– Bilanzgleichungen für Energie und Impuls

Bilanzgleichungen global:

$$\left.\begin{aligned}\dot{W}(\partial\mathcal{V}) + Q(\partial\mathcal{V}) &= R(\mathcal{V})\\ \dot{\vec{G}}(\mathcal{V}) + \vec{P}(\partial\mathcal{V}) &= \vec{F}(\mathcal{V})\end{aligned}\right\}$$ für abgeschlossene Systeme sind die rechten Seite Null

Bilanzgleichungen $\Rightarrow$ Erhaltungsgleichungen

$W(\mathcal{V})$ ... Energieinhalt $\quad Q(\partial\mathcal{V})$ ... Energiefluß
$\vec{G}(\mathcal{V})$ ... Impulsinhalt $\quad \vec{P}(\partial\mathcal{V})$ ... Impulsfluß
$R(\mathcal{V})$ ... Produktionsrate der Energie = Leistung
$\vec{F}(\mathcal{V})$ ... Produktionsrate des Impulses = Kraft.

Integraldarstellung:

$$W(\mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}} w\, dV \qquad Q(\partial\mathcal{V}) = \int_{\partial\mathcal{V}} \vec{n}\cdot\vec{q}\, dA \qquad R(\mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}} r\, dV + \int_{S} r^s\, dA$$

$$\vec{G}(\mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}} \vec{g}\, dV \qquad \vec{P}(\partial\mathcal{V}) = \int \vec{n}\cdot \underset{\sim}{P}\, dA \qquad \vec{F}(\mathcal{V}) = \int \vec{f}\, dV + \int_{S} \vec{f}^{\,s}\, dA$$

Bilanzgleichungen lokal:

$$\partial_t w + \vec{\nabla}\cdot\vec{q} = r \qquad -v_n [\![w]\!] + \vec{n}\cdot [\![\vec{q}]\!] = r^s$$

$$\partial_t \vec{g} + \vec{\nabla}\cdot \underset{\sim}{P} = \vec{f} \qquad -v_n [\![\vec{g}]\!] + \vec{n}\cdot [\![\underset{\sim}{P}]\!] = \vec{f}^{\,s}$$

$w^e = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$ ... Energiedichte

$\vec{q}^{\,e} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}\times\vec{B}$ Energieflußdichte

$\vec{g}^{\,e} = \varepsilon_0 \vec{E}\times\vec{B}$ Impuls~~fluß~~dichte

$\underset{\sim}{P}^e = w^e \underset{\sim}{\delta} - \varepsilon_0 \vec{E}\otimes\vec{E} - \frac{1}{\mu_0}\vec{B}\otimes\vec{B}$ Impulsflußdichte

Maxwellgleichungen
– Elektrodynamische Potentiale
Lösung:

~~– elektromagnetisches Feld im engeren~~ Sinn:
globale Eigenschaften:

– Induktionsgesetz $U(\partial A) = -\dot{\Phi}(A)$

– Satz vom mag. Hüllenfluß $\Phi(\partial V) = 0$ $\Phi(\partial V) = 0$

lokale Eigenschaften:

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$ $\vec{n} \times [\![\vec{E}]\!] = \vec{0}$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ $\vec{n} \cdot [\![\vec{B}]\!] = 0$

~~– Strom-Ladungs-Feld:~~
globale Eigenschaften:

– Ampere – Maxwell Satz: $V(\partial A) = I(A) + \dot{\Psi}(A)$

– Satz vom elek. Hüllenfluß: $\Psi(\partial V) = Q(V)$

lokale Eigenschaften:

$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \partial_t \vec{D}$ $\vec{n} \times [\![\vec{H}]\!] = \vec{K}$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$ $\vec{n} \cdot [\![\vec{D}]\!] = \sigma$

elektrodynamische Potentiale:

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ wenn ein Vektorfeld Quellenfrei ist → dann ist das Feld ein Wirbelfeld!

