

# Tarea I - Matematica Discreta

**Solución 1.** Dada una coloracion  $C$  sobre  $G$ , consideramos

$$f(C) = |\{e \in E(G) \mid \text{Los extremos de } e \text{ tienen el mismo color}\}|$$

Tomemos una coloración que minimiza esta función. Supongamos que  $C$  no cumple la propiedad para algún vértice  $v \in V(G)$ , esto significa que más de la mitad de los vértices adyacentes tienen el mismo color, cambiando el color de  $v$  tenemos que la cantidad de aristas que conectan vértices del mismo color disminuye, pues teníamos que más de la mitad de los vecinos de  $v$  tenían su color anterior. Por lo tanto una coloración que minimice  $f$  a de cumplir la propiedad que queremos.

**Solución 2.** Considere  $v$  un vértice con  $d(v) = \Delta(T)$ . Luego hay una única arista por cada vecino, consideremos para cada arista  $e$  incidente en  $v$  un camino maximal  $P_v$ . Estos caminos han de terminar en una hoja, pues de otra forma lo podemos continuar. Estos caminos no se pueden intersectar, dado que si se intersectaran entonces en el primer vértice que se intersectan podríamos armar un ciclo con ambos caminos. Dado que tenemos  $\Delta(T)$  caminos disjuntos que terminan en hojas, a lo menos tenemos  $|\Delta(T)|$  hojas.

**Solución 3.** Notemos que resultado es trivial para  $K_3$ , pues  $K_3$  es un triangulo por lo que 2 de las aristas tienen que tener el mismo color y por tanto esas 2 forman un árbol generador del mismo color. Consideramos  $K_{n+1}$ , para  $n > 3$ , considerando el subgrafo conformado por  $G - v_{n+1}$ , este es isomorfo a  $K_n$  y cumple la propiedad por lo tanto existe un árbol generador  $T$  del mismo color, digamos  $C$ , para este subgrafo. Si existiese una arista incidente en  $v_{n+1}$  de color  $C$ , entonces uniendo  $v_{n+1}$  al árbol mediante esa arista tendríamos el árbol generador. Si no existiese ninguna arista incidente en  $v_{n+1}$  de color  $C$ , entonces todas las aristas incidentes en  $v_{n+1}$  son del mismo color, esto pues dado  $e, f$  aristas incidentes en  $v_{n+1}$  estas conectan  $v_{n+1}$  con  $v_e$  y  $v_f$  respectivamente, dado que estas están conectadas por el árbol  $T$ , existe un camino  $v_e, v_1, \dots, v_f$ , de color  $C$ , considerando los triángulos formados por vértices adyacentes en el camino y  $v_{n+1}$ , tenemos que las 2 aristas incidentes en  $v_{n+1}$  tienen que tener mismo color, pues ninguno puede tener color  $C$ . Repitiendo esto tenemos que todas las aristas que conectan  $v_{n+1}$  con vértices del camino tienen que tener el mismo color, en particular  $e$  y  $f$ . Por lo tanto en ese caso el árbol generador es el grafo generado por todos los vértices y las aristas incidente en  $v_{n+1}$ .

**Solución 4.** Consideremos  $v_0 \dots v_k$  un camino maximal y supongamos por contradiccion que no existe  $v_i$  en el camino de tal forma que  $v_i$  sea vecino de  $v_0$  y  $v_{i-1}$  vecino de  $v_k$ . Notemos que por la maximalidad del camino todos los vecinos de  $v_0$  y  $v_k$  han de estar en el camino. Luego tomemos los conjuntos

$$A = \{v_i \mid v_i \in \mathcal{N}(v_0)\} \subset \{v_1, \dots, v_k\}$$
$$B = \{v_{i-1} \mid v_i \in \mathcal{N}(v_k)\} \subset \{v_0, \dots, v_{k-1}\}$$

Por hipotesis estos conjuntos son disjuntos, por lo tanto

$$|A \cup B| = |A| + |B| \geq |V(G)| \implies A \cup B = V(G)$$

Por lo tanto obtenemos que  $v_0 \in B$ , es decir  $v_1 \in \mathcal{N}(v_k)$ . Por lo tanto  $v_1$  es vecino de  $v_k$  lo cual es una contradiccion, pues entonces  $v_1 \in A \cap B$ .

El ciclo que buscamos es

$$v_0 v_1 \dots v_{i-1} v_k v_{k-1} \dots v_i v_0$$

Si el camino no pasara por todos los vertices, entonces existe  $v$  que no esta en el camino y es adyacente a  $v_j$  en el camino. Si  $v_j = v_0$  o  $v_j = v_k$  entonces la contradiccion es directa. En caso que no, podemos obtener un camino a partir del ciclo que termine en  $v_j$  y tendríamos la contradiccion. Por lo tanto es hamiltoniano.

**Solución 5. .**

$$\ell(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} x(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 x(t)dt$$

$$||\ell||_{\star} \leq 1$$

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}([0, 1]), \lim_{n \rightarrow \infty} \ell(x_n) = 1 \wedge ||x_n||_{\infty} = 1$$