

TU WIEN

ELEKTRODYNAMIK

VU 351.019

WS 2016

Prüfungssammlung

Lizenz:

GNU GPLv3

20. Januar 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	4
1.1	Analytische Werkzeug	4
	Celbsch-Potentiale 1.	4
	Ortsvektor 2.	4
	Ableitung eines Skalarfeldes 3.	4
	Ableitung eines Skalarfeldes 4.	4
2	Elektromagnetische Felder	5
2.1	Globale und Lokale Eigenschaften	5
	Halber Kreiszylinder 5.	5
	Starre Magnetisierung 6.	5
2.2	Die Feldgleichungen in Sonderfällen	5
2.3	Energie und Impuls	5
	Lorenzkraft an einem T-Stück 7.	5
3	Statische und Stationäre Felder	6
3.1	Elektrostatik und Quasi-Elektrostatik	6
	Magnetische Skalarpotential 8.	6
3.2	Spezielle elektrostatische Felder	6
	Elektrostatistisches Potential 9.	6
	Elektrischer Dipol 10.	6
	Skalarpotential 11.	7
	Drehstromleitung 12.	7
	Elektrostatistisches Feld 13.	7
3.3	Relaxion und Konvektion elektrischer Ladungen	7
3.4	Stationäre Magnetfelder	7
	Kreisschleife 14.	7
	Magnetisches Vektorpotential 15.	8
	Statischen magnetischen Dipol 16.	8
	Feld eines Dauermagneten 17.	8
3.5	Spezielle stationäre Magnetfelder	9

4	Induktionerscheinungen	9
4.1	Quasistationäre Felder	9
4.2	Diffusion magnetischer Felder	9
	Parallele Schienen 18.	9
5	Elektromagnetische Wellen	10
5.1	Grundgleichungen und Potentiale	10
	Elektrodynamische Potentiale 19.	10
	Polarisierte elektromagnetische Sinuswelle 20.	10
	Wellengleichungen im Frequenzbereich 21.	10
5.2	Typen von Wellen	11
	Homogene Elektromagnetische Sinuswellen 22.	11
5.3	Wellen auf Doppelleitungen	11
	Leitungsmodell für Spulen 23.	11
	Homogene Leitung 24.	11

Werter Student!

Diese Unterlagen werden dir **kostenlos** zur Verfügung gestellt, damit Sie dir im Studium behilflich sind. Sie wurden von vielen Studierenden zusammengetragen, digitalisiert und aufgearbeitet. Ohne der Arbeit von den Studierenden wären diese Unterlagen nicht entstanden und du müsstest dir jetzt alles selber zusammensuchen und von schlecht eingescannten oder abfotographierten Seiten lernen. Zu den Beispielen gibt es verschiedene Lösungen, welche du dir auch erst mühsamst rausuchen und überprüfen müsstest. Die Zeit die du in deine Suche und recherche investierst wäre für nachfolgende Studenten verloren. Diese Unterlagen leben von der Gemeinschaft die sie betreuen. Hilf auch du mit und erweitere diese Unterlagen mit deinem Wissen, damit sie auch von nachfolgenden Studierenden genutzt werden können. Geh dazu bitte auf <https://github.com/Painkilla/VU-351.019-Elektrodynamik/issues> und schau dir in der TODO Liste an was du beitragen möchtest. Selbst das Ausbessern von Tippfehlern oder Rechtschreibung ist ein wertvoller Beitrag für das Projekt. Nütze auch die Möglichkeit zur Einsichtnahme von Prüfungen zu gehen und die Angaben anderen zur Verfügung zu stellen, damit die Qualität der Unterlagen stetig besser wird. \LaTeX und Git sind nicht schwer zu lernen und haben auch einen Mehrwert für das Studium und das spätere Berufsleben. Sämtliche Seminar oder Bachelorarbeiten sind mit \LaTeX zu schreiben. Git ist ideal um gemeinsam an einem Projekt zu arbeiten und es voran zu bringen. Als Student kann man auf GitHub übrigens kostenlos unbegrenzt private Projekte hosten.

