

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

AYUDANTE: JORGE BRAVO

1. Problemas

Problema 1. La temperatura (x, y) de una placa de metal es $T(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2$. Una hormiga camina sobre la placa alrededor de una circunferencia centrada en el origen y de radio 5. Cual es la mayor y menor temperatura con la que se encuentra la hormiga?

Solución 1. Dado que la hormiga se encuentra sobre una circunferencia de radio 5 centrada en el origen, los puntos por los que se mueve deben satisfacer

$$x^2 + y^2 = 5^2$$

Además notemos que T es una función de clase \mathcal{C}^∞ , por lo tanto podemos ocupar el método de multiplicadores de Lagrange. Definamos

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x^2 + y^2 - 5^2 \end{aligned}$$

Ahora queremos resolver el sistema

$$Df(x, y) = \lambda Dg(x, y)$$

Calculemos las derivadas.

$$\begin{aligned} Df(x, y) &= [\partial_x f \quad \partial_y f] = [8x - 4y \quad -4x + 2y] \\ Dg(x, y) &= [\partial_x g \quad \partial_y g] = [2x \quad 2y] \end{aligned}$$

Luego el nos queda que

$$[8x - 4y \quad -4x + 2y] = [2\lambda x \quad 2\lambda y]$$

Es decir queremos resolver el sistema

$$\begin{aligned} 8x - 4y &= 2\lambda x \\ -4x + 2y &= 2\lambda y \\ x^2 + y^2 &= 25 \end{aligned}$$

Dividiendo la primera ecuacion por 2 obtenemos

$$\begin{aligned} 4x - 2y &= \lambda x \\ -4x + 2y &= 2\lambda y \\ x^2 + y^2 &= 25 \end{aligned}$$

Sumando la primera ecuacion con la segunda obtenemos

$$0 = \lambda x + 2\lambda y \implies \lambda(x + 2y) = 0$$

Caso 1: $\lambda = 0$, si $\lambda = 0$, entonces de la primera ecuacion obtenemos que $2x = y$, reemplazando en la tercera ecuacion obtenemos

$$x^2 + 4x^2 = 25 \implies x = \pm\sqrt{5}$$

Por lo tanto los puntos críticos para este caso son $P_1 = (\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$ y $P_2 = (-\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$

Caso 2: $x + 2y = 0$, en este caso tenemos que $x = -2y$, reemplazamos en la 3ra ecuacion y obtenemos que

$$(-2y)^2 + y^2 = 25 \implies 5y^2 = 25 \implies y = \pm\sqrt{5}$$

Por lo que los puntos criticos son $P_3 = (-2\sqrt{5}, \sqrt{5})$ y $P_4 = (2\sqrt{5}, -\sqrt{5})$

Reemplazando en T obtenemos que

$$\begin{aligned} T(\sqrt{5}, 2\sqrt{5}) &= 4(\sqrt{5})^2 - 4 \cdot \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} + (2\sqrt{5})^2 = 20 - 40 + 20 = 0 \\ T(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5}) &= 4(-\sqrt{5})^2 - 4 \cdot (-\sqrt{5}) \cdot (-2\sqrt{5}) + (-2\sqrt{5})^2 = 20 - 40 + 20 = 0 \\ T(-2\sqrt{5}, \sqrt{5}) &= 4 \cdot (-2\sqrt{5})^2 - 4 \cdot (-2\sqrt{5}) \cdot \sqrt{5} + \sqrt{5}^2 = 80 + 40 + 5 = 125 \\ T(2\sqrt{5}, -\sqrt{5}) &= 4 \cdot (2\sqrt{5})^2 - 4 \cdot (2\sqrt{5}) \cdot (-\sqrt{5}) + (-\sqrt{5})^2 = 80 + 40 + 5 = 125 \end{aligned}$$

Por lo tanto la maxima temperatura que sentira la hormiga sera en de 125 C en los puntos $(-2\sqrt{5}, \sqrt{5})$ y $(2\sqrt{5}, -\sqrt{5})$. La temperatura minima sera de 0 C en los puntos $(\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$ y $(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$.

Problema 2. La temperatura sobre una placa circular $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ esta dada por $T(x, y) = 2x^2 + y^2$. Determinar los puntos sobre la placa que estan a mayor y menor temperatura.

Solución 2. Notemos que la restricción viene dada por que los puntos deben vivir dentro de Ω , para esto se debe cumplir que $x^2 + y^2 \leq 1$. Partamos viendo el caso donde $x^2 + y^2 < 1$. Notemos que la funcion T es de clase \mathcal{C}^∞

Caso 1: $x^2 + y^2 < 1$, para esto buscaremos los puntos criticos de T mediante el gradiente. Para esto necesitamos que $DT(x, y) = (0, 0)$, calculemos la derivada

$$DT(x, y) = [\partial_x T \quad \partial_y T] = [4x \quad 2y]$$

Luego tenemos que $4x = 0$ e $2y = 0$, por lo tanto el único punto critico es el $(0, 0)$, notemos que $0^2 + 0^2 \leq 1$ y por lo tanto satisface la restricción. Por lo que nuestro primer punto critico es $P_1 = (0, 0)$.

Caso 2: $x^2 + y^2 = 1$, usaremos multiplicadores de Lagrange, luego definimos

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x^2 + y^2 - 1 \end{aligned}$$

Entonces queremos que

$$DT(x, y) = \lambda Dg(x, y)$$

Calculemos las derivadas de g , pues la derivada de T ya la calculamos.

$$Dg(x, y) = [\partial_x g \quad \partial_y g] = [2x \quad 2y]$$

Luego nos queda que

$$[4x \quad 2y] = [2\lambda x \quad 2\lambda y]$$

Es decir tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 4x &= 2\lambda x \\ 2y &= 2\lambda y \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

De las 2 primeras ecuaciones obtenemos que

$$\begin{aligned} 2x(2 - \lambda) &= 0 \\ 2y(1 - \lambda) &= 0 \end{aligned}$$

Caso $x = 0$: si $x = 0$ entonces tenemos de la tercera ecuación que $y = \pm 1$, por lo que los puntos críticos asociados a este caso son $P_2 = (0, 1)$, $P_3 = (0, -1)$.

Caso $\lambda = 2$: Si $\lambda = 2$, entonces obtenemos de la segunda ecuacion que

$$-2y = 0 \implies y = 0$$

de la tercera ecuación obtenemos que $x = \pm 1$, luego los puntos asociados a este caso son

$$\begin{aligned} P_4 &= (1, 0) \\ P_5 &= (-1, 0) \end{aligned}$$

Caso $y = 0$: Este caso es análogo a uno que ya hicimos, pues reemplazando en la tercera ecuación obtenemos que $x = \pm 1$, por lo que no obtenemos puntos nuevos.

Caso $\lambda = 1$: Reemplazando λ en la primera, tenemos que $2x = 0$ y por tanto $x = 0$, luego reemplazando en la tercera obtenemos $y = \pm 1$ por lo que no tenemos nuevos puntos.

Por lo tanto todos los puntos criticos son

$$\begin{aligned} P_1 &= (0, 0) \\ P_2 &= (0, 1) \\ P_3 &= (0, -1) \\ P_4 &= (1, 0) \\ P_5 &= (-1, 0) \end{aligned}$$

Evaluamos todos los puntos en la funcion T para encontrar cual es el minimo y cual es el maximo.

$$T(0,0) = 0$$

$$T(0,1) = 1$$

$$T(0,-1) = 1$$

$$T(1,0) = 2$$

$$T(-1,0) = 2$$

Luego la maxima temperatura es 2 y la minima es 0.