Tarea I - Optimización y Control

Solución 1. Sea $P = \{J(y) \mid y \in C\}$, donde $C = \{y \in \mathcal{C}^1 \mid y(0) = 0, y(1) = 1\}$ y

$$J(y) = \int_1^{\frac{1}{2}} |y(x)|dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |y'(x)|dx$$

1. Notemos que el conjunto C es no vació, pues la función $\mathrm{Id}_{[0,1]}$ cumple las condiciones para pertenecer a este. Luego podemos evaluar el funcional en $\mathrm{Id}_{[0,1]}$ y nos dará un numero pues estamos integrando una función continua sobre un compacto. Notemos que $|y(x)| \geq 0$ e $|y'(x)| \geq 0$ para todo $y \in C$ y $x \in [0,1]$, por lo tanto tenemos que $\forall y \in C, J(y) \geq 0$. Dado que mostramos que el conjunto P es no vacío y tiene una cota inferior, existe $\inf P \in \mathbb{R}$ por axioma del supremo e ínfimo.

2. Dado que en el paso anterior mostramos que 0 es un cota inferior para el conjunto P y el ínfimo es la mayor de las cotas superiores tenemos que

$$0 \leq \inf P$$

3. La intuición nos dice que una función que minimiza J que esta fuera del conjunto C es la indicatriz del conjunto $[\frac{1}{2}, 1]$, construyamos una sucesión de funciones que la aproximen desde C. Consideremos la siguiente sucesión para $n \geq 3$

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}) \\ P_n(x) & \text{si } x \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}] \\ 1 & \text{si } x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Donde P_n sera un polinomio que a de cumplir con las siguientes condiciones

$$P_n(\frac{1}{2}) = 1$$
$$P_n'(\frac{1}{2}) = 0$$
$$P_n(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}) = 0$$
$$P_n'(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}) = 0$$

Pues si P_n cumple con esas cuatro condiciones, entonces $f_n \in C$, dado que están de acuerdo en la derivada en los puntos de pegado y en el valor de la función también. Notemos que por construcción $f_n(0) = 0$ y $f_n(1) = 1$.

Dado que tenemos 4 condiciones sobre P_n, un polinomio de grado 3 sera suficiente. Consideraremos $P_n(x) = a(x - \frac{1}{2})^3 + b(x - \frac{1}{2})^2 + c(x - \frac{1}{2}) + d$. Luego las cuatro condiciones se transforman en lo siguiente

$$\begin{aligned} d &= 1 \\ c &= 0 \\ -\frac{a}{n^3} + \frac{b}{n^2} + 1 &= 0 \\ \frac{3a}{n^2} - \frac{2b}{n} &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema llegamos al polinomio P_n, el cual por construcción satisface todo lo que necesitábamos.

$$P_n(x) = -2n^3(x - \frac{1}{2})^3 - 3n^2(x - \frac{1}{2})^2 + 1$$

Luego $f_n \in C$. Probemos que en efecto $(f_n)_{n\geq 3}$ es una sucesión minimizante.
Notemos que

$$\begin{aligned} J(f_n) &= \int_0^{\frac{1}{2}} |f_n(x)|dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f_n(x)'|dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} 0dx + \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} |P_n(x)|dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 0dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} |P_n(x)|dx \end{aligned}$$

Dado que P_n' es una cuadrática con coeficiente líder negativo, y sabemos que $P_n'(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}) = 0 = P_n'(\frac{1}{2})$, tenemos que $\forall x \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}], P_n'(x) \geq 0$, es decir P_n es creciente en ese intervalo, dado que $P_n(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}) = 0$, tenemos que

$$\forall x \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}], P_n(x) \geq 0$$

Luego seguimos con el calculo

$$\begin{aligned} J(f_n) &= \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} P_n(x)dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} -2n^3(x - \frac{1}{2})^3 - 3n^2(x - \frac{1}{2})^2 + 1dx \\ &= -\frac{1}{2}n^3(x - \frac{1}{2})^4\Big|_{x=\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{x=\frac{1}{2}} - n^2(x - \frac{1}{2})^3\Big|_{x=\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{x=\frac{1}{2}} + \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

Por lo tanto obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} J(f_n) = 0$$

Es decir $(f_n)_{n\geq 3}$ es una sucesión minimizante.

