



第二章 信号分析的基本方法

2. 1 信号基础

2. 2 确定信号的分析

2. 3 随机信号

2. 4 信号通过线性系统



2.1 信号基础

信号是信息的载体。人们必须对所获得的信号进行分析和处理，才能得到其中的信息。

2.1.1 信号表示

2.1.2 信号分类



2.1.1 信号表示

1. 时域表示

2. 频域表示



时域表示

- 信号是随时间变化的物理量（电、光、声等），可以用函数解析式描述，也可表示为图形（波形图）。
- 如余弦信号是一种非常简单的信号，其函数解析式可以描述为：

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (2.1)$$

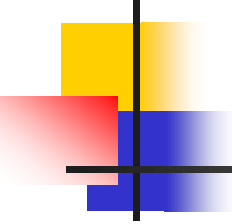
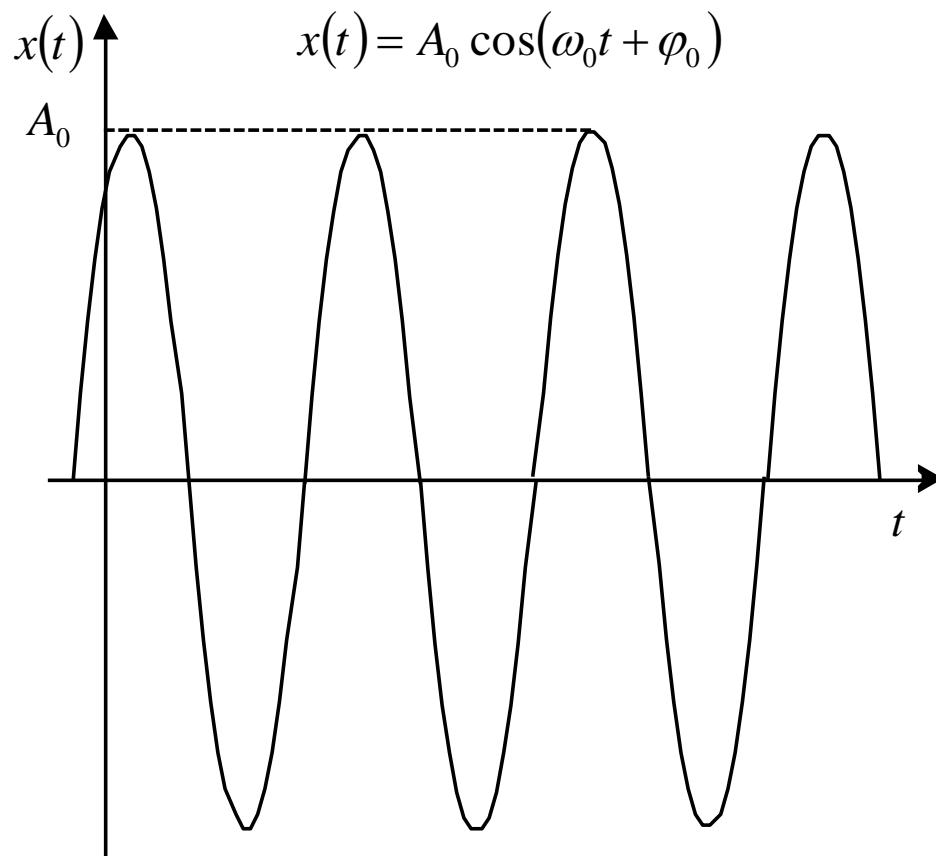
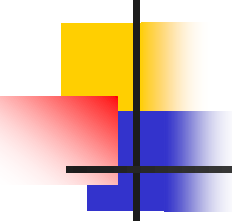
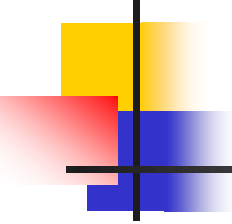
- 
- 从中可以看到体现了信号的特征三个参数——幅度 A_0 、角频率 ω_0 和相位 φ_0 。
 - 其波形图则如2.1所示。

图2.1 余弦信号波形



- 
- 客观存在的信号都是实数函数，但为了方便数学上的分析和处理，人们也常常用复数形式来表示这些信号。
 - 如式（2.1）的余弦信号也可表示成式（2.2）的复数形式：



$$s(t) = A_0 e^{j(\omega_0 t + \varphi_0)} = A_0 e^{j\varphi_0} e^{j\omega_0 t} \quad (2.2)$$

上述复数表示也同样具有 A_0 、 ω_0 、 φ_0 三个参数，
它们体现出信号变化的规律。

- 
-
- 复数（信号） $s(t)$ 的实部就是实信号 $x(t)$ ，即：

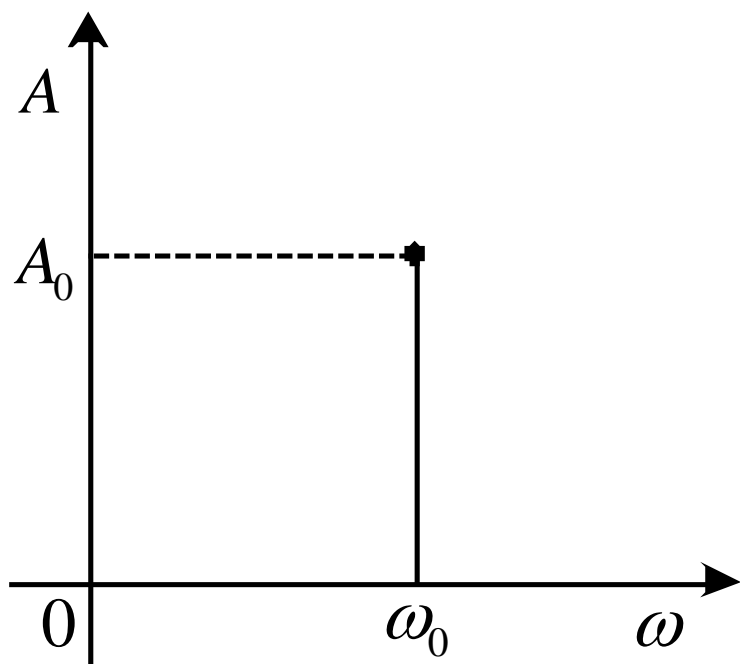
$$x(t) = \text{Re}[s(t)] \quad (2.3)$$



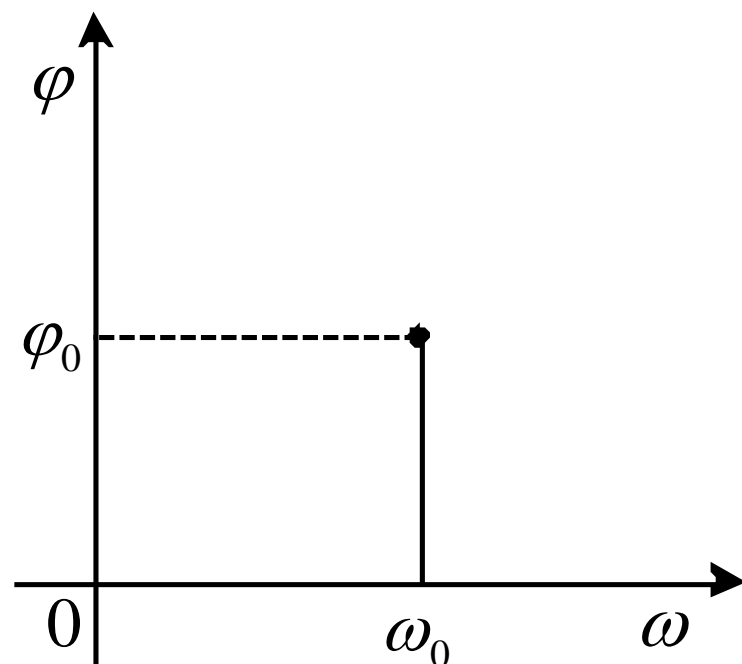
频域表示

- 对余弦波而言，三个参数如能确定的话，函数或者波形就能唯一确定了。因此不妨考虑用如图2.2所示的方式来表示上述余弦波。

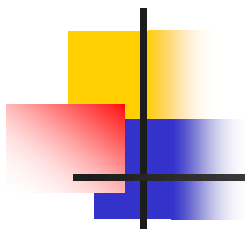
图2.2 余弦信号的频谱



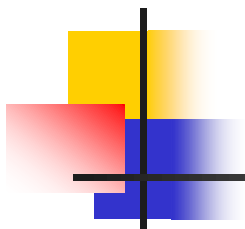
(a) 幅度谱



(b) 相位谱



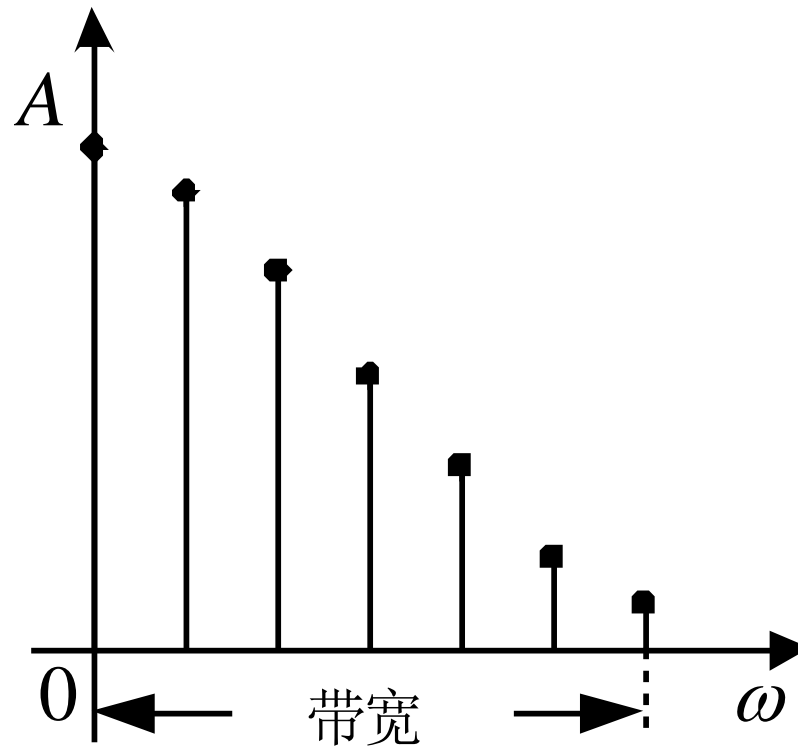
- 这种表示法被称为频域表示，表示的结果叫做“频谱”，对应于振幅或者相位分别为幅度谱和相位谱。

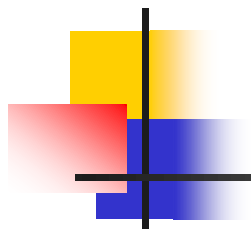


- 上述正弦信号只有单一频率，因此其频谱只包含一根“线”（谱线），人们常称其为“单色”信号。而在大多数应用场合中，信号是由若干不同频率的单色信号叠加而成的，称为“复合”信号。从频域角度看，复合信号的频谱包含若干条甚至无数条谱线。如图2.3所示。

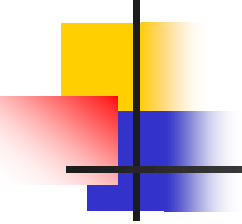
注：极端情况下，相邻谱线足够接近时，频谱就可表示成连续的曲线了，原来分立的谱线于是简化为曲线中的一个点（详见2.2.1）。

图2.3 复合信号与信号频带





- 考察某个信号的所有单色成分，这些成分覆盖的频率范围，被形象地叫做“频带”。这个范围的大小，就是“带宽”——即频带宽度，如图2.3所示。带宽是衡量信号特性的一个重要指标。

- 
- 频率和幅度对信号而言通常比相位具有更重要的意义。以声波信号为例：
 - 频率小于20Hz时为次声波，人耳通常听不到，但声强（与信号幅度有关）足够大时，人可以感觉到；
 - 频率在20Hz到20KHz之间时为声波，能够被人听到；
 - 频率大于20KHz时为次声波，人无法听见，其方向性好，因此在测量中具有重要的应用价值。
 - 因此，在信号的频域表示中，有时只使用幅度谱。



2.1.2 信号分类

可以用多种方法对信号进行分类，以下是常见的三种方式：

1. 按信号的性质分
2. 按信号的自变量或函数取值分
3. 按信号的时间或频率定义范围分



按信号的性质

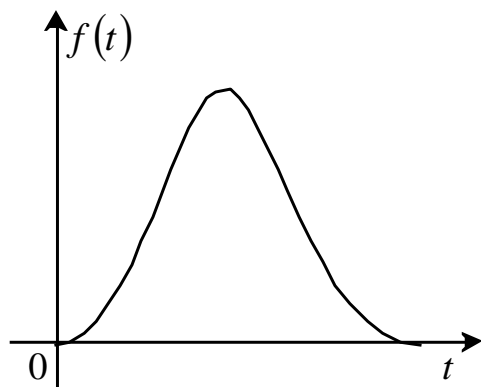
- 可分为确定（性）信号和随机信号两类：
 - **确定信号**是指在相同的实验条件下，能够重复实现的信号。根据信号是否具有周期性，又有**周期信号**和**非周期信号**之分。
 - **随机信号**则是在相同的实验条件下，不能够重复的信号。



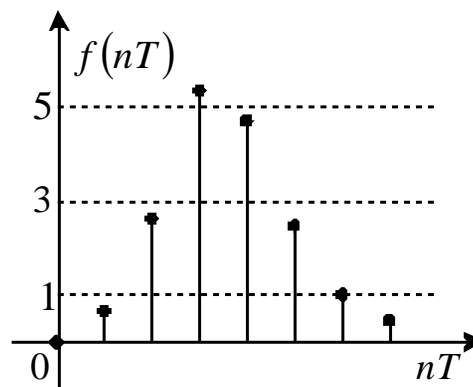
按信号的自变量或函数取值

- 自变量多为时间，按照它的取值是否连续，可分为连续时间信号和离散时间信号。
- 在此基础上按照函数取值是否连续，常又分出模拟信号、抽（采）样信号、量化信号、数字信号等，具体分类和特点可参见表2.1及图2.4。
- 有时也仅以函数取值进行分类，将上述模拟信号和抽样信号统称为模拟信号，将数字信号和量化信号统称为数字信号。

