

Tarea I - Optimización y Control

Solución 1. Sea $P = \{J(y) \mid y \in C\}$, donde $C = \{y \in \mathcal{C}^1 \mid y(0) = 0, y(1) = 1\}$ y

$$J(y) = \int_1^{\frac{1}{2}} |y(x)| dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |y'(x)| dx$$

1. Notemos que el conjunto C es no vacío, pues la función $\text{Id}_{[0,1]}$ cumple las condiciones para pertenecer a este. Luego podemos evaluar el funcional en $\text{Id}_{[0,1]}$ y nos dará un número pues estamos integrando una función continua sobre un compacto. Notemos que $|y(x)| \geq 0$ e $|y'(x)| \geq 0$ para todo $y \in C$ y $x \in [0, 1]$, por lo tanto tenemos que $\forall y \in C, J(y) \geq 0$. Dado que mostramos que el conjunto P es no vacío y tiene una cota inferior, existe $\inf P \in \mathbb{R}$ por axioma del supremo e ínfimo.
2. Dado que en el paso anterior mostramos que 0 es una cota inferior para el conjunto P y el ínfimo es la mayor de las cotas superiores tenemos que

$$0 \leq \inf P$$

3. La intuición nos dice que una función que minimiza J que esta fuera del conjunto C es la indicatriz del conjunto $[\frac{1}{2}, 1]$, construyamos una sucesión de funciones que la aproximen desde C . Consideremos la siguiente sucesión para $n \geq 3$

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}) \\ P_n(x) & \text{si } x \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}] \\ 1 & \text{si } x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Donde P_n será un polinomio que a de cumplir con las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} P_n\left(\frac{1}{2}\right) &= 1 \\ P_n'\left(\frac{1}{2}\right) &= 0 \\ P_n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) &= 0 \\ P_n'\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Pues si P_n cumple con esas cuatro condiciones, entonces $f_n \in C$, dado que están de acuerdo en la derivada en los puntos de pegado y en el valor de la función también. Notemos que por construcción $f_n(0) = 0$ y $f_n(1) = 1$.

Dado que tenemos 4 condiciones sobre P_n , un polinomio de grado 3 será suficiente. Consideraremos $P_n(x) = a(x - \frac{1}{2})^3 + b(x - \frac{1}{2})^2 + c(x - \frac{1}{2}) + d$. Luego las cuatro condiciones se transforman en lo siguiente

$$\begin{aligned}d &= 1 \\c &= 0 \\-\frac{a}{n^3} + \frac{b}{n^2} + 1 &= 0 \\\frac{3a}{n^2} - \frac{2b}{n} &= 0\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema llegamos al polinomio P_n , el cual por construcción satisface todo lo que necesitábamos.

$$P_n(x) = -2n^3(x - \frac{1}{2})^3 - 3n^2(x - \frac{1}{2})^2 + 1$$

Luego $f_n \in C$. Probemos que en efecto $(f_n)_{n \geq 3}$ es una sucesión minimizante.

Notemos que

$$\begin{aligned}J(f_n) &= \int_0^{\frac{1}{2}} |f_n(x)| dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f_n(x)'| dx \\&= \int_0^{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}} 0 dx + \int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} |P_n(x)| dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 0 dx \\&= \int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} |P_n(x)| dx\end{aligned}$$

Dado que P'_n es una cuadrática con coeficiente líder negativo, y sabemos que $P'_n(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}) = 0 = P'_n(\frac{1}{2})$, tenemos que $\forall x \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}]$, $P'_n(x) \geq 0$, es decir P_n es creciente en ese intervalo, dado que $P_n(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}) = 0$, tenemos que

$$\forall x \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}], P_n(x) \geq 0$$

Luego seguimos con el calculo

$$\begin{aligned}J(f_n) &= \int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} P_n(x) dx \\&= \int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} -2n^3(x - \frac{1}{2})^3 - 3n^2(x - \frac{1}{2})^2 + 1 dx \\&= -\frac{1}{2}n^3(x - \frac{1}{2})^4 \Big|_{x=\frac{1}{2} - \frac{1}{n}}^{x=\frac{1}{2}} - n^2(x - \frac{1}{2})^3 \Big|_{x=\frac{1}{2} - \frac{1}{n}}^{x=\frac{1}{2}} + \frac{1}{n} \\&= \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \\&= \frac{1}{2n}\end{aligned}$$

Por lo tanto obtenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(f_n) = 0$$

Es decir $(f_n)_{n \geq 3}$ es una sucesión minimizante.

