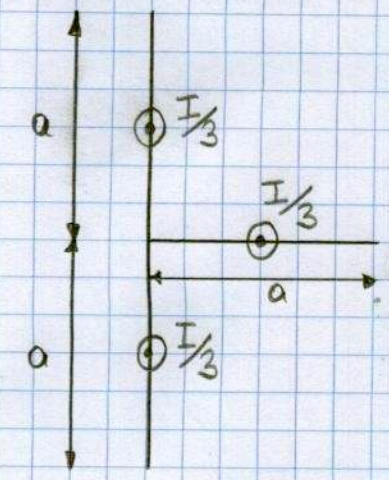
Beispiel.

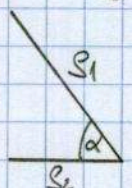


$$B(P) = \frac{\mu_0 K}{2\pi} \left\{ \ln\left(\frac{s_1}{s_2}\right) \vec{e}_x + a\,\vec{e}_y \right\}$$

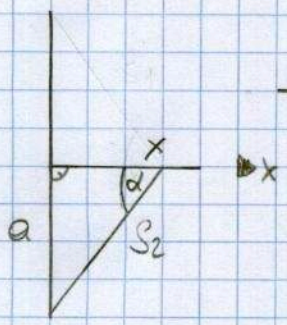
Hinweis

$$\int \begin{Bmatrix} \operatorname{arctan}(u) \\ \operatorname{arccot}(u) \end{Bmatrix} du = u \begin{Bmatrix} \operatorname{arctan}(u) \\ \operatorname{arccot}(u) \end{Bmatrix} \mp \ln\sqrt{1+u^2} + \text{const.}$$

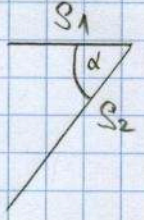
$s_1 = \sqrt{x^2+a^2}$
$s_2 = x$



$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\frac{a}{s_2}}{\frac{x}{s_2}} = \frac{a}{x}$$



$\oplus$



$\Rightarrow$ $s_1 = x$

$s_2 = \sqrt{a^2+x^2}$

$$\vec{F} = \int_0^a \vec{K} \times \vec{B}\, dx = K \frac{\mu_0 K}{2\pi} \int_0^a \vec{e}_z \times \left(\ln\left(\frac{s_1}{s_2}\right) \vec{e}_x + a\,\vec{e}_y \right) dx =$$

$$= \frac{\mu_0 K^2}{2\pi} \int_0^a \ln\left(\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right) \vec{e}_z \times \vec{e}_x + \operatorname{arctan}\left(\frac{a}{x}\right) \vec{e}_z \times \vec{e}_y\, dx$$

$$= \frac{\mu_0 K^2}{2\pi} \int_0^a \ln\left(\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right) \vec{e}_y - \operatorname{arctan}\left(\frac{a}{x}\right) \vec{e}_x\, dx$$

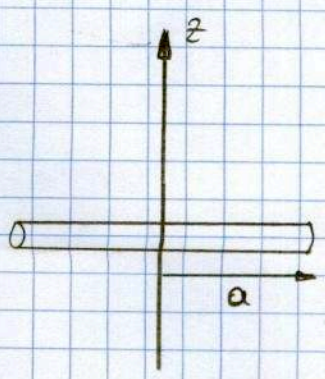
$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{\mu_0 K^2}{2\pi} \int_0^a \ln\left(\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right) \vec{e}_y - 2\operatorname{arctan}\left(\frac{a}{x}\right) \vec{e}_x\, dx$$

$$= \frac{\mu_0 K^2}{2\pi} \int_0^a \underbrace{\ln(1)}_{0}\, \vec{e}_y - 2\operatorname{arctan}\left(\frac{a}{x}\right) \vec{e}_x\, dx =$$

$$= \frac{\mu_0 K^2}{2\pi} \left[a\left(\ln(a) + \ln\left(\frac{1}{a}\right)\right)\vec{e}_y - \frac{a(2\cdot\ln(2)+\pi)}{2}\vec{e}_x \right] =$$

$$= -\frac{\mu_0 a K^2}{2\pi} \cdot \frac{2\ln(2)+\pi}{2}\vec{e}_x$$

Beispiel.



$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} f\left(\frac{s}{a}\right) \vec{e}_\alpha = A_\alpha \vec{e}_\alpha$$

$$f(\xi) = -\int_0^\pi \frac{\cos(\alpha)\,d\alpha}{\sqrt{1+\xi^2+2\xi\cos(\alpha)}}$$

$$f(\xi) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\xi & 0 \le \xi \le 1 \\ \ln\left(\frac{8}{1-\xi}\right) - 2 & 0 \le 1-\xi \ll 1 \end{cases}$$

$1-\xi < 0$

Kreiszylinderkoordinaten.

