

---

## Tarea 3

ALUMNO: JORGE EDUARDO BRAVO SOTO

ROL: 202103004-2

PROFESOR: ALEXANDER QUAAS

CLASE: MAT125

---

## 1. Pregunta 1

### 1.1. Parte A

*Demostración.* Sean  $K_1$  y  $K_2$  subconjuntos de  $\mathbb{R}$  compactos, por el teorema de Heine-Borel un subconjunto de  $\mathbb{R}$  es compacto si y solo si es acotado y cerrado, demostraremos  $K_1 \cup K_2$  es cerrado y acotado.

Recordemos de las clases de topología que la unión finita de conjuntos cerrados es cerrada, por lo tanto  $K_1 \cup K_2$  es cerrado pues es una unión finita. Dado que  $K_1$  y  $K_2$  son acotados existen  $M_1$  y  $M_2$  tal que son cotas de  $K_1$  y  $K_2$  respectivamente, sea  $M = \max\{M_1, M_2\}$  entonces  $x \in (K_1 \cup K_2) \Rightarrow x \leq M$ . Dado que la unión es cerrada y acotado, por Heine-Borel es compacto.

QUOD  
ERAT  
DEM■

### 1.2. Parte B

*Demostración.* Sean  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una familia de conjuntos compactos, entonces por Heine-Borel cada uno de ellos es cerrado y acotado de esto sigue que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$  es cerrado pues la intersección arbitraria de cerrados es cerrado. Luego  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \Rightarrow x \in K_1 \Rightarrow x \leq M$  pues  $K_1$  es acotado. Por Heine-Borel  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$  es compacto pues es cerrado y acotado.

QUOD  
ERAT  
DEM■

## 2. Pregunta 2

### 2.1. Parte A

*Demostración.* Supongamos que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  y  $0 < |x - a| < \delta_g \Rightarrow M \leq g(x) \Rightarrow -M \geq -g(x)$

Sea  $A > 0$  entonces existe  $\delta_1$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow f(x) > \max\{1, A - M\}$$

luego tomamos  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_g\}$  de esto sigue que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > \max\{1, A - M\} \geq A - M \geq A - g(x)$$

De las desigualdades sigue que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > A - g(x)$$

por lo tanto tenemos que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) + g(x) > A$$

Por definición obtenemos que  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = +\infty$

QUOD  
ERAT  
DEM■

## 2.2. Parte B

*Demostración.* Supongamos que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  y que existe delta tal que  $0 < |x - a| < \delta_g \Rightarrow g(x) > c$ , para algun  $c$  positivo. Sea  $A > 0$  dado, entonces por hipotesis existe  $\delta_1$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow f(x) > \frac{A}{c}$$

Sea  $\delta = \min\{\delta_g, \delta_1\}$  de este sigue que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \leq \delta \Rightarrow f(x) > \frac{A}{c} \Rightarrow f(x)c > A$$

pues  $c$  es positivo

y tambien tenemos que  $0 < |x - a| < \delta_g \leq \delta$  por lo que  $g(x) > c$  entonces obtenemos

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x)g(x) > f(x)c > A$$

Por definicion  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = +\infty$

QUOD  
ERAT  
DEM■

## 2.3. Parte C

*Demostración.* Sea  $g(x)$  una funcion tal que  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  y existe un  $\delta_g > 0$  tal que si  $|x - a| < \delta_g \Rightarrow g(x) > 0$ , sea  $f(x)$  una funcion tal que existe  $\delta_f$  tal que si  $|x - a| < \delta_f \Rightarrow f(x) > c > 0$ , para algun  $c$  positivo. Luego sea  $A > 0$  dado. Sea  $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g, \delta_1\}$  donde  $\delta_1$  es aquel que cumple

$$|x - a| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - 0| < \frac{c}{A}$$

el cual existe pues el limite de  $x$  tendiendo a  $a$  de  $g(x)$  es 0 y  $c > 0$  al igual que  $A > 0$ . Luego notar que si  $|x - a| < \delta_g \Rightarrow |g(x)| = g(x)$  pues  $g$  es positivo en esa vecindad de  $a$ .

