Tarea 1

Alumno: Jorge Eduardo Bravo Soto
Rol: 202103004-2
Profesor: Alexander Quaas

Clase: MAT125

1. Pregunta 1

1.1. Parte A

Sea $X = Y$ entonces $(X \cap Y^c) \cup (X^c \cap Y) = (X \cap X^c) \cup (X^c \cap X) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$ Por lo que queda demostrada la implicancia hacia la derecha.

Para demostrar la implicancia hacia la izquierda ocuparemos demostración por contradicción por lo que asumiremos que $X \neq Y$ y que $(X \cap Y^c) \cup (X^c \cap Y) = \emptyset$. Dado que $X \neq Y$ existe, sin perdida de generalidad, algún $y_0 \in Y \wedge y_0 \notin X$ por tanto dado que $y_0 \notin X \Rightarrow y_0 \in X^c$ sabemos que $y_0 \in (X^c \cap Y)$ por lo que $(X \cap Y^c) \cup (X^c \cap Y) \neq \emptyset$ una contradicción. El caso en el que existe algún $x_0 \in X \wedge x_0 \notin Y$ es análogo.

1.2. Parte B

Ocuparemos solo las definiciones, distributividad de operadores lógicos, Morgan y llegaremos a la igualdad

$$
\begin{aligned}
& x \in (X - Y) \cup (Y - X) \\
& \iff (x \in X \wedge x \notin Y) \vee (x \in Y \wedge x \notin X) \\
& \iff ((x \in X \wedge x \notin Y) \vee x \in Y) \wedge ((x \in X \wedge x \notin Y) \vee x \notin X) \\
& \iff ((x \in X \vee x \in Y) \wedge (x \notin Y \vee x \in Y)) \wedge ((x \in X \vee x \notin X) \wedge (x \notin Y \vee x \notin X)) \\
& \iff ((x \in X \vee x \in Y) \wedge T) \wedge (T \wedge (x \notin Y \vee x \notin X)) \\
& \iff (x \in X \vee x \in Y) \wedge (x \notin Y \vee x \notin X) \\
& \iff x \in (X \cup Y) \wedge x \in (Y^c \cup X^c) \\
& \iff x \in (X \cup Y) \wedge x \in (Y \cap X)^c \\
& \iff x \in (X \cup Y) - (Y \cap X)
\end{aligned}
$$

2. Pregunta 2

2.1. Parte A

$$
\begin{aligned}
x \in f(X) - f(Y) &\iff x \in f(X) \wedge x \notin f(Y) \\
&\iff \exists k \in X, \forall u \in Y, f(k) = x \wedge f(u) \neq x \\
&\Rightarrow k \in X \wedge k \notin Y \Rightarrow x \in f(X - Y)
\end{aligned}
$$

2.2. Parte B

Sea f inyectiva también

$$\begin{aligned} x \in f(X-Y) &\iff \exists k \in X-Y, f(k)=x \\ &\iff k \in X \wedge k \notin Y, f(k)=x \end{aligned}$$

por la inyectividad sabemos que k es el único valor en el Dominio tal que $f(p)=x$ por lo que podemos decir que dado que $k \notin Y$, para todo u en Y no se cumple que $f(u)=x$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \forall u \in Y, k \in X, f(k)=x \wedge f(u) \neq x \\ &\iff x \in f(X) \wedge x \notin f(Y) \\ &\iff x \in f(X) - f(Y) \end{aligned}$$

3. Pregunta 3

3.1. Parte A

Notemos que dado que f es una biyeccion $f(x)=y \iff x=f^{-1}(y)$

$$\begin{aligned} x \in PreIm(f(V)) &\iff \exists y \in V, f(x)=y \\ &\iff y \in V, x=f^{-1}(y) \end{aligned}$$

Por definicion de imagen

$$\iff x \in Im(f^{-1}(V))$$

por tanto $x \in PreIm(f(V)) \iff x \in Im(f^{-1}(V))$

4. Pregunta 4

4.1. Parte A

Consideraremos que $x_0 \notin X$ y demostraremos que $|X \cup \{x_0\}| = |X|+1$. Sea $|X|=n$, dado que este es finito existe una biyeccion entre X e I_n, llamaremos a esta biyeccion $\varphi(x)$

Consideremos la función definida por

$$f: X \to I_{n+1} \begin{cases} f(x)=\varphi(x) & x \neq x_0 \\ f(x)=n+1 & x=x_0 \end{cases}$$

Demostraremos que esto es una biyeccion. f es sobreyectiva ya que $f(X) = \varphi(X) = I_n$ y $f(x_0) = n + 1$ por lo que para cada valor en I_{n+1} existe al menos una imagen.

