0.1 Teorema de Stokes

Enunciamos para la completitud de este documento el teorema de Stokes

Teorema 1 (Stokes)**.** *Sea S una superficie orientada, suave por partes y acotada por una curva C la cual es cerrada y simple por partes. Sea $F : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ donde A es subconjunto abierto de $\mathbb{R}^3$ que contiene a S. Entonces*

$$\int_C F \cdot dr = \iint_S \nabla \times F dS$$

Problema 1. Usando el teorema de Stokes, calcular la integral de linea $\oint_C x^2y^3dx + dy + zdz$ donde C es la curva $x^2 + y^2 = R^2, z = 0$ con $R > 0$, recorrida en sentido antihorario

Solucion. Notemos que la curva C es cerrada, simple y suave. Esta curva encierra a la superficie $S : x^2 + y^2 \leq R^2, z = 0$ entonces por el teorema de Stokes tenemos que

$$\iint_S \nabla \times F dS = \oint_C F dr$$

Calculemos $\nabla \times F$

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x^2y^3 & 1 & z \end{vmatrix}$$

Consideremos la siguiente $\mathcal{C}^\infty$ parametrizacion de S

$$\varphi : [0, 2\pi] \times [0, R] \to \mathbb{R}^3$$
$$(\theta, r) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, 0)$$

Donde tenemos que

$$\hat{n} = \varphi_\theta \times \varphi_r$$

$$\varphi_\theta = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0)$$
$$\varphi_r = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$$

Por lo tanto el vector normal es

$$\hat{n} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -r)$$

Por lo tanto tenemos que

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_D (0, 0, 3r^2 \cos^2(\theta) r^2 \sin^2(\theta)) \cdot (0, 0, -r) dA$$

Calculemos la integral, donde el dominio es el dominio de la parametrizacion entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_0^R -3r^5\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)drd\theta &= -\frac{R^6}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)d\theta \\
&= -\frac{R^6}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2(\theta)(1-\cos^2\theta)d\theta \\
&= -\frac{R^6}{2}(\pi - \int_0^{2\pi}\cos^4\theta d\theta) \\
&= -\frac{R^6\pi}{8}
\end{aligned}$$

□

Problema 2. Calcule $\oint_C x\sin x - 2y^2dx + y\cos y - 2zdy + \tan z - 2xdz$ donde C es la interseccion de $4x^2+5y^2+z^2=36$ con $z=2y$

Solucion. Notemos que C es una curva cerrada, simple y suave. Podemos ocupar el teorema de Stokes por lo tanto

$$\oint_C Fdr = \iint_S (\nabla\times F)dS$$

Calculemos el rotor

$$\nabla\times F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x\sin x - 2y^2 & y\cos y - 2z & \tan z - 2x \end{vmatrix} = (2,2,4y)$$

Consideremos la siguiente parametrizacion, con las variaciones por determinar

$$\varphi(x,y) = (x,y,2y)$$

donde sabemos que la normal es

$$\hat{n} = (-f_x, -f_y, 1) = (0,-2,1)$$

Por lo tanto

$$\iint_S (\nabla\times F)\cdot\hat{n}dS = \iint_D -4+4ydA$$

Intersectando las 2 superficies obtenemos que

$$4x^2+9y^2\leq 36$$

Con el siguiente cambio de coordenadas se tiene que

$$\begin{aligned}
x(r,\theta) &= 3r\cos(\theta) \\
y(r,\theta) &= 2r\sin(\theta)
\end{aligned}$$

con $r\in[0,1], \theta\in[0,2\pi]$

y el jacobiano es

$$J = \begin{vmatrix} 3\cos(\theta) & -3r\sin(\theta) \\ 2\sin(\theta) & 2r\cos(\theta) \end{vmatrix} = 6r$$

Por el teorema de cambio de coordenadas

$$\iint_D -4 + 4ydA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (-4 + 8r\sin\theta)6rdrd\theta = -24\pi$$

$\square$

Problema 3. Considere C la curva de interseccion entre las superficies $S_1 : x + y + z = 1$ y $S_2 : z = 2 - x^2 - y^2$. Calcule el trabajo efectuado por el campo de fuerzas

$$F(x, y, z) = (yz, e^{y^3}, \cos(z) + y)$$

a lo largo de la curva C.

