第四章 二次同余
2015年04月21日

信息安全数学基础

陈恭亮 教授 博士生导师

上海交通大学信息安全工程学院

chengl@sjtu.edu.cn

*第四章 二次同余式与平方剩余

思考题:

模为素数p 的二次同余式

$$x^2 \equiv a \pmod{p}, \qquad (a, p) = 1. \tag{1}$$

1. 同余式(5)有解的判断?
2. 同余式(5)有解的个数?
3. 同余式(5)求解的方法和过程?

Rabin 密码系统: $n = p \cdot q$

加密: $m^2 \equiv a \pmod{p \cdot q}$

解密: $x^2 \equiv a \pmod{p \cdot q}$

*第四章 二次同余式与平方剩余

本章主要讨论如下问题.

1. 二次同余式的基本概念
2. 模平方剩余与模平方非剩余
3. 勒让得符号 二次互反律
4. 二次同余式有解的判断
5. 高斯引理 二次互反律之证明
6. 雅克比符号
7. 模p 平方根的计算
8. 椭圆曲线点的计算

4.1 一般二次同余式

二次同余式的一般形式是

$$ax^2+bx+c\equiv 0 \pmod{m} \tag{2}$$

其中$m\nmid a$. 因为

$$m=p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k},$$

所以二次同余式(1)式等价于同余式组:

$$\begin{cases} ax^2+bx+c\equiv 0 \pmod{p_1^{\alpha_1}},\\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ ax^2+bx+c\equiv 0 \pmod{p_k^{\alpha_k}}. \end{cases}$$

故只需讨论模为p^α 同余式:

$$ax^2+bx+c\equiv 0 \pmod{p^\alpha},\qquad p\nmid a. \tag{3}$$

$$\underline{ax^2+bx+c\equiv 0 \pmod{p^\alpha}}$$

将(3) 的两端同乘$4a$, 得到

$$4a^2x^2+4abx+4ac\equiv 0 \pmod{p^\alpha}$$

或

$$(2ax+b)^2\equiv b^2-4ac \pmod{p^\alpha}.$$

令$y=2ax+b$, 有

$$y^2\equiv b^2-4ac \pmod{p^\alpha}.$$

特别地, 当p 是奇素数时, $(2a,p)=1$. 上述同余式等价于(3).

定义4.1.1 若同余式

$$x^2 \equiv a \pmod{m}, \qquad (a, m) = 1 \tag{4}$$

有解, 则a 叫做模m **的平方剩余**(或**二次剩余**);
否则, a 叫做 模m**的平方非剩余** (或**二次非剩余**).

问题:

1) 整数a 模m 平方剩余与实数中平方根$\sqrt{a}$ 有什么区别?

2) 如何判断同余式(4) 有解?

3) 如何求同余式(4) 的解?

例4.1.1 1 是模4 平方剩余, -1 是模4 平方非剩余.

例4.1.2 1, 2, 4 是模7 平方剩余, -1, 3, 5 是模7 平方非剩余.

因为$1^2 \equiv 1,\ 2^2 \equiv 4,\ 3^2 \equiv 2,\ 4^2 \equiv 2,\ 5^2 \equiv 4,\ 6^2 \equiv 1 \pmod 7$.

例4.1.3 -1, 1, 2, 4, 8, 9, 13, 15 是模17 平方剩余;

3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14 是模17 平方非剩余. 因为

$$1^2 \equiv 16^2 \equiv 1,\ 2^2 \equiv 15^2 \equiv 4,\ 3^2 \equiv 14^2 \equiv 9,\quad 4^2 \equiv 13^2 \equiv 16 \equiv -1,$$
$$5^2 \equiv 12^2 \equiv 8,\ 6^2 \equiv 11^2 \equiv 2,\ 7^2 \equiv 10^2 \equiv 15,\ 8^2 \equiv 9^2 \equiv 13 \pmod{17}.$$

例4.1.4 求满足方程$E: y^2 = x^3 + x + 1 \pmod 7$ 的所有点(x, y).

解 对$x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$, 分别求出$y$.

$x = 0,\ y^2 = 1 \pmod 7,\quad y = 1,\ 6 \pmod 7,$

$x = 1,\ y^2 = 3 \pmod 7,$ 无解,

$x = 2,\ y^2 = 4 \pmod 7,\quad y = 2,\ 5 \pmod 7,$

$x = 3,\ y^2 = 3 \pmod 7,$ 无解,

$x = 4,\ y^2 = 6 \pmod 7,$ 无解,

$x = 5,\ y^2 = 5 \pmod 7,$ 无解,

$x = 6,\ y^2 = 6 \pmod 7,$ 无解.

共有4 个点.

例4.1.5 求满足方程$E: y^2 = x^3 + x + 2 \pmod 7$ 的所有点.

解 对$x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$, 分别求出y.

$x = 0,\ y^2 = 2 \pmod 7,\quad y = 3,\ 4 \pmod 7,$

$x = 1,\ y^2 = 4 \pmod 7,\quad y = 2,\ 5 \pmod 7,$

$x = 2,\ y^2 = 5 \pmod 7,$ 无解,

$x = 3,\ y^2 = 4 \pmod 7,\quad y = 2,\ 5 \pmod 7,$

$x = 4,\ y^2 = 0 \pmod 7,\quad y = 0 \pmod 7,$

$x = 5,\ y^2 = 6 \pmod 7,$ 无解,

$x = 6,\ y^2 = 0 \pmod 7,\quad y = 0 \pmod 7.$

共有8 个点.

例4.1.6 求满足方程$E: y^2 = x^3 + 2x - 1 \pmod 7$ 的所有点.

解 对$x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$, 分别求出y.

$x = 0,\ y^2 = 6 \pmod 7$, 无解,

$x = 1,\ y^2 = 2 \pmod 7$, $y = 3,\ 4 \pmod 7$,

$x = 2,\ y^2 = 4 \pmod 7$, $y = 2,\ 5 \pmod 7$,

$x = 3,\ y^2 = 4 \pmod 7$, $y = 2,\ 5 \pmod 7$,

$x = 4,\ y^2 = 1 \pmod 7$, $y = 1,\ 6 \pmod 7$,

$x = 5,\ y^2 = 1 \pmod 7$, $y = 1,\ 6 \pmod 7$,

$x = 6,\ y^2 = 3 \pmod 7$, 无解,

共有10 个点.

例4.1.7 求满足方程$E: y^2 = x^3 - x + 1 \pmod 7$ 的所有点.

解 对$x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$, 分别求出y.

$x = 0,\ y^2 = 1 \pmod 7, \quad y = 1,\ 6 \pmod 7,$

$x = 1,\ y^2 = 1 \pmod 7, \quad y = 1,\ 6 \pmod 7,$

$x = 2,\ y^2 = 0 \pmod 7, \quad y = 0 \pmod 7,$

$x = 3,\ y^2 = 4 \pmod 7, \quad y = 2,\ 5 \pmod 7,$

$x = 4,\ y^2 = 5 \pmod 7,$ 　无解,

$x = 5,\ y^2 = 2 \pmod 7, \quad y = 3,\ 4 \pmod 7,$

$x = 6,\ y^2 = 1 \pmod 7, \quad y = 1,\ 6 \pmod 7.$

共有11 个点.

例4.1.8 求满足方程$E: y^2 = x^3 + 3x - 1 \pmod 7$ 的所有点.

解 对$x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$, 分别求出$y$.

$x = 0,\ y^2 = 6 \pmod 7$, 无解,

$x = 1,\ y^2 = 3 \pmod 7$, 无解,

$x = 2,\ y^2 = 6 \pmod 7$, 无解,

$x = 3,\ y^2 = 0 \pmod 7$, $y = 0 \pmod 7$,

$x = 4,\ y^2 = 5 \pmod 7$, 无解,

$x = 5,\ y^2 = 6 \pmod 7$, 无解,

$x = 6,\ y^2 = 2 \pmod 7$, $y = 3,\ 4 \pmod 7$,

共有3 个点.

例4.1.9 求解同余式$x^2 \equiv 46 \pmod{105}$.

解 因为$105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, 原同余式等价于同余式组:

$$\begin{cases} x^2 & \equiv & 46 & \equiv & 1 & \pmod 3 \\ x^2 & \equiv & 46 & \equiv & 1 & \pmod 5 \\ x^2 & \equiv & 46 & \equiv & 4 & \pmod 7 \end{cases}$$

分别求出三个同余式的解为:

$$x = x_1 \equiv \pm 1 \pmod 3, \quad x = x_2 \equiv \pm 1 \pmod 5, \quad x = x_1 \equiv \pm 2 \pmod 7,$$

由物不知数和中国剩余定理即得解为:

$$\begin{aligned}
x &= 1 \cdot 70 + 1 \cdot 21 + 2 \cdot 15 = 121 \equiv 16 \pmod{105} \\
x &= 1 \cdot 70 + 1 \cdot 21 + (-2) \cdot 15 = 61 \equiv 61 \pmod{105} \\
x &= 1 \cdot 70 + (-1) \cdot 21 + 2 \cdot 15 = 79 \equiv 79 \pmod{105} \\
x &= 1 \cdot 70 + (-1) \cdot 21 + (-2) \cdot 15 = 19 \equiv 19 \pmod{105} \\
x &= (-1) \cdot 70 + 1 \cdot 21 + 2 \cdot 15 = -19 \equiv 86 \pmod{105} \\
x &= (-1) \cdot 70 + 1 \cdot 21 + (-2) \cdot 15 = -79 \equiv 26 \pmod{105} \\
x &= (-1) \cdot 70 + (-1) \cdot 21 + 2 \cdot 15 = -62 \equiv 44 \pmod{105} \\
x &= (-1) \cdot 70 + (-1) \cdot 21 + (-2) \cdot 15 = -121 \equiv 89 \pmod{105}
\end{aligned}$$

例4.1.10 求解同余式$x^2 \equiv 1219 \pmod{2310}$.

