EDOs de Primer Orden

Ayudante: Jorge Bravo

EDO Lineal de Primer Orden

Una ecuación diferencial de grado 1 se dirá lineal si es de la siguiente forma para funciones $f, g \in \mathscr{C}$

$$y' + f(x)y = g(x) \tag{1}$$

Dada una EDO lineal de primer orden se define el factor integrador como

$$\mu(x) = e^{\int f(x)dx}$$

Luego la solución al problema (1) viene dada por la formula de Leibniz, la cual es

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)g(x)dx\right)$$

Para resolver este tipo de EDO's entonces lo unico que hay que hacer es reconocer que es una EDO lineal de primer orden y despues aplicar la formula de Leibniz.

Ejemplo 1. Resuelva la siguiente EDO

$$ty' + 2y = t^2 - t + 1$$

Lo primero que haremos sera dejarla en la forma canonica, es decir con el y' solo, luego dividimos por t y obtenemos que

$$y' + \frac{2}{t}y = t - 1 + \frac{1}{t}$$

Luego la edo ya esta en su forma lineal para aplicar Leibniz. Calculemos el factor integrador

$$\mu(t) = e^{\int \frac{2}{t}dt} = e^{2\ln(|t|)} = t^2$$

Entonces la solucion a la EDO viene dada por

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)}\left(\int \mu(t)(t - 1 + \frac{1}{t})dt\right) = t^{-2}\left(\int t^3 - t^2 + tdt\right) = t^{-2}\left(\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + C\right)$$

Por lo tanto la solucion general viene dada por

$$y(t) = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{3}t + \frac{1}{2} + Ct^{-2}$$

Ecuación de Bernoulli

La EDO de Bernoulli es una ecuacion diferencial de primer orden con la siguiente estructura

$$y' + f(x)y = g(x)y^\alpha, \alpha \neq 1$$

Con $f, g \in \mathscr{C}$
Para resolver esta EDO seguiremos los siguientes pasos

1. Reconocer que es una EDO de Bernoulli
2. Multiplicar por $y^{-\alpha}$ la ecuacion, para dejarla de la siguiente forma

$$y^{-\alpha}y' + f(x)y^{1-\alpha} = g(x)$$

3. Hacer el cambio de variable $z = y^{1-\alpha}$, derivando obtenemos que

$$z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' \implies \frac{z'}{(1-\alpha)y^{-\alpha}} = y'$$

4. Reemplazamos en (2) con la nueva variable

$$\frac{1}{1-\alpha}z' + f(x)z = g(x)$$

5. Dejamos z' "despejado"
$$z' + (1-\alpha)f(x)z = g(x)(1-\alpha)$$
6. Resolver la EDO como una EDO lineal de primer orden
7. Deshacer el cambio de variable.

Ejemplo 2. Resuelva la siguiente Ecuacion diferencial

$$y' + \frac{4}{x}y = x^3y^2, x > 0$$

1. Lo primero que haremos sera reconocer que es una EDO de Bernoulli con $\alpha = 2$, $f(x) = \frac{4}{x}$ y $g(x) = x^3$.
2. Multiplicamos por y^{-2}
$$y^{-2}y' + \frac{4}{x}y^{-1} = x^3$$
3. Hacemos el cambio de variable $z = y^{1-2} = y^{-1}$, luego tenemos que $z' = -y^{-2}y' \implies y' = -y^2z'$
4. Reemplazamos en la EDO
$$-y^{-2}y^2z' + \frac{4}{x}z = x^3 \iff -z' + \frac{4}{x}z = x^3$$
5. Despejamos z', en este caso solo hay que multiplicar por -1
$$z' - \frac{4}{x}z = -x^3$$
6. Ahora resolvemos la EDO lineal de primer orden que nos queda. Notemos que el factor integrante viene dado por
$$\mu(x) = e^{\int -\frac{4}{x}dx}$$
Calculemos la integral
$$\int -\frac{4}{x}dx = -4\int \frac{1}{x}dx = -4\ln(x) = \ln(x^{-4})$$
Luego el factor integrate es
$$\mu(x) = e^{\ln(x^{-4})} = x^{-4}$$
Por la formula de Leibniz, tenemos que la solucion a la EDO viene dada por
$$z(x) = \frac{1}{\mu(x)}(\int \mu(x)g(x)dx) = x^4(\int x^{-4}(-x^3))$$
Hacemos la integral
$$\int x^{-4}(-x^3)dx = -\int x^{-1}dx = -\int \frac{1}{x}dx = -\ln(x) + C$$
Por lo que la solucion a la edo en terminos de z viene dada por
$$z(x) = x^4(C - \ln(x))$$
7. Deshacemos el cambio de variable
$$y^{-1}(x) = z(x) = x^4(C - \ln(x)) \implies y(x) = \frac{1}{x^4(C - \ln(x))}$$

EDO de Ricatti

La edo de Ricatti es una Ecuacion diferencial de primer orden **no** lineal que tiene la siguiente forma

$$y' + f(x)y + g(x)y^2 = h(x)$$

con $f, g, h \in \mathscr{C}$
Para resolver este tipo de EDO's, lo primero que necesitamos es conocer **una** solucion a la EDO, es decir necesitamos una funcion $u(x)$ tal que cuando la reemplazamos en la ecuacion esta se satisfaga. Una vez tenemos esto podemos encontrar el resto de las soluciones con los siguientes pasos