Solucion. Como ocuparemos el Teorema de Stokes, calcularemos el rotor primero

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ yz & e^{y^3} & \cos(z) + y \end{vmatrix} = (1, y, -z)$$

Calculemos la curva interseccion

$$\begin{aligned} 1 - x - y &= 2 - x^2 - y^2 \\ x^2 - x + 1 + y^2 - y &= 2 \\ (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Luego la curva de interseccion esta parametrizada por

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{\frac{3}{2}}\cos(t) + \frac{1}{2} \\ y(t) &= \sqrt{\frac{3}{2}}\sin(t) + \frac{1}{2} \\ z(t) &= -\sqrt{\frac{3}{2}}(\cos(t) + \sin(t)) \end{aligned}$$

con $t \in [0, 2\pi]$. Por el teorema de Stokes $\square$

Problema 4. Determine el trabajo ejercido por el campo vectorial

$$F(x, y, z) = (\cos(x^2) - 2y, e^y - 2z, \sin(z^6) - 2x)$$

a lo largo de la curva C que se obtiene de la interseccion del elipsoide $9x^2 + 3y^2 + \frac{z^2}{4} = 36$ con el plano $z = 2y$

Solucion. Ocuparemos el teorema de Stokes

Primero calcularemos el rotacional

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \cos(x^2) - 2y & e^y - 2z & \sin(z^6) - 2x \end{vmatrix} = (2, 2, 2)$$

Ocuparemos la parametrizacion natural, luego

$$\Phi(x, y) = (x, y, 2y)$$

Entonces tenemos que

$$\int_C F dr = \iint_S \nabla \times F dS$$

Tenemos que la integral de superficie es

$$\iint_S \nabla \times F dS = \iint_{R_{xy}} (2, 2, 2) \cdot (0, -2, 1) dA = \iint_{R_{xy}} -2 dA = -12\pi$$

$\square$

Problema 5. Dado $F(x, y, z) = (\cosh y, zx^2, x)$ y S la superficie limitada por la curva Γ, obtenida de la intersecion

$$S_1 : x + y = 2 \wedge S_2 : x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$$

orientada contrareloj vista desde el origen. Calcule $\iint_S \nabla \times F dS$

Solucion. Veamos quien es Γ

$$\begin{aligned} x^2 + (2 - x)^2 + z^2 &= 4 \\ x^2 + 4 - 4x + x^2 + z^2 &= 4 \\ 2x^2 - 4x + z^2 &= 0 \\ 2(x^2 - 2x) + z^2 &= 0 \\ 2(x - 1)^2 + z^2 &= 2 \\ (x - 1)^2 + \frac{z^2}{2} &= 1 \end{aligned}$$

Luego la parametrizacion de esta curva es

$$\Phi(r, \theta) = (r\cos(\theta) + 1, 1 - r\cos(\theta), \sqrt{2} r \sin(\theta)$$

Calculemos le rotor

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \cosh y & zx^2 & x \end{vmatrix} = (-x^2, -1, 2zx - \sinh(y))$$

Ahora calculemos la normal

$$\hat{n} = \Phi_r \times \Phi_\theta = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos(\theta) & -\cos(\theta) & \sqrt{2}\sin(\theta) \\ -r\sin(\theta) & r\sin(\theta) & \sqrt{2}r\cos(\theta) \end{vmatrix} = (-\sqrt{2}r, -\sqrt{2}r, 0)$$

Entonces

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r\cos(\theta)+1)^2\sqrt{2}r + \sqrt{2}r dr d\theta =$$
$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{2}r(r^2\cos^2(\theta) + 2r\cos(\theta) + 2) dr d\theta =$$
$$\frac{\pi\sqrt{2}}{4} + 2\sqrt{2}\pi = \frac{9}{4}\sqrt{2}\pi$$

□

Problema 6 (Certamen MAT024 2016-2)**.** Determine la magnitud de la circulacion del campo

$$F(x,y,z) = (x\cos(x^2) - y, y\sin(y^3) - z, h(z) - x), h \in \mathcal{C}^\infty$$

a lo largo de la curva C que se obtiene de la interseccion del elipsoide $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ con el plano $y = 2z - x + 1$

Solucion. Dado que C es una curva simple podemos usar el teorema de Stokes. Calculemos el rotor

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x\cos(x^2) - y & y\sin(y^3) - z & h(z) - x \end{vmatrix} = (1,1,1)$$

Dado que la superficie C esta dentro del plano obtenemos que

$$\hat{n} = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})$$

Por lo tanto

$$\int_C F dr = \iint_S (1,1,1)\cdot(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}) dS = 0$$

□

Problema 7 (Precertamen MAT024 2019)**.** Usar el teorema de Stokes para evaluar la integral de linea

$$\int_C -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz$$

donde C es la interseccion del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $x + y + z = 1$, y la orientacoin de C es en sentido contrario a las manecillas del reloj, en el plano xy.