解 因为$2310 = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 11$, 原同余式等价于同余式组:

$$\begin{cases} x^2 \equiv 1219 \equiv 4 \pmod 5 \\ x^2 \equiv 1219 \equiv 1 \pmod 6 \\ x^2 \equiv 1219 \equiv 1 \pmod 7 \\ x^2 \equiv 1219 \equiv 9 \pmod{11} \end{cases}$$

分别求出三个同余式的解为:

$$x = x_1 \equiv \pm 2 \pmod 5, \quad x = x_2 \equiv \pm 1 \pmod 6,$$

$$x = x_3 \equiv \pm 1 \pmod 7, \quad x = x_4 \equiv \pm 3 \pmod 7,$$

由韩信点兵和中国剩余定理即得解为:

$$x \equiv b_1 \cdot 1386 + b_2 \cdot 385 + b_3 \cdot 330 + b_4 \cdot 210 \pmod{2310}$$

$$x = 2 \cdot 1386 + 1 \cdot 385 + 1 \cdot 330 + 3 \cdot 210 = 4117 \equiv 1807 \pmod{2310}$$
$$x = 2 \cdot 1386 + 1 \cdot 385 + 1 \cdot 330 + (-3) \cdot 210 = 2857 \equiv 547 \pmod{2310}$$
$$x = 2 \cdot 1386 + 1 \cdot 385 + (-1) \cdot 330 + 3 \cdot 210 = 3457 \equiv 1147 \pmod{2310}$$
$$x = 2 \cdot 1386 + 1 \cdot 385 + (-1) \cdot 330 + (-3) \cdot 210 = 2197 \equiv 2197 \pmod{2310}$$
$$x = 2 \cdot 1386 + (-1) \cdot 385 + 1 \cdot 330 + 3 \cdot 210 = 3347 \equiv 1037 \pmod{2310}$$
$$x = 2 \cdot 1386 + (-1) \cdot 385 + 1 \cdot 330 + (-3) \cdot 210 = 2087 \equiv 2087 \pmod{2310}$$
$$x = 2 \cdot 1386 + (-1) \cdot 385 + (-1) \cdot 330 + 3 \cdot 210 = 2687 \equiv 377 \pmod{2310}$$
$$x = 2 \cdot 1386 + (-1) \cdot 385 + (-1) \cdot 330 + (-3) \cdot 210 = 1427 \equiv 1427 \pmod{2310}$$
$$x = (-2) \cdot 1386 + 1 \cdot 385 + 1 \cdot 330 + 3 \cdot 210 = -1427 \equiv 883 \pmod{2310}$$
$$x = (-2) \cdot 1386 + 1 \cdot 385 + 1 \cdot 330 + (-3) \cdot 210 = -2687 \equiv 1933 \pmod{2310}$$
$$x = (-2) \cdot 1386 + 1 \cdot 385 + (-1) \cdot 330 + 3 \cdot 210 = -2087 \equiv 223 \pmod{2310}$$
$$x = (-2) \cdot 1386 + 1 \cdot 385 + (-1) \cdot 330 + (-3) \cdot 210 = -3347 \equiv 1273 \pmod{2310}$$
$$x = (-2) \cdot 1386 + (-1) \cdot 385 + 1 \cdot 330 + 3 \cdot 210 = -2197 \equiv 113 \pmod{2310}$$
$$x = (-2) \cdot 1386 + (-1) \cdot 385 + 1 \cdot 330 + (-3) \cdot 210 = -3457 \equiv 1163 \pmod{2310}$$
$$x = (-2) \cdot 1386 + (-1) \cdot 385 + (-1) \cdot 330 + 3 \cdot 210 = -2857 \equiv 1763 \pmod{2310}$$
$$x = (-2) \cdot 1386 + (-1) \cdot 385 + (-1) \cdot 330 + (-3) \cdot 210 = -4117 \equiv 503 \pmod{2310}$$

4.2 模为奇素数的平方剩余与平方非剩余

讨论模为素数p 的二次同余式

$$x^2 \equiv a \pmod{p}, \qquad (a,p)=1. \tag{5}$$

定理4.2.1 (欧拉判别条件) 设p 是奇素数, $(a,p)=1$. 则
(i) a 是模p 的平方剩余的充分必要条件是

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}; \tag{6}$$

(ii) a 是模p 的平方非剩余的充分必要条件是

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}. \tag{7}$$

并且当a是模p的平方剩余时, 同余式(5)恰有二解.

证 (i) 因为p 是奇素数, 所以有表达式

$$\begin{aligned} x^p - x &= x((x^2)^{\frac{p-1}{2}} - a^{\frac{p-1}{2}}) + (a^{\frac{p-1}{2}} - 1)x \\ &= x \cdot q(x) \cdot (x^2 - a) + (a^{\frac{p-1}{2}} - 1)x, \end{aligned}$$

其中$q(x)$ 是x 的整系数多项式.
若a 是模p 的平方剩余, 即

$$x^2 \equiv a \pmod p$$

有二个解x, 根据§3.4 定理3.4.5, 余式的系数被p 整除, 即

$$p \mid a^{\frac{p-1}{2}} - 1.$$

所以(6)成立.

反过来, 若(6)成立, 则同样根据§3.4 定理3.4.5 , 我们有同余式

$$x^2 \equiv a \pmod{p}$$

有解, 即a是模p 平方剩余.

(ii) 因为p 是奇素数, $(a,p)=1$, 根据欧拉定理(§2.4 定理2.4.1) , 我们有表达式

$$(a^{\frac{p-1}{2}}+1)(a^{\frac{p-1}{2}}-1)=a^{p-1}-1\equiv 0 \pmod{p}.$$

再根据§1.4 定理1.4.2 , 我们有

$$p \mid a^{\frac{p-1}{2}}-1 \quad \text{或} \quad p \mid a^{\frac{p-1}{2}}+1.$$

因此, 结论(i)告诉我们: a 是模p 的平方非剩余的充分必要条件是

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}.$$

证毕

例4.2.1 判断137 是否为模227 平方剩余.

解 根据定理4.2.1, 我们要计算:

$$137^{(227-1)/2} = 137^{113} \pmod{227}.$$

运用模重复平方法. 设$m = 227$, $b = 137$. 令$a = 1$. 将113 写成二进制, $113 = 1 + 2^4 + 2^5 + 2^6$.

我们依次计算如下:

1). $n_0 = 1$. 计算 $a_0 = a \cdot b^{n_0} \equiv 137$, $b_1 \equiv b^2 \equiv 155 \pmod{m}$.

2). $n_1 = 0$. 计算 $a_1 = a_0 \cdot b_1^{n_1} \equiv 137$, $b_2 \equiv b_1^2 \equiv 190 \pmod{m}$.

3). $n_2 = 0$. 计算 $a_2 = a_1 \cdot b_2^{n_2} \equiv 137$, $b_3 \equiv b_2^2 \equiv 7 \pmod{m}$.

4). $n_3 = 0$. 计算 $a_3 = a_2 \cdot b_3^{n_3} \equiv 137$, $b_4 \equiv b_3^2 \equiv 49 \pmod{m}$.

5). $n_4 = 1$. 计算 $a_4 = a_3 \cdot b_4^{n_4} \equiv 130$, $b_5 \equiv b_4^2 \equiv 131 \pmod{m}$.

6). $n_5 = 1$. 计算 $a_5 = a_4 \cdot b_5^{n_5} \equiv 5$, $b_6 \equiv b_5^2 \equiv 136 \pmod{m}$.

7). $n_6 = 1$. 计算 $a_6 = a_5 \cdot b_6^{n_6} \equiv 226 \equiv -1 \pmod{m}$.

因此, 137 为模227 平方非剩余.

推论 设p 是奇素数, $(a_1, p) = 1$, $(a_2, p) = 1$. 则
(i) 如果a_1, a_2 都是模p 的平方剩余, 则$a_1 \cdot a_2$ 是模p 的平方剩余;
(ii) 如果a_1, a_2 都是模p 的平方非剩余, 则$a_1 \cdot a_2$ 是模p 的平方剩余;
(iii) 如果a_1 是模p 的平方剩余, a_2 是模p 的平方非剩余, 则$a_1 \cdot a_2$ 是模p 的平方非剩余.

证 因为

$$(a_1 \cdot a_2)^{\frac{p-1}{2}} = a_1^{\frac{p-1}{2}} \cdot a_2^{\frac{p-1}{2}},$$

所以由定理4.2.1即得结论. 证毕

定理4.2.2 设p 是奇素数. 则模p 的简化剩余系中平方剩余与平方非剩余的个数各为$\frac{p-1}{2}$, 且$\frac{p-1}{2}$ 个平方剩余与序列:

$$1^2,\ 2^2,\ \ldots,\ (\frac{p-1}{2})^2 \tag{8}$$

中的一个数同余,且仅与一个数同余.

证 由定理4.2.1 , 平方剩余的个数等于 $x^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$ 的解数. 但 $x^{\frac{p-1}{2}} - 1 \mid x^{p-1} - 1$.

由定理3.4.5 , 此同余式的解数是$\frac{p-1}{2}$, 故平方剩余的个数是$\frac{p-1}{2}$, 而平方非剩余个数是$p-1-\frac{p-1}{2}=\frac{p-1}{2}$.

再证明定理的第二部分: 若(8)中有两个数模p 同余,即存在$k_1 \neq k_2$ 使得 $k_1^2 \equiv k_2^2 \pmod p$, 则 $(k_1+k_2)(k_1-k_2) \equiv 0 \pmod p$. 因此, $p \mid k_1+k_2$ 或 $p \mid k_1-k_2$. 但$1 \le k_1,\ k_2 \le (p-1)/2$, 故 $2 \le k_1+k_2 \le p-1 < p$, $|k_1-k_2| \le p-1 < p$.