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot\vec{A} - \vec{\nabla}^2\vec{A} + \mu\varepsilon\partial_t^2\vec{A} + \mu\varepsilon\vec{\nabla}\partial_t\varphi = \mu\vec{J}$$

$$\nabla^2\vec{A} - \vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \mu\varepsilon\partial_t^2\vec{A} + \mu\varepsilon\vec{\nabla}\partial_t\varphi = -\mu\vec{J}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho \Rightarrow \quad \varepsilon\vec{\nabla}\cdot(-\partial_t\vec{A} - \vec{\nabla}\varphi) = \rho$$

$$\Rightarrow \nabla^2\varphi + \partial_t\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\begin{cases} \nabla^2 A - \mu\varepsilon\partial_t^2 A - \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \mu\varepsilon\partial_t\varphi) = -\mu\vec{J} \\ \nabla^2\varphi - \mu\varepsilon\partial_t^2\varphi + \partial_t(\vec{\nabla}\cdot A + \mu\varepsilon\partial_t\varphi) = -\frac{\rho}{\varepsilon} \end{cases}$$

- Maxwell-Eichung: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0 \Rightarrow \nabla^2\varphi = -\rho/\varepsilon$

Skalarpotential erfüllt Poissongleichung aus Elektrostatik nach Eichtransformation $\varphi' = \varphi - \partial_t c$ mit c als Lösung einer inhomogener Wellengleichung möglich.

- Lorentz-Eichung: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \mu\varepsilon\partial_t\varphi = 0 \Rightarrow$ Entkopplung in Form zweier inhomogener Wellengleichungen:

$\nabla^2\vec{A} - \mu\varepsilon\partial_t^2\vec{A} = -\mu\vec{J}$ und $\nabla^2\varphi - \mu\varepsilon\partial_t^2\varphi = -\rho/\varepsilon$

nach Eichtransformationen $\varphi' = \varphi - \partial_t c$ mit c als Lösung einer hom. Wellengleichung möglich.

$\vec{A}$ hat $\begin{cases}\text{Wirbelanteil} \\ \text{Quellenanteil}\end{cases}$

Orientierungen (innere und äußere)
i) Was heißt konsistente Orientierung von Bereichen und deren Rändern?
ii) Warum unterscheidet man die beiden Orientierungs systeme?

Lösung:

innere Orientierung: Kein Bezug auf den Umgebungsraum
Punkte werden Pluszeichen oder Minuszeichen zugeordnet
Kurven wird ein Durchlaufsinn zugeordnet.
Flächen wird ein Drehsinn zugeordnet.
Volumina wird ein Schraubsinn zugeordnet.

Kurve $\mathcal{C}$: Der Rand $\partial\mathcal{C} = P_1 + P_2$ ist dan konsistent orientiert wenn $P_1 \mathrel{\hat{=}} \ominus$ und $P_2 \mathrel{\hat{=}} \oplus$
Fläche: $\mathcal{A}$ Der Rand $\partial\mathcal{A}$ ist mit der Fläche $\mathcal{A}$ dann konsistent orientiert, wenn der Durchlaufsinn mit Drehsinn der Fläche zusammenpaßt.
Volumina $\mathcal{V}$: Der Rand $\partial\mathcal{V}$ ist mit dem Volumen $\mathcal{V}$ dann konsistent orientiert, wenn sich der Drehsinn der Flächen bei Annäherung von Innen nach außen aus dem Schraubsinn ableitet.

äußere Orientierung (transversale)
Volumina: wird ein Pluszeichen oder Minuszeichen zugeordnet.
Flächen wird ein ~~Durchlauf~~ tritt sinn zugeordnet.
Kurven wird ein Umschlingungssinn zugeordnet.
Punkten wird ein Schraubsinn zugeordnet.

Kurve $\mathcal{C}$: Die Randpunkte $\partial\mathcal{C}$ einer Kurve $\mathcal{C}$ sind dann konsistent orientiert, wenn sich der Schraubsinn bei Annäherung an den Randpunkt von innen zusammen mit dem Umschlingungssinn ergibt.

Fläche $\mathcal{A}$: Die Randkurve $\partial\mathcal{A}$ einer Fläche $\mathcal{A}$ ist dann konsistent orientiert, wenn sich der Umschlingungssinn von $\partial\mathcal{A}$ zusammen mit dem Durchtrittsinn ergibt.

Volumina $\mathcal{V}$: Die Randfläche $\partial\mathcal{V}$ eines Volumens $\mathcal{V}$ ist dann konsistent orientiert, wenn sich der Durchtrittsinn bei Annäherung an die Randfläche von innen nach außen, also vom Pulsbereich zum Minusbereich ergibt.

* Innere und äußere Orientierungen haben unterschiedliches Spiegelungsverhalten.
innere Orientierungen bleiben im Spiegel gleich (z.B. $\vec{E}$)
äußere Orientierungen drehen sich im Spiegel um (z.B. $\vec{H}$)

Wird jedoch der ganze Raum einheitlich orientiert (Konvention: rechtswendig) so braucht man nicht zwischen innerer und äußeren Orientierung von Bereichen zu unterscheiden, weil sie umkehrbar eindeutig zusammenhängen.