4. No, no existe $\overline{y} \in C$ que minimice J, si suponemos que existe, entonces

$$J(\overline{y}) = 0$$

Pues existe la sucesión minimizante a 0 que construimos en el paso anterior y por tanto demostramos que $\inf P = 0$. Dado que $J(\overline{y})$ es la suma de dos cantidades positivas y tiene que ser igual a 0, necesariamente cada una a de ser 0.

Notemos que

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |\overline{y}(x)|dx = 0 \implies \forall x \in [0, \frac{1}{2}], |\overline{y}(x)| = 0 \implies \forall x \in [0, \frac{1}{2}], \overline{y}(x) = 0$$

Pues la cantidad de adentro es positiva y por tanto 0 c.t.p. y por continuidad, en todas partes. Por lo tanto tenemos que $\overline{y}|_{[0,\frac{1}{2}]} \equiv 0$. Análogamente, dado que estamos suponiendo $\overline{y} \in C$, $\overline{y}'$ es continua y por tanto su valor absoluto igual. Por el argumento anterior $\overline{y}'|_{[\frac{1}{2},1]} \equiv 0$, por lo tanto $\overline{y}|_{[\frac{1}{2},1]} \equiv c$ para algún $c \in \mathbb{R}$, dado que $\overline{y}(1) = 1 \implies c = 1$. Esto es una contradicción pues entonces $0 = \overline{y}(\frac{1}{2}) = 1$.

Solución 2. Usaremos el lema de Fermat. Supongamos que $y \in Y$ satisface el problema de minimización. Consideraremos una perturbación $h \in \mathcal{C}_0^2([0, L])$. Luego tenemos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{J(y+\varepsilon h) - J(y)}{h} = \frac{d}{d\varepsilon} J(y+\varepsilon h)\big|_{\varepsilon=0} = 0$$

Hagamos el calculo

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(y+\varepsilon h) = \frac{d}{d\varepsilon}(\frac{1}{2}\int_0^L EI(y''(x) + \varepsilon h''(x))^2 dx - \int_0^L q(x)(y(x) + \varepsilon h(x)))$$

Dada la regularidad de las funciones con las que estamos trabajando, podemos entrar la derivada dentro de las integrales

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varepsilon} J(y+\varepsilon h) &= \int_0^L EI(y''(x) + \varepsilon h''(x)) \cdot h''(x)dx - \int_0^L q(x)h(x)dx \\ &= \int_0^L -q(x)h(x) + EI(y''(x) + \varepsilon h''(x))h''(x)dx\end{aligned}$$

Luego tenemos que

$$\int_0^L -q(x)h(x) + EIy''(x)h''(x)dx = \frac{d}{d\varepsilon} J(y+\varepsilon h)|_{\varepsilon=0} = 0$$

Considerando $\alpha(x) = -q(x)$ y $\beta(x) = EIy''(x)$ podemos usar el lema, pues q es continua por hipótesis e y es continua pues estamos suponiendo que resuelve el problema. Por lo tanto concluimos que $EIy''(x) \in \mathcal{C}^2([0, L])$ lo que implica que $y \in \mathcal{C}^4([0, L])$. Tenemos entonces que

$$y^{(4)}(x) = \frac{q(x)}{EI}$$

Integrando por partes 2 veces obtenemos

$$\int_0^L (EIy^{(4)} - q(x))h(x)dx + y''(x) \cdot h'(x)|_{x=0}^{x=L} = 0$$

La integral vale 0, por lo que satisface $y^{(4)}$, notemos que el segundo termino de frontera no aparece pues $h(0) = 0 = h(L)$. Por lo tanto tenemos que

$$y''(x) \cdot h'(x)|_{x=0}^{x=L} = 0$$

Necesitaremos un polinomio P de grado 5 que cumpla

$$\begin{aligned} P(\frac{L}{2}) &= \frac{L}{2} \\ P'(\frac{L}{2}) &= 1 \\ P''(\frac{L}{2}) &= 0 \\ P(\frac{3L}{4}) &= 0 \\ P'(\frac{3L}{4}) &= 0 \\ P''(\frac{3L}{4}) &= 0 \end{aligned}$$