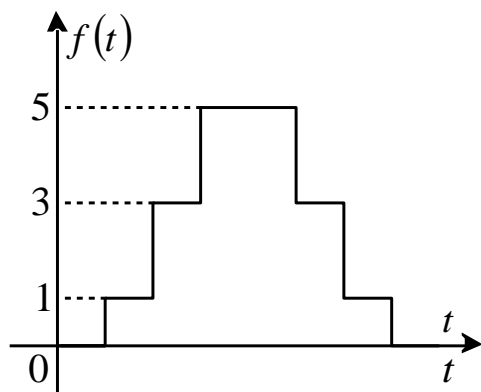
图2.4 各种信号



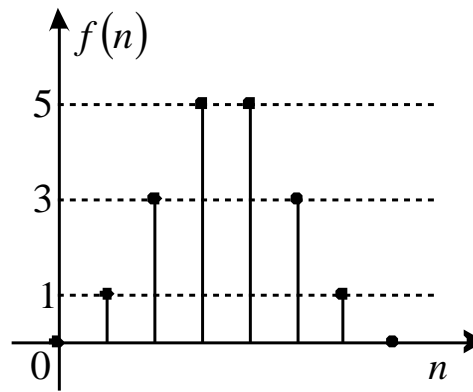
(a) 模拟信号



(b) 抽样信号



(c) 量化信号



(d) 数字信号



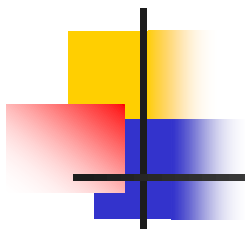
表2.1 信号分类

自变量 t	函数值 $f(t)$	信号分类
连续（时间信号）	连续	模拟信号
	离散	量化信号
离散（时间信号）	连续	抽样信号
	离散	数字信号

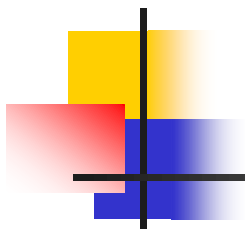


按信号的时间或频率定义范围

- 在有限的时间区间内有定义，而在区间外为零，这类信号叫做时域有限信号，简称时限信号。矩形脉冲、正弦脉冲等信号都属这种类型；
- 而周期信号、指数信号、随机信号等，则属于时域无限信号。



- 若信号的所有频率成分都局限在某个范围之内，那么这个信号则属于频域有限信号，简称频限信号。正弦信号、限带白噪声等都属于这种类型；
- 而冲击函数、白噪声、理想采样信号等，则属于频域无限信号，他们的带宽无限宽。



- 在信号理论中，时域和频域之间存在着“对称性关系”——时限信号在频域上是无限信号，而频限信号又对应于时域无限信号。
- 这种关系意味着一个信号不可能同时在时域和频域上都是有限的。



第二章 信号分析的基本方法

2. 1 信号基础

2. 2 确定信号的分析

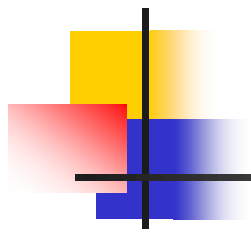
2. 3 随机信号

2. 4 信号通过线性系统



2.2 确定信号的分析

- 一般说来，信号分析就是将（复杂）信号分解为若干简单分量的叠加，并以这些分量的组成情况对信号特性进行考察。对信号进行分析的方法通常有两类：时域分析和频域（谱）分析。



- 其中时域分析以波形为基础，这里不详细展开；
- 频域分析则将时域信号变换到频域中进行分析，最基本的方法是将信号分解为不同频率的余（正）弦分量的叠加，即利用傅里叶变换（级数）进行分析。



2.2.1 傅里叶级数与傅里叶变换

2.2.2 功率（能量）谱

2.2.3 时域抽样信号和抽样定理

2.2.4 相关函数



2.2.1 傅里叶级数与傅里叶变换

1. 傅里叶级数

2. 傅里叶变换



傅里叶级数 形式一

- 周期信号可以表示为余（正）弦分量之和，即可记作如下（三角函数形式的）傅里叶级数：

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

(2.4)



其中,

$$\omega_0 = 2\pi/T$$

$$a_0 = (1/T) \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

$$a_n = (2/T) \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt$$

$$b_n = (2/T) \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt$$



傅里叶级数 形式二

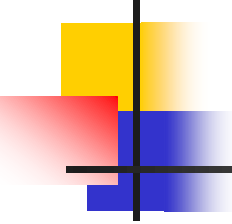
或者

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \quad (2.5)$$

其中,

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\varphi_n = -\arctan(b_n / a_n)$$

- 
-
- 这些分量可以直观地表示成类似图2.3的（实）频谱。



欧拉公式推论

- 根据欧拉公式可知：

$$\cos n\omega_0 t = \frac{1}{2} \left(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t} \right)$$

$$\sin n\omega_0 t = \frac{1}{2j} \left(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t} \right)$$



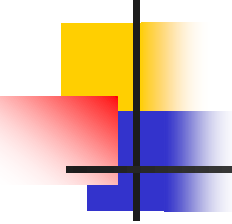
傅里叶级数 形式三

- 因此傅里叶级数还可以表示成以下指数形式：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad (2.6)$$

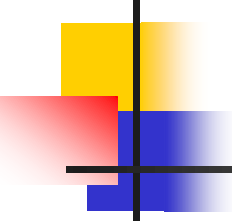
其中

$$F_n = (1/T) \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

- 
- 需注意的是，各分量的系数是复数，可表示成如下形式：

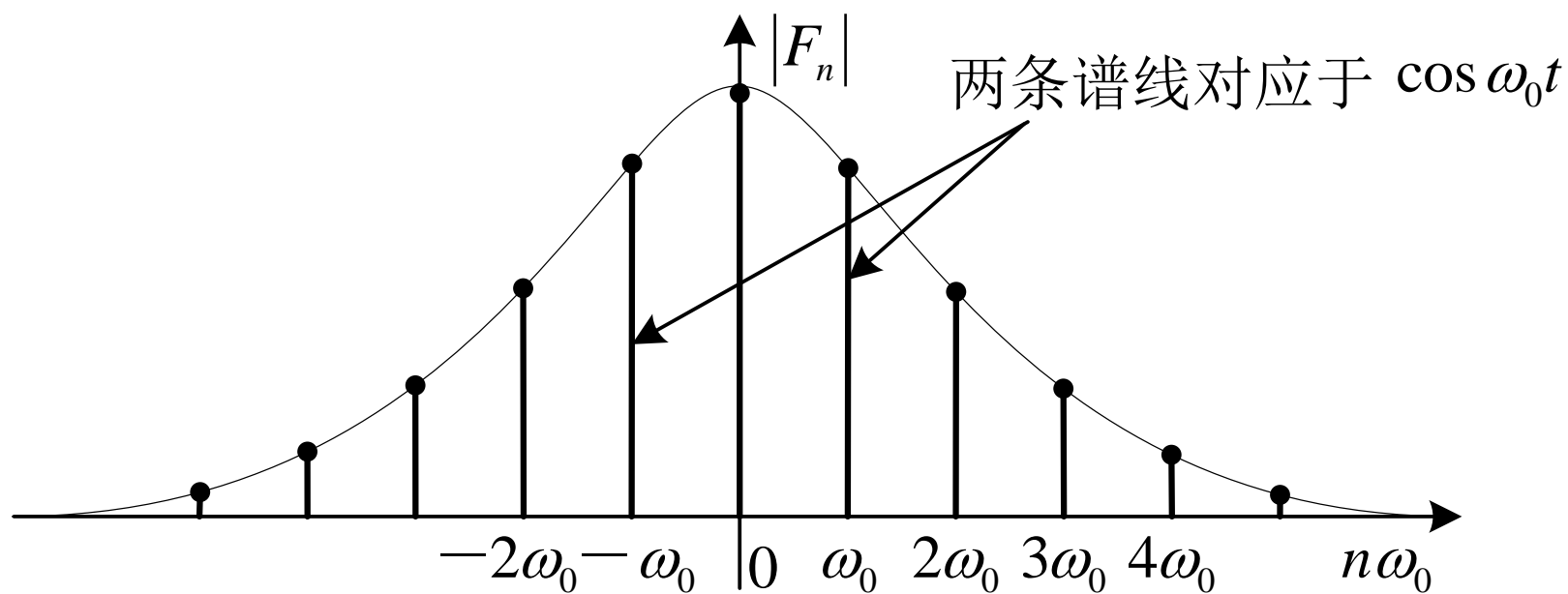
$$F_n = |F_n| e^{j\varphi_n}$$

其中 $|F_n|$ 对应于幅度， φ_n 对应于相位。



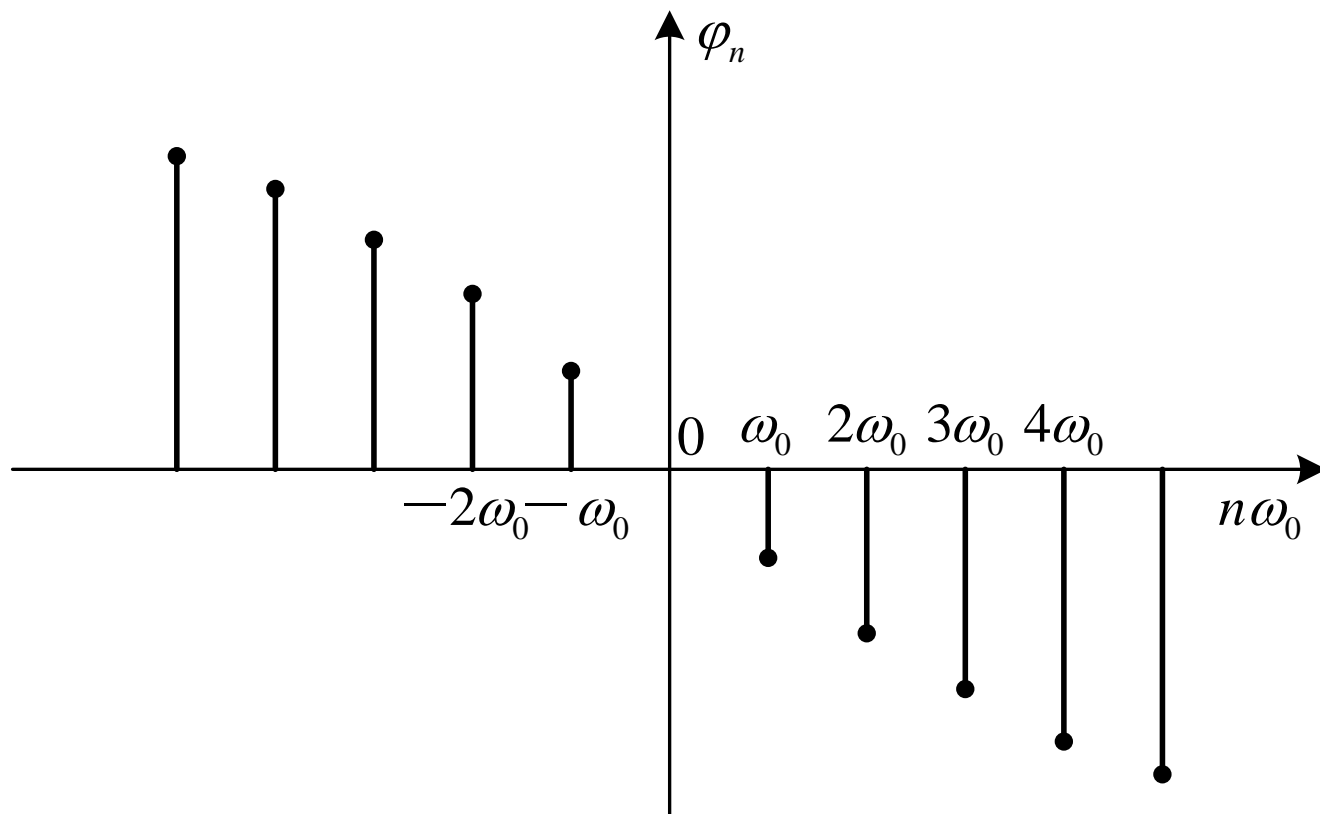
- 因此周期信号或者说它的各分量系数可由如图2.5所示的（复）频谱进行表征。可以看到，复频谱除正频率分量外，还包括负频率分量。负频率的出现是数学运算（欧拉公式）的结果，并无物理意义。

图2.5 复频谱(a)

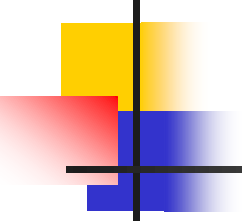


(a) 幅度谱

图2.5 复频谱(b)



(b) 相位谱

- 
- 频谱分幅（度）谱和相（位）谱两部分
 - 前者呈偶对称，所有谐波分量的幅度（ $|F_n|$, $n \neq 0$ ）都降为对应实幅谱（ C_n ）的一半；后者呈奇对称，复谱与实谱的相位谱值相等。
 - 复指数形式的傅里叶级数（对应于复频谱）是周期信号频域分析的最基本方法。

【例2-1】

- 【例2-1】 试求图2.6所示的周期矩形脉冲信号的频谱。

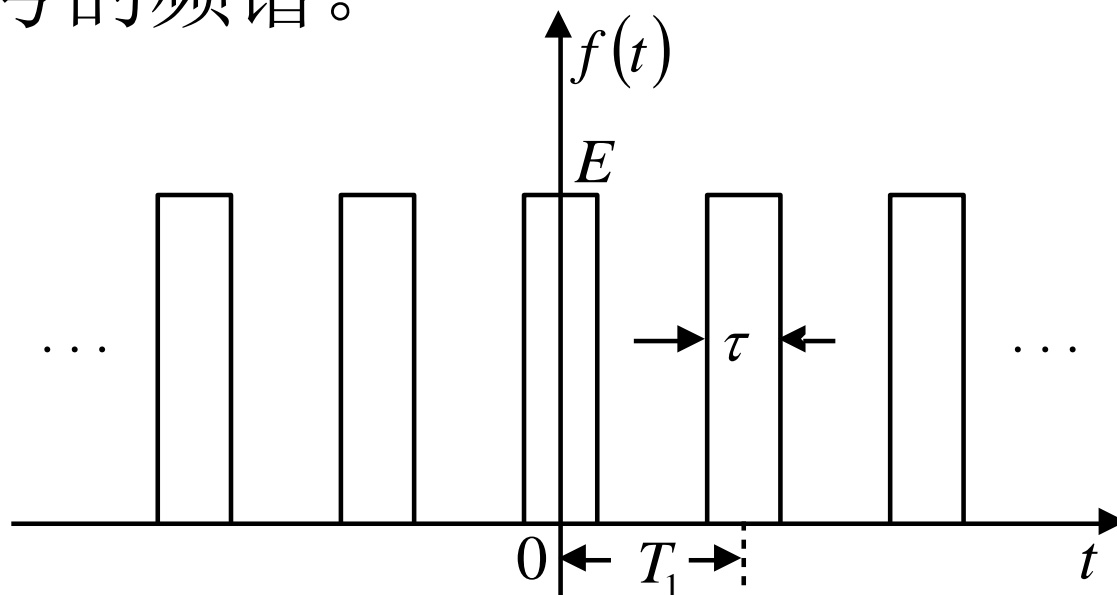
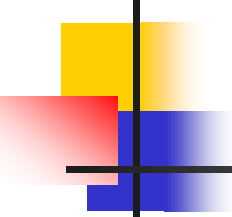


