1

In einem System von Kugelkoordinaten $(r;\theta;\alpha)$ sind zwei Punkte durch die Koordinaten

$$\mathscr{P}_1 : (1,0\mathrm{m};\ \pi/4;\ 0), \qquad \mathscr{P}_2 : (1,5\mathrm{m};\ 3\pi/4,\ \pi)$$

fixiert. Bestimmen Sie den euklidischen Abstand der beiden Punkte (Skizze!).

2

$\vec{f}$ und $\vec{g}$ sind zwei stetig differenzierbare Vektorfelder. Drücken Sie das Hüllenintegral

$$\int\limits_{\partial\mathscr{V}} \vec{n}\cdot\vec{f}\,\vec{g}\,\mathrm{d}A$$

koordinatenfrei durch ein Volumenintegral aus.

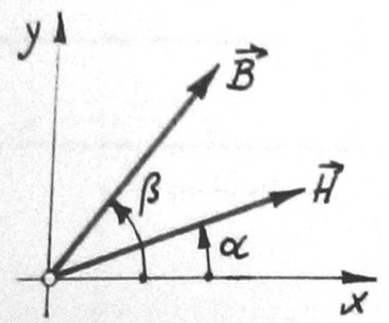
3

Ein stationäres Magnetfeld im leeren Raum ist in Kreiszylinderkoordinaten durch das Vektorpotential

$$\vec{A} = K\cdot\ln(\varrho/a)\,\vec{e}_z\,, \qquad K \text{ und } a \text{ const.}\,,$$

gegeben. Bestimmen Sie für dieses Feld ein magnetisches Skalarpotential.

4

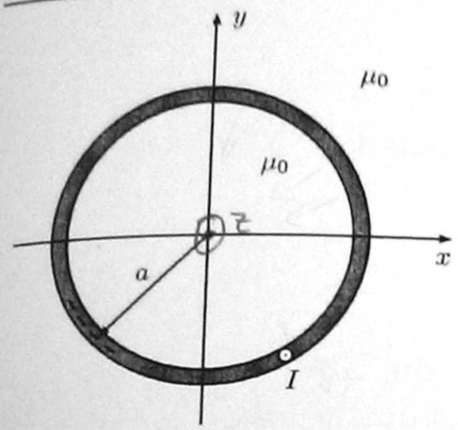


Ein anisotrop magnetisierbares Material besitze bezüglich ebener Magnetfelder in einem passend gewählten kartesischen Koordinatensystem die Darstellung

$$\underset{\sim}{\mu} = (500\,\vec{e}_x\otimes\vec{e}_x + 1000\,\vec{e}_y\otimes\vec{e}_y)\,\mu_0$$

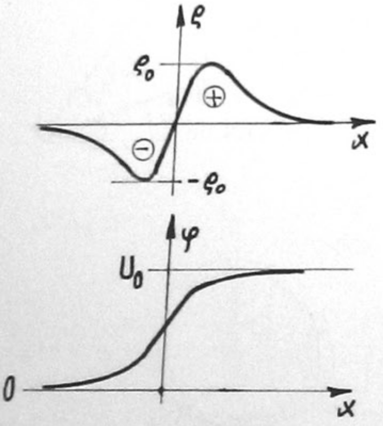
des Permeabilitätstensors. Berechnen und skizzieren Sie den Verlauf des Winkels β als Funktion des Winkels α.

5



Ein dünnwandiges Kupferrohr führt gleichförmig verteilt einen elektrischen Strom der Stärke I.
Berechnen Sie die längenbezogene~~n~~ Kraft, die das Halbrohr im Bereich $x < 0$ auf das Halbrohr im Bereich $x > 0$ ausübt. Entsteht in der Rohrwandung eine mechanische Druck- oder eine Zugkraft?

6



An einem ebenen, eindimensional modellierten pn-Übergang stellt sich die durch

$$\varrho(x) = \varrho_0\, 2\, \frac{\sinh(x/a)}{\cosh^2(x/a)}$$

approximierte Raumladungsdichte ein. Berechnen Sie den skizzierten Verlauf des zugehörigen Potentials $\varphi(x)$. Nehmen Sie dazu eine einheitliche Permittivität $\varepsilon =$ const an und bestimmen Sie insbesondere den Zusammenhang zwischen ϱ_0 und U_0

Hinweis:

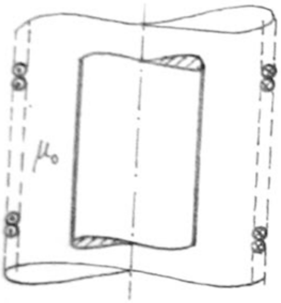
$$\int \frac{d\xi}{\cosh(\xi)} = \arctan[\sinh(\xi)] + const$$

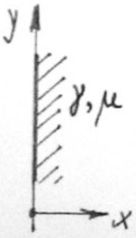
7

Im Zuge einer Modelluntersuchung ergibt sich folgendes Problem: Im Punkt $\mathcal{O}$ eines allseitig weit ausgedehnten Körpers der Permittivität ε und der Konduktivität γ wird zum Zeitpunkt $t = 0$ die Ladungsmenge Q_0 injiziert.

