

TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA

AYUDANTE: JORGE BRAVO

Enunciado del Teorema

Teorema 0.1 (Función Implícita). Sea

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

una función de clase \mathcal{C}^1 . Sea $(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ un punto tal que se cumpla que

$$f(a, b) = 0$$

y que también se cumpla que $D_y f(a, b)$ sea invertible (equivalente a que su determinante sea distinto de 0). Entonces existen vecindades $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ del punto a y $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^m$ del punto b tal que se tiene lo siguiente

1. Existe la siguiente función de clase \mathcal{C}^1

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^m \\ x &\mapsto y(x) \end{aligned}$$

tal que se tiene que $f(x, \varphi(x)) = 0, \forall x \in \mathcal{U}$

2. Se tiene la siguiente igualdad para la derivada de φ en el punto a

$$D\varphi(a) = -(D_y f(a, b))^{-1} Df(a, b)$$

Problemas Resueltos

Problema 1. Muestre que el sistema

$$\begin{aligned} x^3 + uy^2 + v &= 0 \\ y^3 + yv + x^2 &= 0 \end{aligned}$$

define a u y v como funciones de x e y en vecindades de los puntos $(x, y) = (0, 1)$ y $(u, v) = (1, -1)$. Sea $w = (1, 1)$, determine la derivada direccional de $v = v(x, y)$ en el punto $(0, 1)$ en la dirección de w .

Solución 1. Lo primero que queremos ver es que u y v se definen como funciones implícitas cerca del punto $(x, y, u, v) = (0, 1, 1, -1)$. Notemos que tenemos 2 ecuaciones, 2 variables “conocidas” (independientes) y 2 variables “desconocidas” (dependientes), por lo tanto nos armamos la siguiente función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ ((x, y), (u, v)) &\mapsto (x^3 + uy^2 + v, y^3 + yv + x^2) \end{aligned}$$

Darse cuenta que f es de clase \mathcal{C}^{-1} por álgebra de funciones \mathcal{C}^1 . Notemos además que $f((0, 1), (1, -1)) = (0, 0)$ y veamos cuales derivadas tenemos que calcular para aplicar el teorema de la función implícita.

$$Df((0, 1), (1, -1))_{2 \times 4} = \left[\begin{array}{cc|cc} \partial_x f_1 & \partial_y f_1 & \partial_u f_1 & \partial_v f_1 \\ \partial_x f_2 & \partial_y f_2 & \partial_u f_2 & \partial_v f_2 \end{array} \right]_{((x,y),(u,v))=((0,1),(1,-1))}$$

Como despues nos piden obtener la derivada direccional de $v(x, y)$ necesitaremos todas las derivadas asi que calculemos todas de al tiro.

$$Df((0, 1), (1, -1))_{2 \times 4} = \left[\begin{array}{cc|cc} 3x^2 & 2uy & y^2 & 1 \\ 2x & 3y^2 + v & 0 & y \end{array} \right]_{((x,y),(u,v))=((0,1),(1,-1))} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (1)$$

Recordemos que siempre, si dejamos las variables que no conocemos a la derecha, la matriz de la derecha sera $D_{(u,v)} f((0, 1), (1, -1))$, cuando le calculamos el determinante a esa matriz, es decir a $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, nos da 1 y por tanto es invertible.

Por lo tanto, por el teorema de la función implícita, existen vecindades $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ de $(0, 1)$ y $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$ de $(1, -1)$ y la siguiente función

$$\begin{aligned}\varphi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (u(x, y), v(x, y))\end{aligned}$$

La cual cumple que

$$f((x, y), (\varphi(x, y))) = 0, \forall (x, y) \in \mathcal{U}$$

Es decir que φ define de manera implícita a u y v en función de x e y .

También sabemos que la derivada de φ en el punto $(0, 1)$ viene dada por

$$\begin{bmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{bmatrix}_{(x,y)=(0,1)} = D\varphi(0, 1) = -(D_{(u,v)}f((0, 1), (1, -1)))^{-1} D_{(x,y)}f((0, 1), (1, -1)) \quad (2)$$

Ahora queremos calcular la derivada direccional de $v(x, y)$ en el punto $(0, 1)$ en la dirección de w . Para esto recordemos que la derivada direccional de una función diferenciables viene dada por

$$\frac{\partial v}{\partial w}(0, 1) = \nabla v(0, 1) \cdot \frac{w}{\|w\|} = [\partial_x v(0, 1) \quad \partial_y v(0, 1)] \cdot \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_x v(0, 1) + \partial_y v(0, 1)) \quad (3)$$

