

INTRODUCCION EDO

AYUDANTE: JORGE BRAVO

Preliminares y definiciones basicas

Eventualmente escribir esto

EDO separable

Una EDO separable es una ecuación diferencial ordinaria de grado 1 que se puede escribir de la siguiente forma

$$y' = f(x)g(y)$$

con f, g funciones continuas. Notemos que la función f **no** puede depender de y , análogamente g no puede depender de x . Es decir nos queda algo que solo depende de x multiplicado por algo que solo depende de y .

Ejemplo 1. La ecuación diferencial dada por

$$y' = 6y^2x$$

Es separable, pues la podemos escribir como

$$y' = (6y^2)(x)$$

Ejemplo 2. La EDO dada por

$$y' = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}$$

Es separable pues la podemos escribir de la forma

$$y' = \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)(y^3)$$

Ejemplo 3. La EDO dada por

$$y' = e^{x-y}$$

Es separable pues la podemos escribir como

$$y' = e^{x-y} = e^x e^{-y}$$

Para resolver una EDO separable haremos un truco, el cual se puede justificar de manera formal pero no va al caso ver porque. El truco es el siguiente.

1. Escribir la ecuación diferencial en su forma separada, es decir dejarla de la forma

$$y' = f(x)g(y)$$

2. Cambiar la notación y' por $\frac{dy}{dx}$, es decir escribir la EDO de la siguiente forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

3. Dejar todo lo que tenga y a un lado y todo lo que tenga x al otro, para esto es necesario multiplicar por dx , lo hacemos de manera totalmente formal

$$\frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx$$

4. Integrar ambos lados con respecto a su diferencial

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx$$

5. Una vez se integro ambos lados, despejar y .

Ejemplo 4. Resolvamos la siguiente EDO

$$y' = 6y^2x$$

Esta ya esta escrita en su forma separada, por lo que cambiamos la notación a la de Leibniz

$$\frac{dy}{dx} = 6y^2x$$

Dejamos todo lo que tenga y a un lado y todo lo que tenga x al otro

$$\frac{1}{6y^2}dy = xdx$$

Integramos con respecto a cada variable

$$-\frac{1}{6y} = \int \frac{1}{6y^2}dy = \int xdx = \frac{x^2}{2} + C$$

Luego obtenemos

$$-\frac{1}{6y} = \frac{x^2}{2} + C, C \in \mathbb{R}$$

Por ultimo despejamos y

$$-\frac{1}{6y} = \frac{x^2}{2} + C \iff -\frac{1}{6} = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)y \iff y = -\frac{1}{6\left(\frac{x^2}{2} + C\right)}$$

Reordenando al final obtenemos que

$$y = -\frac{1}{6x^2 + 12C}$$

Pero como C es arbitraria, $12C$ también lo es y podemos dejarlo como C nada mas. Es decir la solución general es

$$y = -\frac{2}{6x^2 + C}$$

Problemas

Problema 1. Resuelva la siguiente EDO

$$y' = -k\sqrt{y}$$

Solución 1.

$$y(x) = (C - kx)^2$$