Centrando en $\frac{3L}{4}$ obtenemos que el polinomio a de tener la siguiente forma

$$P(x) = a(x - \frac{3L}{4})^5 + b(x - \frac{3L}{4})^4 + c(x - \frac{3L}{4})^3$$

Calculamos las 2 primeras derivadas

$$\begin{aligned} P'(x) &= 5a(x - \frac{3L}{4})^4 + 4b(x - \frac{3L}{4})^3 + 3c(x - \frac{3L}{4})^2 \\ P''(x) &= 20a(x - \frac{3L}{4})^3 + 12b(x - \frac{3L}{4})^2 + 6c(x - \frac{3L}{4}) \end{aligned}$$

Evaluando obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} -a(\frac{L}{4})^5 + b(\frac{L}{4})^4 - c(\frac{L}{4})^3 &= \frac{L}{2} \\ 5a(\frac{L}{4})^4 - 4b(\frac{L}{4})^3 + 3c(\frac{L}{4})^2 &= 1 \\ -20a(\frac{L}{4})^3 + 12b(\frac{L}{4})^2 - 6c\frac{L}{4} &= 0 \end{aligned}$$

La solución, usando Wolfram, viene dada por

$$a = -\frac{3840}{L^4}$$
$$b = -\frac{2368}{L^3}$$
$$c = -\frac{384}{L^2}$$

Definimos la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, \frac{L}{2}) \\ P(x) & \text{si } x \in [\frac{L}{2}, \frac{3L}{4}] \\ 0 & \text{si } x \in (\frac{3L}{4}, 1] \end{cases}$$

Esta es $\mathcal{C}_0^2([0, L])$ por construcción, satisface que $f'(0) = 1$ y $f'(L) = 0$. Tomando $h = f$ obtenemos que

$$0 = y''(L) \cdot h'(L) - y''(0) \cdot h'(0) = -y''(0) \implies y''(0) = 0$$

Luego tomando $h(x) = f(L - x)$, la cual sigue siendo $C_0^2([0, L])$, pues $f(L - L) = 0$ y $f(L - 0) = 0$, obtenemos que

$$0 = y''(L) \cdot f'(L - L) - y''(0) \cdot h'(L - 0) = y''(L)$$

Por lo tanto y a de satisfacer

$$\begin{cases} y^{(4)}(x) = \frac{q(x)}{EI} \\ y(0) = 0 \\ y(L) = 0 \\ y''(0) = 0 \\ y''(L) = 0 \end{cases}$$

Solución 3. 1. Verifiquemos que $L(a, b) = k_1(k_2 a - b - k_3)^2$ es convexa. Notemos que al ser de clase $\mathcal{C}^2$, solo es necesario calcular una de las derivadas cruzadas, pues coinciden. Calculemos las derivadas

$$\partial_a L(a, b) = 2k_1(k_2 a - b - k_3) \cdot k_2 \implies \partial_{aa} L(a, b) = 2k_1 k_2^2$$
$$\partial_b L(a, b) = -2k_1(k_2 a - b - k_3) \implies \partial_{bb} = 2k_1$$
$$\partial_{ab} L(a, b) = -2k_1 k_2$$

Por lo tanto tenemos que el diferencial de L se ve de la siguiente forma

$$DL(a, b) = \begin{bmatrix} 2k_1 k_2^2 & -2k_1 k_2 \\ -2k_1 k_2 & 2k_1 \end{bmatrix}$$

Aplicando el criterio de Sylvester tenemos que el primer subdeterminante es $2k_1 k_2^2 \geq 0$ y el determinante de la matriz completa es

$$\det DL(a, b) = 4k_1^2 k_2^2 - 4k_1^2 k_2^2 = 0$$

Por lo tanto es una matriz definida semi-positiva, lo que implica que la función es convexa.