1. Definimos el siguiente cambio de variable
$$y = u + \frac{1}{v}$$
Donde v es la nueva variable y u es la solucion que conocemos

2. Derivamos para despejar y'
$$y' = u' - \frac{v'}{v^2}$$

3. Reemplazamos en la EDO
$$(u' - \frac{v'}{v^2}) + f(x)(u + \frac{1}{v}) + g(x)(u + \frac{1}{v})^2 = h(x)$$

4. Reordenamos la edo
$$\begin{aligned} & u' - \frac{v'}{v^2} + f(x)u + \frac{f(x)}{v} + g(x)(u^2 + \frac{2u}{v} + \frac{1}{v^2}) = h(x) \\ \iff & u' - \frac{v'}{v^2} + f(x)u + \frac{f(x)}{v} + g(x)u^2 + g(x)\frac{2u}{v} + \frac{g(x)}{v^2} = h(x) \\ \iff & (u' + f(x)u + g(x)u^2) - \frac{v'}{v^2} + \frac{f(x)}{v} + g(x)\frac{2u}{v} + \frac{g(x)}{v^2} = h(x) \end{aligned}$$
Ahora recordamos que u satisface la edo y por tanto el parentesis de la izquierda es igual a $h(x)$
$$\begin{aligned} & h(x) - \frac{v'}{v^2} + \frac{f(x)}{v} + g(x)\frac{2u}{v} + \frac{g(x)}{v^2} = h(x) \\ \iff & -\frac{v'}{v^2} + \frac{f(x)}{v} + g(x)\frac{2u}{v} + \frac{g(x)}{v^2} = 0 \\ \iff & v' - f(x)v - 2ug(x)v - g(x) = 0 \\ \iff & v' + (-f(x) - 2ug(x))v = g(x) \end{aligned}$$

5. Resolvemos la EDO lineal que nos queda

6. Devolvemos el cambio de variable

Observación 0.1. Hay profesores que dejan saltar desde 1. hasta el final de 4. directamente, por lo que no es necesario hacer todo el trabajo, solo aprenderse la forma de la EDO despues de hacer el cambio de variable.

Ejemplo 3.

Problemas

Problema 1. Resuelva la siguiente EDO
$$y' + ty = 5t$$

Solución 1. Esta es una EDO lineal que ya esta en su forma canonica. Esta tiene $f(t) = t$ y $g(t) = 5t$, luego su factor integrante viene dado por
$$\mu(t) = e^{\int f(t)dt} = e^{\int t dt} = e^{\frac{t^2}{2}}$$

Luego la solucion general viene dada por

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)}(\int \mu(t)g(t)dt) = e^{-\frac{t^2}{2}}(\int e^{\frac{t^2}{2}}5tdt)$$

Calculemos la integral, hacemos el cambio de variable $u = \frac{t^2}{2}$, luego $du = tdt$. Entonces la integral nos queda

$$\int e^{\frac{t^2}{2}}5tdt = 5\int e^u du = 5e^u + C = 5e^{\frac{t^2}{2}} + C$$

Por lo tanto la solucion es

$$y(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}(5e^{\frac{t^2}{2}} + C) = 5 + Ce^{-\frac{t^2}{2}}$$

Problema 2 (control)**.** Resolver la ecuacion con valor inicial (Bernoulli):

$$y' = \frac{1}{x}y - \frac{2x}{y}$$

Con la condicion inicial

$$y(1) = 1$$

Solución 2. Ya que sabemos que es una ecuacion diferencial de Bernoulli, primero la pondremos en su forma "canonica"

$$y' - \frac{1}{x}y = -2xy^{-1}$$

Luego esta es una ecuacion de Bernoulli con $\alpha = -1$, por lo que multiplicaremos por y

$$yy' - \frac{1}{x}y^2 = -2x$$

Hacemos el cambio de variable $z = y^2$, luego $z' = 2yy' \iff y' = \frac{z'}{2y}$

$$y\frac{z'}{2y} - \frac{1}{x}z = -2x \iff \frac{1}{2}z' - \frac{1}{x}z = -2x$$

Despejamos el z', luego

$$z' - \frac{2}{x}z = -4x$$

Esta es una EDO lineal de primer orden, la resolvemos con la formula de Leibniz, el factor integrante viene dado por

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{2}{x}dx}$$

Hacemos la integral, luego

$$\int -\frac{2}{x}dx = -2\int \frac{1}{x}dx = -2\ln(x) = \ln(x^{-2})$$

Por lo tanto el factor integrante es

$$\mu(x) = e^{\ln(x^{-2})} = x^{-2}$$

Luego por la formula de Leibniz, la solucion a la EDO viene dada por

$$z(x) = \frac{1}{\mu(x)}(\int \mu(x)(-4x)dx) = -x^2\int x^{-1}dx = -4x^2(\ln(x) + C)$$

Ahora deshacemos el cambio de variable, recordamos que

$$y^2 = z = -x^2\ln(x) + C \iff y = \sqrt{-4x^2\ln(x) + Cx^2}$$

Ahora evaluamos en 1 para encontrar la la constante

$$1 = y(1) = \sqrt{C} \iff C = 1$$

Luego la solucion general al problema de valor inicial viene dado por

$$y = \sqrt{-4x^2\ln(x) + x^2}$$