1

Angenommen, f und g sind zwei ausreichend glatte Skalarfelder im dreidimensionalen euklidischen Raum. Formen Sie die beiden Ausdrücke

$$\vec{\nabla} \times (f\vec{\nabla} g) \quad \text{und} \quad \vec{\nabla} \times (g\vec{\nabla} f)$$

um und zeigen Sie, dass sich das Flächenintegral

$$\int_{\mathscr{A}} [(\vec{\nabla} f) \times (\vec{\nabla} g)] \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}A$$

auf zwei äquivalente Arten als Kurvenintegral über den Rand $\partial\mathscr{A}$ darstellen lässt.

Lösung:

- *Anwendung der Tabelle 1.2 Zeile 6 im EDyn-Script*
- *Satz von Stokes für das Integral verwenden*

2

In einem kosmologischen Modell (W.H. Watson) wird eine Erweiterung der Maxwell-Gleichungen gemäß

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} - \partial_t\vec{D} = \vec{J} - \vec{\nabla}G\,, \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \varrho + \mu_0\varepsilon_0\partial_t G$$

mit einer Funktion G vorgeschlagen. Die beiden anderen Maxwell-Gleichungen bleiben ungeändert. Welcher Gleichung muß G genügen, wenn der Satz von der Erhaltung der elektrischen Ladung (Kontinuitätsgleichung für $\vec{J}$ und ϱ) in der üblichen Form gelten soll?

Lösung:

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} - \partial_t\vec{D} = \vec{J} - \vec{\nabla}G \qquad (1)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \varrho + \varepsilon\mu\partial_t G \qquad (2)$$

Aus (1) folgt $\underbrace{\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H})}_{0} - \partial_t\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \vec{\nabla}\cdot\vec{J} - \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}G\,.$ (3)

Einsetzen von (2) in (3) ergibt

$$-\partial_t(\varrho + \varepsilon\mu\partial_t G) = \vec{\nabla}\cdot\vec{J} - \nabla^2 G\,,$$

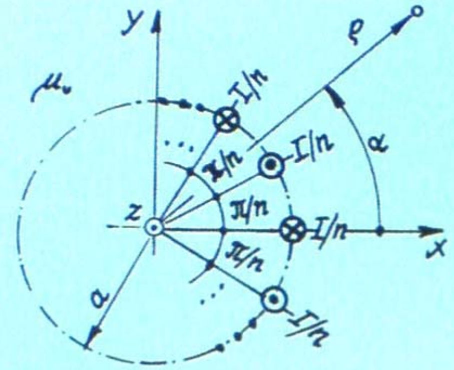
$$\underline{\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = -\partial_t\varrho + \nabla^2 G - \varepsilon\mu\partial_t^2 G}\,. \qquad (4)$$

Damit sich (4) zur Kontinuitätsgleichung vereinfacht muß die Funktion der <u>homogenen Wellengleichung</u>

$$\boxed{\nabla^2 G - \varepsilon\mu\partial_t^2 G = 0}$$

genügen.

3



Um das von einer gemeinsamen Hin- und Rückleitung erzeugte magnetische Außenfeld möglichst klein zu halten, wird anstelle der gewöhnlichen Doppelleitung manchmal eine Aufspaltung der Leiter und, wie skizziert, eine Querschnittsanordnung in Form eines regelmäßigen $2n$ – Ecks gewählt.

Als dominierender Beitrag zum magnetischen Vektorpotential für relativ große Abstände $(\varrho^2 \gg a^2)$ ergibt sich dann

$$\vec{A} \approx -\frac{\mu_0 I}{\pi}\left(\frac{a}{\varrho}\right)^n \cos(n\alpha)\,\vec{e}_z\ .$$

Der Fall $n = 1$ entspricht der gewöhnlichen Doppelleitung.

(i) Berechnen Sie die zugehörigen magnetischen Flußdichten und deren Beträge in ebenen Polarkoordinaten.

(ii) Vergleichen Sie die Flußdichtebeträge im Abstand $\varrho = 10a$ für $n=1$ (Doppelleitung) und $n = 3$ (Sechseck).