De esto sigue que

$$|x - a| < \delta \Rightarrow g(x) < \frac{c}{A} \Rightarrow \frac{1}{g(x)} > \frac{A}{c} \Rightarrow \frac{c}{g(x)} > A$$

pero

$$|x - a| < \delta_f \leq \delta \Rightarrow f(x) > c$$

por lo tanto se sigue que

$$|x - a| < \delta \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{c}{g(x)} > A$$

Por definicion  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

QUOD  
ERAT  
DEM■

## 2.4. Parte D

*Demostración.* Sea  $g(x)$  una función tal que  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$  y sea  $f(x)$  una función acotada en una vecindad de radio  $\delta_f$  de  $a$ , es decir que existe  $M > 0$  tal que  $0 < |x - a| < \delta_f \Rightarrow |f(x)| \leq M$ . Sea  $\varepsilon > 0$  dado, entonces existe  $\delta_1$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow g(x) > \frac{M}{\varepsilon} > 0$$

dado que el límite de  $g(x)$ ,  $x$  tendiendo a  $a$  es infinito y  $\varepsilon, M$  son positivos. de esto sigue que  $0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow g(x) = |g(x)|$

Sea  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_f\}$  luego tenemos que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x)| = g(x) > \frac{M}{\varepsilon} \Rightarrow \left| \frac{1}{g(x)} \right| < \frac{\varepsilon}{M} \Rightarrow \left| \frac{M}{g(x)} \right| < \varepsilon$$

pero dado que  $0 < |x - a| < \delta_f \leq \delta \Rightarrow |f(x)| \leq M$  sigue que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq \left| \frac{M}{g(x)} \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - 0 \right| < \varepsilon$$

Por definición  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

QUOD  
ERAT  
DEMONSTRATUM ■

## 3. Pregunta 3

*Demostración.* Sea  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  funciones, se define  $f \vee g : X \rightarrow \mathbb{R}$  y  $f \wedge g : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$  y  $(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ , demostraremos que si  $f$  y  $g$  son continuas en  $a$  entonces  $f \vee g$  y  $f \wedge g$  también lo son.

Procederemos por casos, dado  $\varepsilon > 0$ , supongamos que  $f(a) = g(a)$  luego  $(f \vee g)(a) = f(a) = g(a)$  y  $(f \wedge g)(a) = f(a) = g(a)$  dado que  $f$  y  $g$  son continuas en  $a$  se tiene que existen  $\delta_1 > 0$  y  $\delta_2 > 0$  tal que

$$|x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

$$|x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon$$

Tomemos  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  luego sigue que

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |(f \vee g)(x) - (f \vee g)(a)| < \varepsilon$$

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |(f \wedge g)(x) - (f \wedge g)(a)| < \varepsilon$$

Pues  $(f \wedge g)(x) = f(x)$  o  $(f \wedge g)(x) = g(x)$  (respectivamente para la otra funcion) y  $(f \wedge g)(a) = f(a) = g(a)$  (respectivamente para la otra funcion) por lo tanto se tienen las desigualdades pues  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon \wedge |g(x) - g(a)| < \varepsilon$  si  $x$  esta en la vecindad de radio  $\delta$ . por lo tanto si  $f(a) = g(a)$  las funciones son continuas en  $a$ , procederemos ahora con el siguiente caso.

Supongamos, sin perdida de generalidad, que  $f(a) < g(a)$ , luego  $(f \vee g)(a) = g(a)$  y  $(f \wedge g)(a) = f(a)$ . Por teorema visto en clases y dado que  $f$  y  $g$  son continuas existe  $\delta_1$  tal que se cumpla que

$$|x - a| < \delta_1 \Rightarrow f(x) < g(x)$$

dado que  $f$  es continua en  $a$  existe  $\delta_2$  tal que

$$|x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

y dado que  $g$  es continua en  $a$  existe  $\delta_3$  tal que

$$|x - a| < \delta_3 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon$$

luego tomemos  $\delta_\vee = \min\{\delta_1, \delta_3\}$  y  $\delta_\wedge = \min\{\delta_1, \delta_2\}$   
de esto sigue que

$$|x - a| < \delta_\vee \Rightarrow |(f \vee g)(x) - (f \vee g)(a)| = |g(x) - g(a)| < \varepsilon$$

$$|x - a| < \delta_\wedge \Rightarrow |(f \wedge g)(x) - (f \wedge g)(a)| = |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Por lo tanto las funciones  $f \vee g$  y  $f \wedge g$  son continuas en  $a$  pues  $\lim_{x \rightarrow a} (f \vee g)(x) = (f \vee g)(a)$  y  $\lim_{x \rightarrow a} (f \wedge g)(x) = (f \wedge g)(a)$  por definicion.

QUOD  
ERAT  
DEM■

## 4. Pregunta 4

### 4.1. Parte A

*Demostración.*

QUOD  
ERAT  
DEM■

### 4.2. Parte B

*Demostración.*

QUOD  
ERAT  
DEM■