Ayudantía 2 - Analisis I

Problema 1. *Muestre que $\mathcal{C}([0,1])$ no es completo con la metrica inducida por la norma*

$$||f|| = \sqrt{\int_0^1 f(x)^2 dx}$$

Solución 1. Consideremos la sucesion de funciones definida por

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}] \\ n(x - (\frac{1}{2} - \frac{1}{n})) & x \in (\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}) \\ 1 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Veamos que esta sucesion es de Cauchy, supongamos sin perdida de generalidad que $n < m$

$$\begin{aligned} ||f_n - f_m||^2 &= \int_0^1 (f_n - f_m)(x)^2 dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{m}} n^2(x - (\frac{1}{2} - \frac{1}{n}))^2 dx + \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{2}} (n(x - (\frac{1}{2} - \frac{1}{n})) - m(x - (\frac{1}{2} - \frac{1}{m})))^2 dx \\ &\leq \frac{n^2}{3}(x - (\frac{1}{2} - \frac{1}{n}))^3 \Big|_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{m}} + \frac{1}{m} \cdot \max_{x \in [\frac{1}{2}-\frac{1}{m}, \frac{1}{2}]} (n(x - (\frac{1}{2} - \frac{1}{n})) - m(x - (\frac{1}{2} - \frac{1}{m})))^2 \end{aligned}$$

Al calcular la derivada de la funcion dentro del maximo obtenemos

$$2(n(x - (\frac{1}{2} - \frac{1}{n})) - m(x - (\frac{1}{2} - \frac{1}{m}))) \cdot (n - m)$$

Notemos que el factor de la derecha es negativo, mientras que el factor de la izquierda es una recta que vale 0 en $\frac{1}{2}$ y que en 0 vale $2(1 - \frac{n}{2} + \frac{m}{2} - 1) = m - n$ que es positivo. Por lo tanto la recta tiene pendiente negativa y dado que en $\frac{1}{2}$ vale 0, tenemos que en $[\frac{1}{2} - \frac{1}{m}, \frac{1}{2}]$ es positiva, por lo tanto la funcion dentro del maximo es decreciente y podemos evaluar en el extremo izquierdo para obtener el maximo

$$\begin{aligned} ||f_n - f_m||^2 &\leq \frac{n^2}{3}(\frac{1}{n} - \frac{1}{m})^3 + \frac{1}{m} \cdot (n(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}))^2 \\ &= \frac{n^2}{3}(\frac{1}{n} - \frac{1}{m})^3 + \frac{1}{m} \cdot (1 - \frac{n}{m})^2 \\ &= \frac{n^2}{3}(\frac{1}{n} - \frac{1}{m})^3 + \frac{1}{m} \cdot \frac{(m-n)^2}{m^2} \\ &\leq \frac{n^2}{3n^3} + \frac{1}{m} \\ &= \frac{3}{n} + \frac{1}{m} \to 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que es de Cauchy. Veamos que no puede converger dentro del espacio. Supongamos que existe $f \in \mathcal{C}([0,1])$ tal que $f_n \to f$, luego tenemos que

$$||f_n - f||^2 \to 0$$

En particular, tenemos que

$$\int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} f(x)^2 dx + \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} (f(x) - f_n(x))^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (f(x) - 1)^2 dx = 0$$

Dado que son números positivos las 3 integrales, cada una por separado tienen que irse a 0. De la ultima integral obtenemos que $f(x)|_{[\frac{1}{2},1]} \equiv 1$, por la continuidad de f.

Notemos que del teorema fundamental del calculo, la funcion definida por

$$y \mapsto \int_0^{\frac{1}{2}-y} f(x)^2 dx$$

Es diferenciable, en particular continua. Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} f(x)^2 dx = 0 \implies \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)^2 dx = 0$$

Por lo tanto $f(x)|_{[0,\frac{1}{2}]} \equiv 0$, esto es una contradiccion pues entonces la funcion f tiene que tomar 2 valores en $\frac{1}{2}$.

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

El objetivo de esta ayudantía es explorar todos los conceptos que se han introducido en el curso hasta el momento. Esto lo haremos investigando los números p-adicos los cuales forman un espacio (ultra)-métrico con varias propiedades poco intuitivas.