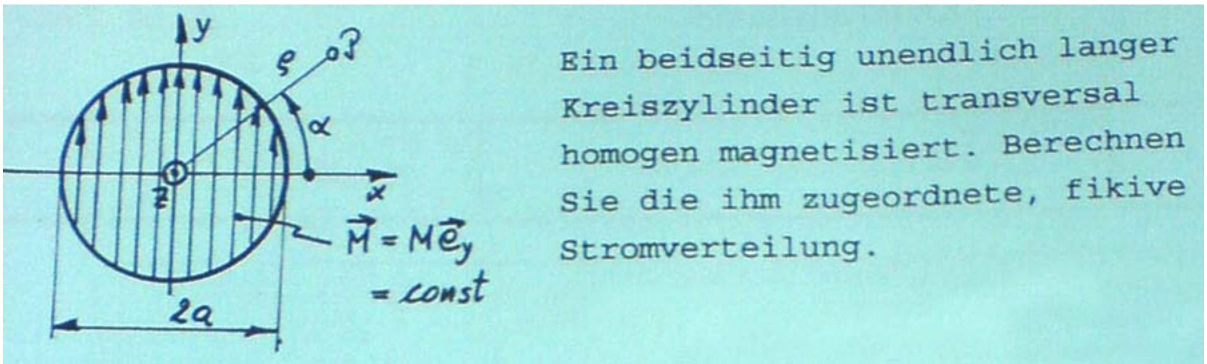
Lösung:

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \dots = \underline{\underline{\frac{\mu_0 I n}{\pi a}\left(\frac{a}{\varrho}\right)^{n+1}\left\{\vec{e}_\varrho \sin(n\alpha) + \vec{e}_\alpha \cos(n\alpha)\right\}}}$$

Betrag: $$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I n}{\pi a}\left(\frac{a}{\varrho}\right)^{n+1}$$

Vergleich: $$\left.\frac{|\vec{B}|_{n=3}}{|\vec{B}|_{n=1}}\right|_{\varrho=10a} = \frac{\frac{\mu_0 I\, 3}{\pi a}\left(\frac{1}{10}\right)^4}{\frac{\mu_0 I}{\pi a}\left(\frac{1}{10}\right)^2} = \underline{\underline{0{,}03}}$$

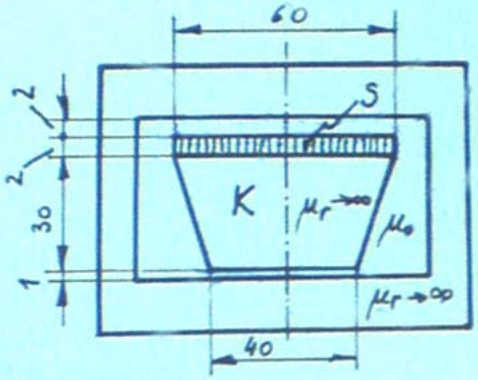
4



Lösung:

- $\vec{J}^{\,f} = \vec{\nabla}\times\overrightarrow{M} = \vec{0}$
- $\overrightarrow{K}^{\,f} = \vec{n}\times\left(Sprung\ von\ \overrightarrow{M}\right) = -M\cos(\alpha)\overrightarrow{e_z}$

5



Der Körper K besteht aus einem konischen Drehteil und einer transversal starr magnetisierten Dauermagnetscheibe S mit $\mu_0 M = 0{,}9\,\mathrm{T}$. Der magnetische Rückschluß ist ideal permeabel. Berechnen Sie die resultierende Kraft an K nach Betrag und Richtung. Vernachlässigen Sie Streuungen.

Maße in mm

$$\vec{F}_R^{e} = \int_{\partial V_1} \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{n}\cdot\vec{B}\,\vec{B} - \frac{1}{2}B^2\vec{n}\right) dA$$

Lösung:

A2.3.16 Kraft an einem Drehteil:

Mit den Bezeichnungen aus Abb. A 2.3.16 b. lassen sich aus dem Durchflutungssatz,

$$\frac{1}{\mu_0}B_1\ell_1 + H_M\ell_M + \frac{1}{\mu_0}B_2\ell_2 = 0\,,$$

zusammen mit dem Satz vom magnetischen Hüllenfluß und der Materialgleichung für den Dauermagneten,

$$B_1A_1 = B_2A_2\,, \quad B_1 = \mu_0 H_M + \mu_0 M\,,$$

die magnetischen Flußdichten in den Spalten berechnen:

$$B_1 = \frac{\mu_0 M}{1 + \frac{\ell_1}{\ell_M} + \frac{\ell_2}{\ell_M}\frac{A_1}{A_2}} = 0{,}288\,T, \qquad B_2 = \frac{A_1}{A_2}B_1 = 0{,}648\,T.$$