Solucion. Notemos que el campo vectorial dado es de clase $\mathcal{C}^1$, la curva es cerrada, simple y suave. Tambien notar que la superficie es orientable, suave y acotada por la curva C. Por lo tanto podemos ocupar el teorema de Stokes. Calculemos el rotacional

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -y^3 & x^3 & -z^3 \end{vmatrix} = (0, 0, 3x^2 + 3y^2)$$

Consideremos la siguiente parametrizacion de la superficie

$$F(x, y) = (x, y, 1 - x - y)$$

Luego la normal es

$$\hat{n} = (1, 1, 1)$$

Entonces por el teorema de Stokes

$$\int_C -y^3dx + x^3dy - z^3dz = \iint_S \nabla \times F dS = \iint_D 3x^2 + 3y^2 dA = 3\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3 dr d\theta$$

Por lo tanto la solucion es

$$\int_C -y^3dx + x^3dy - z^3dz = \frac{3\pi}{2}$$

□

Problema 8 (Precertamen MAT024 2019)**.** Sea C una curva cerrada simple la cual es borde de una superficie S de area λ, orientada respecto a la normal $\hat{n} = (1, 0, 1)$. Calcule el trabajo de un campo vectorial F cuyo rotacional es $\nabla \times F = (1, 1, 1)$ a lo largo de C.

Solucion. Se tienen todas las hipotesis del teorema de Stokes, ocuparemos este.

$$\oint_C F dr = \iint_S \nabla \times F dS = 2\iint_D dA = 2\lambda$$

□

Problema 9 (Precertamen MAT024 2019)**.** Considere la curva C definida por la interseccion de las superficies

$$S_1 : 9x^2 + 4y^2 = 36, S_2 : z = 2x$$

y el campo $F(x, y, z) = (z\cos(y^2) - 2z, -2xyz\sin(y^2) - 2x, x\cos(y^2) - 2y)$, encuentre el trabajo realizado por F a lo largo de la curva.

Solucion. Trivial □

Problema 10 (Certamen MAT024 2023-1)**.** Use el teorema de Stokes para calcular

$$\int_C (z^2, -xz - yz, z) \cdot dr$$

Donde C es la curva definida como la interseccion del plano $x + y + z = \frac{3}{2}$ con el paraboloide $z = x^2 + y^2$

Solucion. Notemos que se cumplen todas las hipotesis de Stokes

Parametrizamos la superficie de la siguiente forma

$$f(x,y) = (x, y, \frac{3}{2} - x - y)$$

Donde la normal es

$$\hat{n} = (1,1,1)$$

Luego veamos la proyeccion sobre el plano XY

$$\frac{3}{2} - x - y = x^2 + y^2 \iff \frac{3}{2} = x^2 + x + \frac{1}{4} + y^2 + y + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \iff 2 = (x + \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2$$

Luego calculemos el rotor

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ z^2 & -xz - yz & z \end{vmatrix} = (x + y, 2z, -z)$$

Entonces por el teorema de Stokes tenemos

$$\int_C F \cdot dr = \iint_S \nabla \times F dS$$

Entonces tenemos

$$\iint_S (x + y, 2z, -z) \cdot (1,1,1) dS = \iint_D x + y + z dA$$

Ocupando polares para parametrizar el dominio

$$x(r,\theta) = r\cos\theta - \frac{1}{2}$$
$$y(r,\theta) = r\sin\theta - \frac{1}{2}$$
$$z(r,\theta) = \frac{5}{2} - r\cos\theta - r\sin\theta$$

Donde el jacobiano es el jacobiano de polares, es decir r. Notemos que no existen mas restricciones por lo que $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq r \leq \sqrt{2}$.

$$\iint_D x + y + z dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (r\cos\theta - \frac{1}{2} + r\sin\theta - \frac{1}{2} + \frac{5}{2} - r\cos\theta - r\sin\theta) r dr d\theta \quad (1)$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{3}{2} r dr d\theta \quad (2)$$
$$= 3\pi \quad (3)$$

$\square$

0.2 Teorema de la divergencia

Enunciamos para la completitud de este documento el teorema de la Divergencia.

Teorema 2. *Divergencia Sea V una region solida y simple donde S es la superficie frontera de V, definida con orientacion positiva. Sea $F : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ donde A es subconjunto abierto de $\mathbb{R}^3$ que contiene a V. Entonces*

$$\iint_S F dS = \iiint_V \nabla \cdot F dV$$

Problema 1. Usando el teorema de la divergencia calcule $\iint_S F \cdot \hat{n} dS$ donde S es la superficie lateral del tronco del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ limitado por los planos $z = 1$ y $z = 4$ y $F(x, y, z) = (x^2 + 2z, y^2 + z^2, 1)$ y $\hat{n}$ es la normal exterior.