图2.6 周期矩形脉冲信号

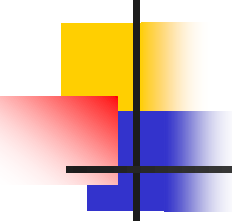


解 上述信号在 $(-T_1/2 \leq t \leq T_1/2)$ 一个周期内可表示为:

$$f(t) = \begin{cases} E & |t| \leq \tau/2 \\ 0 & \tau/2 < |t| \leq T_1/2 \end{cases}$$

(1) 展成三角函数形式的傅里叶级数

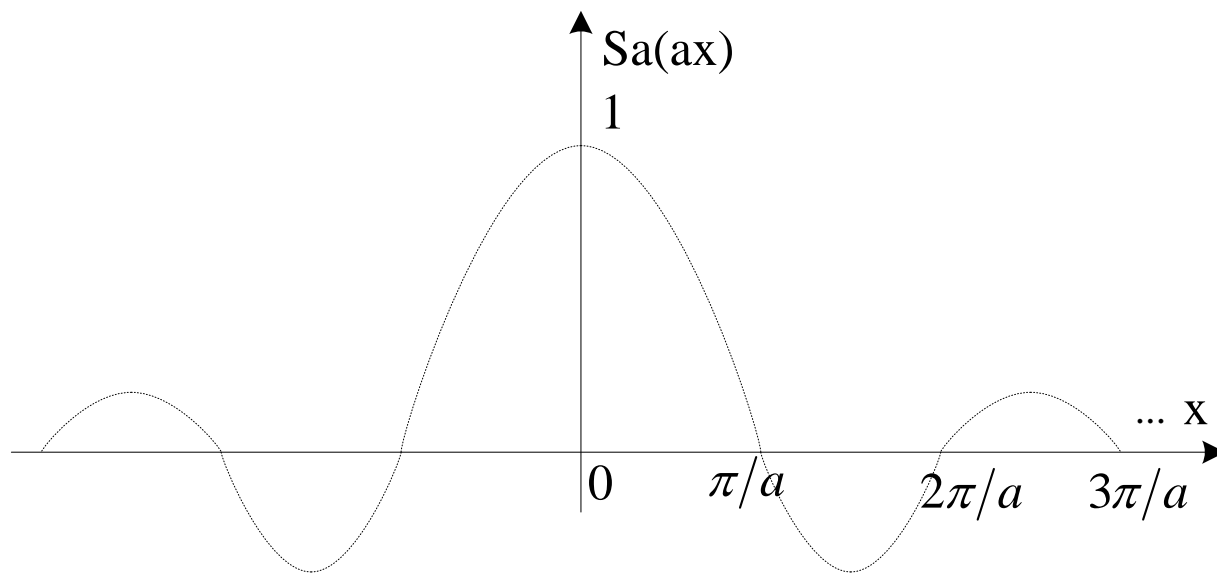
根据式 (2.4) 可得


$$\omega_1 = 2\pi/T_1$$

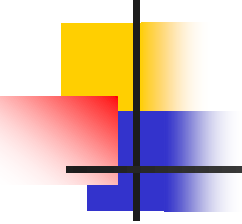
$$a_0 = (1/T_1) \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) dt = (1/T_1) \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E dt = E\tau/T_1$$

$$a_n = (2/T_1) \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E \cos n\omega_1 t dt = (2E\tau/T_1) \frac{\sin n\omega_1 \frac{\tau}{2}}{n\omega_1 \frac{\tau}{2}} = (2E\tau/T_1) Sa\left(n\omega_1 \frac{\tau}{2}\right)$$
$$b_n = (2/T_1) \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E \sin n\omega_1 t dt = 0$$

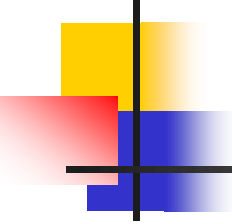
注: 其中 $Sa(t)$ 称为抽样函数, 是信息系统研究中的重要函数之一。



抽样函数波形

- 
- 因此，周期矩形信号的三角形形式的傅里叶级数为

$$f(t) = (E\tau/T_1) + (2E\tau/T_1) \sum_{n=1}^{\infty} \text{Sa}\left(n\omega_1 \frac{\tau}{2}\right) \cos n\omega_1 t$$



对照式 (2.5) 可知

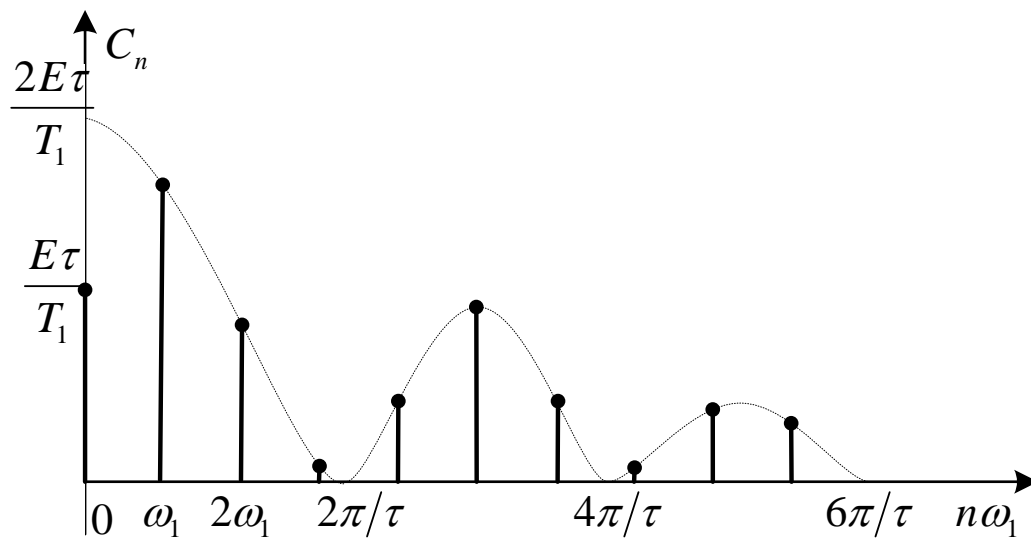
$$C_0 = E\tau/T_1$$

$$C_n = \left| (2E\tau/T_1) \text{Sa}\left(n\omega_1 \frac{\tau}{2}\right) \right|$$

$$\varphi_n = \begin{cases} 0 & a_n > 0 \\ -\pi & a_n < 0 \end{cases}$$

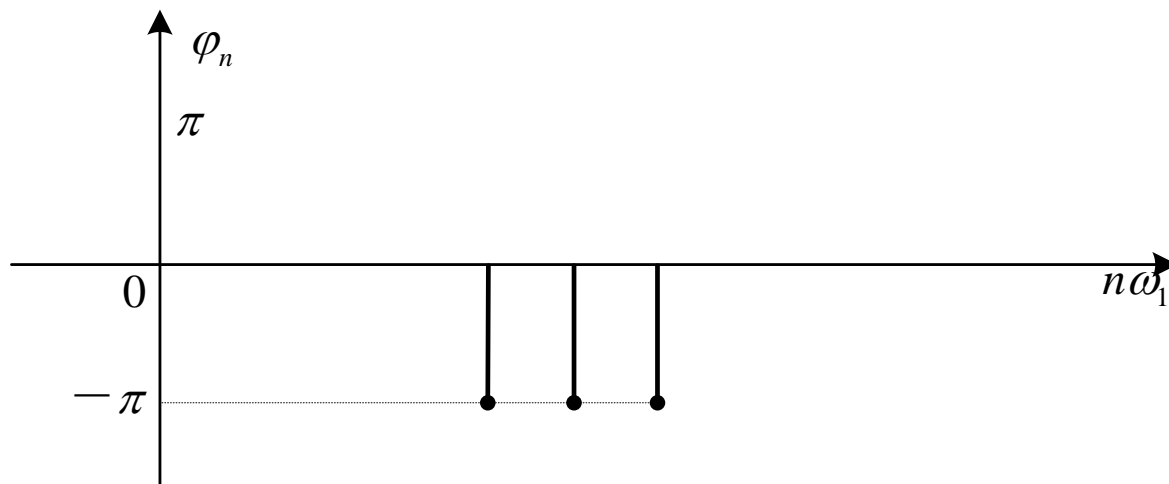
幅度谱和相位谱如图2.7所示。

图2.7周期矩形脉冲信号频谱(a)

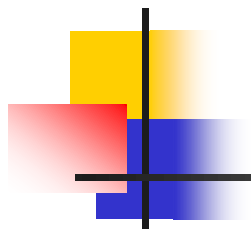


(a) 幅度谱

图2.7周期矩形脉冲信号频谱(b)



(b) 相位谱



(2) 展成指数形式的傅里叶级数
根据式 (2.6) 可得

$$F_n = (1/T_1) \int_{-T_1/2}^{T_1/2} E e^{-jn\omega_1 t} dt = (1/T_1) \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E e^{-jn\omega_1 t} dt = (E\tau/T_1) \text{Sa}\left(n\omega_1 \frac{\tau}{2}\right)$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (E\tau/T_1) \text{Sa}\left(n\omega_1 \frac{\tau}{2}\right) e^{jn\omega_1 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n| e^{j\varphi_n} e^{jn\omega_1 t}$$



其中：

$$F_n = |F_n| e^{j\varphi_n}$$

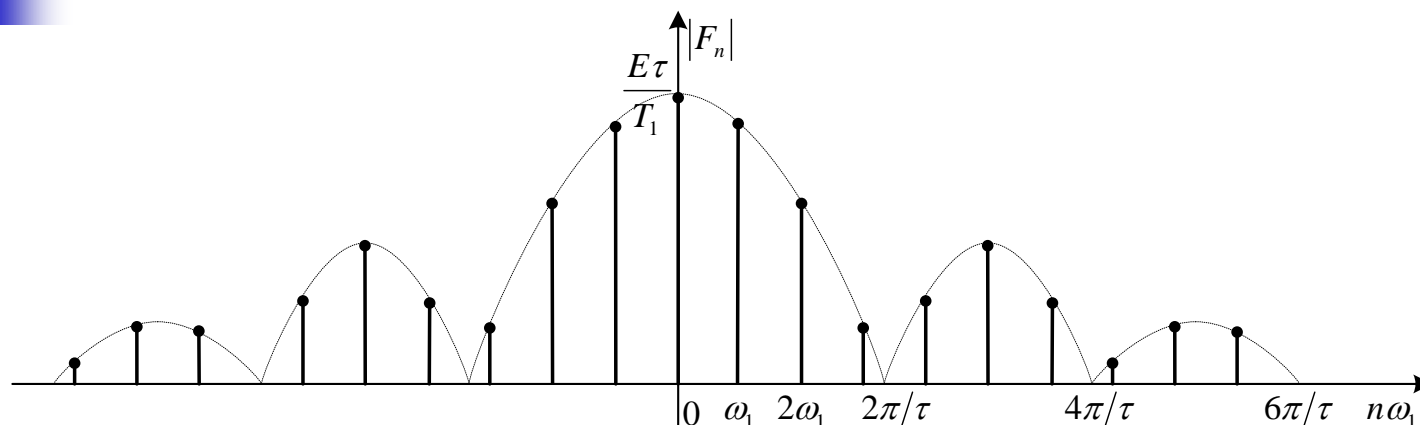
$$|F_n| = \left| (E\tau/T_1) \text{Sa}\left(n\omega_1 \frac{\tau}{2}\right) \right|$$