– Herleitung der Bullard-Gleichung

$$\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{H} \quad \text{mit } \vec{B} = \mu \vec{H} \Rightarrow \vec{J} = \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

$$\vec{J} = \gamma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{\gamma} \vec{J} - \vec{v} \times \vec{B} = \frac{1}{\gamma\mu} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \vec{v} \times \vec{B}$$

$$= \vec{E}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \Rightarrow -\frac{1}{\gamma\mu} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) = \partial_t \vec{B}$$

$$-\frac{1}{\gamma\mu} \left[\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} \right] + \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) = \partial_t \vec{B} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\frac{1}{\mu\gamma} \nabla^2 \vec{B} = \partial_t \vec{B} + \vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{v}) \quad \ldots \text{ Bullard Gleichung}$$

beschreibt die Verteilung magnetischer Flüße in ei. leitfähigen, bewegten Medien mit $\gamma, \mu = \text{konst.}$

spezialfälle:

a) $\mu\gamma \to \infty$ d.h. Verschwinden der mitgeschleppten Zeitabteilung von $\vec{B}$; $0 = \partial_t \vec{B} + \vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{v})$, die Flußverteilung wird dann durch die Bewegung vollständig mitgeschleppt, erscheint also im Körper eingefroren.

b) $v = 0$ dh. keine bewegten, elektrisch leitfähigen Körper $\Rightarrow$ Vektorielle Diffusionsgleichung für $\vec{B}$

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu\gamma \partial_t \vec{B} \quad \ldots \text{ Diffusionsgleichung}$$

c) $\partial_t \vec{B} = 0$ dh. Zeitkonstante Flußverteilung

$$\frac{1}{\gamma\mu} \nabla^2 \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{v})$$

Spezielle stationäre Magnetfelder

- Ebene Magnetfelder: translationsinvariant
ist die Flußdichte $\vec{B}$ parallel zu einer festen Ebene (xy-Ebene)
$\Rightarrow$ z gerichtete mag. Vektorpotentiale $\vec{A} = A\vec{e}_z$
und z gerichtete Stromverteilungen unabhängig von z

$$\Rightarrow \phi(t) = \ell\,[A(\vec{r}_2) - A(\vec{r}_1)] \quad \vec{B} = -\vec{e}_z \times \vec{\nabla} A$$

$$\vec{A} = A\vec{e}_z \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{e}_x \partial_y A - \vec{e}_y \partial_x A$$

$$= B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y$$

$$B_x = \partial_y A, \quad B_y = -\partial_x A$$

$$\partial_x H_y - \partial_y H_x = J \qquad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\Rightarrow \partial_x^2 A + \partial_y^2 A = \mu J \text{ ... Zwei dim. Poisson Gl.}$$

$$\partial_x^2 A + \partial_y^2 A = 0 \text{ ... Zweidim. Laplace Gl.}$$

Beispiel: Luftspaltfelder

- Drehsymmetrische Magnetfelder: rotationsinvariant
$\vec{H} = H_\alpha \vec{e}_\alpha$ mit H_α unabhängig von α; Stationäre Stromverteilungen $\vec{J} = J_\varrho \vec{e}_\varrho + J_z \vec{e}_z$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$
$\vec{H} = H_\varrho \vec{e}_\varrho + H_z \vec{e}_z$ mit H_ϱ, H_z unabhängig von α,
- Stationäre Stromverteilung $\vec{J} = J(\varrho, z)\vec{e}_\alpha$
- rein azimutale Felder $\vec{H} = H(\varrho, z)\vec{e}_\alpha$
- Kreisförmige Stromverteilungen

- Herleitung des Poynting Satzes:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B} \quad | \cdot \vec{H}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}+\partial_t\vec{D} \quad | \cdot \vec{E}$$

$$\vec{H}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -\vec{H}\cdot\partial_t\vec{B}$$

$$\vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H}) = \vec{E}\cdot\vec{J} + \vec{E}\,\partial_t\vec{D}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{H}) = \vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{H}_c) + \vec{\nabla}\cdot(\vec{E}_c\times\vec{H})$$

$$= \vec{H}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E}) - \vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H}) = -\vec{H}\cdot\partial_t\vec{B} - \vec{E}\cdot\vec{J} - \vec{E}\partial_t\vec{D}$$

$$\vec{E}\partial_t\vec{D} + \vec{H}\partial_t\vec{B} + \vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{H}) = -\vec{J}\cdot\vec{E}$$