Berechnen Sie die Strom- und Ladungsverteilung in der Umgebung von $\mathcal{O}$.

8





Ein kreiszylindrisches Werkstück wird zur Aufheizung der Mantelfläche in eine kreiszylindrische Spule mit $N' = 100$ Windungen / Meter geschoben und diese mit einem Sinusstrom $I = 600$ A (Effektivwert) bei $f = 100$ kHz gespeist. Nehmen Sie für das Werkstück $\mu = \mu_0$, $\gamma = 10^7\, S/m$ an und berechnen Sie den zeitlichen Mittelwert der oberflächenbezogenen Verlustleistung. Wegen der klein zu erwartenden Eindringtiefe δ können Sie von dem ebenen Eindringmodell

$$\vec{H}(x,t) = Re\{\underline{\hat{H}}\, e^{-x/\delta + j(\omega t - x/\delta)}\}\vec{e}_y, \quad x \geq 0,$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\gamma\omega}}$$

ausgehen.

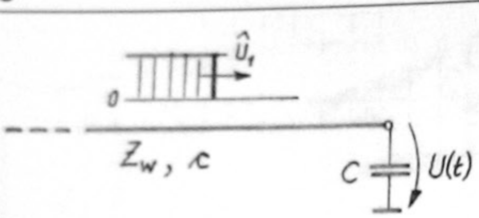
9

Berechnen Sie die zu einer ebenen Sinuswelle im leeren Raum mit der elektrischen Feldstärke

$$\vec{E}(z,t) = \hat{E}\cos[2\pi(t/T - z/\lambda)]\,\vec{e}_y$$

gehörende, mittlere Energieflußdichte.

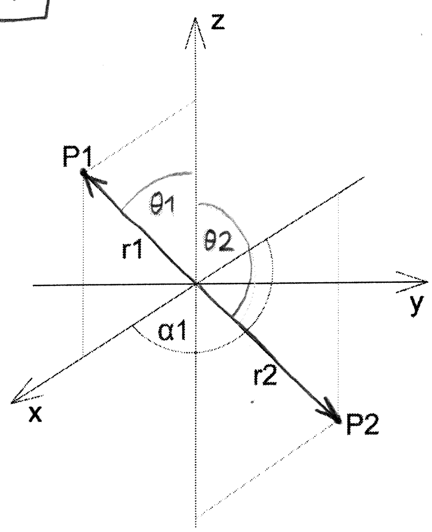
10



Eine näherungsweise verlustfreie Leitung ist mit einem Kondensator abgeschlossen. Es fällt eine Sprungwelle mit dem Scheitelwert $\hat{U}_1$ ein. Berechnen Sie allgemein den Zeitverlauf $U(t)$ der Spannung am Abschluß.

Elektrodynamik – schriftliche Prüfung 01.07.2009
LÖSUNGEN

1



$P_1(r_1,\theta_1,\alpha_1)$:
$r_1 = 1m$
$\theta_1 = 45°$
$\alpha_1 = 0°$

$P_2(r_2,\theta_2,\alpha_2)$:
$r_2 = 1{,}5m$
$\theta_2 = 135°$
$\alpha_2 = 180°$

aus Skizze: Abstand zw. P_1 und $P_2 = r_1 + r_2 = 2{,}5m$

2 mit Satz von Gauß: $\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{f}\, dV = \int_{\partial V} \vec{n}\cdot\vec{f}\, dA$ $\Rightarrow$

$$\int_{\partial V} \vec{n}\cdot\vec{f}\,\vec{g}\, dA = \int_{\partial V} \vec{n}\cdot(\vec{f}\otimes\vec{g})\, dA =$$

$$= \int_V \vec{\nabla}\cdot(\vec{f}\otimes\vec{g})\, dV = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{f}\vec{g}\, dV = \int_V \left(\vec{g}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{f} + \vec{f}\cdot\vec{\nabla}\vec{g}\right) dV$$

3 $\rightarrow \varphi_m = ?$ $\Rightarrow$ $\vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi_m$ mit $\vec{A} = A_z(\varrho)\vec{e}_z$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \\ \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{\mu_0}\left(-\vec{e}_\alpha\,\partial_\varrho A_z\right) = -\frac{\vec{e}_\alpha}{\mu_0} K \frac{1}{\varrho}$$

überprüfen: $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{0}$?