$$\varphi_n = 0, \quad F_n > 0$$

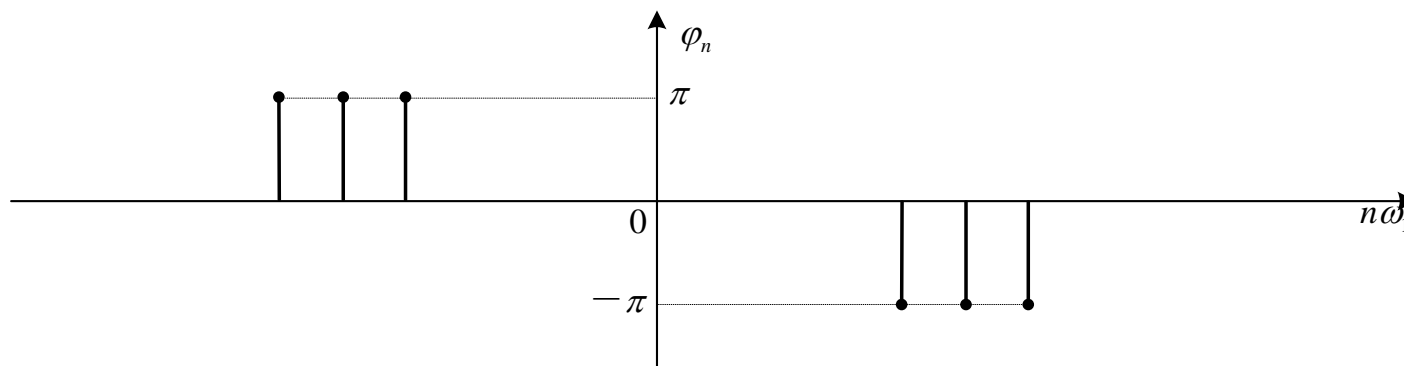
$$\varphi_n = \mp\pi, \quad F_n < 0$$

其幅度谱和相位谱分别如图2.8所示。

图2.8周期矩形脉冲信号复频谱

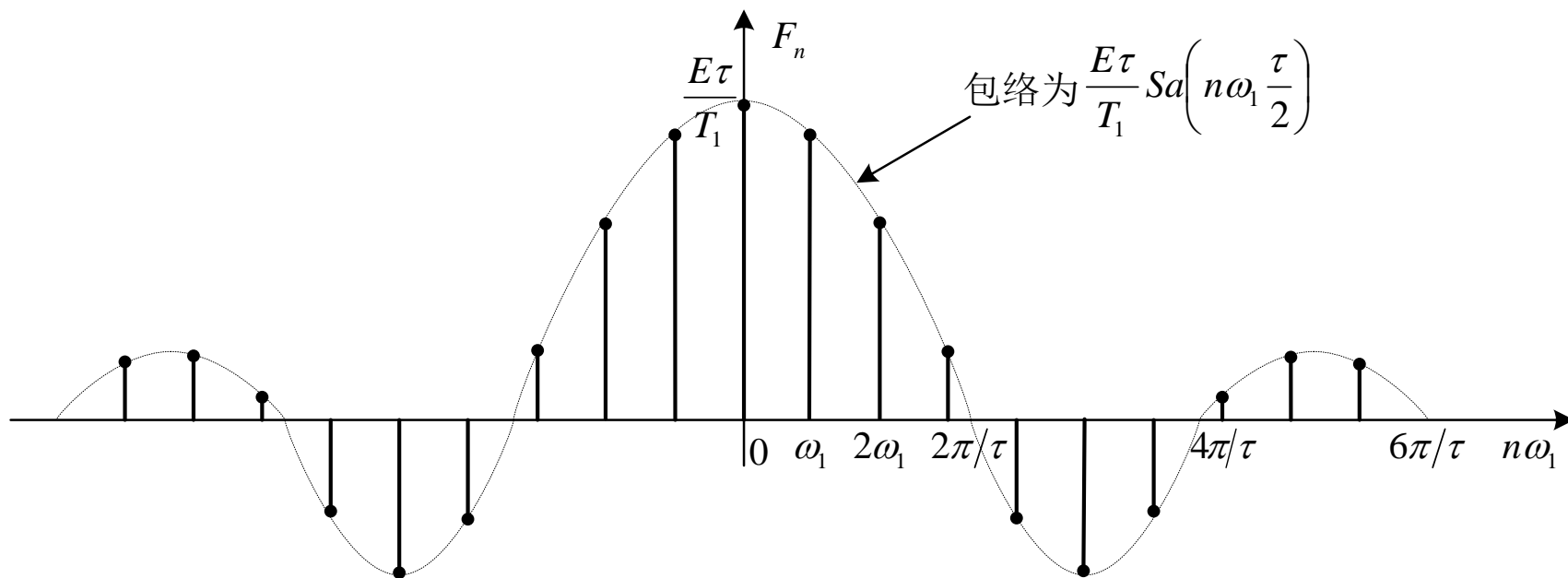


(a) 幅度谱



(b) 相位谱

图2.8周期矩形脉冲信号复频谱



(c) 频谱



频谱特点分析

(3) 频谱特点分析

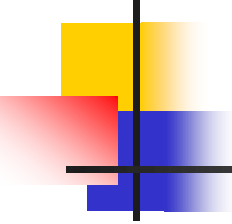
1. 离散谱

无穷多个分量对应于无穷多条谱线，谱线间的离散间隔为基频 $\omega_1 = 2\pi/T_1$ ，幅度随谐波阶次的增高以抽样函数规律衰减。

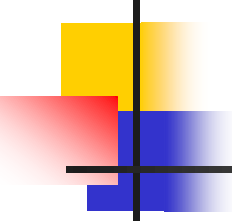


2. 谱零点带宽

谱图中 $|F_n|=0$ 的点，为谱零点。从图2.8中可见，第一个谱零点的位置在 $n\omega_1 = 2\pi/\tau$ ，即包络函数（抽样函数）的第一个“过零点”。



频谱中高频分量（幅度）的迅速衰减，使得信号的大部分能量（约占总量的**90%**）集中在第一个零点内的各频率分量上，也就是说，信号的大部分信息是由这些分量携带的。



人们常将这一频率范围 $\omega = 0 \sim 2\pi/\tau$ ，称为（谱零点）带宽 ω_b 。这意味着在允许一定失真的条件下，可以让通信系统只传输 ω_b 内的分量，舍弃其他的高频成分。

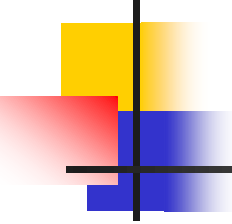


3.时域参数对频谱的影响

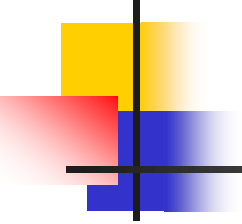
时域参数主要包括：信号幅度 E 、信号周期 T_1 和脉冲宽度 τ 。

信号幅度对频谱的特性影响不大。

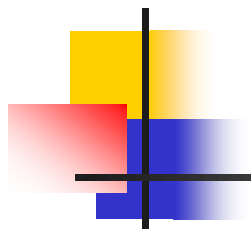
由于谱间隔为 $\omega_1 = 2\pi/T_1$ ，另外 $C_n \propto 1/T_1$ ，所以当 T_1 增大时，谱线间隔会变密，而谱的幅度



会减小。极端情况下，若 $T_1 \rightarrow \infty$ ，周期函数转换为非周期函数，这时离散频谱将成为连续频谱，分量幅值趋于无穷小。



由于 $\omega_b = 2\pi/\tau$ ，当 τ 增大时，带宽 ω_b 减小， τ 减小时， ω_b 增大。这反映了一个普遍的规律：时域上压缩（ τ 减小），频域上展宽（ ω_b 增大），反之也成立。考虑一个极端情况，若 $\tau \rightarrow 0$ ，即矩形脉冲变成冲击函数，则 $\omega_b \rightarrow \infty$ ，频谱的高阶谐波分量不衰减，成为

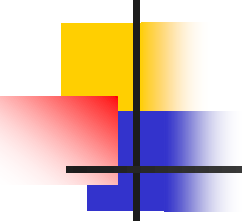


所谓的白色谱，参见3.3.2。另外，根据 $C_n = E\tau/T_1$ ，当 τ 增大时， C_n 增大， τ 减小 C_n 也减小，这与能量守恒定律相吻合。



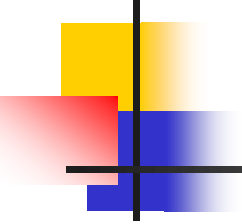
傅里叶变换与反变换

- 非周期信号指那些维持一段时间便不再重复出现的信号。对非周期信号进行频域分析的一般思路是：周期信号的频谱在 $T_1 \rightarrow \infty$ 时的极限，就变为非周期信号的频谱，相应的变换为傅里叶变换，简称傅氏变换。

- 
- 傅里叶变换为:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.6)$$

$F(\omega)$ 的物理意义是非周期信号的频谱，它有两个不同于周期信号频谱的特点，其一是连续谱，其二是密度谱，它对应于频谱密度的概念，即单位频率上频谱分量的大小。

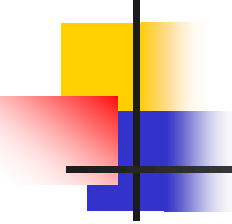
- 
- 另外， $F(\omega)$ 一般为复数，也可写成 $F(j\omega)$ 。
 - 傅里叶变换可由信号求其频谱，即由时域向频域变换，而傅里叶反（逆）变换则相反，可以在知道频谱的前提下，反过来求原信号，即由频域向时域变换。

- 
-
- 傅里叶反变换为:

$$f(t) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.7)$$

$f(t)$ 和 $F(\omega)$ 之间的关系可以简单表示成:

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) \quad (2.8)$$



双向的箭头表明了两个方向的变换：向右的代表傅里叶变换，向左的代表傅里叶反变换。

表2.3给出了一些常见信号的傅里叶变换对。



2.2.2 功率（能量）谱

频谱是在频域中描述信号特征的主要方法之一。除此以外，功率（能量）谱也是很常用的工具，用于表示信号的功率（能量）在频域中随频率变化的情况，对研究信号的功率（能量）分布以及确定信号所占带宽等有着非常重要的意义。



1. 能量信号和功率信号

2. 能量谱

3. 功率（密度）谱

4. 能量脉宽与带宽

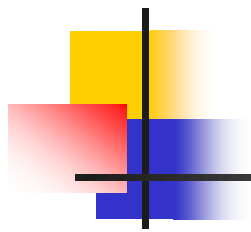


1. 能量信号和功率信号

信号在 1Ω 电阻上消耗的（归一化）能量定义为

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt \quad (2.9)$$

- 如果信号满足以下两个条件：①随时间衰减；
②是非周期（时限）信号，则信号的能量是有限的，称为**能量信号**，其平均功率为零。



- 而其他信号诸如周期信号、非周期但不衰减的信号以及随机过程等，它们的能量无穷大，但平均功率却有限，故称为功率信号。

- 
- 周期性功率信号的（平均）功率定义为

$$P = (1/T) \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt = \overline{f^2(t)} \quad (2.10)$$

- 将周期看作无穷大，那么非周期功率信号的功率可写成类似的形式

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt \quad (2.11)$$



2. 能量谱

可以证明：

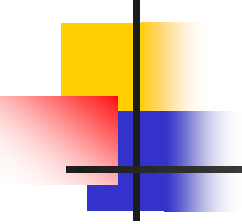
$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) d\omega$$

其中

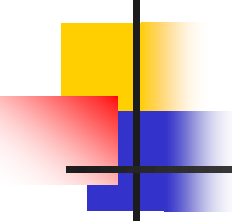
$$E(\omega) = |F(\omega)|^2$$

(2.12)

$E(\omega)$ 体现了信号能量随频率变化的情况，称为能量密度谱，简称能量谱或能谱。



■ 式（2.12）被称为帕斯瓦尔定律，它表明：对能量有限的信号而言，在时域上积分得到的信号能量与频域上积分得到的结果相等，也就是说信号的总能量等于频域内各频率分量的连续和，符合能量守恒定律。

- 
- 能量谱和傅里叶幅度谱之间存在简单的关系。显然，能量谱 $E(\omega)$ 是一个实偶函数，因此信号能量 E 也可简化表示为

$$E = (1/\pi) \int_0^{\infty} E(\omega) d\omega$$

(2.13)

【例2-2】

【例2-2】 若已知矩形脉冲信号的频谱为 $F(\omega) = A\tau \text{Sa}(\omega\tau/2)$ ，求如图2.9 (a)所示矩形脉冲频谱的第一个零点内所含的能量。

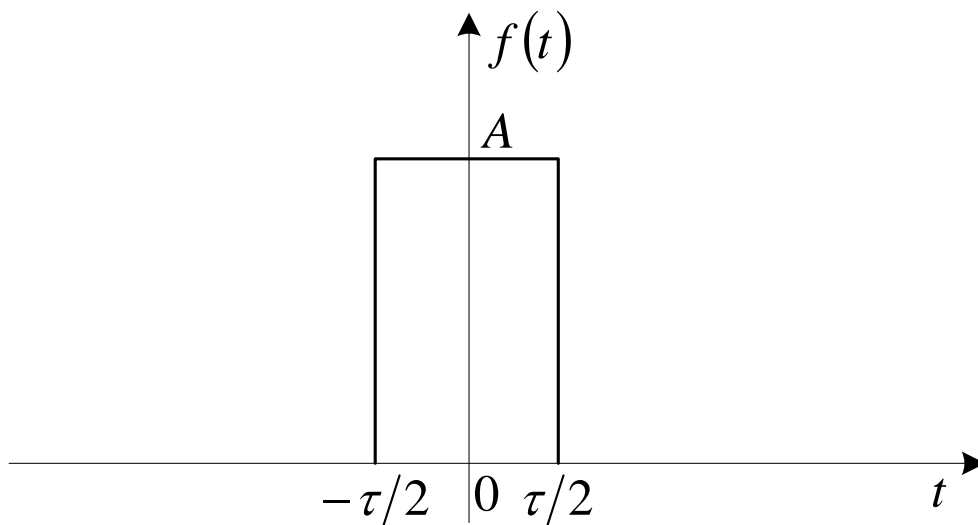
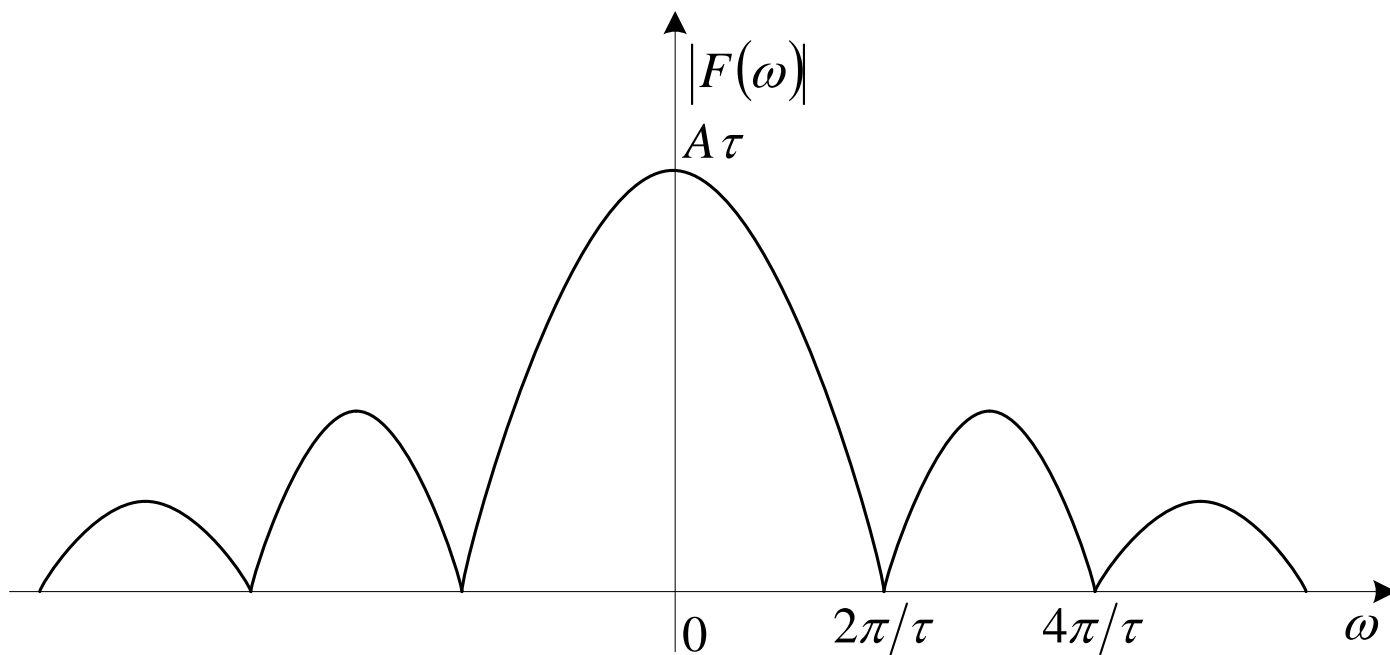


