Tarea 3

Alumno: Jorge Eduardo Bravo Soto
Rol: 202103004-2
Profesor: Alexander Quaas
Clase: MAT125

1. Pregunta 1

1.1. Parte A

Demostración. Sean K_1 y K_2 subconjuntos de $\mathbb{R}$ compactos, por el teorema de Heine-Borel un subconjunto de $\mathbb{R}$ es compacto si y solo si es acotado y cerrado, demostraremos $K_1 \cup K_2$ es cerrado y acotado.

Recordemos de las clases de topología que la unión finita de conjuntos cerrados es cerrada, por lo tanto $K_1 \cup K_2$ es cerrado pues es una unión finita. Dado que K_1 y K_2 son acotados existen M_1 y M_2 tal que son cotas de K_1 y K_2 respectivamente, sea $M = \text{máx}\{M_1, M_2\}$ entonces $x \in (K_1 \cup K_2) \Rightarrow x \leqslant M$. Dado que la unión es cerrada y acotado, por Heine-Borel es compacto. QUOD ERAT DEM■

1.2. Parte B

Demostración. Sean $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos compactos, entonces por Heine-Borel cada uno de ellos es cerrado y acotado de esto sigue que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ es cerrado pues la intersección arbitraria de cerrados es cerrado. Luego $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \Rightarrow x \in K_1 \Rightarrow x \leqslant M$ pues K_1 es acotado. Por Heine-Borel $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ es compacto pues es cerrado y acotado. QUOD ERAT DEM■

2. Pregunta 2

2.1. Parte A

Demostración. Supongamos que $\text{lím}_{x\to a} f(x) = +\infty$ y $0 < |x - a| < \delta_g \Rightarrow M \leqslant g(x) \Rightarrow -M \geqslant -g(x)$

Sea $A > 0$ entonces existe δ_1 tal que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow f(x) > \text{máx}\{1, A - M\}$$

luego tomamos $\delta = \text{mín}\{\delta_1 \delta_g\}$ de esto sigue que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > \text{máx}\{1, A - M\} \geqslant A - M \geqslant A - g(x)$$

De las desigualdades sigue que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > A - g(x)$$

por lo tanto tenemos que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) + g(x) > A$$

Por definición obtenemos que $\text{lím}_{x\to a}(f(x) + g(x)) = +\infty$ QUOD ERAT DEM■

2.2. Parte B

Demostración. Supongamos que $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ y que existe delta tal que $0 < |x-a| < \delta_g \Rightarrow g(x) > c$, para algún c positivo. Sea $A > 0$ dado, entonces por hipótesis existe δ_1 tal que

$$0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow f(x) > \frac{A}{c}$$

Sea $\delta = \min\{\delta_g, \delta_1\}$ de este sigue que

$$0 < |x-a| < \delta_1 \leqslant \delta \Rightarrow f(x) > \frac{A}{c} \Rightarrow f(x)c > A$$

pues c es positivo

y también tenemos que $0 < |x-a| < \delta_g \leqslant \delta$ por lo que $g(x) > c$ entonces obtenemos

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x)g(x) > f(x)c > A$$

Por definición $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = +\infty$

QUOD ERAT DEM■

2.3. Parte C

Demostración. Sea $g(x)$ una función tal que $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ y existe un $\delta_g > 0$ tal que si $|x-a| < \delta_g \Rightarrow g(x) > 0$, sea $f(x)$ una función tal que existe δ_f tal que si $|x-a| < \delta_f \Rightarrow f(x) > c > 0$, para algún c positivo. Luego sea $A > 0$ dado. Sea $\delta = \min(\{\delta_f, \delta_g, \delta_1\})$ donde δ_1 es aquel que cumple

$$|x-a| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - 0| < \frac{c}{A}$$

el cual existe pues el límite de x tendiendo a a de $g(x)$ es 0 y $c > 0$ al igual que $A > 0$. Luego notar que si $|x-a| < \delta_g \Rightarrow |g(x)| = g(x)$ pues g es positivo en esa vecindad de a.

