Tarea 2

Alumno: Jorge Eduardo Bravo Soto
Rol: 202103004-2
Profesor: Alexander Quaas
Clase: MAT125

1. Pregunta 1

Demostraremos que si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son sucesiones y $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ y $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$ entonces $\lim_{n\to\infty} y_n = L$

Demostración. Considere $\varepsilon > 0$ y $N = \max\{n_0, n_1\}$ donde n_0 es aquel que $n > n_0 \Rightarrow |x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ y n_1 es aquel que si $n > n_1 \Rightarrow |x_n - y_n - 0| < \frac{\varepsilon}{2}$. Estos valores existen por la definición del límite.

Entonces si $n > N$

$$|y_n - L| = |y_n - x_n + x_n - L| \leqslant |y_n - x_n| + |x_n - L| = |x_n - y_n| + |x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Por lo tanto

$$|y_n - L| < \varepsilon$$

Lo que significa, por definición que $\lim_{n\to\infty} y_n = L$.

QUOD ERAT DEM■

2. Pregunta 2

2.1. Parte A

Demostración. Supongamos, para la contradicción, que existe algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < x_n < 1$, entonces multiplicando n veces x_n y n veces el 1 por sí mismo obtenemos

$$0 < x_n < 1 \Rightarrow 0 < (x_n)^n < 1$$

pero $(x_n)^n = n$ y n es natural pero obtuvimos que $0 < n < 1$ lo cual es una contradicción, pues no existe ningún número natural entre 0 y 1. Por lo tanto para todo n natural tenemos que $x_n \geqslant 1$

QUOD ERAT DEM■

2.2. Parte B

Demostración. Notar que si $n \geqslant 3$ entonces

$$\begin{aligned} 3 &\leqslant n \\ (1+\frac{1}{n})^n - n &< 3 - n \leqslant 0 \\ n^n((1+\frac{1}{n})^n - n) &< 0 \\ (n+1)^n - n^{n+1} &< 0 \\ (n+1)^n &< n^{n+1} \\ x_{n+1} = (n+1)^{\frac{1}{n+1}} &< n^{\frac{1}{n}} = x_n \\ x_{n+1} &< x_n \end{aligned}$$

Por lo tanto si $n \geqslant 3$ entonces la sucesión es decreciente. QUOD ERAT DEM■

2.3. Parte C

Demostración. Es convergente pues es decreciente y acotada, por el teorema de convergencia monótona esta converge. QUOD ERAT DEM■

2.4. Parte D

Lema 2.1. *Demostraremos que* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$. *Que la sucesión está acotada por 1 sigue por un argumento similar al de la Parte A.*

Demostraremos que es decreciente

$$2^{\frac{1}{n+1}} < 2^{\frac{1}{n}} \iff 2^n < 2^{n+1} \iff 2^x - 2^{x+1} < 0 \iff -2^n < 0$$

Pero 2^n *es positivo para todo* $n \in \mathbb{N}$ *entonces la sucesión es decreciente por lo que converge.*

Demostraremos que converge a 1, consideremos la subsucesión $\{\sqrt[2n]{2}\}$ *la cual converge a* L, *pues es una subsucesión de* $\{\sqrt[n]{2}\}$, *entonces por álgebra de límites sigue que*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{2} &= L \\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} &= L^2 \\ L &= L^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto $L = 0 \vee L = 1$ *pero no puede ser 0 ya que la sucesión converge a su ínfimo pues es acotada y decreciente, por lo que converge a 1.*

Demostración. Consideraremos la siguiente subsucesión, $x_{n_k} = (2k)^{\frac{1}{2k}}$, dado que la sucesión completa converge a L esta subsucesión también converge a L. De esto sigue por álgebra de límites que

$$\lim_{k\to\infty} (2k)^{\frac{1}{2k}} = L$$
$$\lim_{k\to\infty} (2k)^{\frac{1}{k}} = L^2$$
$$\lim_{k\to\infty} 2^{\frac{1}{k}} \cdot k^{\frac{1}{k}} = L^2$$
$$\lim_{k\to\infty} 2^{\frac{1}{k}} \cdot \lim_{k\to\infty} k^{\frac{1}{k}} = L^2$$
$$L = L^2$$