从而, $k_1 = k_2$. 矛盾. 证毕

4.3 勒让得符号

§4.2 定理1 给出了整数a 是否是模奇素数p 二次剩余的判别法则，但需要作较复杂的运算. 我们希望有一种更简单的判别法则.

定义4.3.1 设p 是素数. 定义**勒让得(Legendre)符号**如下:

$$\left(\frac{a}{p}\right)=\begin{cases}1, & \text{若}a\text{是模}p\text{的平方剩余;}\\ -1, & \text{若}a\text{是模}p\text{的平方非剩余;}\\ 0, & \text{若}p|a.\end{cases}$$

例4.3.1 根据§4.1 例4.1.3, 我们有

$$\left(\frac{-1}{17}\right)=\left(\frac{1}{17}\right)=\left(\frac{2}{17}\right)=\left(\frac{4}{17}\right)=\left(\frac{8}{17}\right)=\left(\frac{9}{17}\right)=\left(\frac{13}{17}\right)=\left(\frac{15}{17}\right)=1;$$

$$\left(\frac{3}{17}\right)=\left(\frac{5}{17}\right)=\left(\frac{6}{17}\right)=\left(\frac{7}{17}\right)=\left(\frac{10}{17}\right)=\left(\frac{11}{17}\right)=\left(\frac{12}{17}\right)=\left(\frac{14}{17}\right)=-1.$$

利用勒让得符号, 可将§4.2 定理4.2.1 叙述为:

定理4.3.1 (欧拉判别法则) 对任意整数a,

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod p.$$

证 根据定义及定理4.2.1 , 我们有

$$\left(\frac{a}{p}\right) = 1 \iff a \text{ 是模 } p \text{ 平方剩余} \iff a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$$

和

$$\left(\frac{a}{p}\right) = -1 \iff a \text{ 是模 } p \text{ 平方非剩余} \iff a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod p$$

以及

$$\left(\frac{a}{p}\right) = 0 \iff p \mid a \iff a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 0 \pmod p$$

所以定理成立. 证毕

例4.3.2 证明2 是模17 平方剩余; 3 是模17 平方非剩余.

因为$(17-1)/2 = 2^3$, 且有

$$2^2 \equiv 4,\ 2^4 \equiv 4^2 \equiv -1,\ 2^8 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod{17};$$
$$3^2 \equiv 9,\ 3^4 \equiv 9^2 \equiv -4,\ 3^8 \equiv (-4)^2 \equiv -1 \pmod{17}.$$

定理4.3.2 设p 是奇素数, 则

$$(1)\ \left(\frac{1}{p}\right) = 1; \tag{9}$$

$$(2)\ \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}. \tag{10}$$

证 根据欧拉判别法则(定理4.3.1) ,

对于$a = 1$时, 有

$$a^{\frac{p-1}{2}} = 1,$$

所以(9)成立;

而对于$a = -1$时, 有

$$a^{\frac{p-1}{2}} = (-1)^{\frac{p-1}{2}},$$

又因为p 是奇数, 所以(10)成立. 证毕

推论 设p 是奇素数, 那么

$$\left(\frac{-1}{p}\right)=\begin{cases}1, & \text{若 } p\equiv 1 \pmod 4;\\ -1, & \text{若 } p\equiv 3 \pmod 4.\end{cases}$$

证 根据欧拉判别法则, $\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}$.

若$p\equiv 1 \pmod 4$, 则$p=4k+1$,

$$\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}=(-1)^{2k}=1.$$

若$p\equiv 3 \pmod 4$, 则$p=4k+3$,

$$\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}=(-1)^{2k+1}=-1.$$

例4.3.3 判断同余式

$$x^2 \equiv -1 \pmod{365}$$

是否有解, 有解时, 求出其解数.

解 $365 = 5 \cdot 73$ 不是素数, 原同余式等价于:

$$\begin{cases} x^2 \equiv -1 \pmod{5}, \\ x^2 \equiv -1 \pmod{73}. \end{cases}$$

因为

$$\left(\frac{-1}{5}\right) = (-1)^{\frac{5-1}{2}} = 1, \qquad \left(\frac{-1}{73}\right) = (-1)^{\frac{73-1}{2}} = 1,$$

故同余式组有解. 原同余式有解, 解数为4.

下面我们给出勒让得符号的函数性质(周期性和完全可乘性):

定理4.3.3 设p 是奇素数, 则

$$(i)\ (\text{周期性})\quad \left(\frac{a+p}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right); \tag{11}$$

$$(ii)\ (\text{完全可乘性})\quad \left(\frac{a\cdot b}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right); \tag{12}$$

$$(iii)\ \text{设}\ (a,p)=1,\ \text{则}\ \left(\frac{a^2}{p}\right) = 1. \tag{13}$$

证 (i) 因为同余式　$x^2 \equiv a+p \pmod p$

等价于同余式　$x^2 \equiv a \pmod p$,

所以

$$\left(\frac{a+p}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right).$$

(ii) 根据欧拉判别法则(定理4.3.1), 我们有

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod p, \qquad \left(\frac{b}{p}\right) \equiv b^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$$

以及 $\left(\frac{a\cdot b}{p}\right) \equiv (a\cdot b)^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$.

因此 $\left(\frac{a\cdot b}{p}\right) \equiv (a\cdot b)^{\frac{p-1}{2}} = a^{\frac{p-1}{2}} \cdot b^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) \pmod p$.

因为勒让得符号取值± 1,且p 是奇素数, 所以我们有

$$\left(\frac{a\cdot b}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right).$$

(iii) 由(ii) 立即得到. 证毕

推论 设p 是奇素数. 如果整数a, b 满足$a \equiv b \pmod p$, 则

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right).$$

4.3.2 高斯引理

对于一个与p 互素的整数a, Gauss 给出了另一判别法则, 以判断a 是否为模p 二次剩余.

引理4.3.1 (Gauss) 设p 是奇素数. a 是整数, $(a,p)=1$. 如果整数

$$a\cdot 1,\ a\cdot 2,\ \dots,\ a\cdot\frac{p-1}{2}$$

中模p的最小正剩余大于$\frac{p}{2}$ 的个数是m, 则

$$\left(\frac{a}{p}\right)=(-1)^m. \tag{14}$$

证 设$a_1,\ \dots,\ a_t$ 是$a\cdot 1,\ a\cdot 2,\ \dots,\ a\cdot\frac{p-1}{2}$ 模p的小于$\frac{p}{2}$ 的最小正剩余, $b_1,\ \dots,\ b_m$ 是这些整数模p 的大于$\frac{p}{2}$ 的最小正剩余, 则

$$a^{\frac{p-1}{2}}(\frac{p-1}{2})!=\prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}(a\cdot k)\equiv\prod_{i=1}^{t}a_i\prod_{j=1}^{m}b_j\equiv(-1)^m\prod_{i=1}^{t}a_i\prod_{j=1}^{m}(p-b_j)\pmod p.$$

$$a^{\frac{p-1}{2}}(\frac{p-1}{2})! = \prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}(a\cdot k) \equiv \prod_{i=1}^{t} a_i \prod_{j=1}^{m} b_j \equiv (-1)^m \prod_{i=1}^{t} a_i \prod_{j=1}^{m}(p-b_j) \pmod p.$$

易知$a_1,\ \ldots,\ a_t,\ p-b_1,\ \ldots,\ p-b_m$ 是模p 两两不同余的. 否则,

$$a\cdot k_i \equiv p - a\cdot k_j, \quad \text{或} \quad a\cdot k_i + a\cdot k_j \equiv 0 \pmod p.$$

因而$k_i + k_j \equiv 0 \pmod p$, 这不可能, 因为

$$1 \le k_i + k_j \le \frac{p-1}{2} + \frac{p-1}{2} < p.$$

这样, $a_1,\ \ldots,\ a_t,\ p-b_1,\ \ldots,\ p-b_m$ 是$1, \ldots, \frac{p-1}{2}$ 的一个排列,

$$a^{\frac{p-1}{2}}(\frac{p-1}{2})! \equiv (-1)^m \prod_{i=1}^{t} a_i \prod_{j=1}^{m}(p-b_j) = (-1)^m(\frac{p-1}{2})! \pmod p.$$

因而, $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^m \pmod p$. $\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^m$.

下面我们给出2 是否为模p 平方剩余的判断, 以及将判断a 是否为模p 平方剩余转化为整数个数的计算($T(a,p)=\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\left[\frac{a\cdot k}{p}\right]$).

定理4.3.4 p 是奇素数.

$$(i)\quad \left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}. \tag{15}$$

$$(ii)\quad \text{若 } (a,2p)=1,\ \text{则 } \left(\frac{a}{p}\right)=(-1)^{T(a,p)}. \tag{16}$$

证: 因为

$$a\cdot k=\left[\frac{a\cdot k}{p}\right]\cdot p+r_k,\quad 0<r_k<p,\quad k=1,\ \ldots,\ \frac{p-1}{2},$$

对$k=1,\ \ldots,\ \frac{p-1}{2}$求和, 并记$T(a,p)=\sum_{k=1}^{(p-1)/2}\left[\frac{a\cdot k}{p}\right]$, 我们有

$$
\begin{aligned}
a\cdot\frac{p^2-1}{8} &= T(a,p)\cdot p+\sum_{i=1}^{t}a_i+\sum_{j=1}^{m}b_j \\
&= T(a,p)\cdot p+\sum_{i=1}^{t}a_i+\sum_{j=1}^{m}(p-b_j)+2\sum_{j=1}^{m}b_j-m\cdot p \\
&= T(a,p)\cdot p+\frac{p^2-1}{8}-m\cdot p+2\sum_{j=1}^{m}b_j,
\end{aligned}
$$

因此,

$$(a-1)\cdot\frac{p^2-1}{8}\equiv T(a,p)+m \pmod 2.$$

若$a=2$, 则对于$0\le k\le\frac{p-1}{2}$, 有$0\le\left[\frac{a\cdot k}{p}\right]\le\left[\frac{p-1}{p}\right]=0$, 从

而$T(a,p)=0$, 因而$m\equiv\frac{p^2-1}{8}\pmod 2$;

若a 为奇数, 则 $m\equiv T(a,p)\pmod 2$.