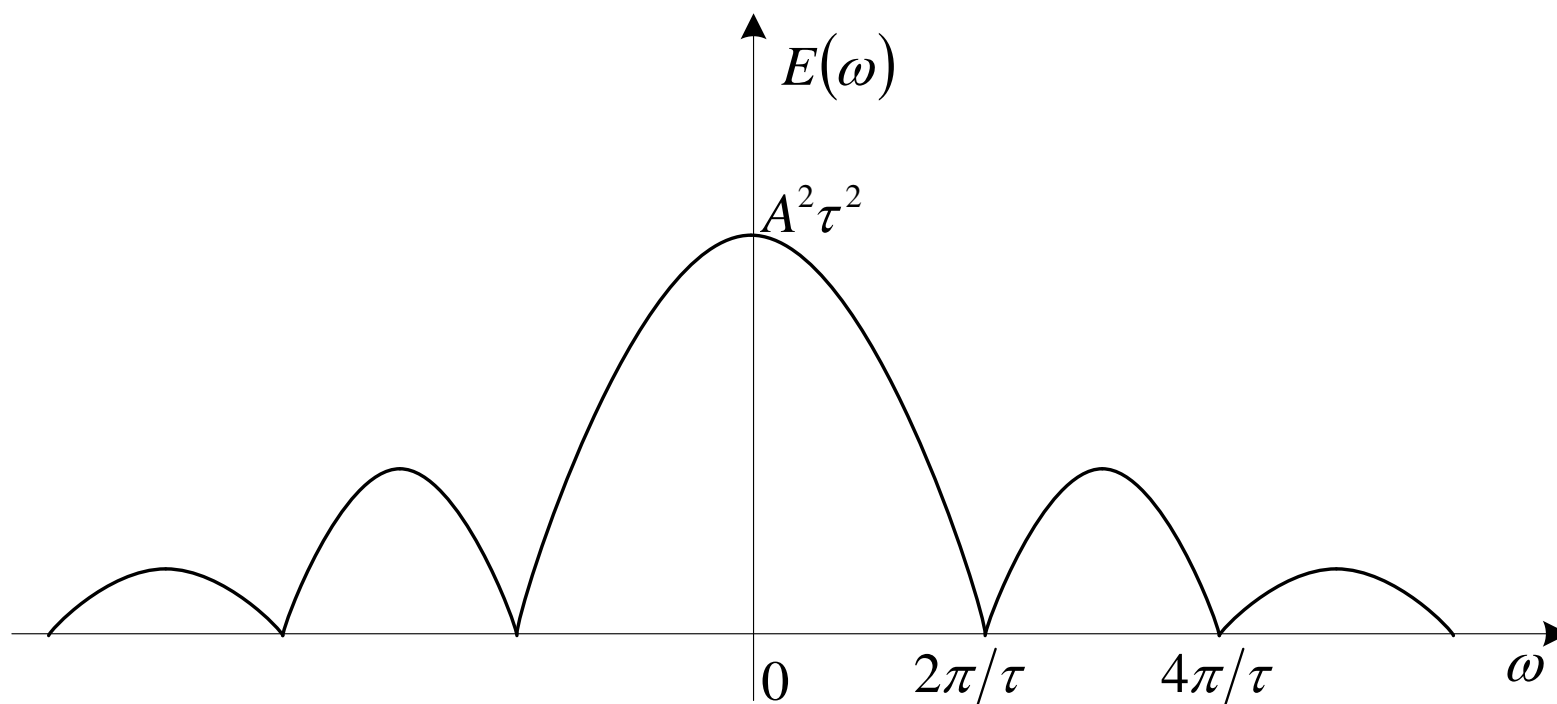
图2.9 (a)

图2.9 (b)脉冲信号频谱

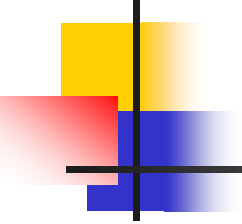


(b) 幅度谱

图2.9 (c)脉冲信号能量谱



(c) 能量谱



解 画出脉冲的频谱如图2.9 (b)所示, 继而画出其能量谱如图2.9(c)所示, 第一个过零点在 $\omega = 2\pi/\tau$ 处, 则区域 $[0, 2\pi/\tau]$ 中的能量为

$$\begin{aligned} E &= (1/\pi) \int_0^{2\pi/\tau} E(\omega) d\omega \\ &= (1/\pi) \int_0^{2\pi/\tau} |F(\omega)|^2 d\omega \\ &= (1/\pi) \int_0^{2\pi/\tau} A^2 \tau^2 \text{Sa}^2(\omega\tau/2) d\omega \end{aligned}$$



令 $x = \omega\tau/2$ 即 $d\omega = (2/\tau)dx$, 则有

$$E = \left(2A^2\tau/\pi\right)\int_0^x (\sin x/x)^2 dx = 0.903A^2\tau$$

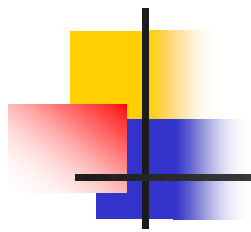


3. 功率（密度）谱

- 对周期性功率信号 $f(t)$ 而言，平均功率为

$$(1/T) \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2 \quad (2.14)$$

其中 $|F_n|^2$ 是周期信号的功率谱，它对应于各频率分量的功率。式（2.14）是关于周期信号的帕斯瓦尔定律，其意义请同学们参照非周期信号的相关定律自行解释。



- 类似于能量信号，非周期功率信号对应的是功率谱密度，常记作 $P(\omega)$ ，也是关于 ω 的偶函数。



4. 能量脉宽与带宽

- 利用上述能量公式，可以确定一些虽然衰减但持续时间很长的非周期脉冲信号的有效脉冲宽度以及带宽。



有效脉宽

- 有效脉宽 τ_0 定义为：集中了脉冲中绝大部分能量的时间段，即

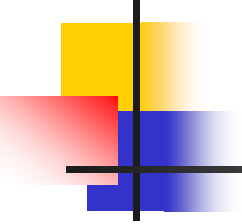
$$\int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} f^2(t) dt = \eta E = \eta \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt \quad (2.15)$$

其中 η 是指时间间隔 τ_0 内的能量与信号总能量的比值，一般取**0.9**以上。



信号带宽

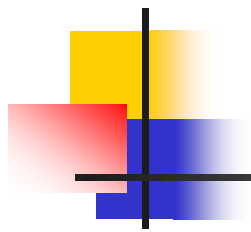
- 所有信号的能量或功率的主要部分往往集中在一定频率范围之内，这个频率范围通常用信号的**带宽**来描述。能量谱和功率谱为定义信号带宽提供了有效的方法。根据实际系统的不同，信号带宽有不同的定义。常用的定义方法有以下几种：

- 
- 能量与信号总能量之比为 η 的频段，一般 η 取0.9以上；
 - 能量谱或功率谱从最大值下降3dB（半功率点）处所对应的频率间隔，习惯上被称为“3dB带宽”；
 - 绘制与能量谱或功率谱等高等面积的矩形，矩形的宽度被称为“等效矩形带宽”。



2.2.3 时域抽样信号和抽样定理

测控系统（如传感器）能提供的原始信号多是连续信号，必须经过离散化才能交由计算机作进一步处理。**时域抽样**（采样、取样）指时间上的离散化，也就是每隔一定时间间隔提取原始信号的瞬间值，得到“抽样信号”（参见表2.1）。相等的抽样间隔对应于“**均匀抽样**”，否则就是“**非均匀抽样**”。



1.理想抽样

2.实际抽样

3.时域抽样定理

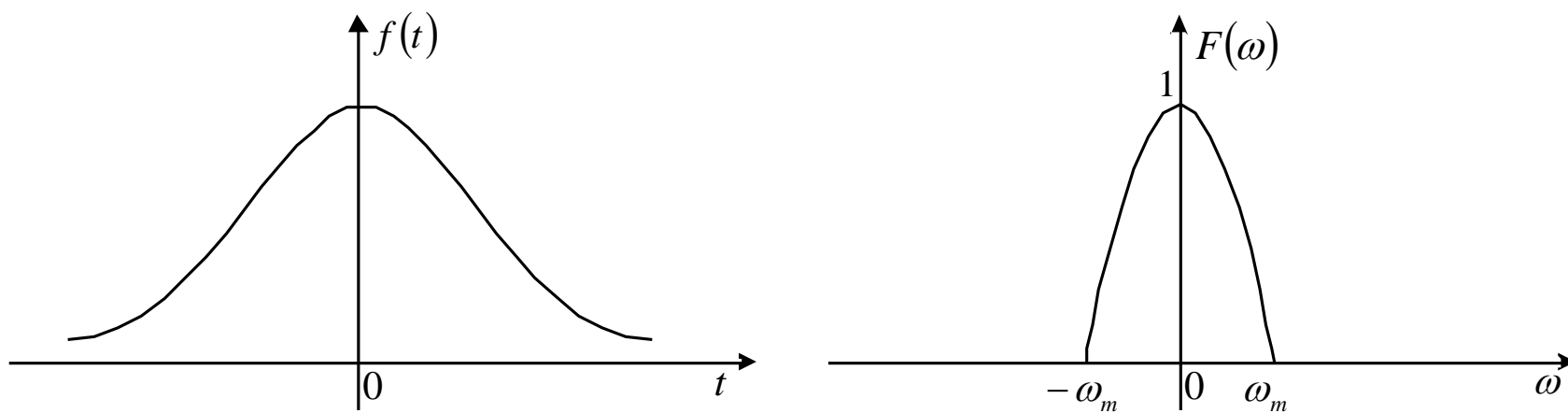


1.理想抽样

可以用一个如图2.10所示的理想模型（冲激抽样、理想抽样）来研究抽样过程。抽样脉冲是脉宽为零的单位冲激信号，其频谱是周期性的。

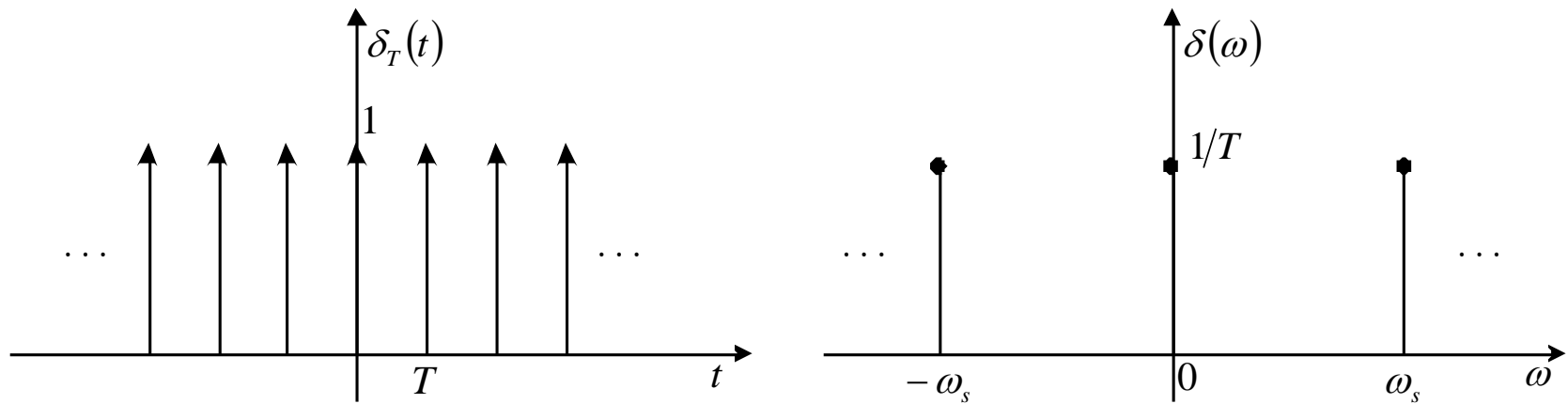


图2.10 (a)



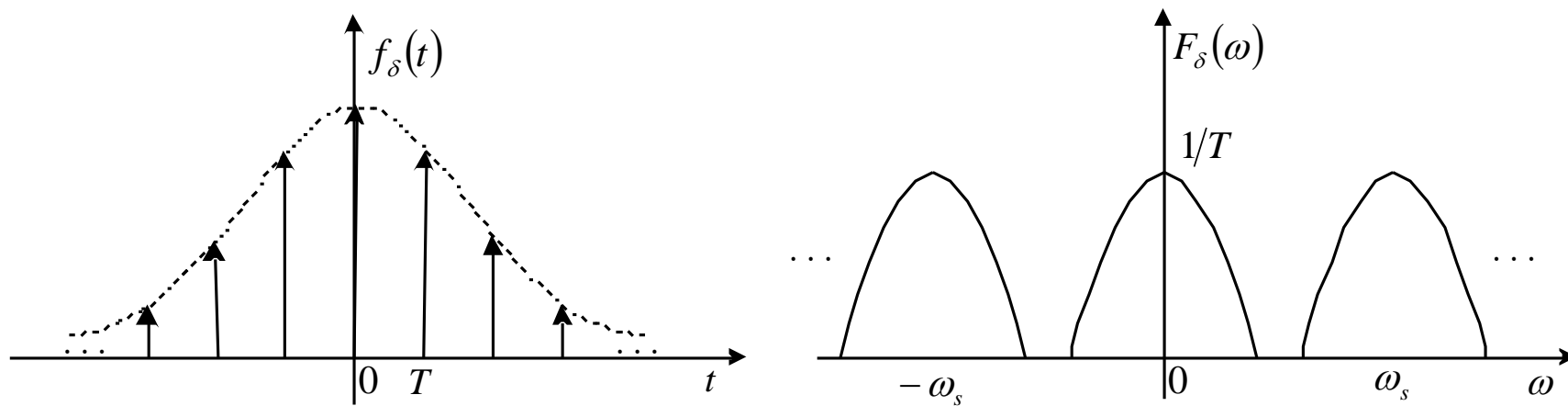
(a) 原信号及频谱示意

图2.10 (b)

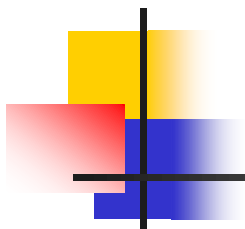


(b) 周期性冲激脉冲及频谱

图2.10 (c)



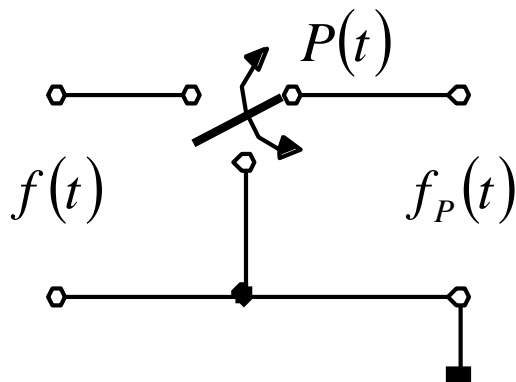
(c) 抽样（后）信号及频谱示意



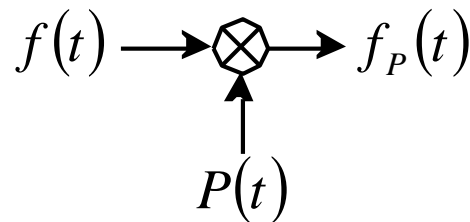
- 可以看到，理想抽样信号的频谱是原连续信号频谱的周期性延拓，延拓周期为抽样频率，也就是在周期性冲激函数频谱各条谱线的位置上，按比例对原信号频谱进行复制。