Por lo tanto $L = L^2 \iff L(1 - L) = 0$ pero sabemos que dado que la sucesión es decreciente y acotada esta converge al ínfimo, y demostramos que 1 es una cota inferior por lo que L no puede valer 0, por lo tanto $L = 1$. QUOD ERAT DEM■

3. Pregunta 3

3.1. Parte A

Lema 3.1. *Si* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1+a_n} = 0$ *y* $a_n \geqslant 0$ *entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Dado un $\varepsilon > 0$, *supongamos que* $\varepsilon \leqslant \frac{1}{2}$, *entonces sea* n_0 *aquel que si* $n > n_0 \Rightarrow |\frac{a_n}{1+a_n}| < \frac{2}{3}\varepsilon$, *este* n_0 *existe pues* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1+a_n} = 0$, *ahora notar que* $\frac{a_n}{1+a_n} \geqslant 0$ *entonces* $|\frac{a_n}{1+a_n}| = \frac{a_n}{1+a_n} < \frac{2}{3}\varepsilon$. *Notar también que*

$$\frac{2}{3}\varepsilon \leqslant \frac{1}{3} \iff -\frac{2}{3}\varepsilon \geqslant -\frac{1}{3} \iff 1 - \frac{2}{3}\varepsilon \geqslant \frac{2}{3} > 0$$

entonces ahora tenemos lo siguiente

$$\frac{a_n}{1+a_n} < \frac{2}{3}\varepsilon \Rightarrow a_n < \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{2}{3}\varepsilon \cdot a_n \Rightarrow a_n(1 - \frac{2}{3}\varepsilon) < \frac{2}{3}\varepsilon$$

De lo que podemos concluir que

$$a_n < \frac{\frac{2}{3}\varepsilon}{1 - \frac{2}{3}\varepsilon}$$

ahora notemos que

$$\frac{2}{3}\varepsilon \leqslant \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{2}{3}\varepsilon \geqslant -\frac{1}{3} \Rightarrow 1-\frac{2}{3}\varepsilon \geqslant \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{1-\frac{2}{3}\varepsilon} \leqslant \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{\frac{2}{3}\varepsilon}{1-\frac{2}{3}\varepsilon} \leqslant \varepsilon$$

de lo que podemos concluir

$$0 \leqslant a_n < \frac{\frac{2}{3}\varepsilon}{1-\frac{2}{3}\varepsilon} \leqslant \varepsilon \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$$

Por lo tanto si $n > n_0 \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$*, en caso de* $\varepsilon > \frac{1}{2}$*, tomamos* $\varepsilon = \frac{1}{2}$ *y nos queda que* $|a_n| < \frac{1}{2} < \varepsilon$

Por lo tanto, por definición, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Demostración. Asumamos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge entonces notar que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{a_n}{1+a_n} \leqslant a_n$$

Pues a_n es positivo, por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ converge por criterio de comparación.

Asumamos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ converge entonces notar que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1+a_n} = 0$ entonces por el lema $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ entonces existe n_0 tal que si $n > n_0$ entonces $0 \leqslant a_n < \frac{1}{2}$ notar que.

$$a_n < \frac{1}{2} \Rightarrow 1+a_n < \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{1+a_n} > \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a_n}{1+a_n} > \frac{2}{3}a_n \Rightarrow a_n < \frac{3}{2}\cdot\frac{a_n}{1+a_n}$$

Entonces tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{n_0} a_n + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$$

pero por la desigualdad que obtuvimos tenemos que

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n < \frac{3}{2}\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$$

Entonces por criterio de comparación converge y por lo tanto la serie completa converge.

QUOD ERAT DEM■

3.2. Parte B

Demostración. Dado que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge esto implica, visto en clases, que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ entonces ocupando el criterio de la raíz en la sucesión $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^n$ obtenemos lo siguiente

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(a_n)^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(a_n)^n} = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^n$ converge.