4. No, no existe $\bar{y} \in C$ que minimice J , si suponemos que existe, entonces

$$J(\bar{y}) = 0$$

Pues existe la sucesión minimizante a 0 que construimos en el paso anterior y por tanto demostramos que $\inf P = 0$. Dado que $J(\bar{y})$ es la suma de dos cantidades positivas y tiene que ser igual a 0, necesariamente cada una a de ser 0.

Notemos que

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |\bar{y}(x)| dx = 0 \implies \forall x \in [0, \frac{1}{2}], |\bar{y}(x)| = 0 \implies \forall x \in [0, \frac{1}{2}], \bar{y}(x) = 0$$

Pues la cantidad de adentro es positiva y por tanto 0 c.t.p. y por continuidad, en todas partes. Por lo tanto tenemos que $\bar{y}|_{[0, \frac{1}{2}]} \equiv 0$. Análogamente, dado que estamos suponiendo $\bar{y} \in C$, \bar{y}' es continua y por tanto su valor absoluto igual. Por el argumento anterior $\bar{y}'|_{[\frac{1}{2}, 1]} \equiv 0$, por lo tanto $\bar{y}|_{[\frac{1}{2}, 1]} \equiv c$ para algún $c \in \mathbb{R}$, dado que $\bar{y}(1) = 1 \implies c = 1$. Esto es una contradicción pues entonces $0 = \bar{y}(\frac{1}{2}) = 1$.

Solución 2. Usaremos el lema de Fermat. Supongamos que $y \in Y$ satisface el problema de minimización. Consideraremos una perturbación $h \in C_0^2([0, L])$. Luego tenemos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(y + \varepsilon h) - J(y)}{\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} J(y + \varepsilon h)|_{\varepsilon=0} = 0$$

Hagamos el calculo

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(y + \varepsilon h) = \frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{1}{2} \int_0^L EI(y''(x) + \varepsilon h''(x))^2 dx - \int_0^L q(x)(y(x) + \varepsilon h(x)) dx \right)$$

Dada la regularidad de las funciones con las que estamos trabajando, podemos entrar la derivada dentro de las integrales

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} J(y + \varepsilon h) &= \int_0^L EI(y''(x) + \varepsilon h''(x)) \cdot h''(x) dx - \int_0^L q(x)h(x) dx \\ &= \int_0^L -q(x)h(x) + EI(y''(x) + \varepsilon h''(x))h''(x) dx \end{aligned}$$

Luego tenemos que

$$\int_0^L -q(x)h(x) + EIy''(x)h''(x) dx = \frac{d}{d\varepsilon} J(y + \varepsilon h)|_{\varepsilon=0} = 0$$

Considerando $\alpha(x) = -q(x)$ y $\beta(x) = EIy''(x)$ podemos usar el lema, pues q es continua por hipótesis e y es continua pues estamos suponiendo que resuelve el problema. Por lo tanto concluimos que $EIy''(x) \in \mathcal{C}^2([0, L])$ lo que implica que $y \in \mathcal{C}^4([0, L])$. Tenemos entonces que

$$y^{(4)}(x) = \frac{q(x)}{EI}$$

Integrando por partes 2 veces obtenemos

$$\int_0^L (EIy^{(4)} - q(x))h(x)dx + y''(x) \cdot h'(x)|_{x=0}^{x=L} = 0$$

La integral vale 0, por lo que satisface $y^{(4)}$, notemos que el segundo termino de frontera no aparece pues $h(0) = 0 = h(L)$. Por lo tanto tenemos que

$$y''(x) \cdot h'(x)|_{x=0}^{x=L} = 0$$

Necesitaremos un polinomio P de grado 5 que cumpla

$$\begin{aligned} P\left(\frac{L}{2}\right) &= \frac{L}{2} \\ P'\left(\frac{L}{2}\right) &= 1 \\ P''\left(\frac{L}{2}\right) &= 0 \\ P\left(\frac{3L}{4}\right) &= 0 \\ P'\left(\frac{3L}{4}\right) &= 0 \\ P''\left(\frac{3L}{4}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Centrando en $\frac{3L}{4}$ obtenemos que el polinomio a de tener la siguiente forma

$$P(x) = a\left(x - \frac{3L}{4}\right)^5 + b\left(x - \frac{3L}{4}\right)^4 + c\left(x - \frac{3L}{4}\right)^3$$

Calculamos las 2 primeras derivadas

$$\begin{aligned} P'(x) &= 5a\left(x - \frac{3L}{4}\right)^4 + 4b\left(x - \frac{3L}{4}\right)^3 + 3c\left(x - \frac{3L}{4}\right)^2 \\ P''(x) &= 20a\left(x - \frac{3L}{4}\right)^3 + 12b\left(x - \frac{3L}{4}\right)^2 + 6c\left(x - \frac{3L}{4}\right) \end{aligned}$$