Definición 1. (Valor absoluto) Sea A un dominio integral, decimos que $|\cdot| : A \to \mathbb{R}$ es valor absoluto sobre A si cumple

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| = 0 \iff x = 0$
3. $|xy| = |x| \cdot |y|$
4. $|x + y| \leq |x| + |y|$

Observación 1. En nuestro caso el anillo (cuerpo) sobre el que trabajaremos sera $\mathbb{Q}$, por lo que podemos reemplazar eso en la definición si no sabe lo que es un dominio integral.

Teorema 1. Sea $|\cdot|$ un valor absoluto sobre A, luego

$$d : A \times A \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto |x - y|$$

es una metrica

Demostración. Similar a la demotración que una norma induce una métrica □

Definición 2. (Valuación p-adica sobre $\mathbb{Z}$) Sea p un numero primo, definimos la valuación p-adica sobre $\mathbb{Z}$ como la función

$$v_p : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$
$$n \mapsto v_p(n)$$

Donde $v_p(n)$ cumple que $x = p^{v_p(n)}x'$ y $v_p(n)$ no divide a x'. Definimos $v_p(0) = \infty$

Observación 2. La valuación p-adica nos dice que tan divisible es x por p.

Ejemplo 1. Sea $p = 2$, luego tenemos que

$$v_p(8) = 3$$
$$v_p(9) = 0$$
$$v_p(10) = 1$$

Proposición 1. Sea $a, b \in \mathbb{Z}$, entonces

$$v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$$

Demostración. Notemos que el resultado es trivial si a o b son 0. Sean $a, b \in \mathbb{Z}^{>0}$, luego tenemos que

$$a = p^{v_p(a)}a'$$
$$b = p^{v_p(b)}b'$$

Por lo tanto

$$ab = p^{v_p(a)+v_p(b)}a'b'$$

Dado que p no divide a a' ni a b', entonces no divide a $a'b'$. Con lo que tenemos

$$v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$$

$\square$

Definición 3. (Valuación p-adica sobre $\mathbb{Q}$) Sea p un primo, definimos la valuación p-adica sobre $\mathbb{Q}$ como

$$\begin{aligned} v_p &: \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \\ \frac{a}{b} &\mapsto v_p(a) - v_p(b) \end{aligned}$$

Proposición 2. La valuación p-adica sobre $\mathbb{Q}$ esta bien definida

Demostración. Supongamos que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ con $a, b \neq 0$, luego notemos que $ad = bc$, entonces

$$v_p(a) + v_p(d) = v_p(ad) = v_p(bc) = v_p(b) + v_p(c)$$

Por lo tanto

$$v_p(a) - v_p(b) = v_p(c) - v_p(d)$$

$\square$

Proposición 3. Sea $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, entonces $v_p(\frac{ac}{bd}) = v_p(\frac{a}{b}) + v_p(\frac{c}{d})$

Demostración. Notemos que

$$v_p(\frac{ac}{bd}) = v_p(ac) - v_p(bd) = v_p(a) + v_p(c) - v_p(b) - v_p(d) = v_p(\frac{a}{c}) + v_p(\frac{b}{d})$$

$\square$

Proposición 4. Sea $n, m \in \mathbb{Z}$, entonces tenemos que

$$v_p(n+m) \geq \text{mín}\{v_p(n), v_p(m)\}$$

Demostración. Si $n + m = 0$ el resultado es trivial, al igual que si n o m son 0. Por lo tanto supongamos que $n + m \neq 0, n \neq 0, m \neq 0$. Por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned} n &= p^{v_p(n)}n' \\ m &= p^{v_p(m)}m' \end{aligned}$$

Sea $v = \text{mín}\{v_p(n), v_p(m)\}$. Luego se tiene que

$$n + m = p^{v_p(n)}n' + p^{v_p(m)}m' = p^v(p^{v_p(n)-v}n' + p^{v_p(m)-v}m')$$

Por lo tanto se tiene el resultado, pues si $p^{v_p(n)-v}n' + p^{v_p(m)-v}m'$ no es divisble por p tenemos que $v_p(n+m) = v$, si $p^{v_p(n)-v}n' + p^{v_p(m)-v}m'$ es divisble por p, entonces al factorizar esos p, tendremos que $v_p(n+m) > v$. $\square$