De esto sigue que

$$|x-a| < \delta \Rightarrow g(x) < \frac{c}{A} \Rightarrow \frac{1}{g(x)} > \frac{A}{c} \Rightarrow \frac{c}{g(x)} > A$$

pero

$$|x-a| < \delta_f \leqslant \delta \Rightarrow f(x) > c$$

por lo tanto se sigue que

$$|x-a| < \delta \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{c}{g(x)} > A$$

Por definición $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

QUOD ERAT DEM■

2.4. Parte D

Demostración. Sea $g(x)$ una función tal que $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ y sea $f(x)$ una función acotada en una vecindad de radio δ_f de a, es decir que existe $M > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta_f \Rightarrow |f(x)| \leqslant M$. Sea $\varepsilon > 0$ dado, entonces existe δ_1 tal que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow g(x) > \frac{M}{\varepsilon} > 0$$

dado que el límite de $g(x)$, x tendiendo a a es infinito y ε, M son positivos. De esto sigue que $0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow g(x) = |g(x)|$

Sea $\delta = \min(\{\delta_1, \delta_f\})$ luego tenemos que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x)| = g(x) > \frac{M}{\varepsilon} \Rightarrow |\frac{1}{g(x)}| < \frac{\varepsilon}{M} \Rightarrow |\frac{M}{g(x)}| < \varepsilon$$

pero dado que $0 < |x - a| < \delta_f \leqslant \delta \Rightarrow |f(x)| \leqslant M$ sigue que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |\frac{f(x)}{g(x)}| \leqslant |\frac{M}{g(x)}| < \varepsilon \Rightarrow |\frac{f(x)}{g(x)} - 0| < \varepsilon$$

Por definición $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

QUOD ERAT DEM■

3. Pregunta 3

Demostración. Sea $f, g : X \to \mathbb{R}$ funciones, se define $f \vee g : X \to \mathbb{R}$ y $f \wedge g : X \to \mathbb{R}$ tal que $(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ y $(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$, demostraremos que si f y g son continuas en a entonces $f \vee g$ y $f \wedge g$ también lo son.

Procederemos por casos, dado $\varepsilon > 0$, supongamos que $f(a) = g(a)$ luego $(f \vee g)(a) = f(a) = g(a)$ y $(f \wedge g)(a) = f(a) = g(a)$ dado que f y g son continuas en a se tiene que existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tal que

$$|x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$
$$|x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon$$

Tomemos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ luego sigue que

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |(f \vee g)(x) - (f \vee g)(a)| < \varepsilon$$
$$|x - a| < \delta \Rightarrow |(f \wedge g)(x) - (f \wedge g)(a)| < \varepsilon$$

Pues $(f \wedge g)(x) = f(x)$ o $(f \wedge g)(x) = g(x)$ (respectivamente para la otra función) y $(f \wedge g)(a) = f(a) = g(a)$ (respectivamente para la otra función) por lo tanto se tienen las desigualdades pues $|f(x) - f(a)| < \varepsilon \wedge |g(x) - g(a)| < \varepsilon$ si x esta en la vecindad de radio δ. por lo tanto si $f(a) = g(a)$ las funciones son continuas en a, procederemos ahora con el siguiente caso.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $f(a) < g(a)$, luego $(f \vee g)(a) = g(a)$ y $(f \wedge g)(a) = f(a)$. Por teorema visto en clases y dado que f y g son continuas existe δ_1 tal que se cumpla que

$$|x - a| < \delta_1 \Rightarrow \; f(x) < g(x)$$

dado que f es continua en a existe δ_2 tal que

$$|x - a| < \delta_2 \Rightarrow \; |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

y dado que g es continua en a existe δ_3 tal que

$$|x - a| < \delta_3 \Rightarrow \; |g(x) - g(a)| < \varepsilon$$

luego tomemos $\delta_\vee = \text{mín}\{\delta_1, \delta_3\}$ y $\delta_\wedge = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$
de esto sigue que

$$\begin{aligned} |x - a| < \delta_\vee &\Rightarrow |(f \vee g)(x) - (f \vee g)(a)| = |g(x) - g(a)| < \varepsilon \\ |x - a| < \delta_\wedge &\Rightarrow |(f \wedge g)(x) - (f \wedge g)(a)| = |f(x) - f(a)| < \varepsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto las funciones $f \vee g$ y $f \wedge g$ son continuas en a pues $\text{lím}_{x \to a}(f \vee g)(x) = (f \vee g)(a)$ y $\text{lím}_{x \to a}(f \wedge g)(x) = (f \wedge g)(a)$ por definición.