Mit dem Befehl:

```
$ git clone https://github.com/Painkilla/VU-351.019-Elektrodynamik.git
```

erstellst du eine lokale Kopie des Repositorium. Du kannst dann die Dateien mit einem \LaTeX -Editor deiner Wahl bearbeiten und dir das Ergebniss ansehen. Bist du auf GitHub registriert, kannst du einen Fork(engl:Ableger) erstellen und mit den Befehlen:

```
$ git commit -m "Dein Kommentar zu den Änderungen"
$ git push
```

werden deine Ergänzungen auf deinen Ableger am Server gesendet. Damit deine Ergänzungen auch in das zentrale Repositorium gelangen und allen Studierenden zur Verfügung steht musst du nur noch einen Pull-Request erstellen.

1 Einführung

1.1 Analytische Werkzeug

Celbsch-Potentiale 1.

Angenommen f und g sind zwei Skalarfelder im Dreidimensionalen euklidischen Raum. Daraus lässt sich ein Vektorfeld $\vec{v} = (\vec{\nabla} f) \times (\vec{\nabla} g)$ bestimmen, dessen Vektorlinien durch die Schnittkurven der beiden Flächenscharen $f = \text{const}$ und $g = \text{const}$ gebildet werden. f und g werden dann die CLEBSCH-Potentiale von \vec{v} genannt. Berechnen Sie die Quellendichte von \vec{v} .

Hinweis:

Ortsvektor 2.

Stellen Sie das Feld $\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times (x\vec{r})]$ in kartesischen Koordinaten dar, wobei \vec{r} den Ortsvektor bezüglich des Ursprungs und x die x -Koordinate bedeutet.

Hinweis:

Ableitung eines Skalarfeldes 3.

Berechnen Sie die Ableitung des Skalarfeldes $H(\vec{r}) = C \cdot (3x^2y - y^2z + 2z^3x)$ im Punkt $(x, y, z) = (1; 1; 1)$ in der radialen Richtung $\vec{e}_r = \vec{r}/r$ mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Hinweis:

Ableitung eines Skalarfeldes 4.

Berechnen Sie die Ableitung des Skalarfeldes $G(\vec{r}) = K \cdot (x^3 + 4y^2y + 2z^3)$ im Punkt $(x, y, z) = (1; -3; 2)$ in Richtung $\vec{n} = (\vec{e}_x - 2\vec{e}_y + \vec{e}_z)/\sqrt{6}$.

Hinweis:

2 Elektromagnetische Felder

2.1 Globale und Lokale Eigenschaften

Halber Kreiszyylinder 5.

Ein halber, dickwandiger Kreiszyylinder der Länge l ist radial starr mit $M = |\vec{M}| = \text{const}$ magnetisiert, sonst aber stromfrei. Berechnen Sie sein gesamtes magnetisches Moment \vec{m} .

Hinweis:

Starre Magnetisierung 6.

Eine Schicht $0 \leq z \leq a$ trägt die Magnetisierung \vec{M} unabhängig von x und y . Berechnen Sie die vollständige fiktive Stromverteilung.

$$\vec{M} \begin{cases} (1 - z/a)M_0\vec{e}_x & \text{für } 0 \leq z \leq a \\ \vec{0} & \text{für } a < z < 0 \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Hinweis:

2.2 Die Feldgleichungen in Sonderfällen

2.3 Energie und Impuls

Lorenzkraft an einem T-Stück 7.

Das linke Bild zeigt, wie die magnetische Flussdichte in der Umgebung eines gleichförmig Strom durchflossenen Streifens zu berechnen ist.

$$\vec{B}(\mathcal{P}) = \frac{\mu_0 K}{2\pi} \left[\ln\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right) \vec{e}_x + \alpha \vec{e}_y \right]$$

Nutzen Sie dieses Ergebnis, um für einen Leiter mit dem rechts angegebenen Profil die längenbezogene resultierende Kraft zu berechnen, die von den beiden senkrechten Schenkeln auf den waagrechten Schenkel ausgeübt wird, also an der Verbindungsstelle V übertragen werden muss.