故由引理4.3.1知定理成立. 证毕

例4.3.4 判断2, 3 是否为模17 平方剩余.

解 1) 根据定理4.3.4 (i), 我们有

$$\left(\frac{2}{17}\right) = (-1)^{\frac{17^2-1}{8}} = (-1)^{2\cdot 18} = 1.$$

因此, 2 是模17 平方剩余.

2) 根据定理.4.4.1 (ii),

$$T(3,17) = \sum_{k=1}^{(17-1)/2} \left[\frac{3\cdot k}{17}\right] = \left[\frac{3\cdot 6}{17}\right] + \left[\frac{3\cdot 7}{17}\right] + \left[\frac{3\cdot 8}{17}\right] = 1+1+1 = 3,$$

所以3 是模17 平方非剩余. 证毕

例4.3.5 假设$p=8k+5$ 为素数. 则2 为模p 平方非剩余.

证 计算勒让得符号

$$\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}=(-1)^{\frac{(8k+6)(8k+4)}{8}}=(-1)^{(4k+3)(2k+1)}=-1,$$

2 为模p 平方非剩余. **证毕**

例4.3.6 判断同余式

$$x^2\equiv 2 \pmod{3599}$$

是否有解, 有解时求出其解数.

解 $3599=59\cdot 61$ 不是素数, 原同余式等价于:

$$\begin{cases} x^2\equiv 2 \pmod{59}, \\ x^2\equiv 2 \pmod{61}. \end{cases}$$

因为 $\left(\frac{2}{59}\right)=(-1)^{\frac{59^2-1}{8}}=-1,$

故同余式组无解. 原同余式无解.

推论 设p 是奇素数, 那么

$$\left(\frac{2}{p}\right) = \begin{cases} 1, & 若 p \equiv \pm 1 \pmod 8; \\ -1, & 若 p \equiv \pm 3 \pmod 8. \end{cases}$$

证 根据定理3 (i), 我们有

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

若$p \equiv \pm 1 \pmod 8$, 则存在整数k 使得$p = 8k \pm 1$. 从而

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = (-1)^{2(4k^2 \pm k)} = 1.$$

若$p \equiv \pm 3 \pmod 8$, 则存在整数k 使得$p = 8k \pm 3$. 从而

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = (-1)^{2(4k^2 \pm 3k)+1} = -1.$$

4.4 二次互反律

设p, q 是不同的奇素数. 我们要问二次同余式

$$x^2 \equiv q \pmod p \tag{17}$$

与二次同余式

$$x^2 \equiv p \pmod q \tag{18}$$

之间的联系, 即q 模p 平方剩余与p 模q 平方剩余之间的联系. 下面的定理(二次互反律)给出了明确的回答. 同时, 基于勒让得符号的函数性质、二次互反律以及欧几里得除法, 我们可以将模数较大的二次剩余判别问题转为模数较小的二次剩余判别问题, 并最后归结为较少的几个情况, 从而通过快速计算判断整数a 是否为模p 平方剩余.

定理4.4.1 (二次互反律) 若p, q是互素奇素数,则

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}\left(\frac{p}{q}\right) \tag{19}$$

注 欧拉和勒让得都曾经提出过二次互反律的猜想. 但第一个严格的证明是由高斯在1796年作出的, 随后他又发现了另外七个不同的证明. 在《算数研究》一书和相关论文中, 高斯将其称为"基石"。私下里高斯把二次互反律誉为算术理论中的宝石, 是一个黄金定律。

高斯之后雅可比、柯西、刘维尔、克罗内克、弗洛贝尼乌斯等也相继给出了新的证明。至今，二次互反律已有超过200 个不同的的证明。

证 我们要证明:

$$\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}.$$

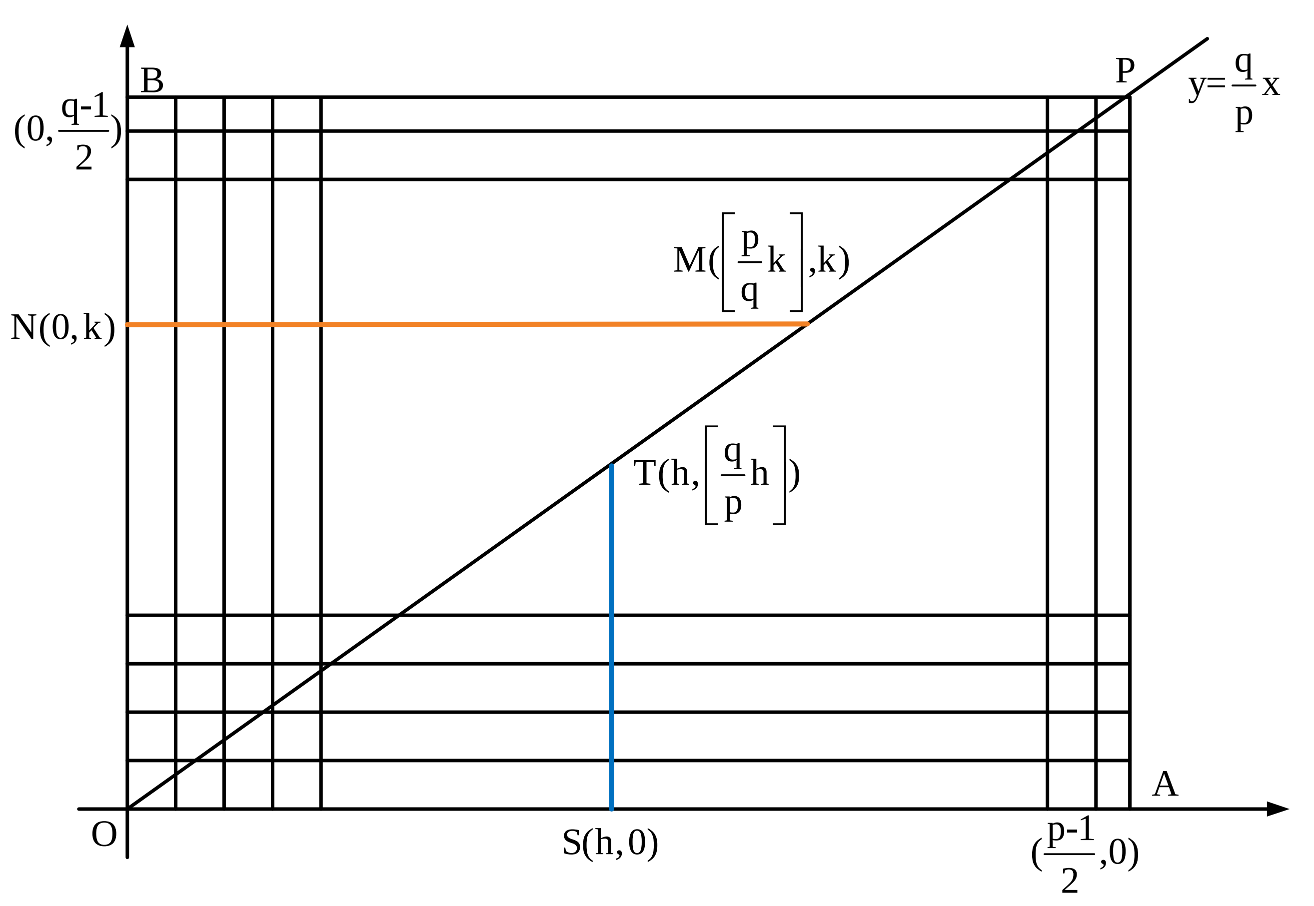
因为$(2, pq) = 1)$, 根据定理4.3.4 ,我们有

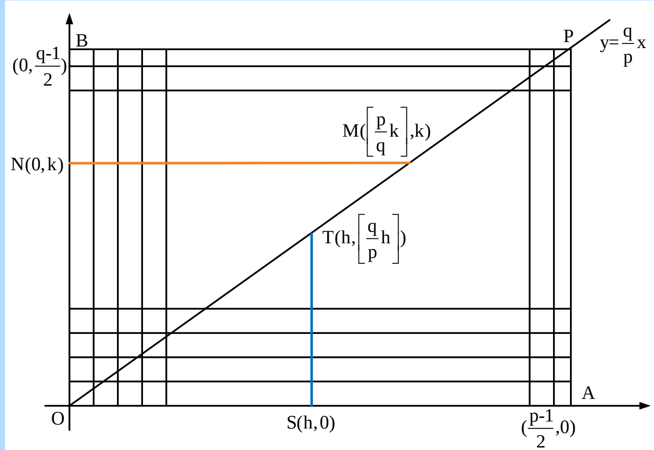
$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{T(q,p)}, \qquad \left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{T(p,q)},$$

其中$T(q,p) = \sum_{h=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{q \cdot h}{p}\right], T(p,q) = \sum_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} \left[\frac{p \cdot k}{q}\right]$, 所以只需证明

$$T(q,p) + T(p,q) = \frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}.$$

考察长为$\frac{p}{2}$, 宽为$\frac{q}{2}$ 的长方形内的整点个数:





考察长为$\frac{p}{2}$, 宽为$\frac{q}{2}$ 的长方形内的整点个数:

在垂直直线ST 上, 整点个数为$\left[\frac{q}{p}\cdot h\right]$, 因此, 下三角形内的整点个数为$T(q,p)$;

在水平直线NM 上, 整点个数为$\left[\frac{p}{q}\cdot k\right]$, 因此, 上三角形内的整点个数为$T(p,q)$.