QUOD ERAT DEM■

4. Pregunta 4

4.1. Parte A

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ abierto y f continua en A. Demostraremos que $\{x \in A; f(x) < c\}$ y $\{x \in A; f(x) > c\}$ son abiertos para todo $c \in \mathbb{R}$.

Considere $a \in \{x \in A; f(x) < c\}$, dado que f es continua en A y en particular en a tenemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) < c$$

Por lo tanto, por teorema visto en clases, existe un $\delta > 0$ tal que

$$|x - a| < \delta \Rightarrow \; f(x) < c$$

De esto sigue que

$$x \in (a-\delta, a+\delta) \iff |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < c \Rightarrow x \in \{x \in A; f(x) < c\}$$

Escrito de otra forma tenemos que $(a-\delta, a+\delta) \subset \{x \in A; f(x) < c\}$, por definición entonces $\{x \in A; f(x) < c\}$ abierto. El resultado para $\{x \in A; f(x) > c\}$ es totalmente análogo.

($\Leftarrow$) Procederemos por contradicción. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función de un conjunto abierto en $\mathbb{R}$, luego tenemos que $\{x \in A; f(x) < c\}$ abierto y $\{x \in A; f(x) > c\}$, para todo $c \in \mathbb{R}$ y que f no es continua en A, por lo tanto existe un punto $a \in A$ donde existe una vecindad de radio δ_1 donde la función está definida, pues A es abierto tal que

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, |x-a| < \delta \wedge |f(x) - f(a)| \geqslant \delta_0 \tag{1}$$

Considere los conjuntos

$$\Omega_1 = \{x \in A; f(x) < f(a) + \epsilon_0\} \qquad \Omega_2 = \{x \in A; f(x) > f(a) - \epsilon_0\}$$

Donde ε_0 es el de (1), notar entonces que $a \in \Omega_1$ y $a \in \Omega_2$ pues $\varepsilon_0 > 0$. Luego dado que Ω_1 y Ω_2 son abierto tenemos que existen vecindades centradas en a tal que

$$|x-a| < \delta_2 \Rightarrow x \in \Omega_1 = \{x \in A; f(x) < f(a) + \varepsilon_0\} \Rightarrow f(x) < f(a) + \varepsilon_0 \Rightarrow f(x) - f(a) < \varepsilon_0$$
$$|x-a| < \delta_3 \Rightarrow x \in \Omega_2 = \{x \in A; f(x) > f(a) - \varepsilon_0\} \Rightarrow f(x) > f(a) - \varepsilon_0 \Rightarrow -\varepsilon_0 < f(x) - f(a)$$

Por transitividad entonces tenemos que

$$|x-a| < \delta_2 \Rightarrow f(x) - f(a) < \varepsilon_0$$
$$|x-a| < \delta_3 \Rightarrow -\varepsilon_0 < f(x) - f(a)$$

Sea $\delta = \min(\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\})$ se tienen todas las desigualdades anteriores y que f está definida en la vecindad de radio δ de esto sigue que

$$|x-a| < \delta \Rightarrow -\varepsilon_0 < f(x) - f(a) < \varepsilon_0 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon_0$$

De (1) sigue la contradicción pues se supuso que para todo $\delta > 0, |x-a| < \delta \wedge |f(x) - f(a)| \geqslant \varepsilon_0$ pero nosotros demostramos que si $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon_0$, una contradicción. QUOD ERAT DEM■