Die gesuchte resultierende Kraft ergibt sich damit zu

$$\vec{F} = \frac{B_1^2}{2\mu_0}A_1\vec{e}_z - \frac{B_2^2}{2\mu_0}A_2\vec{e}_z = \frac{\pi}{8\mu_0}\left[(B_1d_1)^2 - (B_2d_2)^2\right]\vec{e}_z$$
$$= -116{,}6\,N\,\vec{e}_z\,. \blacksquare$$

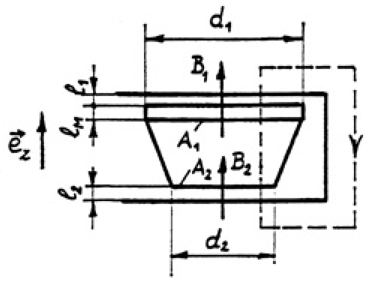
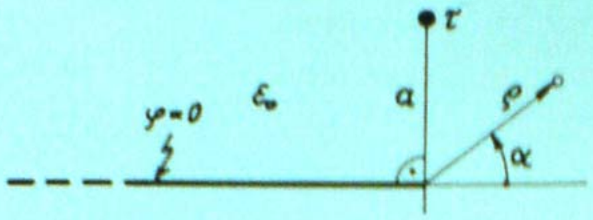


Abb. A 2.3.16 b

6



Parallel zur geraden Kante einer dünnen Metallplatte verläuft eine Linienladung. Die Feldberechnung liefert für das elektrostatische Potential den Ausdruck

$$\varphi(\varrho,\alpha) = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left\{\frac{1+(\varrho/a)^{2\nu}+2(\varrho/a)^{\nu}\cos(\alpha/2+\pi/4)}{1+(\varrho/a)^{2\nu}-2(\varrho/a)^{\nu}\cos(\alpha/2-\pi/4)}\right\}, \quad \nu = \begin{cases} +1/2 \\ -1/2 \end{cases} \text{für } \begin{cases} \varrho<a, \\ \varrho>a. \end{cases}$$

Angenommen, anstelle der Linienladung verläuft ein dünner Metalldraht mit dem Durchmesser $d \ll a$. Berechnen Sie die längenbezogene Kapazität der Anordnung.

Hinweis: $(1+\delta)^{\nu} \approx 1+\nu\delta$ für $|\delta| \ll 1$

Lösung:

Keine Lösung gefunden, da sich beim Rechnen im Nenner des ln-Arguments 0 ergibt.

7

Berechnen Sie für das ebene magnetische Feld mit der Flußdichte

$$\vec{B} = \frac{B_0}{a}\left[(2x-y)\vec{e}_x - (x+2y)\vec{e}_y\right]$$

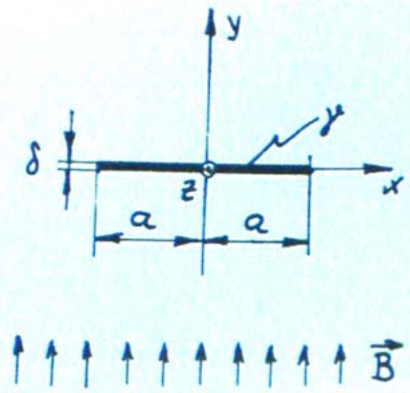
ein Maxwell-geeichtes Vektorpotential.

Lösung:

(ähnlich zu A3.5.1)

$$\vec{A} = \frac{B_0}{a}\left[2xy - \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2}\right]\vec{e_z}$$

8



Ein langer, nicht magnetisierbarer Metallstreifen der Breite 2a, Dicke $\delta \ll a$ und Leitfähigkeit γ liegt senkrecht in einem magnetischen Wechselfeld der Flußdichte

$$\vec{B} = B_0 \cos(\omega t)\vec{e}_y .$$

Berechnen Sie die Joule-Verluste im Streifen, bezogen auf die Länge in z-Richtung, ohne Berücksichtigung des von den induzierten Strömen selbst erzeugten Magnetfeldes, wobei für den Gesamtstrom im Streifen $I=0$ gilt.

Lösung:

Induktionsgesetz in lokaler Form: $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial_t \vec{B}$ (1)

Mit $\vec{B} = B_0\cos(\omega t)\vec{e}_y$ folgt $\partial_t\vec{B} = -\omega B_0\sin(\omega t)\vec{e}_y$ in (1)

$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \omega B_0 \sin(\omega t)\vec{e}_y$ (2)

$(\underbrace{\partial_z E_x}_{=0} - \partial_x E_z)\vec{e}_y = \omega B_0 \sin(\omega t)\vec{e}_y$ (3)

Die zugehörige Differentialgleichung lautet

$-\partial_x E_z = \omega B_0 \sin(\omega t)$. (4)

Integration von Gl. (4) ergibt

$E_z = -\omega B_0 x \sin(\omega t) + K$, aus der Bedingung $I_{ges} = 0 \to K = 0$.