Por lo tanto solo nos falta conocer $\partial_x v(0, 1)$ y $\partial_y v(0, 1)$, pero estos los podemos obtener desde la derivada de φ desde la ecuación (2). Pero esas matrices ya las calculamos antes en la ecuación (1), por lo que solo tenemos que multiplicar y ver que nos da

$$D\varphi(0, 1) = -(D_{(u,v)}f((0, 1), (1, -1)))^{-1} D_{(x,y)}f((0, 1), (1, -1)) = - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto recordamos de (2) que

$$\begin{bmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{bmatrix}_{(x,y)=(0,1)} = D\varphi(0, 1) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $\partial_x v(0, 1) = 0$ y $\partial_y v(0, 1) = 2$

Reemplazando en (3) entonces obtenemos que

$$\frac{\partial v}{\partial w}(0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0 + 2) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Problema 2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}xu^2 + 2y^2v^2 + uvz &= 1 \\ vx^2 - y^2 + uv^2 &= 0\end{aligned}$$

Muestre que el sistema define funciones implícitas $u = u(x, y, z)$ y $v = v(x, y, z)$, en una vecindad del punto $(0, -1, 1, 1, -1)$. Justifique

Solución 2. Sabemos que cuando queremos ver que un sistema define de manera implícita a ciertas variables en funciones de otras, lo mejor que podemos hacer es usar el teorema de la función implícita. Notemos que “conocemos” 3 variables (x, y, z) y “desconocemos” a 2, (u, v) . Por lo tanto definimos la siguiente función

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ ((x, y, z), (u, v)) &\mapsto (xu^2 + 2y^2v^2 + uvz - 1, vx^2 - y^2 + uv^2)\end{aligned}$$

Notemos que esta función es de clase \mathcal{C}^1 pues es un polinomio en 5 variables (otra opción es argumentar por álgebra de funciones \mathcal{C}^1).

Luego evaluamos en el punto para ver que se satisface que $f((0, -1, 1), (1, -1)) = (0, 0)$

$$f((0, -1, 1), (1, -1)) = (0 + 2 - 1 - 1, -1 + 1) = (0, 0)$$

Por lo tanto nos falta verificar que la derivada con respecto a las variables que no conocemos tiene determinante distinto de 0, recordemos quien es esta derivada en el punto $((0, -1, 1), (1, -1))$

$$Df((0, -1, 1), (1, -1))_{2 \times 5} = \left[\begin{array}{ccc|cc} \partial_x f_1 & \partial_y f_1 & \partial_z f_1 & \partial_u f_1 & \partial_v f_1 \\ \partial_x f_2 & \partial_y f_2 & \partial_z f_2 & \partial_u f_2 & \partial_v f_2 \end{array} \right]_{((x,y,z),(u,v))=((0,-1,1),(1,-1))}$$

Recordemos que la derivada que nos interesa es la matriz que queda a la derecha (siempre que seamos ordenados y definamos a f de la manera correcta), la cual llamamos $D_{(u,v)}f$, dado que no necesitaremos las derivadas de $u(x, y, z)$ ni $v(x, y, z)$ no es necesario calcular las derivadas de la izquierda, por lo que solo calcularemos la que nos interesa.

$$\begin{aligned} D_{(u,v)}f((0, -1, 1), (1 - 1)) &= \begin{bmatrix} \partial_u f_1 & \partial_v f_1 \\ \partial_u f_2 & \partial_v f_2 \end{bmatrix}_{((x,y,z),(u,v))=((0,-1,1),(1-1))} \\ &= \begin{bmatrix} 2xu + vz & 4y^2v + uz \\ v^2 & x^2 + 2uv \end{bmatrix}_{((x,y,z),(u,v))=((0,-1,1),(1-1))} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Luego queremos saber si esta matriz es invertible, para poder aplicar el teorema de la función implícita, por lo que calcularemos su determinante para ver que es distinto de 0.

$$\det \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = 2 + 3 = 5$$

Por lo tanto es invertible. Por el teorema de la Función Implícita existen vecindades $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ de $(0, -1, 1)$ y $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$ de $(1, -1)$ de tal forma que existe la función

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (u(x, y, z), v(x, y, z)) \end{aligned}$$

que cumple que $f((x, y, z), \varphi(x, y, z)) = 0, \forall (x, y, z) \in \mathcal{U}$, en otras palabras, f define a u y v de manera implícita en función de x, y, z .