Ahora demostraremos inyectividad, si $f(x) = f(y)$ y a su vez $f(x) \leqslant n$ nos queda que $\varphi(x) = \varphi(y)$ y dado que φ es inyectiva nos queda $x = y$, en caso de que $f(x) = n + 1$ la única preimagen que tiene es x_0 por lo que $f(x) = f(y) \iff x = x_0 = y$ y queda demostrado la inyectividad.

4.2. Parte B

Sea $f(x)$ la biyeccion de X en I_n y $g(x)$ la biyeccion de Y en I_m Consideremos la siguiente función

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in X \\ n + g(x) & x \notin X \wedge x \in Y \end{cases}$$

Notemos que para todo x se cumple que

$$f(x) < n + g(x)$$

y por tricotomía tenemos entonces que

$$f(x) \neq n + g(x)$$

Demostraremos que h es inyectiva

$$\begin{aligned} h(x) &= h(y) \\ f(x) = f(y) &\vee n + g(x) = n + g(y) \\ x = y &\vee g(x) = g(y) \\ x = y &\vee x = y \\ x &= y \end{aligned}$$

por tanto $|X \cup Y| \leqslant |X| + |Y|$ y a su vez es finito.

Ahora supongamos que $X \cap Y = \emptyset$ entonces demostraremos que h es sobreyectiva. dado un $x_0 \in I_{n+m}$ tenemos que si $x_0 \leqslant n$ entonces existe $x \in X$ tal que $f(x) = x_0$ lo que implica que $h(x) = f(x) = x_0$ dado que $x \in X$. ahora si tenemos que $n + 1 \leqslant x_0 \leqslant n + m$, sabemos que $x_0 = n + x_1$ tal que $x_1 \in I_m$ entonces existe $x \in Y$ tal que $g(x) = x_1 \iff n + g(x) = x_0 = n + x_1$ sabemos que ese x existe ya que g es sobreyectiva en I_m y $x_1 \in I_m$, dado que la intersección es vacía $x \notin X$ por tanto $h(x) = n + x_1 = x_0$, lo que significa que h es sobreyectiva. Por tanto $|X \cup Y| = |X| + |Y|$ si $X \cap Y = \emptyset$

4.3. Parte C

Sea $f : X \to I_n$ una biyeccion y $g : Y \to I_m$ otra biyección, notar que si consideramos la restricción de f a $X \cap Y$ esta sigue siendo inyectiva, por lo que $|X \cap Y| \leqslant |X| + |Y|$ Por tanto es finito.

Ocuparemos un proceso inductivo en el tamaño de $X \cap Y$, notar que para $X \cap Y = \emptyset$ es el problema anterior por lo que el caso base queda listo. si agregamos un elemento h a $X \cap Y$ este elemento se encuentra en ambos por tanto esta en la unión, por otro lado tenemos lo siguiente

$$|X \cup Y \cup \{h\}| + |(X \cap Y) \cup \{h\}| = |X \cup Y| + 1 + |X \cap Y| + 1 = |X \cup Y| + |X \cap Y| + 2$$