Solucion. Consideremos la siguiente superficie $S^\star = S \cup S^{T_1} \cup S^{T_2}$ donde tenemos que

$$S^{T_1} : x^2 + y^2 \leq 16, z = 4$$
$$S^{T_2} : x^2 + y^2 \leq 1, z = 1$$

Dado que $S^\star$ es una superficie cerrada, podemos ocupar el teorema de Gauss el cual dice

$$\iint_{S^\star} F \cdot \hat{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot F dV$$

Calculemos la divergencia

$$\nabla \cdot F = 2x + 2y$$

Calculemos la integral. Calculemos las variaciones en las coordenadas cilindricas

$$0 \leq r \leq z$$
$$1 \leq z \leq 4$$
$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Y sabemos que el jacobiano de las cilindricas es r. Calculemos la integral

$$\iiint_V \nabla \cdot F dV = \int_0^{2\pi} \int_1^4 \int_0^z (2r \cos\theta + 2r \sin\theta) r dr dz d\theta = 0$$

Por el teorema de Gauss entonces tenemos que

$$\iint_S F \cdot \hat{n} dS + \iint_{S^{T_1}} F \cdot \hat{n} dS + \iint_{S^{T_2}} F \cdot \hat{n} dS = 0$$

Calculemos la segunda integral.

$$\iint_{S^{T_1}} F \cdot \hat{n} dS = \int_0^{2\pi} \int_0^1 -r dr d\theta = -\pi$$

Calculemos la tercera integral.

$$\iint_{S^{T_2}} F \cdot \hat{n} dS = \int_0^{2\pi} \int_0^4 r dr d\theta = 16\pi$$

Concluyendo asi que

$$\iint_S F \cdot \hat{n} dS = -15\pi$$

$\square$

Problema 2. Sea $F(x,y,z) = (y^2 - z^2, x^2 - y^3, 3zy^2 + z^2 e^{x^2+y^2})$ y S el contorno de la region encerrada por las superficies $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, $z = 0$, $z = 3$, calcule $\iint_s FdS$

Solucion. Cerremos la superficie para poder ocupar el teorema de la divergencia. Definamos la siguiente superficie

$$S^\star = S \cup S^{T_1} \cup S^{T_2}$$

donde $S^{T_1} : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$ y $S^{T_2} : x^2 + y^2 \leq 10, z = 3$

Ahora por la formula de Ostrogradski tenemos que

$$\iint_{S^\star} FdS = \iiint_V \nabla \cdot FdV$$

Calculemos la divergencia

$$\nabla \cdot F = 2ze^{x^2+y^2}$$

Ocupando coordenadas cilindricas

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\sin(\theta) \\ z &= z \end{aligned}$$

con $0, \leq z \leq 3$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq \sqrt{1+z^2}$ y el Jacobiano es r entonces

$$\begin{aligned} \iiint_V 2ze^{x^2+y^2} dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^{\sqrt{1+z^2}} 2zre^{r^2} drdzd\theta \\ &= 2\pi \int_0^3 z(e^{1+z^2} - 1)dz \\ &= \mathcal{E} \end{aligned}$$

$$\iint_S FdS + \iint_{S^{T_1}} FdS + \iint_{S^{T_2}} FdS = \mathcal{E}$$

$\square$

Problema 3. Si $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, z \geq \sqrt{x^2+y^2}\}$, donde $a > 0$. Calcule el flujo a traves de la superficie frontera de Ω en sentido normal exterior a esta del campo, donde el campo es $F(x,y,z) = (x\cos^2(z), y\sin^2(z), e^x\sin(y-x) + z)$

Solucion. Notemos que la frontera del volumen dado es cerrada, simple regular y suave. $F \in \mathcal{C}^\infty$, calculemos la divergencia.

$$\nabla \cdot F(x,y,z) = \cos^2(z) + \sin^2(z) + 1 = 2$$

Entonces por el teorema de Gauss tenemos que el flujo es el siguiente

$$\Phi = \iint_S F dS = \iiint_V \nabla \cdot F dV = 2 \iiint_V dV$$

Aplicando coordenadas esfericas obtenemos

$$\begin{gathered} x = \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ y = \rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ z = \rho \cos(\varphi) \\ J = \rho^2 \sin(\varphi) \end{gathered}$$

Entonces Ω queda de la siguiente forma

$$\rho^2 \leq a^2 \wedge \cos(\varphi) \geq \sin(\varphi)$$

Luego nuestras variaciones son

$$\begin{gathered} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq a \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \end{gathered}$$

Entonces nuestra solucion es

$$2 \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 \sin(\varphi) dV = 4\pi \frac{a^3}{3}(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$$

□

Problema 4. Considere la superficie $S = S_1 \cup S_2$ donde

$$\begin{gathered} S_1 : x^2 + y^2 + 2(x - 2y) + 4 \leq 0, z = x + 2 \\ S_2 : x^2 + y^2 + 2(x - 2y) + 4 = 0, x + 2 \leq z \leq 4 + 2x \end{gathered}$$

Calcule el flujo de $F(x, y, z) = (z, y, x)$ a traves de la superficie S.