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\vec{e}_s \cancel{\partial_z A_\alpha} + \vec{e}_z \frac{1}{s}\partial_s(s A_\alpha)$$

unabh. von z

$$\vec{B} = \frac{1}{s}\partial_s(s A_\alpha)\,\vec{e}_z$$

$$\partial_s(s A_\alpha) = \partial_s\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot s \begin{cases} \frac{\pi}{2}\frac{s}{a} \\ \ln\left(\frac{8}{1-\frac{s}{a}}\right) - 2 \end{cases}\right) =$$

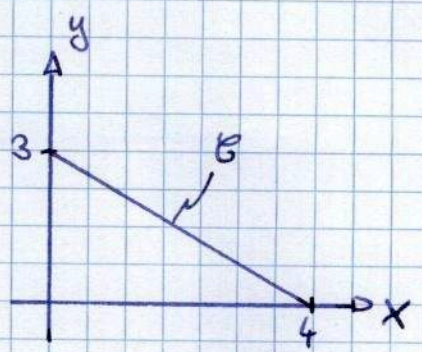
$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\,\partial_s \begin{cases} \frac{\pi}{2}\frac{s^2}{a} \\ s\ln\left(\frac{8}{1-\frac{s}{a}}\right) - 2s \end{cases} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \begin{cases} \frac{2s\pi}{a} \\ \ln\left(\frac{8}{1-\frac{s}{a}}\right) - \frac{a}{r-a} - 1 - 2 \end{cases} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \begin{cases} \frac{2s\pi}{a} \\ \ln\left(\frac{8}{1-\frac{s}{a}}\right) - \frac{a}{r-a} - 3 \end{cases}$$

$\Phi = L \cdot I$ $\qquad A = a^2 \cdot \pi$

$\Phi =$

Beispiel.



$$\vec{h}(\vec{r}) = 2x\,\vec{e}_x + y^2\vec{e}_y$$

$$\int_B \vec{h}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

$$y = -\frac{3}{4}x + 3$$

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y\Big|_B = x\vec{e}_x + \left(-\frac{3}{4}x+3\right)\vec{e}_y$$

$$\frac{d\vec{r}}{dx} = \vec{e}_x - \frac{3}{4}\vec{e}_y$$

$$d\vec{r} = \left(\vec{e}_x - \frac{3}{4}\vec{e}_y\right)dx$$

$$\int_0^4 \left(2x\,\vec{e}_x + y^2\vec{e}_y\right)\cdot\left(\vec{e}_x - \frac{3}{4}\vec{e}_y\right)dx =$$

einsetzen

$$= \int_0^4 \left(2x\,\vec{e}_x + \left(-\frac{3}{4}x+3\right)^2\vec{e}_y\right)\cdot\left(\vec{e}_x - \frac{3}{4}\vec{e}_y\right)dx =$$

$$= \int_0^4 2x - \frac{3}{4}\left(-\frac{3}{4}x+3\right)^2\,dx = 7$$

$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ $\qquad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}$

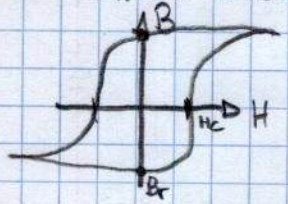
$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ $\qquad \varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ $\qquad \vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$

$\varepsilon \vec{E} - \varepsilon_0 \vec{E} = \vec{P}$ $\qquad \vec{H} = \mu_r \vec{H} - \vec{M}$

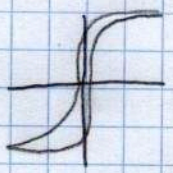
$\vec{P} = \varepsilon_0 \underbrace{(\varepsilon_r - 1)}_{\chi} \vec{E}$ $\qquad \vec{M} = \underbrace{(\mu_r - 1)}_{\kappa} \vec{H}$

Hartmagnetische Werkstoffe ($H_{koerz} \gg$) - starre Magnetisierung: $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{B}_r$

$\vec{B}_r = \mu_0 \vec{H}(\vec{r})$



Weichmagnetisch ($H_{koerziv} \ll$)



„$\int$ Hysterese dA = Energie"

(nichtrel. Kinematik)

„Galileo-Transformation"

