Certamen II - Variedades Diferenciables

Solución 1.

1. Notemos que

$$\begin{aligned} d(\iota_X \operatorname{vol_g}) &= d(\sqrt{\det(g_{ij})}\sum_{i=1}^{n}(-1)^i X^i dx^1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx^i} \wedge dx^n) \\ &= d(\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \sqrt{\det(g_{\ell j})} X^i dx^1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx^i} \wedge dx^n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}(\det(g_{\ell j}) X^i) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\operatorname{div} X = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{\det(g_{\ell j})} X^i)}{\sqrt{\det(g_{ij})}}$$

De lo anterior y la formula magica de Cartan tenemos que

$$f \operatorname{div} X \operatorname{vol_g} + \langle \operatorname{grad_g}(f), X\rangle \operatorname{vol_g} = f\mathscr{L}_X(\operatorname{vol_g}) + (\mathscr{L}_f X)(\operatorname{vol_g}) = \mathscr{L}_{fX}(\operatorname{vol_g}) = (d \circ \iota_{fX})(\operatorname{vol_g}) = \operatorname{div}(fX)\operatorname{vol_g}$$

Por lo tanto

$$f \operatorname{div} X + \langle \operatorname{grad_g}(f), X\rangle = \operatorname{div}(fX)$$

2. Notemos que

$$\int_M \operatorname{div} X \operatorname{vol_g} = \int_M d(\iota_X \operatorname{vol_g}) = \int_{\partial M} \iota_X \operatorname{vol_g}|_{\partial M}$$

Ahora consideremos en cada p una base ortonormal $(e_2, \dots, e_n)$ de $T_p\partial M$ tal que $\operatorname{vol_g}(p) = n \wedge e_2^* \wedge \cdots \wedge e_n^*$. Calculemos la contracción por X para $v_1, \dots v_{n-1} \in T_p\partial M$

$$\begin{aligned} (\hat{n} \wedge e_2^* \wedge \cdots \wedge e_n^*)(a\hat{n} + \sum_{i=2}^{n} X^i e_i, v_1, \dots, v_{n-1}) &= a(e_2^* \wedge \dots e_n^*)(v_1, \dots, v_{n-1}) + (\hat{n} \wedge e_2^* \wedge \cdots \wedge e_n^*)(\sum_{i=2}^{n} X^i e_i, \dots, v_{n-1}) \\ &= a(e_2^* \wedge \dots e_n^*)(v_1, \dots, v_{n-1}) \end{aligned}$$

Pues en el segundo termino nada tiene direccion normal por lo que al tomar $\hat{n}$ siempre dara 0 sin importar cual vector le demos.

Por lo tanto teneos que

$$\iota_X \operatorname{vol_g}|_{\partial M} = \langle X, \hat{n}\rangle \hat{\operatorname{vol}}_{\mathrm{g}}$$

Con lo que obtenemos

$$\int_M \operatorname{div} X \operatorname{vol_g} = \int_{\partial M} \langle X, \hat{n}\rangle \hat{\operatorname{vol}}_{\mathrm{g}}$$

3. Usando (1), tenemos que

$$\int_M \operatorname{div}(fX)\,\mathrm{vol_g} = \int_M f \operatorname{div} X \,\mathrm{vol_g} + \int_M \langle \mathrm{grad_g}(f), X\rangle\,\mathrm{vol_g}$$

Por (2) tenemos que

$$\int_M \operatorname{div}(fX)\,\mathrm{vol_g} = \int_{\partial M} \langle fX, \hat{n}\rangle \hat{\mathrm{vol}}_\mathrm{g} = \int_{\partial M} f\langle X, \hat{n}\rangle \hat{\mathrm{vol}}_\mathrm{g}$$

Juntando los dos tenemos que

$$\int_{\partial M} f\langle X, \hat{n}\rangle \hat{\mathrm{vol}}_\mathrm{g} = \int_M f \operatorname{div} X \,\mathrm{vol_g} + \int_M \langle \mathrm{grad_g}(f), X\rangle\,\mathrm{vol_g}$$

Reordenando obtenemos que

$$\int_M \langle \mathrm{grad_g}(f), X\rangle\,\mathrm{vol_g} = -\int_M f \operatorname{div} X \,\mathrm{vol_g} + \int_{\partial M} f\langle X, \hat{n}\rangle \hat{\mathrm{vol}}_\mathrm{g}$$