0.1 Capitulo 1

Problema 1. Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\lim_{n\to\infty} z = w$ si y solamente si $\lim_{n\to\infty} \Re(z_n) = \Re(w)$ y $\lim_{n\to\infty} \Im(z_n) = \Im(w)$

Solucion. ($\implies$) Supongamos que $\lim_{n\to\infty} \Re(z_n) = \Re(w)$ y $\lim_{n\to\infty} \Im(z_n) = \Im(w)$, sea $\varepsilon > 0$, luego tenemos que existe N_1 tal que si $n > N_1$ entonces $|\Re(z_n) - \Re(w)| < \frac{\varepsilon}{2}$ y de manera analoga existe N_2 tal que si $n > N_2$ entonces $|\Im(z_n) - \Im(w)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tomemos $N = \max\{N_1, N_2\}$, luego tenemos que si $n > N$

$$|z_n - w| = |\Re(z_n) + \Im(z)i - \Re(w) - \Im(w)| \leq |\Re(z_n) - \Re(w)| + |\Im(z_n)i - \Im(w)i| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Por lo tanto $\lim_{n\to\infty} z_n = w$ □

Problema 2. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, Ω es conexo si y solo si es arcoconexo

Solucion. (Arcoconexo implica conexo) Supongamos que Ω es arcoconexo y no conexo, entonces $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ tal que Ω_1, Ω_2 son abiertos y $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$.

Sea $\omega_1 \in \Omega_1$ y $\omega_2 \in \Omega_2$, sea γ la curva que conecta a estos 2 puntos y $\varphi : [0,1] \to \Omega$ una parametrizacion continua de γ, consideremos el siguiente valor

$$t^* = \sup_{t\in[0,1]} \{t|\varphi(s) \in \Omega_1, 0 \leq s < t\}$$

Notemos que t^* esta bien definido pues el conjunto esta acotado por 1 y es no vacio pues φ es continua y $\varphi(0) \in \Omega_1$ donde Ω_1 es abierto, por lo tanto esta bien definido.

1. Supongamos que $\varphi(t^*) \in \Omega_1$, luego dado que Ω_1 es abierto existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(\varphi(t^*)) \subset \Omega_1$, por la continuidad de φ tenemos que $\varphi^{-1}(B_\varepsilon(\varphi(t^*)))$ es abierto, dado que t^*.

□

Problema 3. Sea $\mathbb{C}^*$ el grupo multiplicativo de los numeros complejos, es decir

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Demuestre que

$${\mathbb{C}^*}^2 = \mathbb{C}^*$$

Donde

$${\mathbb{C}^*}^2 = \{z \in \mathbb{C}^* : z = \omega^2, \omega \in \mathbb{C}\}$$

Problema 4. Encuentre todas las soluciones en $\mathbb{C}$ a la ecuacion

$$z^3 = 1$$

donde $z \in \mathbb{C}$

Problema 5. Se define la siguiente funcion