因为对角线OP 上无整点, 所以长方形内整点个数为

$$T(q,p)+T(p,q)=\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}.$$

这就完成了定理的证明. 证毕

例4.4.1 判断同余式$x^2 \equiv 137 \pmod{227}$是否有解.

解 因为227 是素数, 根据定理4.3.3,

$$\left(\frac{137}{227}\right) = \left(\frac{-90}{227}\right) = \left(\frac{-1}{227}\right)\left(\frac{2 \cdot 3^2 \cdot 5}{227}\right) = (-1)\left(\frac{2}{227}\right)\left(\frac{5}{227}\right).$$

由定理4.3.4 (i), 我们有

$$\left(\frac{2}{227}\right) = (-1)^{\frac{227^2-1}{8}} = (-1)^{\frac{226 \cdot 228}{8}} = -1.$$

又由定理4.4.1 及定理4.3.4 (i), 我们有

$$\left(\frac{5}{227}\right) = (-1)^{\frac{227-1}{2}\frac{5-1}{2}}\left(\frac{227}{5}\right) = \left(\frac{2}{5}\right) = (-1)^{\frac{5^2-1}{8}} = -1.$$

因此,

$$\left(\frac{137}{227}\right) = -1.$$

同余式$x^2 \equiv 137 \pmod{227}$ 无解.

例4.4.2' 设素数

$$p = 2000000000000000000000000029967 \approx 2^{100} \approx 2^{30}, \quad q = 17.$$

判断同余式$x^2 \equiv q \pmod{p}$是否有解.

解 因为p, q 是素数, 根据定理4.4.1及定理4.3.3 (ii), 我们有

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{12}{17}\right) = \left(\frac{3}{17}\right).$$

又

$$\left(\frac{3}{17}\right) = (-1)^{\frac{17-1}{2}\frac{3-1}{2}}\left(\frac{17}{3}\right) = \left(\frac{-1}{3}\right) = (-1)^{\frac{3-1}{2}} = -1.$$

所以$\left(\frac{q}{p}\right) = -1$, 同余式$x^2 \equiv q \pmod{p}$ 无解.

例4.4.3’ 设素数$p = 200000000000000000000000000029967$, $q = 59$. 判断同余式$x^2 \equiv q \pmod p$是否有解.

解 因为p, q 是素数, 根据定理4.4.1及定理4.3.3 (ii), 我们有

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)\left(\frac{34}{59}\right) = (-1)\left(\frac{-25}{59}\right)$$

$$= (-1)\left(\frac{-1}{59}\right) = (-1)(-1)^{\frac{59-1}{2}} = 1.$$

所以$\left(\frac{q}{p}\right) = 1$, 同余式$x^2 \equiv q \pmod p$ 有解.

例4.4.4' 设素数$p = 20000000000000000000000000037023 \approx 2^{103} \approx 2^{31}$, $q = 17$. 判断同余式$x^2 \equiv q \pmod{p}$ 是否有解.

解 因为p, q 是素数, 根据定理4.4.1及定理4.3.3 (ii), 我们有

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{4}{17}\right) = 1.$$

所以$\left(\frac{q}{p}\right) = 1$, 同余式$x^2 \equiv q \pmod{p}$ 有解.

访问主页
标题页
目录页
第 45 页 共 130 页
返回
全屏显示
关闭
退出

例4.4.5' 设素数$p = 20000000000000000000000000000037023$, $q = 59$. 判断同余式$x^2 \equiv q \pmod{p}$是否有解.

解 因为p, q 是素数, 根据定理4.4.1及定理4.3.3 (ii), 我们有

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)\left(\frac{7}{59}\right) = (-1)(-1)^{\frac{59-1}{2}\frac{7-1}{2}}\left(\frac{59}{7}\right) = \left(\frac{3}{7}\right),$$

而

$$\left(\frac{3}{7}\right) = \left(\frac{-4}{7}\right) = \left(\frac{-1}{7}\right) = (-1)^{\frac{7-1}{2}} = -1,$$

所以$\left(\frac{q}{p}\right) = -1$, 同余式$x^2 \equiv q \pmod{p}$ 无解.

例4.4.2 设素数$p = 200000000000000000000000029967 \approx 2^{100} \approx 2^{30}$, $q = 41$. 判断同余式$x^2 \equiv q \pmod p$是否有解.

解 因为p, q 是素数, 根据定理4.4.1及定理4.3.3 (ii), 我们有

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}} \left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{-2}{41}\right) = 1,$$

而

$$\left(\frac{-2}{41}\right) = \left(\frac{-1}{41}\right)\left(\frac{2}{41}\right) = (-1)^{\frac{41-1}{2}}(-1)^{\frac{41^2-1}{8}} = 1,$$

所以$\left(\frac{q}{p}\right) = 1$, 同余式$x^2 \equiv q \pmod p$ 有解.

例4.4.3 设素数$p = 2000000000000000000000000029967$, $q = 71$. 判断同余式$x^2 \equiv q \pmod p$是否有解.

解 因为p, q 是素数, 根据定理4.4.1及定理4.3.3 (ii), 我们有

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}} \left(\frac{p}{q}\right) = (-1)\left(\frac{45}{71}\right) = (-1)\left(\frac{5}{71}\right),$$

又

$$\left(\frac{5}{71}\right) = (-1)^{\frac{71-1}{2}\frac{5-1}{2}} \left(\frac{71}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}\right) = 1.$$

所以$\left(\frac{q}{p}\right) = -1$, 同余式$x^2 \equiv q \pmod p$ 无解.

例4.4.4 设素数$p = 20000000000000000000000000000037023 \approx 2^{103} \approx 2^{31}$, $q = 41$. 判断同余式$x^2 \equiv q \pmod p$ 是否有解.

解 因为p, q 是素数, 根据定理4.4.1及定理4.3.3 (ii), 我们有

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{20}{41}\right) = \left(\frac{5}{41}\right).$$

又

$$\left(\frac{5}{41}\right) = (-1)^{\frac{41-1}{2}\frac{5-1}{2}}\left(\frac{41}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}\right) = (-1)^{\frac{5-1}{2}} = 1.$$

所以$\left(\frac{q}{p}\right) = 1$, 同余式$x^2 \equiv q \pmod p$ 有解.

例4.4.5 设素数$p = 2000000000000000000000000000037023$, $q = 71$. 判断同余式$x^2 \equiv q \pmod p$ 是否有解.

解 因为p, q 是素数, 根据定理4.4.1及定理4.3.3 (ii), 我们有

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)\left(\frac{6}{71}\right) = (-1)\left(\frac{2}{71}\right)\left(\frac{3}{71}\right),$$

又

$$\left(\frac{2}{71}\right) = (-1)^{\frac{71^2-1}{8}} = 1,$$

$$\left(\frac{3}{71}\right) = (-1)^{\frac{71-1}{2}\frac{3-1}{2}}\left(\frac{71}{3}\right) = (-1)\left(\frac{-1}{3}\right) = (-1)(-1)^{\frac{3-1}{2}} = 1,$$

所以$\left(\frac{q}{p}\right) = -1$, 同余式$x^2 \equiv q \pmod p$ 无解.

例4.4.6 设$p=2^{192}-2^{64}-1,\ \ q=79$. 问$x^2\equiv q \pmod p$ 是否有解.

解 因为$p,\ q$ 是素数, 根据定理4.4.1及定理4.3.3 (ii), 我们有

$$\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}\left(\frac{p}{q}\right)=(-1)\left(\frac{37}{79}\right).$$

又

$$\left(\frac{37}{79}\right)=(-1)^{\frac{79-1}{2}\frac{37-1}{2}}\left(\frac{79}{37}\right)=\left(\frac{5}{37}\right)=(-1)^{\frac{37-1}{2}\frac{5-1}{2}}\left(\frac{37}{5}\right)=\left(\frac{2}{5}\right)=(-1)^{\frac{5^2-1}{8}}=-1.$$

所以$\left(\frac{q}{p}\right)=1$, 同余式$x^2\equiv q \pmod p$ 有解.

例4.4.7 设$p=2^{192}-2^{64}-1,\ \ q=31$. 问$x^2\equiv q \pmod p$ 是否有解.

解 因为$p,\ q$ 是素数, 根据定理4.4.1及定理4.3.3 (ii), 我们有

$$\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}\left(\frac{p}{q}\right)=(-1)\left(\frac{18}{31}\right)=(-1)\left(\frac{2}{31}\right)=(-1)(-1)^{\frac{31^2-1}{8}}=-1.$$

所以$\left(\frac{q}{p}\right)=-1$, 同余式$x^2\equiv q \pmod p$ 无解.

例4.4.8 设素数$p = 2^{192} - 2^{64} - 1$, $q = 31$. 令$a_k = k^3 + k + 1$. 则对于$k = 0, 1, \ldots, 99$, a_k 模p 的平方剩余判别为:

k	$\left(\frac{a_k}{p}\right)$	k	$\left(\frac{a_k}{p}\right)$	k	$\left(\frac{a_k}{p}\right)$	k	$\left(\frac{a_k}{p}\right)$	k	$\left(\frac{a_k}{p}\right)$
0	1	10	−1	20	1	30	−1	40	1
1	1	11	1	21	−1	31	1	41	1
2	−1	12	1	22	1	32	−1	42	1
3	−1	13	1	23	1	33	1	43	−1
4	−1	14	−1	24	−1	34	1	44	1
5	−1	15	1	25	1	35	1	45	−1
6	−1	16	1	26	1	36	1	46	−1
7	1	17	1	27	−1	37	1	47	−1
8	1	18	−1	28	−1	38	1	48	1
9	−1	19	−1	29	1	39	1	49	1

共有30 个模p 平方剩余, 20 个模p 平方非剩余.

