EDOs de Primer Orden

Ayudante: Jorge Bravo

EDO Lineal de Primer Orden

Una ecuación diferencial de grado 1 se dirá lineal si es de la siguiente forma para funciones $f, g \in \mathscr{C}$

$$y' + f(x)y = g(x) \tag{1}$$

Dada una EDO lineal de primer orden se define el factor integrador como

$$\mu(x) = e^{\int f(x)dx}$$

Luego la solución al problema (1) viene dada por la formula de Leibniz, la cual es

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}(\int \mu(x)g(x)dx)$$

Para resolver este tipo de EDO's entonces lo unico que hay que hacer es reconocer que es una EDO lineal de primer orden y despues aplicar la formula de Leibniz.

Ejemplo 1.

Ecuación de Bernoulli

La EDO de Bernoulli es una ecuacion diferencial de primer orden con la siguiente estructura

$$y' + f(x)y = g(x)y^{\alpha}, \alpha \neq 1$$

Para resolver esta EDO seguiremos los siguientes pasos

1. Reconocer que es una EDO de Bernoulli
2. Multiplicar por $y^{-\alpha}$ la ecuacion, para dejarla de la siguiente forma
$$y^{-\alpha}y' + f(x)y^{1-\alpha} = g(x)$$
3. Hacer el cambio de variable $z = y^{1-\alpha}$, derivando obtenemos que
$$z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' \implies \frac{z'}{(1-\alpha)y^{-\alpha}} = y'$$
4. Reemplazamos en (2) con la nueva variable
$$\frac{1}{1-\alpha}z' + f(x)z = g(x)$$
5. Dejamos z' "despejado"
$$z' + (1-\alpha)f(x)z = g(x)(1-\alpha)$$
6. Resolver la EDO como una EDO lineal de primer orden
7. Deshacer el cambio de variable.

Ejemplo 2. Resuelva la siguiente Ecuacion diferencial

$$y' + \frac{4}{x}y = x^3y^2, x > 0$$

1. Lo primero que haremos sera reconocer que es una EDO de Bernoulli con $\alpha = 2$, $f(x) = \frac{4}{x}$ y $g(x) = x^3$.
2. Multiplicamos por y^{-2}
$$y^{-2}y' + \frac{4}{x}y^{-1} = x^3$$

3. Hacemos el cambio de variable $z = y^{1-2} = y^{-1}$, luego tenemos que $z' = -y^{-2}y' \implies y' = -y^2 z'$
4. Reemplazamos en la EDO
$$-y^{-2}y^2 z' + \frac{4}{x}z = x^3 \iff -z' + \frac{4}{x}z = x^3$$
5. Despejamos z', en este caso solo hay que multiplicar por -1
$$z' - \frac{4}{x}z = -x^3$$
6. Ahora resolvemos la EDO lineal de primer orden que nos queda. Notemos que el factor integrante viene dado por
$$\mu(x) = e^{\int -\frac{4}{x}dx}$$
Calculemos la integral
$$\int -\frac{4}{x}dx = -4\int \frac{1}{x}dx = -4\ln(x) = \ln(x^{-4})$$
Luego el factor integrate es
$$\mu(x) = e^{\ln(x^{-4})} = x^{-4}$$
Por la formula de Leibniz, tenemos que la solucion a la EDO viene dada por
$$z(x) = \frac{1}{\mu(x)}(\int \mu(x)g(x)dx) = x^4(\int x^{-4}(-x^3))$$
Hacemos la integral
$$\int x^{-4}(-x^3)dx = -\int x^{-1}dx = -\int \frac{1}{x}dx = -\ln(x) + C$$
Por lo que la solucion a la edo en terminos de z viene dada por
$$z(x) = x^4(C - \ln(x))$$
7. Deshacemos el cambio de variable
$$y^{-1}(x) = z(x) = x^4(C - \ln(x)) \implies y(x) = \frac{1}{x^4(C - \ln(x))}$$