Gauss

$$\int_V (\vec{E}\cdot\partial_t\vec{D} + \vec{H}\partial_t\vec{B})\,dV + \int_{\partial V} \vec{n}\cdot(\vec{E}\times\vec{H})\,dA = -\int_V \vec{J}\cdot E\,dV$$

Poyntingssatz

Vorstufe zu einem Energiesatz der Elektrodynamik

Interpretation für linear homogen isotropes Material

1: $\vec{E}\cdot\partial_t\vec{D} + \vec{H}\cdot\partial_t\vec{B} = \partial_t(\varepsilon E^2/2) + \partial_t(B^2/2\mu) = \partial_t w^e + \partial_t w^m$

2: $\int_{\partial V} \vec{n}\cdot(\vec{E}\times\vec{H})\,dA$ ... gesamter Elektromagnetischer Energiefluß von Innen nach außen durch ∂V!

3: mit $\vec{J} = \gamma\vec{E} \Rightarrow -\vec{J}\cdot\vec{E} = -\dfrac{\vec{J}^2}{\gamma}$ ... Joule Verluste (Produktionsrate)

warum Vorstufe? weil es nicht verschwindet

$\Rightarrow$ kein Vollständiges system

$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \rightarrow$ Quellenfrei $\Rightarrow$ $\vec{B}$ ist ein Wirbelfeld!

$\rightarrow \vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A} \rightarrow \vec{A}$ ist die allgemeine Lösung für $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ $\quad \vec{E}=-\partial_t\vec{A}-\vec{\nabla}\varphi \rightarrow U(\ell)=\int_\ell \vec{s}\cdot\vec{E}\,ds = -\frac{d}{dt}\int_\ell \vec{s}\cdot\vec{A}\,ds$
$+\varphi(P_1)+-\varphi(P_2)$

φ: $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A} \rightarrow \Phi(A)=\int_A \vec{n}\cdot\vec{B}\,dA=\int_{\partial A}\vec{s}\cdot\vec{A}\,ds$

$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\partial_t\vec{B} \rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{E}+\partial_t(\vec{\nabla}\times\vec{A})=0$

$\rightarrow \vec{\nabla}\times(\vec{E}+\partial_t\vec{A})=0 \Rightarrow (\vec{E}+\partial_t\vec{A})$ muss Quellen haben, weil Wirbel null ist

Was kann man statt der Ausdruck in ( ) schreiben? ein Gradientenfeld

$\vec{E}+\partial_t\vec{A}=-\vec{\nabla}\varphi$; φ ist die allgemeine Lösung für Induktionsgesetzt.

- Eichtransformation: $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{\nabla}\times\vec{A}'$

zwei Felder $\vec{A}$ und $\vec{A}'$ mit gleicher Rotation liefern die gleiche Flußdichte, ihre Differenz ist wirbelfrei $\vec{\nabla}\times(\vec{A}'-\vec{A})=\vec{0}$ und läst sich als Gradient eines Skalarfeldes darstellen.

$\vec{A}'-\vec{A}=\vec{\nabla}C \Rightarrow \vec{A}'=\vec{A}+\vec{\nabla}C \rightarrow$ Einchtransformation

- angenommen: $\vec{H}=\vec{B}/\mu_0$; $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ $\quad \vec{E}=-\partial_t\vec{A}-\vec{\nabla}\varphi$ und $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ in lok. Eigenschaften der Strom und Ladungsfeld

$\vec{\nabla}\times\vec{H}-\partial_t\vec{D}=\vec{J} \Rightarrow \vec{\nabla}\times\frac{(\vec{\nabla}\times\vec{A})}{\mu}-\varepsilon\partial_t(-\partial_t\vec{A}-\vec{\nabla}\varphi)=\vec{J}$

Kontinuitätsgleichung
Relaxationsgleichung:

Kontinuitätsgleichung: $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\partial_t \rho$

$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, $\vec{J} = \underbrace{\gamma \vec{E}}_{\text{Konduktiv}} + \underbrace{\rho \vec{v}}_{\text{Konvektiv}}$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$

$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) + \frac{\gamma}{\varepsilon} \rho = 0$ ... Relaxationsgleichung für ε & γ

$T_R = \frac{\varepsilon}{\gamma}$ ... Relaxations(zeit)konstante

$R_e = \frac{\varepsilon v_0}{\gamma L}$ ... elek. Reynoldszahl

- Ladungsrelaxation ohne Bewegung: $\vec{v} = 0$

$T_R \cdot \partial_t \rho + \rho = 0$: $\rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, 0) \cdot e^{-t/T_R}$

⇒ im Inneren eines linear, homogenen Materials gibt es im stationären Zustand keine Überschußladungen
Ladungsansammlungen können nur an Materialinhomogenitäten wie zB. an Grenzflächen auftreten.