Solucion. Escribamos de otra forma la primera superficie

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 \leq 0 \implies x^2 + y^2 + 2z - 4y \leq 0 \implies x^2 + (y - 2)^2 + 2z \leq 4$$

La cual queda de la siguiente forma

$$-\frac{1}{2}(x^2 + (y - 2)^2) + 2 \leq z$$

$$2x + 4 = -x^2 - y^2 + 4y$$

Por lo tanto

$$-\frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 4y) \leq z \leq -(x^2 + y^2 - 4y)$$

□

Problema 5. Calcular $\iint_S F dS$ donde S es la superficie $x^2+y^2+z^2-2\sqrt{x^2+y^2}=0$ con $z\geq 0$ y $F(x,y,z)=(x,y,z)$

Solucion. Veamos quien es en verdad S mediante el uso de coordenadas esfericas

$$\rho^2 - 2\sin(\varphi) = 0 \implies \rho = 2\sin(\varphi)$$

Dado que

$$z \geq 0 \implies \cos(\varphi) \geq 0 \implies \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

□

Problema 6 (Precertamen MAT024 2019)**.** Calcule el flujo del campo vectorial

$$F(x,y,z) = (2x, z - \frac{zx}{x^2+y^2+z^2}, \frac{xy}{x^2+y^2+z^2})$$

a traves de la superficie S descrita por

$$S : \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} + (z-2)^2 = 1$$

orientada respecto a la normal unitaria exterior.

Solucion. Notemos que la superficie encierra un solido V el cual es simple. El campo es clase $\mathcal{C}^1$. Por lo tanto podemos usar el teorema de la divergencia

$$\iint_S F dS = \iiint_V \nabla \cdot F dV$$

Calculemos la divergencia de F.

$$\nabla \cdot F = 2 + \frac{2zxy}{(x^2+y^2+z^2)^2} - \frac{2xyz}{(x^2+y^2+z^2)^2} = 2$$

Entonces tenemos

$$\iint_S F dS = 2 \iiint_V dV = 16\pi$$

□

Problema 7 (Precertamen MAT024 2019)**.** Considere el campo vectorial

$$F(x,y,z) = (x, x(y-1), xyz)$$

y la superficie S definida como

$$S : x^2+y^2 = 16, 0 \leq z \leq 4-y$$

Calcule el flujo a traves de S con respeto a la normal exterior.

Solucion. Consideremos la siguiente superficie $S^{\star} = S \cup S_1 \cup S_2$ donde tenemos que

$$S_1 : x^2 + y^2 \leq 16 \wedge z = 0$$
$$S_2 : x^2 + y^2 \leq 16 \wedge z = 4 - y$$

Podemos ocupar el teorema de Gauss para $S^{\star}$ pues es cerrada y encierra un solido V simple. Notemos que $F \in \mathcal{C}^1$. Calculemos la divergencia

$$\nabla \cdot F = 1 + x + xy$$

Ahora notemos que

$$\iint_S F dS = \iiint_V \nabla \cdot F dV - \iint_{S_1} F dS - \iint_{S_2} F dS$$

El resto es solo calcular. □

Problema 8 (Precertamen MAT024 2019)**.** Considere las superficie S_1 y S_2 definidas como

$$S_1 : x^2 + y^2 \leq 4, z = 1$$
$$S_2 : x^2 + y^2 = 4, 1 \leq z \leq 5.$$

Determinar el flujo del campo vectorial

$$F(x, y, z) = (y^2, x^2, z)$$

a traves de $S = S_1 \cup S_2$

Solucion. Consideremos la siguiente superficie $S^{\star} = S \cup S_3$ donde

$$S_3 : x^2 + y^2 \leq 4, z = 5$$

Donde $S^{\star}$ encierra un solido V simple. Calculemos la divergencia

$$\nabla \cdot F = 1$$

entonces

$$\iint_{S^{\star}} F dS = \iiint dV = 16\pi$$

Por lo tanto tenemos que

$$\iint_S F dS = 16\pi - \iint_{S^3} F dS$$

Calculemos la ultima integral. Consideremos la siguiente parametrizacion

$$\Phi(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta, 5)$$

Por lo tanto.

$$\Phi_r = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$
$$\Phi_\theta = (-r \sin\theta, r \cos\theta, 0)$$

entonces la normal es

$$\hat{n} = \Phi_r \times \Phi_\theta = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (0,0,r)$$

Por lo tanto tenemos que

$$\iint_{S^3} (x^2, y^2, z) \cdot (0,0,r) dS = 5\int_0^{2\pi}\int_0^2 r dr d\theta = 20\pi$$