例4.4.9 设素数$p = 2^{192} - 2^{64} - 1$, $q = 31$. 令$a_k = k^3 + 2k + 3$. 则对于$k = 0, 1, \ldots, 99$, a_k 模p 的平方剩余判别为:

k	$\left(\frac{a_k}{p}\right)$	k	$\left(\frac{a_k}{p}\right)$	k	$\left(\frac{a_k}{p}\right)$	k	$\left(\frac{a_k}{p}\right)$	k	$\left(\frac{a_k}{p}\right)$
0	1	10	-1	20	1	30	-1	40	1
1	1	11	-1	21	-1	31	-1	41	-1
2	1	12	-1	22	-1	32	1	42	1
3	1	13	1	23	-1	33	-1	43	-1
4	-1	14	1	24	1	34	1	44	1
5	1	15	-1	25	-1	35	1	45	-1
6	1	16	1	26	-1	36	1	46	1
7	-1	17	-1	27	1	37	1	47	-1
8	1	18	-1	28	1	38	1	48	-1
9	-1	19	1	29	1	39	1	49	-1

共有27 个模p 平方剩余, 23 个模p 平方非剩余.

例4.4.10 设素数$p = 2^{192} - 2^{64} + 2^5 + 2^4 - 1$, $q = 79$. 判断同余式$x^2 \equiv q \pmod p$ 是否有解.

解 因为p, q 是素数, 根据定理4.4.1及定理4.3.3 (ii), 我们有

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)\left(\frac{6}{79}\right) = (-1)\left(\frac{2}{79}\right)\left(\frac{3}{79}\right).$$

$$\left(\frac{2}{79}\right) = (-1)^{\frac{79^2-1}{8}} = 1, \quad \left(\frac{3}{79}\right) = (-1)^{\frac{79-1}{2}\frac{3-1}{2}}\left(\frac{79}{3}\right) = (-1)\left(\frac{1}{3}\right) = -1,$$

所以$\left(\frac{q}{p}\right) = 1$, 同余式$x^2 \equiv q \pmod p$ 有解.

例4.4.11 设素数$p = 2^{192} - 2^{64} + 2^5 + 2^4 - 1$, $q = 31$. 判断同余式$x^2 \equiv q \pmod p$ 是否有解.

解 因为p, q 是素数, 根据定理4.4.1及定理4.3.3 (ii), 我们有

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)\left(\frac{4}{31}\right) = -1.$$

所以$\left(\frac{q}{p}\right) = -1$, 同余式$x^2 \equiv q \pmod p$ 无解.

例4.4.10' 设素数$p = 2^{192} - 2^{64} + 2^5 + 2^4 - 1$, $q = 79$. 对于a, $101 \le a \le 200$. 判断同余式$x^2 \equiv a \pmod p$ 是否有解.

a	$\left(\frac{a}{p}\right)$	a	$\left(\frac{a}{p}\right)$	a	$\left(\frac{a}{p}\right)$	a	$\left(\frac{a}{p}\right)$	a	$\left(\frac{a}{p}\right)$
101	-1	121	1	141	1	161	1	181	1
102	1	122	-1	142	-1	162	1	182	1
103	1	123	-1	143	-1	163	-1	183	-1
104	-1	124	-1	144	1	164	-1	184	-1
105	1	125	-1	145	1	165	-1	185	1
106	1	126	-1	146	-1	166	-1	186	-1
107	-1	127	1	147	1	167	1	187	1
108	1	128	1	148	-1	168	-1	188	1
109	-1	129	-1	149	1	169	1	189	-1
110	-1	130	1	150	1	170	-1	190	-1
111	-1	131	1	151	-1	171	1	191	-1
112	-1	132	1	152	1	172	-1	192	1
113	-1	133	-1	153	1	173	1	193	1
114	1	134	1	154	-1	174	-1	194	-1
115	1	135	-1	155	1	175	-1	195	1
116	-1	136	1	156	-1	176	1	196	1
117	-1	137	-1	157	1	177	-1	197	1
118	-1	138	-1	158	1	178	-1	198	1
119	-1	139	-1	159	1	179	1	199	1
120	-1	140	1	160	-1	180	-1	200	1

例4.4.12 证明: 形为$4k+1$ 的素数有无穷多个.

证 反证法. 如果形为$4k+1$ 的素数只有有限多个, 设这些素数为$p_1, \ldots, p_s$. 考虑整数

$$P = (2p_1 \cdots p_s)^2 + 1.$$

因为P 形为$4k+1$, $P > p_i$, $i = 1, \ldots, s$, 所以P为合数, 其素因数p为奇数. 因为-1 为模p 平方剩余, 即

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = \left(\frac{-1+P}{p}\right) = \left(\frac{(2p_1 \cdots p_s)^2}{p}\right) = 1,$$

所以-1 为模p 平方剩余, 从而p 是形为$4k+1$ 的素数. 但显然有$p \neq p_i$, $i = 1, \ldots, s$. 矛盾.

例4.4.13 求所有奇素数p, 它以3 为其二次剩余.

解 即要求所有奇素数p, 使得$\left(\frac{3}{p}\right) = 1$.

根据二次互反律, $\left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{(p-1)/2}\left(\frac{p}{3}\right)$. 因为

$$(-1)^{(p-1)/2} = \begin{cases} 1, & \text{当} p \equiv 1 \pmod 4; \\ -1, & \text{当} p \equiv -1 \pmod 4, \end{cases}$$

以及 $\left(\frac{p}{3}\right) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{3}\right) = 1, & \text{当} p \equiv 1 \pmod 6; \\ \left(\dfrac{-1}{3}\right) = -1, & \text{当} p \equiv -1 \pmod 6, \end{cases}$

故 $\left(\dfrac{-1}{p}\right) = 1$ 的充要条件是

$$\begin{cases} p \equiv 1 \pmod 4 \\ p \equiv 1 \pmod 6 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} p \equiv -1 \pmod 4 \\ p \equiv -1 \pmod 6. \end{cases}$$

这分别等价于$p \equiv 1 \pmod{12}$, 或 $p \equiv -1 \pmod{12}$.

因此, 3 是模p 二次剩余的充分必要条件是$p \equiv \pm 1 \pmod{12}$.

例4.4.14 设p 是奇素数, d 是整数. 如果$\left(\frac{d}{p}\right) = -1$, 则$p$一定不能表示为$x^2 - dy^2$的形式.

证 如果p 有表达式$p = x^2 - dy^2$, 则由p 是素数, 可得到

$$(x, p) = (y, p) = 1.$$

事实上, 若$(x, p) \neq 1$, 则 $p \mid x, \quad p \mid x^2 - p = dy^2$.
但$(d, p) = 1$, 所以$p \mid y^2$, 进而$p \mid y$. 这样 $p^2 \mid x^2, \quad p^2 \mid y^2$.
从而

$$p^2 \mid x^2 - dy^2 = p.$$

这不可能. 因此,

$$\left(\frac{d}{p}\right) = \left(\frac{d}{p}\right)\left(\frac{y^2}{p}\right) = \left(\frac{dy^2}{p}\right) = \left(\frac{x^2}{p}\right) = 1.$$

这与题设矛盾. 证毕

4.5 雅可比符号

在勒让得符号的计算中, 要求模p 为素数. 此外, 在二次互反律的应用中, 要求$a = q$ 为素数. 这些都是很强的条件, 因此, 希望这些条件可以弱化, 只要求模m 为奇整数, a 为任意整数.

定义4.5.1 **设$m = p_1 \cdots p_r$ 是奇素数p_i 的乘积. 对任意整数a, 定义雅可比(Jacobi)符号为**

$$\left(\frac{a}{m}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right) \cdots \left(\frac{a}{p_r}\right). \tag{20}$$

雅可比符号形式上是勒让得符号的推广, 但所蕴含的意义已经不同. 与(3.10) 作比较, 对于$(a, m) = 1$, 有

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{m}\right) = 1 \quad &\Longleftarrow \quad x^2 \equiv a \pmod{m} \text{ 有解} \\ \left(\frac{a}{m}\right) = -1 \quad &\Longrightarrow \quad x^2 \equiv a \pmod{p} \text{ 无解} \end{aligned} \tag{21}$$

雅可比符号为-1, 可判断a 是模m 平方非剩余; 但雅可比符号为1, 却不能判断a 是模m 平方剩余. 例如, 3 是模119 平方非剩余, 但

$$\left(\frac{3}{119}\right) = \left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{3}{17}\right) = (-1)(-1) = 1.$$

在勒让得符号的计算中, 要求模p 为素数. 现在将它推广为一般的模m.

定义4.5.1 设$m = p_1 \cdots p_r$ 是奇素数p_i 的乘积. 对任意整数a, 定义**雅可比(Jacobi)符号为**

$$\left(\frac{a}{m}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right) \cdots \left(\frac{a}{p_r}\right).$$

雅可比符号形式上是勒让得符号的推广, 但所蕴含的意义已经不同. 雅可比符号为-1, 可判断a 是模m 平方非剩余; 但雅可比符号为1, 却不能判断a 是模m 平方剩余. 例如, 3 是模119 平方非剩余, 但

$$\left(\frac{3}{119}\right) = \left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{3}{17}\right) = (-1)(-1) = 1.$$

定理4.5.1 设m 是正奇数. 则(i) $\left(\dfrac{a+m}{m}\right)=\left(\dfrac{a}{m}\right)$;

(ii) $\left(\dfrac{ab}{m}\right)=\left(\dfrac{a}{m}\right)\left(\dfrac{b}{m}\right)$;

(iii) 设$(a,m)=1$, 则$\left(\dfrac{a^2}{m}\right)=1$.

