0.1 Teoria de la medida

Problema 1. Sea $\mathbb{R}$ con la algebra de Borel, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una funcion continua, entonces f es medible.

Solucion. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, luego (α, ∞) es un conjunto abierto, dado que $f^{-1}((\alpha,\infty))$ es abierto, pues f es continua, tenemos que $f^{-1}((\alpha,\infty)) \in B$, para todo α, por lo tanto f es medible. $\square$

Solucion. Sea $x \in X \setminus (\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A)$

$$x \in X \wedge x \notin \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A \iff \forall A \in \mathcal{A}, x \notin A \iff \forall A \in \mathcal{A}, x \in X \setminus A \iff x \in \bigcap_{A\in\mathcal{A}} X \setminus A$$

Por lo tanto tenemos

$$X \setminus (\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A) = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} X \setminus A$$

$\square$

Solucion. Sea $x \in X \setminus (\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A)$ entonces

$$x \in X \wedge x \notin \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A \iff \exists A' \in \mathcal{A}, x \in X \wedge x \notin A' \iff x \in \exists A' \in \mathcal{A}, X \setminus A' \iff x \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} (X \setminus A)$$

Por lo tanto tenemos que

$$X \setminus \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} (X \setminus A)$$

$\square$

Solucion. Sea $x \in f^{-1}(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A)$ entonces tenemos que

$$\exists y \in \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A, f(x) = y \implies \forall A \in \mathcal{A}, y \in A \implies \forall A \in \mathcal{A}, x \in f^{-1}(A) \implies x \in \bigcap_{A\in\mathcal{A}} f^{-1}(A)$$

Por lo tanto tenemos

$$f^{-1}(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A) \subset \bigcap_{A\in\mathcal{A}} f^{-1}(A)$$

Sea $x \in \bigcap_{A\in\mathcal{A}} f^{-1}(A)$ entonces

$$\forall A \in \mathcal{A}, x \in f^{-1}(A) \implies \forall A \in \mathcal{A}, f(x) \in A \implies f(x) \in \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A \implies x \in f^{-1}(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} f^{-1}A)$$

$\square$

Problema 2. Sea $|\cdot|$ la medida exterior sobre $\mathbb{R}$. Demuestre que si $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, entonces

$$|(a,b)| = |[a,b)| = |(a,b]| = b - a$$

Solucion. Notemos que $[a,b) \subset [a,b]$ por lo que tenemos que

$$|[a,b)| \leq |[a,b]| = b-a$$

Notemos tambien que $[a,b] = [a,b) \cup \{b\}$ por lo que por la σ-subaditividad tenemos que

$$b-a = |[a,b]| = |[a,b) \cup \{b\}| \leq |[a,b)| + |\{b\}| = |[a,b)|$$

y por lo tanto tenemos que

$$|[a,b)| = b-a$$

Analogamente para el resto con las siguientes igualdades

$$[a,b] = (a,b) \cup \{a,b\}$$
$$[a,b] = (a,b] \cup \{a\}$$

□

Problema 3. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ y $|B| = 0$. Demostrar que $|A \cup B| = |A|$

Solucion. Notemos que $A \subset A \cup B$, entonces tenemos que

$$|A| \leq |A \cup B|$$

Tambien tenemos, por la subaditividad de la medida exterior que

$$|A \cup B| \leq |A| + |B| = |A|$$

Por lo tanto tenmeos que

$$|A| = |A \cup B|$$

□

Problema 4. Demostrar que $|tA| = |t||A|$, para $t \in \mathbb{R}$

Solucion. Si $t = 0$ entonces el resultado es trivial pues $0 \cdot A = \{0\}$ lo cual es contable por lo tanto $|0 \cdot A| = 0$.

Si $t \neq 0$ entonces, dada un cubrimiento abierto $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de A tenemos que

$$tA \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} tI_n$$

Por lo que

$$|tA| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(tI_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} |t|\ell(I_n) = |t| \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n)$$

Tomando infimo sobre los recubrimientos de A obtenemos

$$|tA| \leq |t||A|$$

Si ${}_{n n\in\mathbb{N}}$ □