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = -\frac{K}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\frac{\vec{e}_\alpha}{\varrho} = -\frac{K}{\mu_0}\left[\vec{e}_z\frac{1}{\varrho}\underbrace{\partial_\varrho\left(\varrho\frac{1}{\varrho}\right)}_{0}\right] = \vec{0} \checkmark$$

$$\Rightarrow \vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi_m$$

$$-\frac{K}{\mu_0}\frac{1}{\varrho}\vec{e}_\alpha = -\left(\vec{e}_\varrho\,\partial_\varrho\varphi_m + \vec{e}_\alpha\frac{1}{\varrho}\partial_\alpha\varphi_m + \vec{e}_z\,\partial_z\varphi_m\right)$$

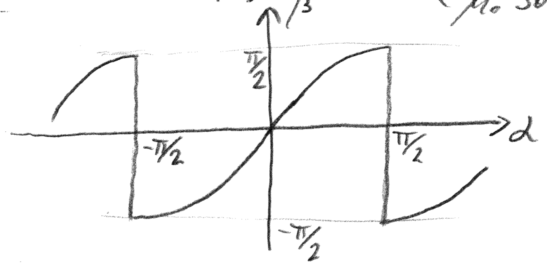
$$\Rightarrow \partial_\alpha\varphi_m = \frac{K}{\mu_0} \rightarrow \varphi_m = \frac{K}{\mu_0}\alpha + C \quad \Big/\, C = \text{const} = 0 \text{ o.B.d.A.}$$

$$\varphi_m = \frac{K}{\mu_0}\alpha$$

4 $\vec{H} = H_x \vec{e}_x + H_y \vec{e}_y$

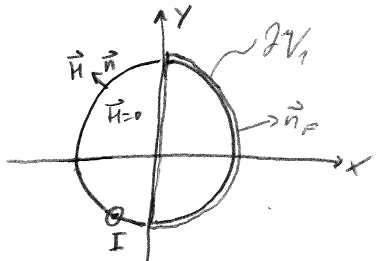
$$\vec{B} = \underset{\sim}{\mu_0} \cdot \vec{H} = \mu_0 \left(500 \vec{e}_x \otimes \vec{e}_x + 1000 \vec{e}_y \otimes \vec{e}_y\right) \cdot \left(H_x \vec{e}_x + H_y \vec{e}_y\right) = \underbrace{\mu_0 500 H_x}_{B_x} \vec{e}_x + \underbrace{\mu_0 1000 H_y}_{B_y} \vec{e}_y$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{B_y}{B_x}\right) = \arctan\left(\frac{\mu_0 1000 H_x}{\mu_0 500 H_y}\right) = \arctan(2 \tan(\alpha))$$



5 dünnwandiges Rohr, I gleichförmig

Rohr gedanklich trennen



Innen: DFS: $V(\partial A) = I(A)$

→ im gesamten Innenraum keine Stromverteilungen

→ somit rechte Seite von DFS $= 0$

→ Linke Seite: $V(\partial A) = \int_{\partial A} H_s \, ds$ ... wegen hoher Symmetrie (∂A → konzentrische Kreise um Nullpkt. in xy-Ebene) kann Projektion von $\vec{H}$ auf Einstangentenvektor $\vec{s}$ (also H_s) in jedem Integrationspkt. konstant gesetzt werden und vor Integral gezogen werden, somit

diese genaue Erklärung bei mündl. Prfg. verlangt!

$V = H_s 2\pi\rho \overset{!}{=} 0 \implies$ folgt: $H_s = 0$

Außen: Feld von zylindrischen Linienleiter: $\vec{H} = \frac{I}{2\pi a} \vec{e}_\alpha$

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{I}{2\pi a} \vec{e}_\alpha$$

Kraft: Hälften müssen sich gegseitig anziehen (Kraft zw. 2 gleichsinnig durchflossenen Leitern: anziehend)

vgl.: Zugkräfte entlang der magn. Flussdichtelinien $\hat{=}$ Gummiringerl rundherum

→ ∂V_1 um rechte Rohrhälfte: direkt knapp über Rand im Außenraum (innen keine Kräfte weil kein Feld)

[man könnte auch den Radius von $\partial V_1 \to \infty$ gehen lassen und von a bis ∞ entlang y-Achse integr.]