2. 实际抽样

- 实际的抽样过程通常是用电子开关来实现的，如图2.11所示，电子开关每隔一定时间接通一次，每次接通时间为（这个值不可能为零）。

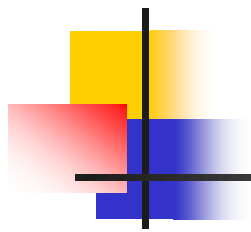


(a) 抽样电路



(b) 逻辑表示

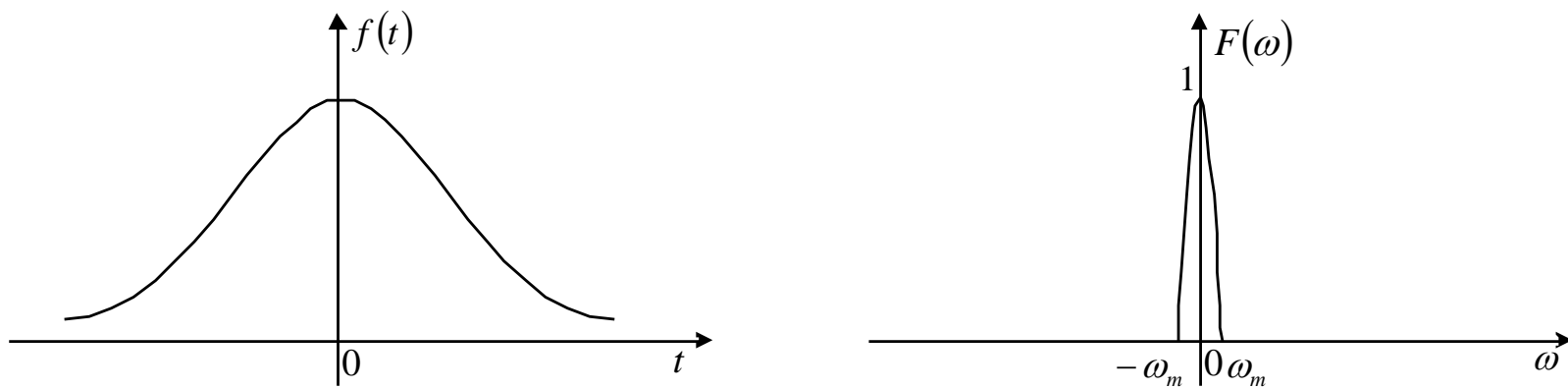
图2.11



- 图2.12示意了这个过程的时域、频域变化。可以看到，抽样信号的频谱也是原信号频谱的“周期性复制”，只是复制受到抽样函数（矩形脉冲的频谱特性）的限制。

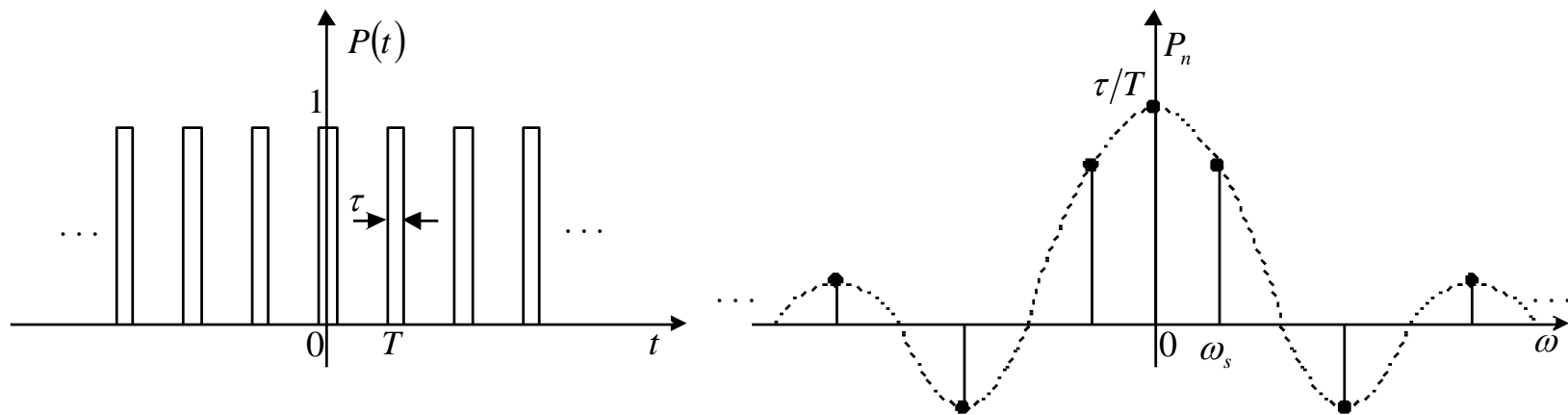


图2.12 (a)



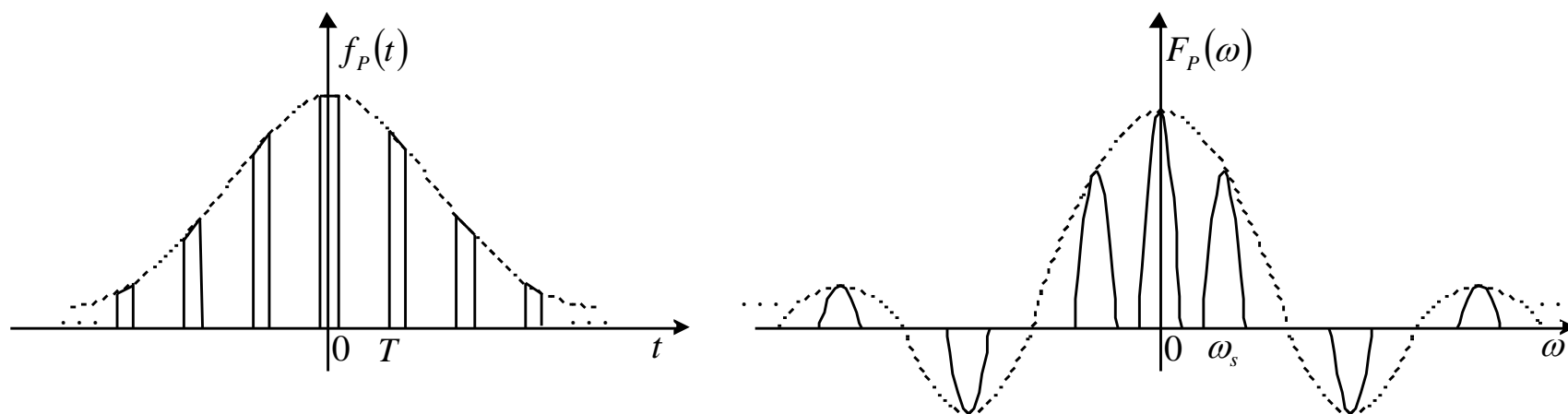
(a) 原信号及频谱示意

图2.12 (b)



(b) 周期性脉冲及频谱

图2.12 (c)



(c) 抽样信号及频谱示意

注：实际应用中还有其他的抽样形式，如平顶抽样等。



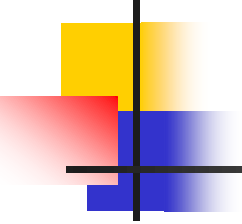
3.时域抽样定理

- 抽样是对原始信号一种常见的处理方式，虽然这样的处理会舍去信号在抽样间隔中的波形，但抽样定律告诉我们：只要满足一定的条件，抽样过程也能保全原信号的所有特征，也就是说，能由抽样信号无失真地恢复原始信号。



低通抽样定理

一个频带限制在 $(0, f_H)$ 内的连续信号 $x(t)$,
如果抽样频率 f_s 大于或等于 $2f_H$, 则可以由
抽样序列无失真地重建 (恢复) 原始信号 $x(t)$ 。

- 
- 实际中遇到的许多信号是带通信号。
 - 信号 $x(t)$ 的频带限制在 (f_L, f_H) 范围内，若带宽 $B = f_H - f_L \leq f_L$ ，则信号 $x(t)$ 称为带通信号。



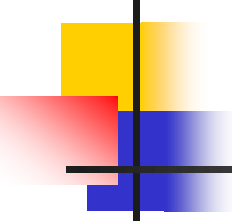
带通抽样定理

- 对带通信号而言，若抽样频率满足

$$f_s = 2(f_H - f_L)(1 + M/N) = 2B(1 + M/N)$$

(2.16)

则可以由抽样序列无失真地重建恢复原始信号。



其中

$$M = \lceil f_H / (f_H - f_L) \rceil - N$$

N 为不超过 $f_H / (f_H - f_L)$ 的最大正整数。

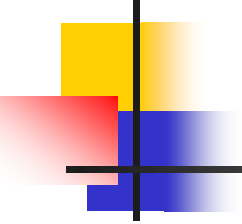
可知 $0 \leq M < 1$ ，而 f_s 则在 $2B$ 到 $4B$ 之间变动。

此时的抽样频率低于低通抽样定律的要求。



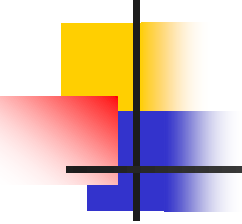
2.2.4 相关函数

- 互相关函数常被用来衡量波形之间关联或相似的程度。



两个能量信号 $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$ 之间的互相关函数
 $R_{12}(t)$ 定义为

$$R_{12}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t + \tau) d\tau \quad (2.17)$$



类似地，若它们是功率信号，则互相关函数则定义为：

$$R_{12}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(\tau) f_2(t + \tau) d\tau$$

(2.18)



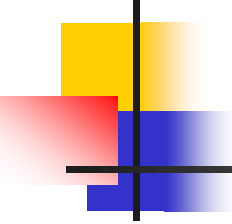
互相关函数的重要特性 (1)

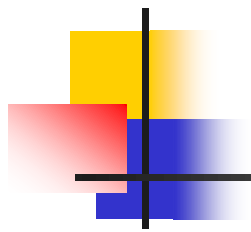
- 若对所有 t ，若 $R_{12}(t)=0$ ，则两个信号互不相关（似）；
- 当 $t \neq 0$ 时， $R_{12}(t) \neq R_{21}(t)$ 但 $R_{12}(t) = R_{21}(-t)$ ；
- $R_{12}(t) \leftrightarrow F_2(\omega)F_1(-\omega)$ ；



互相关函数的重要特性 (2)

- $R_{12}(0)$ 示两信号在无时差时的相关性，其值越大，表示信号之间越相似。在实际使用时，常用由其进行归一化处理之后，所得的归一化相关系数 $|\rho_{12}| \leq 1$ 来衡量两个函数的相似程度。
若 $\rho_{12} = 0$ ，表明两函数完全不相似；
若 $|\rho_{12}| = 1$ ，表明两函数完全相似。

- 
- 当 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 为同一信号时，则互相关函数“变”为自相关函数 $R(t)$ 。
 - 对能量信号而言，其自相关函数与能量谱密度互为傅里叶变换，记作 $R(t) \leftrightarrow E(\omega)$ 。



- 对功率信号而言，其自相关函数与功率谱密度互为傅里叶变换，记作 $R(t) \leftrightarrow P(\omega)$ 。该关系通常被称为维纳-辛钦（Wiener-Khintchine）关系。

注：自相关函数和谱密度之间的关系，给谱密度的求解提供了另一条途径，即先求信号的自相关函，然后再取其傅里叶变换即可。



第二章 信号分析的基本方法

2. 1 信号基础

2. 2 确定信号的分析

2. 3 随机信号

2. 4 信号通过线性系统



2.3 随机信号

随机信号在数学上称为随机过程。随机信号的分析方法可以借鉴确定信号分析。



2.3.1 随机变量

2.3.2 随机过程

2.3.3 随机过程的统计特性

2.3.4 平稳随机过程

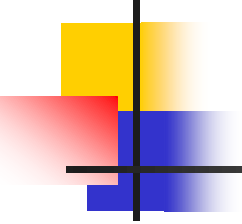
2.3.5 高斯过程

2.3.6 窄带随机过程



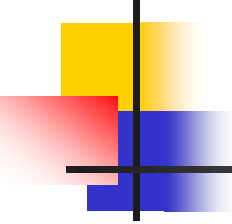
2.3.1 随机变量

- 在数学分析中，将每次实验的结果用一个变量来表示，如果变量的取值是不确定的（以某个概率取某个值），则这种变量称为随机变量。例如在给定的某一瞬间测量接收机输出端上的噪声，所测得的噪声瞬间值就是一个随机变量。

- 
- 随机变量 X 的概率分布函数 $F_X(x)$ 是 X 的取值小于或等于 x 的概率，即

$$F_X(x) = P(X \leq x) \quad (2.19)$$

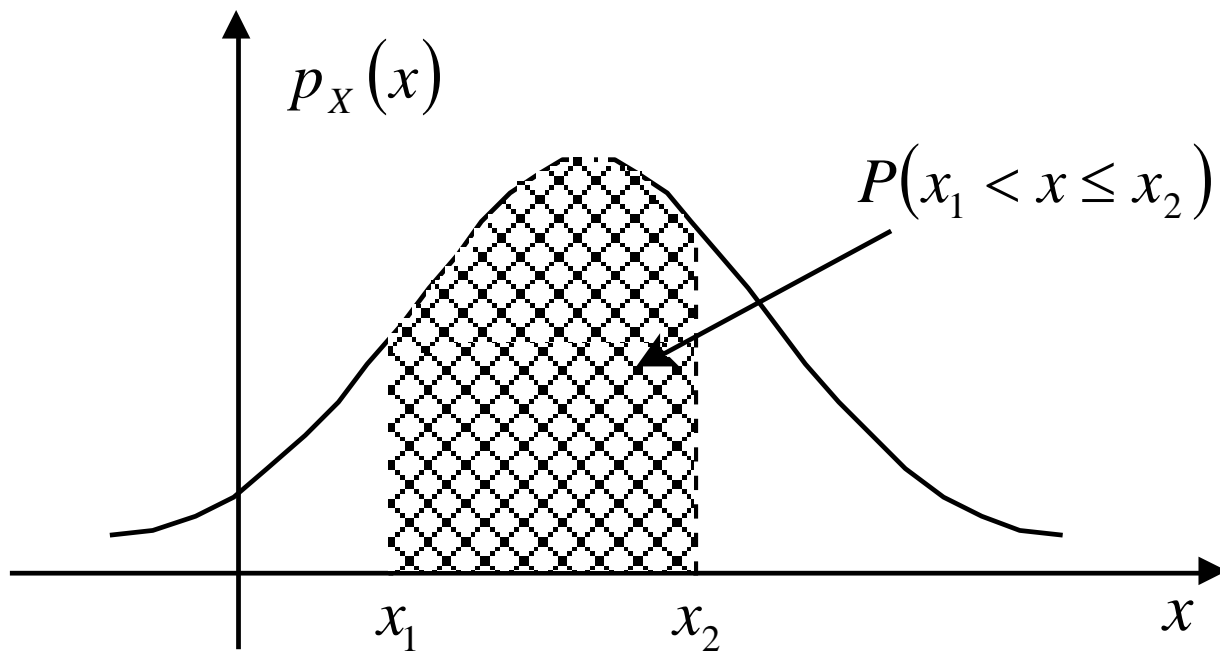
- 在许多问题中，采用概率密度函数 $P_X(x)$ 比采用概率分布函数更方便。概率密度函数被定义为概率分布函数的导数。