QUOD ERAT DEM■

4. Pregunta 4

4.1. Parte A

Demostración. Notar que dado que $\{a_n\}$ es decreciente entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, si $2^n + 1 \leqslant k \leqslant 2^{n+1}$ entonces

$$a_{2^{n+1}} \leqslant a_k \Rightarrow \sum_{m=2^n+1}^{2^{n+1}} a_{2^{n+1}} \leqslant \sum_{m=2^n+1}^{2^{n+1}} a_m$$

Notar también que

$$\sum_{m=2^n+1}^{2^{n+1}} a_{2^{n+1}} = a_{2^{n+1}} \cdot (2^{n+1} - (2^n+1)+1) = a_{2^{n+1}} \cdot (2^{n+1} - 2^n) = a_{2^{n+1}} \cdot 2^n \cdot (2-1) = 2^n a_{2^{n+1}}$$

Por lo tanto

$$S_{2^{n+1}} = S_{2^n} + \sum_{m=2^n+1}^{2^{n+1}} a_m \geqslant S_{2^n} + \sum_{m=2^n+1}^{2^{n+1}} a_{2^{n+1}} = S_{2^n} + 2^n a_{2^{n+1}}$$

Entonces queda demostrado que

$$S_{2^{n+1}} \geqslant S_{2^n} + 2^n a_{2^{n+1}}$$

QUOD ERAT DEM■

4.2. Parte B

Demostración. Notar que dado que $\{a_n\}$ es decreciente entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, si $2^{n+1} \leqslant k \leqslant 2^{n+2} - 1$ entonces

$$a_{2^{n+1}} \geqslant a_k \Rightarrow \sum_{m=2^{n+1}}^{2^{n+2}-1} a_{2^{n+1}} \geqslant \sum_{m=2^{n+1}}^{2^{n+2}-1} a_m$$

Notar que

$$\sum_{m=2^{n+1}}^{2^{n+2}-1} a_{2^{n+1}} = (2^{n+2} - 1 - 2^{n+1} + 1) a_{2^{n+1}} = 2^{n+1}(2-1) a_{2^{n+1}} = 2^{n+1} a_{2^{n+1}}$$

Por lo tanto

$$S_{2^{n+2}-1} = S_{2^{n+1}-1} + \sum_{m=2^{n+1}}^{2^{n+2}-1} a_m \leqslant S_{2^{n+1}-1} + \sum_{m=2^{n+1}}^{2^{n+2}-1} a_{2^{n+1}} = S_{2^{n+1}-1} + 2^{n+1} a_{2^{n+1}}$$

Entonces queda demostrado que $S_{2^{n+2}-1} \leqslant S_{2^{n+1}-1} + 2^{n+1} a_{2^{n+1}}$

QUOD ERAT DEM■

4.3. Parte C

Demostración. Notar que de la parte A sigue que

$$S_{2^{n+1}} \geqslant S_{2^n} + 2^n a_{2^{n+1}} \Rightarrow 2S_{2^{n+1}} \geqslant 2S_{2^n} + 2^{n+1} a_{2^{n+1}}$$

Procederemos por inducción Caso base

$$S_{2^1-1} = \sum_{k=1}^{1} a_k = a_1 = \sum_{k=0}^{0} 2^k a_{2^k} = T_0 \leqslant 2a_1 = 2\sum_{k=1}^{2^0} a_k = 2S_{2^0}$$

Por lo tanto $S_{2^1-1} \leqslant T_0 \leqslant 2S_{2^0}$ El cual es nuestro caso base

Paso inductivo notar que

$$S_{2^{n+2}-1} \leqslant S_{2^{n+1}-1} + 2^{n+1} a_{2^{n+1}} \leqslant T_n + 2^{n+1} a_{2^{n+1}} = T_{n+1}$$

