0.1 Espacios Metricos

Problema 1 (Abierto si y solo si Sequencialmente Abierto)**.** Sea (X, d) un espacio metrico, un conjunto $A \subset X$ se dice sequencialmente abierto si para toda sucesion $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a un elemento de A se tiene que

$$\exists n \in \mathbb{N}, k > n \implies x_k \in A$$

Demuestre que la nocion de abierto y secuencialmente abierto es la misma en espacios metricos.

Solucion. ($\implies$), Sea A un conjunto abierto y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesion tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x} \in A$$

Dado que A es abierto existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_\varepsilon(\overline{x}) \subset A \tag{1}$$

Por la convergencia tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N \implies x_n \in B_\varepsilon(\overline{x})$ pero tenemos por (1) que $x_n \in B_\varepsilon(\overline{x}) \implies x_n \in A$. Por lo tanto A es secuencialmente abierto.

($\Longleftarrow$) Procederemos pro contradiccion, Supongamos que A es secuencialemente abierto pero no abierto. Por lo tanto tenemos que $\exists x_0 \in A$, tal que

$$\forall\varepsilon > 0, B_\varepsilon(x_0) \cap A^c \neq \emptyset \tag{2}$$

Consideremos la siguiente sucesion, tomemos $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x_0) \cap A^c$, esta sucesion esta bien definida por (2). Se puede ver facilmente que $x_n \to x_0$. Pero he aqui la contradiccion pues $x_n \notin A, \forall n \in \mathbb{N}$ pero al suponer que A es secuencialmente abierto, tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N \implies x_n \in A$, en particular $x_{N+1} \in A \land x_{N+1} \notin A$. Lo cual es una contradiccion. □

Problema 2 (Continuidad topologica es equivalente a continuidad)**.** Una de las definiciones mas importantes de continuidad es la siguiente. $f : X \to Y$ se dice continua si para todo conjunto abierto V de Y se tiene que $f^{-1}(V)$ es un conjunto abierto en X.

Demostrar que la nocion de continuidad en espacios metricos es equivalente a la definida arriba.

Solucion. ($\implies$) Supongamos que $f : X \to Y$ es continua en el sentido de espacios metricos. Sea V un abierto en Y, sea $x \in f^{-1}(V)$, luego tenemos que $f(x) \in V$. Dado que V es abierto existe una vecindad de radio ε tal que $B_\varepsilon(f(x)) \subset V$, por la continuidad de f tenemos que existe $\delta > 0$ tal que si $d_X(x, y) < \delta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$, pero de esto ultimo tenemos que $f(y) \in B_\varepsilon(f(x)) \subset V$, por lo tanto $B_\delta(x) \subset f^{-1}(V)$, con lo que tenemos que $f^{-1}(V)$ es abierto.

($\Longleftarrow$) Supongamos que $f : X \to Y$ es continua en el sentido topologico. Sea $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, luego tenemos que $B_\varepsilon(f(x))$ es un conjunto abierto en Y por lo que $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ es un conjunto abierto tal que x esta contendio en el. Por lo tanto existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$, lo que significa que

$$y \in B_\delta(x) \implies f(y) \in B_\varepsilon(f(x)) \iff d_X(x, y) < \delta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Dado que x y ε fueron arbitrarios, se tiene que f es continua en el sentido de espacios metricos. □

0.2 Espacios de Banach

Problema 1. Demostrar que $(X, ||\cdot||)$ es una espacio de Banach si y solo si

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} x_n = x \in X$$

Solucion. ($\implies$) Sea X un Banach. Supongamos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| < \infty$$

Dado que esto es una serie convergente de numeros reales, esta es cauchy. Veamos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

es cauchy. Sin perdida de generalidad supongamos que $m \geq n$ luego

$$\lim_{n,m\to\infty} ||\sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{m} x_k|| = \lim_{n,m\to\infty} ||\sum_{k=n+1}^{m} x_k|| \leq \lim_{n,m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{m} ||x_k|| = 0$$

La ultima igualdad viene de que la series de las normas es cauchy □

0.3 Topologia

Problema 1. De un ejemplo de un espacio topologico donde un conjunto abierto no sea secuencialmente abierto.

Solucion. □

Problema 2. Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topologico tal que $B \subset X$ sea un subconjunto denso en X. Si A es un conjunto denso en $(B, \mathscr{T}_B)$, donde $\mathscr{T}_B$ es la topologia inducida de X en B, demostrar que A es denso en $(X, \mathscr{T})$

Solucion. Sea $\theta \in \mathscr{T}, \theta \neq \emptyset$, dado que B es denso en X tenemos que

$$\theta \cap B \neq \emptyset \tag{3}$$

Pero sabemos que $\theta \cap B \in \mathscr{T}_B$ y de (3) sabemos que es no vacio, por lo tanto dado que A es denso en $(B, \mathscr{T}_B)$ tenemos que

$$(\theta \cap B) \cap A \neq \emptyset$$

Pero $\theta \cap B \cap A \subset \theta \cap A$, por lo tanto $\theta \cap A \neq \emptyset$. Lo que significa que A es denso en $(X, \mathscr{T})$ □

Problema 3. Demostrar que si $f : X \to Y$ es una funcion continua y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesion convergente en X entonces

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$$

.

Solucion. Sea $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Sea ν una vecindad de $f(x)$, dado que f es continua tenemos que el conjunto $f^{-1}(\nu)$ es abierto en X, dado que ν es vecindad de $f(x)$ tenemos que $x \in f^{-1}(\nu)$. Dado que $f^{-1}(\nu)$ es abierto, este es vecindad de todos sus puntos por lo que $f^{-1}(\nu)$ es vecindad de x, dado que $x_n \to x$ tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N \implies x_n \in f^{-1}(\nu)$ pero esto implica que

$$n > N \implies f(x_n) \in \nu$$

Dado que ν fue arbitrario tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

Que es justo lo que queriamos demostrar. $\square$

Problema 4. Supongamos que X satisface el primer axioma de contabilidad y que se tiene que para toda sucesion convergente en X entonces la funcion $f : X \to Y$ cumple lo siguiente

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$$

Demostrar que f es continua.

Solucion. Procedamos por contradiccion, por lo tanto f no es continua en un punto x. Sea V una vecindad de $f(x)$ $\square$

Problema 5. De un ejemplo donde se tiene que para toda sucesion convergente en X se tiene que la funcion $f : X \to Y$ cumple que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$$

pero f no sea continua