Proposición 5. Sea $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, entonces

$$v_p(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}) \geq \text{mín}\{v_p(\frac{a}{b}), v_p(\frac{c}{d})\}$$

Demostración. El caso en que $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=0$ es trivial, por lo tanto supondremos que $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\neq 0$. Supongamos además que $v_p(\frac{a}{b}) \leq v_p(\frac{c}{d})$, luego $\frac{a}{b} < \infty$, pues si fuera ∞ tendríamos $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=0$, si $\frac{c}{d}=0$ entonces el resultado es trivial por lo tanto supondremos $\frac{c}{d}\neq 0$.

Notemos que
$$v_p(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}) = v_p(\frac{ad+bc}{bd}) = v_p(ad+bc) - v_p(bd)$$

Por la proposición anterior $v_p(ad+bc) \geq \text{mín}\{v_p(ad), v_p(bc)\}$ supongamos que el mínimo es $v_p(ad)$, entonces tenemos
$$v_p(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}) \geq v_p(ad) - v_p(bd) = v_p(a)+v_p(d)-v_p(b)-v_p(d) = v_p(\frac{a}{b})$$

Si el minimo es $v_p(bc)$ entonces tenemos que

$$v_p(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}) \geq v_p(bc) - v_p(bd) = v_p(b)+v_p(c)-v_p(b)-v_p(d) = v_p(\frac{c}{d}) \geq v_p(\frac{a}{b})$$

Por lo que se tiene el resultado. □

Definición 4. Sea p un primo, Se define el valor absoluto p-adico sobre $\mathbb{Q}$ como

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-v_p(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Proposición 6. El valor absoluto p-adico es un valor absoluto sobre $\mathbb{Q}$.

Demostración. Las 2 primeras condiciones son directas de la definición, veamos la condición 3. Si $x=0$ o $y=0$ el resultado es trivial. Sea $x, y \in \mathbb{Q}$ luego tenemos que

$$|xy|_p = p^{-v_p(xy)} = p^{-v_p(x)-v_p(y)} = p^{-v_p(x)}p^{-v_p(y)} = |x|_p \cdot |y|_p$$

Ahora demostraremos algo mas fuerte que la desigualdad triangular usual, mostraremos que

$$|x+y|_p \leq \text{máx}\{|x|_p, |y|_p\}$$

Si $x+y=0$ el resultado es trivial. Por lo tanto supongamos que $x+y\neq 0$, sin perdida de generalidad supondremos que $|x|_p \geq |y|_p$, se sigue de esto que $x \neq 0$. Dado que $p^{-v_p(x)} = |x|_p \geq |y|_p = p^{-v_p(y)}$ se tiene que $v_p(x) \leq v_p(y)$. De la proposición 5 tenemos que $v_p(x+y) \geq \text{mín}\{v_p(x), v_p(y)\} = v_p(x)$, por lo tanto tenemos que

$$p^{-v_p(x+y)} \leq p^{-v_p(x)}$$

Con lo que se tiene el resultado pues $\text{máx}\{|x|_p, |y|_p\} = |x|_p$. □

Observación 3. Dado que tenemos un valor absoluto sobre $\mathbb{Q}$, este define una métrica, analizaremos como es esta métrica

Ejemplo 2. Calculemos $|\frac{75}{73}|_5$, notemos que

$$v_p(\frac{75}{73}) = v_p(75) - v_p(73) = v_p(5^2 \cdot 3) - v_p(73) = 2$$

Pues 73 es primo. Luego $|\frac{75}{73}|_5 = 5^{-2} = \frac{1}{25}$

Ejemplo 3. Calculemos $d_{11}(89, 4082)$ donde d_{11} es la métrica inducida por $|\cdot|_{11}$

$$d_{11}(89, 4082) = |4082 - 89|_{11} = |3993|_{11} = |11^3 \cdot 3|_{11} = 11^{-3}$$

Proposición 7. Sea $\mathbb{Q}$ con la métrica inducida por $|\cdot|_p$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} p^n = 0$$

Demostración. Calculemos $d(p^n, 0)$

$$d(p^n, 0) = |p^n|_p = p^{-n}$$

Dado que $p^{-n} \to 0$ en $\mathbb{R}$, tenemos el resultado. □

Observación 4. En algún sentido la sucesión p^n en $\mathbb{Q}$ con esta métrica se parece a la sucesión $\frac{1}{n}$ en $\mathbb{R}$, pues ambas son sucesiones de términos positivos que se acercan a 0.