Hinweis:

$$\int \begin{Bmatrix} \arctan(u) \\ \operatorname{arccot}(u) \end{Bmatrix} du = u \begin{Bmatrix} \arctan(u) \\ \operatorname{arccot}(u) \end{Bmatrix} \mp \ln(\sqrt{1+u^2}) + \text{const}$$

3 Statische und Stationäre Felder

3.1 Elektrostatik und Quasi-Elektrostatik

Magnetische Skalarpotential 8.

Berechnen Sie für das ebene magnetische Feld mit der Feldstärke

$\vec{H} = \frac{H_0}{a^2} [2xy\vec{e}_x + (x^2 - y^2)\vec{e}_y]$ ein magnetisches Skalarpotential $\varphi(x, y)$, so dass $\vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi$.

Hinweis:

3.2 Spezielle elektrostatische Felder

Elektrostatisches Potential 9.

An den beiden Mantelflächen eines dickwandigen, beidseitig unendlich langen Kreiszylinders ist das elektrostatische Potential wie angegeben vorgeschrieben. Berechnen Sie das Potential im Bereich $a \leq \varrho \leq b$.

Hinweis:

Bildbeschreibung: Das Potential entlang des inneren Kreises mit dem Radius a beträgt $\varphi = 0$, entlang des äußeren Kreises b beträgt $\varphi = U_0 \cos(\alpha)$.

Elektrischer Dipol 10.

Ein statischer elektrischer Dipol erzeugt im sonst leeren Raum bekanntlich eine elektrische Feldstärke, die sich bei passender Koordinatenwahl durch \vec{E} darstellen lässt. Zusätzlich herrsche ein homogenes Magnetfeld der Flussdichte $\vec{B} = B\vec{e}_z$.

$$\vec{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\cos(\vartheta)\vec{e}_r - \vec{e}_z}{r^3} \quad (3.2.1)$$

1. Geben Sie das Feld des Poynting-Vektors \vec{S} an.
2. Wie sehen die zu \vec{S} gehörenden Vektorlinien aus?
3. Berechnen Sie die Quellendichte und die Wirbeldichte von \vec{S} .

Hinweis:

Skalarpotential 11.

Bei einem ebenen elektrostatischen Problem ist das Skalarpotential am Rand wie angegeben vorgeschrieben. Bestimmen Sie daraus das Potential im ladungsfreien Bereich $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$.

Hinweis:

Drehstromleitung 12.

Zu einer Drehstromleitung gehört in der skizzierten Anordnung ein Magnetfeld, dass sich für relativ große Abstände $\varrho \gg c$ durch das Vektorpotential

$$\vec{A} \approx \Re \left\{ \frac{\mu_0 \sqrt{2}}{2\pi} \left[(\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3) \ln \left(\frac{c}{\varrho} \right) - (\underline{I}_1 - \underline{I}_3) \frac{c}{\varrho} \cos(\alpha) \right] e^{j\omega t} \vec{e}_z \right\} \quad (3.2.2)$$

mit den komplexen Effektivwerten $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$ der Leiterströme darstellen läßt. Berechnen Sie daraus für ein symmetrisches Drehstromsystem den Betrag der magnetischen Flußdichte $|\vec{B}|(\varrho, \alpha, t)$ in reeller Darstellung.

Hinweis:

Elektrostatisches Feld 13.

Von einem ebenen elektrostatischen Feld ist das Vektorpotential $\vec{V} = \frac{\varepsilon_0 U}{a^2} (x^2 - y^2 - 2xy) \vec{e}_z$ bekannt. Berechnen Sie den längenbezogenen elektrischen Fluß durch den Streifen mit der Spur C .