Por lo tanto la integral que buscamos es

$$\iint_S F dS = -4\pi$$

□

Problema 9 (Certamen MAT024 2023-1)**.** Considere la superficie S dada por $z = 1 - x^2 - y^2$ con $z \geq 0$, orientada segun el vector normal que apunta hacia arriba. Use el teorema de Gauss, de forma adecuada, para calcular

$$\iint_S (x+z, -y, \frac{z^2}{2} + 1) dS$$

Considere cerrar la superficie S con la tapa T_A que es la parte del palno $z = 0$ con $x^2 + y^2 \leq 1$

Solucion. Consideremos la superficie

$$S^* = S \cup T_A$$

Notemos que esta superficie es cerrada. Se tienen todas las condiciones para el teorema de la divergencia por lo que

$$\iint_{S^*} (x+z, -y, \frac{z^2}{2}+1) dS = \iiint_V \nabla \cdot (x+z, -y, \frac{z^2}{2}+1) dV$$

Al calcular la divergencia obtenemos

$$\nabla \cdot F = 1 - 1 + z = z$$

parametrizemos de la siguiente forma

$$\Phi(x,y) = (x, y, 1 - x^2 - y^2)$$

Ocupemos coordenadas cilindricas

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z \end{aligned}$$

con $\theta \in [0, 2\pi]$, $r \in [0,1]$ y $0 \leq z \leq 1 - r^2$

$$\iiint_V z dV = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1-r^2} z dz dr d\theta = \frac{\pi}{6}$$

□

0.3 Sturm-Liouville

Problema 1. Resuelva el siguiente problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} x''(x) - 2x'(x) + \lambda x(x) = 0 \\ x(0) = 0 \\ x'(1) = x(1) \end{cases}$$

Solucion. La ecuacion caracteristica asociada al problema es

$$m^2 - 2m + \lambda = 0$$

Luego las soluciones vienen dadas por

$$m_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\lambda}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 - \lambda}$$

1. Caso $\lambda < 1$. Tenemos que $1 - \lambda > 0$ por lo tanto la solucion a la EDO viene dada por

   $$x(x) = Ae^{(1+\sqrt{1-\lambda})x} + Be^{(1-\sqrt{1-\lambda})x}$$

   Derivamos

   $$x'(x) = A(1 + \sqrt{1 - \lambda})e^{(1+\sqrt{1-\lambda})x} + B(1 - \sqrt{1 - \lambda})e^{(1-\sqrt{1-\lambda})x}$$

   Aplicando condiciones iniciales obtenemos

   $$A + B = 0$$
   $$A(1 + \sqrt{1 - \lambda})e^{1+\sqrt{1-\lambda}} + B(1 - \sqrt{1 - \lambda})e^{1-\sqrt{1-\lambda}} = Ae^{1+\sqrt{1-\lambda}} + Be^{1-\sqrt{1-\lambda}}$$

   Moviendo las cosas

   $$A\sqrt{1 - \lambda}e^{1+\sqrt{1-\lambda}} - B\sqrt{1 - \lambda}e^{1-\sqrt{1-\lambda}} = 0$$
   $$A(\sqrt{1 - \lambda}e^{1+\sqrt{1-\lambda}} + \sqrt{1 - \lambda}e^{1-\sqrt{1-\lambda}}) = 0$$
   $$A = 0 \implies B = 0$$

2. Caso $\lambda > 1$. Tenemos que $1 - \lambda < 0$ por lo tanto la solucion a la EDO viene dada por

   $$x(x) = e^x(A\cos(\sqrt{\lambda - 1}x) + B\sin(\sqrt{\lambda - 1}x))$$

   Aplicando la primera condicion inicial

   $$A = 0$$

   entonces

   $$x(x) = Be^x \sin(\sqrt{\lambda - 1}x)$$

   luego

   $$x'(x) = Be^x \sin(\sqrt{\lambda - 1}x) + Be^x\sqrt{\lambda - 1}\cos(\sqrt{\lambda - 1}x)$$

ocupando la segunda condicion inicial

$$Be^x\sqrt{\lambda-1}\cos(\sqrt{\lambda-1})=0$$

Como estamos buscando soluciones no nulas

$$\cos(\sqrt{\lambda-1})=0 \implies \sqrt{\lambda-1}=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

Por lo tanto los valores propios son

$$\lambda_n=(\frac{(1+2n)\pi}{2})^2+1$$

y las funciones propias son

$$x_n(x)=A_n\sin(\sqrt{\lambda_n-1}x)$$

3. Caso $\lambda=1$. Luego la solucion a la edo es

$$x(x)=Ae^x+Bxe^x$$

Aplicando la primera condicion inicial

$$A=0$$

Por lo tanto

$$x(x)=Bxe^x \implies x'(x)=Be^x+Bxe^x$$

Con la segunda condicion inicial tenemos

$$B=0$$

Soluciones triviales.