- Ladungsrelaxation mit Bewegung:

$T_R [\underbrace{\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v})}_{\text{mitgeschleppte Zeitableitung für } \rho}] + \rho = 0$: Lösung liefert wieder einen zeitlich exponentiell abklingenden Verlauf.

→ in einem homogenen Material strebt die elekt. Ladung jedes materiellen Volumenelements, das sich auch bewegen und verformen kann gegen null sofern keine räumliche, verteilte Ladungsinjektion erfolgt.

Erklärung von Reynoldszahl: soll el. Raumladung in einem Medium mit der Geschwindigkeit V_0 über eine Strecke L

transportiert werden, so darf sei im Zeitintervall $\frac{L}{V_0}$ nicht wesentlich relaxieren. dh. $T_R > L/V_0$

oder $R_e = T_R \cdot \frac{V_0}{L} > 1$ sein.

(elektrisches Teilgebiet, Ladungen diffudieren

→ oberflächeladungen, T_R, Zeit ist vom Material abhängig. Einheiten!

$$[T_R] = \frac{\frac{AS}{Vm}}{\frac{A}{Vm}} = S$$

Polarisierbare, magnetisierbare Stoffe, wahre, fiktive Ladungen und Ströme

$\vec{P}, \vec{M}$, wie kann man sie makroskopisch begründen, Modelvorstellung; Zusammenhang mit makroskopischen Feldern.

Lösung:
Einsetzen der Verknüpfungsbeziehungen für den leeren Raum $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$, $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}$ in die Maxwell-gleichungen.

- elektromagnetische Felder in Systemen mit Geschwindigkeit $v \ll c_0$,

Umrechnung, Transformationsgleichung, wozu braucht man das?

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \qquad \vec{B}' = \vec{B}$$
$$\vec{H}' = \vec{H} - \vec{v} \times \vec{D} \qquad \vec{D}' = \vec{D}$$
$$\vec{M}' = \vec{M} + \vec{v} \times \vec{P} \qquad \vec{P}' = \vec{P}$$
$$\vec{J}' = \vec{J} - \vec{v}\rho \qquad \rho' = \rho$$

Die Gleichungen stellen für kleine Geschwindigkeiten $|\vec{v}| \ll c_0$ eine Versión der Lorentz-Transformation dar, die das Trasformationsverhalten el. mag. Größen zwischen Inertialsystemen in der relativistischen Physik erfaßt

gestrichene Größen: mit v bewegtes Inertialsystem (mit Körper mitbewegtes System)

ungestrichene Größen: Laborsystem (festes Inertialsystem)

Lokale Materialgleichung für bewegte Körper sind mit gestrichenen Größen zu formulieren!

z.B: lokales ohmsches Gesetz $\vec{J}' = \gamma \vec{E}'$ d.h.

$$\vec{J} - \vec{v}\rho = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \vec{J}'$$

$$\vec{J} = \vec{J}' + \vec{v}\rho$$

die allgemeine Verknüpfungsbeziehungen werden nicht beeinträchtigt. $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}'$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}' + \vec{v} \times \vec{P}'$$

globale Eigenschaften: in Integraldarstellungen sind dann die gestrichenen Felder zu verwenden.

$$U(\ell) = \int_\ell \vec{s} \cdot \vec{E}'\, ds \quad V(\ell) = \int_\ell \vec{s} \cdot \vec{H}'\, ds \quad I(A) = \int_A \vec{n} \cdot \vec{J}'\, dA$$

- bewegten Kurven ist i.a. ein anderer Wert der elektrische Spannung zugeordnet als der raumfeste Kurve, mit der $\mathcal{C}$ momentan zusammenfällt.
- zeitliche Änderungsraten von Flüßen an materiellen Flächen.