Hinweis:

3.3 Relaxion und Konvektion elektrischer Ladungen**3.4 Stationäre Magnetfelder****Kreisschleife 14.**

Das magnetische Vektorpotential einer stromdurchflossenen Kreisschleife Abb. ergibt sich in Kreiszylinderkoordinaten zu

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{2a}{\sqrt{(a+\varrho)^2 + z^2}} G \left[\sqrt{\frac{(a-\varrho)^2 + z^2}{(a+\varrho)^2 + z^2}} \right] \vec{e}_\alpha$$

mit einer Funktion G , die durch das Integral

$$G(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\pi \frac{\cos(\alpha) d\alpha}{\sqrt{1+\eta^2+(1-\eta^2)\cos(\alpha)}}$$

definiert ist und sich für kleine η im Bereich $0 < \eta \ll 1$ durch

$$G(\eta) \approx \ln\left(\frac{4}{\eta}\right) - 2$$

approximieren lässt. Berechnen Sie damit näherungsweise die gegenseitige Induktivität zweier gleicher, coaxialer Kreisspulen Abb. mit den Radien a und den Windungszahlen N , die in relativ kleinem Abstand b zueinander liegen. ($b^2 \ll a^2$)

Hinweis:

Magnetisches Vektorpotential 15.

Berechnen Sie für das ebene magnetische Feld mit der Flussdichte \vec{B} ein Vektorpotential $\vec{A} = A(x, y)\vec{e}_z$.

$$\vec{B} = \frac{B_0}{a} [(x - 2y)\vec{e}_x + (2x - y)\vec{e}_y] \quad (3.4.1)$$

Hinweis:

Statischen magnetischen Dipol 16.

In der Umgebung eines statischen magnetischen Dipols mit dem magnetischen Moment $\vec{m} = m\vec{e}_z$ stellt sich im sonst leeren Raum bekanntlich die magnetische Flussdichte \vec{B} (Kugelkoordinaten!) ein. Berechnen Sie den zugehörigen Inhalt an magnetischer Energie, der dem Bereich außerhalb einer konzentrischen Kugel mit dem Radius a zukommt.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} [3 \cos(\vartheta)\vec{e}_r - \vec{e}_z] \quad (3.4.2)$$

Hinweis:

Feld eines Dauermagneten 17.

Der Berechnung des Feldes eines Dauermagneten, in dessen näherer Umgebung sich keine magnetisierbaren Körper befinden, wird folgendes Modell zugrundegelegt:

Im sonst leeren Raum befindet sich ein starr inhomogen magnetisierter, endlich

ausgedehnter Körper \mathcal{V} mit der Magnetisierung $\vec{M}(\vec{r})$. Der ganze Raum ist frei von (wahren) elektrischen Strömen, sodass sich die magnetische Feldstärke als (negativer) Gradient $\vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi_M$ eines magnetischen Skalarpotentials φ_M darstellen lässt.

1. Welchen Differentialgleichungen muss φ_M im Innenraum \mathcal{V} und im Außenraum $\hat{\mathcal{V}}$ genügen?
2. Welche Sprungbedingungen muss φ_M am Rand $\partial\mathcal{V}$ erfüllen?

Hinweis:

3.5 Spezielle stationäre Magnetfelder

4 Induktionserscheinungen

4.1 Quasistationäre Felder

4.2 Diffusion magnetischer Felder

Parallele Schienen 18.

Zwei rechteckige, parallele Schienen (Konduktivität γ , Permeabilität μ) dienen zur Hin- und Rückleitung eines Sinusstroms mit dem Effektivwert I und der Frequenz f . Berechnen Sie näherungsweise die gesamte längenbezogene Verlustleistung für den Fall, dass die Eindringtiefe δ deutlich kleiner als die Schienenbreite b ist. Gehen Sie dazu von den Ausdrücken für den Halbraum aus:

$$\vec{H}(0, t) = \vec{H}_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y \quad (4.2.1)$$

$$\vec{J}(x, t) = -\hat{H}_0 \frac{\sqrt{2}}{\delta} e^{-x/\delta} \cos(\omega t - x/\delta + \pi/4) \vec{e}_z, \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\gamma\omega}} \quad (4.2.2)$$

Hinweis:

5 Elektromagnetische Wellen

5.1 Grundgleichungen und Potentiale

Elektrodynamische Potentiale 19.