$$\vec{F}_R = \int_{\partial V_1} \frac{1}{\mu_0} \left(\vec{n}_r \cdot \vec{B}\vec{B} - \frac{1}{2} B^2 \vec{n}_r\right) dA$$

längenbezogen: $\vec{F}_R' = \frac{1}{\mu_0} \left[\underbrace{\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\alpha}_{0} \vec{e}_\alpha \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\right)^2 \vec{e}_\rho\right] \pi a = -\frac{\mu_0 I^2}{8\pi a} \vec{e}_\rho$

$-\vec{e}_\rho$ Richtung $\hat{=}$ anziehend ✓

$\boxed{6}$ $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$, $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \varrho$

$\vec{E} = E_x \vec{e}_x$, $\vec{D} = D_x \vec{e}_x$

$$\partial_x D_x = \varrho(x) \Rightarrow D_x = \int \varrho(x)\, dx = \int 2\varrho_0 \frac{\sinh(x/a)}{\cosh^2(x/a)}\, dx =$$

$$= -\frac{2\varrho_0 a}{\cosh(x/a)} + C \quad , \quad C = const = 0$$

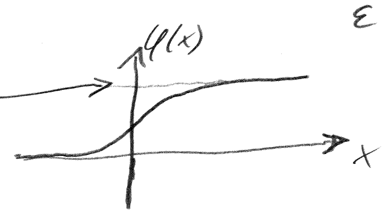
o.B.d.A.

$$\Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \rightarrow \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = -\vec{\nabla}\varphi \rightarrow \frac{D_x}{\varepsilon} = -\partial_x \varphi :$$

$$\underline{\varphi(x)} = \frac{1}{\varepsilon}\int \frac{2\varrho_0 a}{\cosh(x/a)}\, dx = \frac{2\varrho_0 a}{\varepsilon} 2a \arctan(e^{x/a}) =$$

$$= \underline{\frac{4\varrho_0 a^2}{\varepsilon} \arctan(e^{x/a})} \Rightarrow \text{Plot z.B. mit } a = 1,\ \varepsilon = 1 :$$

soll U_0 sein



aus Plot: $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 2\pi\varrho_0 \Rightarrow U_0 \propto 2\pi\varrho_0$

$\boxed{7}$ = A 3.3.1

$\boxed{8}$ = A 4.2.8

Hinweis: $\frac{1}{\gamma}\vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{1}{\gamma}\vec{\nabla}\times \mathrm{Re}\{\dots\}\vec{e}_y = \frac{1}{\gamma}\mathrm{Re}\left\{\vec{\nabla}\times \underline{\hat{H}} e^{-x/\delta + j(\omega t - x/\delta)} \vec{e}_y\right\} =$

$$= \frac{1}{\gamma}\mathrm{Re}\{\underbrace{-\vec{e}_y \times \vec{\nabla}\underline{\hat{H}} e^{-x/\delta + j(\omega t - x/\delta)}}_{\text{bleibt nur } \vec{e}_x\text{-Komponente über!}}\} = \mathrm{Re}\{\underbrace{\frac{1}{\gamma}\left(-\frac{1}{\delta} - \frac{j}{\delta}\right)\underline{\hat{H}}}_{\underline{\hat{E}}} e^{-x/\delta + j(\omega t - x/\delta)}\}\vec{e}_z$$

$\boxed{9}$ = A 5.2.3

$\boxed{10}$ allgemein: $U(t) = U_1(t - \frac{z}{c}) + U_2(t + \frac{z}{c})$

$I(t) = I_1(t - \frac{z}{c}) + I_2(t + \frac{z}{c})$

$U_1(t) = Z_w I_1(t)$

$U_2(t) = -Z_w I_2(t)$

$\underbrace{U_1(t) = \hat{U}_1 \varepsilon(t)}$ → lt. Angabe

$z = 0$: $U(t) = U_1(t) + U_2(t)$

$I(t) = I_1(t) + I_2(t) = \frac{U_1(t)}{Z_w} - \frac{U_2(t)}{Z_w} = \frac{2U_1(t)}{Z_w} - \frac{U(t)}{Z_w}$

am Kondensator: $I(t) = C\dot{U}(t)$

$$\rightarrow C\dot{U}(t) = \frac{2U_1(t)}{Z_w} - \frac{U(t)}{Z_w}$$

$$\underline{Z_w C\dot{U}(t) + U(t) = 2\hat{U}_1 \varepsilon(t)}$$

↳ Lsg. der inhom. Diffglchg. 1. Ord.: $U(t) = U_\infty(1 - e^{-t/\tau})\varepsilon(t)$

mit $U_\infty = 2\hat{U}_1$

$\tau = Z_w C$