Por lo tanto las soluciones son

$$x_n(x)=A_n\sin(\sqrt{\lambda_n-1}x)$$

$$\lambda_n=(\frac{(1+2n)\pi}{2})^2+1$$

□

0.4 EDP

Problema 1. Resuelva la siguiente EDP mediante la tecnica de separacion de variables

$$\begin{cases} v_t &= v_{xx} \\ v(0,t) &= 0 \\ v_x(2,t) &= 0 \\ v(x,0) &= 5\sin(\frac{3\pi x}{4}) \end{cases}$$

Solucion. Por el metodo de separacion de variables planteamos la siguiente solucion.

$$v(x,t) = X(x)T(t)$$

Reemplazamos en la primera ecuacion

$$XT' = X''T \implies \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

Entonces tenemos la siguiente EDO.

$$\frac{T'}{T} = -\lambda \implies T_n(t) = A_n e^{-\lambda_n t}$$

Y obtenemos el siguiente problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} X'' + \lambda X & = 0 \\ X(0) & = 0 \\ X'(2) & = 0 \end{cases}$$

Donde la solucion vienen dada por

$$\lambda_n = (\frac{(n-\frac{1}{2})\pi}{2})^2$$
$$X_n(x) = \sin(\frac{(n-\frac{1}{2})\pi}{2} x)$$

Entonces la solucion formal a nuestra EDP es

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(\frac{(n-\frac{1}{2})\pi}{2})^2 t} \sin(\frac{(n-\frac{1}{2})\pi}{2} x)$$

Aplicando la condicion inicial obtenemos que

$$5\sin(\frac{3\pi}{4}x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\frac{(n-\frac{1}{2})\pi}{2} x)$$

Por la ortogonalidad de las eigenfunciones obtenemos que todos los $A_n = 0$ excepto cuando

$$\frac{3\pi}{4} = \frac{(n-\frac{1}{2})\pi}{2} \implies n = 2$$

en cuyo caso tenemos que $A_2 = 5$. Por lo tanto la solucion a nuestra EDP es

$$v(x,t) = 5e^{-\frac{9\pi^2}{16}t} \sin(\frac{3\pi}{4}x)$$

□

Problema 2. Resuelva la siguiente EDP mediante la tecnica de separacion de variables

$$\begin{cases} u_{tt} & = u_{xx} - u_t \\ u_x(0,t) & = 0 \\ u(\pi,t) & = 0 \\ u(x,0) & = 0 \\ u_t(x,0) & = 3\cos(\dfrac{5\pi}{2}) \end{cases}$$

Solucion. Por el metodo de separacion de variables tenemos que

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Reemplazando en la primera ecuacion obtenemos

$$XT'' = X''T - XT' \implies XT'' + XT' = X''T \implies \frac{T''}{T} + \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

Resolvamos primero la EDO que nos queda en T

$$T'' + T' + \lambda T = 0$$

esto es una EDO lineal de segundo orden, resolveremos mediante el polinomio caracteristico.

$$m^2 + m + \lambda = 0$$

donde las soluciones son

$$m = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\lambda}}{2}$$

Por lo tanto necesitamos saber el valor de λ. Resolvamos el problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} X'' + \lambda X & = 0 \\ X'(0) & = 0 \\ X(\pi) & = 0 \end{cases}$$

Donde la solucion viene dada por

$$\lambda_n = (n - \frac{1}{2})^2$$

$$X_n(x) = \cos((n - \frac{1}{2})x)$$

Volviendo a la EDO anterior obtenemos que dado que $\lambda_n \geq \frac{1}{4}$ las soluciones son

$$T_1(t) = Ae^{-\frac{1}{2}t} + Bxe^{-\frac{1}{2}t}$$

$$T_n(t) = e^{-\frac{1}{2}t}(A\cos(\sqrt{n^2 - nt}) + B\sin(\sqrt{n^2 - nt}))$$

Luego la solucion formal a nuestra EDP es □

Problema 3 (Precertamen 2020 MAT024)**.** Resuelva mediante el metodo de separacion de variables la siguiente EDP.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - u, & 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0 \\ u_x(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = \sin(x) & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Solucion. Por el metodo de separacion de variables tenemos que

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Luego nuestra EDP es

$$XT' = X''T - XT \implies \frac{T'}{T} + 1 = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

Resolvamos primero la EDO lineal en T

$$T' + (\lambda + 1)T = 0 \implies T_n(t) = A_n e^{-(\lambda+1)t}$$

Ahora resolvamos el siguiente problema de Sturm-Liouville que nos queda en X

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = 0 \\ X(\pi) = 0 \end{cases}$$

Donde nosotros sabemos que la solucion viene dada por

$$\lambda_n = (n - \frac{1}{2})^2$$

$$X_n(x) = \cos((n - \frac{1}{2})x)$$

Entonces nuestra solucion formal a la EDP es

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(\lambda+1)t} \cos((n - \frac{1}{2})x)$$

Aplicamos la condicion inicial y obtenemos

$$\sin(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos((n - \frac{1}{2})x)$$

Aplicamos Fourier

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x) \cos((n - \frac{1}{2})x) = \frac{8}{(-4n^2 + 4n + 3)\pi}$$

Por lo tanto la solucion a nuestra EDP es

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{-4n^2 + 4n + 3} e^{-(\lambda+1)t} \cos(\frac{2n-1}{2}x)$$

□

Problema 4 (Certamen 3 2020 MAT024)**.** Resuelva mediante el metodo de separacion de variables

$$\begin{cases} u_t & = u_{xx} - 6x \\ u(0,t) & = 3 \\ u_x(2,t) & = 2 \\ u(x,0) & = x^3 - 10x + 3 + 5\sin(\dfrac{3\pi x}{4}) \end{cases}$$

Solucion. Supondremos que la solucion es de la siguiente forma, donde $v(x,y)$ es solucion a un problema homogeneo y $\varphi(x)$ es una solucion particular

$$u(x,t) = v(x,t) + \varphi(x)$$

Reemplazando obtenemos lo siguiente

$$u_t = u_{xx} - 6x \implies v_t = v_{xx} + \varphi''(x) - 6x \implies \varphi''(x) = 6x$$

Pues supusimos que $v(x,t)$ es solucion a la EDP homogenea que viene dada por $v_t = v_{xx}$.

De las condiciones de borde obtenemos

$$u(0,t) = 3 \implies v(0,t) + \varphi(0) = 3 \implies \varphi(0) = 3$$
$$u_x(2,t) = 2 \implies v_x(2,t) + \varphi'(2) = 2 \implies \varphi'(2) = 2$$

Por lo tanto la solucion particular tiene que cumplir

$$\begin{cases} \varphi''(x) & = 6x \\ \varphi(0) & = 3 \\ \varphi'(2) & = 2 \end{cases}$$

Integrando 2 veces la primera ecuacion obtenemos que

$$\varphi(x) = x^3 + C_1 x + C_2$$

Aplicando las condiciones iniciales obtenemos que

$$C_2 = 3 \ \wedge \ C_1 = -10$$

Por lo tanto tenemos que la solucion particular es

$$\varphi(x) = x^3 - 10x + 3$$

Luego reemplazando en la condicion inical obtenemos que

$$u(x,0) = x^3 - 10x + 3 + 5\sin(\frac{3\pi x}{4}) \implies v(x,0) = 5\sin(\frac{3\pi x}{4})$$

Entonces tenemos que la solucion homogenea tiene que cumplir las siguiente EDP homogenea que viene dada por

$$\begin{cases} v_t & = v_{xx} \\ v(0,t) & = 0 \\ v_x(2,t) & = 0 \\ v(x,0) & = 5\sin(\dfrac{3\pi x}{4}) \end{cases}$$

Por el metodo de separacion de variables tenemos que $v(x,t) = X(x)T(t)$. Resolvamos la EDP. Reemplazando en la primera ecuacion

$$XT' = X''T \implies \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

Resolviendo la EDO en T tenemos

$$T' + \lambda T = 0$$

Entonces el polinomio caracteristico de la EDO es

$$m + \lambda = 0 \implies m = -\lambda$$

Por lo que la solucion viene dada por

$$T_n(t) = A_n e^{-\lambda_n t}$$

Ahora a partir de las condiciones de borde obtenemos el siguiente problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} X'' + \lambda X & = 0 \\ X(0) & = 0 \\ X'(2) & = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto la solucion viene dada por

$$\lambda_n = ((n - \frac{1}{2})\frac{\pi}{2})^2$$
$$X_n(x) = \sin((n - \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}x)$$

Ahora por superposicion tenemos que la solucion formal a la EDP homogenea es

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n t} \sin((n - \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}x)$$

Aplicando la condicion incial obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin((n - \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}x) = 5\sin(\frac{3\pi x}{4})$$

Por ortogonalidad de la funciones propias tenemos que $A_n = 0$ excepto cuando

$$(n - \frac{1}{2})\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4} \implies n = 2$$

donde $A_2 = 5$

Por lo tanto la solucion homogenea es

$$v(x,t) = 5e^{-\lambda_2 t}\sin(\frac{3\pi x}{4})$$

Entonces la solucion a nuestra EDP es

$$u(x,t) = v(x,t) + \varphi(x) = 5e^{-\lambda_2 t}\sin(\frac{3\pi x}{4}) + x^3 - 10x + 3$$

$\square$