Evalutando obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} -a\left(\frac{L}{4}\right)^5 + b\left(\frac{L}{4}\right)^4 - c\left(\frac{L}{4}\right)^3 &= \frac{L}{2} \\ 5a\left(\frac{L}{4}\right)^4 - 4b\left(\frac{L}{4}\right)^3 + 3c\left(\frac{L}{4}\right)^2 &= 1 \\ -20a\left(\frac{L}{4}\right)^3 + 12b\left(\frac{L}{4}\right)^2 - 6c\frac{L}{4} &= 0 \end{aligned}$$

La solución, usando Wolfram, viene dada por

$$\begin{aligned}a &= -\frac{3840}{L^4} \\b &= -\frac{2368}{L^3} \\c &= -\frac{384}{L^2}\end{aligned}$$

Definimos la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, \frac{L}{2}) \\ P(x) & \text{si } x \in [\frac{L}{2}, \frac{3L}{4}] \\ 0 & \text{si } x \in (\frac{3L}{4}, 1] \end{cases}$$

Esta es $\mathcal{C}_0^2([0, L])$ por construcción, satisface que $f'(0) = 1$ y $f'(L) = 0$. Tomando $h = f$ obtenemos que

$$0 = y''(L) \cdot h'(L) - y''(0) \cdot h'(0) = -y''(0) \implies y''(0) = 0$$

Luego tomando $h(x) = f(L - x)$, la cual sigue siendo $\mathcal{C}_0^2([0, L])$, pues $f(L - L) = 0$ y $f(L - 0) = 0$, obtenemos que

$$0 = y''(L) \cdot f'(L - L) - y''(0) \cdot h'(L - 0) = y''(L)$$

Por lo tanto y a de satisfacer

$$\begin{cases} y^{(4)}(x) = \frac{q(x)}{EI} \\ y(0) = 0 \\ y(L) = 0 \\ y''(0) = 0 \\ y''(L) = 0 \end{cases}$$

Solución 3. 1. Verifiquemos que $L(a, b) = k_1(k_2a - b - k_3)^2$ es convexa. Notemos que al ser de clase \mathcal{C}^2 , solo es necesario calcular una de las derivadas cruzadas, pues coinciden. Calculemos las derivadas

$$\begin{aligned}\partial_a L(a, b) &= 2k_1(k_2a - b - k_3) \cdot k_2 \implies \partial_{aa} L(a, b) = 2k_1k_2^2 \\ \partial_b L(a, b) &= -2k_1(k_2a - b - k_3) \implies \partial_{bb} L = 2k_1 \\ \partial_{ab} L(a, b) &= -2k_1k_2\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que el diferencial de L se ve de la siguiente forma

$$DL(a, b) = \begin{bmatrix} 2k_1k_2^2 & -2k_1k_2 \\ -2k_1k_2 & 2k_1 \end{bmatrix}$$

Aplicando el criterio de Sylvester tenemos que el primer subdeterminante es $2k_1k_2^2 \geq 0$ y el determinante de la matriz completa es

$$\det DL(a, b) = 4k_1^2k_2^2 - 4k_1^2k_2^2 = 0$$

Por lo tanto es una matriz definida semi-positiva, lo que implica que la función es convexa.

2. Estamos bajo las condiciones del Teorema 4, pues $L(a, b) = k_1(k_2a - b - k_3)^2$ es convexa para todo $a, b \in \mathbb{R}^2$, además estamos trabajando sobre $C = \{y \in \mathcal{C}^1([0, T]) \mid y(0) = y_0\}$. Luego si encontramos una solución a

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} L_b(y, y') = L_a(y, y') \\ L_b(y(T), y'(T)) = 0 \end{cases}$$

Habremos encontrado solución al problema de optimización. Calculemos, de la primera ecuación tenemos

$$\frac{d}{dx}(-2k_1(k_2y - y' - k_3)) = 2k_1k_2(k_2y - y' - k_3) \implies -2k_1k_2y' + 2k_1y'' = 2k_1k_2^2y - 2k_1k_2y' - 2k_1k_2k_3$$

Despejando obtenemos

$$2k_1y'' = 2k_1k_2^2y - 2k_1k_2k_3$$

Esto es una EDO lineal de segundo orden no homogénea. Resolvemos la EDO homogénea primero

$$2k_1\lambda^2 - 2k_1k_2^2 = 0 \implies \lambda^2 = k_2^2$$

Por lo tanto la solución al problema homogéneo viene dada por

$$y_h(x) = C_1e^{-k_2x} + C_2e^{k_2x}$$

Luego sabemos que la solución viene dada por $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$. La forma de la EDO nos hace pensar que $y_p(x) = C \in \mathbb{R}$, probemos esto

$$2k_1 \cdot 0 = 2k_1k_2^2C - 2k_1k_2k_3 \implies C = \frac{k_3}{k_2}$$

Luego la solución a la primera ecuación es

$$y(x) = C_1e^{-k_2x} + C_2e^{k_2x} + \frac{k_3}{k_2}$$

Aplicamos las condiciones de borde del conjunto donde y vive.

$$C_1 + C_2 + \frac{k_3}{k_2} = y(0) = y_0$$

Aplicando la segunda ecuación del Teorema 4 obtenemos que

$$-2k_1(k_2(C_1e^{-k_2T} + C_2e^{k_2T} + \frac{k_3}{k_2}) - (C_2k_2e^{k_2T} - C_1k_2e^{-k_2T}) - k_3) = 0$$

Resolviendo

$$\begin{aligned} -2k_1(C_1k_2e^{-k_2T} + C_2k_2e^{k_2T} + k_3 - C_2k_2e^{k_2T} + C_1k_2e^{-k_2T} - k_3) &= 0 \\ \iff -4C_1k_1k_2e^{-k_2T} &= 0 \end{aligned}$$

De esto obtenemos que

$$C_1 = 0$$

Reemplazando en la primera ecuación

$$C_2 = \frac{k_2 y_0 - k_3}{k_2}$$

Por lo tanto, dado que $L \in C^1([0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ y es convexa, tenemos que la solución al problema es

$$y(x) = \frac{k_2 y_0 - k_3}{k_2} e^{k_2 x} + \frac{k_3}{k_2}$$

Solución 4. Sea $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, tales que $x_0 < x_1$. Supongamos $L \in C^1([x_0, x_1] \times \mathbb{R}, \times \mathbb{R})$. Sea $y \in C^1([x_0, x_1])$ tal que maximice el problema, por el lema de Fermat tenemos que para $h \in C^1[0, L]$, esto pues no hay condiciones de borde y por tanto no necesitamos restringir la perturbación para no salirnos del espacio. Se cumple que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(y + \varepsilon h) - J(y)}{\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} J(y + \varepsilon h)|_{\varepsilon=0} = 0$$

Calculemos, notemos que la derivada puede entrar dentro de la integral dada la regularidad de L .

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} J(y + \varepsilon h) &= \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{d\varepsilon} L(x, y + \varepsilon h, y' + \varepsilon h') \\ &= \int_{x_0}^{x_1} L_a(x, y + \varepsilon h, y' + \varepsilon h') \cdot h + L_b(x, y + \varepsilon h, y' + \varepsilon h') \cdot h' \end{aligned}$$

Evaluamos en 0 e igualamos a 0.

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(y + \varepsilon h) = \int_{x_0}^{x_1} L_a(x, y, y') \cdot h + L_b(x, y, y') \cdot h' = 0$$

Dado que tenemos este resultado para todo $h \in C^1([x_0, x_1])$, lo tenemos en particular para $h \in \mathcal{C}_0^1([x_0, x_1])$. Dado que $L_a, L_b \in \mathcal{C}([x_0, x_1])$, podemos usar el teorema fundamental del cálculo de variaciones (Lema 1) con $\alpha = L_a$ y $\beta = L_b$. Por lo tanto obtenemos que $L_b \in C^1$ y que satisface

$$\frac{d}{dx} L_b(x, y, y') = L_a(x, y, y')$$

Con lo que establecemos la primera condición.

Notemos además que para todo $h \in \mathcal{C}^1([x_0, x_1])$ tenemos que

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} (L_a(x, y, y')h + L_b(x, y, y')h')dx = \int_{x_0}^{x_1} (L_a(x, y, y') - \frac{d}{dx} L_b(x, y, y'))h dx + L_b \cdot h|_{x=x_0}^{x=x_1}$$

Dado que lo que está dentro de la integral es 0, tenemos que

$$L_b \cdot h|_{x=x_0}^{x=x_1} = 0$$

Tomando $h(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$, la cual es C^∞ en el intervalo, obtenemos que $L_b(x_1, y(x_1), y'(x_1)) = 0$, tomando $h(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}$ obtenemos que $-L_b(x_0, y(x_0), y'(x_0)) = 0 \implies L_b(x_0, y(x_0), y'(x_0)) = 0$

Con lo que tenemos el resultado.