$\vec{H}' = \vec{H} - \vec{v} \times \vec{D}$ $\qquad \vec{B}' = \vec{B}$

$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$ $\qquad \vec{P}' = \vec{P}$

$\vec{J}' = \vec{J} - \vec{v} S$ $\qquad \vec{D}' = \vec{D}$

$\vec{M}' = \vec{M} + \vec{v} \times \vec{P}$ $\qquad S' = S$

$\partial_t^c \vec{F} = \partial_t \vec{F} + \vec{v}\, \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} \times (\vec{F} \times \vec{v})$ ... mitgeschleppte Zeitableitung

$T_R = \frac{\varepsilon}{\sigma}$ ... Relaxationszeitkonst. $\qquad Re = \frac{\varepsilon}{\sigma} \frac{v_0}{L} = T_R \frac{v_0}{L}$ ... el. Reynoldszahl

$\dot{w}(r) + Q(\partial r) = R(r)$ $\qquad = 0$ vollst. abgeschl. Systeme (Energie)

$\vec{G}(r) + \vec{P}(\partial r) = \vec{F}(r)$ $\qquad = 0$ Energie- & Impulserhaltung (Impuls)

$\vec{G}$: Änderungsrate des Inhalts; $\vec{P}$: Fluß; $\vec{F}$: Produktionsraten

$\vec{G}(r) = \int_V \vec{g}\, dV$ $\qquad Q = \int_A \vec{n} \cdot \vec{q}\, dA$

lokal: $\partial_t \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \vec{q} = \dots$

$\partial_t \cdot \to -v_n [\![\cdot]\!]$; $\vec{\nabla} \cdot \to \vec{n} \cdot [\![\cdot]\!]$

$R(r) = \int_{V'} r\, dV + \int_{\partial V'} r^s\, dA$ $\qquad \vec{F}(r) = \int_{V'} \vec{f}\, dV + \int_{\partial V'} \vec{f}^s\, dA$

Leistungsdichte; Flächenleistungsdichte; Kraftdichte; Flächenkraftdichte

Aufspaltung in elektromagnetisches und materielles Teilsystem.

$$w^e = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \qquad \vec{q}^e = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \triangleq \vec{E} \times \vec{H} = \vec{S}$$

$$\vec{g}^e = \varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} \qquad \underline{\underline{\sigma}}^e = w^e \underline{\underline{\delta}} - \varepsilon_0 \vec{E} \otimes \vec{E} - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \otimes \vec{B}$$

Dichtefunktion: $dw(\vec{E}, \vec{B}) = \vec{D} \cdot d\vec{E} - \vec{H} \cdot d\vec{B}$; $\tilde{w}(\vec{E}, \vec{B}) = \frac{\varepsilon}{2} E^2 - \frac{1}{2\mu} B^2 (= w^e)$

Poynting: $\vec{\nabla} \cdot \vec{S} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{E}}_{-\partial_t \vec{B}}) - \vec{E} \cdot (\underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{H}}_{\vec{J} + \partial_t \vec{D}}) =$

$$= - \vec{H} \cdot \partial_t \vec{B} - \vec{E} \cdot \vec{J} - \vec{E} \cdot \partial_t \vec{D}$$

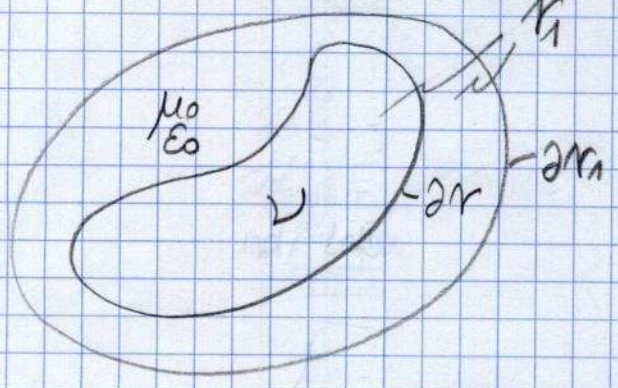
$$\Rightarrow \underbrace{- \vec{E} \cdot \vec{J}}_{r} = \vec{\nabla} \cdot \underbrace{(\vec{E} \times \vec{H})}_{= \vec{q}} + \underbrace{\vec{H} \cdot \partial_t \vec{B} + \vec{E} \cdot \partial_t \vec{D}}_{\text{mit Material} \Rightarrow \partial_t w}$$

Leistungsdichte-Bilanz

deswegen NUR VORSTUFE zum Energiesatz

$$\int_V \ldots dV \Rightarrow - \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} \, dV = \underbrace{\int_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \, dV}_{\text{Gauß} \Rightarrow \int_{\partial V} \vec{n} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) dV} + \int_V \vec{H} \cdot \partial_t \vec{B} + \vec{E} \, \partial_t \vec{D} \, dV$$

Resultierende Kräfte und Leistungen.



voll. Systeme: Energie Erhaltungsgr.

$$W(V_1) = - Q(\partial V_1) \quad \text{„zugeführte Leistung"}$$

$$Q = \int_{\partial V_1} \vec{n} \cdot \vec{q} \, dA$$

$$\vec{q} = \vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

zusätzlicher Energieaustausch: $\dot{W}(V) + Q^{me}(\partial V) = - \int_{\partial V} \vec{n} \cdot \vec{S} \, dA$

Impuls Erhaltungsgröße:

$$\vec{G}(V_1) = - \vec{P}(\partial V_1) \qquad \dot{\vec{G}}(V_1) = \frac{d}{dt} \int_V \underbrace{\rho_m}_{\text{Massendichte}} \vec{v} \, dV = \vec{F}_R^e = - \int_{\partial V_1} \vec{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^e dA$$

dom. el. $\vec{F}_R^e = \int_{\partial V_1} \varepsilon_0 \left(\vec{n} \cdot \vec{E} \vec{E} - \frac{1}{2} E^2 \vec{n} \right) dA$

dom. mag. $\vec{F}_R^e = \int_{\partial V_1} \underbrace{\frac{1}{\mu_0} \left(\vec{n} \cdot \vec{B} \vec{B} - \frac{1}{2} B^2 \vec{n} \right)}_{\text{Maxwell-Spannungsvektoren}} dA$

Drehmoment jeweils $\vec{T}_{R0}^e = \int_{\partial V_1} \vec{r}_0 \times (\text{MAXSP.}) \, dA$

$\vec{\nabla}^2 G(\vec{r},\vec{r}') = -\delta(\vec{r}-\vec{r}')$ G... Grundlösung des Laplace-Op.

$G(\vec{r},\vec{r}') = G(\vec{r}',\vec{r}) = \frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} + \underbrace{g(\vec{r},\vec{r}')}_{\text{Lösung d. Laplace-Gl.}}$

$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$ $\quad \nabla^2 G = -\delta \mid \cdot\frac{Q}{\varepsilon}$

$\Rightarrow$ Laplace-Gl. d. Elektrostatik

$\Rightarrow \frac{Q}{4\pi\varepsilon|\vec{r}-\vec{r}'|} = \varphi$ $\quad Q = \int_V \rho(\vec{r})\,dV$

$\varphi_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,dV'$

Potentialtheorie (Darstellungssätze).

$\vec{v} = \vec{v}_\infty - \vec{\nabla} u + \vec{\nabla}\times\vec{a}$, Skalarpotential u, Vektorpotential $\vec{a}$

Fundamentalsatz d. Vektoranalysis

Skalarfeld heißt harmonisch: • $\nabla^2 u = 0$ (2x stetig diffbar, im Endlichen)

• im Unendlichen gleichmäßig gegen u_∞ konv.

Vektorfeld heißt harmonisch: • stetig diff.bar und $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=0$ $\vec{\nabla}\times\vec{v}=\vec{0}$

• Unendlichen: glm. gegen $\vec{v}_\infty$ konv.

$\vec{v}$ harmonisch $\Rightarrow$ Cauchy-Integralformel: $\vec{v} = \vec{v}_\infty - \vec{\nabla}u + \vec{\nabla}\times\vec{a}$

$u = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial V}\frac{\vec{n}'\cdot\vec{v}'}{R}\,dA'$ $\quad \vec{a} = -\frac{1}{4\pi}\int_{\partial V}\frac{\vec{n}'\times\vec{v}'}{R}\,dA'$

Werte auf den Rändern: Cauchy-Daten.

u harmonisch $\Rightarrow$ Green-Integralformel: $u = u_\infty + \frac{1}{4\pi}\int_{\partial V}\left[\frac{1}{R}\partial_n u - u'\partial_n\left(\frac{1}{R}\right)\right]dA'$

RWP der Elektrostatik.

Dirichlet-Problem: harmonisches φ mit Randdaten gesucht

ges.: harmonisches E mit vorgeg Tangentialkomp. $\vec{E}_t = \vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{E})$ am Rand

skalares (klassisches) Dirichlet-Problem: $\Delta\varphi = 0$ in V $\quad \varphi = f$ auf ∂V

f analytisch $\Rightarrow$ genau eine Lsg v. φ

∂V nur durch äußere Fläche S_1 - inneres Dirichlet-Prob.
kein S_1, mindest ein S_2 - äußeres Dirichlet-Prob.