2. Estamos bajo las condiciones del Teorema 4, pues $L(a,b) = k_1(k_2a - b - k_3)^2$ es convexa para todo $a, b \in \mathbb{R}^2$, además estamos trabajando sobre $C = \{y \in \mathcal{C}^1([0,T]) \mid y(0) = y_0\}$. Luego si encontramos una solución a

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}L_b(y,y') = L_a(y,y') \\ L_b(y(T),y'(T)) = 0 \end{cases}$$

Habremos encontrado solución al problema de optimización. Calculemos, de la primera ecuación tenemos

$$\frac{d}{dx}(-2k_1(k_2y - y' - k_3)) = 2k_1k_2(k_2y - y' - k_3) \implies -2k_1k_2y' + 2k_1y'' = 2k_1k_2^2y - 2k_1k_2y' - 2k_1k_2k_3$$

Despejando obtenemos

$$2k_1y'' = 2k_1k_2^2y - 2k_1k_2k_3$$

Esto es una EDO lineal de segundo orden no homegenea. Resolvemos la EDO homogenea primero

$$2k_1\lambda^2 - 2k_1k_2^2 = 0 \implies \lambda^2 = k_2^2$$

Por lo tanto la solución al problema homogeneo viene dada por

$$y_h(x) = C_1e^{-k_2x} + C_2e^{k_2x}$$

Luego sabemos que la solución viene dada por $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$. La forma de la EDO nos hace pensar que $y_p(x) = C \in \mathbb{R}$, provemos esto

$$2k_1 \cdot 0 = 2k_1k_2^2C - 2k_1k_2k_3 \implies C = \frac{k_3}{k_2}$$

Luego la solución a la primera ecuación es

$$y(x) = C_1e^{-k_2x} + C_2e^{k_2x} + \frac{k_3}{k_2}$$

Aplicamos las condiciones de borde del conjunto donde y vive.

$$C_1 + C_2 + \frac{k_3}{k_2} = y(0) = y_0$$

Aplicando la segunda ecuación del Teorema 4 obtenemos que

$$-2k_1(k_2(C_1e^{-k_2T} + C_2e^{k_2T} + \frac{k_3}{k_2}) - (C_2k_2e^{k_2T} - C_1k_2e^{-k_2T}) - k_3) = 0$$

Resolviendo

$$\begin{gathered} -2k_1(C_1k_2e^{-k_2T} + C_2k_2e^{k_2} + k_3 - C_2k_2e^{k_2T} + C_1k_2e^{-k_2T} - k_3) = 0 \\ \iff -4C_1k_1k_2e^{-k_2T} = 0 \end{gathered}$$

De esto obtenemos que

$$C_1 = 0$$

Reemplazando en la primera ecuación

$$C_2 = \frac{k_2 y_0 - k_3}{k_2}$$

Por lo tanto, dado que $L \in C^1([0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ y es convexa, tenemos que la solución al problema es

$$y(x) = \frac{k_2 y_0 - k_3}{k_2} e^{k_2 x} + \frac{k_3}{k_2}$$

Solución 4. Sea $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, tales que $x_0 < x_1$. Supongamos $L \in \mathcal{C}^1([x_0,x_1] \times \mathbb{R}, \times \mathbb{R})$. Sea $y \in C^1([x_0,x_1])$ tal que maximice el problema, por el lema de fermat tenemos que para $h \in \mathcal{C}^1[0,L]$, esto pues no hay condiciones de borde y por tanto no necesitamos restringir la perturbación para no salirnos del espacio. Se cumple que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J(y+\varepsilon h) - J(y)}{\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} J(y+\varepsilon h)|_{\varepsilon=0} = 0$$

Calculemos, notemos que la derivada puede entrar dentro de la integral dada la regularidad de L.