De esto se concluye que $S_{2^{n+2}-1} \leqslant T_{n+1}$ por inducción sigue que $S_{2^{n+1}-1} \leqslant T_n$ para todo $n \geqslant 0$, ahora demostraremos la otra parte de la desigualdad

$$T_{n+1} = T_n + 2^{n+1} a_{n+1} \leqslant 2S_{2^n} + 2^{n+1} a_{n+1} = 2(S_{2^n} + 2^n a_{n+1}) \leqslant 2S_{2^{n+1}}$$

De esto se concluye que $T_{n+1} \leqslant 2S_{2^{n+1}}$, por inducción sigue que $T_n \leqslant 2S_{2^n}$ para todo $n \geqslant 0$. Por transitividad se tiene que $S_{2^{n+1}-1} \leqslant T_n \leqslant 2S_{2^n}$ para $n > 0$.

QUOD ERAT DEM■

4.4. Parte D

Lema 4.1. *Desmotraremos que* $n \leqslant 2^n$ *Notar que* $1 \leqslant 2^1$

notar que $n + 1 \leqslant 2n \leqslant 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ *por inducción sigue que* $n \leqslant 2^n$ *para todo* $n \geqslant 1$

Lema 4.2. *Demostraremos que* $2^n < 2^{n+1} - 1$ *Notar que*

$$2^n > 1 \Rightarrow 2^n + 2^n > 1 + 2^n \Rightarrow 2^{n+1} - 1 > 2^n$$

Demostración. Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces dado que converge es acotada por un valor M y juntando esto con la parte C tenemos

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k a_{2^k} \leqslant 2\sum_{k=1}^{2^n} a_k \leqslant 2M$$

Dado que todos los términos son positivos y $\sum_{k=1}^{n} 2^k a_{2^k}$ es acotado para todo n, la serie converge.

Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ converge, entonces dado que converge es acotada por un valor M y juntando esto con la parte C, el lema y que los términos son positivos obtenemos que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{2^n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} 2^k a_{2^k} \leqslant M$$

Dado que todos los términos son positivos y $\sum_{k=1}^{n} a_k$ es acotada para todo n, la serie converge.

QUOD ERAT DEM■

5. Pregunta 5

5.1. Parte A

Lema 5.1. $\{\frac{1}{n^2}\}$ *es decreciente, Notar que* $1 > \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

$$n < n+1 \Rightarrow n^2 < (n+1)^2 \Rightarrow \frac{1}{n^2} > \frac{1}{(n+1)^2}$$

Por induccion sigue el resultado.

Lema 5.2. *Demostraremos que* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *converge*

Notemos que los terminos son decreciente por lo tanto por la Pregunta 4, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *converge si y solo si* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^k}{(2^k)^2}$ *converge pero notar que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^k}{(2^k)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^k}{2^{2k}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

Por lo tanto esta ultima serie converge pues es una serie geométrica con razón $\frac{1}{2}$*, por lo tanto* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *converge.*

Demostración. Considere la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ la cual se vio en clases que diverge pero $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}$ y esta ultima converge por el lema anterior.

QUOD ERAT DEM■

5.2. Parte B

Lema 5.3. *Demostraremos que* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Sea $\varepsilon > 0$ *y* $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$ *entonces*

$$n > \frac{1}{\varepsilon^2} \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon^2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < |\varepsilon| \Rightarrow |\frac{1}{\sqrt{n}}| < \varepsilon$$

Lo último sigue pues $\sqrt{n}$ *es positivo.*
Por definición entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Demostración. Considere la siguiente serie alternante $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ dado que $\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$ es decreciente y por el Lema anterior $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, la serie converge por criterio de Leibniz visto en clases pero

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Pero la ultima es la serie armónica la cual se vio en clases que diverge. QUOD ERAT DEM■

5.3. Parte C

Demostración. Dado que $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ converge entonces $\lim_{n\to\infty} |b_n|$ converge y por lo tanto $\{|b_n|\}$ es acotado por un número $|M|$.

Por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||b_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||M| = |M| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

Entonces tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leqslant |M| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ pero esta ultima converge, dado que todos los valores son positivos por criterio de comparación $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ converge. QUOD ERAT DEM■