证 设$m=p_1\cdots p_r$, 其中p_i 为奇素数. 根据定义,

(i) $\left(\dfrac{a+m}{m}\right)=\left(\dfrac{a+m}{p_1}\right)\cdots\left(\dfrac{a+m}{p_r}\right)=\left(\dfrac{a}{p_1}\right)\cdots\left(\dfrac{a}{p_r}\right)=\left(\dfrac{a}{m}\right)$.

$$(ii)\quad \left(\frac{ab}{m}\right)=\left(\frac{ab}{p_1}\right)\cdots\left(\frac{ab}{p_r}\right)=\left(\frac{a}{p_1}\right)\left(\frac{b}{p_1}\right)\cdots\left(\frac{a}{p_r}\right)\left(\frac{b}{p_r}\right)$$

$$=\left(\frac{a}{p_1}\right)\cdots\left(\frac{a}{p_r}\right)\left(\frac{b}{p_1}\right)\cdots\left(\frac{b}{p_r}\right)=\left(\frac{a}{m}\right)\left(\frac{b}{m}\right).$$

(iii) $\left(\dfrac{a^2}{m}\right)=\left(\dfrac{a^2}{p_1}\right)\cdots\left(\dfrac{a^2}{p_r}\right)=1$.

引理4.5.1: 设$m = p_1 \cdots p_r$ 是奇数. 则

$$\frac{m-1}{2} \equiv \frac{p_1-1}{2} + \cdots + \frac{p_r-1}{2} \pmod 2;$$

$$\frac{m^2-1}{8} \equiv \frac{p_1^2-1}{8} + \cdots + \frac{p_r^2-1}{8} \pmod 2.$$

证 因为我们有表达式

$$m \equiv (1+2\cdot\frac{p_1-1}{2})\cdots(1+2\cdot\frac{p_r-1}{2}) \equiv 1+2\cdot\left(\frac{p_1-1}{2}+\cdots+\frac{p_r-1}{2}\right) \pmod 4;$$

$$m^2 \equiv (1+8\cdot\frac{p_1^2-1}{8})\cdots(1+8\cdot\frac{p_r^2-1}{8}) \equiv 1+8\cdot\left(\frac{p_1^2-1}{8}+\cdots+\frac{p_r^2-1}{8}\right) \pmod{16}.$$

所以引理成立. 证毕.

定理4.5.2 设m 是奇数. 则(i) $\left(\frac{1}{m}\right) = 1$;

(ii) $\left(\frac{-1}{m}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}}$;

(iii) $\left(\frac{2}{m}\right) \equiv (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}$;

证 因为$m = p_1 \cdots p_r$ 是奇数, 其中p_i 是奇素数. 根据雅可比符号的定义和§4.3 定理1之推论1 以及引理, 我们有

(i) $\left(\frac{1}{m}\right) = \left(\frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(\frac{1}{p_r}\right) = 1.$

(ii) $\left(\frac{-1}{m}\right) = \left(\frac{-1}{p_1}\right) \cdots \left(\frac{-1}{p_r}\right) = (-1)^{\frac{p_1-1}{2}+\cdots+\frac{p_r-1}{2}} = (-1)^{\frac{m-1}{2}}.$

再根据雅可比符号的定义和§4.3 定理3 以及引理, 我们有

(iii)

$$\left(\frac{2}{m}\right) = \left(\frac{2}{p_1}\right) \cdots \left(\frac{2}{p_r}\right) = (-1)^{\frac{p_1^2-1}{8}+\cdots+\frac{p_r^2-1}{8}} = (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}.$$

定理4.5.3 设m, n 都是奇数. 则$\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}}\left(\frac{m}{n}\right)$.

证 设$m = p_1 \cdots p_r$, $n = q_1 \cdots q_s$. 如果$(m, n) > 1$, 则$\left(\frac{n}{m}\right) = \left(\frac{m}{n}\right) = 0$. 结论成立. 因此, 可设$(m, n) = 1$. 根据雅可比符号的定义和§4.3 定理4 , 我们有

$$\left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{m}{n}\right) = \prod_{i=1}^{r}\left(\frac{n}{p_i}\right)\prod_{j=1}^{s}\left(\frac{m}{q_j}\right) = \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{s}\left(\frac{q_j}{p_i}\right)\left(\frac{p_i}{q_j}\right) = (-1)^{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{p_i-1}{2}\cdot\frac{q_j-1}{2}}.$$

再根据引理,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{p_i-1}{2}\cdot\frac{q_j-1}{2} &\equiv \sum_{i=1}^{r}\frac{p_i-1}{2}\sum_{j=1}^{s}\frac{q_j-1}{2} \\ &\equiv \frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2} \pmod 2.\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{p_i-1}{2}\cdot\frac{q_j-1}{2} \equiv \sum_{i=1}^{r}\frac{p_i-1}{2}\sum_{j=1}^{s}\frac{q_j-1}{2} \equiv \frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2} \pmod 2.$$

因此, 定理成立. 证毕.

例4.5.1 判断同余式

$$x^2 \equiv 286 \pmod{563}$$

是否有解.

解 不用考虑563 是否为素数, 直接计算雅可比符号. 因为

$$\begin{aligned}
\left(\frac{286}{563}\right) &= \left(\frac{2}{563}\right)\left(\frac{143}{563}\right) \\
&= (-1)^{\frac{563^2-1}{8}}(-1)^{\frac{143-1}{2}\cdot\frac{563-1}{2}}\left(\frac{563}{143}\right) \\
&= \left(\frac{-9}{143}\right) \\
&= \left(\frac{-1}{143}\right) = -1,
\end{aligned}$$

所以原同余式无解.

例4.5.2 判断同余式$x^2 \equiv 17 \pmod{m}$ 是否有解. 这里,

$$\begin{aligned} m = p \cdot q &= 40000000000000000000000000673386 \\ &\quad 000000000000000000001109468241 \\ p &= 2000000000000000000000000029967, \\ q &= 20000000000000000000000000037023 \end{aligned}$$

解 不用考虑m 是否为素数, 直接计算雅可比符号. 因为

$$\left(\frac{17}{m}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}\frac{17-1}{2}}\left(\frac{m}{17}\right) = \left(\frac{-3}{17}\right) = \left(\frac{-1}{17}\right)\left(\frac{3}{17}\right),$$

而

$$\left(\frac{-1}{17}\right) = (-1)^{\frac{17-1}{2}} = 1$$

$$\left(\frac{3}{17}\right) = (-1)^{\frac{17-1}{2}\frac{3-1}{2}}\left(\frac{17}{3}\right) = \left(\frac{-1}{3}\right) = (-1)^{\frac{3-1}{2}} = -1,$$

所以$\left(\dfrac{17}{m}\right) = -1$, 原同余式无解.

例4.5.3 判断同余式$x^2 \equiv 59 \pmod{m}$ 是否有解. 这里,

$$\begin{aligned} m = p \cdot q &= 40000000000000000000000000673386 \\ &\quad 000000000000000000001109468241 \\ p &= 2000000000000000000000000029967, \\ q &= 20000000000000000000000000037023 \end{aligned}$$

解 不用考虑m 是否为素数, 直接计算雅可比符号. 因为

$$\left(\frac{59}{m}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}\frac{17-1}{2}} \left(\frac{m}{59}\right) = \left(\frac{2}{59}\right) = (-1)^{\frac{59^2-1}{8}} = -1,$$

所以$\left(\frac{59}{m}\right) = -1$, 原同余式无解.

例4.5.4 求出$y^2 \equiv x^3 + x + 1 \pmod{17}$ 的所有解及解数.

解 令$f(x) = x^3 + x + 1$. 根据§4.1 例3, 我们有

f(0)=1,	y=1, y= 16;	f(1)=3,	无解;
f(2)=11,	无解	f(3)=14,	无解;
f(4)=1,	y=1, y= 16;	f(5)=12,	无解;
f(6)=2,	y=6, y= 11;	f(7)=11,	无解;
f(8)=11,	无解 ;	f(9)=8,	y= 5, y=12;
f(10)=8,	y=5, y= 12;	f(11)=0,	y=0;
f(12)=7,	无解 ;	f(13)=1,	y=1, y=16;
f(14)=5,	无解 ;	f(15)=8,	y=5, y=12;
f(16)=-1,	y=4, y= 13	(mod 17).	

故原同余式解: $(0, 1)$, $(0, 16)$, $(4, 1)$, $(4, 16)$, $(6, 6)$, $(6, 11)$, $(9, 5)$, $(9, 12)$, $(10, 5)$, $(10, 12)$, $(11, 0)$, $(13, 1)$, $(13, 16)$, $(15, 5)$, $(15, 12)$, $(16, 4)$, $(16, 13)$.

4.6.1 模p 平方根 (p 形为 $4k+3$)

设p 是形为$4k+3$ 的素数. 我们讨论此情形的模p 平方根.

定理4.6.1 设p 是形为$4k+3$ 的素数. 如果同余式

$$x^2 \equiv a \pmod{p}$$

有解, 则其解是

$$x \equiv \pm a^{\frac{p+1}{4}} \pmod{p}. \tag{22}$$

解 因为p 是形为$4k+3$ 的素数, 所以存在奇数q 使得$p-1=2q$. 现在同余式$x^2 \equiv a \pmod{p}$ 有解, 则我们有

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p},$$

或者 $a^q \equiv 1 \pmod{p}$.

两端同时乘以a, 得到

$$(a^{\frac{q+1}{2}})^2 \equiv a^{q+1} \equiv a \pmod{p}.$$

因此, 同余式的解为(22). 证毕

例4.6.1 设素数$p = 2000000000000000000000000029967$, $a = 41$. 求解同余式$x^2 \equiv a \pmod p$.