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} J(y+\varepsilon h) &= \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{d\varepsilon} L(x, y+\varepsilon h, y' + \varepsilon h') \\ &= \int_{x_0}^{x_1} L_a(x, y+\varepsilon h, y'+\varepsilon h') \cdot h + L_b(x, y+\varepsilon h, y'+\varepsilon h') \cdot h' \end{aligned}$$

Evaluamos en 0 e igualamos a 0.

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(y+\varepsilon h) = \int_{x_0}^{x_1} L_a(x,y,y') \cdot h + L_b(x,y,y') \cdot h' = 0$$

Dado que tenemos este resultado para todo $h \in \mathcal{C}^1([x_0,x_1])$, lo tenemos en particular para $h \in \mathcal{C}_0^1([x_0,x_1])$. Dado que $L_a, L_b \in \mathcal{C}([x_0,x_1])$, podemos usar el teorema fundamental del calculo de variaciones (Lema 1) con $\alpha = L_a$ y $\beta = L_b$. Por lo tanto obtenemos que $L_b \in \mathcal{C}^1$ y que satisface

$$\frac{d}{dx} L_b(x,y,y') = L_a(x,y,y')$$

Con lo que establecemos la primera condición.
Notemos además que para todo $h \in \mathcal{C}^1([x_0,x_1])$ tenemos que

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} (L_a(x,y,y')h + L_b(x,y,y')h')dx = \int_{x_0}^{x_1} (L_a(x,y,y') - \frac{d}{dx} L_b(x,y,y'))h dx + L_b \cdot h|_{x=x_0}^{x=x_1}$$

Dado que lo que esta dentro de la integral es 0, tenemos que

$$L_b \cdot h|_{x=x_0}^{x=x_1} = 0$$

Tomando $h(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$, la cual es $\mathcal{C}^\infty$ en el intervalo, obtenemos que $L_b(x_1, y(x_1), y'(x_1)) = 0$, tomando $h(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}$ obtenemos que $-L_b(x_0, y(x_0), y'(x_0)) = 0 \implies L_b(x_0, y(x_0), y'(x_0)) = 0$
Con lo que tenemos el resultado.

Solución 5. Recordemos que para una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ es concava si y solamente si

$$f(g) \leq f(p) + (\nabla f(p), g - p)_{\mathbb{R}^n}$$

Sea $\overline{y}, y \in \mathcal{C}^1[x_0, x_1]$, tal que $\overline{y}$ satisface (3).

Dado que la función $L(x, \cdot, \cdot)$ es concava para todo $x \in [x_0, x_1]$, tenemos que

$$L(x, y, y') \leq L(x, \overline{y}, \overline{y}') + L_a(x, \overline{y}, \overline{y}') \cdot (y - \overline{y}) + L_b(x, \overline{y}, \overline{y}') \cdot (y' - \overline{y}')$$

Integrando en $[x_0, x_1]$ tenemos que

$$J(y) \leq J(\overline{y}) + \int_{x_0}^{x_1} L_a(x, \overline{y}, \overline{y}') \cdot (y - \overline{y}) + L_b(x, \overline{y}, \overline{y}')(y' - \overline{y}')dx$$

Integrando por partes

$$J(y) \leq J(\overline{y}) + \int_{x_0}^{x_1} (L_a(x, \overline{y}, \overline{y}') - \frac{d}{dx} L_b(x, \overline{y}, \overline{y}')) \cdot (y - \overline{y})dx + L_b(x, \overline{y}, \overline{y}') \cdot (y - \overline{y})|_{x=x_0}^{x=x_1}$$

Donde la integral es 0, pues $\overline{y}$ satisface esa ecuación y los términos de borde son 0, pues $L_b(x, \overline{y}, \overline{y}')$ es 0 en los bordes.

Por lo tanto

$$J(y) \leq J(\overline{y})$$

Es decir, $\overline{y}$ es un máximo.