$$\Gamma(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} \vec{n}\cdot\vec{F}\, dA \qquad \dot{\Gamma}(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} \vec{n}\cdot(\partial_t^c \vec{F})\, dA$$

mitgeschleppte Zeitableitung für vektorielle Flüßdichte

Zeitableitung kann nicht als partielle Zeitableitung $\partial_t \vec{F}$ unter das Integral gezogen werden, weil sich $\mathcal{A}$ mit der Zeit ebenfalls ändert.

$$\partial_t^c \vec{F} = \partial_t \vec{F} + \vec{v}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\times(\vec{F}\times\vec{v})$$

lokale Eigenschaften:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial_t \vec{B} \qquad \vec{n}\times[\![\vec{E}]\!] = v_n [\![\vec{B}]\!]$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \vec{n}\cdot[\![\vec{B}]\!] = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \overbrace{\vec{J} + \vec{v}\rho}^{\vec{J}} + \partial_t \vec{D} \qquad \vec{n}\times[\![\vec{H}]\!] = \vec{K} + \vec{v}\sigma - v_n [\![\vec{D}]\!] \text{ wobei } v_n = \vec{v}\cdot\vec{n}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho \qquad \vec{n}\cdot[\![\vec{D}]\!] = \sigma$$

das lokale Induktionsgesetz

$$\vec{\nabla}\times(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) = -\partial_t \vec{B} - \vec{v}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{B} - \vec{\nabla}\times(\vec{B}\times\vec{v})$$

Elektrostatik und Quasi-Elektrostatik

elektrisches Feld einer Ansammlung vorhandenen Punktladungen kann mit Coulomb-Gesetz und überlagerungsprinzip berechnet werden. Voraussetzung: man muß neben den wahren Ladungen auch die Polarisationsladungen kennen. Information liegt selten vor.

allgemeine Eigenschaften des elektrostatischen Feldes und Ladungsverteilung

$U(\partial A)=0 \quad \vec{\nabla}\times\vec{E}=\vec{0} \quad \vec{n}\times[\![\vec{E}]\!]=\vec{0}$

$\Psi(\partial V)=Q(V) \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\varrho \quad \vec{n}\cdot[\![\vec{D}]\!]=\sigma$

Verknüpfungsbeziehung: $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$

elektrostatisches Potentials φ

$U(\ell)=\int_\ell \vec{s}\cdot\vec{E}\,ds=\varphi(\vec{r}_1)-\varphi(\vec{r}_2) \quad \vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi$

Die Lösung vieler elektrostatische Aufgaben wird durch die Einführung des elektrostatischen Potentials erleichtert, weil Skalarfelder in der Regel einfacher zu behandeln sind als Vektorfelder.

Die hier verwendeten Ladungsverteilungen sind als makroskopische Modelle aufzufassen, stellen also math. Idealisierungen dar.

Poisson- und Laplace Gleichung mit ε = konst.

$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\varrho \quad \vec{D}=\varepsilon\vec{E} \quad \vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=-\varepsilon\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\varphi=-\varepsilon\nabla^2\varphi=\varrho \Rightarrow \nabla^2\varphi=-\varrho/\varepsilon$

Poisson

$\nabla^2\varphi=0 \rightarrow$ Laplace-Gleichung

Grundlösung der Poisson Gleichung:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \underbrace{\frac{1}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}}_{\text{Partikuläre Lösung}} + \underbrace{g(\vec{r}, \vec{r}')}_{\text{homogene Lösung}}$$

Vorgehensweise zur Lösung der Poisson-Gleichung mit zugehörigen Randbedingungen

- Wir bestimmen eine partikuläre Lösung φ_p zur
- Funktion $g(\vec{r})$ durch $\varphi_p(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{g(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$
- Überlegung der homogenen Lösung φ_h um die Randdaten auf die gewünschte Werte zu bringen.

- In Elektrostatik; Welche Randprobleme kennen Sie? wie geht man bei der Lösung der Randwertprobleme grundsätzlich vor, mit und ohne Raumladungen, Integrabilitätsbedingung.