Esto es cierto por la parte a de este problema. despues obtenemos por Hipotesis de nuestro proceso inductivo

$$|X \cup Y| + |X \cap Y| + 2 = |X| + |Y| + 2 = |X| + 1 + |Y| + 1$$

por ultimo por la parte a de nuevo tenemos

$$|X \cup \{h\}| + |Y \cup \{h\}|$$

repitiendo n veces el proceso sigue que $|X \cup Y| + |X \cap Y| = |X| + |Y|$

4.4. Parte D

Sea X e Y finitos, tal que $|X| = m$, sea f la biyeccion de X en I_m, haremos inducción sobre el tamaño de $|Y|$. Si $|Y| = 1$ entonces, existe solo 1 elemento $y_0 \in Y$, entonces todo elemento de $X \times Y$ es de la forma (x, y_0), consideraremos la biyeccion trivial de $\varphi : X \times Y \to I_m$ dada por $\varphi((x, y)) = f(x)$

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \varphi(a, b) \\ f(x) &= f(a) \\ x &= a \end{aligned}$$

y dado que la segunda coordenada solo puede tomar el valor de y_0 tenemos que es inyectiva. Dado un elemento $k \in I_m$, $\varphi(f^{-1}(k), y_0) = k$ por tanto biyectiva. y $|X \times Y| = m \cdot 1 = |X| \cdot |Y|$

Paso inductivo asumamos que $|Y| = n + 1$, agregándole el elemento y_{n+1} entonces

$$X \times Y = (X \times (Y - \{y_{n+1}\})) \cup (X \times \{y_{n+1}\})$$

Dado que la segunda coordenada es distinta para elementos en $X \times (Y - \{y_{n+1}\})$ y $X \times \{y_{n+1}\}$, estos son disjuntos por lo que podemos aplicar la parte B para decir que su cardinalidad es la suma de las cardinalidades.

$$|X \times (Y - \{y_{n+1}\}) \cup X \times \{y_{n+1}\}| = |X \times (Y - \{y_{n+1}\})| + |X \times \{y_{n+1}\}|$$

y por hipotesis de inductiva obtenemos

$$|X \times (Y - \{y_{n+1}\})| + |X \times \{y_{n+1}\}| = m \cdot n + m = m \cdot (n+1)$$

la ultima igualdad por definición de la multiplicación, despues de aplicar n veces el proceso obtenemos el resultado esperado.

5. Pregunta 5

5.1. Parte A

Notar que $f = id : X \to X$ es una biyeccion de X en X

Directamente desde la definición de f

$$f(x) = f(y)$$
$$x = y$$

Por tanto inyectiva

Dado un $x \in X$ entonces $f(x) = x$ por tanto es sobreyectiva. De esto sigue que es biyectiva. Lo que significa que X tiene el mismo cardinal que X

5.2. Parte B

Si X tiene el mismo cardinal que Y entonces existe una función $f : X \to Y$ que es biyectiva, sabemos que $f^{-1} : Y \to X$ es biyectiva por tanto Y tiene el mismo cardinal que X

5.3. Parte C

Si X tiene el mismo cardinal que Y e Y tiene el mismo cardinal que Z entonces sabemos que existen biyecciones $\varphi : X \to Y$ y $\psi : Y \to Z$. Sabemos que la composición de funciones biyectivas es biyectiva por tanto $f : X \to Z$ tal que $f(x) = \psi(\varphi(x))$ es biyectiva. Por tanto X tiene el mismo cardinal que Z

5.4. Parte D

Consideremos una función inyectiva $\varphi : X \rightarrow Y$ la cual existe ya que X tiene menor cardinal que Y, ahora dado que φ es inyectiva tiene un inversa por la izquierda que llamaremos $\psi : Y \rightarrow X$. Pero si $\psi \circ \varphi = id_X$ tenemos que ψ tiene una inversa por la derecha (φ) por lo cual es sobreyectiva. Lo que significa que Y tiene mayor cardinal que X.

5.5. Parte E

Consideremos una función sobreyectiva de $\phi : X \rightarrow Y$ la cual existe ya que X tiene mayor cardinal que Y, ahora dado que φ es sobreyectiva tiene una inversa por la derecha tal que $\psi : Y \rightarrow X$ y $\varphi(\psi(y)) = y$, pero esto significa que $\varphi \circ \psi = id_Y$ es decir que ψ tiene inversa por la izquierda (φ) por lo cual es inyectiva. Lo que significa que Y tiene menor cardinal que X