Regla de la Cadena

Problema 1

Dada una función diferenciable $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, se define una funcion $f(t) = g(t, t^2 - 4, e^{t-2})$. Calcular $\frac{d}{dt} f(2)$, si se sabe que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(2,0,1) = 4$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(2,0,1) = 2$$
$$\frac{\partial g}{\partial z}(2,0,1) = 2$$

Solucion 1

Notemos que nos estan preguntando $Df(2)$, donde f es una funcion compuesta con otra, esto lo podemos ver si definimos la funcion

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$
$$t \mapsto (t, t^2 - 4, e^{t-2})$$

Luego notamos que $f(t) = (g \circ h)(t)$. Por la regla de la cadena tenemos que

$$Df(2) = D(g \circ h)(2) = Dg(h(2))_{1\times 3} \cdot Dh(2)_{3\times 1}$$

Calculemos $Dh(2)$, esta sera una matriz 3×1 (pues la función va de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^3$) y viene dada por

$$Dh(2) = \begin{bmatrix} \partial_t h_1(2) \\ \partial_t h_2(2) \\ \partial_t h_3(2) \end{bmatrix}$$

Calculemos

$$\partial_t h_1 = \partial_t(t) = 1$$
$$\partial_t h_2 = \partial_t(t^2 - 4) = 2t$$
$$\partial_t h_3 = \partial_t(e^{t-2}) = e^{t-2}$$

luego evaluando en 2 tenemos que

$$Dh(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ahora nos falta calcular $Dg(h(2))$, primero veamos quien es $h(2)$

$$h(2) = (2,0,1)$$

Por lo tanto queremos calcular

$$Dg(h(2)) = Dg(2,0,1)$$

Pero recordemos que $Dg(2,0,1)$ es una matriz 1×3 que tiene la forma

$$Dg(2,0,1) = \begin{bmatrix} \partial_x g(2,0,1) & \partial_y g(2,0,1) & \partial_z g(2,0,1) \end{bmatrix}$$

Pero notemos que estos son justo los valores que nos dan, por lo tanto tenemos que

$$Dg(2,0,1) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto tenemos que

$$Df(2) = D(g \circ h)(2) = Dg(h(2)) \cdot Dh(2) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $\frac{df}{dt}(2) = 14$

Problema 2

Considere $p(x,y) = (\cos y + x^2, e^{x+y})$ y $q(u,v) = (e^{u^2}, u - \sin v)$. Calcular la matriz Jacobiana en el punto $(0,0)$

Solucion 2

Recordemos que la matriz Jacobiana de $p \circ q$ es la derivada. Por lo tanto nos están preguntando por $D(p \circ q)(0,0)$. Por la regla de la cadena sabemos que

$$D(p \circ q)(0,0) = Dp(q(0,0))_{2\times 2} \cdot Dq(0,0)_{2\times 2}$$

Donde las dimensiones de las matrices son 2×2, pues ambas funciones van de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Partamos calculando $Dq(0,0)$, recordemos que esta matriz es de la forma

$$Dq(0,0) = \begin{bmatrix} \partial_u q_1(0,0) & \partial_v q_1(0,0) \\ \partial_u q_2(0,0) & \partial_v q_2(0,0) \end{bmatrix}$$

Calculemos cada una de estas derivadas

$$\partial_u q_1 = \partial_u (e^{u^2}) = e^{u^2} \cdot 2u$$
$$\partial_u q_2 = \partial_u (u - \sin v) = 1$$
$$\partial_v q_1 = \partial_v (e^{u^2}) = 0$$
$$\partial_v q_2 = \partial_v (u - \sin v) = -\cos v$$

Ahora evaluando y reemplazando obtenemos que

$$Dq(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Ahora nos falta calcular $Dp(q(0,0))$, primero calculemos quien es $q(0,0)$

$$q(0,0) = (1,0)$$

Luego queremos calcular $Dp(1,0)$, recordemos que $Dp(1,0)$ tiene a forma

$$Dp(1,0) = \begin{bmatrix} \partial_x p_1(1,0) & \partial_y p_1(1,0) \\ \partial_x p_2(1,0) & \partial_y p_2(1,0) \end{bmatrix}$$

Calculamos cada una de las derivadas

$$\partial_x p_1 = \partial_x (\cos y + x^2) = 2x$$
$$\partial_x p_2 = \partial_x (e^{x+y}) = e^{x+y}$$
$$\partial_y p_1 = \partial_y (\cos y + x^2) = -\sin y$$
$$\partial_y p_2 = \partial_y (e^{x+y}) = e^{x+y}$$

Luego reemplazando y evaluando obtenemos

$$Dp(q(0,0)) = Dp(1,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ e & e \end{bmatrix}$$

Por lo tanto tenemos que

$$D(p \circ q)(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ e & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e & -e \end{bmatrix}$$