$\nabla^2 \varphi = -\rho/\varepsilon$ ... Poisson-Gleichung

$\nabla^2 \varphi = 0$ ... Laplae-Gleichung

Grundlösung des Laplace-operators: $G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}$

Ladungsfrei: Es wird nach harmonischen Skalarfeldern φ mit Vorgegebenen Randwerten von φ gesucht:

Stationäre magnetische Felder

allg. Eigenschaften, lokale Grundgleichungen, mag. Vektorpotential $\vec{A}$, mag. Skalarpotential φ_M

allgemeine Eigenschaften,
globale Beziehungen: $\phi(\partial V)=0$ ... Satz vom mag. Hüllenfluß

$V(\partial A) = I(A)$ ... Durchflutungssatz.

lokale Form: $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \quad \vec{n}\cdot[\vec{B}]=0 \quad I(\partial V)=0$

$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J} \quad \vec{n}\times[\vec{H}]=\vec{K} \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{J}=0$

$\vec{n}\cdot[\vec{J}]=0$

allgemeine Verknüpfungsbeziehung:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

magnetisches Vektorpotential $\vec{A}$
mit Identität $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})=0 \Rightarrow \vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$
$\vec{A}$ ... magnetisches Vektorpotential

$$\phi(A) = \int_A \vec{n}\cdot\vec{B}\,dA = \int_{\partial A} \vec{s}\cdot\vec{A}\cdot ds$$

zwei Felder $\vec{A}$ und $\vec{A}'$ mit gleicher Rotation liefern die gleiche Flußdichte $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}'=\vec{\nabla}\times\vec{A}$, ihre Differenz ist wirbelfrei. $\vec{\nabla}\times(\vec{A}'-\vec{A})=0$ und läßt sich als Gradient eines Skalarfeldes C darstellen, $\vec{A}'-\vec{A}=\vec{\nabla}C \Rightarrow \vec{A}'=\vec{A}+\vec{\nabla}C$ ... ist eine Eichtransformation.

Da es hier nur auf die Rotation von $\vec{A}$ ankommt, können wir die Divergenz von $\vec{A}$ passend wählen.
Maxwell-Eichung: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$

Eindeutig ist das Vektorpotential $\vec{A}$ auch durch die Maxwell_Eichung nicht, weil immer noch eine Eichtransformation mit harmonischem Skalarfeld c $\nabla^2 c = 0$ möglich ist.

mag. Skalarpotential φ_M:

Falls der ganze Bereich stromfrei ist $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} = 0$, können wir ~~zur~~ analog zur elektrostatischen mag. Skalarpotential φ_M benutzen, $\vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi_M$

mit Identität $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\varphi_M) = \vec{0}$

$$V(\ell) = \int_\ell \vec{J} \cdot \vec{H}\, ds = \varphi_M(\vec{r}_1) - \varphi_M(\vec{r}_2)$$

Da die mag. Spannung in einem ideal mag. Körper entlang jeder Kurve verschwindet, stellen solche Körper einen Bereich konst. mag. Skalarpotentials φ_m dar. Sie sind im Inneren stromfrei.

Laplace und Poisson Gleichung:

$$\vec{A}: \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \Rightarrow \underbrace{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})}_{=\mu \vec{J}} = \vec{\nabla}(\overset{0}{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}}) - \nabla^2 \vec{A}$$

mit Maxwell_Eichung: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}$ ... Poisson_Gleichung für das mag. Vektorpotential $\vec{A}$

in stromfreien Bereich $\vec{J} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \vec{A} = 0$ ... Laplace_Gleichung

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}_h(\vec{r}) + \vec{A}_p(\vec{r}) \text{ mit } \vec{A}_p(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dV';$$

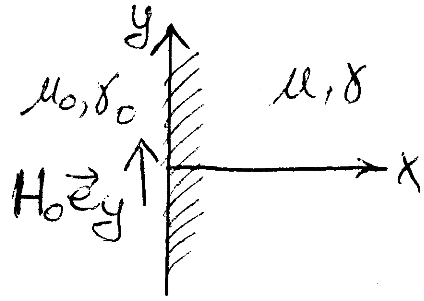
noch $\vec{A}_h(\vec{r})$ der Laplace Gleichung überlagern.

φ_M: $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow \vec{B} = \mu \vec{H}$, $\vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi_m \Rightarrow \nabla^2 \varphi_M = 0$ für einfach zusammenhängenden Medien mit μ = konst.

Diffusion magnetischer Felder

Eindringen des mag. Flußes in einen Halbraum

- sprungförmig
- sinusförmig



Sprung: zum Zeitpunkt $t=0$ wird sprungartig die konstante Tangentialfeldstärke $\vec{H} = H_0 \vec{e}_y$ angelegt. Für den anschließenden Ausgleichsvorgang erwarten wir Felder $\vec{B} = B(x,t)\vec{e}_y$ und $\vec{J} = J(x,t)\vec{e}_z$ haben also die Difusionsgleichung $\partial_x^2 B = \mu\gamma\partial_t B$

mit den Rand- und Anfangsbedingungen zu lösen;

RB: $x=0$ $t>0$: $B = B_0 = \mu H_0$; $x \to \infty$ $B=0$

AB: $x>0$ $t=0+$: $B=0$

typisches Verhalten:

Typen von Wellen:

a) Begriffe und Bezeichnungen:

Welle: Zustandsänderungen die sich als einsinnige örtliche Verlagerung eines Zustandes mit der Zeit beschreiben lassen.

