UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Semestre: 2025-1

Tarea I - Matematica Discreta

Solución 1. Dada una coloracion C sobre G, consideramos

$$f(C) = |\{e \in E(G) \mid \text{ Los extremos de } e \text{ tienen el mismo color } \}|$$

Tomemos una coloración que minimiza esta función. Supongamos que C no cumple la propiedad para algún vértice $v \in V(G)$, esto significa que más de la mitad de los vértices adyacentes tienen el mismo color, cambiando el color de v tenemos que la cantidad de aristas que conectan vértices del mismo color disminuyo, pues teníamos que más de la mitad de los vecinos de v tenían su color anterior. Por lo tanto una coloración que minimice f a de cumplir la propiedad que queremos.

Solución 2. Considere v un vértice con $d(v) = |N(v)|$. Luego hay una única arista por cada vecino, consideremos para cada arista e incidente en v un camino maximal P_v. Estos caminos han de terminar en una hoja, pues de otra forma lo podemos continuar, pues de otra forma se armaría un ciclo si llegaramos a un vértice que ya visitamos. Estos caminos no se pueden intersectar, pues si se intersectaran entonces en el primer vértice que se intersectan podríamos armar un ciclo con ambos caminos. Dado que tenemos $\Delta(G)$ caminos disjuntos que terminan en hojas, a lo menos tenemos $|\Delta(G)|$ hojas.

Solución 3. Notemos que resultado es trivial para K_3, pues K_3 es un triangulo por lo que 2 de las aristas tienen que tener el mismo color y por tanto esas 2 forman un árbol generador del mismo color. Consideramos K_{n+1}, para $n > 3$, considerando el subgrafo conformado por $G - v_{n+1}$, este es isomorfo a K_n y cumple la propiedad por lo tanto existe un árbol generador T del mismo color, digamos C, para este subgrafo. Si existiese una arista incidente en v_{n+1} de color C, entonces uniendo v_{n+1} al árbol mediante esa arista tendríamos el árbol generador. Si no existiese ninguna arista incidente en v_{n+1} de color C, entonces todas las aristas incidentes en v_{n+1} son del mismo color, esto pues dado e, f aristas incidentes en v_{n+1} estas conectan v_{n+1} con v_e y v_f respectivamente, dado que estas están conectadas por el árbol T, existe un camino $v_e, v_1, \ldots, v_f$, de color C, considerando los triángulos formados por vértices adyacentes en el camino y v_{n+1}, tenemos que las 2 aristas incidentes en v_{n+1} tienen que tener mismo color, pues ninguno puede tener color C. Repitiendo esto tenemos que todas las aristas que conectan v_{n+1} con vértices del camino tienen que tener el mismo color, en particular e y f. Por lo tanto en ese caso el árbol generador es el grafo generado por todos los vértices y las aristas incidente en v_{n+1}.