4.2. Parte B

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $f : F \to \mathbb{R}$, $F \subset \mathbb{R}$ cerrado y f continua en F. Demostraremos que $\{x \in F; f(x) \leqslant c\}$ y $\{x \in F; f(x) \geqslant c\}$ son cerrados. Lo demostraremos usando la caracterización de cerrados mediante sucesiones. Sea c arbitrario y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \{x \in a; f(x) \leqslant c\}$ una sucesión arbitraria tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, demostraremos que $a \in \{x \in F; f(x) \leqslant c\}$. Notar que $a \in F$ pues F es cerrado, por lo tanto $f(a)$ esta bien definido. Luego dado que la función es continua tenemos lo siguiente.

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

Pero por los teoremas de orden de límite, dado que

$$x_n \in \{x \in F; f(x) \leqslant c\} \Rightarrow\ f(x_n) \leqslant c \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leqslant c$$

Por lo tanto tenemos que

$$f(a) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leqslant c$$

Por lo tanto $a \in \{x \in F; f(x) \leqslant c\}$ pues $f(a) \leqslant c$. Por caracterización de conjuntos cerrados, dado que toda sucesión convergente converge a un punto en el conjunto, el conjunto $\{x \in F; f(x) \leqslant c\}$ es cerrado. Análogamente para el otro conjunto.

($\Leftarrow$) Procederemos por contradiccion, Suponga que $f : F \to \mathbb{R}$ tal que F es cerrado y f es no continua, Suponga tambien que $\{x \in F; f(x) \geqslant c\}$ es cerrado para todo $c \in \mathbb{R}$ al igual que $\{x \in F; f(x) \leqslant c\}$. Luego dado que f es no continua en F tenemos que existe $a \in F$ tal que lo siguiente se cumpla

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, |x - a| < \delta \wedge |f(x) - f(a)| \geqslant \delta_0 \tag{2}$$

Definimos la siguiente sucesion, $x_n = x$ tal que $|x - a| < \frac{1}{n} \wedge |f(x) - f(a)| \geqslant \varepsilon_0$, estos x existen pues f es no continua. Notemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to a$. Por la construccion de esta sucesion tenemos que $f(x_n) \geqslant f(a) + \varepsilon_0$ o $f(x_n) \leqslant f(a) - \varepsilon_0$. Por lo se cumple que existe una subsucesion x_{n_k} tal que $f(x_{n_k}) \geqslant f(a) + \varepsilon_0$ o (no excluyente) existe una subsucesion (x_{n_k}) tal que $f(x_{n_k}) \leqslant f(a) - \varepsilon_0$.

Supongamos lo primero es decir, existe (x_{n_k}) tal que $f(x_{n_k}) \geqslant f(a) + \varepsilon_0$ Luego notemos que $x_{n_k} \in \{x \in F; f(x) \geqslant f(a) + \varepsilon_0\}$ por hipotesis este conjunto es cerrado y notar que $a \notin \{x \in F; f(x) \geqslant f(a) + \varepsilon_0\}$ pues ε_0 es positivo. Pero $(x_{n_k}) \subset \{x \in F; f(x) \geqslant f(a) + \varepsilon_0\}$ y $(x_{n_k}) \to a$ pues es una subsucesion de la sucesion inicial. Pero $\{x \in F; f(x) \geqslant f(a) + \varepsilon_0\}$ es cerrado por hipotesis y (x_{n_k}) es una sucesion convergente en este por lo tanto su limite esta en $\{x \in F; f(x) \geqslant f(a) + \varepsilon_0\}$ pero esta converge a a. Por lo tanto una contradiccion pues $x \in \{x \in F; f(x) \geqslant f(a) + \varepsilon_0\} \wedge x \notin \{x \in F; f(x) \geqslant f(a) + \varepsilon_0\}$. El otro caso es totalmente analogo solamente que consideramos $\{x \in F; f(x) \leqslant f(a) - \varepsilon_0\}$.

De esto sigue la contradiccion pues no puede pasar ninguno de los 2 casos. QUOD ERAT DEM■