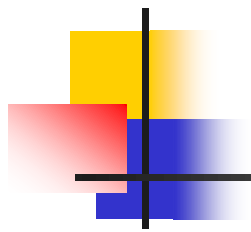
- 
- 概率密度函数和概率分布函数之间的关系可表述为：

X 位于区间 (x_1, x_2) 内的概率是概率密度函数 $P_X(x)$ 在该区间上的积分，即

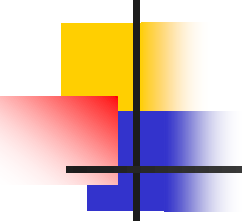
$$P(x_1 < X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} P_X(x) dx \quad (2.20)$$

图2.13 概率密度函数



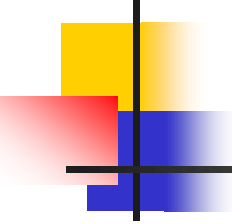


- 若考虑两个随机变量 X 、 Y ，定义二维随机变量 (X, Y) 的联合概率分布函数为 $F_{X,Y}(x, y)$ ，即 X 小于或等于 x 同时 Y 小于或等于 y 的联合概率。

- 
- 类似于单个（一维）随机变量，可定义二维随机变量的联合概率密度函数为

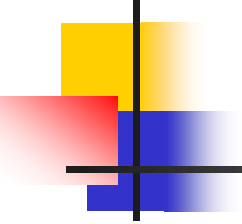
$$P_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y} \quad (2.21)$$

假设联合概率分布函数处处连续，且偏导存在并处处连续。

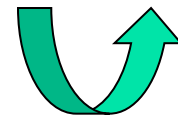
- 
- 随机变量的主要数字特征包括数学期望（均值）和方差（ $D(X)$ ）等。

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx \quad (2.22)$$

$$D[X] = E[(X - a_X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a_X)^2 p_X(x) dx \quad (2.23)$$



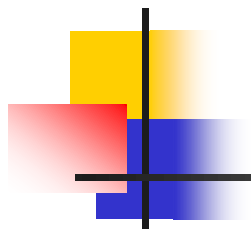
$E(X)$ 反映了随机变量 X 取值的集中位置，有时也用 a_X 表示； $D(X)$ 表示的 X 取值相对于均值的“离散程度”，也常常表示为 σ_X^2 。





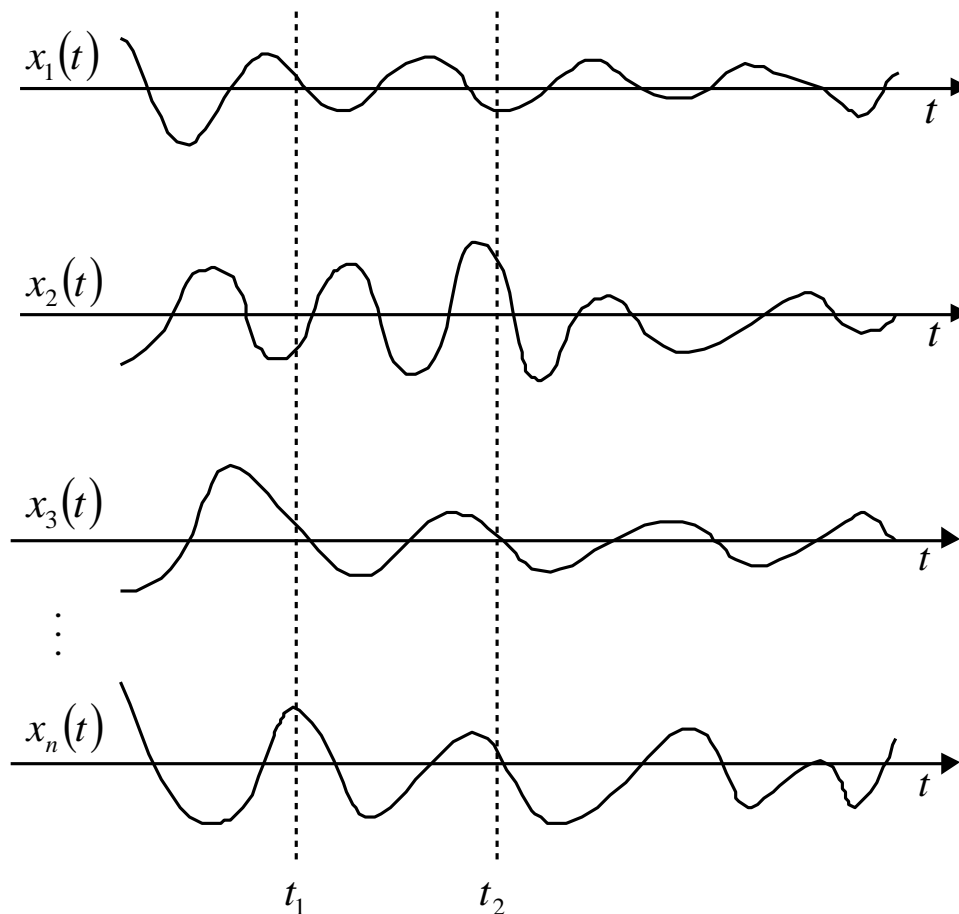
2.3.2 随机过程

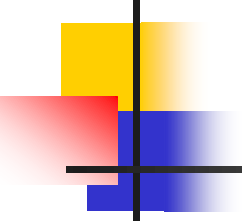
- 如果连续不断地进行实验，那么在任一瞬间，都相应地得到一个随机变量，此时的实验结果就是一个随机过程，即在时间上不断出现的随机变量集合，或者说是一个随机的时间函数。



- 随机过程兼有随机变量和时间函数的特点，就某一瞬间来看，它是一个随机变量，就它的一个样本来看，则是一个时间函数。如图2.14 所示。

图2.14 随机过程的样本函数





如，对通信机的输出噪声进行连续的观察，观察结果将是一个时间函数波形，但具体波形是无法预见的，它可能是图2.14所示的 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 、 $x_3(t)$ 等等，所有这些可能结果的集合就构成了随机过程 $X(t)$ 。每一个可能的波形，称为随机过程的一个实现或样本函数。在一次观察中，随机过程一定取一个样本，然而究竟取哪一个样本，则带有随机性。





2.3.3 随机过程的统计特性

1. 数学期望

2. 方差

3. 自相关函数



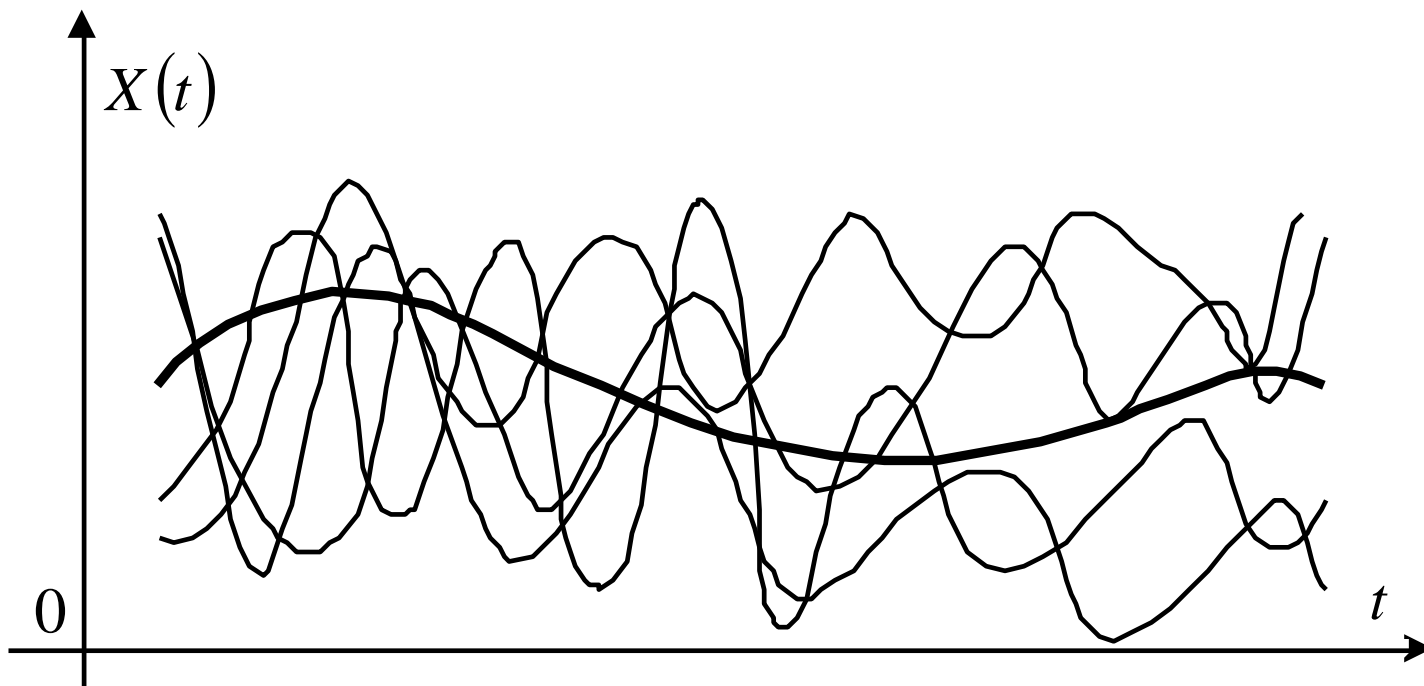
1. 数学期望

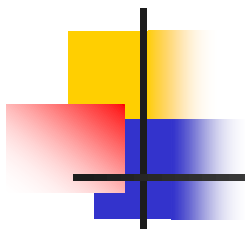
随机过程 $X(t)$ 的数学期望定义为

$$a(t) = E(X(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} xp_1(x;t)dx \quad (2.24)$$

其中 $p_1(x;t)$ 为 $X(t)$ 在某个给定瞬间 t 所对应的随机变量的概率密度函数，下标“1”表示“一维”，即只涉及一个随机变量。

图2.15 随机过程的数学期望





- $a(t)$ 反映了随机过程瞬时值的数学期望随时间变化的规律，是随机过程各个样本的统计平均函数。图2.15 中较细的线表示随机过程的若干样本函数，较粗的曲线则表示数学期望。





2. 方差

- 随机过程 $X(t)$ 的方差定义为

$$\begin{aligned}\sigma^2(t) &= D[X(t)] \\ &= E\{[X(t) - E(X(t))]^2\} \\ &= E\{[X(t) - a(t)]^2\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [x - a(t)]^2 p_1(x; t) dx \quad (2.25)\end{aligned}$$

$\sigma^2(t)$ 描述随机过程 $X(t)$ 在任意瞬间 t 偏离其数学期望的程度。



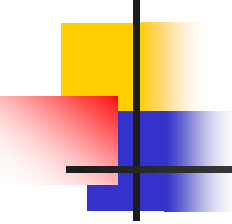


3. 自相关函数

- 随机过程 $X(t)$ 的自相关函数可定义为

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (2.26)$$

其中 $p_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$ 是该随机过程的二维概率密度函数。

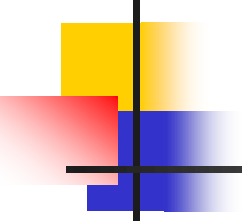
- 
-
- 自相关函数描述了随机过程在两个不同瞬间 t_1 、 t_2 的取值之间的相关程度。





2.3.4 平稳随机过程

- 随机过程分为平稳的和非平稳的两类。简单地说，如果随机过程的统计规律不随时间变化，则为平稳随机过程，否则为非平稳随机过程。

- 
- 对平稳随机过程而言，数学期望和方差都是与时间无关的常数，自相关函数只是时间间隔 $\tau = t_2 - t_1$ 的函数，与选择的时间起点无关。

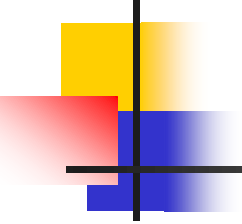
- 
- 上述关系通常表示为:

$$a(t) = a \quad (2.27)$$

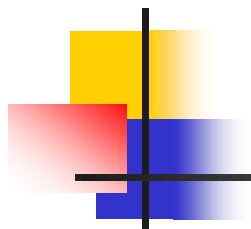
$$\sigma^2(t) = \sigma^2 \quad (2.28)$$

$$R(t_1, t_2) = R(\tau) \quad (2.29)$$

注：在工程实践中，人们常常直接用数学期望、方差、自相关函数三个数字特征是否满足上述特点，来（狭义地）定义一个随机过程是否平稳。

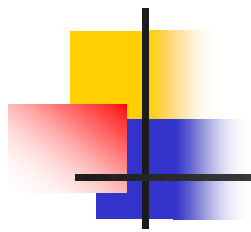
- 
- 平稳随机过程的自相关函数和功率谱密度函数也服从维纳-辛钦关系，即它们互为傅里叶变换对：

$$R(\tau) \leftrightarrow P_X(\omega) \quad (2.30)$$

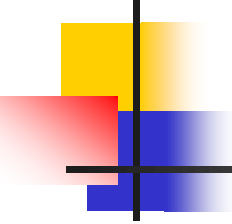


- 许多平稳随机过程都具有一个非常重要的性质：在固定时刻所有样本的统计规律和单一样本在长时间内的统计特性一致，即各个统计平均值等于任何一个样本的相应时间平均值。具有这种性质的平稳随机过程被称为**各态历经**（或各态遍历）的随机过程。

注：通信系统中所遇到的信号和噪声一般都可视为各态历经的平稳随机过程。



- 因此对各态历经的随机过程而言，只要对一个样本进行分析计算，便可得知整个随机过程的统计特性，这样就给分析和测量带来了方便。



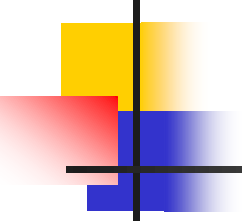
- 例如只要用直流电表测出直流成分，就得到有关随机过程的数学期望；在隔断了直流成分后用均方根电表测得其均方根（均方差开平方），即该随机过程的 σ 。