Längenbezogene Joule-Verluste:

$$P' = \int_A \gamma E_z^2 \, dA = \int_0^\delta \int_{-a}^{a} \gamma \omega^2 B_0^2 x^2 \sin^2(\omega t)\, dx\, dy$$

$$P' = \gamma \omega^2 B_0^2 \delta \frac{x^3}{3} \sin^2(\omega t)\Big|_{-a}^{a} = \gamma\omega^2 B_0^2 \delta \frac{2}{3} a^3$$

$$P' = \frac{2}{3}\gamma(\omega B_0)^2 \delta a^3 \sin^2(\omega t)$$

Zeitmittelwert der Joule-Verluste:

$$\overline{P'} = \frac{1}{3}\gamma(\omega B_0)^2\delta a^3$$

9

In einem besonders einfachen Plasmamodell ergibt sich für elektromagnetische Sinusfelder

$$\vec{E}(\vec{r},t) = Re\{\underline{\vec{E}}(\vec{r})\, e^{j\omega t}\}, \quad etc.,$$

die reduzierte Wellengleichung (Helmholtz-Gleichung)

$$\nabla^2 \underline{\vec{E}} + \frac{1}{c_0^2}(\omega^2 - \omega_p^2)\underline{\vec{E}} = \vec{0},$$

worin die Konstante $\omega_p = \sqrt{n_e e^2/(\varepsilon_0 m_e)}$ mit der Elektronendichte n_e, der Elementarladung e und der Elektronmasse m_e eine charakteristische Kreisfrequenz bedeutet. Dieselbe Gleichung gilt für $\underline{\vec{B}}(\vec{r})$.

(i) Ermitteln Sie die zugehörige Dispersionsbeziehung $F(\omega,\beta) = 0$ für homogene, ebene Sinuswellen.

(ii) Zeichnen und diskutieren Sie das Dispersionsdiagramm (Graphische Darstellung der Dispersionsbeziehung).

Lösung:

A5.2.15 Dispersion:

(i) Mit $\underline{\vec{E}}(\vec{r}) = \underline{\vec{E}}_0\, e^{-jk\vec{\kappa}\cdot\vec{r}}$ (homogene ebene Sinuswellen) folgt aus der angegebenen reduzierten Wellengleichung sofort die gesuchte Dispersionsbeziehung

$$\omega^2 - \omega_p^2 - c_0^2 k^2 = 0$$

entsprechend

$$\omega = \sqrt{\omega_p^2 + c_0^2 k^2} \quad \text{oder} \quad k = \frac{1}{c_0}\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}\,.$$

(ii) Abb. A5.2.15 zeigt das zugehörige Dispersionsdiagramm. Für Kreisfrequenzen unterhalb ω_p ist eine Wellenausbreitung dieses Typs nicht möglich (Evaneszenz). Für $\omega > \omega_p$ gibt es ungedämpfte, aber dispergierende Wellen. Für $\omega \gg \omega_p$ verhalten sich die Wellen wie im leeren Raum. ■

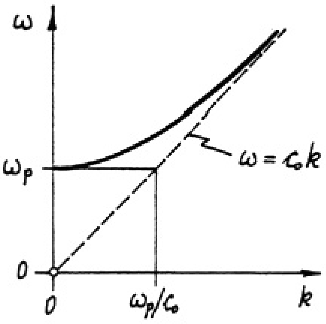


Abb. A 5.2.15

10

Ein erweitertes Leitungsmodell

$$\partial_z i = -C'\partial_t u\,, \qquad \partial_z u = -L'\partial_t\left(i + C_p''\partial_t\partial_z u\right)$$

erfaßt mit dem zusätzlichen Parameter C_p'' (physikalische Dimension: Kapazität x Länge) auch longitudinale kapazitive Kopplungen. Gehen Sie von Sinuswellen

$$\begin{Bmatrix} u(z,t) \\ i(z,t) \end{Bmatrix} = Re\begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{\imath} \end{Bmatrix} e^{j(\omega t - \beta z)}$$

aus und bestimmen Sie die zugehörige Wellenimpedanz $Z_W(\omega)$.

Lösung: