel gewonnen ist. Es sind vielmehr die Existenz einer Green-Funktion und ihre Eigenschaften, die interessieren. Beispielsweise gilt für die Green-Funktion eines Dirichlet-Problems immer $G(\vec{r}, \vec{r}') = G(\vec{r}', \vec{r})$.

Die physikalische Bedeutung der Green-Funktion sehen wir aus ihrer allgemeinen Form (3.12). Der erste Summand $(4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|)^{-1}$ stellt das elektrostatische Potenzial einer Punktladung Q am Ort \vec{r}' im ganzen Raum dar, bezogen auf Q/ε . Der zweite Summand $g(\vec{r}, \vec{r}')$ ist dann, bezogen auf den gleichen Wert, das Potenzial von Ladungen im Komplementärbereich von \mathcal{V} , die so verteilt sind, dass die Randbedingungen für G auf $\partial\mathcal{V}$ erfüllt sind, z.B. (3.36) für ein Dirichlet-Problem. Es besteht hier ein Zusammenhang mit der bekannten Spiegelungsmethode.

Ausgewählte Literatur

Ein Klassiker der Potenzialtheorie ist

O.D. Kellog: *Foundations of Potenzial Theory*. Grundlehren Bd. 31. Berlin: Springer 1967.

Sehr viel an traditionellem Material enthält auch

Ph.M. Morse, H. Feshbach: *Methods of Theoretical Physics*, part I, II. New York: McGraw-Hill 1953.

Gut auf die Anwendungen zugeschnitten und angenehm lesbar ist

E. Martensen: *Potenzialtheorie*. Stuttgart: Teubner 1968.

3.2 Spezielle elektrostatische Felder

Einfache Feldprobleme können mit traditionellen Methoden der Analysis gelöst werden, kompliziertere Fälle verlangen den Einsatz rechnerunterstützter numerischer Verfahren. Es ist jedoch wichtig zu wissen, dass auch eine numerische Feldberechnung in der Regel nur dann erfolgreich verläuft, wenn zumindest die qualitativen Eigenschaften des zu berechnenden Feldes im Vorhinein bekannt sind.

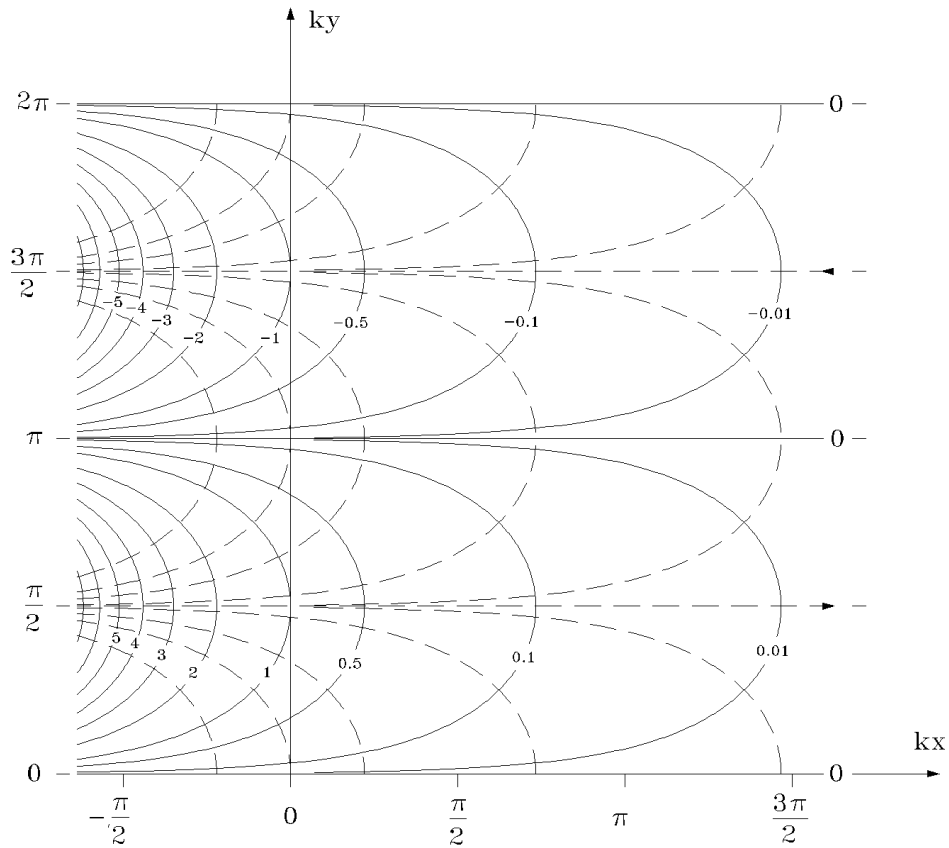


Abb.3.2: Ausschnitt einer Darstellung des ebenen elektrischen Feldes zum elektrostatischen Potenzial (3.43). Die Spuren der Potenzialflächen sind ausgezogen, Parameterwerte φ/C . Die Vektorlinien der elektrischen Feldstärke sind strichliert.

Wir werden deshalb in diesem Abschnitt das charakteristische Verhalten typischer elektrostatischer Felder studieren.

Zweidimensionale Lösungen der Laplace-Gleichung in kartesischen Koordinaten

Das elektrische Feld in langgestreckten, ladungsfreien Gebieten lässt sich häufig durch eine Translationsinvarianz derart charakterisieren, dass die Lösungen der Laplace-Gleichung für das elektrostatische Potenzial in Bezug auf ein kartesisches Koordinatensystem zwar von der x - und der y -Koordinate, nicht aber von der z -Koordinate abhängen.

Wir untersuchen zuerst Lösungen, die sich als Produkt

$$\varphi(x, y) = X(x)Y(y) \quad (3.38)$$

darstellen lassen. Einsetzen in die Laplace-Gleichung liefert nach Division

$$X''(x)/X(x) = -Y''(y)/Y(y), \quad (3.39)$$

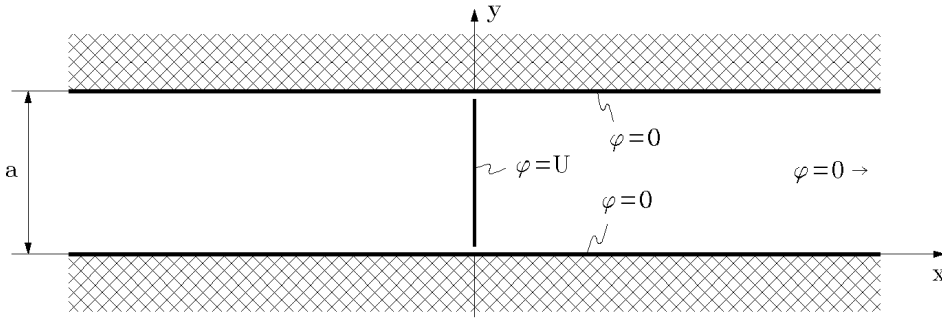


Abb. 3.3: Zwischen zwei planparallelen Elektroden auf Nullpotenzial liegt senkrecht dazu ein Leiterstreifen, der auf dem Potenzialwert U gehalten wird. Gesucht ist zunächst das Potenzial φ im Bereich $x > 0$, $0 < y < a$, wobei $\varphi = 0$ für $y = 0$, $y = a$ und für $x \rightarrow \infty$ sowie $\varphi = U$ für $x = 0$, $0 < y < a$. Das Potenzial für $x < 0$ folgt daraus durch Spiegelung an der yz -Ebene ($x \rightarrow -x$).

wobei die linke Seite nicht von y und die rechte Seite nicht von x abhängt. Es kann deshalb keine der beiden Seiten weder von x noch von y abhängen, sie müssen also gleich einer Konstanten sein. Wir haben daher

$$X''(x) - k^2 X(x) = 0, \quad Y''(y) + k^2 Y(y) = 0 \quad (3.40)$$

mit einer reellen Konstanten k (Ersetzen von k^2 durch $-k^2$ würde lediglich die Rollen von x und y vertauschen). Die gewöhnlichen Differenzialgleichungen (3.40) haben für $k \neq 0$ allgemeine Lösungen der Form

$$X(x) = A_1 e^{kx} + A_2 e^{-kx}, \quad Y(y) = B_1 \cos(ky) + B_2 \sin(ky) \quad (3.41)$$

mit freien Konstanten A_1 , A_2 , B_1 , B_2 und k , es ist daher

$$\varphi(x, y) = (A_1 e^{kx} + A_2 e^{-kx}) [B_1 \cos(ky) + B_2 \sin(ky)] \quad (3.42)$$

eine Lösung der Laplace-Gleichung. Ihr typisches Verhalten — periodisch in y und exponentiell in x — findet sich in der **Grundform**

$$\varphi(x, y) = C e^{-kx} \sin(ky) \quad (3.43)$$

mit der zugehörigen elektrischen Feldstärke

$$\vec{E}(x, y) = C k e^{-kx} \sin(ky) \vec{e}_x - C k e^{-kx} \cos(ky) \vec{e}_y, \quad (3.44)$$

skizziert in Abb. 3.2. Wir bemerken das Verschwinden von φ an den Ebenen $y = n\pi/k$ für ganzzahlige n , sodass damit das elektrostatische Feld zwischen parallelen Plattenelektroden gleichen Potenzials beschrieben werden kann. Ist umgekehrt a der Abstand zwischen den Platten, so erfüllen alle Lösungen mit $k = n\pi/a$ die Randbedingungen an den Platten. Durch Linearkombination von Lösungen (3.43), oder allgemeiner, (3.42) können Randwertaufgaben dieses Typs gelöst werden.

Als **Beispiel** untersuchen wir die Anordnung aus Abb. 3.3. Durch die Linearkombination

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n\pi x/a} \sin(n\pi y/a) \quad (3.45)$$

von Lösungen (3.43) sind bereits die Randbedingungen bei $y = 0$, $y = a$ und $x \rightarrow \infty$ erfüllt. Die Koeffizienten C_n sind aus der Randbedingung $\varphi = U$ bei $x = 0$ zu bestimmen:

$$\varphi(0, y) = U = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi y/a) \quad (3.46)$$

besitzt die Form einer Fourier-Reihe. Nach Multiplikation mit $\sin(m\pi y/a)$, m ganzzahlig, und Integration über $0 < y < a$ erhalten wir

$$C_n = \begin{cases} 4U/(n\pi) & \text{für } n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & \text{für } n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (3.47)$$

und damit als Lösung unserer Aufgabe die Reihe

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4U}{n\pi} e^{-n\pi x/a} \sin(n\pi y/a) . \quad (3.48)$$

Zur Wiedergabe der Werte von φ ist für kleine Werte von x eine große Anzahl von Reihengliedern erforderlich; für $x > a/\pi$ reichen offensichtlich wenige Glieder aus. Es dominiert dann bereits das asymptotische Verhalten für $x \rightarrow \infty$, dargestellt durch Gl. (3.43) mit $C = 4U/\pi$ und $k = \pi/a$.

Reihen der Art (3.48) lassen sich häufig über eine komplexe Darstellung summieren. So können wir beispielsweise mit der Abkürzung $Z = \exp[-(x + jy)\pi/a]$ in unserem Fall für Gl. (3.48) schreiben

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= -U \operatorname{Im} \left[\frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} Z^n/n \right] = -U \operatorname{Im} \left[\frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{1+Z}{1-Z} \right) \right] \\ &= U \frac{2}{\pi} \arctan \left[\frac{\sin(\pi y/a)}{\sinh(\pi x/a)} \right] , \end{aligned} \quad (3.49)$$

es gibt also auch eine geschlossene Lösung des Problems.

Verallgemeinerungen sind durchaus möglich, etwa die Vorgabe eines beliebigen, nicht konstanten Verlaufes $\varphi(0, y)$ im Intervall $0 < y < a$. Die Summe (3.46) ist dann die Fourierentwicklung dieser Funktion, und die Koeffizienten C_n sind wie üblich zu bestimmen. Wie diskrete Werte $k = n\pi/a$ in unserem Beispiel auf **Fourier-Reihen** führen, deren Koeffizienten von n abhängen, so können wir k auch als kontinuierlichen Parameter auffassen und eine lineare Superposition z.B. von Lösungen (3.43) mit Funktionen $C(k)$ durch Integration über k gewinnen. Dies entspricht einer Lösungsdarstellung als **Fourier-Integral**. Allgemein gilt für den Aufbau von Lösungen aus Fourier-Komponenten: Je kleiner die Periodenlänge der Fourier-Komponente in y -Richtung (je größer k), desto stärker klingt der entsprechende Term in x -Richtung ab.

Zweidimensionale Lösungen der Laplace-Gleichung in Polarkoordinaten

Andere Klassen von ebenen elektrostatischen Feldern lassen sich durch Anschreiben der Laplace-Gleichung in anderen Koordinatensystemen erzeugen. Wir werden

hier noch Lösungen in Polarkoordinaten untersuchen, d.h. in Kreiszylinderkoordinaten ohne z -Abhängigkeit. Nach Tab. 1.3 haben wir in diesem Fall

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0. \quad (3.50)$$

Ein Produktansatz

$$\varphi(\varrho, \alpha) = R(\varrho)S(\alpha) \quad (3.51)$$

bringt Gl. (3.50) nach Multiplikation mit ϱ^2/φ auf die Form

$$\frac{\varrho}{R} \frac{d}{d\varrho} \left(\varrho \frac{dR}{d\varrho} \right) = -\frac{1}{S} \frac{d^2 S}{d\alpha^2}, \quad (3.52)$$

auf die sich wiederum das Separationsargument anwenden lässt. Wir gelangen so zu den beiden gewöhnlichen Differenzialgleichungen

$$\varrho^2 R''(\varrho) + \varrho R'(\varrho) - k^2 R(\varrho) = 0, \quad S''(\alpha) + k^2 S(\alpha) = 0 \quad (3.53)$$

mit der freien Separationskonstanten k^2 und den allgemeinen Lösungen

$$R(\varrho) = A_1 \varrho^k + A_2 \varrho^{-k}, \quad S(\alpha) = B_1 \cos(k\alpha) + B_2 \sin(k\alpha) \quad (3.54)$$

oder, für $k = 0$,

$$R(\varrho) = A_1 + A_2 \ln(a/\varrho), \quad S(\alpha) = B_1 + B_2 \alpha. \quad (3.55)$$

A_1, A_2, B_1, B_2 und $a > 0$ sind freie Konstanten.

Das Potenzial für $k = 0$, erhalten durch Multiplikation von R und S aus (3.55), ist — abgesehen von einer Konstanten — eine Überlagerung von drei Termen,

$$\varphi_1(\varrho) = C_1 \ln(a/\varrho), \quad \varphi_2(\alpha) = C_2 \alpha, \quad \varphi_3(\varrho, \alpha) = C_3 \alpha \ln(a/\varrho), \quad (3.56)$$

denen die elektrischen Feldstärken

$$\begin{aligned} \vec{E}_1(\varrho, \alpha) &= \frac{C_1}{\varrho} \vec{e}_\varrho, \quad \vec{E}_2(\varrho, \alpha) = -\frac{C_2}{\varrho} \vec{e}_\alpha, \\ \vec{E}_3(\varrho, \alpha) &= C_3 \left[\frac{\alpha}{\varrho} \vec{e}_\varrho - \frac{\ln(a/\varrho)}{\varrho} \vec{e}_\alpha \right] \end{aligned} \quad (3.57)$$

entsprechen. φ_1 und \vec{E}_1 gehören offensichtlich zu einer beidseitig unendlich ausgehenden Linienladung der Dichte $\tau = 2\pi\epsilon C_1$. Die Vektorlinien von \vec{E}_2 sind dagegen konzentrische Kreise. Konfigurationen dieser Art sind vor allem für Magnetfelder wichtig (langgestreckte Linienströme), finden ausschnittsweise aber auch in der Elektrostatik Verwendung. φ_3 und \vec{E}_3 sind von geringem Interesse für die Lösung elektrostatischer Aufgaben: Die Spuren der Potenzialflächen und die Vektorlinien bilden orthogonale Scharen von Spiralen.

Wichtiger für die Anwendungen sind Lösungen, die aus (3.54) folgen. Durch passende Wahl der Koordinatenfläche $\alpha = 0$ lässt sich eine der beiden Konstanten B_1, B_2 zu Null machen, sodass Überlagerungen von Potenzialen der **Grundform**

$$\varphi(\varrho, \alpha) = C_k \varrho^k \cos(k\alpha) \quad (3.58)$$

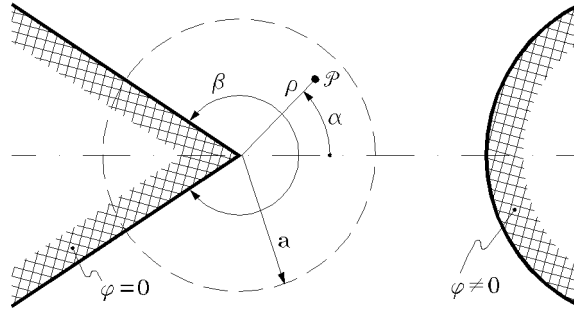


Abb. 3.4: Zur qualitativen Untersuchung des elektrostatischen Kantenfeldes

mit beliebigen k -Werten und die zugehörige Feldstärke

$$\vec{E}(\varrho, \alpha) = C_k k \varrho^{k-1} [-\cos(k\alpha) \vec{e}_\varrho + \sin(k\alpha) \vec{e}_\alpha] \quad (3.59)$$

entstehen. Gehört der vollständige Winkelbereich $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ zum Feldgebiet, so muss für eindeutige Potenzialwerte die Funktion $\varphi(\varrho, \alpha)$ jedenfalls 2π -periodisch in α sein. Dies erfordert **ganzzahlige Werte von k** .

Je nach Wahl des Wertes von k entstehen unterschiedliche Felder. Wir erhalten z.B. für $k = -1$ Potenzial und Feldstärke

$$\varphi(\varrho, \alpha) = C_{-1} \frac{\cos(\alpha)}{\varrho}, \quad \vec{E}(\varrho, \alpha) = \frac{C_{-1}}{\varrho^2} [\cos(\alpha) \vec{e}_\varrho + \sin(\alpha) \vec{e}_\alpha] \quad (3.60)$$

eines **elektrischen Liniendipols** mit dem längenbezogenen axialen elektrischen Moment $p' = C_{-1} 2\pi\epsilon$, während sich für $k = 1$ ein **homogenes elektrisches Feld** ergibt,

$$\varphi(\varrho, \alpha) = C_1 \varrho \cos(\alpha), \quad \vec{E} = C_1 [-\cos(\alpha) \vec{e}_\varrho + \sin(\alpha) \vec{e}_\alpha] = -C_1 \vec{e}_x. \quad (3.61)$$

$k = -2$ gehört zu einem **elektrischen Linienquadrupol** usw.

Weitere nützliche Konfigurationen ergeben sich durch Überlagerung, etwa für $k = 1$ und $C_1 = -E_0$ mit $k = -1$ und $C_{-1} = E_0 a^2$,

$$\varphi(\varrho, \alpha) = -E_0 a \left(\frac{\varrho}{a} - \frac{a}{\varrho} \right) \cos(\alpha). \quad (3.62)$$

Dieses Potenzial gehört für $\varrho/a \gg 1$ zu einem homogenen Feld $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_x$, während der Kreiszyylinder $\varrho = a$ die Potenzialfläche $\varphi = 0$ bildet. Im Bereich $\varrho \geq a$ beschreiben wir also offensichtlich das elektrostatische Feld um einen kreiszylindrischen, stromfreien Leiter, der in ein ursprünglich homogenes Feld \vec{E}_0 senkrecht zu seiner Achse eingebettet ist.

Die **allgemeine Überlagerung** von Lösungen des Typs (3.54) und (3.55), eindeutig für $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, liefert eine Reihe, die wir z.B. in der Form

$$\begin{aligned} \varphi(\varrho, \alpha) = & A_0 + B_0 \ln(a/\varrho) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varrho^n \sin(n\alpha + \beta_n) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \varrho^{-n} \sin(n\alpha + \gamma_n) \end{aligned} \quad (3.63)$$

schreiben.

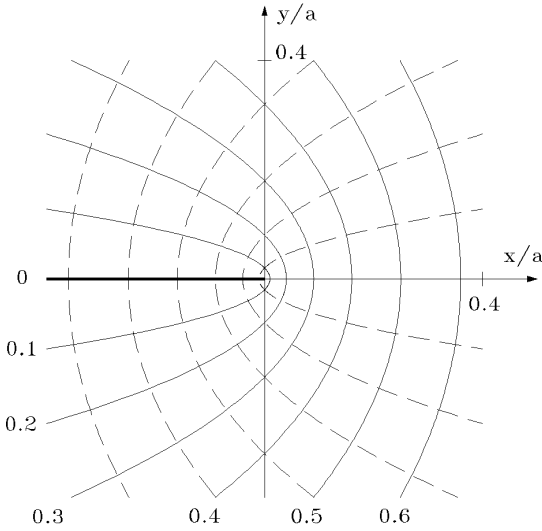


Abb. 3.5: Ausschnitt einer Darstellung des ebenen elektrischen Feldes in der Umgebung der Kante einer dünnen Platte gemäß Gl. (3.64) mit $\beta = 2\pi$. Die Spuren der Potenzialflächen sind ausgezogen, Parameterwerte φ/C_1 . Die Vektorlinien der elektrischen Feldstärke sind strichliert gezeichnet.

Die **Konstante** k in Lösungen des Typs (3.58) muss **nicht notwendig ganzzahlig** sein, wenn nicht das ganze Winkelintervall $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ zum elektrostatischen Feldgebiet gehört. Als Beispiel dafür untersuchen wir das qualitative Verhalten des **elektrostatischen Feldes in der Umgebung von scharfen Kanten** langgestreckter, stromfreier Leiter (Abb. 3.4). Bei Annäherung an eine solche Kante wächst der Betrag der elektrischen Feldstärke bekanntlich stark an, und es ist interessant zu wissen, von welcher Art diese Singularität ist. Wir können uns dazu auf einen kreiszylindrischen Bereich mit dem (kleinen) Radius a um die Kante beschränken und dort Spiegelsymmetrie bezüglich der Ebene $\alpha = 0$ voraussetzen. Damit sind Linearkombinationen von Lösungen des Typs (3.58) brauchbar. Die Randbedingung $\varphi = 0$ für $\alpha = \pm\beta/2$, unabhängig von ϱ , erfordert dann $\cos(k\beta/2) = 0$, d.h. es sind Werte $k = n\pi/\beta$ mit ungeradzahligen n zugelassen. Dies führt auf eine Reihe

$$\varphi(\varrho, \alpha) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} C_n (\varrho/a)^{n\pi/\beta} \cos(n\alpha\pi/\beta) .$$

Die Bestimmung der Koeffizienten C_n , beispielsweise über eine Fourier-Entwicklung von $\varphi(a, \alpha)$, lassen wir beiseite. Da der Exponent $n\pi/\beta$ stets positiv ist, erwarten wir für kleine Werte ϱ/a eine Dominanz des ersten Reihenglieds ($C_1 \neq 0$ vorausgesetzt) und schreiben daher für das Potenzial nahe der Kante

$$\varphi(\varrho, \alpha) \approx C_1 (\varrho/a)^{\pi/\beta} \cos(\alpha\pi/\beta) , \quad \varrho/a \ll 1 , \quad (3.64)$$

und für die zugehörige elektrische Feldstärke

$$\vec{E}(\varrho, \alpha) \approx \frac{C_1}{a} \frac{\pi}{\beta} \left(\frac{\varrho}{a} \right)^{\frac{\pi}{\beta}-1} [-\cos(\alpha\pi/\beta) \vec{e}_\varrho + \sin(\alpha\pi/\beta) \vec{e}_\alpha] .$$

An diesem Ergebnis interessiert vor allem die Art der Abhängigkeit von der bezogenen Radialkoordinate ϱ/a . Für $\beta < \pi$, entsprechend einer einspringenden Kante,

ist der Exponent $\pi/\beta - 1$ positiv. Die Feldstärke verschwindet dann bei Annäherung an die Kante. Für $\beta > \pi$, also an einer ausspringenden Kante, ist der Exponent dagegen negativ und der Feldstärkebetrag wächst für $\varrho/a \rightarrow 0$ unbeschränkt. Im Grenzfall $\beta = 2\pi$ (Kante einer dünnen Platte) finden wir die Abhängigkeit in der Form $\sqrt{a/\varrho}$. Eine Skizze dieses Feldes zeigt Abb. 3.5.

Das elektrostatische Vektorpotenzial

In einem ladungsfreien, einfach zusammenhängenden Bereich können wir den Satz vom elektrischen Hüllenfluss $\Psi(\partial\mathcal{V}) = 0$ und seine lokale Form $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$ durch die Einführung eines **elektrostatischen Vektorpotenzials** \vec{V} gemäß

$$\Psi(\mathcal{A}) = \int_{\partial\mathcal{A}} \vec{s} \cdot \vec{V} \, ds, \quad \vec{D} = \vec{\nabla} \times \vec{V} \quad (3.65)$$

erfüllen (rechtswendige Zuordnungen, Satz von Stokes). Bei Gültigkeit der Materialgleichungen $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ mit $\varepsilon = \text{konst.}$ folgt dann aus $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$ die Differenzialgleichung $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \vec{0}$ für das elektrostatische Vektorpotenzial, analog zur Laplace-Gleichung $\nabla^2 \varphi = 0$ für das elektrostatische Skalarpotenzial.

Haben wir speziell ein ebenes elektrostatisches Feld vorliegen, mit \vec{D} und \vec{E} parallel zur xy -Ebene und Invarianz gegenüber Verschiebungen entlang der z -Achse, so können wir das Vektorpotenzial als $\vec{V} = V \vec{e}_z$ mit V unabhängig von z voraussetzen. Mit Bezug auf Abb. 3.6 reduzieren sich die Gln. (3.65) auf

$$\Psi(\mathcal{A}) = \ell [V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1)] , \quad \vec{D} = -\vec{e}_z \times \vec{\nabla} V , \quad (3.66)$$

d.h. der längenbezogene elektrische Fluss durch eine Zylinderfläche \mathcal{A} , deren Spur \mathcal{C} in der xy -Ebene den Anfangspunkt \vec{r}_1 und den Endpunkt \vec{r}_2 besitzt, lässt sich direkt als Differenz der Werte von V in diesen Punkten angeben und ist unabhängig vom Verlauf von \mathcal{C} (ladungsfreier Bereich!). Daraus oder direkt aus Gl. (3.66)₂ folgt, dass die Vektorlinien von \vec{D} in der xy -Ebene durch die Linienschar $V = \text{konst.}$ gegeben sind. In einem Medium mit $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, $\varepsilon = \text{konst.}$, genügt die Funktion V in diesem Fall überdies der Laplace-Gleichung $\nabla^2 V = 0$ in der Ebene. Sind die Felder \vec{E} oder φ bekannt, lässt sich V aus

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi = -\vec{e}_z \times \vec{\nabla} (V/\varepsilon) \quad (3.67)$$

berechnen. So finden wir beispielsweise, zum Skalarpotenzial (3.64) gehörig,

$$V(\varrho, \alpha) = -\varepsilon C_1 (\varrho/a)^{\pi/\beta} \sin(\alpha\pi/\beta) , \quad (3.68)$$

wobei eine unwesentliche Integrationskonstante null gesetzt wurde. Die Linien $V = \text{konst.}$ entsprechen den in Abb. 3.5 strichliert gezeichneten Vektorlinien.

Ebene Feldprobleme und holomorphe Funktionen

Für eine große Klasse ebener Feldprobleme sowohl der Elektrostatik wie auch im stationären magnetischen Fall stellt die Funktionentheorie wirksame und elegante Hilfsmittel bereit. Ich werde die damit verknüpften Techniken hier nicht weiter ausführen, möchte aber kurz einige grundlegende Tatsachen zusammenstellen.

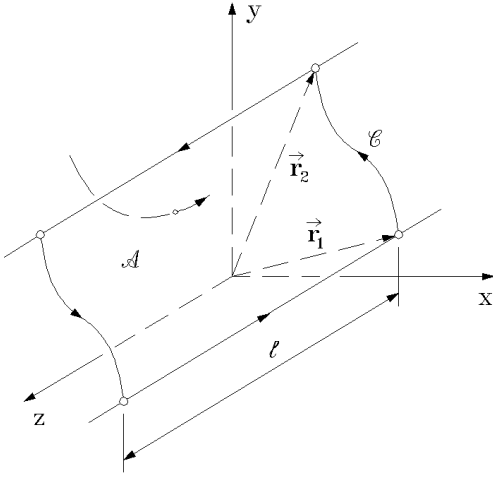


Abb.3.6: Zur Berechnung des Flusses aus dem Vektorpotenzial in einem ebenen Feld. \mathcal{C} ist die Spur der Zylinderfläche \mathcal{A} in der xy -Ebene.

Eine komplexwertige Funktion f der komplexen Variablen $\zeta = x + jy$,

$$f(\zeta) = u(x, y) + jv(x, y) , \quad (3.69)$$

heißt in einem Gebiet der komplexen Ebene (die wir mit der xy -Ebene identifizieren) **holomorph**, wenn sie dort in jedem Punkt differenzierbar ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn die reellwertigen Funktionen u und v stetig partiell differenzierbar sind und außerdem die Cauchy–Riemann–Differentialgleichungen

$$\partial_x u = \partial_y v , \quad \partial_y u = -\partial_x v \quad (3.70)$$

bestehen.

In einem ladungsfreien Gebiet eines ebenen elektrostatischen Feldes $\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y$ mit $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, $\varepsilon = \text{konst.}$, und Translationsinvarianz bezüglich z reduzieren sich die Gleichungen $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$ und $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$ auf

$$\partial_x E_x = -\partial_y E_y , \quad \partial_y E_x = \partial_x E_y , \quad (3.71)$$

die mit $u = E_x$ und $v = -E_y$ genau den Cauchy–Riemann–Gleichungen (3.70) entsprechen. Stetige partielle Differenzierbarkeit vorausgesetzt, definieren wir also durch

$$E(\zeta) = E_x(x, y) - jE_y(x, y) \quad (3.72)$$

eine in **ladungsfreien Gebieten** holomorphe Funktion. Eine zugehörige Stammfunktion

$$F(\zeta) = \varphi(x, y) + j\chi(x, y) , \quad (3.73)$$

erklärt über

$$F(\zeta) = - \int_{\zeta_0}^{\zeta} E(\zeta') d\zeta' + F(\zeta_0) , \quad E(\zeta) = -F'(\zeta) , \quad (3.74)$$

durch Integration in der komplexen Ebene über eine Kurve von ζ_0 nach ζ , nennen wir **komplexes Potenzial**. F ist im Holomorphiegebiet von E ebenfalls holomorph, aber i.A. nur dann eindeutig, wenn das Gebiet **einfach zusammenhängend** ist. Wir werden das hier voraussetzen — gegebenenfalls sind Schnitte zu legen. Allgemein gilt für die Ableitung einer holomorphen Funktion (3.73)

$$F' = \partial_x \varphi + j \partial_x \chi = -j \partial_y \varphi + \partial_y \chi \quad (3.75)$$

in unserem Fall mit (3.74)₂ und (3.72) also

$$E_x = -\partial_x \varphi = -\partial_y \chi, \quad E_y = -\partial_y \varphi = \partial_x \chi. \quad (3.76)$$

Wir erkennen damit in $\varphi = \operatorname{Re}(F)$ das elektrostatische Potenzial, während $\chi = \operatorname{Im}(F)$ mit der in den Gln. (3.66) eingeführten Funktion V gemäß $\chi = -V/\varepsilon$ zusammenhängt, d.h. mit dem elektrostatischen Vektorpotenzial des ebenen Feldes. Ist \mathcal{C} eine Kurve in der Feldebene mit dem Anfangspunkt ζ_1 und dem Endpunkt ζ_2 , so liefert der Realteil von $F(\zeta_1) - F(\zeta_2)$ die elektrische Spannung entlang \mathcal{C} , und der Imaginärteil, multipliziert mit ε , den längenbezogenen elektrischen Fluss (s. Abb. 3.6).

Bestechend bei der Verwendung holomorpher Funktionen ist einerseits, dass viele technisch brauchbare Feldkonfigurationen durch formal recht einfache komplexe Potenziale dargestellt werden. Unser Kantenfeld (3.64) lässt sich z.B. aus

$$F(\zeta) = C_1(\zeta/a)^{\pi/\beta} \quad (3.77)$$

gewinnen. Für weitere Beispiele verweise ich auf die angegebene Literatur. Andererseits vermittelt eine holomorphe Funktion $w = f(\zeta)$ eine **konforme Abbildung** zwischen der ζ -Ebene und der w -Ebene. Wir nennen eine Abbildung konform, wenn sie, ausgenommen in einzelnen kritischen Punkten, winkeltreu ist. Aus einem orthogonalen Netz, wie es z.B. durch die Spuren der Potenzialflächen und die Vektorlinien der Feldstärke eines Homogenfeldes gebildet wird, entsteht durch eine solche Abbildung wieder ein orthogonales, i.A. aber krummliniges Netz, etwa wie in Abb. 3.5. Ausgehend von vorliegenden Konturen, d.h. Spuren von zylindrischen Leiteroberflächen, lassen sich konforme Abbildungen systematisch konstruieren und damit die zugehörigen Liniensysteme bzw. das komplexe Potenzial finden. Ein Beispiel dafür ist der Schwarz–Christoffel–Abbildungssatz zur Behandlung von Feldern in polygonal begrenzten Bereichen. Auch hier verweise ich auf die Literatur.

Die Laplace–Gleichung in Kugelkoordinaten

Die Methode der Variablentrennung erweist sich auch bei der Behandlung räumlicher Potenzialaufgaben oft als brauchbar. Welche Klassen von Funktionen dabei entstehen, hängt von dem verwendeten Koordinatensystem ab. Neben den kartesischen Koordinaten, den Kreiszylinderkoordinaten und den Kugelkoordinaten gibt es noch eine ganze Reihe anderer räumlicher Koordinatensysteme, die ebenfalls eine Separation der Laplace–Gleichung gestatten. Wir werden hier beispielhaft die Laplace–Gleichung in Kugelkoordinaten untersuchen.

Wir suchen nach Lösungen der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten (r, θ, α) (Tab. 1.3),

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin(\theta) \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0. \quad (3.78)$$

Durch Eintragen des Produktansatzes

$$\varphi(r, \theta, \alpha) = R(r)P(\theta)Q(\alpha) \quad (3.79)$$

und Multiplikation mit $r^2 \sin^2(\theta)/(RPQ)$ folgt zunächst

$$\frac{\sin^2(\theta)}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin(\theta)}{P} \frac{d}{d\theta} \left[\sin(\theta) \frac{dP}{d\theta} \right] + \frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\alpha^2} = 0. \quad (3.80)$$

Die α -Abhängigkeit ist im letzten Term isoliert, der deshalb gleich einer Konstanten, wir schreiben sie als $-m^2$, sein muss. Division durch $\sin^2(\theta)$ führt dann weiter auf

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{P \sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left[\sin(\theta) \frac{dP}{d\theta} \right] - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)} = 0, \quad (3.81)$$

worin nun der erste Term nur von r , die beiden restlichen Terme nur von θ abhängen. Mit einer günstigen Schreibweise $n(n+1)$ für die hier entstehende Separationskonstante ergeben sich schließlich die drei gewöhnlichen Differenzialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - n(n+1)R &= 0, \\ \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left[\sin(\theta) \frac{dP}{d\theta} \right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)} \right] P &= 0, \\ \frac{d^2 Q}{d\alpha^2} + m^2 Q &= 0. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Die allgemeine Lösung von Gl. (3.82)₁ für den Radialteil R lässt sich leicht finden,

$$R(r) = A_1 r^n + A_2 r^{-(n+1)}, \quad (3.83)$$

mit Integrationskonstanten A_1, A_2 . Als allgemeine Lösung von Gl. (3.82)₃ haben wir

$$Q(\alpha) = B_1 \cos(m\alpha) + B_2 \sin(m\alpha). \quad (3.84)$$

Gehört das ganze Winkelintervall $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ zum Feldbereich, so muss, wenn das Potenzial eindeutig sein soll, $Q(\alpha)$ jedenfalls 2π -periodisch sein, und damit sind nur ganzzahlige m zugelassen. Liegt speziell Invarianz gegenüber Drehungen um die z -Achse vor (Azimutalsymmetrie), dann kann ein eindeutiges Potenzial überhaupt nicht von α abhängen, was in Gl. (3.84) mit $m = 0$ erfasst wird (Die allgemeine Lösung von (3.82)₃ für $m = 0$ ist $Q(\alpha) = B_1 + B_2 \alpha$).

Es verbleibt noch Gl. (3.82)₂. Wir interessieren uns hier speziell für die Fälle $m = 0, 1, 2, \dots$ und nehmen überdies an, dass das ganze Polarwinkelintervall

$0 \leq \theta \leq \pi$ zum Feldbereich gehört. Dann sind für n ebenfalls nur Werte $n = 0, 1, 2, \dots$ zugelassen, und Lösungen von Gl. (3.82)₂ lassen sich in der Form

$$P(\theta) = P_n^m [\cos(\theta)] , \quad m \leq n \quad (3.85)$$

darstellen mit **zugeordneten Legendre-Funktionen** $P_n^m(\zeta)$ erster Art des Arguments $\zeta = \cos(\theta)$, m -ter Ordnung und n -ten Grades, beispielsweise

$$\begin{aligned} P_0^0(\zeta) &= 1 , \\ P_1^0(\zeta) &= \zeta = \cos(\theta) , \quad P_1^1(\zeta) = \sqrt{1 - \zeta^2} = \sin(\theta) , \\ P_2^0(\zeta) &= \frac{1}{2} (3\zeta^2 - 1) = \frac{1}{4} [3 \cos(2\theta) + 1] , \\ P_2^1(\zeta) &= 3\zeta \sqrt{1 - \zeta^2} = \frac{3}{2} \sin(2\theta) , \\ P_2^2(\zeta) &= 3 (1 - \zeta^2) = \frac{3}{2} [1 - \cos(2\theta)] . \end{aligned} \quad (3.86)$$

Die zugeordneten Legendre-Funktionen 0-ter Ordnung $P_n^0(\zeta) \equiv P_n(\zeta)$ — durch sie werden azimutalsymmetrische Felder beschrieben — heißen für $n = 0, 1, 2, \dots$ **Legendre-Polynome**. Sie lassen sich durch

$$P_n(\zeta) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\zeta^n} (\zeta^2 - 1)^n , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.87)$$

darstellen, und daraus folgen die Funktionen $P_n^m(\zeta)$ über

$$P_n^m(\zeta) = (1 - \zeta^2)^{m/2} \frac{d^m}{d\zeta^m} P_n(\zeta) , \quad m = 0, 1, \dots, n . \quad (3.88)$$

Manchmal ist es auch vorteilhaft, die Funktionen $P_n^m[\cos(\theta)]$ mit $\cos(m\alpha)$ und $\sin(m\alpha)$ aus Gl. (3.84) zu **Kugelflächenfunktionen** $Y_{nm}(\theta, \alpha)$ zu kombinieren.

Gehört nicht das ganze Polarwinkelintervall $0 \leq \theta \leq \pi$ zum interessierenden Feldbereich, so muss n nicht notwendig ganzzahlig sein. Dieser Fall tritt z.B. bei der Untersuchung des elektrostatischen Feldes in der Umgebung einer Kreiskegelspitze auf.

Abhängig von den Zahlen m und n und von den Integrationskonstanten ergeben sich unterschiedliche Feldkonfigurationen. Im einfachsten, nichttrivialen Fall, $n = m = 0$, erhalten wir aus Gl. (3.79) mit (3.83) bis (3.86)

$$\varphi(r) = C/r , \quad (3.89)$$

also das **Potenzial einer Punktladung** im Ursprung. Zu $n = 1, m = 0$ gehören Potenziale des Typs

$$\varphi(r, \theta) = Cr \cos(\theta) , \quad \varphi(r, \theta) = \frac{C}{r^2} \cos(\theta) , \quad (3.90)$$

entsprechend einem **homogenen elektrischen Feld** in z -Richtung bzw. dem Feld eines z -gerichteten **elektrischen Dipols** im Ursprung. Für $n = m = 1$ haben wir, wieder nach r -Abhängigkeit unterschieden,

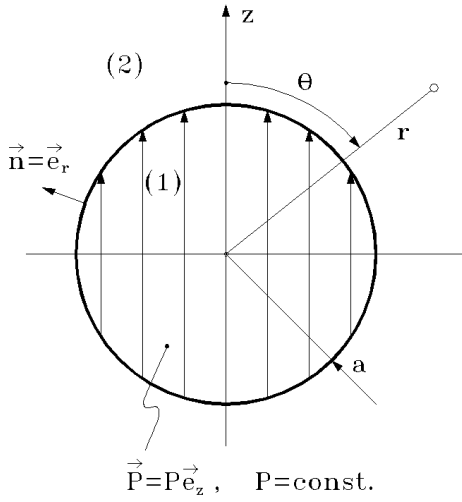


Abb. 3.7: Im sonst leeren Raum befindet sich eine homogen elektrisch polarisierte Kugel. Gesucht ist das zugehörige elektrische Feld.

$$\varphi(r, \theta, \alpha) = r \sin(\theta) [C_1 \cos(\alpha) + C_2 \sin(\alpha)] ,$$

$$\varphi(r, \theta, \alpha) = \frac{\sin(\theta)}{r^2} [C_1 \cos(\alpha) + C_2 \sin(\alpha)] . \quad (3.91)$$

(3.91)₁, überlagert mit (3.90)₁, entspricht einem homogenen elektrischen Feld allgemeiner Richtung mit den kartesischen Koeffizienten $E_x = -C_1$, $E_y = -C_2$, $E_z = -C$. Die Überlagerung von (3.91)₂ und (3.90)₂ liefert dagegen wieder das Potenzial eines elektrischen Punktdipols im Ursprung, aber allgemeiner Richtung, mit den kartesischen Koeffizienten $(p_x, p_y, p_z) = 4\pi\epsilon_0(C_1, C_2, C_3)$ des elektrischen Moments. Durch Überlagerung von Lösungen zu $n = 2$ proportional $1/r^3$ lässt sich das Potenzial von beliebig orientierten **elektrischen Quadrupolen** darstellen, usw.

Zur Befriedigung der Randbedingungen wird man häufig **Lösungen dieser Grundtypen überlagern** müssen, i.A. sogar in der Form einer unendlichen Reihe, etwa

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n r^n + B_n r^{-(n+1)} \right) P_n^0[\cos(\theta)] \quad (3.92)$$

für Feldkonfigurationen invariant gegenüber Drehungen um die z -Achse. Besteht der Feldbereich aus mehreren Teilen (z.B. unterschiedlicher Dielektrika), so ist für jeden Bereich eine Lösung zunächst allgemein zu konstruieren und dann an den Bereichsrändern anzupassen.

Betrachten wir dazu ein **Beispiel**: Gesucht ist das elektrische **Feld einer homogen elektrisch polarisierten Kugel** im sonst leeren Raum. Wir legen dazu ein Koordinatensystem mit dem Ursprung in das Kugelzentrum und die z -Achse in Polarisationsrichtung, sodass $\vec{P} = P\vec{e}_z$ (Abb. 3.7). Zu unterscheiden sind hier die Bereiche $r < a$ und $r > a$. Wegen $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ mit $\vec{P} = \text{konst.}$ genügt das elektrostatische Potenzial in beiden Bereichen der Laplace-Gleichung, und an der Grenze $r = a$ müssen die Sprungbedingungen $\vec{n} \times [\vec{E}] = \vec{0}$, $\vec{n} \cdot [\vec{D}] = 0$ gelten. Aus der ersten dieser Bedingungen folgt $[\varphi] = \text{konst.}$, wir setzen o.B.d.A. $[\varphi] = 0$. Die zweite Bedingung liefert $[\epsilon_0 E_r] = P_r = P \cos(\theta)$ mit $E_r = -\partial_r \varphi$, d.h. eine fiktive

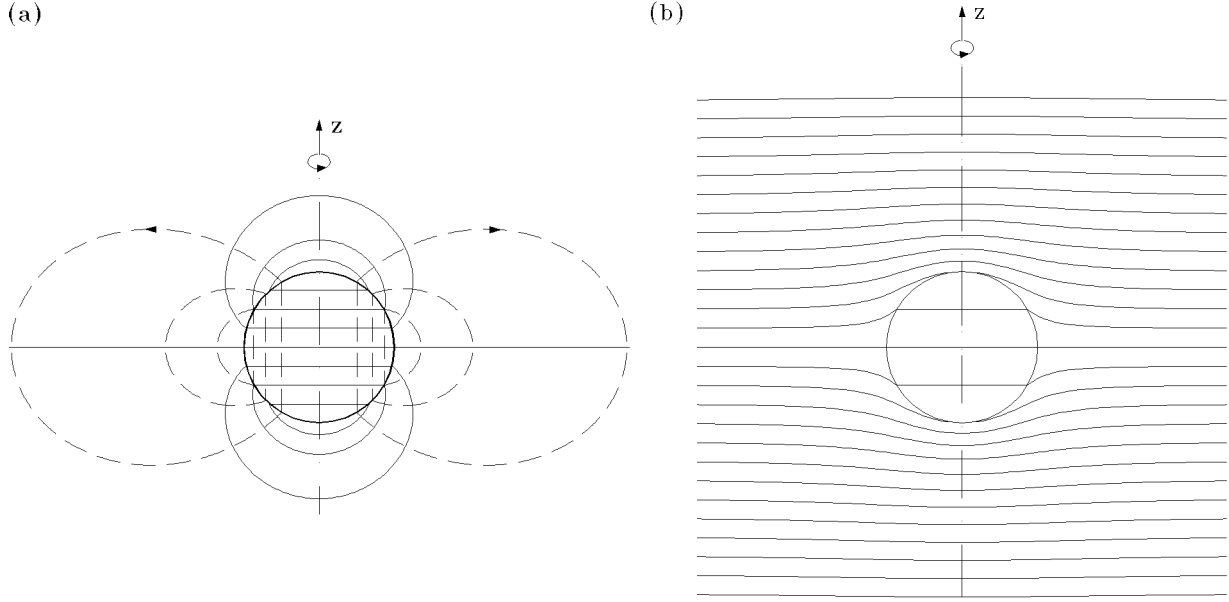


Abb.3.8: (a) Elektrisches Feld einer homogen polarisierten Kugel (Abb. 3.7) nach Gln. (3.96). Potenzialschritt $Pa/(12\varepsilon_0)$. (b) Eine Kugel aus dielektrischem Material, $\varepsilon_r = 4$, wird in ein homogenes elektrisches Feld $\vec{E}_2 = E_2\vec{e}_z$ gebracht. Resultierende Potenzialverteilung nach Gl. (3.100). Potenzialschritt $E_2a/4$.

Flächenladung der Dichte $\sigma^f = P \cos(\theta)$. Weiters verlangen wir Beschränktheit des Potentials im ganzen Raum. Unser Feldproblem lässt sich damit so formulieren:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= 0 \text{ für } 0 \leq r < a \text{ und } r > a, \\ \varphi &\text{ beschränkt für } r = 0 \text{ und } r \rightarrow \infty, \\ \varphi^{(2)} - \varphi^{(1)} &= 0, \\ (\partial_r \varphi)^{(2)} - (\partial_r \varphi)^{(1)} &= -P \cos(\theta)/\varepsilon_0 \end{aligned} \right\} \text{ für } r = a. \quad (3.93)$$

Die Feldkonfiguration ist jedenfalls azimutalsymmetrisch (unabhängig von α). Wir haben deshalb Lösungen der allgemeinen Form (3.92) zu erwarten, wobei wegen der Beschränktheitsbedingung $B_n = 0$ für $0 \leq r < a$ und $A_n = 0$ für $r > a$ gelten muss (A_0 liefert eine unwesentliche Konstante). Weiters lässt ein Blick auf die Sprungbedingung für die Normalableitung vermuten, dass mit $n = 1$ das Auslangen zu finden ist, weil $P_1^0[\cos(\theta)] = \cos(\theta)$ genau die vorgeschriebene Winkelabhängigkeit wiedergibt. Wir versuchen also

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) &= Ar \cos(\theta) & \text{für } 0 \leq r < a, \\ \varphi(r, \theta) &= Br^{-2} \cos(\theta) & \text{für } r > a. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Lassen sich die Konstanten A und B aus den beiden Sprungbedingungen widerspruchsfrei bestimmen, so ist das Problem eindeutig gelöst. Tatsächlich erhalten wir

$$\begin{aligned} (B/a^2) \cos(\theta) - Aa \cos(\theta) &= 0, \\ -(2B/a^3) \cos(\theta) - A \cos(\theta) &= -(P/\varepsilon_0) \cos(\theta), \end{aligned} \quad (3.95)$$

gültig für alle θ , und daraus $A = P/(3\varepsilon_0)$, $B = Pa^3/(3\varepsilon_0)$. Unsere Lösung ist somit

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) &= \frac{Pa}{3\varepsilon_0} \frac{r}{a} \cos(\theta) = \frac{P}{3\varepsilon_0} z, \quad 0 \leq r < a, \\ \varphi(r, \theta) &= \frac{Pa}{3\varepsilon_0} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \cos(\theta) = \frac{P}{3\varepsilon_0} \left(\frac{a}{r}\right)^3 z, \quad r > a, \end{aligned} \quad (3.96)$$

wozu die elektrische Feldstärke

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{P}{3\varepsilon_0} \vec{e}_z, \quad 0 \leq r < a, \\ \vec{E} &= \frac{P}{3\varepsilon_0} \left(\frac{a}{r}\right)^3 [2 \cos(\theta) \vec{e}_r + \sin(\theta) \vec{e}_\theta], \quad r > a \end{aligned} \quad (3.97)$$

gehört.

Dieses Ergebnis, dargestellt in Abb. 3.8a, ist bemerkenswert. Erstens entspricht das Feld im Außenraum $r > a$ genau dem eines Dipols im Ursprung mit dem Moment $\vec{p} = \vec{P}4\pi a^3/3$. Zweitens erweist sich die **Feldstärke im Innenraum** $r < a$ als **homogen** und antiparallel zur vorgegebenen Polarisierung, $\vec{E} = -\frac{1}{3\varepsilon_0} \vec{P}$, während $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = (2/3) \vec{P}$ parallel zu \vec{P} liegt. Ein Verhalten dieser Art ist selbst bei homogenem \vec{P} nicht immer zu erwarten, sondern ist eine spezielle Eigenschaft von Ellipsoiden (mit i.A. anderen Vorfaktoren), insbesondere von Kugeln.

Mit unserem Beispiel haben wir gleichzeitig eine **Reihe ähnlicher Feldaufgaben** gelöst. Angenommen, wir nennen die in (3.96) und (3.97) angegebenen Potentiale und Feldstärken φ_1 bzw. \vec{E}_1 und überlagern nun ein z -gerichtetes Homogenfeld $\vec{E}_2 = E_2 \vec{e}_z$ mit dem zugehörigen Potenzial $\varphi_2(r, \theta) = -E_2 r \cos(\theta) = -E_2 z$. Im Innenraum herrscht dann die konstante Feldstärke $\vec{E} = E \vec{e}_z = \vec{E}_2 + \vec{E}_1 = [E_2 - P/(3\varepsilon_0)] \vec{e}_z$, während im Außenraum \vec{E}_1 mit wachsendem r abklingt, \vec{E} sich dabei also dem überlagerten Homogenfeld \vec{E}_2 annähert. Jetzt kommt der wichtige Schritt: Die Werte der Polarisierung werden so eingestellt, dass sie einer vorgegebenen Materialgleichung $P = P(E)$ — sie kann durchaus nichtlinear sein — genügen. Wir erkennen: Wird eine **Kugel aus dielektrischem Material**, das der Gleichung $P = P(E)$ genügt, in ein homogenes elektrisches Feld $\vec{E}_2 = E_2 \vec{e}_z$ gebracht, so stellt sich im Kugellinneren wieder ein homogenes elektrisches Feld $\vec{E} = E \vec{e}_z$ ein, dessen Wert sich aus dem Zusammenhang

$$3\varepsilon_0(E_2 - E) = P(E) \quad (3.98)$$

bestimmen lässt. Dies gilt grundsätzlich auch für Ellipsoide, wobei allerdings die Richtung von \vec{E} im Inneren nur dann mit der Richtung von \vec{E}_2 übereinstimmt, wenn eine der Hauptachsen parallel zu \vec{E}_2 liegt. Gl. (3.98) ist zu modifizieren.

Eine lineare Materialgleichung $P(E) = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E$, rechts in (3.98) eingesetzt, liefert speziell

$$E = \frac{3}{\varepsilon_r + 2} E_2, \quad P = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} 3\varepsilon_0 E_2. \quad (3.99)$$

Aus (3.96) folgt dann nach Überlagerung des Potentials $\varphi_2(r, \theta) = -E_2 r \cos(\theta)$ die Verteilung

$$\begin{aligned}\varphi(r, \theta) &= -\frac{3E_2 a}{\varepsilon_r + 2} \frac{r}{a} \cos(\theta), \quad 0 \leq r < a, \\ \varphi(r, \theta) &= -E_2 a \left[\frac{r}{a} - \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] \cos(\theta), \quad r > a,\end{aligned}\tag{3.100}$$

skizziert in Abb. 3.8b. Nach einem formalen Grenzübergang $\varepsilon_r \rightarrow \infty$ ist darin übrigens auch der Fall einer **leitfähigen Kugel** im ursprünglich homogenen elektrischen Feld enthalten. Wenn wir schließlich in (3.100) ε_r durch $1/\varepsilon_r$ ersetzen, so erhalten wir den Fall eines **kugelförmigen Hohlraums** in einem dielektrischen Material der Permittivitätszahl ε_r , falls das ungestörte Feld (ohne Hohlraum) homogen ist. Die Feldstärke \vec{E} im Hohlraum ist wieder räumlich konstant und gegenüber \vec{E}_2 um den Faktor $3\varepsilon_r/(1 + 2\varepsilon_r)$ erhöht.

Ausgewählte Literatur

Eine gute Diskussion prototypischer elektrostatischer Felder bringt

R.M. Fano, L.J. Chu, R.B. Adler: *Electromagnetic Fields, Energy, and Forces*. Cambridge, Mass.: M.I.T. Press, 1968,

mit einem etwas anspruchsvolleren mathematischen Apparat auch

J.D. Jackson: *Classical Electrodynamics*, 2nd ed. New York: Wiley, 1975.

Für die Grundlagen und Techniken der konformen Abbildung ist beispielsweise

G.F. Carrier, M. Krook, C.E. Pearson: *Functions of a Complex Variable*. New York: McGraw-Hill, 1966

empfehlenswert. Zahlreiche Anwendungen finden Sie in

H. Prinz: *Hochspannungsfelder*. München: Oldenbourg, 1969.

3.3 Relaxation und Konvektion elektrischer Ladung

Wir werden in diesem Abschnitt den Ausgleich und die Ansammlung elektrischer Ladungen in schwach leitfähigen, dielektrischen Körpern makroskopisch untersuchen, ohne und mit Einschluss der Bewegung. Die wichtigsten Ergebnisse dabei sind nicht an quasi-elektrostatische Situationen gebunden.

Die Grundgleichungen

Wir setzen zunächst die Gleichungen des dominant elektrischen Feldsystems als anwendbar voraus, also (Tab. 2.2)

	γ/Sm^{-1}	ε	T_R/s	v_0/R_e in m/s für $L = 1\text{cm}$
Kupfer	$56 \cdot 10^6$	ε_0	(10^{-19})	(10^{17})
Germanium	2,1	$16 \varepsilon_0$	$6,7 \cdot 10^{-11}$	$(1,5 \cdot 10^8)$
Silizium	$4,3 \cdot 10^{-4}$	$12 \varepsilon_0$	$2,5 \cdot 10^{-7}$	$4,0 \cdot 10^4$
reines Wasser	10^{-4}	$80 \varepsilon_0$	$7 \cdot 10^{-6}$	$1,4 \cdot 10^3$
Galliumarsenid	10^{-6}	$11 \varepsilon_0$	10^{-4}	10^2
Transformatoröl	10^{-11}	$2,2 \varepsilon_0$	2	$5 \cdot 10^{-3}$
PTFE (Teflon)	10^{-15}	$2 \varepsilon_0$	$2 \cdot 10^4$	$6 \cdot 10^{-7}$

Tab.3.1: Werte bei 20°C der Konduktivität γ , der Permittivität ε , der Relaxationskonstanten T_R und der charakteristischen Geschwindigkeit v_0/R_e . Die Daten für Halbleiter (Ge, Si, GaAs) gelten für reine Eigenleitung.

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{E} &= \vec{0}, & \vec{n} \times [\vec{E}] &= \vec{0}, \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \varrho, & \vec{n} \cdot [\vec{D}] &= \sigma, \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{J} &= -\partial_t \varrho, & \vec{n} \cdot [\vec{J}] &= -\partial_t \sigma.
\end{aligned} \tag{3.101}$$

Die Sprungbedingung zur Kontinuitätsgleichung der elektrischen Ladung gilt in der angegebenen Form für raumfeste Sprungflächen und vernachlässigbare Flächenströme. Zur Beschreibung des Materialverhaltens werden wir in der Regel die Gleichungen

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{J} = \gamma \vec{E} + \varrho \vec{v} \tag{3.102}$$

heranziehen, mit ε und γ als bekannten Ortsfunktionen (isotropes, lineares, i.A. aber inhomogenes Materialverhalten). Die elektrische Stromdichte \vec{J} besteht aus dem konduktiven Anteil $\gamma \vec{E}$ (Konduktionsstromdichte) und dem konvektiven Anteil $\varrho \vec{v}$ (Konvektionsstromdichte), wobei das materielle Geschwindigkeitsfeld \vec{v} ebenfalls als bekannt vorausgesetzt wird.

Ist das Material zusätzlich auch homogen (ε **und** γ **konstant**), so lässt sich mit (3.102) und (3.101)₃ die Stromdichte aus der Kontinuitätsgleichung (3.101)₅ eliminieren. Wir erhalten dann die **Relaxationsgleichung**

$$\partial_t \varrho + \vec{\nabla} \cdot (\varrho \vec{v}) + \frac{\gamma}{\varepsilon} \varrho = 0 \tag{3.103}$$

zur Berechnung der Raumladungsverteilung, häufig der Ausgangspunkt für die Lösung eines (quasi-)elektrostatischen Feldproblems.

Es ist aufschlussreich, die Relaxationsgleichung unter Einführung charakteristischer Werte L für Längen, T für Dauern und v_0 für materielle Geschwindigkeiten sowie mit $\tilde{\nabla} = L \vec{\nabla}$, $\tilde{\partial}_t = T \partial_t$ und $\tilde{v} = \vec{v}/v_0$ in der bezogenen Form

$$\frac{T_R}{T} \tilde{\partial}_t \varrho + R_e \tilde{\nabla} \cdot (\varrho \tilde{v}) + \varrho = 0 \tag{3.104}$$

zu schreiben, wobei die **Relaxationszeitkonstante** T_R und die **elektrische**

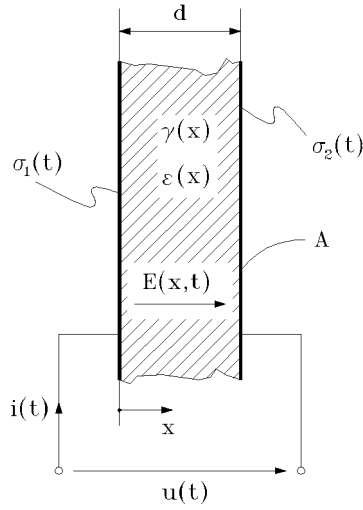


Abb.3.9: Eine Schicht aus linearem, inhomogenem Material ist beidseitig mit Metallelektroden belegt. Es wird das Entstehen von Raumladungen untersucht.

Reynoldszahl R_e ,

$$T_R = \frac{\varepsilon}{\gamma}, \quad R_e = \frac{\varepsilon v_0}{\gamma L}, \quad (3.105)$$

als Kenngrößen auftreten. Sehen wir vom zweiten Term in Gl. (3.104) zunächst ab, so folgt für große Relaxationszeitkonstanten $T_R \gg T$ näherungsweise $\partial_t \varrho \approx 0$: Die Ladungsverteilung ändert sich nicht im Zeitmaßstab T — ein typisches Verhalten sehr guter Isolatoren. Umgekehrt relaxiert für $T_R \ll T$ eine vorhandene Raumladung sofort, und es gilt $\varrho = 0$. So verhalten sich elektrische Leiter. Der zweite Term in Gl. (3.104) — er wird wesentlich für $R_e \gtrsim 1$ — erfasst den konvektiven Ladungstransport. Tab. 3.1 gibt die Kenngrößen für einige Stoffe an.

Die Relaxationsgleichung (3.103) gilt nur für konstante Leitfähigkeit und Permittivität. Sind γ und ε als Ortsfunktion bekannt, so folgt aus (3.101)_{3,5} und (3.102) eine Gleichung

$$\partial_t [\vec{\nabla} \cdot (\varepsilon \vec{E})] + \vec{\nabla} \cdot [\vec{v} \vec{\nabla} \cdot (\varepsilon \vec{E})] + \vec{\nabla} \cdot (\gamma \vec{E}) = 0 \quad (3.106)$$

für die elektrische Feldstärke, oder, wenn wir über die allgemeine Lösung $\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$ von (3.101) das elektrostatische Potenzial einführen,

$$\partial_t [\vec{\nabla} \cdot (\varepsilon \vec{\nabla} \varphi)] + \vec{\nabla} \cdot [\vec{v} \vec{\nabla} \cdot (\varepsilon \vec{\nabla} \varphi)] + \vec{\nabla} \cdot (\gamma \vec{\nabla} \varphi) = 0, \quad (3.107)$$

eine Gleichung für dieses Potenzial. Meist lässt sich die Behandlung spezieller Aufgaben jedoch übersichtlicher gestalten, wenn direkt von den Gln. (3.101) und (3.102) ausgegangen wird.

Ladungsrelaxation ohne Bewegung

Wir setzen zunächst ruhende Körper voraus. In Bereich mit homogenen Materialeigenschaften gilt dann die Relaxationsgleichungen (3.103) mit $\vec{v} = \vec{0}$, deren

allgemeine Lösung sich sofort angeben lässt,

$$T_R \partial_t \varrho + \varrho = 0 : \quad \varrho(\vec{r}, t) = \varrho(\vec{r}, 0) e^{-t/T_R} . \quad (3.108)$$

Eine anfänglich vorhandene Raumlading verschwindet exponentiell mit der Relaxationszeitkonstanten $T_R = \varepsilon/\gamma$. **Im Inneren eines linearen, homogenen Materials gibt es im stationären Zustand keine Überschussladungen.** Ladungsansammlungen können nur an Materialinhomogenitäten auftreten, etwa an Grenzflächen zwischen Körpern unterschiedlicher Eigenschaften. Da bei der Herleitung der Relaxationsgleichung die Bedingung $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$ nicht benötigt wird, ist dieses Ergebnis übrigens nicht an quasi-elektrostatische Felder gebunden.

Wesentlich ist dagegen die vorausgesetzte Homogenität des Materials, wie folgendes **Beispiel** zeigt: Zwischen zwei parallelen Plattenelektroden, Plattenfläche A , befindet sich ein inhomogenes, schwach elektrisch leitfähiges Dielektrikum (Abb. 3.9). Permittivität und Konduktivität sind als Ortsfunktion $\varepsilon(x)$ bzw. $\gamma(x)$ vorgeschrieben. Wir vernachlässigen Streuungen an den Rändern, setzen alle Felder als Funktionen von (x, t) voraus, und die gerichteten Größen als senkrecht zu den Plattenebenen. Eintragen der Materialgleichungen $D(x, t) = \varepsilon(x)E(x, t)$ und $J(x, t) = \gamma(x)E(x, t)$ in die Kontinuitätsgleichung $\partial_x J + \partial_t \varrho = 0$ liefert mit $\partial_x D = \varrho$ die Gleichung entsprechend (3.106) und ein erstes Integral,

$$\partial_t [\partial_x (\varepsilon E)] + \partial_x (\gamma E) = 0 : \quad \varepsilon(x) \partial_t E(x, t) + \gamma(x) E(x, t) = f(t) , \quad (3.109)$$

mit einer zu bestimmenden Zeitfunktion $f(t)$. Wir erkennen in (3.109)₂ die Aussage des Ampère–Maxwell–Satzes, können also $f(t)$ sofort mit $i(t)/A$ identifizieren. Oder wir verwenden die Sprungbedingungen (3.101)_{4,6} bei $x = 0$ (oder bei $x = d$),

$$\begin{aligned} \partial_t \sigma_1(t) + J(0, t) - i(t)/A &= 0 , \quad \sigma_1(t) = D(0, t) : \\ \varepsilon(0) \partial_t E(0, t) + \gamma(0) E(0, t) &= i(t)/A , \end{aligned} \quad (3.110)$$

was genau Gl. (3.109) bei $x = 0$ liefert. Daraus folgt durch Vergleich $f(t) = i(t)/A$. Weiters gilt

$$u(t) = \int_0^d E(x, t) dx , \quad \varrho(x, t) = \partial_x [\varepsilon(x) E(x, t)] . \quad (3.111)$$

Ist die Anordnung ursprünglich ungeladen, so werden sich nach Anlegen einer Spannung nicht nur Flächenladungen der Dichten σ_1 und σ_2 einstellen, sondern infolge der i.A. inhomogenen Materialeigenschaften auch Raumladungen der Dichte ϱ . Beispielsweise erhalten wir mit $u(t) = U = \text{konst.}$ im stationären Zustand $t \rightarrow \infty$ mit $i(t) \rightarrow I = \text{konst.}$ aus (3.109)₂ und (3.111)

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{I}{A \gamma(x)} , \quad U = \frac{I}{A} \int_0^d \frac{dx}{\gamma(x)} , \\ \varrho(x) &= \frac{I}{A} T'_R(x) , \quad T_R(x) = \frac{\varepsilon(x)}{\gamma(x)} , \end{aligned} \quad (3.112)$$

und im Speziellen für $\varepsilon(x) = \varepsilon = \text{konst.}$, $\gamma(x) = \gamma_0(1 + \alpha x/d)$,

$$\begin{aligned}
E(x) &= \frac{U}{d(1 + \alpha x/d)} \cdot \frac{\alpha}{\ln(1 + \alpha)} , \\
\varrho(x) &= -\frac{\varepsilon U}{d^2(1 + \alpha x/d)^2} \cdot \frac{\alpha^2}{\ln(1 + \alpha)} .
\end{aligned} \tag{3.113}$$

Feldstärke und Ladungsdichte hängen nicht von γ_0 ab. Auch bei guten Isolatoren kann sich deshalb nach hinreichend langer Zeit durch Materialinhomogenitäten — etwa zufolge eines Temperaturgradienten — eine erhebliche Raumladung einstellen, die insbesondere bei einer plötzlichen Spannungsumkehr zu erhöhten dielektrischen Beanspruchungen führt. Ist $i(t)$ ein sinusförmiger Wechselstrom der Kreisfrequenz ω mit der komplexen Amplitude \hat{i} , so folgt aus den Gln. (3.109)₂ und (3.111)₂ für die komplexe Amplitude $\hat{\varrho}(x)$ der Raumladungsdichte

$$\hat{\varrho}(x) = \frac{\hat{i}}{A} \left[\frac{T_R(x)}{1 + j\omega T_R(x)} \right]' = \frac{\hat{i}}{A} \frac{T_R'(x)}{[1 + j\omega T_R(x)]^2} , \tag{3.114}$$

wobei $T_R(x) = \varepsilon(x)/\gamma(x)$, wie vorher, die ortsabhängige Relaxationszeitkonstante bedeutet. Mit wachsender Frequenz wird die Raumladungsdichte kleiner, weil während Periodendauern klein gegen T_R keine merkbare Ladungsansammlung möglich ist.

Relaxation und Konvektion

Für ein mit dem Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{r}, t)$ in Bewegung befindliches Material gilt bei konstanten Werten der Permittivität ε und der Konduktivität γ die Relaxationsgleichung (3.103),

$$T_R \left[\partial_t \varrho + \vec{\nabla} \cdot (\varrho \vec{v}) \right] + \varrho = 0 , \tag{3.115}$$

mit der Relaxationszeitkonstanten $T_R = \varepsilon/\gamma$. Die Kombination in der eckigen Klammer ist die mitgeschleppte Zeitableitung für skalare Dichten, in unserem Fall für ϱ . Sie tritt, wie sich durch Anwendung des Satzes von Gauß zeigen lässt, dann auf, wenn die gewöhnliche Zeitableitung unter das Integral über ein materielles, d.h. durch die materielle Bewegung mitgeführtes Volumen gezogen wird. Bedeutet \mathcal{V} ein solches Volumen, so ist Gl. (3.115) die lokale Form von

$$T_R \dot{Q}(\mathcal{V}) + Q(\mathcal{V}) = 0 , \quad Q(\mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}} \varrho \, dV . \tag{3.116}$$

Die Lösung von Gl. (3.116)₁ liefert wieder einen zeitlich exponentiell abklingenden Verlauf, woraus wir schließen: In einem homogenen Material strebt die elektrische Ladung jedes materiellen Volumenelements, das sich auch bewegen und verformen kann, gegen Null, sofern keine räumlich verteilte Ladungsinjektion erfolgt. Soll elektrische Raumladung in einem Medium mit der Geschwindigkeit v_0 über eine Strecke L transportiert werden, so darf sie im Zeitintervall L/v_0 nicht wesentlich relaxieren, d.h. es muss $T_R > L/v_0$, also $R_e = T_R v_0 / L > 1$ sein. Dies erklärt die Bedeutung der elektrischen Reynoldszahl R_e .

Ein **Beispiel** soll die stationäre Konvektion elektrischer Ladung verdeutlichen: Ein langer, elektrisch polarisierbarer und schwach elektrisch leitfähiger, kreiszylindrischer Körper aus linearem, homogenem, isotropem Material liegt in einem

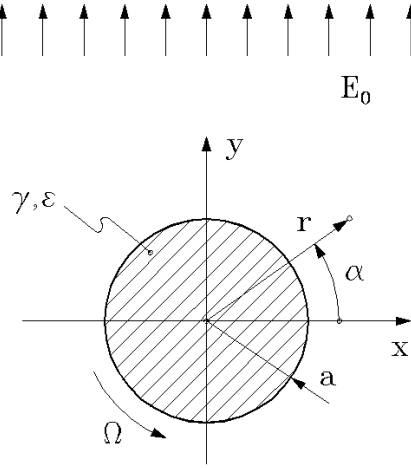


Abb. 3.10: Ein kreiszylindrischer Körper aus schwach elektrisch leitfähigem Material rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit Ω um seine Achse in einem asymptotisch homogenen elektrischen Feld. Um Verwechslungen mit der Ladungsdichte ϱ zu vermeiden, wird die Radialkoordinate mit r bezeichnet.

transversalen, ursprünglich homogenen elektrischen Feld (Abb. 3.10) und dreht sich mit der konstanten Geschwindigkeit Ω um seine raumfeste Achse. Wir wollen die Verteilungen der Ladung und des Stroms und die elektrische Feldstärke im stationären Zustand bestimmen.

Im stationären Zustand ist jedenfalls $\varrho \equiv 0$, es können höchstens Flächenladungen an $r = a$ auftreten. Damit gibt es an der Mantelfläche zwar keine konduktiven, i.A. aber konvektive Flächenströme. Wir werden die zugehörige Randbedingung, ausgehend von der Gleichung

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} \sigma dA + \int_{\mathcal{A}} \vec{n} \cdot [\vec{J}'] dA = 0 \quad (3.117)$$

für materielle Flächen \mathcal{A} , direkt formulieren: Die Koordinaten eines materiellen Punktes an der Mantelfläche sind $\{r = a, \alpha = \alpha_0 + \Omega t, z\}$; ein materielles Flächenelement ist $dA = a d\alpha_0 dz$, und deshalb gilt mit $\sigma(\alpha, t) = \sigma(\alpha_0 + \Omega t, t)$, $\vec{n} = \vec{e}_r$ und $\vec{J}' = \vec{J}$ (wegen $\varrho = 0$)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} \sigma dA &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} \sigma(\alpha_0 + \Omega t, t) a d\alpha_0 dz = \\ &= \int_{\mathcal{A}} (\partial_t \sigma + \Omega \partial_\alpha \sigma) dA = \int_{\mathcal{A}} J_r dA. \end{aligned} \quad (3.118)$$

Im stationären Fall ($\partial_t \sigma = 0$) haben wir damit die Randbedingung

$$r = a : \quad J_r = \Omega \partial_\alpha \sigma \quad (3.119)$$

zu erfüllen: Der auf die Mantelfläche zufließende Konduktionsstrom wird als Konvektionsstrom abtransportiert. Ansonsten gelten die Grundgleichungen (3.101), wobei die Sprungbedingung zur Kontinuitätsgleichung durch (3.119) zu ersetzen ist, zusammen mit $\varrho = 0$ und den Materialgleichungen $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, $\vec{J} = \gamma \vec{E}$ für $r < a$ und $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$, $\vec{J} = \vec{0}$ für $r > a$. Nach Einführung des elektrostatischen Potentials über $\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$ formulieren wir das Problem:

$$\begin{aligned}
r < a, r > a : \quad & r \partial_r (r \partial_r \varphi) + \partial_\alpha^2 \varphi = 0, \\
& \varphi(r, \alpha) \text{ ist } 2\pi\text{-periodisch in } \alpha, \\
& E_r = -\partial_r \varphi, \quad E_\alpha = -\frac{1}{r} \partial_\alpha \varphi; \\
r = 0 : \quad & \varphi \text{ ist beschränkt;} \\
r \rightarrow \infty : \quad & \varphi \rightarrow -E_0 r \sin(\alpha) \quad (\text{Homogenfeld } E_0 \vec{e}_y); \\
r = a : \quad & J_r = \Omega \partial_\alpha \sigma, \quad J_r = -\gamma \partial_r \varphi^{(1)}, \\
& \sigma = -\varepsilon_0 \partial_r \varphi^{(2)} + \varepsilon \partial_r \varphi^{(1)}, \quad \varphi^{(2)} = \varphi^{(1)}.
\end{aligned} \tag{3.120}$$

Lösungen der Laplace-Gleichung in Kreiszylinderkoordinaten lassen sich wie besprochen systematisch konstruieren. Mit etwas Erfahrung gehen wir direkt von den Ansätzen

$$\begin{aligned}
r < a : \quad & \varphi = -E_0 r [C_1 \cos(\alpha) + S_1 \sin(\alpha)], \\
r > a : \quad & \varphi = -E_0 a \left\{ \frac{r}{a} \sin(\alpha) + \frac{a}{r} [C_2 \cos(\alpha) + S_2 \sin(\alpha)] \right\}
\end{aligned} \tag{3.121}$$

aus. Sie erfüllen die Differenzialgleichung, die Periodizitätsbedingung und die Bedingungen für $r = 0$ und $r \rightarrow \infty$. Die Konstanten C_1 , S_1 , C_2 und S_2 folgen aus den Bedingungen bei $r = a$, gültig für jedes α , zu

$$\begin{aligned}
C_1 = C_2 = \frac{2\beta R_e}{1 + (1 + \beta)^2 R_e^2}, \quad \beta = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon_r}, \quad R_e = \frac{\varepsilon}{\gamma} \Omega, \\
S_1 = 1 + S_2 = (1 + \beta) R_e C_1.
\end{aligned} \tag{3.122}$$

Die Lösung (3.121)₁ für das Zylinderinnere stellt ein homogenes elektrisches Feld der Stärke E_1 dar,

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= E_1 [\sin(\delta) \vec{e}_x + \cos(\delta) \vec{e}_y], \\
E_1 &= \frac{2\beta R_e E_0}{\sqrt{1 + (1 + \beta)^2 R_e^2}}, \quad \tan(\delta) = \frac{1}{(1 + \beta) R_e},
\end{aligned} \tag{3.123}$$

das gegenüber dem ursprünglichen Homogenfeld $E_0 \vec{e}_y$ um den Winkel δ entgegen der Drehrichtung des Zylinders verdreht ist. Für $R_e = 0$ ($\Omega = 0$) verschwindet das innere Feld (Abschirmung durch Flächenladungen), während das äußere Feld die Form

$$E_r = E_0 (1 + a^2/r^2) \sin(\alpha), \quad E_\alpha = E_0 (1 - a^2/r^2) \cos(\alpha) \tag{3.124}$$

für einen stromfreien, leitenden Kreiszylinder im transversalen elektrischen Feld annimmt. Dagegen entspricht für $R_e \rightarrow \infty$ ($\Omega \rightarrow \infty$) die Feldverteilung der eines ideal isolierenden Kreiszylinders im Transversalfeld,

$$\begin{aligned}
r < a : \quad & \vec{E} = \frac{2}{1 + \varepsilon_r} E_0 \vec{e}_y, \\
r > a : \quad & E_r = E_0 \left(1 - \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1} \frac{a^2}{r^2} \right) \sin(\alpha), \\
& E_\alpha = E_0 \left(1 + \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1} \frac{a^2}{r^2} \right) \cos(\alpha).
\end{aligned} \tag{3.125}$$

Insbesondere bleibt in diesem Grenzfall für $\varepsilon_r = 1$ das ursprüngliche Homogenfeld erhalten.

Abschließend berechnen wir noch das längenbezogene, resultierende Drehmoment $\vec{T}' = T' \vec{e}_z$ aus Gl. (2.129) (Indizes weggelassen), das vom elektrischen Feld auf den rotierenden Zylinder ausgeübt wird. Einsetzen der äußeren Randfeldstärke

$$\begin{aligned} E_r &= E_0 [(1 - S_2) \sin(\alpha) - C_2 \cos(\alpha)] , \\ E_\alpha &= E_0 [(1 + S_2) \cos(\alpha) - C_2 \sin(\alpha)] \end{aligned} \quad (3.126)$$

zusammen mit $\vec{r} = a \vec{e}_r$ in

$$\begin{aligned} \vec{T}' &= \int_0^{2\pi} \varepsilon_0 a \vec{e}_r \times \left[E_r (E_r \vec{e}_r + E_\alpha \vec{e}_\alpha) - \frac{1}{2} (E_r^2 + E_\alpha^2) \vec{e}_r \right] a d\alpha = \\ &= \int_0^{2\pi} \varepsilon_0 a^2 E_r E_\alpha \vec{e}_z d\alpha \end{aligned} \quad (3.127)$$

liefert nach Integration

$$\vec{T}' = -2\pi \varepsilon_0 E_0^2 a^2 C_2 \vec{e}_z , \quad (3.128)$$

mit C_2 aus Gl. (3.122)₁. Das Drehmoment, entgegen $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$ gerichtet, wirkt bremsend. Sein Betrag verschwindet für $R_e = 0$ ($\Omega = 0$) und für $R_e \rightarrow \infty$ ($\Omega \rightarrow \infty$) und besitzt ein Maximum bei $(1 + \beta^2) R_e^2 = 1$, d.h. $|\Omega| = \gamma / (\varepsilon + \varepsilon_0)$. Wir können uns übrigens auch vorstellen, dass das eingeprägte elektrische Feld \vec{E}_0 rotiert. Das berechnete Drehmoment sucht dann den Zylinder mit dem Feld zu drehen, wobei Ω die relative Winkelgeschwindigkeit bezeichnet.

Ausgewählte Literatur

Ausführliches Material zur Relaxation und Konvektion elektrischer Ladung vom makroskopischen Standpunkt und eine Reihe von Beispielen dazu enthält

H.H. Woodson, J.R. Melcher: *Electromechanical Dynamics*, Part II.
New York: Wiley, 1968.

3.4 Stationäre Magnetfelder

Die Behandlung magnetischer Felder, die an zeitunabhängige Stromverteilungen gekoppelt sind, weist eine Reihe formaler Ähnlichkeiten mit den elektrostatischen Methoden auf. Der physikalische Charakter der Felder kann jedoch ganz unterschiedlich sein. So hat etwa im Gegensatz zur elektrischen die magnetische Feldstärke im Allgemeinen Wirbel, während die magnetische Flussdichte stets quellenfrei ist: Es gibt keine wahren magnetischen Ladungen.

Ist im sonst vollständig leeren Raum ein System von stationären Linienströmen gegeben, so lässt sich die magnetische Flussdichte an jedem Ort nach dem Überlagerungsprinzip durch Summation der Beiträge aller Linienstromelemente berechnen (Biot–Savart–Formel). Bekanntlich lässt sich dieses Verfahren auf flächenhaft und räumlich verteilte stationäre Ströme erweitern. Auch die makroskopischen Felder in Körpern sind im Prinzip so berechenbar, vorausgesetzt, es ist tatsächlich die Stromverteilung überall im Raum bekannt, neben den wahren Strömen also auch

die fiktiven Ströme in magnetisierten Körpern. Meistens liegt diese vollständige Information nicht vor, sondern es sind nur die wahren Ströme bekannt, zusätzlich aber Daten über die Feldgrößen an Bereichsrändern und die Materialgleichungen.

Allgemeine Eigenschaften des stationären magnetischen Feldes und Stromverteilungen

Verteilungen des magnetischen Flusses Φ , der magnetischen Spannung V und des elektrischen Stroms I genügen im zeitunabhängigen Fall den **globalen Beziehungen** (2.57),

$$\Phi(\partial\mathcal{V}) = 0, \quad V(\partial\mathcal{A}) = I(\mathcal{A}), \quad (3.129)$$

oder, gleichwertig, den **lokalen Formen** (2.58)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, & \vec{n} \cdot [\vec{B}] &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{J}, & \vec{n} \times [\vec{H}] &= \vec{K}. \end{aligned} \quad (3.130)$$

Daneben besteht die **allgemeine Verknüpfungsbeziehung** (2.60),

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}. \quad (3.131)$$

Wir setzen voraus, dass die Größen \vec{J} , \vec{K} und \vec{M} als zeitlich konstante Felder vorgegeben sind, oder auf bekannte Weise von \vec{B} bzw. \vec{H} abhängen. Die **Stromverteilung** muss zusätzlich **quellenfrei** sein, d.h. (s. (2.59))

$$I(\partial\mathcal{V}) = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0, \quad \vec{n} \cdot [\vec{J}] = 0. \quad (3.132)$$

Die Quellenfreiheit des magnetischen Flusses lässt sich als universelle Eigenschaft noch etwas allgemeiner formulieren: Gl. (3.129)₁ gilt nicht nur für den vollständigen Rand $\partial\mathcal{V}$ eines Bereiches \mathcal{V} , sondern für jede geschlossene (d.h. randlose) Fläche (jede Fläche \mathcal{A} mit $\partial\mathcal{A} = 0$).

Durch die Einführung eines weiteren Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r})$, des **magnetischen Vektorpotenzials**, sind die Gln. (3.129)₁ und (3.130)_{1,2} ganz allgemein formal zu lösen: Für jede Fläche \mathcal{A} mit dem Rand $\partial\mathcal{A}$ gelte

$$\Phi(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} \vec{n} \cdot \vec{B} \, dA = \int_{\partial\mathcal{A}} \vec{s} \cdot \vec{A} \, ds, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (3.133)$$

Für $\partial\mathcal{A} = 0$ verschwindet das zweite Integral, Gl. (3.129)₁ ist also immer erfüllt. Gl. (3.130)₁ besteht mit Gl. (3.133)₂ wegen der Identität (1.42), $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$. Der Zusammenhang zwischen den beiden Aussagen (3.133) wird durch den Satz von Stokes (1.46) hergestellt.

Ausgehend von einer gegebenen Verteilung des magnetischen Flusses wird durch die Gln. (3.133) nur über die Wirbelstärke bzw. die Rotation des magnetischen Vektorpotenzials verfügt, d.h. zwei Felder \vec{A} und \vec{A}' mit gleicher Rotation liefern die gleiche Flussdichte $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Ihre Differenz ist wirbelfrei, $\vec{\nabla} \times (\vec{A}' - \vec{A}) = \vec{0}$, und lässt sich daher immer als Gradient eines Skalarfeldes C

darstellen, $\vec{A}' - \vec{A} = \vec{\nabla}C$. Ist also \vec{A} ein zu \vec{B} gehörendes magnetisches Vektorpotential, so führt auch

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}C \quad (3.134)$$

mit einem beliebigen (differenzierbaren) Skalarfeld auf die gleiche Flussdichte \vec{B} . Wir nennen den Übergang von einem Vektorpotential \vec{A} zu einem anderen Vektorpotential \vec{A}' gemäß Gl. (3.134) eine **Eichtransformation** (Die Addition einer Konstanten zum Skalarfeld des elektrostatischen Potentials ist ebenfalls eine Eichtransformation). In der Regel ist es günstig, die durch die Eichtransformation gebotene Freiheit zur weiteren Festlegung des Vektorpotentials zu benutzen. Da es hier nur auf die Rotation von \vec{A} ankommt, können wir im Speziellen die Divergenz von \vec{A} passend wählen, beispielsweise in Form der **Maxwell–Eichung**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0, \quad (3.135)$$

auch Coulomb–Eichung genannt. Später, wenn wir elektromagnetische Wellen betrachten, wird sich eine andere Eichung als vorteilhafter erweisen. Eindeutig ist das Vektorpotential allerdings auch durch die Maxwell–Eichung nicht, weil immer noch eine Eichtransformation (3.134) mit einem harmonischen Skalarfeld C (d.h. $\nabla^2 C = 0$) möglich ist. Zusätzliche Festlegungen an den Bereichsgrenzen oder im unendlich fernen Punkt schaffen Eindeutigkeit.

Eine ähnliche Argumentation lässt sich übrigens auch auf stationäre Stromverteilungen anwenden: Um die Bedingungen (3.132) der Quellenfreiheit allgemein zu erfüllen, wird ein vektoriell „Strompotential“, die magnetische Feldstärke \vec{H} , derart eingeführt, dass $\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{H}$ gilt. Die Eichung erfolgt dann mit der Verknüpfungsbeziehung (3.131) bzw. über Materialgleichungen.

In speziellen Fällen gibt es noch eine weitere Möglichkeit der Darstellung des Magnetfeldes durch ein Potential. Wenn nämlich die magnetische Spannung an jeder geschlossenen Kurve im betrachteten Bereich verschwindet, der ganze **Bereich also stromfrei ist**, können wir analog zur Elektrostatik auch ein **magnetisches Skalarpotential** φ_M benutzen: Für jede Kurve \mathcal{C} mit dem Anfangspunkt \vec{r}_1 und dem Endpunkt \vec{r}_2 gilt dann

$$V(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} \vec{s} \cdot \vec{H} \, ds = \varphi_M(\vec{r}_1) - \varphi_M(\vec{r}_2), \quad \vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi_M, \quad (3.136)$$

womit die Bedingungen $V(\partial\mathcal{A}) = 0$ bzw. $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{0}$ für stromfreie Bereiche allgemein erfüllt sind. Da die magnetische Spannung in einem **ideal magnetisierbaren Körper** entlang jeder Kurve verschwindet, stellen solche Körper insbesondere einen **Bereich konstanten magnetischen Skalarpotentials** dar. Sie sind im Inneren notwendig stromfrei.

Laplace– und Poisson–Gleichung

Nehmen wir zunächst an, der Feldraum ist ganz mit einem homogenen, linearen, isotropen Medium der Permeabilität μ ausgefüllt (insbesondere im leeren Raum, $\mu = \mu_0$). Aus

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}, \quad \vec{H} = \vec{B}/\mu, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (3.137)$$

folgt zunächst mit der Identität 13 aus Tab. 1.2

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu \vec{J}. \quad (3.138)$$

Die Maxwell-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ führt dann auf die **Poisson-Gleichung für das magnetische Vektorpotenzial**,

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}, \quad (3.139)$$

und in stromfreien Bereichen auf die **Laplace-Gleichung**

$$\nabla^2 \vec{A} = \vec{0}. \quad (3.140)$$

Bei Verwendung kartesischer Koordinaten erhalten wir daraus für jede der Projektionen A_x, A_y, A_z eine gewöhnliche Poisson- bzw. Laplace-Gleichung. (Aber **Vorsicht**: Die Projektionen A_ϱ, A_α, A_z in Kreiszylinderkoordinaten oder A_r, A_θ, A_α in Kugelkoordinaten genügen i.A. für sich nicht einer gewöhnlichen Poisson- bzw. Laplace-Gleichung für Skalarfelder, weil die Basisvektoren ortsabhängig sind). Wie in der Elektrostatik können wir deshalb auch Grundlösungen des Laplace-Operators angeben, und insbesondere eine partikuläre Lösung von Gl. (3.139) analog zu Gl. (3.14) über das Integral

$$\vec{A}_p(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{J}' dV'}{R} \quad (3.141)$$

berechnen, wobei wir den Ortsvektor des Aufpunktes in Bezug auf einen festen Ursprung mit \vec{r} bezeichnen, den des laufenden Punktes (Integrationspunktes) mit \vec{r}' . Ihren gerichteten Abstand kürzen wir wie früher (s. Gl. (3.16)) durch $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ ab, dessen Betrag durch $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$. Die Integration ist über den ganzen Trägerbereich von \vec{J} zu erstrecken. Um die Randbedingungen erfüllen zu können, wird i.A. noch eine Lösung $\vec{A}_h(\vec{r})$ der Laplace-Gleichung (3.140) zu überlagern sein. Wenn jedoch der Feldbereich den ganzen Raum darstellt, ein einheitlicher Permeabilitätswert μ besteht und \vec{J} die Stromverteilung im ganzen Raum erfasst, so gibt das Integral (3.141) bereits die vollständige Lösung an.

Beim Berechnen der zum Vektorpotenzial (3.141) gehörenden Flussdichte ist zu beachten, dass die räumliche Ableitung in Bezug auf die Feldpunkte (Aufpunkte) \vec{r} bei festen Quellpunkten \vec{r}' zu nehmen ist,

$$\begin{aligned} \vec{B}_p(\vec{r}) &= \vec{\nabla} \times \vec{A}_p(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \vec{\nabla} \times \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{J}' dV'}{R} = \\ &= -\frac{\mu}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \vec{J}' \times \left(\vec{\nabla} \frac{1}{R} \right) dV'. \end{aligned} \quad (3.142)$$

Wegen $\vec{\nabla} R^{-1} = -\vec{e}_R/R^2$ mit $\vec{e}_R = \vec{R}/R$ erhalten wir

$$\vec{B}_p = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{J}' \times \vec{e}_R}{R^2} dV', \quad (3.143)$$

die bekannte Formel zur Berechnung der magnetischen Flussdichte zu gegebenen Stromverteilungen im ganzen Raum mit $\mu = \text{konst.}$ Durch Spezialisierung auf Linienströme, $\vec{J} dV \rightarrow I \vec{s} ds$, folgt daraus die Biot–Savart–Formel

$$\vec{B}_p = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{\vec{s}' \times \vec{e}_R}{R^2} ds' \quad (3.144)$$

für die magnetische Flussdichte zu einem Linienstrom der Stärke I entlang einer Kurve \mathcal{C} in Richtung des Tangenten–Einsvektors \vec{s} .

Ist der betrachtete Feldraum, ausgefüllt mit einem Medium der konstanten Permeabilität μ , **einfach zusammenhängend** und **stromfrei**, so können wir auch ein **magnetisches Skalarpotenzial** φ_M einführen. Aus

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{H} = -\vec{\nabla} \varphi_M \quad (3.145)$$

folgt dann die Laplace–Gleichung

$$\nabla^2 \varphi_M = 0. \quad (3.146)$$

Die bisherigen Ergebnisse lassen sich mit den im Abschnitt 3.1 besprochenen Darstellungssätzen der Potenzialtheorie in einen allgemeineren Zusammenhang bringen. So begründet beispielsweise der Fundamentalsatz (3.18) unter den genannten Voraussetzungen die Einführung geeigneter Skalar- und Vektorpotenziale. In stromfreien Gebieten konstanter skalarer Permeabilität (insbesondere im leeren Raum) sind \vec{B} und \vec{H} überdies harmonische Vektorfelder und damit gemäß der Cauchy–Integralformel (3.24) und (3.25) allein aus den Randwerten berechenbar. Bemerkenswert sind in diesem Zusammenhang die Aussagen über die Mittelwerte harmonischer Felder, insbesondere (3.29), und über deren Maxima und Minima. Auch Dirichlet–, Neumann– und gemischte Randwertprobleme lassen sich sinngemäß formulieren.

Ausgewählte Literatur

E. Martensen: *Potenzialtheorie*, Stuttgart: Teubner, 1968

ist gut lesbar und enthält vollständige Formulierungen der Randwertprobleme für Vektorfelder. Empfehlenswert ist auch hier

K. Simonyi: *Theoretische Elektrotechnik*, 4. Aufl. Berlin: VEB Verlag, 1971.

3.5 Spezielle stationäre Magnetfelder

In diesem Abschnitt werden wir magnetische Felder untersuchen, die durch spezielle Symmetrien ausgezeichnet sind. Liegen beispielsweise in Bezug auf ein kartesisches Koordinatensystem die magnetische Flussdichte und die magnetische Feldstärke in jedem Punkt parallel zur xy –Ebene und liegt überdies Translationsinvarianz entlang der z –Achse vor, so sprechen wir von einem ebenen Magnetfeld. Invarianz gegenüber Drehungen um eine Achse kennzeichnet rotationssymmetrische Felder.

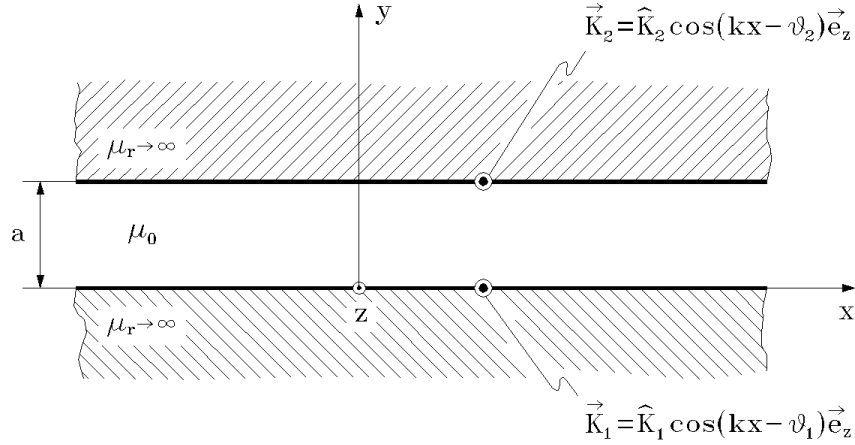


Abb. 3.11: Die Bereiche $y < 0$ und $y > a$ sind ideal magnetisierbar und tragen an ihrer Oberfläche z -gerichtete, räumlich sinusförmig verteilte Flächenströme. Die Anordnung ist in x - und z -Richtung beidseitig unendlich ausgedehnt. Gesucht ist das magnetische Feld im Spalt $0 < y < a$.

Ebene Magnetfelder

Zu magnetischen Feldern mit der Flussdichte \vec{B} stets parallel zu einer festen Ebene — wir wählen dafür die xy -Ebene eines kartesischen Koordinatensystems — und mit Invarianz gegenüber Verschiebungen normal zu dieser Ebene, d.h. entlang der z -Achse, gehören **z -gerichtete magnetische Vektorpotenziale** $\vec{A} = A\vec{e}_z$ und **z -gerichtete Stromverteilungen**, unabhängig von der z -Koordinate. Mit Bezug auf Abb. 3.6 erhalten wir dann aus den Gln. (3.133)

$$\Phi(\mathcal{A}) = \ell [A(\vec{r}_2) - A(\vec{r}_1)] , \quad \vec{B} = -\vec{e}_z \times \vec{\nabla} A , \quad (3.147)$$

d.h. der längenbezogene magnetische Fluss durch eine Zylinderfläche \mathcal{A} , deren Spur \mathcal{C} in der xy -Ebene den Anfangspunkt \vec{r}_1 und den Endpunkt \vec{r}_2 besitzt, lässt sich direkt als Differenz der Werte A des Vektorpotenzials angeben und ist unabhängig vom Verlauf von \mathcal{C} . Die Vektorlinien von \vec{B} in der xy -Ebene, die **Flusslinien**, sind demnach die **Linien $A=\text{konst.}$**

In **kartesischen Koordinaten** reduzieren sich unsere lokalen Grundgleichungen (3.130)_{1,3} und (3.147)₂ wegen der Unabhängigkeit von der z -Koordinate zusammen mit $\vec{J} = J\vec{e}_z$ auf

$$\begin{aligned} \partial_x B_x + \partial_y B_y &= 0 , & \partial_x H_y - \partial_y H_x &= J , \\ B_x &= \partial_y A , & B_y &= -\partial_x A , \end{aligned} \quad (3.148)$$

wobei die beiden letzten Gleichungen offensichtlich die erste Gleichung lösen. Gilt nun im betrachteten Feldbereich die Materialgleichung $\vec{B} = \mu\vec{H}$ mit $\mu = \text{konst.}$, so genügt die Funktion A der zweidimensionalen Poisson-Gleichung

$$\partial_x^2 A + \partial_y^2 A = -\mu J , \quad (3.149)$$

in stromfreien Bereichen der zweidimensionalen Laplace-Gleichung. Die Konstruktion von Lösungen kann daher ganz ähnlich wie bei elektrostatischen Feldern erfolgen.

Als **Beispiel** untersuchen wir das magnetische Feld im ebenen Spalt zwischen zwei hochpermeablen Körpern, deren Oberflächen mit räumlich sinusförmig verteilten, gegeneinander verschobenen Flächenströmen belegt sind (Abb. 3.11). Es handelt sich dabei um das Grundmodell von Luftspaltfeldern, wie sie in vielen elektromechanischen Wandlern verwendet werden. Die Flächenströme repräsentieren in der Regel in Nuten eingebettete Wicklungen. Die Länge $\tau_p = \pi/k$ heißt Polteilung.

Der Spaltbereich ist stromfrei, es gilt daher mit Gl. (3.149) die zweidimensionale Laplace-Gleichung für A im Gebiet $0 < y < a$. Weiters verschwindet die magnetische Feldstärke in den ideal magnetisierbaren Teilen. Dies liefert über $\vec{n} \times [\vec{H}] = \vec{K}$ und Gl. (3.148)₃ die Randbedingungen bei $y = 0+$ und $y = a-$. Wir haben also das **Randwertproblem**

$$\begin{aligned} 0 < y < a &: \quad \partial_x^2 A + \partial_y^2 A = 0, \\ y = 0+ &: \quad \partial_y A = -\mu_0 \hat{K}_1 \cos(kx - \vartheta_1), \\ y = a- &: \quad \partial_y A = \mu_0 \hat{K}_2 \cos(kx - \vartheta_2) \end{aligned} \quad (3.150)$$

zu lösen.

Die Randbedingungen legen einen Ansatz der Form

$$A(x, y) = \operatorname{Re} [\underline{A}(y) e^{j k x}] \quad (3.151)$$

nahe mit einer komplexwertigen Funktion $\underline{A}(y)$. Unser Problem lässt sich dann als

$$\underline{A}''(y) - k^2 \underline{A}(y) = 0, \quad \underline{A}'(0) = -\mu_0 \hat{K}_1, \quad \underline{A}'(a) = \mu_0 \hat{K}_2 \quad (3.152)$$

mit

$$\hat{K}_1 = \hat{K}_1 e^{-j \vartheta_1}, \quad \hat{K}_2 = \hat{K}_2 e^{-j \vartheta_2} \quad (3.153)$$

formulieren, wobei die komplexen Konstanten \underline{C}_1 und \underline{C}_2 der allgemeinen Lösung

$$\underline{A}(y) = \underline{C}_1 e^{-k y} + \underline{C}_2 e^{k y} \quad (3.154)$$

von Gl. (3.152)₁ aus den Bedingungen (3.152)_{2,3} zu bestimmen sind. Wir erhalten

$$\underline{A}(y) = \frac{\mu_0}{k \sinh(ka)} \left\{ \hat{K}_1 \cosh[k(a-y)] + \hat{K}_2 \cosh(ky) \right\}, \quad (3.155)$$

und mit (3.153) nach Eintragen in den Ansatz (3.151) schließlich

$$\begin{aligned} A(x, y) = & \frac{\mu_0}{k} \left\{ \hat{K}_1 \frac{\cosh[k(a-y)]}{\sinh(ka)} \cos(kx - \vartheta_1) + \right. \\ & \left. + \hat{K}_2 \frac{\cosh(ky)}{\sinh(ka)} \cos(kx - \vartheta_2) \right\}. \end{aligned} \quad (3.156)$$

Daraus lässt sich über die Gln. (3.148)_{3,4} die magnetische Flussdichte in jedem Punkt des Feldraums $0 < y < a$ berechnen. Längenbezogene magnetische Flüsse sind wegen Gl. (3.147)₁ direkt als Differenzen der Werte von A angebbar; graphische Darstellungen in Form von Vektorlinien der magnetischen Flussdichte entsprechen den Linienscharen $A = \text{konst.}$ Auswertungen dieser Art sehen Sie in Abb. 3.12.

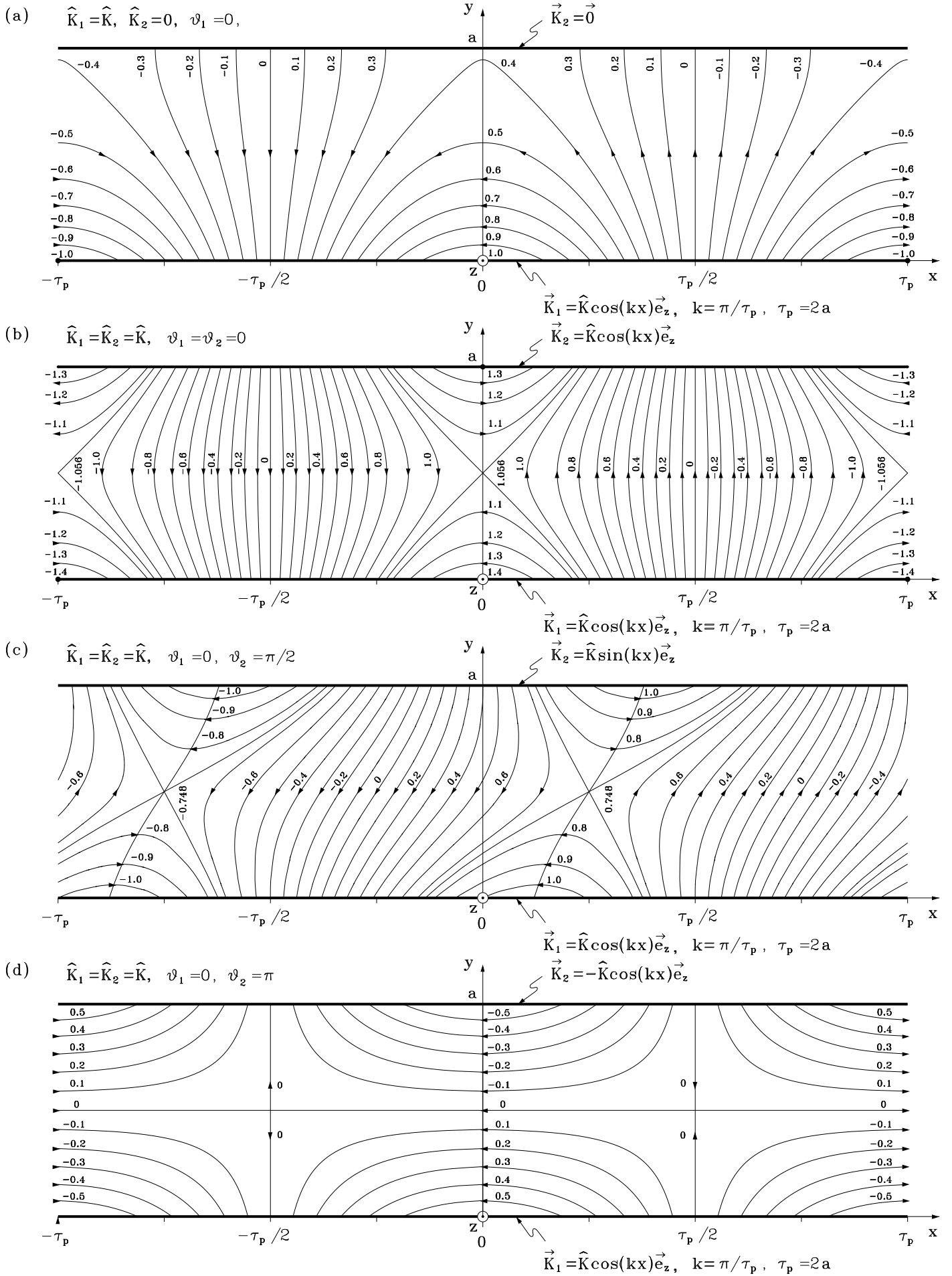


Abb.3.12: Magnetische Felder gemäß Gl. (3.156) im Luftspalt der Anordnung aus Abb. 3.11 für unterschiedliche Flächenstromverteilungen. Die Vektorlinien sind mit den bezogenen Werten $A(x,y)/A_0$, $A_0 = \mu_0 \hat{K} / [k \tanh(ka)]$ beschriftet.

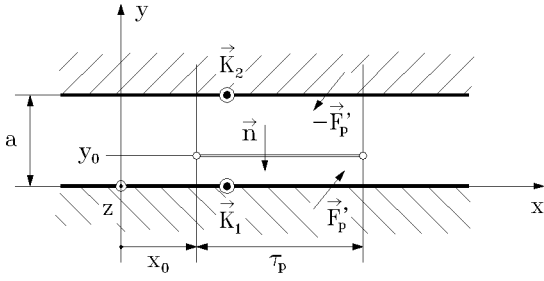


Abb. 3.13: Zur Berechnung der längenbezogenen Kräfte in der Anordnung aus Abb. 3.11

Bei den Anwendungen von ebenen Spaltfeldern in elektromechanischen Wandlern ist die **Impulsflussdichte**

$$\begin{aligned}
 \tilde{p}^e &= \frac{1}{2\mu_0} B^2 \tilde{\delta} - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \otimes \vec{B} \\
 &= \frac{1}{2\mu_0} [(B_x^2 - B_y^2) (-\vec{e}_x \otimes \vec{e}_x + \vec{e}_y \otimes \vec{e}_y) + (B_x^2 + B_y^2) \vec{e}_z \otimes \vec{e}_z - \\
 &\quad - 2B_x B_y (\vec{e}_x \otimes \vec{e}_y + \vec{e}_y \otimes \vec{e}_x)]
 \end{aligned} \tag{3.157}$$

von Bedeutung, wobei im vorliegenden Fall

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\mu_0} (B_x^2 + B_y^2) &= \\
 &= \frac{\mu_0}{4 \sinh^2(ka)} \left\{ \hat{K}_1^2 [\cosh[2k(a-y)] - \cos(2kx - 2\vartheta_1)] + \right. \\
 &\quad + \hat{K}_2^2 [\cosh(2ky) - \cos(2kx - 2\vartheta_2)] + \\
 &\quad + 2\hat{K}_1 \hat{K}_2 [\cosh[k(a-2y)] \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) - \\
 &\quad \left. - \cosh(ka) \cos(2kx - \vartheta_1 - \vartheta_2)] \right\}
 \end{aligned} \tag{3.158}$$

die Energiedichte darstellt und

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\mu_0} (B_x^2 - B_y^2) &= \\
 &= \frac{-\mu_0}{4 \sinh^2(ka)} \left\{ \hat{K}_1^2 [1 - \cosh[2k(a-y)] \cos(2kx - 2\vartheta_1)] + \right. \\
 &\quad + \hat{K}_2^2 [1 - \cosh(2ky) \cos(2kx - 2\vartheta_2)] + \\
 &\quad + 2\hat{K}_1 \hat{K}_2 [\cosh(ka) \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) - \\
 &\quad \left. - \cosh[k(a-2y)] \cos(2kx - \vartheta_1 - \vartheta_2)] \right\},
 \end{aligned} \tag{3.159}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{-1}{\mu_0} B_x B_y &= \\
 &= \frac{\mu_0}{4 \sinh^2(ka)} \left\{ \hat{K}_1^2 \sinh[2k(a-y)] \sin(2kx - 2\vartheta_1) - \right. \\
 &\quad - \hat{K}_2^2 \sinh(2ky) \sin(2kx - 2\vartheta_2) + \\
 &\quad + 2\hat{K}_1 \hat{K}_2 [\sinh(ka) \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2) + \\
 &\quad \left. + \sinh[k(a-2y)] \sin(2kx - \vartheta_1 - \vartheta_2)] \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.160}$$

Wir bemerken Periodizitäten in x -Richtung mit der Periodenlänge $\tau_p = \pi/k$. Für die Ermittlung der Kräfte, die von den beiden Körpern aufeinander ausgeübt werden, berechnen wir den Impulsfluss durch einen Streifen der Breite τ_p parallel zur xz -Ebene, sonst aber beliebiger Lage (Abb. 3.13).

Bezogen auf die Länge in z -Richtung folgt dafür aus den Gln. (3.157), (3.159) und (3.160)

$$\begin{aligned}\vec{F}_p' &= - \int_{x_0}^{x_0+\tau_p} \vec{e}_y \cdot \underline{p}^e dx = \\ &= \frac{\mu_0 \tau_p}{4 \sinh^2(ka)} \left[\hat{K}_1^2 + \hat{K}_2^2 + 2\hat{K}_1 \hat{K}_2 \cosh(ka) \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) \right] \vec{e}_y \\ &\quad - \frac{\mu_0 \tau_p}{2 \sinh(ka)} \hat{K}_1 \hat{K}_2 \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2) \vec{e}_x, \quad (3.161)\end{aligned}$$

unabhängig von x_0 und y_0 . Tatsächlich stellt \vec{F}_p' wegen der Impulsbilanz die längenbezogene Kraft dar, die auf den unteren Teilkörper über eine Polteilung ausgeübt wird. Ihre y -Komponente bedeutet eine Normalkraft, ihre x -Komponente eine Schubkraft. Die Normalkraft kann sowohl anziehend (Teilbilder (a) bis (c) in Abb. 3.12) wie auch abstoßend (Teilbild (d)) wirken. Eine anziehende Normalkraft besteht übrigens auch dann, wenn einer der beiden Flächenströme verschwindet (Teilbild (a)). Schubkräfte gibt es nur, wenn die Flächenströme gegeneinander verschoben sind (Teilbild (c)).

In den Anwendungen sind die Verschiebungswinkel häufig zeitabhängig. Mit $\vartheta_1 = \omega t + \vartheta_{10}$ und $\vartheta_2 = \omega t + \vartheta_{20}$ liegen beispielsweise Stromverteilungen als Sinuswellen vor, die mit der Geschwindigkeit ω/k in x -Richtung laufen. Erzeugt werden solche Wellen etwa durch Mehrphasensysteme von Sinusströmen in räumlich geeignet verteilten Leitern.

Sind die erzeugenden Ströme des Spaltfeldes räumlich nicht sinusförmig verteilt, so können wir Lösungen (3.156) mit variablen Werten k als Fourier-Reihen oder als Fourier-Integrale überlagern.

Für die Berechnung ebener magnetischer Felder lässt sich in stromfreien Bereichen auch ein **Skalarpotenzial** verwenden. Die Formulierung der Randwertprobleme gestaltet sich ganz ähnlich wie in der Elektrostatik. Holomorphe Funktionen zur Darstellung **komplexer Potenziale** sind ebenfalls mit Vorteil einsetzbar, insbesondere zur Berechnung magnetischer Felder in polygonal begrenzten Bereichen.

Drehsymmetrische Magnetfelder

Wir untersuchen hier stationäre magnetische Felder, die sich durch Drehsymmetrie bezüglich einer festen Achse — wir wählen dafür die z -Achse von Kreiszylinderkoordinaten — auszeichnen. Dazu gehören speziell rein azimutale Felder $\vec{H} = H_\alpha \vec{e}_\alpha$ mit H_α unabhängig von α , die mit stationären Stromverteilungen $\vec{J} = J_\varrho \vec{e}_\varrho + J_z \vec{e}_z$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$, verknüpft sind. Sie lassen sich in der Regel direkt mit Hilfe des Durchflutungssatzes angeben.

Etwas anspruchsvoller in ihrer Behandlung sind Felder des Typs $\vec{H} = H_\varrho \vec{e}_\varrho + H_z \vec{e}_z$ mit H_ϱ und H_z unabhängig von α . Sie gehören zu Stromverteilungen $\vec{J} =$

$J(\varrho, z)\vec{e}_\alpha$, insbesondere zu Ringspulen beliebiger Querschnittsform. Ist das Material im Feldraum isotrop, so reicht zur Darstellung der magnetischen Flussdichte über $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ ein Vektorpotenzial $\vec{A} = A(\varrho, z)\vec{e}_\alpha$ aus:

$$B_\varrho = -\partial_z A, \quad B_z = \frac{1}{\varrho} \partial_\varrho(\varrho A). \quad (3.162)$$

$\mu = \text{konst.}$ vorausgesetzt, folgt damit aus $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{J}$ die Differenzialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial \varrho} \left[\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho A) \right] + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = -\mu J \quad (3.163)$$

für die Funktion A , die übrigens nicht die Form der Poisson-Gleichung für einen Skalar besitzt.

Lösungen von (3.163) können wie üblich als Überlagerung von partikulären Lösungen (beispielsweise $-\mu J \varrho^2/3$ oder $-\mu J z^2/2$ in Bereichen mit $J = \text{konst.}$) und Lösungen der homogenen Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial \varrho} \left[\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho A) \right] + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = 0 \quad (3.164)$$

angegeben werden. In stromfreien Bereichen gilt direkt Gl. (3.164). Sie lässt sich durch den Produktansatz $A(\varrho, z) = R(\varrho)Z(z)$ in die beiden gewöhnlichen Differenzialgleichungen

$$\left[\frac{1}{\varrho} (\varrho R)' \right]' + \lambda^2 R = 0, \quad Z'' - \lambda^2 Z = 0 \quad (3.165)$$

mit einer Separationskonstanten λ^2 überführen. Gl. (3.165)₂ besitzt mit reellen Werten k die Lösungen

$$\begin{aligned} \lambda = k & : Z(z) = C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz}, \\ \lambda = jk & : Z(z) = C_1 \cos(kz) + C_2 \sin(kz), \end{aligned} \quad (3.166)$$

die qualitativ unterschiedliche z -Abhängigkeiten darstellen. Ist der Feldraum z.B. in z -Richtung beidseitig unendlich ausgedehnt, so kommt für beschränkte Werte von A nur die Lösung (3.166)₂ und damit $\lambda = jk$ in Frage. Gl. (3.165)₁ ist mit $\zeta = \lambda \varrho$ und $\nu^2 = 1$ eine spezielle Form der Bessel-Differenzialgleichung für eine Funktion $f(\zeta)$,

$$\zeta^2 f'' + \zeta f' + (\zeta^2 - \nu^2) f = 0. \quad (3.167)$$

Ihre Lösungen sind die Bessel-Funktionen erster Art $J_\nu(\zeta)$ und zweiter Art $Y_\nu(\zeta)$, die sich für imaginäre Argumente auch als modifizierte Bessel-Funktion erster Art I_ν und zweiter Art K_ν angeben lassen. In unserem Fall sind daher mit reellen Werten k

$$\begin{aligned} \lambda = k & : R(\varrho) = D_1 J_1(k\varrho) + D_2 Y_1(k\varrho), \\ \lambda = jk & : R(\varrho) = D_1 I_1(k\varrho) + D_2 K_1(k\varrho) \end{aligned} \quad (3.168)$$

Lösungen für den Radialteil. Die genannten Bessel-Funktionen verhalten sich für $\zeta \rightarrow 0$ gemäß

$$\begin{aligned}
J_\nu(\zeta) &\approx I_\nu(\zeta) \approx (\zeta/2)^\nu / \Gamma(\nu + 1), \quad \nu \neq -1, -2, \dots, \\
-\pi Y_0(\zeta) &\approx 2K_0(\zeta) \approx -2 \ln(\zeta), \\
-\pi Y_\nu(\zeta) &\approx 2K_\nu(\zeta) \approx \Gamma(\nu)(2/\zeta)^\nu, \quad \operatorname{Re}(\nu) > 0,
\end{aligned} \tag{3.169}$$

und für $|\zeta| \rightarrow \infty$ gemäß

$$\begin{aligned}
J_\nu(\zeta) &\approx \sqrt{2/(\pi\zeta)} \cos(\zeta - \nu\pi/2 - \pi/4), \quad |\operatorname{arc}(\zeta)| < \pi, \\
Y_\nu(\zeta) &\approx \sqrt{2/(\pi\zeta)} \sin(\zeta - \nu\pi/2 - \pi/4), \quad |\operatorname{arc}(\zeta)| < \pi, \\
I_\nu(\zeta) &\approx e^\zeta / \sqrt{2\pi\zeta}, \quad |\operatorname{arc}(\zeta)| < \pi/2, \\
K_\nu(\zeta) &\approx e^{-\zeta} \sqrt{\pi/(2\zeta)}, \quad |\operatorname{arc}(\zeta)| < 3\pi/2.
\end{aligned} \tag{3.170}$$

Weiters gilt, wenn F_ν irgendeine der Funktionen J_ν , Y_ν , I_ν oder $e^{j\pi\nu} K_\nu$ bedeutet, die Ableitungsbeziehung

$$F'_\nu = F_{\nu-1} - \frac{\nu}{\zeta} F_\nu. \tag{3.171}$$

Das Grenzverhalten (3.169) bzw. (3.170) bringt weitere Einschränkungen. Gehört z.B. die z -Achse ($\varrho = 0$) zumindest abschnittsweise zum Feldbereich, so ist in (3.168) notwendig $D_2 = 0$. Für einen radial außen unbegrenzten Feldraum schließen wir dagegen in (3.168)₂ auf $D_1 = 0$.

Angenommen, der Feldbereich enthält die ganze z -Achse und ist für $\varrho < \varrho_0$ mit einem festen Radius ϱ_0 stromfrei. Eine passende Lösung dafür, mit Sinusverlauf in z -Richtung, ist

$$A(\varrho, z) = [C_1 \cos(kz) + C_2 \sin(kz)] I_1(k\varrho), \quad \varrho < \varrho_0, \tag{3.172}$$

mit noch freien Konstanten C_1 , C_2 und k . Wie üblich, lassen sich daraus durch lineare Überlagerung allgemeinere Lösungen finden, etwa mit diskreten Werten $k = n\pi/a$, $n \in \mathbb{N}_0$, als Reihe

$$A(\varrho, z) = \sum_{n=0}^{\infty} [C_{1n} \cos(n\pi z/a) + C_{2n} \sin(n\pi z/a)] I_1(n\pi\varrho/a), \tag{3.173}$$

oder mit kontinuierlichen Werten k und Funktionen $C_1(k)$, $C_2(k)$ als Integral

$$A(\varrho, z) = \int_{k_1}^{k_2} [C_1(k) \cos(kz) + C_2(k) \sin(kz)] I_1(k\varrho) dk. \tag{3.174}$$

Zu dieser Integraldarstellung gehören gemäß (3.162) die Flussdichtekoeffizienten

$$\begin{aligned}
B_\varrho(\varrho, z) &= \int_{k_1}^{k_2} [C_1(k) \sin(kz) - C_2(k) \cos(kz)] I_1(k\varrho) k dk, \\
B_z(\varrho, z) &= \int_{k_1}^{k_2} [C_1(k) \cos(kz) + C_2(k) \sin(kz)] I_0(k\varrho) k dk.
\end{aligned} \tag{3.175}$$

Als **Anwendung** betrachten wir folgendes Problem: Entlang der z -Achse ist die magnetische Flussdichte bekannt,

$$B_z(0, z) = b(z), \tag{3.176}$$

etwa durch Auswertung der Biot–Savart–Formel für Kreisströme in Feldpunkten auf der Achse. Gesucht ist das magnetische Feld in einer stromfreien Umgebung $0 \leq \varrho < \varrho_0$ der Achse. Wir gehen aus von der reellen Fourier–Integraldarstellung der gegebenen Funktion $b(z)$,

$$\begin{aligned} B_z(0, z) = b(z) &= \int_0^\infty [c_1(k) \cos(kz) + c_2(k) \sin(kz)] dk, \\ c_1(k) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty b(z) \cos(kz) dz, \quad c_2(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty b(z) \sin(kz) dz, \end{aligned} \quad (3.177)$$

und erhalten durch Vergleich mit dem Ausdruck (3.175)₂ für $\varrho = 0$, $k_1 = 0$, $k_2 \rightarrow \infty$ wegen $I_0(0) = 1$ die Funktionen $C_1(k)$ und $C_2(k)$

$$C_1(k) = \frac{1}{\pi k} \int_{-\infty}^\infty b(z) \cos(kz) dz, \quad C_2(k) = \frac{1}{\pi k} \int_{-\infty}^\infty b(z) \sin(kz) dz. \quad (3.178)$$

Das gesuchte Vektorpotenzial besitzt somit die Form

$$A(\varrho, z) = \int_0^\infty dk \frac{I_1(k\varrho)}{k\pi} \int_{-\infty}^\infty b(z') \cos[k(z - z')] dz'. \quad (3.179)$$

Mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung

$$I_\nu(\zeta) = (\zeta/2)^\nu \sum_{n=0}^\infty \frac{(\zeta/2)^{2n}}{n! \Gamma(\nu + n + 1)} \quad (3.180)$$

lässt sich (3.179) weiter zu

$$A(\varrho, z) = \frac{\varrho}{2} \sum_{n=0}^\infty \frac{(\varrho/2)^{2n}}{n!(n+1)!} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dk k^{2n} \int_{-\infty}^\infty b(z') \cos[k(z - z')] dz' \quad (3.181)$$

umformen. Andererseits folgt aus (3.177)

$$\begin{aligned} b(z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dk \int_{-\infty}^\infty b(z') \cos[k(z - z')] dz', \\ \frac{d^{2n}b(z)}{dz^{2n}} &= \frac{(-1)^n}{\pi} \int_0^\infty dk k^{2n} \int_{-\infty}^\infty b(z') \cos[k(z - z')] dz', \end{aligned} \quad (3.182)$$

insgesamt also

$$A(\varrho, z) = \frac{\varrho}{2} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n (\varrho/2)^{2n}}{n!(n+1)!} \frac{d^{2n}b(z)}{dz^{2n}}. \quad (3.183)$$

Dies ist eine Potenzreihenentwicklung in ϱ für das gesuchte Vektorpotenzial.

Ausgewählte Literatur

Neben den bereits erwähnten Werken

J.D. Jackson: *Classical Electrodynamics*, 2nd ed. New York: Wiley, 1975,

K. Simonyi: *Theoretische Elektrotechnik*, 4. Aufl. Berlin: VEB Verlag, 1971

empfehle ich hier besonders

F. Ollendorff: *Berechnung magnetischer Felder*. Wien: Springer, 1952.

Kapitel 4

Induktionserscheinungen und Wirbelströme

4.1 Quasistationäre Felder

Bei der Beschreibung des Verhaltens zeitlich veränderlicher magnetischer Flüsse und elektrischer Ströme in ausgedehnten, elektrisch gut leitfähigen Körpern spielt das Induktionsgesetz eine wichtige Rolle. Verschiebungsströme sind dagegen kaum von Bedeutung und brauchen deshalb in der Regel nicht berücksichtigt zu werden.

Allgemeine Eigenschaften

Wir setzen in diesem Kapitel die Gültigkeit der Gleichungen des dominant magnetischen Feldsystems voraus (Tab. 2.2). Verteilungen des magnetischen Flusses Φ , der magnetischen Spannung V , des elektrischen Stroms I und der elektrischen Spannung U besitzen demnach die allgemeinen Eigenschaften

$$\begin{aligned}\Phi(\partial\mathcal{V}) &= 0, & V(\partial\mathcal{A}) &= I(\mathcal{A}), \\ U(\partial\mathcal{A}) &= -\dot{\Phi}(\mathcal{A}).\end{aligned}\tag{4.1}$$

Elektrische Ladungen spielen in diesem Feldsystem keine Rolle, elektrische Stromverteilungen sind stets quellenfrei. Wegen des Induktionsgesetzes ist der elektrostatische Spannungsbegriff hier i.A. nicht anwendbar, d.h. elektrische Spannungen können i.A. nicht als Differenzen skalarer Potenzialwerte angegeben werden. Beachten Sie, dass die Gln. (4.1) auch für bewegte Bereiche und ihre Ränder gelten.

Der Übergang zu den lokalen Formen erfolgt mit den bekannten Integraltransformationen. Wir erhalten (Tab. 2.2)

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, & \vec{n} \cdot [\vec{B}] &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{J}, & \vec{n} \times [\vec{H}] &= \vec{K}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\partial_t \vec{B}, & \vec{n} \times [\vec{E}] &= v_n [\vec{B}].\end{aligned}\tag{4.2}$$

Zu ergänzen sind diese Gleichungen durch Verknüpfungsbeziehungen und Materialgleichungen, für deren Formulierung bei Anwesenheit bewegter Körper die Transformationseigenschaften dominant magnetischer Felder (Tab. 2.2),

$$\begin{aligned}\vec{B}' &= \vec{B}, \quad \vec{H}' = \vec{H}, \quad \vec{J}' = \vec{J}, \quad \vec{K}' = \vec{K}, \\ \vec{E}' &= \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B},\end{aligned}\tag{4.3}$$

bedeutsam sind. Für lineare, isotrope Werkstoffe folgt daraus insbesondere

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{J} = \gamma \vec{E}' = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}),\tag{4.4}$$

wobei wir hier in der Regel das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{r}, t)$ als bekannt voraussetzen.

Ähnlich wie im stationären Fall lassen sich auch hier durch die Einführung des **magnetischen Vektorpotenzials** $\vec{A}(\vec{r}, t)$ die Gln. (4.1)₁ und (4.2)_{1,2} formal lösen, falls für jede Fläche \mathcal{A} mit dem Rand $\partial\mathcal{A}$ gilt

$$\Phi(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} \vec{n} \cdot \vec{B} \, dA = \int_{\partial\mathcal{A}} \vec{s} \cdot \vec{A} \, ds \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.\tag{4.5}$$

Eintragen in die lokale Form (4.2)₅ des Induktionsgesetzes liefert dann

$$\vec{\nabla} \times (\vec{E} + \partial_t \vec{A}) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \vec{\nabla} \varphi,\tag{4.6}$$

d.h. das Feld $\vec{E} + \partial_t \vec{A}$ ist wirbelfrei und deshalb als Gradient eines Skalarfeldes $-\varphi$ darstellbar. Im dominant magnetischen Feldsystem können wir in der Regel $\varphi = 0$ setzen und außerdem die Maxwell-Eichung wählen,

$$\vec{E} = -\partial_t \vec{A}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0.\tag{4.7}$$

Dies impliziert $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ und setzt im Zusammenhang mit dem lokalen ohmschen Gesetz $\vec{J} = \gamma \vec{E}$ wegen $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ die Konstanz der Konduktivität γ voraus.

Spezielle Gleichungen

Um uns einen ersten Überblick über die erfassten Vorgänge zu verschaffen, werden wir die einfachen Materialgleichungen (4.4) mit konstanten Werten μ und γ verwenden und aus den Grundgleichungen (4.2) alle Felder bis auf die magnetische Flussdichte und die Geschwindigkeit eliminieren. Wir erhalten zunächst durch Einsetzen von (4.4)₁ in (4.2)₃ und von (4.4)₂ in (4.2)₅

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{B}, \quad \frac{1}{\gamma} \vec{\nabla} \times \vec{J} - \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) = -\partial_t \vec{B},\tag{4.8}$$

und daraus

$$-\frac{1}{\mu\gamma} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) = \partial_t \vec{B},\tag{4.9}$$

oder, unter Benutzung von Gl. (4.2)₁,

$$\frac{1}{\mu\gamma} \nabla^2 \vec{B} = \partial_t \vec{B} + \vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{v}).\tag{4.10}$$

Diese Gleichung — sie wird im Zusammenhang mit magnetohydrodynamischen Erscheinungen **Bullard-Gleichung** genannt — beschreibt die Verteilung magnetischer Flüsse in elektrisch leitfähigen, bewegten Medien mit konstanten, skalaren Werten der Permeabilität und der elektrischen Konduktivität.

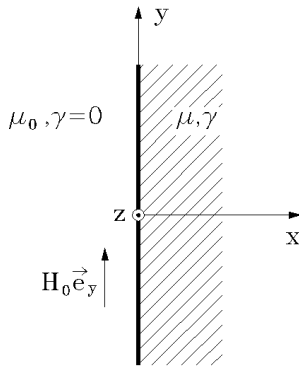


Abb.4.1: An der Grenzfläche $x = 0$ des Halbraumes $x > 0$ zum leeren Raum wird zum Zeitpunkt $t = 0$ sprunghaft die konstante magnetische Feldstärke H_0 tangential angelegt. Gesucht sind die anschließend sich einstellenden Fluss- und Stromverteilungen.

Im Grenzfall $\mu\gamma \rightarrow \infty$ ist die rechte Seite von Gl. (4.10) gleich Null, was dem Verschwinden der mitgeschleppten Zeitableitung (2.49) der magnetischen Flussdichte entspricht. Die Flussverteilung wird dann durch die Bewegung vollständig mitgeschleppt, erscheint also gleichsam in dem Körper eingefroren: Jede Fläche, deren Rand ganz im Körper verläuft, hält ihren magnetischen Fluss fest — eine Vorstellung, die allgemein für Vorgänge anwendbar ist, die in einer Anordnung mit einer charakteristischen Länge L ablaufen und deren charakteristische Dauer klein gegen die **Diffusionszeitkonstante**

$$T_d = \mu\gamma L^2 \quad (4.11)$$

ist. In Spulen entspricht die Diffusionszeitkonstante der Zeitkonstanten Induktivität durch Widerstand.

Im allgemeinen Fall findet ein Diffusionsprozess statt, bei dem ein magnetischer Fluss begleitet von elektrischen Strömen in den Körper eindringt oder sich innerhalb des Körpers ausgleicht. Ist das Geschwindigkeitsfeld im Speziellen zeitunabhängig, so kann sich ein Gleichgewichtszustand einstellen zwischen den Effekten des Mitschleppens und der Diffusion. Die zeitlich konstante Flussverteilung wird dann durch die Gleichung

$$\frac{1}{\mu\gamma} \nabla^2 \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{v}) \quad (4.12)$$

beschrieben.

Wenn es im Feldbereich keine bewegten, elektrisch leitfähigen Körper gibt, dann reduziert sich Gl. (4.10) auf die vektorielle **Diffusionsgleichung**

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu\gamma \partial_t \vec{B}. \quad (4.13)$$

Wir erhalten daraus bei Verwendung kartesischer Koordinaten für jede der Koeffizienten B_x , B_y und B_z eine gewöhnliche Diffusionsgleichung vom Typ der Wärmeleitungsgleichung (lineare partielle Differenzialgleichung zweiter Ordnung vom parabolischen Typ). **Vorsicht:** Bei Verwendung von Kreiszylinderkoordinaten oder Kugelkoordinaten entsteht aus der linken Seite von Gl. (4.13) i.A. nicht der skalare Laplace-Ausdruck für die entsprechenden Koeffizienten.

Ähnliche Überlegungen wie für die magnetische Flussdichte lassen sich auch für die anderen beteiligten Felder anstellen. So genügen etwa die elektrische Strom-

dichte \vec{J} und das magnetische Vektorpotenzial \vec{A} im Fall $\vec{v} = \vec{0}$ jeweils einer vektoriellen Diffusionsgleichung der Form (4.13).

4.2 Diffusion magnetischer Felder

Hauptsächlich anhand von Beispielen werden wir im Folgenden die Diffusion magnetischer Flüsse und die damit verknüpften Stromverteilungen, meist Wirbelströme genannt, untersuchen.

Eindringen des magnetischen Flusses in einen Halbraum

Wir betrachten zuerst mit Bezug auf ein kartesisches Koordinatensystem einen Halbraum $x > 0$, ursprünglich feldfrei und durch die konstanten Materialparameter μ und γ charakterisiert (Abb. 4.1). Durch eine passende Stromverteilung in $x < 0$ wird zum Zeitpunkt $t = 0$ **sprungartig die konstante Tangentialfeldstärke** $\vec{H} = H_0 \vec{e}_y$ **angelegt**, etwa durch einen Flächenstrom konstanter Dichte $\vec{K} = K \vec{e}_z$ parallel zur Grenzfläche. Für den anschließenden Ausgleichsvorgang erwarten wir Felder $\vec{B} = B(x, t) \vec{e}_y$ und $\vec{J} = J(x, t) \vec{e}_z$, haben also die Diffusionsgleichung (4.13)

$$\partial_x^2 B = \mu \gamma \partial_t B \quad (4.14)$$

unter den Rand- und Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} x = 0, t > 0 : \quad B &= B_0 = \mu H_0 ; \quad x \rightarrow \infty : B = 0 ; \\ x > 0, t = 0+ : \quad B &= 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

zu lösen. Nach Einführung einer Bezugslänge L , der Diffusionszeitkonstanten T_d (Gl. (4.11)) als Bezugsdauer und der Wahl bezogener Längen- und Zeitkoordinaten gemäß

$$x = \xi L, \quad t = \tau T_d, \quad T_d = \mu \gamma L^2 \quad (4.16)$$

liegt das **Rand-Anfangswertproblem** für die Funktion $B[\xi, \tau] = B(x, t)$ vor:

$$\begin{aligned} \xi > 0, \tau > 0 : \quad \partial_\xi^2 B &= \partial_\tau B ; \\ \xi = 0, \tau > 0 : \quad B &= B_0 ; \quad \xi \rightarrow \infty : B = 0 ; \\ \xi > 0, \tau = 0+ : \quad B &= 0 . \end{aligned} \quad (4.17)$$

Es gibt mehrere Lösungsmöglichkeiten für Probleme dieser Art. Eine davon ist die Anwendung der einseitigen Laplace-Transformation auf die Zeitvariable. Wir definieren

$$\tilde{B}(\xi; s) = \mathcal{L} \{B[\xi, \tau]\} \quad (4.18)$$

und führen damit das Problem (4.17) auf das einfache Randwertproblem

$$\tilde{B}''(\xi; s) = s \tilde{B}(\xi; s), \quad \tilde{B}(0; s) = B_0/s, \quad \tilde{B}(\infty; s) = 0 \quad (4.19)$$

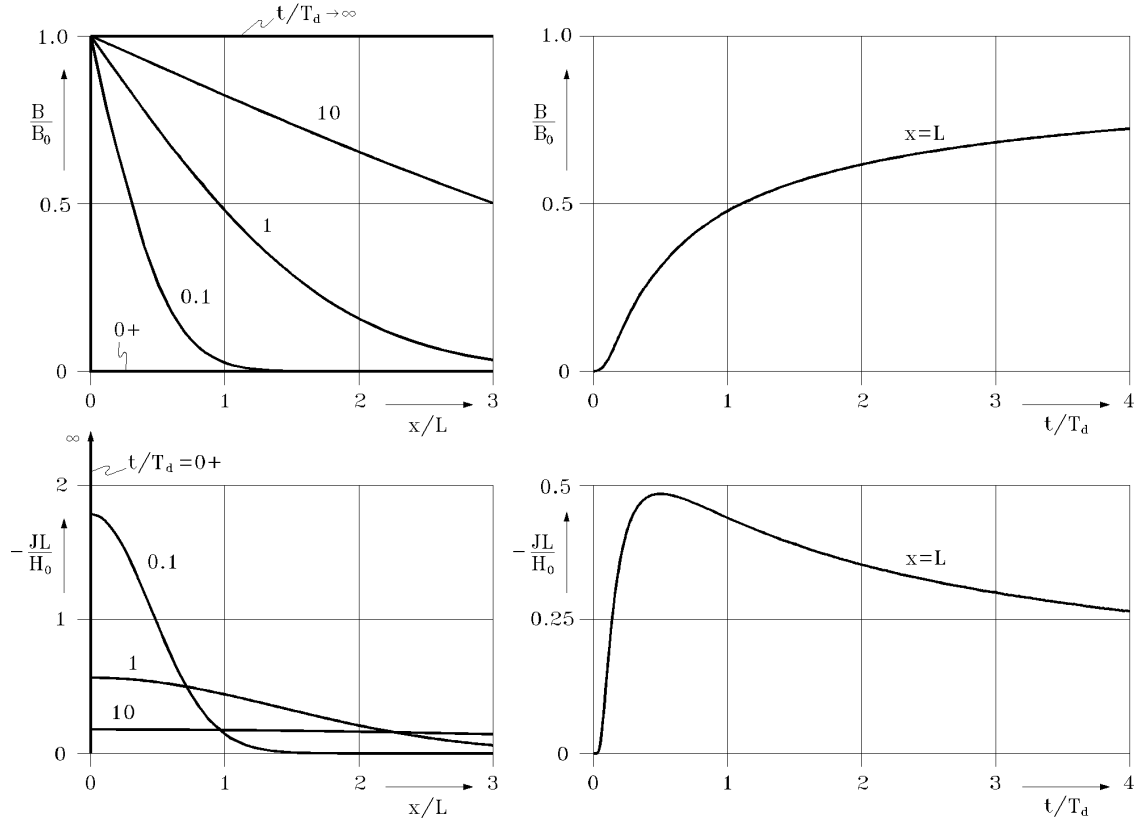


Abb.4.2: Verlauf der magnetischen Flussdichte B und der elektrischen Stromdichte J im Halbraum aus Abb. 4.1. Ausgewertet sind die Gln. (4.23) und (4.24). Die Diffusionszeitkonstante T_d ist durch Gl. (4.16)₃ gegeben.

zurück, wobei die Laplace-Variable s die Rolle eines Parameters übernimmt. Die Lösung von (4.19) lässt sich leicht angeben,

$$\tilde{B}(\xi; s) = \frac{B_0}{s} e^{-\xi\sqrt{s}}, \quad (4.20)$$

und liefert nach Rücktransformation in den Zeitbereich

$$B[\xi, \tau] = B_0 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} e^{-\xi\sqrt{s}} \right] = B_0 \operatorname{erfc} \left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} \right) \quad (4.21)$$

mit der komplementären Fehlerfunktion erfc ,

$$\begin{aligned} \operatorname{erfc}(\zeta) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\zeta}^{\infty} e^{-t^2} dt = 1 - \operatorname{erf}(\zeta), \\ \operatorname{erf}(\zeta) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\zeta} e^{-t^2} dt. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Mit (4.16) folgt aus (4.21) in den ursprünglichen Variablen für die Flussdichte

$$\vec{B} = B(x, t) \vec{e}_y, \quad B(x, t) = B_0 \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2} \sqrt{\frac{\mu\gamma}{t}} \right), \quad (4.23)$$

und für die Stromdichte über Gl. (4.8)₁

$$\vec{J} = J(x, t) \vec{e}_z, \quad J(x, t) = \frac{1}{\mu} \partial_x B = -H_0 \sqrt{\frac{\mu\gamma}{\pi t}} \exp \left(-\frac{x^2 \mu\gamma}{4t} \right). \quad (4.24)$$

Zugehörige Auswertungen zeigt Abb. 4.2. Als Längenmaßstab wird dabei irgendeine Bezugslänge L und, damit verknüpft, als Bezugsdauer die Diffusionszeitkonstante T_d (Gl. (4.16)₃) gewählt. Wir bemerken das folgende typische Verhalten: Unmittelbar nach dem Feldstärkesprung am Rand gibt es im Inneren des Körpers noch keinen magnetischen Fluss — er wird durch den entstehenden, am Rand konzentrierten elektrischen Strom abgeschirmt. Ein deutliches Eindringen des Flusses bis zum Randabstand L lässt sich erst nach Ablauf etwa eines Intervalls T_d feststellen. Die elektrische Stromdichte im Randabstand L nimmt zunächst zu, erreicht ein Betragsmaximum zur Zeit $T_d/2$ und nimmt dann wieder ab, um nach dem vollständigen Eindringen des Flusses ganz zu verschwinden. Je größer die Werte der Permeabilität und der Konduktivität sind, desto langsamer verläuft der Diffusionsprozess.

Das sprungartige Anlegen der Randfeldstärke ist natürlich eine Idealisierung. Sie ist dann gerechtfertigt, wenn mit Bezug auf den gewählten Längenmaßstab L die tatsächliche Anstiegszeit als klein gegen die Diffusionszeitkonstante T_d vorausgesetzt werden kann. In diesem Sinn ist auch der unendlich große Wert der Stromdichte bei $x = 0$, $t = 0+$ zu verstehen, also das Ausbilden eines Flächenstroms: Der notwendig entstehende Abschirmstrom wird ursprünglich in einer Randschicht der Dicke $\ll L$ zusammengedrängt.

Im Gegensatz zu Wellengleichungen sind parabolischen Gleichungen des Typs (4.14) formal unendlich große Signalausbreitungsgeschwindigkeiten zugeordnet: Die Information über das Anlegen des Feldstärkesprungs ist nach Ablauf eines beliebig kleinen Zeitintervalls bereits überall im Körper vorhanden — eine Konsequenz der Vernachlässigung von Verschiebungsströmen im dominant magnetischen Feldsystem.

Weitere Einsichten folgen nach Einbringen einer zweiten charakteristischen Dauer in den Diffusionsprozess. Wir untersuchen dazu wieder die Ausbildung des magnetischen Flusses und des elektrischen Stroms im Halbraum aus Abb. 4.1 mit einer tangential anliegenden, *zeitlich sinusförmig verlaufenden magnetischen Randfeldstärke*

$$\vec{H} = H \vec{e}_y, \quad H(0, t) = \hat{H}_0 \cos(\omega t) \quad (4.25)$$

im eingeschwungenen Zustand. Eintragen des Ansatzes für eine gedämpfte Sinuswelle,

$$\vec{B} = B \vec{e}_y, \quad B(x, t) = \operatorname{Re} \left\{ \hat{B}_0 e^{j(\omega t - kx)} \right\}, \quad (4.26)$$

(k ist i.A. komplex) in die Diffusionsgleichung (4.14) liefert die Bedingung

$$k^2 = -j\mu\gamma\omega : \quad k = \pm(1-j)/\delta, \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\gamma\omega}}, \quad (4.27)$$

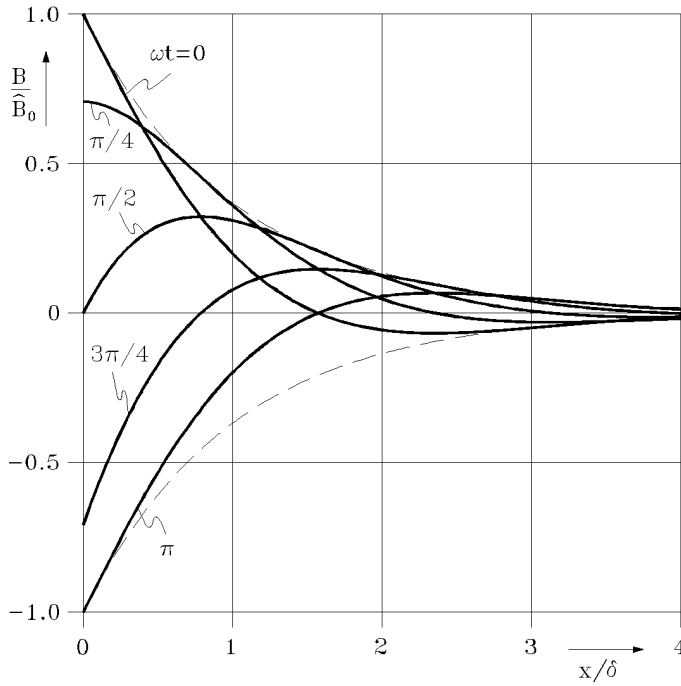


Abb. 4.3: Verlauf der magnetischen Flussdichte B im Halbraum aus Abb. 4.1 zu unterschiedlichen Zeitpunkten beim Anlegen einer zeitlich sinusförmigen, tangentialen Randfeldstärke. Ausgewertet ist Gl. 4.28. Die elektrische Stromdichte J verläuft analog, zeitlich um $-3\pi/(4\omega)$ gegenüber B verschoben. Strichliert gezeichnet sind die Hüllkurven $\pm e^{-x/\delta}$.

und aus der Randbedingung (4.25)₂ folgt $\hat{B}_0 = \mu \hat{H}_0$. Die Konstante δ heißt aus gleich ersichtlichen Gründen **Eindringtiefe**. Von den beiden Vorzeichen in (4.27)₂ führt das negative im Ansatz (4.26) auf ein exponentielles Anwachsen mit zunehmendem x . Dieser Fall ist wegen des fehlenden zweiten Randes auszuschließen. Als Lösung ergibt sich demnach für die magnetische Flussdichte

$$\begin{aligned} \vec{B} = B(x, t) \vec{e}_y, \quad B(x, t) &= \operatorname{Re} \left\{ \hat{B}_0 e^{-x/\delta + j(\omega t - x/\delta)} \right\} \\ &= \hat{B}_0 e^{-x/\delta} \cos(\omega t - x/\delta), \end{aligned} \quad (4.28)$$

und über Gl. (4.8)₁ für die elektrische Stromdichte

$$\begin{aligned} \vec{J} = J(x, t) \vec{e}_z, \quad J(x, t) &= \operatorname{Re} \left\{ -\frac{1+j}{\delta} \hat{H}_0 e^{-x/\delta + j(\omega t - x/\delta)} \right\} \\ &= -\hat{H}_0 \frac{\sqrt{2}}{\delta} e^{-x/\delta} \cos(\omega t - x/\delta + \pi/4). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Eine Auswertung zeigt Abb. 4.3. Sie sehen das räumlich im Wesentlichen exponentiell mit dem Randabstand abklingende Verhalten, charakterisiert durch die frequenzabhängige Eindringtiefe δ aus Gl. (4.27)₃. Es ist demnach nicht möglich, magnetische Wechselströme in massive, elektrisch leitfähige Körper wesentlich über die Eindringtiefe hinaus eindringen zu lassen — das Körperinnere wird durch die entstehenden Wirbelströme abgeschirmt.

Die Wirbelströme sind mit Joule-Verlusten verknüpft, die wir am einfachsten über den zeitlichen Mittelwert des Poynting-Flusses aus dem umgebenden Raum in unseren Körper berechnen: Da keine anderen Energieformen beteiligt sind, wird die über das elektromagnetische Feld im Mittel einfließende Energie

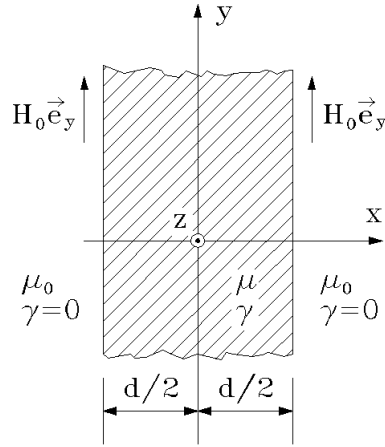


Abb. 4.4: An einer magnetisierbaren und elektrisch leitfähigen Schicht der Dicke d mit Abmessungen in y - und z -Richtung $\gg d$ liegt beidseitig tangential eine zeitlich sinusförmige, magnetische Feldstärke. Gesucht sind die Fluss- und Stromverteilungen in der Schicht.

vollständig in Wärme umgesetzt. Über $\vec{E} = (J/\gamma)\vec{e}_z$, $\vec{H} = (B/\mu)\vec{e}_y$, $\vec{e}_x \times [\vec{E}] = \vec{0}$ und $\vec{e}_x \times [\vec{H}] = \vec{0}$ erhalten wir zunächst aus den Gln. (4.28) und (4.29) für den Augenblickswert des Poynting-Vektors bei $x = 0$

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \vec{E} \times \vec{H} = S(x, t)\vec{e}_x, \\ S(0, t) &= -\frac{1}{\gamma}J(0, t)H(0, t) = \frac{\hat{H}_0^2 \sqrt{2}}{\gamma \delta} \cos(\omega t) \cos(\omega t + \pi/4), \end{aligned} \quad (4.30)$$

und daraus den zeitlichen Mittelwert

$$P'' = \overline{S}(0) = \frac{\hat{H}_0^2}{2\gamma\delta} = \frac{\hat{H}_0^2}{2} \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\gamma}} \quad (4.31)$$

als Verlustleistung, bezogen auf den Inhalt der Randfläche. Die Joule-Verluste, auch Wirbelstromverluste genannt, steigen demnach quadratisch mit der Randfeldstärke und verhalten sich proportional zu $\sqrt{\omega}$ und zu $\sqrt{\mu/\gamma}$.

Soll ein magnetisierbarer Körper zur Führung eines magnetischen Wechselflusses verwendet werden, so muss die Eindringtiefe quer zur Flussrichtung mindestens die Größenordnung der kleinsten Querabmessung besitzen. Dies ist durch eine hinreichend kleine elektrische Leitfähigkeit erreichbar, aber auch durch die Schichtung des Körpers aus gegeneinander elektrisch isolierten und parallel zur Flussrichtung gelegenen Blechen zu Blechpaketen (**Lamellierung**). Um die erforderliche Blechdicke und die auftretenden Wirbelstromverluste abschätzen zu können, betrachten wir gemäß Abb. 4.4 anstelle des Halbraums eine **Schicht der Dicke d mit beidseitig tangential anliegender, zeitlich sinusförmig verlaufender Randfeldstärke** (4.25).

Ein Lösungsansatz entsprechend (4.26) für die Diffusionsgleichung (4.14) liefert unter Berücksichtigung beider Vorzeichen von k aus (4.27) und wegen der Symmetriebedingung $B(-x, t) = B(x, t)$ die Lösung

$$\begin{aligned} \vec{B} &= B\vec{e}_y, \quad B(x, t) = \text{Re} \left[\hat{B}(x) e^{j\omega t} \right], \\ \hat{B}(x) &= \hat{B}_0 \frac{\cos(kx)}{\cos(kd/2)}, \quad \hat{B}_0 = \mu \hat{H}_0, \quad k = (1-j)/\delta \end{aligned} \quad (4.32)$$

mit der Eindringtiefe δ aus Gl. (4.27)₃. Dazu gehört die elektrische Stromdichte

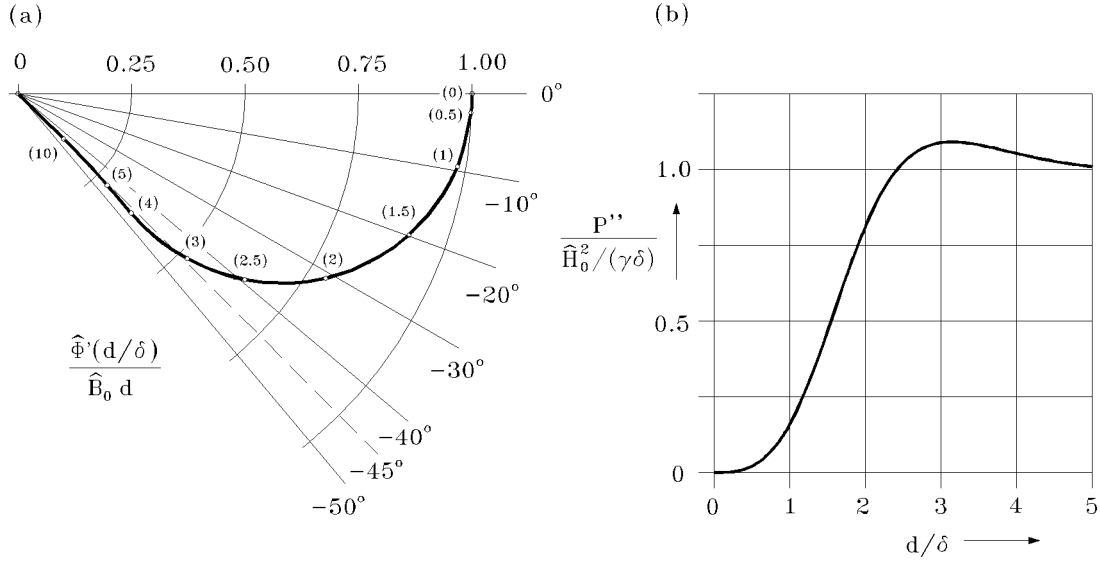


Abb.4.5: Magnetischer Fluss und Wirbelstromverluste in der Schicht aus Abb. 4.4.
 (a) Ortskurve der komplexen, bezogenen Flussamplitude in Abhängigkeit vom Parameter d/δ (Werte in Klammern). Ausgewertet ist Gl. (4.35).
 (b) Bezogene Joule-Verluste als Funktion von d/δ (Gl. (4.36)). Der Funktionswert 1 entspricht der dicken Schicht $d \gg \delta$.

$$\begin{aligned} \vec{J} &= J\vec{e}_z, \quad J(x, t) = \text{Re} \left[\hat{J}(x) e^{j\omega t} \right], \\ \hat{J}(x) &= -\hat{H}_0 k \frac{\sin(kx)}{\cos(kd/2)}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Für die Abschätzung der erforderlichen Blechdicke ist es interessant zu wissen, wie groß der y -gerichtete **magnetische Fluss** in der Schicht ist. Wir berechnen, bezogen auf die Länge in z -Richtung,

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &= \int_{-d/2}^{d/2} B(x, t) dx = \text{Re} \left[\hat{\Phi}' e^{j\omega t} \right], \\ \hat{\Phi}' &= \frac{2\hat{B}_0}{k} \tan(kd/2), \end{aligned} \quad (4.34)$$

also für die komplexe Amplitude, bezogen auf den Wert $\hat{B}_0 d$ ohne Flussverdrängung,

$$\frac{\hat{\Phi}'}{\hat{B}_0 d} = \frac{\tan(kd/2)}{kd/2}, \quad \frac{kd}{2} = \frac{1-j}{2} \cdot \frac{d}{\delta}. \quad (4.35)$$

Eine Auswertung in Abhängigkeit von d/δ in der komplexen Ebene zeigt Abb. 4.5a. Gegenüber der vollständigen Durchdringung (kleine Frequenzen bzw. Leitfähigkeiten) beträgt die Abnahme der Flussamplitude bei gleicher Randfeldstärke für $d = \delta$ (Blechdicke gleich der Eindringtiefe) etwa 2%, der Phasenverschiebungswinkel jedoch bereits $-9,4^\circ$.

z -Richtung elektrisch nicht leitfähigen (aus Blechen geschichteten) Körpers. Der Leiter trage insgesamt den Sinusstrom

$$i(t) = \operatorname{Re} \left(I\sqrt{2}e^{j\omega t} \right) . \quad (4.37)$$

Mit Rücksicht auf die Geometrie des Problems erwarten wir im Bereich $x > 0$, $0 < y < b$ die magnetische Feldstärke und Flussdichte y -gerichtet, die elektrische Stromdichte im Leiter z -gerichtet, und Abhängigkeiten nur von x und t . Zur Berechnung der Flussverdrängung im Leiter ist daher wieder die Diffusionsgleichung (4.14) zu lösen, wobei Randbedingungen bei $x = 0$ und $x = h$ durch den Durchflutungssatz geliefert werden,

$$B(0, t) = 0 , \quad B(h, t) = \mu_0 i(t)/b . \quad (4.38)$$

Ein Ansatz

$$\vec{B} = B(x, t)\vec{e}_y , \quad B(x, t) = \operatorname{Re} \left[\hat{B}(x)e^{j\omega t} \right] , \quad (4.39)$$

für den eingeschwungenen Zustand liefert dann für die komplexwertige Funktion $\hat{B}(x)$ das Problem

$$\hat{B}''(x) = j\mu_0\gamma\omega\hat{B}(x) , \quad \hat{B}(0) = 0 , \quad \hat{B}(h) = \mu_0 I\sqrt{2}/b , \quad (4.40)$$

und dazu die Lösung

$$\hat{B}(x) = \frac{\mu_0}{b} I\sqrt{2} \frac{\sin(kx)}{\sin(kh)} , \quad k = (1-j)/\delta , \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}} . \quad (4.41)$$

Die zugehörige **elektrische Stromdichte** folgt damit wie üblich aus Gl. (4.8)₁,

$$\begin{aligned} \vec{J} &= J(x, t)\vec{e}_z , \quad J(x, t) = \operatorname{Re} \left[\hat{J}(x)e^{j\omega t} \right] , \\ \hat{J}(x) &= \frac{I\sqrt{2}}{bh} kh \frac{\cos(kx)}{\sin(kh)} . \end{aligned} \quad (4.42)$$

Während sich für $k \rightarrow 0$, d.h. $\omega \rightarrow 0$ die gleichförmige Stromverteilung mit der Dichte $I\sqrt{2}/(bh)$ ergibt, finden wir mit wachsender Frequenz tatsächlich ein Zusammendrängen des Stroms am freien Leiterrand $x = h$. Das Leiterinnere einschließlich des Randes bei $x = 0$ wird dagegen zunehmend strom- und flussfrei. Im Grenzfall $\omega \rightarrow \infty$ tritt der gesamte, vorgegebene Strom als Flächenstrom am Rand $x = h$ auf.

Der Effekt der **Stromverdrängung** bewirkt gegenüber der gleichförmigen Verteilung **größere Joule-Verluste**, global gesehen also in Bezug auf den geführten Strom eine **Widerstandszunahme** des Leiterstabes. Um dazu quantitative Aussagen machen zu können, berechnen wir den Energiefluss durch die Hülle in den Leiter. Eine nicht verschwindende Normalkomponente des Poynting-Vektors tritt nur bei $x = h$ auf, deshalb ergibt sich mit $\hat{E}(h) = \hat{J}(h)/\gamma$ und $\hat{H}(h) = \hat{B}(h)/\mu_0 = I\sqrt{2}/b$ für den **Augenblickswert des Energieflusses in den Leiter**

$$\begin{aligned} -bS_x(h, t) &= b \operatorname{Re} \left[\hat{E}(h)e^{j\omega t} \right] \operatorname{Re} \left[\hat{H}(h)e^{j\omega t} \right] \\ &= \frac{1}{2} b \operatorname{Re} \left[\hat{E}(h)\hat{H}^*(h) + \hat{E}(h)\hat{H}(h)e^{j2\omega t} \right] , \end{aligned} \quad (4.43)$$

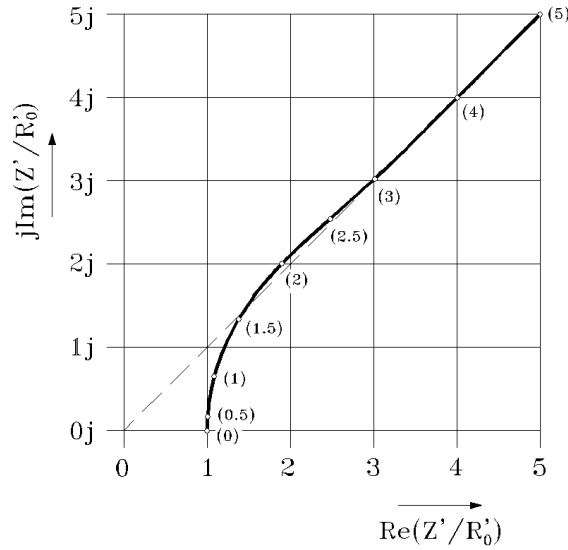


Abb. 4.7: Ortskurve der bezogenen inneren Impedanz des Leiters aus Abb. 4.6 in Abhängigkeit vom Parameter h/δ (Werte in Klammern). Strichliert gezeichnet ist die Asymptote $(1+j)h/\delta$.

bestehend aus einem zeitlichen Mittelwert — der auf die Leiterlänge bezogenen, im zeitlichen Mittel in Wärme umgesetzten Wirkleistung P' — und einer überlagerten Schwingung der doppelten Frequenz. Wie in der elementaren Wechselstromtechnik lässt sich daher, bezogen auf die Leiterlänge, eine **komplexe Scheinleistung** S' definieren, deren Realteil die längenbezogene Wirkleistung P' und deren Imaginärteil die längenbezogene Blindleistung Q' liefert,

$$S' = \frac{1}{2} b \hat{E}(h) \hat{H}^*(h) = \frac{|I|^2}{\gamma b h} k h \cot(kh), \quad (4.44)$$

$$P' = \text{Re}(S'), \quad Q' = \text{Im}(S'),$$

und damit auch die längenbezogene, komplexe **innere Impedanz** des Leiters,

$$Z' = S'/|I|^2 = R'_0 k h \cot(kh), \quad R'_0 = 1/(\gamma b h), \quad k = (1-j)/\delta. \quad (4.45)$$

R'_0 ist der längenbezogene Widerstand ohne Stromverdrängung. Eine Darstellung als Ortskurve mit h/δ als Parameter gibt Abb. 4.7. Im Grenzfall $kh \rightarrow 0$ ($\omega \rightarrow 0$) stimmt die innere Impedanz mit dem Widerstand ohne Stromverdrängung überein. Mit wachsender Frequenz nehmen sowohl ihr Realteil — er ist für die Joule-Verluste verantwortlich — wie auch ihr Imaginärteil — die innere Reaktanz des Leiters — zu, asymptotisch proportional zu $\sqrt{\omega}$.

Ausgewählte Literatur

Eine gute Behandlung der Diffusion magnetischer Felder mit Anwendung enthält

H.H. Woodson, J.R. Melcher: *Electromechanical Dynamics*, Part II.
New York: Wiley, 1968.

In der Monographie

R.L. Stoll: *The Analysis of Eddy Currents*. Oxford: Clarendon, 1974

werden analytische und numerische Methoden der Wirbelstromberechnung entwickelt.

Kapitel 5

Elektromagnetische Wellen

5.1 Grundgleichungen und Potenziale

Elektrische und magnetische Felder, die wir in diesem Kapitel untersuchen, sind sowohl über das Induktionsgesetz wie auch über Verschiebungsströme im Ampère–Maxwell–Satz so eng gekoppelt, dass keine der beiden Komponenten als dominant betrachtet werden kann. Wir werden deshalb eine allgemeine Lösungstheorie für die vollständigen Maxwell–Gleichungen entwickeln, uns dabei aber auf ruhende Körper und ganz einfaches Materialverhalten beschränken. Anhand des Hertz–Dipols lassen sich einige wichtige Eigenschaften von Strahlungsfeldern untersuchen.

Allgemeine Eigenschaften elektromagnetischer Felder

Ausgehend von den Betrachtungen im Abschnitt 2.1 fassen wir zuerst die allgemeinen Eigenschaften elektromagnetischer Felder zusammen. Verteilungen der *elektrischen Spannung* und des *magnetischen Flusses* erfüllen stets das *Induktionsgesetz* und den *Satz vom magnetischen Hüllenfluss*,

$$\begin{aligned} U(\partial\mathcal{A}) + \dot{\Phi}(\mathcal{A}) &= 0, \\ \Phi(\partial\mathcal{V}) &= 0, \end{aligned} \tag{5.1}$$

konsistente Orientierungen der Bereiche vorausgesetzt. Nach Darstellung der Verteilungen durch euklidische Vektorfelder folgen daraus die lokalen Beziehungen

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} &= \vec{0}, & \vec{n} \times \llbracket \vec{E} \rrbracket &= \vec{0}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, & \vec{n} \cdot \llbracket \vec{B} \rrbracket &= 0. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Verteilungen der *magnetischen Spannung* und des *elektrischen Flusses* sind andererseits so konzipiert, dass sie zusammen mit Verteilungen *elektrischer Ströme* und *Ladungen* immer dem *Ampère–Maxwell–Satz* und dem *Satz vom elektrischen Hüllenfluss* genügen,

$$\begin{aligned} V(\partial\mathcal{A}) - \dot{\Psi}(\mathcal{A}) &= I(\mathcal{A}), \\ \Psi(\partial\mathcal{V}) &= Q(\mathcal{V}), \end{aligned} \tag{5.3}$$

falls die Bereiche wieder konsistent orientiert sind. Der Satz von der **Erhaltung der elektrischen Ladung** ist darin enthalten. Lokal ergeben sich nach Einführung der lokalen Repräsentanten die Beziehungen

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{H} - \partial_t \vec{D} &= \vec{J}, & \vec{n} \times [\vec{H}] &= \vec{K}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \varrho, & \vec{n} \cdot [\vec{D}] &= \sigma.\end{aligned}\quad (5.4)$$

Mit physikalischem Gehalt ausgestattet wird dieses formale Gerüst durch Einbringen der Eigenschaften des Raumes und von Körpern als Träger des Strom-Ladungs-Feldes, ausgedrückt in den Verknüpfungsbeziehungen und in Materialgleichungen.

Elektrodynamische Potenziale

In einfachen Fällen lässt sich das System der Maxwell-Gleichungen direkt mit den Feldstärken oder Flussdichten als abhängige Variablen lösen. Häufig erweist es sich, wie in Kapitel 3 deutlich wurde, jedoch als günstig, Potenziale einzuführen und damit die Bedingungen (5.1) bzw. (5.2) im Vorhinein zu erfüllen.

Zunächst lässt sich Gl. (5.2)₃ durch die Einführung eines Vektorpotenzials \vec{A} über die Darstellung $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ formal lösen. Eintragen in (5.2)₁ weist dann wegen $\vec{\nabla} \times (\vec{E} + \partial_t \vec{A}) = \vec{0}$ das Vektorfeld $\vec{E} + \partial_t \vec{A}$ als wirbelfrei aus, es ist somit als (negativer) Gradient eines Skalarpotenzials φ darstellbar. Für jede raumfeste Kurve \mathcal{C} mit dem Anfangspunkt \mathcal{P}_1 und dem Endpunkt \mathcal{P}_2 , und für jede Fläche \mathcal{A} mit dem Rand $\partial\mathcal{A}$ haben wir dann

$$\begin{aligned}U(\mathcal{C}) &= \int_{\mathcal{C}} \vec{s} \cdot \vec{E} \, ds = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{C}} \vec{s} \cdot \vec{A} \, ds + \varphi(\mathcal{P}_1) - \varphi(\mathcal{P}_2), & \vec{E} &= -\partial_t \vec{A} - \vec{\nabla} \varphi, \\ \Phi(\mathcal{A}) &= \int_{\mathcal{A}} \vec{n} \cdot \vec{B} \, dA = \int_{\partial\mathcal{A}} \vec{s} \cdot \vec{A} \, ds, & \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A}.\end{aligned}\quad (5.5)$$

Im Rahmen einer nichtrelativistischen Kinematik gilt die Darstellung (5.5)₃ auch für bewegte Flächen, während Gl. (5.5)₁ für mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegte Kurven wegen $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$ durch

$$U(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} \vec{s} \cdot \vec{E}' \, ds = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{C}} \vec{s} \cdot \vec{A} \, ds + (\vec{v} \cdot \vec{A} - \varphi) \Big|_{\mathcal{P}_1}^{\mathcal{P}_2} \quad (5.6)$$

zu ersetzen ist.

Durch die elektrodynamischen Potenziale \vec{A} , φ sind zwar die Felder \vec{E} , \vec{B} eindeutig festgelegt, die Umkehrung gilt aber nicht. Wenn nämlich die Potenziale unter Verwendung eines hinreichend glatten, sonst aber beliebigen Skalarfeldes C — genannt Eichfunktion — einer Eichtransformation

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} C, \quad \varphi' = \varphi - \partial_t C \quad (5.7)$$

unterworfen werden, so bestimmen die neuen Potenziale \vec{A}' , φ' offensichtlich die gleichen Felder \vec{E} , \vec{B} wie die alten. Die damit gewonnene Freiheit in der Wahl der Potenziale gilt es vorteilhaft zu nutzen.

Angenommen, die Strom- und Ladungsverteilung ist mit den Feldern \vec{J} und ϱ bekannt, und der Feldraum ist mit einem Medium ausgefüllt, das sich zumindest bereichsweise durch konstante skalare Werte der Permittivität ε und der Permeabilität μ charakterisieren lässt (Zusammen mit $\mu = \mu_0$ und $\varepsilon = \varepsilon_0$ können wir speziell auch die effektiven Strom- und Ladungsverteilungen \vec{J}^e , ϱ^e erfassen). Eintragen zuerst der Materialgleichungen $\vec{H} = \vec{B}/\mu$, $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ und dann der Potenzialdarstellungen (5.5)_{2,4} in die Gln. (5.4)_{1,3} führt auf die Beziehungen

$$\begin{aligned}\nabla^2 \vec{A} - \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \mu \varepsilon \partial_t^2 \vec{A} - \mu \varepsilon \vec{\nabla} \partial_t \varphi &= -\mu \vec{J}, \\ \nabla^2 \varphi + \partial_t \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= -\varrho/\varepsilon,\end{aligned}\quad (5.8)$$

die sich auch in der Form

$$\begin{aligned}\nabla^2 \vec{A} - \mu \varepsilon \partial_t^2 \vec{A} - \vec{\nabla} \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu \varepsilon \partial_t \varphi \right] &= -\mu \vec{J}, \\ \nabla^2 \varphi - \mu \varepsilon \partial_t^2 \varphi + \partial_t \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu \varepsilon \partial_t \varphi \right] &= -\varrho/\varepsilon\end{aligned}\quad (5.9)$$

schreiben lassen. Durch eine passende Eichung können diese Gleichungen nun vereinfacht werden. So ist es manchmal vorteilhaft, die bereits im Fall stationärer und quasistationärer Felder eingeführte **Maxwell-Eichung**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (5.10)$$

zu benutzen. Tatsächlich lässt sich eine Eichfunktion C angeben, die es gestattet, von einer beliebigen Eichung auf die Maxwell-Eichung überzugehen. Günstig dabei ist, dass das Skalarpotenzial φ gemäß Gl. (5.8)₂ mit (5.10) eine Poisson-Gleichung

$$\nabla^2 \varphi = -\varrho/\varepsilon \quad (5.11)$$

wie in der Elektrostatik erfüllt (daher auch die verbreitete Benennung „Coulomb-Eichung“). Ausgehend von Gl. (5.8)₁ lässt sich dann zeigen, dass das Vektorpotenzial \vec{A} für eine im ganzen Raum \mathcal{R} gegebene Stromverteilung der Gleichung

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu \varepsilon \partial_t^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}_t, \quad \vec{J}_t = \vec{J} + \vec{\nabla} \int_{\mathcal{R}} \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{J}'}{4\pi R} dV' \quad (5.12)$$

mit der quellenfreien („transversalen“) Stromdichte \vec{J}_t genügt.

Häufiger findet sich in den Anwendungen eine durch die Form der Gln. (5.9) nahegelegte Eichung. Genügen nämlich die Potenziale der Bedingung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu \varepsilon \partial_t \varphi = 0, \quad (5.13)$$

Lorentz-Eichung genannt, so wird die Entkopplung in Form zweier inhomogener Wellengleichungen

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu \varepsilon \partial_t^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}, \quad \nabla^2 \varphi - \mu \varepsilon \partial_t^2 \varphi = -\varrho/\varepsilon \quad (5.14)$$

erreicht. Wenn die Potenziale \vec{A} , φ nicht die Bedingung (5.13) erfüllen, dann können sie durch die Transformation (5.7) mit einer Eichfunktion C , die eine Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$\nabla^2 C - \mu \varepsilon \partial_t^2 C = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \mu \varepsilon \partial_t \varphi \quad (5.15)$$

darstellt, auf die gewünschte Form gebracht werden. **Beachten Sie:** Durch die Lorentz-Eichung sind die Potenziale noch nicht eindeutig festgelegt. Es sind immer noch Eichtransformationen (5.7) mit Funktionen C möglich, die der homogenen Wellengleichung $\nabla^2 C - \mu\varepsilon\partial_t^2 C = 0$ genügen.

Einfache Wellengleichungen

In Medien mit konstanten, skalaren Werten der Permeabilität μ und der Permittivität ε , insbesondere im leeren Raum, führen unsere Grundgleichungen (5.2) und (5.4),

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} &= \vec{0}, & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu\varepsilon\partial_t \vec{E} &= \mu\vec{J}, & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \varrho/\varepsilon,\end{aligned}\quad (5.16)$$

nach Elimination von entweder \vec{B} oder \vec{E} auf

$$\begin{aligned}\nabla^2 \vec{E} - \mu\varepsilon\partial_t^2 \vec{E} &= \vec{\nabla} \varrho/\varepsilon + \mu\partial_t \vec{J}, \\ \nabla^2 \vec{D} - \mu\varepsilon\partial_t^2 \vec{D} &= \vec{\nabla} \varrho + \mu\varepsilon\partial_t \vec{J}, \\ \nabla^2 \vec{B} - \mu\varepsilon\partial_t^2 \vec{B} &= -\mu\vec{\nabla} \times \vec{J}, \\ \nabla^2 \vec{H} - \mu\varepsilon\partial_t^2 \vec{H} &= -\vec{\nabla} \times \vec{J}.\end{aligned}\quad (5.17)$$

Die strukturelle Verwandtschaft dieser Gleichungen für bekannte Strom- und Ladungsverteilungen ist offensichtlich. Auch das Vektorpotenzial \vec{A} erfüllt wegen (5.12)₁ oder (5.14)₁ eine Gleichung dieses Typs, das Skalarpotenzial φ bei Lorentz-Eichung eine entsprechende Gleichung (5.14)₂ für skalare Felder. Ihre Grundform

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)w = -f \quad (5.18)$$

mit reellwertigen Funktionen $w(\vec{r}, t)$ und $f(\vec{r}, t)$ und reellen Konstanten c heißt inhomogene **Wellengleichung**, im Fall $f \equiv 0$ homogene Wellengleichung oder kurz Wellengleichung. Sie gilt unter den genannten Voraussetzungen und mit der **Ausbreitungsgeschwindigkeit**

$$c = 1/\sqrt{\mu\varepsilon} \quad (5.19)$$

direkt für ein Lorentz-geeichtes Skalarpotenzial, aber auch für die **kartesischen** Koeffizienten der Vektorfelder \vec{A} , \vec{E} , \vec{B} , \vec{D} , \vec{H} . Der in Klammern gesetzte Differenzialoperator in Gl. (5.18) heißt **d'Alembert-Operator**. Eine Funktion $G(\vec{r}, \vec{r}', t, t')$, die für feste \vec{r} , t der Gleichung

$$\left(\nabla'^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t'^2\right)G(\vec{r}, \vec{r}', t, t') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}')\delta(t - t') \quad (5.20)$$

genügt, nennen wir **Grundlösung des d'Alembert-Operators**. Wie sich zeigen lässt, etwa durch Anwendung der Fourier-Transformation, ist

$$G(\vec{r}, \vec{r}', t, t') = \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|}\delta(t - t' - |\vec{r} - \vec{r}'|/c) \quad (5.21)$$

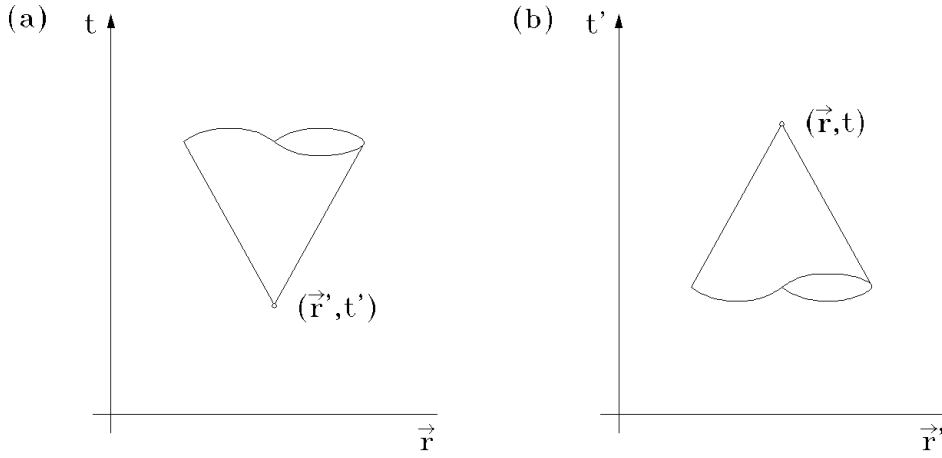


Abb.5.1: Veranschaulichung der Kausalitätsbedingung (5.22).

eine solche Grundlösung, aber offensichtlich auch jede Funktion, die daraus durch Addition einer Lösung $g(\vec{r}, \vec{r}', t, t')$ für feste \vec{r}, t der homogenen Wellengleichung entsteht. Im Zusammenhang mit Rand- und Anfangswertproblemen werden Grundlösungen auch **Green-Funktionen** genannt. Im Speziellen ist der Ausdruck (5.21) die Green-Funktion der Wellengleichung für den unbegrenzten, vollständigen Raum. Sie beschreibt, wie sich die von einem singulären Ereignis im Raum-Zeit-Punkt (\vec{r}', t') ausgehende Welle ausbreitet. Raum-Zeit-Punkte (\vec{r}, t) , für die (5.21) mit festem (\vec{r}', t') Werte ungleich Null liefert, liegen auf dem Halbkegel

$$c^2(t - t')^2 - |\vec{r} - \vec{r}'|^2 = 0, \quad t > t' \quad (5.22)$$

in der vierdimensionalen Raum-Zeit, Lichtkegel genannt (Abb. 5.1a). Er enthält alle Punkte (\vec{r}, t) , die eine zum Zeitpunkt t' am Ort \vec{r}' ausgesandte Welle erreichen kann. Umgekehrt können nur solche Ereignisse (\vec{r}', t') ein Signal in einem festen Raum-Zeit-Punkt (\vec{r}, t) liefern, welche die Kegelbedingung (5.22) erfüllen (Abb. 5.1b).

Ähnlich wie für die Poisson-Gleichung können wir auch für die inhomogene Wellengleichung (5.18) partikuläre Lösungen durch lineare Überlagerung mit Hilfe von Grundlösungen in der Form

$$w_p(\vec{r}, t) = \iint G(\vec{r}, \vec{r}', t, t') f(\vec{r}', t') dV' dt' \quad (5.23)$$

angeben, wobei die Integration über den gesamten Trägerbereich der „Quellenfunktion“ f in der Raum-Zeit zu erstrecken ist. Wenn es sich bei der verwendeten Grundlösung um die Green-Funktion eines vorliegenden Problems handelt, dann haben wir damit bereits die vollständige Lösung gefunden — zumindest aber auf Quadraturen zurückgeführt. Beispielsweise liefert der Ausdruck (5.21) in (5.23) nach Integration über t' die partikuläre Lösung

$$w_p(\vec{r}, t) = \int_{\mathcal{V}} \frac{f(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} dV', \quad (5.24)$$

die gleichzeitig die vollständige formale Lösung für den unbegrenzten Raum darstellt. Wir bemerken die Ähnlichkeit zu entsprechenden Lösungen der Poisson-Gleichung (z.B. (3.14)); allerdings erscheint die Zeitvariable um den Betrag $|\vec{r} - \vec{r}'|/c$ rückdatiert, also genau um die Zeitspanne, die das Signal benötigt, um vom Ort \vec{r}' an den Ort \vec{r} zu gelangen. Man nennt die Darstellung (5.24) deshalb auch **retardierte** Darstellung und schreibt mit $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ vereinfacht

$$w_p = \int_{\mathcal{V}} \frac{f'_{ret}}{4\pi R} dV', \quad f'_{ret} = f(\vec{r}', t - R/c), \quad (5.25)$$

beispielsweise für Lorentz-geeichte elektrodynamische Potenziale als partikuläre Lösungen der Gln. (5.14)

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{J}'_{ret}}{R} dV', \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\mathcal{V}} \frac{\varrho'_{ret}}{R} dV'. \quad (5.26)$$

In Anwendungen liegen sehr oft zeitlich sinusförmig sich ändernde Feldgrößen vor, die wir vorteilhaft in der Form

$$\begin{aligned} w(\vec{r}, t) &= \text{Re} [\underline{w}(\vec{r}) e^{j\omega t}] , \\ f(\vec{r}, t) &= \text{Re} [\underline{f}(\vec{r}) e^{j\omega t}] \end{aligned} \quad (5.27)$$

mit komplexwertigen Amplitudenfunktionen $\underline{w}(\vec{r})$ bzw. $\underline{f}(\vec{r})$ schreiben. Damit ist

$$f(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c) = \text{Re} \left[\underline{f}(\vec{r}') e^{j\omega(t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)} \right], \quad (5.28)$$

und mit der Kreiswellenzahl $k = \omega/c$ ergibt sich aus Gl. (5.24)

$$\underline{w}_p(\vec{r}) = \int_{\mathcal{V}} \frac{\underline{f}(\vec{r}') e^{-jk|\vec{r} - \vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (5.29)$$

Im Speziellen besitzen die Amplitudenfunktionen der elektrodynamischen Potenziale (5.26) dann die häufig verwendeten, **komplexen Darstellungen**¹

$$\begin{aligned} \underline{\vec{A}}(\vec{r}) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \underline{\vec{J}}(\vec{r}') \frac{e^{-jk|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV', \\ \underline{\varphi}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\mathcal{V}} \underline{\varrho}(\vec{r}') \frac{e^{-jk|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Umfasst der Feldbereich nicht den ganzen, einheitlich durch die konstante Ausbreitungsgeschwindigkeit c gekennzeichneten Raum, sondern gibt es Ränder, so sind den partikulären Lösungen zur Erfüllung der vorgeschriebenen Randbedingungen i.A. noch Lösungen der homogenen Wellengleichung zu überlagern.

¹Tatsächlich wird nur $\underline{\vec{A}}(\vec{r})$ benötigt, da sich $\underline{\varphi}(\vec{r})$ daraus über die Lorentz-Eichung (5.13) in komplexer Form, $\vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{A}} = -j\omega\mu\epsilon\underline{\varphi}$, berechnen lässt.

Der Hertz–Dipol

Um einige grundlegende Eigenschaften der Erzeugung und Ausbreitung elektromagnetischer Wellen kennenzulernen, werden wir im Folgenden das elektromagnetische Feld eines schwingenden elektrischen Dipols untersuchen.

Stellen wir uns zuerst eine kontinuierliche Dipolverteilung im leeren Raum vor, charakterisiert durch das Polarisationsfeld $\vec{P}(\vec{r}, t)$. Diesem entspricht die fiktive Ladungsdichte $\varrho^f = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ und die fiktive Stromdichte $\vec{J}^f = \partial_t \vec{P}$. Durch Einsetzen in (5.26) und Vertauschen der Ableitungen mit der Integration ergibt sich²

$$\vec{A} = \partial_t \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{P}'_{ret}}{R} dV', \quad \varphi = -\vec{\nabla} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{P}'_{ret}}{R} dV', \quad (5.31)$$

wobei die Retardation mit $t' = t - R/c_0$, $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$, zu erfolgen hat. Es ist in diesem Zusammenhang üblich, den **Hertz–Vektor** $\vec{\Pi}$ als ein weiteres Potenzial einzuführen, durch das die elektrodynamischen Potenziale \vec{A} und φ auf einfache Weise gemäß

$$\vec{A} = \frac{1}{c_0^2} \partial_t \vec{\Pi}, \quad \varphi = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} \quad (5.32)$$

ausgedrückt werden können. Der Vergleich mit (5.31) liefert

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{P}'_{ret}}{R} dV', \quad (5.33)$$

das Hertz–Vektorfeld genügt demnach offensichtlich der inhomogenen Wellengleichung

$$\nabla^2 \vec{\Pi} - \frac{1}{c_0^2} \partial_t^2 \vec{\Pi} = -\vec{P}/\epsilon_0. \quad (5.34)$$

Nehmen wir nun an, ein **elektrischer Dipol** mit dem zeitlich veränderlichen elektrischen Moment $\vec{p}(t)$ ist **im Ursprung** plaziert. Er ist als singuläre Verteilung durch die elektrische Polarisierung

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \vec{p}(t) \delta(\vec{r}) \quad (5.35)$$

darstellbar und erzeugt gemäß Gl. (5.33) das Hertz–Vektorfeld

$$\vec{\Pi}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{p}(t - r/c_0)}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad r = |\vec{r}|. \quad (5.36)$$

Unsere Aufgabe — die Berechnung des elektromagnetischen Feldes eines elektrischen Dipols — ist damit **für beliebige Zeitabhängigkeit im Prinzip gelöst**,

²Die Vertauschbarkeit der Integration mit der Zeitableitung in (5.31)₁ ist klar. Dass $\vec{\nabla}' \cdot$ als $\vec{\nabla} \cdot$ in (5.31)₂ vor das Integral gezogen werden kann, erfordert im direkten Beweis eine etwas ausführlichere Rechnung mit Voraussetzungen über die Beschränktheit von \vec{P} für wachsende $|\vec{r}|$. Abgesehen von einem zeitunabhängigen Anteil lässt sich (5.31)₂ aber auch aus (5.31)₁ über die Lorentz–Eichung (5.13) gewinnen.

weil sich aus dem Hertz-Vektorfeld über die Gln. (5.32) die elektrodynamischen Potenziale und daraus die Feldvektoren \vec{E} und \vec{B} ableiten lassen. Es ist aber interessant, den speziellen Fall des Dipols mit *sinusförmig schwingendem Moment*

$$\vec{p}(t) = \text{Re} [\underline{\vec{p}} e^{j\omega t}] \quad (5.37)$$

näher zu untersuchen, wobei wir im eingeschwungenen Zustand alle Felder $F(\vec{r}, t)$ nach dem Muster

$$F(\vec{r}, t) = \text{Re} [\underline{F}(\vec{r}) e^{j\omega t}] \quad (5.38)$$

schreiben und direkt mit den komplexwertigen, ortsabhängigen Amplitudenfunktionen $\underline{F}(\vec{r})$ arbeiten. Für den Hertz-Vektor folgt dann aus (5.36)

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}(\vec{r}, t) &= \text{Re} \left[\frac{\underline{\vec{p}} e^{j\omega(t-r/c_0)}}{4\pi\epsilon_0 r} \right] = \text{Re} [\underline{\vec{\Pi}}(\vec{r}) e^{j\omega t}] , \\ \underline{\vec{\Pi}}(\vec{r}) &= \frac{\underline{\vec{p}}}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-jk r}}{r} , \quad k = \omega/c_0 , \end{aligned} \quad (5.39)$$

was einer auslaufenden, harmonischen Kugelwelle der Kreiswellenzahl k entspricht: Die Flächen konstanter Phase sind im Ursprung zentrierte Kugeln, die mit der Lichtgeschwindigkeit c_0 wachsen. Über die Gleichungen (5.32) erhalten wir daraus zunächst für die elektrodynamischen Potenziale

$$\begin{aligned} \underline{\vec{A}} &= \frac{j\omega}{c_0^2} \underline{\vec{\Pi}} = \frac{\underline{\vec{p}}}{4\pi\epsilon_0} \frac{jk e^{-jk r}}{c_0 r} , \\ \underline{\varphi} &= -\vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{\Pi}} = \frac{\vec{e}_r \cdot \underline{\vec{p}}}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{jk}{r} \right) e^{-jk r} , \end{aligned} \quad (5.40)$$

und schließlich aus den Gln. (5.5)_{2,4} unter Verwendung von $\vec{\nabla}(\vec{e}_r \cdot \underline{\vec{p}}) = -\vec{e}_r \times (\vec{e}_r \times \underline{\vec{p}})/r$ für die magnetische Flussdichte und die elektrische Feldstärke³

$$\begin{aligned} \underline{\vec{B}} &= \vec{\nabla} \times \underline{\vec{A}} = -\frac{\vec{e}_r \times \underline{\vec{p}}}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{jk}{r} \right) \frac{jk e^{-jk r}}{c_0} , \\ \underline{\vec{E}} &= -j\omega \underline{\vec{A}} - \vec{\nabla} \varphi \\ &= \frac{3\vec{e}_r \vec{e}_r \cdot \underline{\vec{p}} - \underline{\vec{p}}}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^3} + \frac{jk}{r^2} \right) e^{-jk r} - \frac{\vec{e}_r \times (\vec{e}_r \times \underline{\vec{p}})}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{k^2 e^{-jk r}}{r} . \end{aligned} \quad (5.41)$$

Die magnetische Flussdichtelinien sind demnach koaxiale Kreise mit dem Zentrum auf der Dipolachse, $\underline{\vec{B}}$ liegt insbesondere orthogonal zur radialen Ausbreitungsrichtung \vec{e}_r (TM-Welle). Die elektrische Feldstärke liegt dagegen in der durch \vec{e}_r und $\underline{\vec{p}}$ aufgespannten Ebene und besitzt i.A. eine Komponente in Ausbreitungsrichtung.

Im Grenzfall $k \rightarrow 0$, d.h. $\omega \rightarrow 0$, verschwinden $\underline{\vec{A}}$ und $\underline{\vec{B}}$, während φ und $\underline{\vec{E}}$ das statische Feld eines elektrischen Dipols angeben:

$$\varphi = \frac{\vec{e}_r \cdot \underline{\vec{p}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} , \quad \underline{\vec{E}} = \frac{3\vec{e}_r \vec{e}_r \cdot \underline{\vec{p}} - \underline{\vec{p}}}{4\pi\epsilon_0 r^3} . \quad (5.42)$$

Dieser elektrostatische Feldcharakter dominiert auch für $\omega > 0$ die *Nahzone*

³ $\underline{\vec{E}}$ kann wegen (5.16)₃, d.h. $\underline{\vec{E}} = -j(c_0^2/\omega)\vec{\nabla} \times \underline{\vec{B}}$, auch direkt aus $\underline{\vec{B}}$ berechnet werden.

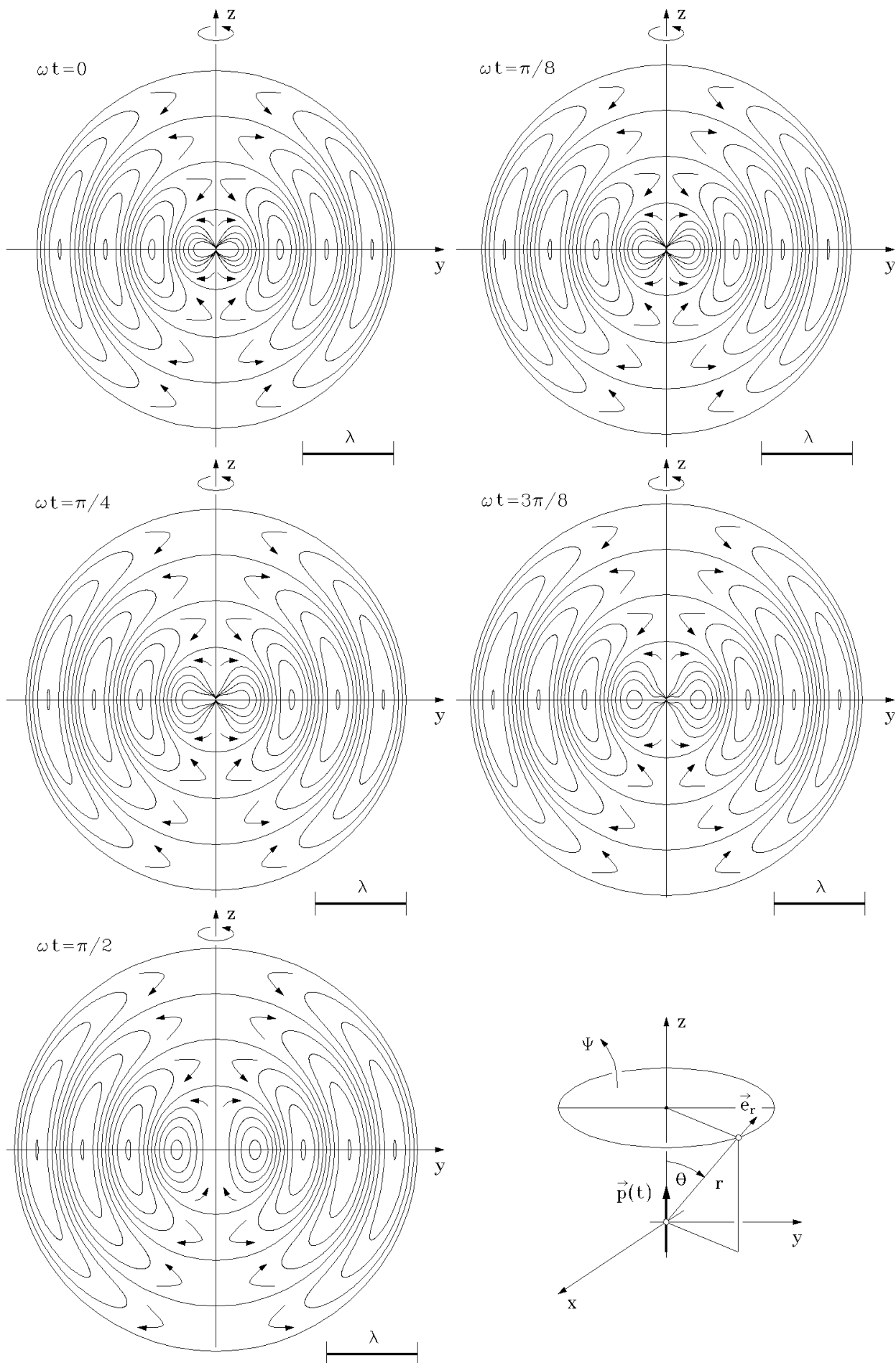


Abb.5.2: Elektromagnetisches Feld zu unterschiedlichen Zeitpunkten um einen elektrischen Dipol mit zeitlich sinusförmig verlaufendem elektrischem Moment. Dargestellt sind die Spuren von Rotationsflächen, die jeweils Bereiche konstanten elektrischen Flusses ψ begrenzen (Parameterwerte $2\psi/(k\hat{p})$ mit $\vec{p}(t) = \hat{p} \cos(\omega t) \vec{e}_z$). Diese Spuren repräsentieren gleichzeitig Vektorlinien der elektrischen Feldstärke.

$kr \ll 1$, d.h. den Feldbereich bis zu Abständen r von Quelle, die klein gegen die Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k$ sind:

$$\vec{B} = -\frac{\vec{e}_r \times \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{jk}{c_0}, \quad \vec{E} = \frac{3\vec{e}_r \vec{e}_r \cdot \vec{p} - \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad kr \ll 1. \quad (5.43)$$

Den Größenordnungen nach sind elektrische Feldstärke und magnetische Flussdichte in dieser Zone über $|\vec{B}| \approx (kr/c_0)|\vec{E}|$ verknüpft.

Ganz anders verhält sich das elektromagnetische Feld in der **Fernzone** $kr \gg 1$, auch Strahlungszone genannt, d.h. in Abständen r von der Quelle, die groß gegen die Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k$ sind: Unter Beibehaltung nur der führenden Terme in den Ausdrücken (5.41) erhalten wir

$$\vec{B} = \frac{\vec{e}_r \times \vec{p}}{4\pi\epsilon_0} \frac{k^2 e^{-jkr}}{c_0 r}, \quad \vec{E} = -\frac{\vec{e}_r \times (\vec{e}_r \times \vec{p})}{4\pi\epsilon_0} \frac{k^2 e^{-jkr}}{r}, \quad kr \gg 1. \quad (5.44)$$

\vec{B} und \vec{E} stehen zwar nach wie vor senkrecht aufeinander, beide Vektoren liegen nun aber auch senkrecht zur radialen Ausbreitungsrichtung \vec{e}_r (TEM-Wellen). Außerdem klingen ihre Amplituden mit wachsendem Abstand r nur mehr proportional zu $1/r$ ab. Dieses Verhalten ist typisch für elektromagnetische Strahlungsfelder punktförmiger Quellen. Eine Darstellung des Feldes, die alle Zonen umfasst, sehen Sie in Abb. 5.2.

Interessant ist in diesem Zusammenhang die **Untersuchung des Energieflusses** im elektromagnetischen Feld, lokal repräsentiert durch den Poynting-Vektor (Energieflussdichte)

$$\begin{aligned} \vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} &= \text{Re}(\vec{E} e^{j\omega t}) \times \text{Re}(\vec{H} e^{j\omega t}) \\ &= \text{Re}\left(\frac{1}{2}\vec{E} \times \vec{H}^* + \frac{1}{2}\vec{E} \times \vec{H} e^{j2\omega t}\right) \end{aligned} \quad (5.45)$$

oder dessen zeitlichen Mittelwert

$$\langle \vec{S} \rangle = \text{Re}(\vec{S}), \quad \vec{S} = \frac{1}{2}\vec{E} \times \vec{H}^*. \quad (5.46)$$

Einsetzen der berechneten Felder \vec{E} und $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$ aus Gln. (5.41) liefert

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{|\vec{e}_r \times \vec{p}|^2}{32\pi^2\epsilon_0} \cdot \frac{c_0 k^4}{r^2} \vec{e}_r, \quad (5.47)$$

also einen radial nach außen gerichteten Energiefluss, der entlang der Dipolachse verschwindet. In ein Raumwinkelement $d\Omega$ (Abb. 5.3a) wird demnach die Wirkleistung $dP = \vec{e}_r \cdot \langle \vec{S} \rangle r^2 d\Omega$ abgestrahlt. Die **raumwinkelbezogene Strahlungsleistung** ($|\vec{e}_r \times \vec{p}|^2 = |\vec{p}|^2 \sin^2(\theta)$)

$$\frac{dP}{d\Omega} = \vec{e}_r \cdot \langle \vec{S} \rangle r^2 = \frac{|\vec{p}|^2 c_0 k^4}{32\pi^2\epsilon_0} \sin^2(\theta), \quad (5.48)$$

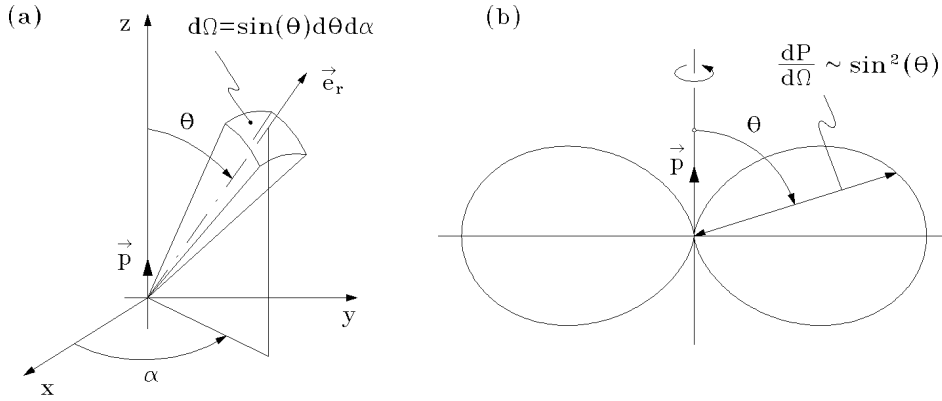


Abb. 5.3: (a) Zur Definition des Raumwinkelements. (b) Winkelverteilung der raumwinkelbezogenen Strahlungsleistung (Strahlstärke) des strahlenden elektrischen Punktdipols nach Gl. (5.48).

im optischen Bereich auch **Strahlstärke** genannt (Abb. 5.3b), ist — typisch für Punktstrahler — unabhängig von r . Schließlich ergibt sich für die **gesamte Strahlungsleistung** durch Integration über den vollen Raumwinkel

$$\begin{aligned}
 P &= \int \frac{dP}{d\Omega} d\Omega = \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) \int_0^{2\pi} d\alpha \frac{dP}{d\Omega} = \frac{|\vec{p}|^2 c_0 k^4}{12\pi \varepsilon_0} = \\
 &= \frac{\omega^2 |\vec{p}|^2}{12\pi} k^2 Z_0 .
 \end{aligned} \tag{5.49}$$

Die universelle Konstante

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \mu_0 c_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c_0} = 376,730 \dots \Omega \tag{5.50}$$

heißt **charakteristische Impedanz des leeren Raumes**.

Der Hertz-Dipol kann als **Modell für offene Antennen** dienen, deren Abmessungen klein gegenüber der Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k = c_0/f$ der ausgesandten elektromagnetischen Strahlung sind. Nehmen wir zuerst an, elektrische Ladung wird lediglich an den Stellen $z = \pm \ell/2$ gespeichert und über eine geeignete Doppelleitung als Sinusstrom mit dem Effektivwert I zugeführt (Abb. 5.4a). Im eingeschwungenen Zustand gilt dann für die komplexe Amplitude des elektrischen Moments

$$\vec{p} = -j\sqrt{2}I\ell/\omega \vec{e}_z , \tag{5.51}$$

und damit über Gl. (5.49) und $k = 2\pi/\lambda$ für die gesamte Strahlungsleistung, ausgedrückt durch den Speisestrom,

$$P = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{\ell}{\lambda} \right)^2 Z_0 I^2 . \tag{5.52}$$

Es ist üblich, diese Beziehung für Vergleichszwecke in der Form

$$P = R_S I^2 , \quad R_S = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{\ell}{\lambda} \right)^2 Z_0 \tag{5.53}$$

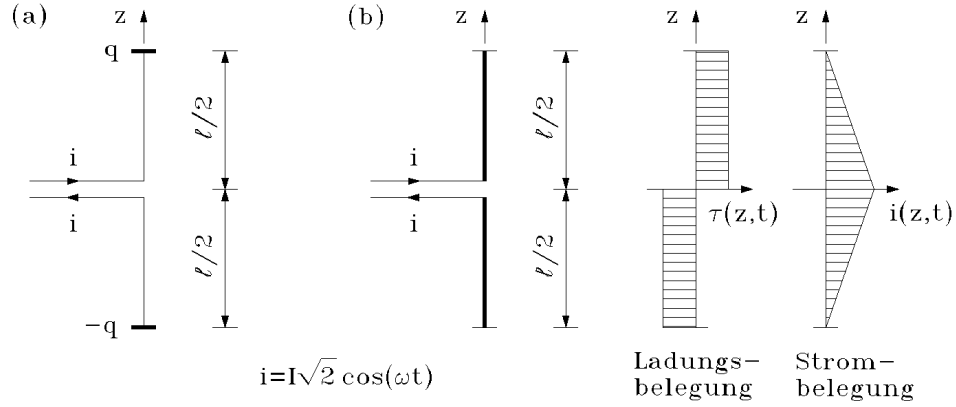


Abb.5.4: Zwei Strahler, für die der Hertz-Dipol unter der Voraussetzung $\ell \ll \lambda$ als Modell dienen kann.

zu schreiben und den **Strahlungswiderstand** R_S des Hertz-Dipols als Kenngröße einzuführen (Beachten Sie die Voraussetzung $\ell \ll \lambda$). Soll der Strahler durch einen Ersatz-Zweipol dargestellt werden, so gibt R_S den zugehörigen Wirkwiderstand an. Die vollständige Ersatzimpedanz enthält außerdem einen (kapazitiven) Blindwiderstand.

Der Strahlungswiderstand hängt von der konstruktiven Gestaltung des Strahlers ab. Angenommen, die Ladungsspeicherung erfolgt nicht nur an den Stellen $z = \pm \ell/2$, sondern gleichförmig verteilt über zwei kurze Schenkel der Länge $\ell/2 \ll \lambda/2$ (Abb. 5.4b). Ausgehend von einem zeitlich sinusförmigen Speisestrom mit dem Effektivwert I haben wir in diesem Fall für die Ladungsbelegung und das elektrische Moment

$$\begin{aligned} \tau &= \pm I\sqrt{2}/(\omega\ell/2) \sin(\omega t) \quad \text{für } z \gtrless 0, \\ \vec{p} &= \int_{-\ell/2}^{\ell/2} z \vec{e}_z \tau(z, t) dz = \frac{I\sqrt{2}}{\omega} \frac{\ell}{2} \sin(\omega t) \vec{e}_z = \text{Re}(\underline{\vec{p}} e^{j\omega t}), \\ \underline{\vec{p}} &= -j\sqrt{2}I\ell/(2\omega) \vec{e}_z, \end{aligned} \tag{5.54}$$

was über Gl. (5.51) wieder auf einen Ausdruck der Form (5.53)₁ führt, allerdings mit einem geänderten Wert für den Strahlungswiderstand:

$$P = R_S I^2, \quad R_S = \frac{\pi}{6} \left(\frac{\ell}{\lambda} \right)^2 Z_0. \tag{5.55}$$

Lineare Antennen bis zu Längen $\ell \lesssim 0,2\lambda$ sind mit diesem Modell quantitativ hinreichend genau beschreibbar.

Ähnliche Überlegungen lassen sich auch für magnetische Dipole anstellen. Unterstützt werden wir dabei durch eine Beobachtung, die eine über diese spezielle Anwendung weit hinausgehende Bedeutung besitzt: Das System der **quellenfreien Maxwell-Gleichungen** zusammen mit den quellenfreien Sprungbedingungen und den allgemeinen Verknüpfungsbeziehungen,

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} &= \vec{0}, & \vec{n} \times [\vec{E}] &= \vec{0}, \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, & \vec{n} \cdot [\vec{B}] &= 0, \\
\vec{\nabla} \times \vec{H} - \partial_t \vec{D} &= \vec{0}, & \vec{n} \times [\vec{H}] &= \vec{0}, \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 0, & \vec{n} \cdot [\vec{D}] &= 0, \\
\vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \\
\vec{H} &= \vec{B}/\mu_0 - \vec{M},
\end{aligned} \tag{5.56}$$

wird durch die **Fitzgerald-Transformation**

$$\begin{aligned}
\vec{E} &\rightarrow \vec{H} Z_0, & \vec{H} &\rightarrow -\vec{E}/Z_0, \\
\vec{B} &\rightarrow -\vec{D} Z_0, & \vec{D} &\rightarrow \vec{B}/Z_0, \\
\vec{P} &\rightarrow \vec{M}/c_0, & \vec{M} &\rightarrow -\vec{P} c_0
\end{aligned} \tag{5.57}$$

offensichtlich in sich selbst übergeführt. Aus einer bereits gefundenen Lösung lässt sich daher über die Fitzgerald-Transformation eine neue Lösung gewinnen, nämlich die des **dualen elektromagnetischen Problems**.

Nehmen wir also an, der elektrische Dipol des Hertz-Strahlers wird durch einen **magnetischen Dipol** ersetzt. Wir erhalten dann beispielsweise die Energiestromdichte $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ — sie stellt wegen (5.57)_{1,2} eine Invariante der Fitzgerald-Transformation dar — aus dem entsprechenden Ausdruck für den elektrischen Dipol über die Substitution $\vec{p}(t) \rightarrow \vec{m}(t)/c_0$ des elektrischen Moments $\vec{p}(t)$ durch das magnetische Moment $\vec{m}(t)$ gemäß (5.57)₅. Ein mit der komplexen Amplitude \vec{m} schwingender magnetischer Dipol strahlt also nach Gl. (5.49) insgesamt die Leistung

$$P = \frac{|\vec{m}|^2 k^4}{12\pi} Z_0 \tag{5.58}$$

ab. Das Modell des magnetischen Dipols kann zur Darstellung einer Stromschleife mit der Schleifenfläche A verwendet werden, deren Abmessungen klein gegen die Wellenlänge λ sind und für die, wenn sie mit dem Effektivwert I sinusstromdurchflossen ist, der Zusammenhang $|\vec{m}| = I\sqrt{2}A$ besteht. Auch Strahlern dieser Art lässt sich ein Strahlungswiderstand zuordnen.

5.2 Typen von Wellen

Wellenerscheinungen spielen eine außerordentlich wichtige Rolle in vielen, ganz unterschiedlichen Zweigen der Physik und der Technik. Ich werde deshalb den Wellenbegriff und die zugehörigen Klassifizierungen und Benennungen zunächst etwas allgemeiner fassen, als dies in der elektromagnetischen Theorie üblich ist.

Begriffe und Benennungen

Wir betrachten Zustandsänderungen in räumlich und zeitlich kontinuierlich beschriebenen physikalischen Systemen. Solch eine Zustandsänderung nennen wir

allgemein dann eine **Welle**, wenn sie sich als einsinnige örtliche Verlagerung eines bestimmten Zustandes mit der Zeit beschreiben lässt.

Wellen können nach unterschiedlichen Gesichtspunkten eingeteilt werden, beispielsweise in freie und in geführte Wellen. Die **Ausbreitung freier Wellen** erfolgt auf ein-, zwei- oder dreidimensionalen Trägern. Reicht zur Beschreibung ihrer Ortsabhängigkeit eine einzige Ortskoordinate aus, so sprechen wir von einer **einfachen Welle**. Dies gilt natürlich für alle Wellen auf eindimensionalen Trägern, aber auch auf zweidimensionalen Trägern für **gerade Wellen** (Zustandsgrößen sind konstant längs paralleler Geraden) und für **Kreiswellen** (Zustandsgrößen sind konstant auf konzentrischen Kreisen), ebenso auf dreidimensionalen Trägern für **ebene Wellen**, **Kreiszylinder-Wellen** und **Kugel-Wellen**, bei denen die Zustandsgrößen jeweils auf parallelen Ebenen, auf coaxialen Kreiszylindern bzw. auf konzentrischen Kugeln konstant sind. Freie Wellen auf dreidimensionalen Trägern nennt man dann **Raumwellen**, wenn sie ausdrücklich von Oberflächenwellen unterschieden werden sollen. Ähnlich heißen freie Wellen auf zweidimensionalen Trägern **Flächenwellen**, um sie ausdrücklich von Kantenwellen zu unterscheiden.

Im Gegensatz zu freien Wellen sprechen wir von **geführten Wellen**, wenn die Ausbreitung infolge von Grenzbedingungen an Grenzflächen oder Grenzlinien auf drei- bzw. zweidimensionalen Trägern nur entlang dieser Grenzen erfolgt. Schließt die führende Grenze die Welle zumindest auf zwei Seiten ein, so heißt die geführte Welle **Kanalwelle**. Wenn dagegen die führende Grenze nur an einer Seite vorhanden ist und die Welle mit wachsender Entfernung von diesem Rand verschwindet, dann liegt eine **Randwelle** vor. Bei den Randwellen unterscheiden wir noch zwischen **Grenzschichtwellen** (einseitig von einer Grenzfläche zwischen zwei materiellen Trägern geführt), **Oberflächenwellen** (die einseitig führende Grenze ist eine freie Oberfläche) und **Kantenwellen** (der Rand ist eine Kante, also die Begrenzung eines zweidimensionalen Trägers).

Häufig sind die maßgebenden Zustandsgrößen von Wellen räumlich gerichtete Größen, die Wellen also durch spezielle Vektorfelder darstellbar. Liegt die Richtung einer solchen Zustandsgröße überall parallel oder antiparallel zur Ausbreitungsrichtung, so heißt die Welle **longitudinal**. Liegt sie dagegen überall senkrecht zur Ausbreitungsrichtung, so heißt die Welle **transversal**. Transversale Wellen nennt man insbesondere dann **linear polarisiert**, wenn sich die Richtung der Zustandsgröße während der Ausbreitung nicht ändert. Im Zusammenhang mit Sinuswellen ist außerdem der Begriff der elliptischen Polarisation mit den Grenzfällen der linearen und der zirkularen Polarisation gebräuchlich. Wir kommen darauf zurück.

Wellen lassen sich auch durch ihren Zeitverlauf charakterisieren. Entspricht z.B. der zeitliche Verlauf einer Welle an jedem festen Ort einer Sinusschwingung einheitlicher Frequenz, so nennt man sie allgemein **Sinuswelle**. Der Nullphasenwinkel dieser Sinusschwingungen, aber auch ihre Amplitude, ist i.A. ortsabhängig. Beispielsweise stellt ein Vektorfeld der Form

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left[\vec{\mathcal{F}} e^{j\omega t - \gamma \vec{\kappa} \cdot \vec{r}} \right] \quad (5.59)$$

mit einem konstanten, i.A. komplexen Vektor $\vec{\mathcal{F}}$ eine **ebene Sinuswelle** dar, wobei ω die reelle **Kreisfrequenz**, γ den **komplexen Ausbreitungskoeffizienten** und der reelle Einsvektor $\vec{\kappa}$ die **Ausbreitungsrichtung** der Welle angibt. Die

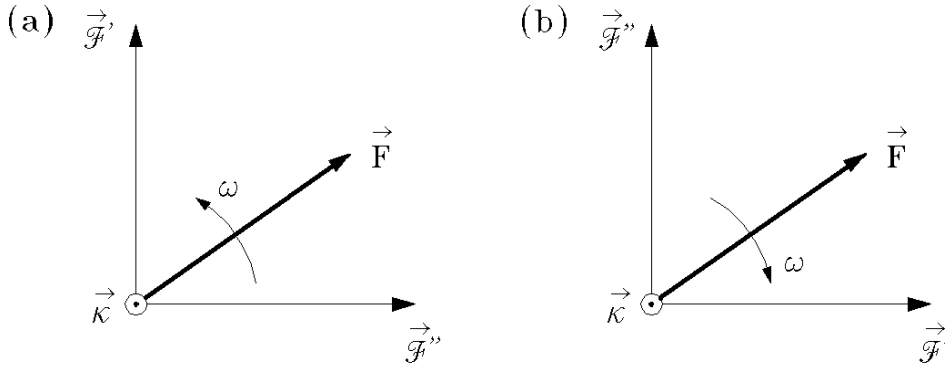


Abb.5.5: Zirkular polarisierte, transversale Sinuswellen. Die Bezeichnungen \vec{F} , ω , $\vec{\kappa}$ und $\vec{\mathcal{F}} = \vec{\mathcal{F}}' + j\vec{\mathcal{F}}''$ folgen der Darstellung (5.59), $\omega > 0$, $\beta > 0$. An jedem festen Ort gilt $|\vec{F}| = \text{const.}$

(a) Positive Helizität (linkszirkuläre Polarisation), $\vec{\kappa} \times \vec{\mathcal{F}} = j\vec{\mathcal{F}}$.

(b) Negative Helizität (rechtszirkuläre Polarisation), $\vec{\kappa} \times \vec{\mathcal{F}} = -j\vec{\mathcal{F}}$.

Aufspaltung des komplexen Ausbreitungskoeffizienten in Real- und Imaginärteil,

$$\gamma = \alpha + j\beta, \quad (5.60)$$

liefert den **Dämpfungskoeffizienten** α und den **Phasenkoeffizienten** β . Bei ungedämpften Sinuswellen ($\alpha = 0$) heißt der Phasenkoeffizient auch **Kreiswellenzahl**, wofür der Buchstabe k anstelle von β gebräuchlich ist,

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left[\vec{\mathcal{F}} e^{j(\omega t - k\vec{\kappa} \cdot \vec{r})} \right]. \quad (5.61)$$

Diese Darstellungsform wird manchmal auch für gedämpfte ebene Sinuswellen mit einer „komplexen Kreiswellenzahl“ $k = -j\gamma$ verwendet. Den Quotienten Kreisfrequenz durch Phasenkoeffizient,

$$c = \omega/\beta, \quad (5.62)$$

nennt man **Ausbreitungsgeschwindigkeit** der Sinuswelle, falls er nicht von ω bzw. β abhängt, d.h. wenn β proportional zu ω ist. Hängt dieser Quotient dagegen von ω bzw. β ab, so heißt die Welle **dispersierend** (oder dispersiv), und man unterscheidet zwischen der **Phasengeschwindigkeit** $c_{ph} = \omega/\beta$ und der **Gruppengeschwindigkeit** $c_{gr} = d\omega/d\beta$. Diese Begriffe werden wir später ausführlicher behandeln.

Die durch Gl. (5.59) dargestellte ebene Sinuswelle ist offensichtlich **longitudinal** für $\vec{\kappa} \times \vec{\mathcal{F}} = \vec{0}$ und **transversal** für $\vec{\kappa} \cdot \vec{\mathcal{F}} = 0$. Sie ist **linear polarisiert**, falls $\vec{\mathcal{F}}^* \times \vec{\mathcal{F}} = \vec{0}$. Stellen wir nämlich $\vec{\mathcal{F}}$ durch reelle Vektoren $\vec{\mathcal{F}}'$ und $\vec{\mathcal{F}}''$ als $\vec{\mathcal{F}} = \vec{\mathcal{F}}' + j\vec{\mathcal{F}}''$ dar, so bedeutet diese Bedingung $\vec{\mathcal{F}}' \times \vec{\mathcal{F}}'' = \vec{0}$, also die Parallelität von $\vec{\mathcal{F}}'$ und $\vec{\mathcal{F}}''$. Damit lässt sich $\vec{\mathcal{F}}$ darstellen als $\vec{\mathcal{F}} = \vec{F}_0 e^{j\chi_0}$ mit einem reellen Vektor \vec{F}_0 , und wir erhalten aus (5.59) $\vec{F}(\vec{r}, t) = \vec{F}_0 \text{Re} [e^{j\omega t - j\chi_0 - \gamma\vec{\kappa} \cdot \vec{r}}]$: Die Richtung der Zustandsgröße ist unabhängig von \vec{r} und t .

Die Welle ist dagegen **zirkular polarisiert**, wenn $\vec{\mathcal{F}} \cdot \vec{\mathcal{F}} = 0$. Die Aufspaltung von $\vec{\mathcal{F}}$ in Realteil $\vec{\mathcal{F}}'$ und Imaginärteil $\vec{\mathcal{F}}''$ liefert in diesem Fall $\vec{\mathcal{F}} \cdot \vec{\mathcal{F}} = \vec{\mathcal{F}}' \cdot \vec{\mathcal{F}}'$.

$\vec{\mathcal{F}}' - \vec{\mathcal{F}}'' \cdot \vec{\mathcal{F}}'' + 2j\vec{\mathcal{F}}' \cdot \vec{\mathcal{F}}'' = 0$, also die beiden Bedingungen $|\vec{\mathcal{F}}'| = |\vec{\mathcal{F}}''|$, $\vec{\mathcal{F}}' \cdot \vec{\mathcal{F}}'' = 0$: Die reellen Vektoren $\vec{\mathcal{F}}'$ und $\vec{\mathcal{F}}''$ besitzen den gleichen Betrag, sie stehen senkrecht zueinander und in einer transversalen Welle außerdem senkrecht zur Ausbreitungsrichtung $\vec{\kappa}$. Damit ist an jedem festen Ort die Zustandsgröße \vec{F} dem Betrag nach konstant, sie liegt in der Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung und ihre Richtung dreht sich mit der Kreisfrequenz ω . Der Drehsinn zusammen mit der Ausbreitungsrichtung bestimmt die **Helizität** der zirkular polarisierten, transversalen Sinuswelle (Abb. 5.5): Bilden sie eine Rechtsschraube, so sprechen wir von positiver Helizität (positivem Drehsinn, einer linkszirkular polarisierten Welle). Bei einer Linksschraube besitzt die Welle negative Helizität (negativen Drehsinn, ist rechtszirkular polarisiert). Lineare und zirkulare Polarisation sind Grenzfälle der **elliptischen Polarisation** einer Sinuswelle.

Freie ebene Raumwellen

Wir untersuchen zunächst den einfachsten Typ elektromagnetischer Wellen in nicht leitfähigen Medien konstanter Permittivität ε und Permeabilität μ , insbesondere also im leeren Raum. Ausgehend von den homogenen Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} + \mu \partial_t \vec{H} &= \vec{0}, & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} - \varepsilon \partial_t \vec{E} &= \vec{0}, & \vec{\nabla} \cdot \vec{H} &= 0\end{aligned}\quad (5.63)$$

fragen wir nach Bedingungen für die Existenz von Feldern $\vec{E}(\theta)$ und $\vec{H}(\theta)$, die von Ort und Zeit nur über eine Phasenfunktion

$$\theta(\vec{r}, t) = ct - \vec{\kappa} \cdot \vec{r} \quad (5.64)$$

mit einer konstanten Geschwindigkeit c und einem konstanten Einsvektor $\vec{\kappa}$ abhängen. Die Flächen konstanter Phase θ sind offensichtlich parallele Ebenen mit dem Einsnormalenvektor $\vec{\kappa}$, die parallel zu sich selbst mit der Geschwindigkeit c laufen. Wegen $\vec{\nabla}\theta = -\vec{\kappa}$ und $\partial_t\theta = c$ folgt zunächst aus (5.63)_{2,4}

$$\begin{aligned}-\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \vec{\kappa} \cdot \frac{d\vec{E}}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} (\vec{\kappa} \cdot \vec{E}) = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{\kappa} \cdot \vec{E} = \text{const}, \\ -\vec{\nabla} \cdot \vec{H} &= \vec{\kappa} \cdot \frac{d\vec{H}}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} (\vec{\kappa} \cdot \vec{H}) = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{\kappa} \cdot \vec{H} = \text{const}.\end{aligned}\quad (5.65)$$

Die Komponenten von \vec{E} und \vec{H} in Ausbreitungsrichtung müssen demnach konstant sein. Sie nehmen nicht am Ausbreitungsvorgang teil und wir können sie ohne Beschränkung der Allgemeinheit nullsetzen,

$$\vec{\kappa} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{\kappa} \cdot \vec{H} = 0. \quad (5.66)$$

Dies ist unser erstes Ergebnis: Die ebene elektromagnetische Welle ist unter den genannten Voraussetzungen **notwendig transversal**. Weiters liefern die Gln. (5.63)_{1,3}

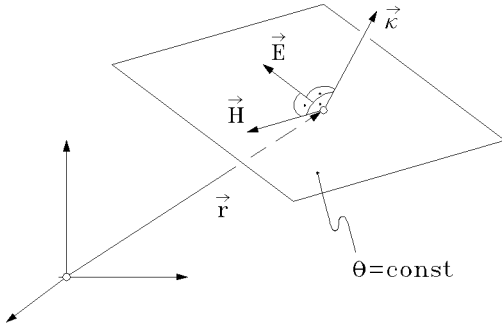


Abb. 5.6: Phasenfläche und gegenseitige Lage der Vektoren \vec{E} , \vec{H} , \vec{k} in einer ebenen elektromagnetischen Welle gemäß Gln. (5.68).

$$\begin{aligned}
 \vec{k} \times \frac{d\vec{E}}{d\theta} - \mu c \frac{d\vec{H}}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta} [\vec{k} \times \vec{E} - \mu c \vec{H}] = \vec{0} \\
 \Rightarrow \vec{k} \times \vec{E} - \mu c \vec{H} &= \text{const}, \\
 \vec{k} \times \frac{d\vec{H}}{d\theta} + \varepsilon c \frac{d\vec{E}}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta} [\vec{k} \times \vec{H} + \varepsilon c \vec{E}] = \vec{0} \\
 \Rightarrow \vec{k} \times \vec{H} + \varepsilon c \vec{E} &= \text{const},
 \end{aligned} \tag{5.67}$$

oder, wenn die Integrationskonstanten wieder nullgesetzt werden (sie repräsentieren transversale Felder, die nicht am Ausbreitungsvorgang teilnehmen),

$$\vec{k} \times \vec{E} - \mu c \vec{H} = \vec{0}, \quad \vec{k} \times \vec{H} + \varepsilon c \vec{E} = \vec{0}. \tag{5.68}$$

Das gleichzeitige Bestehen dieser beiden Bedingungen ist nur dann möglich, wenn die **Maxwell-Beziehung**

$$\mu \varepsilon c^2 = 1 \tag{5.69}$$

erfüllt ist. Dies legt den Wert der **Ausbreitungsgeschwindigkeit** c fest. Außerdem bilden die drei Vektoren \vec{E} , \vec{H} , \vec{k} ein **orthogonales Dreiein** und sind in dieser Reihenfolge nach einer Rechtsschraube orientiert (Abb. 5.6). Mit der **charakteristischen Impedanz** des freien Raums,

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \tag{5.70}$$

können wir die Bedingungen (5.68) auch in der Form

$$\begin{aligned}
 \vec{H} &= \frac{1}{Z} \vec{k} \times \vec{E} \quad \text{oder} \quad \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{k} \times \vec{E} \quad \text{oder} \\
 \vec{E} &= -Z \vec{k} \times \vec{H} \quad \text{oder} \quad \vec{D} = -\frac{1}{c} \vec{k} \times \vec{H}
 \end{aligned} \tag{5.71}$$

schreiben: Jede transversale elektrische ebene Welle ist notwendig von einer magnetischen Welle **gleicher Form** begleitet und umgekehrt. Daraus resultiert ein **Energiefluss** im elektromagnetischen Feld, lokal dargestellt durch den Poynting-Vektor

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{Z} E^2 \vec{k} = Z H^2 \vec{k}. \tag{5.72}$$

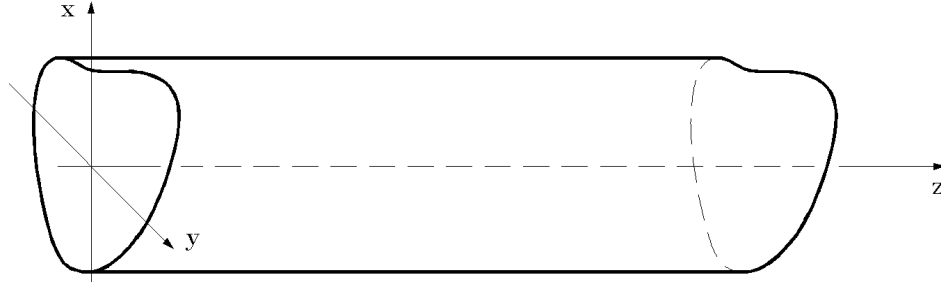


Abb.5.7: Zylindrischer Wellenleiter. Die Form der Querschnittsfläche ist beliebig.

Ein wichtiger Spezialfall ist die **ebene Sinuswelle** in einem elektrisch nicht leitfähigen Medium mit konstanten Werten μ und ε ,

$$\vec{E}(\theta) = \text{Re} \left[\vec{\mathcal{E}} e^{jk\theta} \right], \quad \vec{H}(\theta) = \text{Re} \left[\vec{\mathcal{H}} e^{jk\theta} \right]. \quad (5.73)$$

Der Vergleich mit der Darstellung (5.61) weist sie als ungedämpfte Welle aus mit der Kreiswellenzahl k und der Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = \omega/k$, wobei die i.A. komplexen Amplitudenvektoren $\vec{\mathcal{E}}$, $\vec{\mathcal{H}}$ die Bedingungen $\vec{\kappa} \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0$, $\vec{\kappa} \cdot \vec{\mathcal{H}} = 0$, $\vec{\mathcal{H}} = \vec{\kappa} \times \vec{\mathcal{E}}/Z$ erfüllen. Die Welle ist demnach transversal und i.A. elliptisch polarisiert. Im Fall einer zirkularen Polarisation gilt überdies $\vec{\kappa} \times \vec{\mathcal{E}} = \pm j\vec{\mathcal{E}}$ und damit $\vec{\mathcal{H}} = \pm j\vec{\mathcal{E}}/Z$. Es ist dann $|\vec{E}| = Z|\vec{H}| = \text{const}$, womit aus Gl. (5.72) folgt: In einem ebenen, zirkular polarisierten Wellenfeld ist die Energieflussdichte räumlich und zeitlich konstant.

Geführte Wellen in zylindrischen Anordnungen

Neben den freien ebenen Raumwellen sind für die Anwendungen insbesondere geführte Wellen wichtig, die sich entlang von Grenzflächen in translationsinvarianten Anordnungen in Richtung der Translationsachse ausbreiten. Ein typisches Beispiel dafür sind elektromagnetische Wellen in geraden metallischen Hohlleitern (Abb. 5.7), aber auch Wellen in Koaxialkabeln, entlang paralleler Drähte oder in Lichtwellenleitern. Wir werden hier der Einfachheit halber die **zylindrischen Randflächen** als **ideal elektrisch leitfähig** voraussetzen und für ein eventuell im Feldraum vorhandenes Medium verschwindende elektrische Leitfähigkeit sowie konstante Werte der Permittivität und Permeabilität annehmen.

Zur Untersuchung der **Ausbreitungsbedingungen** spalten wir die Feldvektoren \vec{E} und \vec{H} , den räumlichen Differenzialoperator $\vec{\nabla}$ und die Rotorgleichungen

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \mu \partial_t \vec{H} = \vec{0}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} - \varepsilon \partial_t \vec{E} = \vec{0} \quad (5.74)$$

bezüglich der Ausbreitungsrichtung \vec{e}_z in transversale und longitudinale Komponenten auf. Dies liefert mit

$$\vec{E} = \vec{E}_\perp + \vec{e}_z E_z, \quad \vec{H} = \vec{H}_\perp + \vec{e}_z H_z, \quad \vec{\nabla} = \vec{\nabla}_\perp + \vec{e}_z \partial_z \quad (5.75)$$

die Gleichungen

$$\begin{aligned}\partial_z \vec{E}_\perp - \mu \partial_t \vec{e}_z \times \vec{H}_\perp &= \vec{\nabla}_\perp E_z, \\ \partial_z \vec{H}_\perp + \varepsilon \partial_t \vec{e}_z \times \vec{E}_\perp &= \vec{\nabla}_\perp H_z,\end{aligned}\quad (5.76)$$

und

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}_\perp \times \vec{E}_\perp &= -\mu \partial_t H_z \vec{e}_z, \\ \vec{\nabla}_\perp \times \vec{H}_\perp &= \varepsilon \partial_t E_z \vec{e}_z.\end{aligned}\quad (5.77)$$

Aus den Divergenzgleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \quad (5.78)$$

folgt andererseits

$$\vec{\nabla}_\perp \cdot \vec{E}_\perp = -\partial_z E_z, \quad \vec{\nabla}_\perp \cdot \vec{H}_\perp = -\partial_z H_z. \quad (5.79)$$

Überdies haben die Feldstärken wegen der vorausgesetzten idealen Leitfähigkeit des Randes die „**ideal metallischen Randbedingungen**“

$$\vec{n} \times \vec{E} = \vec{0}, \quad \vec{n} \cdot \vec{H} = 0 \quad (5.80)$$

zu erfüllen, woraus zusammen mit (5.76)₂ speziell für E_z und H_z die Bedingungen

$$E_z = 0, \quad \partial_n H_z = 0 \quad \text{am Rand} \quad (5.81)$$

folgen.

Aus diesen Gleichungen lässt sich zunächst ein spezieller Lösungstyp erkennen, charakterisiert durch das identische Verschwinden der longitudinalen Feldkomponenten, $E_z = 0$ und $H_z = 0$. Dieser Wellentyp (Modus) heißt **transversal elektromagnetische Welle** — kurz **TEM-Welle** —, weil nur transversal zur Ausbreitungsrichtung gelegene Feldkomponenten existieren. Wie aus den Gln. (5.77) und (5.79) ersichtlich, genügen diese Komponenten dann in jedem Querschnitt $z = \text{const}$ und zu jedem Zeitpunkt jeweils den Bedingungen

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}_\perp \times \vec{E}_\perp &= \vec{0}, \quad \vec{\nabla}_\perp \cdot \vec{E}_\perp = 0, \\ \vec{\nabla}_\perp \times \vec{H}_\perp &= \vec{0}, \quad \vec{\nabla}_\perp \cdot \vec{H}_\perp = 0,\end{aligned}\quad (5.82)$$

wie sie auch für statische bzw. stationäre ebene Felder gelten. In ihrer z - und t -Abhängigkeit erfüllen sie andererseits, wie aus den Gln. (5.76) folgt, die einfachen Wellengleichungen

$$(\partial_z^2 - \mu\varepsilon\partial_t^2) \vec{E}_\perp = \vec{0}, \quad (\partial_z^2 - \mu\varepsilon\partial_t^2) \vec{H}_\perp = \vec{0}. \quad (5.83)$$

Falls also eine Wellenausbreitung dieser Art stattfindet, erfolgt sie, wie für ebene Wellen in einem unbegrenzten Medium, mit der konstanten Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$, und die transversalen Feldkomponenten genügen der Bedingung (5.68) mit $\vec{\kappa} = \vec{e}_z$, insbesondere $\vec{E}_\perp \cdot \vec{H}_\perp = 0$.

Der statische bzw. stationäre Charakter der transversalen Felder hat eine wichtige Konsequenz: **TEM-Wellen können in idealen Hohlleitern mit einfach zusammenhängendem Querschnitt nicht existieren.** Wegen der idealen Leitfähigkeit des begrenzten Körpers stellt seine Kontur für das ebene elektrostatische Problem nämlich eine Linie konstanten Potentials dar, womit die elektrische Feldstärke im ganzen einfach zusammenhängenden Gebiet verschwindet (Abb.

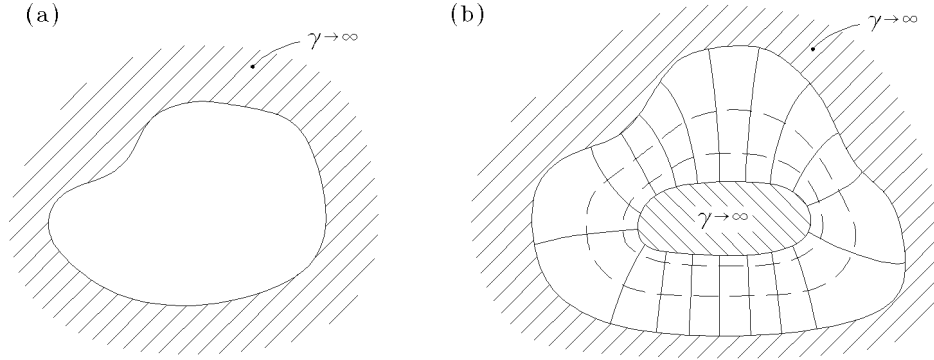


Abb. 5.8: Ein idealer, einfacher Hohlleiter kann keine TEM-Wellen führen (a). Es sind dazu zwei oder mehrere Leiter notwendig (b).

5.8a). Um TEM-Wellen führen zu können, sind **zwei oder mehrere Zylinderflächen notwendig**. Koaxialkabel oder parallele Drähte sind typische Strukturen, die als dominanten Modus solche Wellen tragen können, wobei der wesentlich transversale Feldcharakter auch bei nichtidealen Randbedingungen und nichtidealen Medien erhalten bleibt. Damit lässt sich in jeder Ebene $z = \text{const}$ und zu jedem Zeitpunkt wegunabhängig die elektrische Spannung zwischen den Leitern definieren, und für jeden Leiter lässt sich der Strom erklären, was eine vereinfachte Behandlung im Rahmen der sogenannten Leitungstheorie ermöglicht. Wir kommen darauf zurück.

Zur Untersuchung einer umfassenderen Klasse von Lösungen setzen wir verallgemeinerte ebene Sinuswellen der Form

$$\begin{aligned}\vec{E}(x, y, z, t) &= \text{Re} \left[\vec{\mathcal{E}}(x, y) e^{j(\omega t - kz)} \right], \\ \vec{H}(x, y, z, t) &= \text{Re} \left[\vec{\mathcal{H}}(x, y) e^{j(\omega t - kz)} \right]\end{aligned}\quad (5.84)$$

an, wobei die Vektoren $\vec{\mathcal{E}}$ und $\vec{\mathcal{H}}$ i.A. komplexwertig sind. Mit den Gln. (5.76) lassen sich dann die transversalen Feldkomponenten durch die longitudinalen vollständig ausdrücken,

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}_{\perp} &= \frac{-j}{\mu\epsilon\omega^2 - k^2} \left(k\vec{\nabla}_{\perp}\mathcal{E}_z - \omega\mu\vec{e}_z \times \vec{\nabla}_{\perp}\mathcal{H}_z \right), \\ \vec{\mathcal{H}}_{\perp} &= \frac{-j}{\mu\epsilon\omega^2 - k^2} \left(k\vec{\nabla}_{\perp}\mathcal{H}_z + \omega\epsilon\vec{e}_z \times \vec{\nabla}_{\perp}\mathcal{E}_z \right)\end{aligned}\quad (5.85)$$

und, wie zusammen mit den Gln. (5.77) folgt, haben die longitudinalen Komponenten den Gleichungen

$$(\nabla_{\perp}^2 + \mu\epsilon\omega^2 - k^2)\mathcal{E}_z = 0, \quad (\nabla_{\perp}^2 + \mu\epsilon\omega^2 - k^2)\mathcal{H}_z = 0 \quad (5.86)$$

zu genügen. Um Lösungen der gewünschten Art (5.84) zu bestimmen, sind zuerst die Gln. (5.86) unter den vorliegenden Randbedingungen zu lösen und dann über (5.85) die transversalen Feldkomponenten zu berechnen. Der Sonderfall $\mathcal{E}_z = 0$, $\mathcal{H}_z = 0$, nämlich TEM-Wellen, ist darin mit

$$\text{TEM-Wellen: } k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \quad (5.87)$$

enthalten.

Die Gln. (5.86) zusammen mit den Randbedingungen (5.81),

$$\mathcal{E}_z = 0, \quad \partial_n \mathcal{H}_z = 0, \quad (5.88)$$

an einer festgelegten, ideal leitfähigen Kontur bestimmen jeweils ein Randwertproblem für \mathcal{E}_z bzw. \mathcal{H}_z . Da als Folge der ideal metallischen Randbedingungen die beiden Randwertprobleme nicht gekoppelt sind, zerfallen die zugehörigen Wellenfelder auf natürliche Weise in zwei unabhängige Wellensysteme:

Transversal magnetische (TM) Wellen,

$$\text{überall } \mathcal{H}_z = 0; \text{ am Rand } \mathcal{E}_z = 0. \quad (5.89)$$

Transversal elektrische (TE) Wellen,

$$\text{überall } \mathcal{E}_z = 0; \text{ am Rand } \partial_n \mathcal{H}_z = 0. \quad (5.90)$$

Die unterschiedlichen TM- und TE-Wellen bilden zusammen mit der TEM-Welle, falls diese existieren kann, ein **vollständiges System zur Beschreibung elektromagnetischer Wellen in idealen Wellenleitern**.

Mit der Abkürzung

$$\kappa^2 = \mu\epsilon\omega^2 - k^2 \quad (5.91)$$

erhalten wir zunächst aus den Gln. (5.85) für die beiden Wellen

$$\text{TM: } \vec{\mathcal{E}}_\perp = -\frac{jk}{\kappa^2} \vec{\nabla}_\perp \mathcal{E}_z, \quad \text{TE: } \vec{\mathcal{H}}_\perp = -\frac{jk}{\kappa^2} \vec{\nabla}_\perp \mathcal{H}_z, \quad (5.92)$$

sowie den Zusammenhang der transversalen Komponenten

$$\vec{\mathcal{H}}_\perp = \vec{e}_z \times \vec{\mathcal{E}}_\perp / Z, \quad (5.93)$$

wobei

$$\begin{aligned} \text{TM: } Z &= \frac{k}{\epsilon\omega} = \frac{kc}{\omega} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}, \\ \text{TE: } Z &= \frac{\mu\omega}{k} = \frac{\omega}{kc} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \end{aligned} \quad (5.94)$$

die jeweilige, **für TM und TE unterschiedliche Wellenimpedanz** bedeutet. Weiters schreiben wir die Differenzialgleichungen (5.86) mit $\Psi = \mathcal{E}_z$ für TM bzw. $\Psi = \mathcal{H}_z$ für TE und die Randbedingungen aus (5.89) bzw. (5.90) in der Form

$$\begin{aligned} \text{TM: } (\nabla_\perp^2 + \kappa^2) \Psi &= 0, \quad \text{Randbedingung } \Psi = 0, \\ \text{TE: } (\nabla_\perp^2 + \kappa^2) \Psi &= 0, \quad \text{Randbedingung } \partial_n \Psi = 0. \end{aligned} \quad (5.95)$$

Es wird damit jeweils auch ein **Eigenwertproblem** definiert, d.h. **Lösungen gibt es nur für eine diskrete unendliche Folge von Eigenwerten** κ_ν^2 , $\nu = 1, 2, 3, \dots$, die von der Querschnittsform des Wellenleiters abhängen. Die zugehörigen Eigenfunktionen Ψ_ν — sie bilden i.A. ein orthogonales Funktionensystem — sind die **Moden** des idealen Wellenleiters.

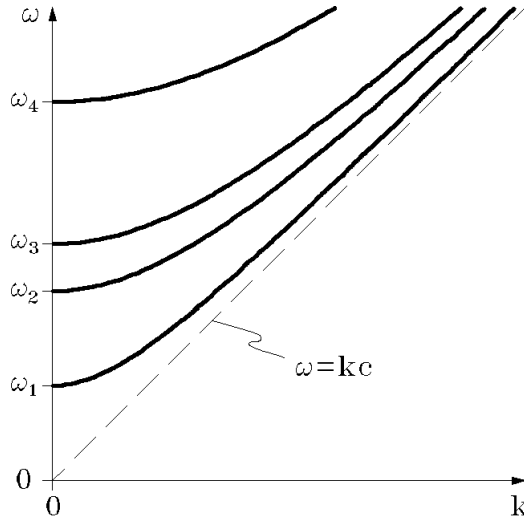


Abb.5.9: Beispiel für die Beziehung zwischen den Kreiswellenzahlen k und den Kreisfrequenzen ω (Dispersionsbeziehung (5.97)) für einen idealen Wellenleiter. $\omega_1, \omega_2, \dots$ sind die Grenz-Kreisfrequenzen der unterschiedlichen Moden. Die Anstiege geben die Gruppengeschwindigkeit an.

Für eine gegebene Querschnittsform lassen sich also durch das Lösen des Eigenwertproblems die Eigenwerte κ_ν^2 grundsätzlich berechnen. Sie sind, wie sich zeigen lässt, immer nichtnegativ. Wir können deshalb zu jedem Eigenwert und damit zu jedem Wellentyp (Modus) eine **Grenz-Kreisfrequenz**

$$\omega_\nu = \kappa_\nu c, \quad c = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}, \quad (5.96)$$

definieren und die Beziehung (5.91) zwischen der Kreisfrequenz ω und der Kreiswellenzahl k , die **Dispersionsbeziehung** für den ν -ten Modus, in der Form

$$k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_\nu^2}}{c} \quad (5.97)$$

schreiben. Der ν -te Modus stellt demnach nur dann eine sich ausbreitende Welle dar, wenn er mit einer **Kreisfrequenz oberhalb seiner Grenz-Kreisfrequenz** angeregt wird (Abb. 5.9), und zu jeder Kreisfrequenz gibt es i.A. nur eine endliche Anzahl sich ausbreitender Moden. Man wird häufig Abmessungen und Form des Wellenleiters so wählen, dass bei der gewünschten Frequenz nur der niedrigste Modus vorkommt.

Wie Gl. (5.97) zeigt, ist zu einer gegebenen Kreisfrequenz die Kreiswellenzahl der Kanalwelle stets kleiner als der entsprechende Wert ω/c der freien Welle bei gleichem Medium, die zugehörige Wellenlänge also stets größer. Damit liegt die **Phasengeschwindigkeit**

$$c_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_\nu}{\omega}\right)^2}} \quad (5.98)$$

oberhalb des Wertes c für den unbegrenzten Raum, kann also durchaus auch den Wert $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ der Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum übersteigen. Die **Gruppengeschwindigkeit**

$$c_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = c\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_\nu}{\omega}\right)^2} \quad (5.99)$$

ist dagegen stets kleiner als c , wobei der Zusammenhang $c_{ph} \cdot c_{gr} = c^2$ besteht. Bei Annäherung von oben an die Grenz-Kreisfrequenz wächst die Phasengeschwindigkeit über alle Grenzen, die Gruppengeschwindigkeit dagegen verschwindet.

5.3 Wellen auf Doppelleitungen

Entlang zylindrischer Strukturen mit zwei oder mehreren führenden Rändern können sich elektromagnetische Wellen im TEM-Modus ausbreiten, der, wie wir gesehen haben, starke Ähnlichkeit mit freien Wellen aufweist. Da wegen des transversalen Feldcharakters magnetische und elektrische Flüsse in Ausbreitungsrichtung nicht auftreten, lassen sich zu jedem Zeitpunkt in jedem Querschnitt Leiterströme und elektrische Spannungen zwischen den Leitern eindeutig definieren. In den Leitungsgleichungen werden diese Ströme und Spannungen miteinander verknüpft.

Die verlustfreie Doppelleitung

Wir betrachten zuerst eine *ideale, verlustfreie Doppelleitung*, eingebettet in ein ausgedehntes, elektrisch nicht leitfähiges Medium konstanter Permeabilität und Permittivität. An den Leiteroberflächen sollen ideal metallische Randbedingungen herrschen, d.h. wir setzen das Leiterinnere als feldfrei voraus. In jeder Ebene $z = \text{const}$ gilt dann im TEM-Modus mit Ausbreitung in z -Richtung (Gln. (5.82))

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}_\perp \times \vec{E}_\perp &= \vec{0}, \quad \vec{\nabla}_\perp \cdot \vec{E}_\perp = 0, \quad \vec{n} \times \vec{E}_\perp = \vec{0}, \\ \vec{\nabla}_\perp \times \vec{H}_\perp &= \vec{0}, \quad \vec{\nabla}_\perp \cdot \vec{H}_\perp = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{H}_\perp = 0, \\ \vec{e}_z \times \vec{E}_\perp &= \mu c \vec{H}_\perp \quad \text{bzw.} \quad \vec{e}_z \times \vec{H}_\perp = -\varepsilon c \vec{E}_\perp,\end{aligned}\tag{5.100}$$

sodass sich über eine Kurve \mathcal{C} in dieser Ebene (Abb. 5.10a) die elektrische Spannung $U(z, t)$ und der auf die axiale Länge bezogene magnetische Fluss $\Phi'(z, t)$ zwischen den Leitern

$$U(z, t) = \int_{\mathcal{C}} \vec{e}_s \cdot \vec{E}_\perp \, ds, \quad \Phi'(z, t) = \int_{\mathcal{C}} (\vec{e}_z \times \vec{e}_s) \cdot \mu \vec{H}_\perp \, ds\tag{5.101}$$

unabhängig vom Verlauf der Kurve angeben lassen. Umschließt weiters in derselben Ebene die Kurve $\partial\mathcal{A}$ genau einen Leiter, so haben wir mit der magnetischen Spannung $V(z, t)$ und dem längenbezogenen elektrischen Fluss $\Psi'(z, t)$ entlang $\partial\mathcal{A}$ sowie mit der elektrischen Stromstärke $I(z, t)$ und der längenbezogenen elektrischen Ladung $Q'(z, t)$ (entgegengesetzt gleich groß auf den beiden Leitern) als Ausdruck des Ampère-Maxwell-Satzes und des Satzes vom elektrischen Hüllenfluss

$$\begin{aligned}I(z, t) &= V(z, t) = \int_{\partial\mathcal{A}} \vec{e}_s \cdot \vec{H}_\perp \, ds, \\ Q'(z, t) &= \Psi'(z, t) = \int_{\partial\mathcal{A}} (\vec{e}_s \times \vec{e}_z) \cdot \varepsilon \vec{E}_\perp \, ds.\end{aligned}\tag{5.102}$$

Aus den Gln. (5.101) und (5.102) lassen sich zusammen mit den beiden letzten Gln. (5.100) übrigens die Zusammenhänge

$$U = c\Phi', \quad I = cQ' \quad (\text{bzw. } V = c\Psi')\tag{5.103}$$

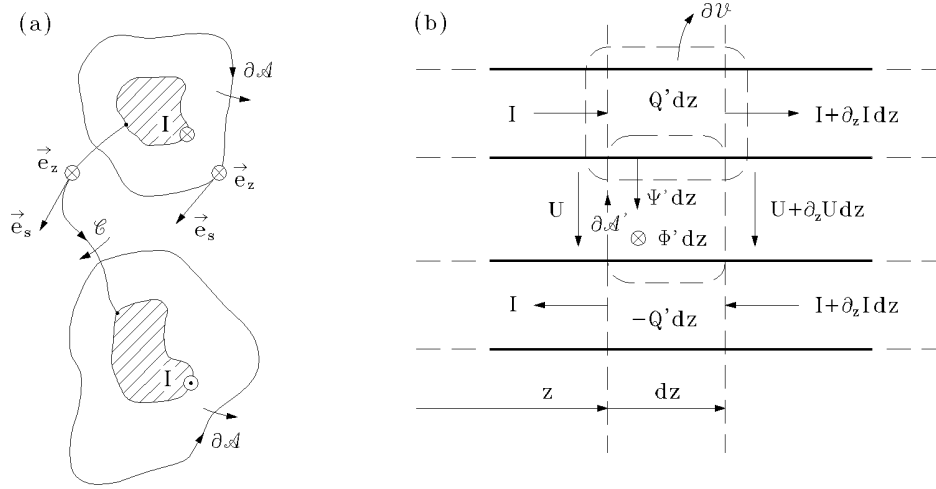


Abb. 5.10: (a) Querschnitt einer Doppelleitung mit orientierten Kurven zur Festlegung der Spannungen und längenbezogenen Flüsse. (b) Für die direkte Aufstellung der Leitungsgleichungen wird eine Scheibe zwischen zwei benachbarten Querschnitten betrachtet.

für eine in positiver z -Richtung laufende TEM-Welle ablesen (Ausbreitung in negativer z -Richtung: $c \rightarrow -c$). Wir werden aber hier eine äquivalente Aussage direkt ableiten durch Betrachtung eines infinitesimal langen Leitungsabschnitts (Abb. 5.10b). Die Anwendung des Induktionsgesetzes auf die Kontur $\partial\mathcal{A}'$ und des Satzes von der Erhaltung der elektrischen Ladung auf die Hülle $\partial\mathcal{V}$ liefert

$$\partial_z U + \partial_t \Phi' = 0, \quad \partial_z I + \partial_t Q' = 0 \quad (\text{bzw. } \partial_z V + \partial_t \Psi' = 0). \quad (5.104)$$

Wegen der Linearität des Problems (μ und ε konstant) können wir weiters im Einklang mit (5.101) und (5.102) **Proportionalität zwischen den Spannungen und Flüssen** voraussetzen,

$$\Psi' = Q' = C' U, \quad \Phi' = L' V = L' I, \quad (5.105)$$

wobei C' die längenbezogene Kapazität (den **Kapazitätsbelag**) und L' die längenbezogene Induktivität (den **Induktivitätsbelag**) angibt. Unter Verwendung der Gln. (5.101) und (5.102) und der beiden letzten Gln. (5.100) oder unter Verwendung der Gln. (5.103) folgt die für **ideale, verlustfreie Leitungen** gültige Beziehung

$$L' C' = \mu \varepsilon = 1/c^2. \quad (5.106)$$

Eintragen von (5.105) in (5.104) liefert schließlich die gesuchten **Leitungsgleichungen für eine ideale, verlustfreie Doppelleitung**,

$$\partial_z U + L' \partial_t I = 0, \quad \partial_z I + C' \partial_t U = 0. \quad (5.107)$$

Stromstärke $I(z, t)$ und elektrische Spannung $U(z, t)$ entlang der Leitung genügen damit jeweils **einfachen Wellengleichungen**

$$\left(\partial_z^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) I = 0, \quad \left(\partial_z^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) U = 0 \quad (5.108)$$

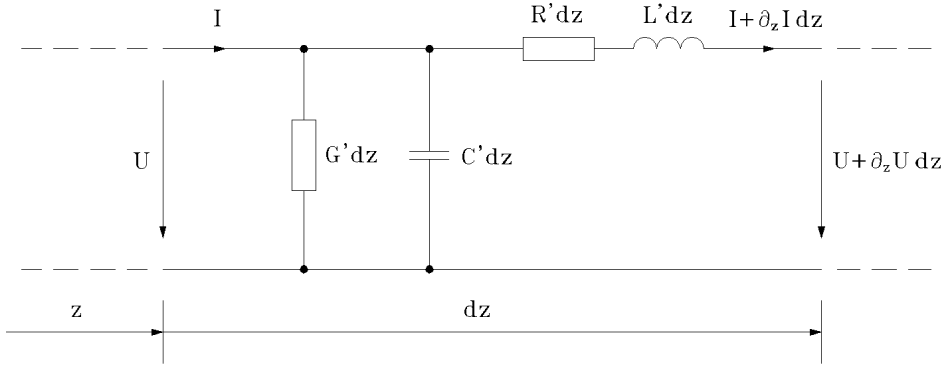


Abb.5.11: Ersatzschaltung für den infinitesimal langen Abschnitt einer verlustbehafteten Doppelleitung. Der Widerstandsbelag R' berücksichtigt den Längswiderstand beider Leiter, der Leitwertbelag G' der Querleitwert zwischen den Leitern.

mit den *allgemeinen Lösungen*

$$\begin{aligned} I(z, t) &= I_1(ct - z) + I_2(ct + z) , \\ U(z, t) &= U_1(ct - z) + U_2(ct + z) . \end{aligned} \quad (5.109)$$

Zwischen den sonst beliebigen Funktionen I_1, U_1 bzw. I_2, U_2 — sie stellen Wellen dar, die mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit c in die positive bzw. in die negative z -Richtung laufen — besteht der Zusammenhang

$$U_1 = Z_W I_1 , \quad U_2 = -Z_W I_2 , \quad Z_W = \sqrt{L'/C'} , \quad (5.110)$$

wobei Z_W *Wellenimpedanz der Leitung* genannt wird.

Die verlustbehaftete Doppelleitung

Der TEM-Modus und die daran geknüpften Festlegungen (5.101) und (5.102) sind auch dann noch brauchbar, wenn die idealisierenden Voraussetzungen nur näherungsweise erfüllt sind, wenn also beispielsweise Verluste entlang der Leitung durch ihren Längswiderstand und durch Querströme zwischen den Leitern berücksichtigt werden müssen. Wir untersuchen im Folgenden eine derart *verlustbehaftete Doppelleitung* und setzen dabei weiterhin konstante Werte C' des *Kapazitätsbelags* und L' des *Induktivitätsbelags* voraus, führen aber zusätzlich einen konstanten *Widerstandsbelag* R' und einen konstanten *Leitwertbelag* G' ein. Ausgehend von der Ersatzschaltung Abb. 5.11 für einen infinitesimal langen Leitungsabschnitt ergeben sich auf elementare Weise die Gleichungen

$$\partial_z U + L' \partial_t I + R' I = 0 , \quad \partial_z I + C' \partial_t U + G' U = 0 , \quad (5.111)$$

die für $R' = 0, G' = 0$ in die Ausdrücke (5.107) übergehen. Stromstärke und elektrische Spannung genügen jeweils *einfachen Telegraphengleichungen*

$$\begin{aligned} [\partial_z^2 - L' C' \partial_t^2 - (R' C' + G' L') \partial_t - R' G'] I &= 0 , \\ [\partial_z^2 - L' C' \partial_t^2 - (R' C' + G' L') \partial_t - R' G'] U &= 0 . \end{aligned} \quad (5.112)$$

Es werden damit gedämpfte, i.A. dispergierende Wellen beschrieben.

Für die Anwendungen besonders wichtig sind eingeschwungene Zustände

$$I(z, t) = \operatorname{Re} \left[\underline{I}(z) \sqrt{2} e^{j\omega t} \right], \quad U(z, t) = \operatorname{Re} \left[\underline{U}(z) \sqrt{2} e^{j\omega t} \right] \quad (5.113)$$

mit komplexen, ortsabhängigen Effektivwerten $\underline{I}(z)$ und $\underline{U}(z)$, erfasst durch die Gln. (5.111) in der Form

$$\begin{aligned} \partial_z \underline{U}(z) + \underline{Z}' \underline{I}(z) &= 0, & \partial_z \underline{I}(z) + \underline{Y}' \underline{U}(z) &= 0, \\ \underline{Z}' &= R' + j\omega L', & \underline{Y}' &= G' + j\omega C'. \end{aligned} \quad (5.114)$$

\underline{Z}' ist der **Längsimpedanzbelag**, \underline{Y}' der **Queradmittanzbelag** der Leitung bei der Kreisfrequenz ω . Die zugehörigen allgemeinen Lösungen

$$\begin{aligned} \underline{I}(z) &= \underline{I}_1 e^{-\gamma z} + \underline{I}_2 e^{\gamma z}, \\ \underline{U}(z) &= \underline{U}_1 e^{-\gamma z} + \underline{U}_2 e^{\gamma z} \end{aligned} \quad (5.115)$$

mit dem **komplexen Ausbreitungskoeffizienten**

$$\gamma = \sqrt{\underline{Y}' \underline{Z}'} = \sqrt{(G' + j\omega C')(R' + j\omega L')} \quad (5.116)$$

beschreiben die Überlagerung einer vorlaufenden ($\underline{I}_1, \underline{U}_1$) und einer rücklaufenden ($\underline{I}_2, \underline{U}_2$), gedämpften Sinuswelle, wobei die Zusammenhänge

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_W \underline{I}_1, \quad \underline{U}_2 = -\underline{Z}_W \underline{I}_2, \quad \underline{Z}_W = \sqrt{\underline{Z}' / \underline{Y}'} \quad (5.117)$$

mit der **Wellenimpedanz** \underline{Z}_W der Leitung bestehen. Festgelegt werden die Koeffizienten $\underline{I}_1, \underline{I}_2$ und $\underline{U}_1, \underline{U}_2$ durch die vorgeschriebenen Bedingungen für die Ströme und Spannungen am Eingang und am Ausgang der Leitung.

Der **Phasenkoeffizient** $\beta = \operatorname{Im}(\gamma)$ erweist sich — anders als bei der verlustfreien Leitung — bei der verlustbehafteten Leitung i.A. als nicht proportional zur Kreisfrequenz ω , d.h. die Wellen sind **dispergierend**: Die Fourier-Komponenten eines allgemeinen Signals besitzen unterschiedliche Phasengeschwindigkeiten $c_{ph} = \omega / \beta$, sodass die **Signalform** nicht erhalten bleibt, sondern **verzerrt** wird. Erfüllen allerdings die Leitungsparameter die Bedingung

$$L' / R' = C' / G', \quad (5.118)$$

so erhalten wir den Ausdruck (5.116) speziell zu

$$\gamma = \alpha + j\beta, \quad \alpha = \sqrt{R' G'}, \quad \beta = \omega \sqrt{L' C'}. \quad (5.119)$$

Die Wellen sind zwar nach wie vor gedämpft, aber nicht dispergierend. Wir sprechen in diesem Fall von einer **verzerrungsfreien Leitung**. Die Bedingung (5.118) lässt sich beispielsweise durch gezielte Beeinflussung des Induktivitätsbelags L' herstellen.

Wir kehren zum allgemeinen Fall zurück. Angenommen, am Eingang einer Leitung der Länge ℓ liegt eine Sinusspannung mit dem komplexen Effektivwert $\underline{U}(0)$, während der Ausgang durch eine Impedanz \underline{Z}_A abgeschlossen ist (Abb.

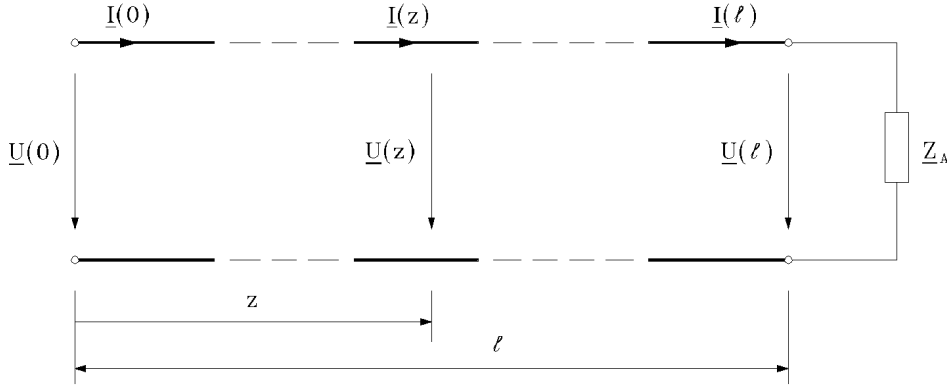


Abb.5.12: Am Eingang einer Leitung, die mit der Impedanz \underline{Z}_A abgeschlossen ist, liegt eine Sinusspannung. Es wird die Strom- und Spannungsverteilung entlang der Leitung im eingeschwungenen Zustand bestimmt.

5.12). Mit der Bedingung $\underline{U}(l) = \underline{Z}_A \underline{I}(l)$ folgt dann aus den Gln. (5.115) und (5.117) für die Koeffizienten

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_1 &= \underline{Z}_W \underline{I}_1 = \frac{(\underline{Z}_A + \underline{Z}_W) \underline{U}(0)}{(\underline{Z}_A + \underline{Z}_W) + (\underline{Z}_A - \underline{Z}_W) e^{-2\gamma \ell}} = \\
 &= \frac{(\underline{Z}_A + \underline{Z}_W) e^{\gamma \ell}}{\underline{Z}_A \cosh(\gamma \ell) + \underline{Z}_W \sinh(\gamma \ell)} \cdot \frac{\underline{U}(0)}{2}, \\
 \underline{U}_2 &= -\underline{Z}_W \underline{I}_2 = \frac{(\underline{Z}_A - \underline{Z}_W) \underline{U}(0)}{(\underline{Z}_A + \underline{Z}_W) e^{2\gamma \ell} + (\underline{Z}_A - \underline{Z}_W)} = \\
 &= \frac{(\underline{Z}_A - \underline{Z}_W) e^{-\gamma \ell}}{\underline{Z}_A \cosh(\gamma \ell) + \underline{Z}_W \sinh(\gamma \ell)} \cdot \frac{\underline{U}(0)}{2}.
 \end{aligned} \tag{5.120}$$

Gilt speziell $\underline{Z}_A = \underline{Z}_W$, ist also die **Leitung mit ihrer Wellenimpedanz abgeschlossen**, so verschwinden die Koeffizienten $\underline{I}_2, \underline{U}_2$ und wir haben $\underline{U}_1 = \underline{Z}_W \underline{I}_1 = \underline{U}(0)$: Es gibt **nur eine hinlaufende, keine rücklaufende Welle**, als ob die Leitung unendlich lang wäre. Im Allgemeinen muss jedoch zur Erfüllung der Bedingung $\underline{U}(l) = \underline{Z}_A \underline{I}(l)$ auch die rücklaufende Welle bestehen. Eintragen der Koeffizienten (5.120) in die Gln. (5.115) liefert für die Strom- und Spannungsverteilung entlang der Leitung

$$\begin{aligned}
 \underline{I}(z) &= \frac{\underline{Z}_A \sinh[\gamma(\ell - z)] + \underline{Z}_W \cosh[\gamma(\ell - z)]}{\underline{Z}_A \cosh(\gamma \ell) + \underline{Z}_W \sinh(\gamma \ell)} \cdot \frac{\underline{U}(0)}{\underline{Z}_W}, \\
 \underline{U}(z) &= \frac{\underline{Z}_A \cosh[\gamma(\ell - z)] + \underline{Z}_W \sinh[\gamma(\ell - z)]}{\underline{Z}_A \cosh(\gamma \ell) + \underline{Z}_W \sinh(\gamma \ell)} \cdot \underline{U}(0),
 \end{aligned} \tag{5.121}$$

und speziell bei einem Abschluss $\underline{Z}_A = \underline{Z}_W$ bzw. für eine unendlich lange Leitung

$$\underline{I}(z) = \frac{\underline{U}(0)}{\underline{Z}_W} e^{-\gamma z}, \quad \underline{U}(z) = \underline{U}(0) e^{-\gamma z}. \tag{5.122}$$

Kann die Leitung überdies als verlustfrei vorausgesetzt werden, d.h. $\gamma = j\beta = j2\pi/\lambda$ und \underline{Z}_W reell, so ändern sich bei Abschluss mit \underline{Z}_W die Beträge der Ef-

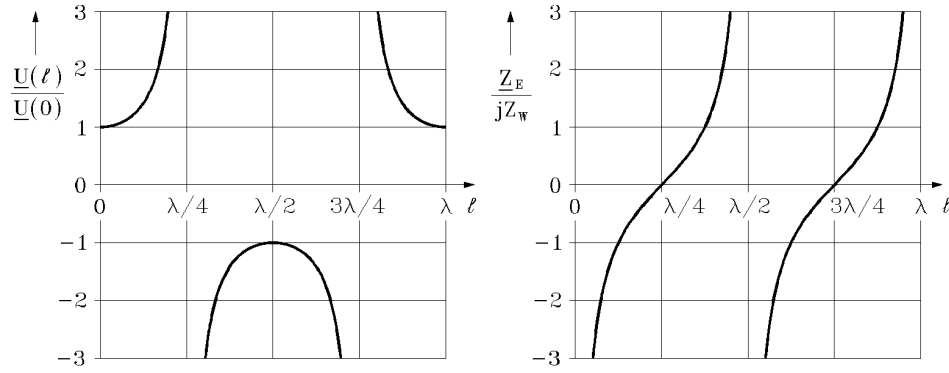


Abb.5.13: Verhältnis der Ausgangsspannung $\underline{U}(\ell)$ zur Eingangsspannung $\underline{U}(0)$ und Eingangsimpedanz \underline{Z}_E einer leerlaufenden, verlustlosen Leitung als Funktionen der Leitungslänge ℓ . $\lambda = c/f$ mit $c = 1/\sqrt{L'C'}$ ist die Wellenlänge, und $Z_W = \sqrt{L'/C'}$ ist die Wellenimpedanz.

ektivwerte von Strom und Spannung entlang der Leitung nicht. Bei energietechnischen Leitungen, die für eine Spannung U ausgelegt sind, wird dieser Fall zur Charakterisierung herangezogen und

$$P_{nat} = U^2/Z_W \quad (5.123)$$

als **natürliche Leistung** bezeichnet.

Die Doppelleitung als Zweitor

Manchmal ist vorteilhaft, eine Leitung der Länge ℓ in ihrer Gesamtheit als Zweitor zu betrachten. Wie aus den Gln. (5.115) und (5.117) folgt, sind die komplexen Effektivwerte der Ströme und Spannungen am Eingang und am Ausgang dann über die **Zweitorgleichungen** beispielsweise in der **Primärform** (Kettenform, Bezugssinne wie in Abb. 5.12)

$$\begin{bmatrix} \underline{U}(0) \\ \underline{I}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma\ell) & \sinh(\gamma\ell)\underline{Z}_W \\ \sinh(\gamma\ell)/\underline{Z}_W & \cosh(\gamma\ell) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}(\ell) \\ \underline{I}(\ell) \end{bmatrix} \quad (5.124)$$

miteinander verknüpft.

Abschließend betrachten wir zwei Sonderfälle bei **verlustfreien** Leitungen ($\gamma = j\beta = j2\pi/\lambda$, Z_W reell). Für eine **leerlaufende**, d.h. am Ende offene **Leitung** folgt mit $\underline{I}(\ell) = 0$ aus den Gln. (5.124) für das Spannungsverhältnis und die Eingangsimpedanz

$$\begin{aligned} \frac{\underline{U}(\ell)}{\underline{U}(0)} &= \frac{1}{\cos(2\pi\ell/\lambda)}, \\ \underline{Z}_E &= \frac{\underline{U}(0)}{\underline{I}(0)} = -jZ_W \cot(2\pi\ell/\lambda) = -jZ_W \cot(\omega\ell/c), \end{aligned} \quad (5.125)$$

dargestellt in Abb. 5.13. Besonders bemerkenswert ist, dass der Betrag des Span-

nungseffektivwerts am Ende der Leitung i.A. größer ist als am Anfang⁴, für $\ell = \lambda/4$, $\ell = 3\lambda/4$ usw. tritt sogar eine resonanzartige Überhöhung der Ausgangsspannung auf. Tatsächlich stellt eine Leitung dieser Art, wie aus dem Verlauf der Eingangsimpedanz \underline{Z}_E und dem Zusammenhang $\lambda = c/f$ ersichtlich, ein Element dar, das mit wachsender Länge bzw. Frequenz eine abwechselnde Folge von Reihen- und Parallelresonanzen durchläuft.

Ein ähnliches Verhalten finden wir bei einer am Ende **kurzgeschlossenen Leitung**. Sie besitzt, Verlustfreiheit vorausgesetzt, die Eingangsimpedanz

$$\underline{Z}_E = \frac{\underline{U}(0)}{\underline{I}(0)} = jZ_W \tan(2\pi\ell/\lambda) = jZ_W \tan(\omega\ell/c), \quad (5.126)$$

kann also je nach Länge und Frequenz als Reihen- oder als Parallelresonanzkreis wirken.

Ausgewählte Literatur

Zum tiefergehenden Studium der klassischen Theorie des Elektromagnetismus empfehle ich

J.D. Jackson: *Classical Electrodynamics*, 2nd ed. New York: Wiley, 1975,

K. Simonyi: *Theoretische Elektrotechnik*, 4. Aufl. Berlin: VEB Verlag, 1971.

Stärker technisch orientiert und didaktisch sehr gut aufbereitet sind die zwei Bände

H.-G. Unger: *Elektromagnetische Theorie für die Hochfrequenztechnik*, 2. Aufl., Teil 1 u. 2. Heidelberg: Hüthig, 1988.

Mit starkem Bezug auf numerische Techniken finden Sie in

D.S. Jones: *Methods in Electromagnetic Wave Propagation*. Oxford: Clarendon, 1979

eine Fülle von Material.

⁴Bei sehr langen, schwach gedämpften Leitungen lässt sich die Spannungsüberhöhung auch schon bei niedrigen Frequenzen beobachten. Sie wird im Zusammenhang mit energietechnischen Übertragungsleitungen *Ferranti-Effekt* genannt.