Neumann-Problem: φ harmonisch $\partial_n\varphi = -E_n$ am Rand; $\vec{E}$ harm. mit $E_n = \vec{n}\cdot\vec{E}$

skalar (klassisch) —"— : φ harmonisch $\partial_n\varphi = -E_n$ am Rand; E_n analytisch, Lsg abhängig v. Integrabilitätsbed. $\int = 0$

Green-Identität $\vec{f} = u\,\vec{\nabla} v$ $\vec{\nabla}\cdot$ und Gauß ⇒ erste

vertauschen, subtrahieren ⇒ zweite.

Ebene Magnetfelder. $\vec{A} = A\,\vec{e}_z$ $\vec{J} = J\,\vec{e}_z$

Quasi stationäre Felder. gut el. leitfähig; Induktionsgesetz wichtig

Verschiebungsströme unbedeutend.

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial_t\,\vec{\nabla}\times\vec{A}$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{E} + \partial_t\vec{A}) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} + \partial_t\vec{A} = -\vec{\nabla}\varphi$$

Bullard-Gleichung (Diffussionsproblem)

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} \qquad \vec{J} = \gamma\vec{E} = \gamma(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$$

$$\vec{E} = \frac{1}{\gamma}\vec{J} - \vec{v}\times\vec{B}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{\nabla}\times\left(\frac{1}{\gamma}\vec{J} - \vec{v}\times\vec{B}\right) = -\partial_t\vec{B}$$

$$\frac{1}{\gamma}\,\vec{\nabla}\times\vec{J} - \vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{B}) = -\partial_t\vec{B}$$

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu}\,\vec{\nabla}\times\vec{B}$$

$$\frac{1}{\gamma\mu}\underbrace{\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})}_{\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) - \nabla^2\vec{B}} - \vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{B}) = -\partial_t\vec{B}$$

($\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$)

$$-\frac{1}{\gamma\mu}\nabla^2\vec{B} - \vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{B}) = -\partial_t\vec{B}$$

$$\frac{1}{\gamma\mu}\nabla^2\vec{B} = \vec{\nabla}\times(\vec{B}\times\vec{v}) + \partial_t\vec{B} = \partial_t{}^c\vec{B}$$

$\vec{v} = \vec{0}$: $\nabla^2\vec{B} = \gamma\mu\,\partial_t\vec{B}$

$\partial_t\vec{B} = 0$: $\frac{1}{\gamma\mu}\nabla^2\vec{B} = \vec{\nabla}\times(\vec{B}\times\vec{v})$

Eindringen in Halbraum: $\partial_x{}^2 B = \gamma\mu\,\partial_t B$

Sprung: $B \sim \operatorname{erfc}(x)$ $J \propto$ (Gauß-Glocke) e^{-x^2}

sin-förmig: $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\gamma\omega}}$ $B = \mathrm{Re}\{\underline{B}e^{j(\omega t - kx)}\}$

d'Alembert-Operator $\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) w = -f$

$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) G(\vec{r},\vec{r}',t,t') = -\delta(\vec{r}-\vec{r}')\,\delta(t-t')$

Retardierung

G heißt Grundlösung des d'Alembert-Operators

$G(\vec{r},\vec{r}',t,t') = \frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\delta(t-t'-|\vec{r}-\vec{r}'|/c)$

Beschreibung der Ausbreitung der Welle von sing. Ereignis in Raumzeit

$(\vec{r},t)$ die $G(\vec{r},\vec{r}',t,t') \neq 0$ für Paare $(\vec{r}',t')$ liefern

erfüllen "Kegelbedingung" $c^2(t-t')^2 - |\vec{r}-\vec{r}'|^2 = 0$, $t > t'$

Beschreibt $(\vec{r},t)$ die Welle erreichen kann.

$w_p(\vec{r},t) = \iint G(\vec{r},\vec{r}',t,t')\, f(\vec{r}',t')\, dV'dt'$

ideale verlustfreie Doppelleitung

$\partial_z U + \partial_t \Phi' = 0$ Induktionsgesetz

$\partial_z I + \partial_t Q' = 0$ Satz von der el. Ladungserhaltung

$Q' = C'U$ $\quad \Phi' = L'I$ $\quad L'C' = \mu\varepsilon = \frac{1}{c^2}$