Observación 5. Tal como al completar $\mathbb{Q}$ con la métrica usual se obtiene $\mathbb{R}$, se puede completar $\mathbb{Q}$ con la métrica p-adica y se obtienen los espacios métricos $\mathbb{Q}_p$ los cuales son completos y $\mathbb{Q}$ son densos en el. Esto se hace mediante un proceso llamado completacion que veremos en otra ayudantía. Por lo tanto en $\mathbb{Q}_p$ una sucesión converge si y solo si es de Cauchy.

Proposición 8. Sea (a_n) una sucesión en $\mathbb{Q}_p$, entonces (a_n) es de Cauchy si y solo si para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > \mathbb{N}$ entonces $d_p(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon$

Demostración. La implicancia de izquierda a derecha es trivial. Supongamos que se tiene lo de la derecha. Luego se $\varepsilon > 0$ notemos que

$$|a_n - a_m|_p = |(a_n - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_{n+2}) + ... + (a_{m-1} - a_m)|_p \leq \max\{|a_n - a_{n+1}|_p, ..., |a_{m-1} - a_m|_p\}$$

Tomemos N tal que si $n > N$ entonces $|a_n - a_{n+1}|_p < \varepsilon$, luego cada uno de los elementos del máximo es menor que ε si $n, m > N$, por lo que tenemos

$$|a_n - a_m|_p < \varepsilon$$

□

Advertencia 1. Esto es falso en la mayoría de espacios métricos, por ejemplo considere $a_n = \ln(n)$ como una sucesión de $\mathbb{R}$, luego tenemos que

$$|\ln(n) - \ln(n+1)| = |\ln(\frac{n}{n+1})| \to 0$$

Pero no es de Cauchy pues $\ln(n)$ no converge.

Proposición 9. Sea (a_n) una sucesión en $\mathbb{Q}_p$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y solo si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Demostración. De izquierda a derecha se deja como ejercicio. De derecha a izquierda usamos la proposición 8, sea $\varepsilon > 0$ dado que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, existe N tal que si $n > N$ entonces $|a_n|_p < \varepsilon$. Notemos que si $n > N$ entonces

$$|S_{n+1} - S_n| = |a_{n+1}| < \varepsilon$$

Por lo tanto la sucesión es de Cauchy y por tanto converge pues $\mathbb{Q}_p$ es completo. □

Advertencia 2. Esto es falso en general, pues en $\mathbb{R}$ la sucesión $\frac{1}{n}$ tiene por limite 0 pero su serie no converge.

Proposición 10. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} p^n$ converge en $\mathbb{Q}_p$ y su suma es $\frac{1}{1-p}$.

Demostración. El hecho que converga sigue directo de la proposición 7 y 9. Sabemos que las sumas parciales son de la forma

$$S_n = \frac{1-p^n}{1-p}$$

Luego tenemos que

$$d(S_n, \frac{1}{1-p}) = |\frac{1}{1-p} - \frac{1-p^n}{1-p}|_p = |\frac{p^n}{1-p}|_p = |p^n|_p \cdot |\frac{1}{1-p}|_p = p^{-n} \cdot 1 \to 0$$

Por lo tanto converge. □

Ejemplo 4. Sea $p = 2$, aplicando la proposición anterior tenemos que

$$\sum_{n=0}^{1} 2^n = \frac{1}{1-2} = -1$$

Referencias

[1] Fernando Q. Gouvêa. *p-adic Numbers: An Introduction.* Universitext. Springer. ISBN: 978-3-030-47294-8.

[2] Alexa Pomerantz. *An introduction to the p-adic numbers.* URL: `https://math.uchicago.edu/~may/REU2020/REUPapers/Pomerantz.pdf`.