Ayudantias al papel II - MAT023

Autor: Jorge Bravo

Problema 1

Sea U un espacio vectorial real de dimensión 3 y $\mathscr{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base para este espacio. Considere una transformación lineal $T : U \to U$ de tal forma que cumpla

1. $T^2 = T$
2. $T(u_2) = u_3$
3. $u_1 \in \ker T$

Si $\mathscr{D} = \{u_1 - 3u_2 + u_3, 2u_2 - u_3, -2u_3\}$ **es** una base de U, calcule $[T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{D}}$

Analisis y solucion del problema 1

Lo primero que tenemos que darnos cuenta es que nos estan preguntando cual es la representacion matricial de T desde la base $\mathscr{B}$ a la base $\mathscr{D}$, si recordamos de clase, esta es por definicion

$$[T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{D}} = \begin{bmatrix} [Tu_1]_{\mathscr{D}} & [Tu_2]_{\mathscr{D}} & [Tu_3]_{\mathscr{D}} \end{bmatrix}$$

Donde $[Tu_k]_{\mathscr{D}}$ son las coordenadas de $T(u_k)$ en la base $\mathscr{D}$. Recordemos que las coordenadas de un vector v en una base $\mathscr{P}$ son los coeficientes que acompanan a la base $\mathscr{P}$ cuando escribimos a v como combinacion lineal de los vectores en $\mathscr{P}$, esto esta bien definido pues al ser $\mathscr{P}$ una base, se tiene que a cualquier vector lo podemos escribir como combinacion lineal de vectores en esta de manera **unica**.

Tambien recordemos que una transformacion lineal viene totalmente **determinada** por los valores que toma en una base. Por lo tanto nos interesa conocer $T(u_k)$ para $k \in \{1, 2, 3\}$. Analisemos esto.

Por la condición 3, sabemos que $u_1 \in \ker T$, pero esto es lo mismo que decir que $Tu_1 = 0$, además de esto podemos decir algo mas de la trasnformacion T, esta no es inyectiva, pues u_1 al ser parte de la base es distinto de 0 y por tanto el kernel es no trivial.

Por la condicion 2 sabemos que $Tu_2 = u_3$, ademas usando la condicion 1 y aplicandola a la ecuacion anterior obtenemos que

$$u_3 = Tu_2 = T^2u_2 = Tu_3$$

Por lo tanto, dado que ya sabemos donde envia T la base $\mathscr{C}$, conocemos a T. Ahora con todo esto sabemos que la representacion matricial T con respecto a las bases vendra dada por

$$[T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{D}} = \begin{bmatrix} [Tu_1]_{\mathscr{D}} & [Tu_2]_{\mathscr{D}} & [Tu_3]_{\mathscr{D}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0]_{\mathscr{D}} & [u_3]_{\mathscr{D}} & [u_3]_{\mathscr{D}} \end{bmatrix}$$

Pero sabemos que las coordenadas del 0 en cualquier base siempre sera la columna 0. Por lo tanto nos basta calcular las coordenadas de u_3 en la base $\mathscr{D}$. Hagamos esto.

Por lo hablado al principio queremos encontrar los coeficiente $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, de tal forma que

$$u_3 = \alpha(u_1 - 3u_2 + u_3) + \beta(2u_2 - u_3) - \gamma 2u_3$$

Juntando terminos similares obtenemos que

$$u_3 = \alpha u_1 + (-2\alpha + 2\beta)u_2 + (\alpha - \beta - 2\gamma)u_3 \iff 0 = \alpha u_1 + (-2\alpha + 2\beta)u_2 + (\alpha - \beta - 2\gamma - 1)u_3$$

Donde lo que hicimos para pasar de la parte izquierda a la derecha fue restar u_3 y factorizar los escalares. Dado que u_1, u_2, u_3 son L.I., pues forman una base, se tiene que la unica forma de escribir al 0 es la trivial, es decir obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ 2\beta - 2\alpha &= 0 \\ \alpha - \beta - 2\gamma - 1 &= 0 \end{aligned}$$

de las primeras 2 ecuaciones se desprende rapidamente que $\alpha = 0 = \beta$ y reemplazando en la ultima obtenemos $\gamma = -\frac{1}{2}$
Por lo tanto las coordenadas de u_3 en la base $\mathscr{D}$ son

$$[u_3]_{\mathscr{D}} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Por lo que ya tenemos todos los ingredientes necesarios para la representacion matricial de T la cual vendria siendo

$$[T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{D}} = \begin{bmatrix} [0]_{\mathscr{D}} & [u_3]_{\mathscr{D}} & [u_3]_{\mathscr{D}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$