In einem leeren Raumbereich wird ein elektromagnetisches Feld in Bezug auf ein kartesisches Koordinatensystem durch die elektrodynamischen Potentiale $\vec{A}(\vec{r}, t) = f(x, y) \cos(\omega t) \vec{e}_z$, $\varphi(\vec{r}, t) = 0$ beschrieben.

1. Welcher Gleichung hat die Funktion $f(x, y)$ zu genügen?
2. Stellen Sie die zugehörigen Felder der elektrischen Feldstärke, der magnetischen Flussdichte und des Poynting-Vektor dar.

Hinweis:

Polarisierte elektromagnetische Sinuswelle 20.

Eine ebene, linear polarisierte elektromagnetische Sinuswelle soll im leeren Raum einen Energiefluss der mittleren Dichte $1,36 \text{ kW/m}^2$ tragen. Wie groß sind die zugehörigen Amplituden der elektrischen Feldstärke und der magnetischen Flussdichte?

Hinweis:

Wellengleichungen im Frequenzbereich 21.

Gehen Sie von der einfachen, inhomogenen Wellengleichung

$$(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2) w(\vec{r}, t) = -f(\vec{r}, t) \quad (5.1.1)$$

aus und führen Sie gemäß

$$X(\vec{r}; j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\vec{r}, t) e^{-j\omega t} dt \quad x(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\vec{r}, j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (5.1.2)$$

die Fourier-Transformierten $W(\vec{r}; j\omega)$ und $F(\vec{r}; j\omega)$ der Funktionen $w(\vec{r}, t)$ und $f(\vec{r}, t)$ ein. Welcher Gleichung müssen dann die Fourier-Transformierten genügen?

Hinweis:

5.2 Typen von Wellen

Homogene Elektromagnetische Sinuswellen 22.

Für die Ausbreitung ebener homogener elektromagnetischer Sinuswellen in einem einfachen Material mit konstanten Werten der Permittivität ε , der Permeabilität μ und der Konduktivität σ liefern die beiden Maxwell-Rotorgleichungen über Ansätze der Form

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = \Re \left[\vec{\mathcal{F}} e^{j\omega t - \gamma \vec{\kappa} \cdot \vec{r}} \right] \quad (5.2.1)$$

die Zusammenhänge $\gamma \vec{\kappa} \times \vec{\mathcal{E}} = j\omega\mu\vec{\mathcal{H}}$, und $\gamma \vec{\kappa} \times \vec{\mathcal{H}} = -(\sigma + j\omega\varepsilon)\vec{\mathcal{E}}$. Stellen Sie damit den Dämpfungskoeffizienten $\alpha > 0$ und den Phasenkoeffizienten $\beta > 0$ als Funktion der Kreisfrequenz dar.

Hinweis:

5.3 Wellen auf Doppelleitungen

Leitungsmodell für Spulen 23.

Zur grundsätzlichen Untersuchung rascher Vorgänge erweist sich häufig ein Leitungsmodell mit dem angegebenen Ersatzschaltbild eines Leitungselements als brauchbar. L und C sind dabei die üblichen Beläge der Induktivität und der Kapazität. Cp ist eine kapazitive Ersatzgröße der Dimension Kapazität \times Länge (modelliert z.B. die kapazitive Kopplung benachbarter Windungen).

Stellen Sie für dieses Modell als Erweiterung der üblichen Leitungsgleichungen die beiden gekoppelten partiellen Differentialgleichungen für $u(z, t)$ und $i(z, t)$ auf.

Hinweis:

Homogene Leitung 24.

Spannungen und Ströme am Eingang bzw. Ausgang einer homogenen Leitung sind bei Sinuserregung im eingeschwungenen Zustand bekanntlich durch die Zweitorgleichungen miteinander verknüpft. Bestimmen Sie damit die Parameter U_q und

Z_i einer Ersatzspannungsquelle.

$$U_1 = \cosh(\gamma l)U_2 + Z_w \sinh(\gamma l)I_2 \quad (5.3.1)$$

$$I_1 = \frac{1}{Z_w} \sinh(\gamma l)U_2 + \cosh(\gamma l)I_2 \quad (5.3.2)$$

Hinweis: