

# Tarea I - Optimización y Control

**Solución 1.** Sea  $P = \{J(y) \mid y \in C\}$ , donde  $C = \{y \in C^1 \mid y(0) = 0, y(1) = 1\}$  y

$$J(y) = \int_1^{\frac{1}{2}} |y(x)| dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |y'(x)| dx$$

1. Notemos que el conjunto  $C$  es no vacío, pues la función  $\text{Id}_{[0,1]}$  cumple las condiciones para pertenecer a este. Luego podemos evaluar el funcional en  $\text{Id}_{[0,1]}$  y nos dará un número pues estamos integrando una función continua sobre un compacto. Notemos que  $|y(x)| \geq 0$  e  $|y'(x)| \geq 0$  para todo  $y \in C$  y  $x \in [0, 1]$ , por lo tanto tenemos que  $\forall y \in C, J(y) \geq 0$ . Dado que mostramos que el conjunto  $P$  es no vacío y tiene una cota inferior, existe  $\inf P \in \mathbb{R}$  por axioma del supremo e ínfimo.
2. Dado que en el paso anterior mostramos que 0 es una cota inferior para el conjunto  $P$  y el ínfimo es la mayor de las cotas superiores tenemos que

$$0 \leq \inf P$$

3. La intuición nos dice que una función que minimiza  $J$  que esta fuera del conjunto  $C$  es la indicatriz del conjunto  $[\frac{1}{2}, 1]$ , construyamos una sucesión de funciones que la aproximen desde  $C$ . Consideremos la siguiente sucesión para  $n \geq 3$

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}) \\ P_n(x) & \text{si } x \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}] \\ 1 & \text{si } x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Donde  $P_n$  será un polinomio que a de cumplir con las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} P_n\left(\frac{1}{2}\right) &= 1 \\ P_n'\left(\frac{1}{2}\right) &= 0 \\ P_n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) &= 0 \\ P_n'\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Pues si  $P_n$  cumple con esas cuatro condiciones, entonces  $f_n \in C$ , dado que están de acuerdo en la derivada en los puntos de pegado y en el valor de la función también. Notemos que por construcción  $f_n(0) = 0$  y  $f_n(1) = 1$ .

Dado que tenemos 4 condiciones sobre  $P_n$ , un polinomio de grado 3 será suficiente. Consideraremos  $P_n(x) = a(x - \frac{1}{2})^3 + b(x - \frac{1}{2})^2 + c(x - \frac{1}{2}) + d$ . Luego las cuatro condiciones se transforman en lo siguiente

$$\begin{aligned}d &= 1 \\c &= 0 \\-\frac{a}{n^3} + \frac{b}{n^2} + 1 &= 0 \\\frac{3a}{n^2} - \frac{2b}{n} &= 0\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema llegamos al polinomio  $P_n$ , el cual por construcción satisface todo lo que necesitábamos.

$$P_n(x) = -2n^3(x - \frac{1}{2})^3 - 3n^2(x - \frac{1}{2})^2 + 1$$

Luego  $f_n \in C$ . Probemos que en efecto  $(f_n)_{n \geq 3}$  es una sucesión minimizante.

Notemos que

$$\begin{aligned}J(f_n) &= \int_0^{\frac{1}{2}} |f_n(x)| dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f_n(x)'| dx \\&= \int_0^{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}} 0 dx + \int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} |P_n(x)| dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 0 dx \\&= \int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} |P_n(x)| dx\end{aligned}$$

Dado que  $P'_n$  es una cuadrática con coeficiente líder negativo, y sabemos que  $P'_n(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}) = 0 = P'_n(\frac{1}{2})$ , tenemos que  $\forall x \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}]$ ,  $P'_n(x) \geq 0$ , es decir  $P_n$  es creciente en ese intervalo, dado que  $P_n(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}) = 0$ , tenemos que

$$\forall x \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}], P_n(x) \geq 0$$

Luego seguimos con el calculo

$$\begin{aligned}J(f_n) &= \int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} P_n(x) dx \\&= \int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} -2n^3(x - \frac{1}{2})^3 - 3n^2(x - \frac{1}{2})^2 + 1 dx \\&= -\frac{1}{2}n^3(x - \frac{1}{2})^4 \Big|_{x=\frac{1}{2} - \frac{1}{n}}^{x=\frac{1}{2}} - n^2(x - \frac{1}{2})^3 \Big|_{x=\frac{1}{2} - \frac{1}{n}}^{x=\frac{1}{2}} + \frac{1}{n} \\&= \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \\&= \frac{1}{2n}\end{aligned}$$

Por lo tanto obtenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(f_n) = 0$$

Es decir  $(f_n)_{n \geq 3}$  es una sucesión minimizante.

4. No, no existe  $\bar{y} \in C$  que minimice  $J$ , si suponemos que existe, entonces

$$J(\bar{y}) = 0$$

Pues existe la sucesión minimizante a 0 que construimos en el paso anterior y por tanto demostramos que  $\inf P = 0$ . Dado que  $J(\bar{y})$  es la suma de dos cantidades positivas y tiene que ser igual a 0, necesariamente cada una a de ser 0.

Notemos que

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |\bar{y}(x)| dx = 0 \implies \forall x \in [0, \frac{1}{2}], |\bar{y}(x)| = 0 \implies \forall x \in [0, \frac{1}{2}], \bar{y}(x) = 0$$

Pues la cantidad de adentro es positiva y por tanto 0 c.t.p. y por continuidad, en todas partes. Por lo tanto tenemos que  $\bar{y}|_{[0, \frac{1}{2}]} \equiv 0$ . Análogamente, dado que estamos suponiendo  $\bar{y} \in C$ ,  $\bar{y}'$  es continua y por tanto su valor absoluto igual. Por el argumento anterior  $\bar{y}'|_{[\frac{1}{2}, 1]} \equiv 0$ , por lo tanto  $\bar{y}|_{[\frac{1}{2}, 1]} \equiv c$  para algún  $c \in \mathbb{R}$ , dado que  $\bar{y}(1) = 1 \implies c = 1$ . Esto es una contradicción pues entonces  $0 = \bar{y}(\frac{1}{2}) = 1$ .

**Solución 2.** Usaremos el lema de Fermat. Supongamos que  $y \in Y$  satisface el problema de minimización. Consideraremos una perturbación  $h \in \mathcal{C}_0^2([0, L])$ . Luego tenemos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(y + \varepsilon h) - J(y)}{\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} J(y + \varepsilon h)|_{\varepsilon=0} = 0$$

Hagamos el calculo

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(y + \varepsilon h) = \frac{d}{d\varepsilon} \left( \frac{1}{2} \int_0^L EI(y''(x) + \varepsilon h''(x))^2 dx - \int_0^L q(x)(y(x) + \varepsilon h(x)) dx \right)$$

Dada la regularidad de las funciones con las que estamos trabajando, podemos entrar la derivada dentro de las integrales

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} J(y + \varepsilon h) &= \int_0^L EI(y''(x) + \varepsilon h''(x)) \cdot h''(x) dx - \int_0^L q(x)h(x) dx \\ &= \int_0^L -q(x)h(x) + EI(y''(x) + \varepsilon h''(x))h''(x) dx \end{aligned}$$

Luego tenemos que

$$\int_0^L -q(x)h(x) + EIy''(x)h''(x)dx = \frac{d}{d\varepsilon} J(y + \varepsilon h)|_{\varepsilon=0} = 0$$

Considerando  $\alpha(x) = -q(x)$  y  $\beta(x) = EIy''(x)$  podemos usar el lema, pues  $q$  es continua por hipótesis e  $y$  es continua pues estamos suponiendo que resuelve el problema. Por lo tanto concluimos que  $EIy''(x) \in C^2([0, L])$  lo que implica que  $y \in C^4([0, L])$ . Tenemos entonces que

$$y^{(4)}(x) = \frac{q(x)}{EI}$$

Luego dado que la viga esta apoyada en el punto 0 y  $L$ , la variación angular en los puntos de contacto de la viga debe ser 0, pues no debería haber deflección en los puntos de apoyo. Es decir  $y$  debe satisfacer lo siguiente

$$\begin{cases} y^{(4)}(x) = \frac{q(x)}{EI} \\ y(0) = 0 \\ y(L) = 0 \\ y''(0) = 0 \\ y''(L) = 0 \end{cases}$$

**Solución 3.** 1. Verifiquemos que  $L(a, b) = k_1(k_2a - b - k_3)^2$  es convexa. Notemos que al ser de clase  $C^2$ , solo es necesario calcular una de las derivadas cruzadas, pues coinciden. Calculemos las derivadas

$$\begin{aligned} \partial_a L(a, b) &= 2k_1(k_2a - b - k_3) \cdot k_2 \implies \partial_{aa} L(a, b) = 2k_1k_2^2 \\ \partial_b L(a, b) &= -2k_1(k_2a - b - k_3) \implies \partial_{bb} L = 2k_1 \\ \partial_{ab} L(a, b) &= -2k_1k_2 \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que el diferencial de  $L$  se ve de la siguiente forma

$$DL(a, b) = \begin{bmatrix} 2k_1k_2^2 & -2k_1k_2 \\ -2k_1k_2 & 2k_1 \end{bmatrix}$$

Aplicando el criterio de Sylvester tenemos que el primer subdeterminante es  $2k_1k_2^2 \geq 0$  y el determinante de la matriz completa es

$$\det DL(a, b) = 4k_1^2k_2^2 - 4k_1^2k_2^2 = 0$$

Por lo tanto es una matriz definida semi-positiva, lo que implica que la función es convexa.

2. El problema no tiene solución en  $C$ , consideremos el siguiente problema de valor inicial para  $\lambda \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} k_2y - y' - k_3 = \lambda \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Resolveremos este problema de valor inicial por métodos elementales, notemos que es de variables separables

$$\frac{y'}{k_2 y - k_3 - \lambda} = 1$$

Integrando obtenemos que

$$\frac{1}{k_2} \ln(k_2 y - k_3 - \lambda) = x + C_1 \implies \ln(k_2 y - k_3 - \lambda) = k_2 x + k_2 C_1$$

tomando exponencial

$$k_2 y - k_3 - \lambda = C k_2 e^{k_2 x} \implies y = C e^{k_2 x} + \frac{k_3 + \lambda}{k_2}$$

Luego para la condición inicial tenemos que

$$y_0 = C + \frac{k_3 + \lambda}{k_2} \implies y_0 - \frac{k_3 + \lambda}{k_2} = C$$

Se puede verificar que en efecto es una solución de la edo. Definamos  $y_\lambda$  como la solución al problema para alguna  $\lambda$ . Luego tenemos que  $y_\lambda \in C^\infty([0, T])$  y además  $y_\lambda(0) = y_0$ , por lo tanto  $y_\lambda \in C$ . Notemos que

$$J(y_\lambda) = \int_0^T k_1 \lambda^2 dx = k_1 \lambda^2 T$$

Lo cual se va a infinito cuando  $\lambda$  se va a infinito. Por lo tanto el problema **no** tiene solución.