Multiplicadores de Lagrange

1. Problemas

Problema 1. La temperatura (x, y) de una placa de metal es $T(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2$. Una hormiga camina sobre la placa alrededor de una circunferencia centrada en el origen y de radio 5. Cual es la mayor y menor temperatura con la que se encuentra la hormiga?

Solución 1. Dado que la hormiga se encuentra sobre una circunferencia de radio 5 centrada en el origen, los puntos por los que se mueve deben satisfacer

$$x^2 + y^2 = 5^2$$

Además notemos que T es una función de clase $\mathscr{C}^\infty$, por lo tanto podemos ocupar el método de multiplicadores de Lagrange. Defininamos

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x^2 + y^2 - 5^2 \end{aligned}$$

Ahora queremos resolver el sistema

$$Df(x, y) = \lambda Dg(x, y)$$

Calculemos las derivadas.

$$\begin{aligned} Df(x, y) &= \begin{bmatrix} \partial_x f & \partial_y f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8x - 4y & -4x + 2y \end{bmatrix} \\ Dg(x, y) &= \begin{bmatrix} \partial_x g & \partial_y g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Luego el nos queda que

$$\begin{bmatrix} 8x - 4y & -4x + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda x & 2\lambda y \end{bmatrix}$$

Es decir queremos resolver el sistema

$$\begin{aligned} 8x - 4y &= 2\lambda x \\ -4x + 2y &= 2\lambda y \\ x^2 + y^2 &= 25 \end{aligned}$$

Dividiendo la primera ecuacion por 2 obtenemos

$$\begin{aligned} 4x - 2y &= \lambda x \\ -4x + 2y &= 2\lambda y \\ x^2 + y^2 &= 25 \end{aligned}$$

Sumando la primera ecuacion con la segunda obtenemos

$$0 = \lambda x + 2\lambda y \implies \lambda(x + 2y) = 0$$

Caso 1: $\lambda = 0$, si $\lambda = 0$, entonces de la primera ecuacion obtenemos que $2x = y$, reemplazando en la tercera ecuacion obtenemos

$$x^2 + 4x^2 = 25 \implies x = \pm\sqrt{5}$$

Por lo tanto los puntos críticos para este caso son $P_1 = (\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$ y $P_2 = (-\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$
Caso 2: $x + 2y = 0$, en este caso tenemos que $x = -2y$, reemplazamos en la 3ra ecuacion y obtenemos que

$$(-2y)^2 + y^2 = 25 \implies 5y^2 = 25 \implies y = \pm\sqrt{5}$$

Por lo que los puntos criticos son $P_3 = (-2\sqrt{5}, \sqrt{5})$ y $P_4 = (2\sqrt{5}, -\sqrt{5})$
Reemplazando en T obtenemos que

$$\begin{aligned} T(\sqrt{5}, 2\sqrt{5}) &= 4(\sqrt{5})^2 - 4 \cdot \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} + (2\sqrt{5})^2 = 20 - 40 + 20 = 0 \\ T(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5}) &= 4(-\sqrt{5})^2 - 4 \cdot (-\sqrt{5}) \cdot (-2\sqrt{5}) + (-2\sqrt{5})^2 = 20 - 40 + 20 = 0 \\ T(-2\sqrt{5}, \sqrt{5}) &= 4 \cdot (-2\sqrt{5})^2 - 4 \cdot (-2\sqrt{5}) \cdot \sqrt{5} + \sqrt{5}^2 = 80 + 40 + 5 = 125 \\ T(2\sqrt{5}, -\sqrt{5}) &= 4 \cdot (2\sqrt{5})^2 - 4 \cdot (2\sqrt{5}) \cdot (-\sqrt{5}) + (-\sqrt{5})^2 = 80 + 40 + 5 = 125 \end{aligned}$$

Por lo tanto la maxima temperatura que sentira la hormiga sera en de 125 C en los puntos $(-2\sqrt{5}, \sqrt{5})$ y $(2\sqrt{5}, -\sqrt{5})$. La temperatura minima sera de 0 C en los puntos $(\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$ y $(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$.