·) freie Welle: Ausbreitung erfolgt auf ein- zwei oder drei- dimensionale Trägern.

einfache Welle: Zur Beschreibung der Ortsabhängigkeit reicht eine einzige Ortskoordinate aus.

Raumwelle: freie Welle auf 3 dimensionale Träger, ausdrückliche Unterscheidung von oberflächenwellen

Flächenwellen: freie Wellen auf 2 dim. Träger; ausdrückliche Unterscheidung von kantenwellen

geführte Welle: (~~Die geführte Welle wird zumindest auf 2 Seiten~~) eingeschloßen, Ausbreitung erfolgt an Grenzflächen oder Grenzlinien auf 2 oder 3 dim. Träger.

Kanalwelle: Die geführte Welle wird zumindest auf 2 Seiten eingeschloßen.

Randwelle: Die führende Grenze ist nur an einer Seite vorhanden

ebene Sinuswelle:

Ken

$$\vec{F}(\vec{r},t) = Re\left[\vec{\underline{F}}\, e^{j\omega t - \gamma\vec{k}\cdot\vec{r}}\right]$$

mit einem konstanten, komplexen Vektor $\vec{\underline{F}}$

ω die reelle Kreisfrequenz, γ die komplexe Ausbreitungskoeffizient, reelle Einsvektor $\vec{k}$ die Ausbreitungsrichtung der Welle

$\gamma = \alpha + j\beta$ $\quad$ α ist Dämpfungskoeffizient
β ist Phasenkoeffizient

wenn $\alpha = 0 \Rightarrow \beta$ = Kreiswellenzahl , $k = -j\gamma$

Langitudinal: $\vec{k} \times \vec{F} = 0$

transversal: $\vec{k} \cdot \vec{F} = 0$

linear polarisiert: $\vec{F}^* \times \vec{F} = 0$

zirkular polarisiert: $\vec{F} \cdot \vec{F} = 0$

linear polarisiert heist: wenn sich die Richtung der Zustandsgröße während der Ausbreitung nicht ändert.

ebene Sinuswelle: $\vec{F}(\vec{r},t) = Re\left[\vec{F}\, e^{j(\omega t - k\vec{k}\cdot\vec{r})}\right]$

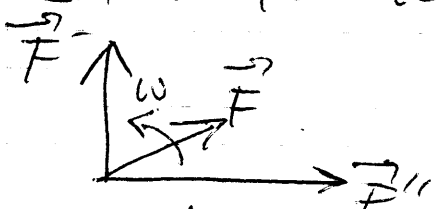
γ ... komplexe Ausbreitungskoeffizient
$\vec{k}$ ... Einsvektor in Ausbreitungsrichtung
α ... Dämpfungskoeffizient
β ... Phasenkoeffizient ($\hat{=}$ k – kreiswellenzahl wenn $\alpha=0$)
c ... Ausbreitungsgeschwindigkeit

$c = \omega/\beta$ Ausbereitungsgesch. wenn ω & β Proportional

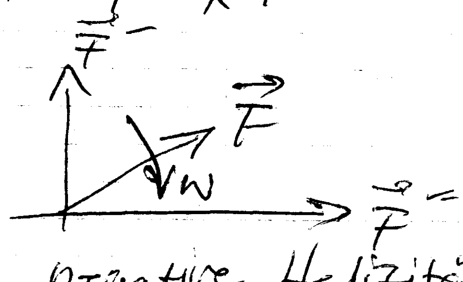
für dispersive Wellen: $c_{ph} = \omega/\beta$ $\quad c_{gr} = \frac{d\omega}{d\beta}$

$\vec{F} = \vec{F}' + \vec{F}''$ $\quad$ linearpola. wenn $\vec{F}^* \times \vec{F} = \vec{0}$

zirkular pol. wenn $\vec{F} \cdot \vec{F} = 0$



Positive Helizität
linkszirkulare Pol. $\vec{k} \times \vec{F} = j\vec{F}$



negative Helizität
$(\vec{k} \times \vec{F}) = -j\vec{F}$ rechtzirkulare Pol.