2.3.5 高斯过程

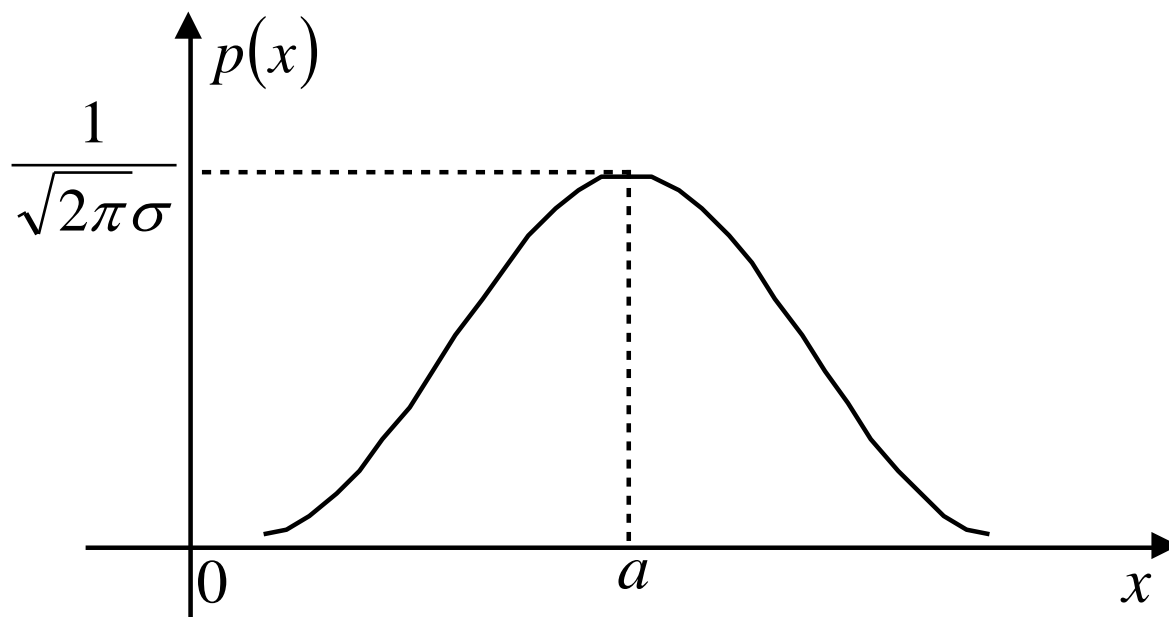
- 高斯过程又称正态随机过程，是一种普遍存在的重要随机过程。
- 高斯过程是指 n 维分布都服从高斯分布的随机过程。

- 
- 为简单起见， n 维分布的具体表达式不进行讨论，这里只给出高斯过程的一维概率密度函数：

$$p_1(x;t) = p_1(x) = \left(1/\sqrt{2\pi}\sigma\right)\exp\left[-(x-a)^2/(2\sigma^2)\right] \quad (2.31)$$

可以看到，这对应于一个众所周知的正态分布，如图2.16所示。

图2.16 正态分布的概密函数

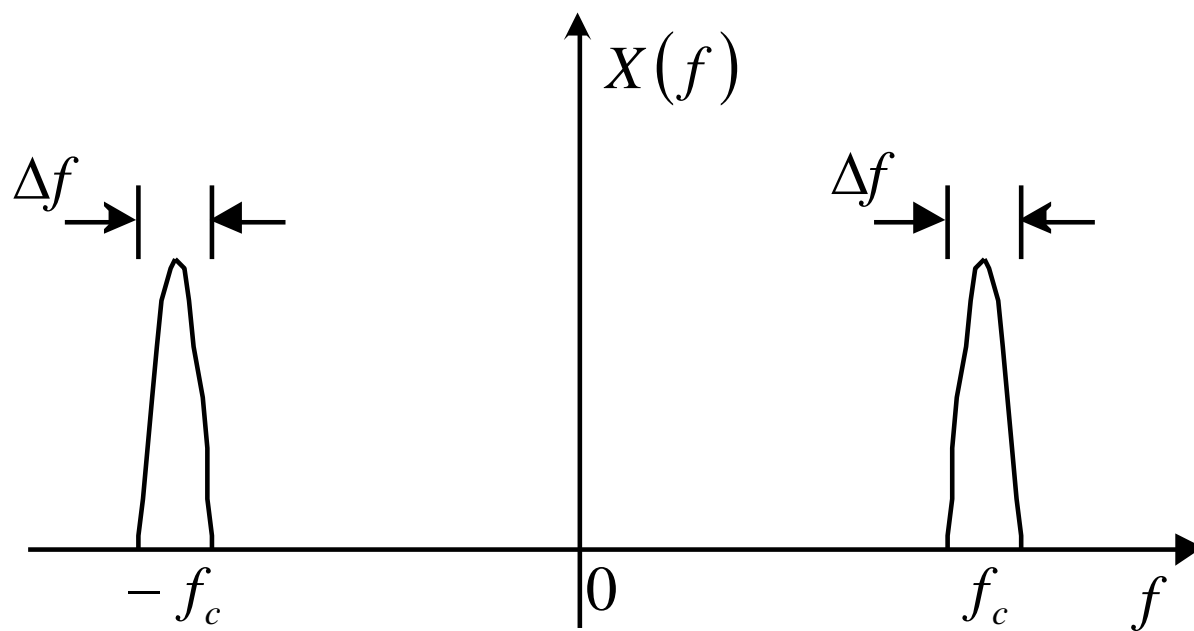




2.3.6 窄带随机过程

- 窄带随机过程是指这样的随机过程：频谱被限制在离开零频率相当远的某个中心频率附近一个窄的频带上。在通信系统中，许多实际的信号和噪声，例如无线广播系统中的中频信号及噪声，都满足“窄带”假设。

图2.17 窄带信号 (a)



(a) 频谱

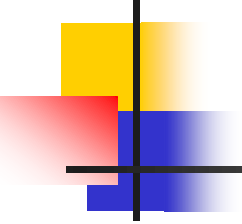
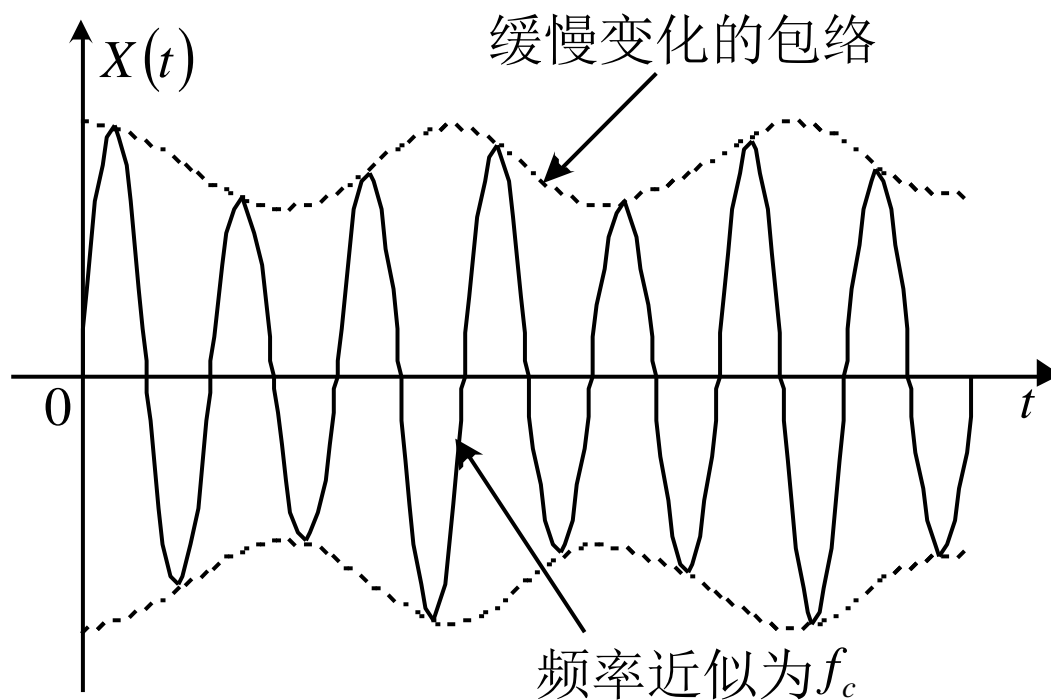
- 
- 窄带信号的频谱如图2.17(a)所示，设中心频率为 f_c ，信号带宽为 Δf ，窄带信号满足 $\Delta f \ll f_c$ 的条件。
 - 如果在示波器上观察这个过程一个样本的波形，如图2.17(b)示意，可以看到信号的包络和相位是相对缓慢变化的。

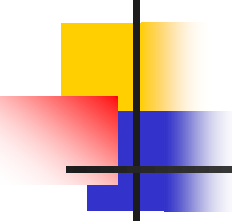
图2.17 窄带信号 (b)



(b) 波形示意

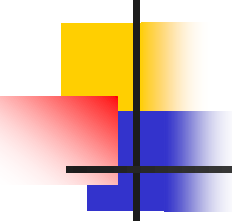
- 
- 窄带随机过程可表示为:

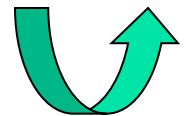
$$X(t) = A_X(t) \cos[\omega_c t + \varphi_X(t)] \quad (2.32)$$

- 
- 为了方便，还可将式（2.32）展开为：

$$\begin{aligned} X(t) &= A_X(t)\cos\varphi_X(t)\cos\omega_c t - A_X(t)\sin\varphi_X(t)\sin\omega_c t \\ &= X_I(t)\cos\omega_c t - X_Q(t)\sin\omega_c t \end{aligned} \quad (2.33)$$

其中 $X_I(t) = A_X(t)\cos\varphi_X(t)$ 、 $X_Q(t) = A_X(t)\sin\varphi_X(t)$ 分别被称为同相分量和正交分量。

- 
- 由上述表达式可以看出， $X(t)$ 的统计特性与 $A_X(t)$ 、 $\varphi_X(t)$ 或 $X_I(t)$ 、 $X_Q(t)$ 的统计特性之间存在特定关系。
 - 可以证明，对一个均值为零的窄带平稳高斯过程而言，其同相分量和正交分量也是平稳高斯过程，且均值为零、方差与原过程相同。





第二章 信号分析的基本方法

2. 1 信号基础

2. 2 确定信号的分析

2. 3 随机信号

2. 4 信号通过线性系统



2.4 信号通过线性系统

2.4.1 时域卷积定理和系统对信号的作用

2.4.2 随机过程通过线性系统

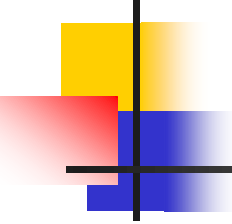
2.4.1 时域卷积定理和系统对信号的作用

- 时域卷积定理指出：

若 $F[f_1(t)] = F_1(\omega)$ 、 $F[f_2(t)] = F_2(\omega)$ ，则

$$F[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega) \quad (2.34)$$

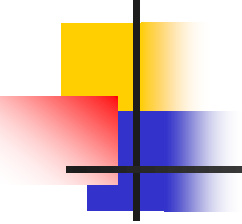
注：这个定理在信号与系统分析过程中意义重大。

- 
- 线性系统的输出信号 $y(t)$ 是输入信号 $x(t)$ 与系统单位冲激响应 $h(t)$ 的卷积：

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = h(t) * x(t)$$

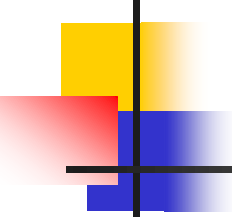
注： 所谓单位冲激响应是当输入信号
为单位冲激信号时系统的输出（响应）
信号，它反映系统（对输入信号）的作
用。

(2.35)

- 
- 根据时域卷积定理，输出信号的频谱 $Y(\omega)$ 和输入信号的频谱 $X(\omega)$ 有如下关系：

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega) \quad (2.36)$$

注：其中 $H(\omega)$ 是 $h(t)$ 的傅里叶变换，常被称为系统的频率响应（频响）或 传递函数。

- 
- 可以看到，时域中较复杂的卷积关系在频域中转化成了易处理的乘积运算。时域卷积定理开辟了从频域角度进行系统分析和求解系统响应的途径。
 - 式（2.36）的物理意义可理解为： $H(\omega)$ 的作用是对输入信号的频谱进行加权，使某些分量加强，另一些则削弱，最终使输出信号频谱中的频率成分满足预定的要求。





2.4.2 随机过程通过线性系统

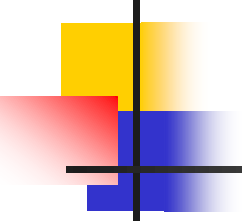
当线性系统的输入为随机过程 $X(t)$ 时，对于 $X(t)$ 的每一个样本函数 $X_i(t)$ ，系统的输出都有一个 $Y_i(t)$ 与之对应，而 $Y_i(t)$ 的整个集合就构成了输出过程 $Y(t)$ 。显然，每个 $X_i(t)$ 和 $Y_i(t)$ 均满足

$$Y_i(t) = h(t) * X_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) X_i(t - \tau) d\tau。$$

- 
- 所以，就整个过程而言，也有：

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)X(t - \tau)d\tau \quad (2.37)$$

即，输出随机过程等于输入随机过程与系统单位冲激响应的卷积。

- 
- 当平稳随机过程通过线性系统时，输出过程与输入过程的基本特征满足较简单的关系：

$$E[Y(t)] = E[X(t)] \cdot H(0) = a_X \cdot H(0) \quad (2.38)$$

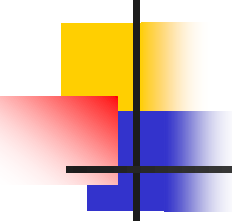
$$R_Y(t_1, t_2) = R_Y(\tau) \quad (2.39)$$

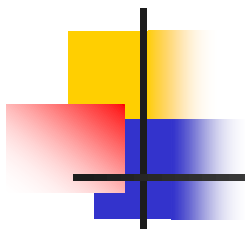
$$P_Y(\omega) = |H(\omega)|^2 P_X(\omega) \quad (2.40)$$



这些关系式分别说明：

- 输出随机过程 $Y(t)$ 的数学期望也是与时间无关的常数，它等于输入随机过程 $X(t)$ 的数学期望 a_X 乘以 $H(0)$ 。这不难理解，因为平稳随机过程的数学期望就是该过程的直流分量，当信号通过线性系统时，系统输出的直流分量就等于输入的直流分量乘以系统的直流增益。

- 
- 当输入随机过程广义平稳时，输出随机过程也是广义平稳的。
 - 输出随机过程 $Y(t)$ 的功率谱密度 $P_Y(\omega)$ 等于输入随机过程 $X(t)$ 的功率谱密度 $P_X(\omega)$ 与系统传递函数模值 $|H(\omega)|$ 平方的乘积。因为 $|H(\omega)|$ 代表系统电压（或电流）增益的频率特性，其平方则是系统功率增益的频率特性。



- 一般说来，要根据输入过程的概率分布来确定输出过程的概率分布是极其困难的。不过如果输入线性系统的是一个高斯过程，则输出也是一个高斯过程，因为高斯过程经过线性变换仍然是高斯过程。



第二章结束