Problema 2. La temperatura sobre una placa circular $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ esta dada por $T(x,y) = 2x^2+y^2$. Determinar los puntos sobre la placa que estan a mayor y menor temperatura.

Solución 2. Notemos que la restricción viene dada por que los puntos deben vivir dentro de Ω, para esto se debe cumplir que $x^2+y^2 \leq 1$. Partamos viendo el caso donde $x^2+y^2 < 1$. Notemos que la funcion T es de clase $\mathscr{C}^\infty$
Caso 1: $x^2+y^2 < 1$, para esto buscaremos los puntos criticos de T mediante el gradiante. Para esto necesitamos que $DT(x,y) = (0,0)$, calculemos la derivada

$$DT(x,y) = \begin{bmatrix} \partial_x T & \partial_y T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x & 2y \end{bmatrix}$$

Luego tenemos que $4x = 0$ e $2y = 0$, por lo tanto el único punto critico es el $(0,0)$, notemos que $0^2+0^2 \leq 1$ y por lo tanto satisface la restricción. Por lo que nuestro primer punto critico es $P_1 = (0,0)$.
Caso 2: : $x^2+y^2 = 1$, usaremos multiplicadores de Lagrange, luego definimos

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x^2+y^2-1 \end{aligned}$$

Entonces queremos que

$$DT(x,y) = \lambda Dg(x,y)$$

Calculemos las derivadas de g, pues la derivada de T ya la calculamos.

$$Dg(x,y) = \begin{bmatrix} \partial_x g & \partial_y g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \end{bmatrix}$$

Luego nos queda que

$$\begin{bmatrix} 4x & 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda x & 2\lambda y \end{bmatrix}$$

Es decir tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 4x &= 2\lambda x \\ 2y &= 2\lambda y \\ x^2+y^2 &= 1 \end{aligned}$$

De las 2 primeras ecuaciones obtenemos que

$$\begin{aligned} 2x(2-\lambda) &= 0 \\ 2y(1-\lambda) &= 0 \end{aligned}$$

Caso $\mathbf{x = 0}$: si $x = 0$ entonces tenemos de la tercera ecuación que $y = \pm 1$, por lo que los puntos críticos asociados a este caso son $P_2 = (0,1)$, $P_3 = (0,-1)$.
Caso $\boldsymbol{\lambda = 2}$: Si $\lambda = 2$, entonces obtenemos de la segunda ecuacion que

$$-2y = 0 \implies y = 0$$

de la tercera ecuación obtenemos que $x = \pm 1$, luego los puntos asociados a este caso son

$$\begin{aligned} P_4 &= (1,0) \\ P_5 &= (-1,0) \end{aligned}$$

Caso $\mathbf{y = 0}$: Este caso es análogo a uno que ya hicimos, pues reemplazando en la tercera ecuación obtenemos que $x = \pm 1$, por lo que no obtenemos puntos nuevos.
Caso $\boldsymbol{\lambda = 1}$: Reemplazando λ en la primera, tenemos que $2x = 0$ y por tanto $x = 0$, luego reemplazando en la tercera obtenemos $y = \pm 1$ por lo que no tenemos nuevos puntos.
Por lo tanto todos los puntos criticos son

$$\begin{aligned} P_1 &= (0,0) \\ P_2 &= (0,1) \\ P_3 &= (0,-1) \\ P_4 &= (1,0) \\ P_5 &= (-1,0) \end{aligned}$$

Evaluamos todos los puntos en la funcion T para encontrar cual es el minimo y cual es el maximo.

$$
\begin{aligned}
T(0,0) &= 0 \\
T(0,1) &= 1 \\
T(0,-1) &= 1 \\
T(1,0) &= 2 \\
T(-1,0) &= 2
\end{aligned}
$$

Luego la maxima temperatura es 2 y la minima es 0.