解 因为p 是形为$4k+3$ 的素数, 根据定理4.6.1及例4.4.2, 知原同余式有解, 且解为

$$x \equiv \pm a^{\frac{p+1}{4}} \equiv 1539250749819107362858845139474 \pmod p.$$

例4.6.2 设素数$p = 20000000000000000000000000037023$, $q = 41$. 判断同余式$x^2 \equiv q \pmod p$ 是否有解.

解 因为p 是形为$4k+3$ 的素数, 根据定理4.6.1及例4.4.4, 知原同余式有解, 且解为

$$x \equiv \pm a^{\frac{p+1}{4}} \equiv 3406794145708458557038951337364 \pmod p.$$

例4.6.3 设素数$p = 2^{192} - 2^{64} - 1$, $q = 79$. 判断同余式$x^2 \equiv q \pmod{p}$是否有解.

解 因为p 是形为$4k+3$ 的素数,根据定理4.6.1及例4.4.6, 知原同余式有解, 且解为

$$\begin{aligned} x \equiv \pm a^{\frac{p+1}{4}} &\equiv 3,441,509,450,523,406,068,648,946,248,998,374, \backslash\backslash \\ &\quad 727,265,234,715,111,696,917,117 \pmod{p}. \end{aligned}$$

例4.6.4 设素数$p = 2^{192} - 2^{64} + 2^5 + 2^4 - 1$, $q = 79$. 判断同余式$x^2 \equiv q \pmod{p}$ 是否有解.

解 因为p 是形为$4k+3$ 的素数,根据定理4.6.1及例4.4.10, 知原同余式有解, 且解为

$$\begin{aligned} x \equiv \pm a^{\frac{p+1}{4}} &\equiv 714,966,419,491,317,688,312,388,325,572,327, \backslash\backslash \\ &\quad 012,170,027,743,594,638,939,954 \pmod{p}. \end{aligned}$$

定理4.6.2 设$p,\ q$ 是形为$4k+3$ 的不同素数. 如果整数a 满足

$$\left(\frac{a}{p}\right)=\left(\frac{a}{q}\right)=1,$$

则同余式

$$x^2 \equiv a \pmod{p\cdot q} \tag{23}$$

有解

$$x \equiv \pm(a^{\frac{p+1}{4}} \pmod{p})\cdot s\cdot q \pm (a^{\frac{q+1}{4}} \pmod{q})\cdot t\cdot p \pmod{p\cdot q}. \tag{24}$$

其中$s,\ t$ 满足$s\cdot q+t\cdot p=1$.

解 因为同余式(23) 等价于同余式组

$$\begin{cases} x^2 \equiv a \pmod p \\ x^2 \equiv a \pmod q, \end{cases}$$

而同余式$x^2 \equiv a \pmod p$ 的解为

$$x = b_1 \equiv \pm a^{\frac{p+1}{4}} \pmod p,$$

同余式$x^2 \equiv a \pmod q$ 的解为

$$x = b_2 \equiv \pm a^{\frac{q+1}{4}} \pmod q,$$

根据§3.2 定理3.2.3(中国剩余定理), 原同余式的解为(25). 证毕

例4.6.5 求解同余式$x^2 \equiv 41 \pmod{m}$, 这里,

$$\begin{aligned} m = p \cdot q \ &= \ 40000000000000000000000000673386 \setminus \setminus \\ &\quad\ 000000000000000000001109468241 \\ p \ &= \ 2000000000000000000000000029967, \\ q \ &= \ 20000000000000000000000000037023 \end{aligned}$$

解 因为同余式等价于同余式组 $\begin{cases} x^2 \equiv 41 \pmod{p} \\ x^2 \equiv 41 \pmod{q}, \end{cases}$

$x^2 \equiv 41 \pmod{p}$ 的解为 $x = b_1 \equiv \pm 41^{\frac{p+1}{4}} \pmod{p}$,

$x^2 \equiv 41 \pmod{q}$ 的解为 $x = b_2 \equiv \pm 41^{\frac{q+1}{4}} \pmod{q}$,

根据定理4.6.2 , 原同余式的解为

$$\begin{aligned} x_{+,+} \ &\equiv \ 3219361862449568351065835035035862391088 \setminus \setminus \\ &\quad\ 0892989312244092077738 \qquad \pmod{m} \\ x_{+,-} \ &\equiv \ 1041192581336200089352477694437062967525 \setminus \setminus \\ &\quad\ 9359495491351853561501 \qquad \pmod{m} \\ x_{-,+} \ &\equiv \ 2958807418663799910647522372901537032474 \setminus \setminus \\ &\quad\ 0640504508649255906740 \qquad \pmod{m} \\ x_{-,+} \ &\equiv \ 78063813755043164893416503230273760891191 \setminus \setminus \\ &\quad\ 07010687757017390503 \qquad \pmod{m} \end{aligned}$$

例4.6.6 $x^2 \equiv 79 \pmod m$ 这里,

$$\begin{aligned} m = p \cdot q \;\; = \;\; & 394020061963944792122790401001436138048481550919908 \backslash \backslash \\ & 142773898981140561332709274572379174587204093236476 \backslash \backslash \\ & 16188447457233 \end{aligned}$$

$p = 2^{192} - 2^{64} - 1, \;\; q = 2^{192} - 2^{64} + 2^5 + 2^4 - 1$

解 因为同余式等价于同余式组 $\begin{cases} x^2 \equiv 79 \pmod p \\ x^2 \equiv 79 \pmod q, \end{cases}$

$$\begin{aligned} x_{+,+} \;\; \equiv \;\; & 356541886340970955975573605910602125196073155329396776634554 \\ & 553918143304503093667713533077806242064925572002236240 44 \pmod m \\ x_{+,-} \;\; \equiv \;\; & 391246856901521418585784357722136523422756975555214526165323 \\ & 6093795119108347638205474161424507781060420477970491386 2 \pmod m \\ x_{-,+} \;\; \equiv \;\; & 277320506242337353700604327929961462572457536469361660857537 \\ & 176104942187451075183175844475331513043411408742543371 \pmod m \\ x_{-,+} \;\; \equiv \;\; & 374781756229738361472167950908340128524083955905113661393444 \\ & 27222418028206180904665641509397851171550589882238331 89 \pmod m \end{aligned}$$

4.6.1 模p 平方根

现在在有解的情况下, 即a 满足 $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \equiv 1 \pmod p$
的情况下, 考虑二次同余式$x^2 \equiv a \pmod p$ 的具体求解.
对于奇素数p ,将$p-1$ 写成形式$p-1 = 2^t \cdot s,\ t \geq 1$, 其中$s$ 是奇数. 则

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$$

可写成

$$(a^s)^{2^{t-1}} \equiv 1 \pmod p \quad \text{或} \quad (a^{-1}(a^{\frac{s+1}{2}})^2)^{2^{t-1}} \equiv 1 \pmod p.$$

令$x_{t-1} := a^{\frac{s+1}{2}} \pmod p$. 则$a^{-1}x_{t-1}^2$ 满足同余式

$$y^{2^{t-1}} \equiv 1 \pmod p.$$

即$a^{-1}x_{t-1}^2$ 是模p 的2^{t-1} 次单位根.
现在要寻找整数x_{t-2} 使得$a^{-1}x_{t-2}^2$ 满足同余式

$$y^{2^{t-2}} \equiv 1 \pmod p.$$

即$a^{-1}x_{t-2}^2$ 是模p 的2^{t-2} 次单位根.

任取一个模p 平方非剩余n, 即整数n 使得$\left(\frac{n}{p}\right) = -1$. 再令$b := n^s \pmod p$.
我们有

$$(b^2)^{2^{t-1}} \equiv 1, \quad (b^2)^{2^{t-2}} \equiv -1 \pmod p.$$

即b^2 是模p 的2^{t-1} 次单位根, 但非模p 的2^{t-2} 次单位根.
因为

$$((a^{-1}x_{t-1}^2)^{2^{t-2}} - 1)((a^{-1}x_{t-1}^2)^{2^{t-2}} + 1) \equiv 0 \pmod p,$$

所以我们有

$$(a^{-1}x_{t-1}^2)^{2^{t-2}} \equiv 1 \pmod p$$

或

$$(a^{-1}x_{t-1}^2)^{2^{t-2}} \equiv -1 \equiv (b^{-2})^{2^{t-2}} \pmod p.$$

因此, 我们令

$$j_0 = \begin{cases} 0 & \text{如果 } (a^{-1}x_{t-1}^2)^{2^{t-2}} \equiv 1 \pmod p; \\ 1 & \text{如果 } (a^{-1}x_{t-1}^2)^{2^{t-2}} \equiv -1 \pmod p. \end{cases}$$

这时, $x_{t-2} = x_{t-1}b^{j_0}$ 为所求.

定理4.6.3 设p奇素数, $p-1=2^t\cdot s,\ t\ge 1$, 其中s 是奇整数. 设n 是模p 平方非剩余. $b:=n^s \pmod p$. 如果同余式

$$x^2\equiv a \pmod p \tag{25}$$

有解, 则$a^{-1}x_{t-k-1}^2$ 满足同余式

$$y^{2^{t-k-1}}\equiv 1 \pmod p \tag{26}$$

$k=0,1,\ldots,t-1$, 这里, $x_{t-1}:=a^{\frac{s+1}{2}} \pmod p$,

$$x_{t-k-1}=x_{t-k}b^{j_{k-1}2^{k-1}}, \tag{27}$$

$$\text{其中}\, j_{k-1}=\begin{cases}0 & \text{如果}\ (a^{-1}x_{t-k}^2)^{2^{t-k-1}}\equiv 1 \pmod p;\\ 1 & \text{如果}\ (a^{-1}x_{t-k}^2)^{2^{t-k-1}}\equiv -1 \pmod p.\end{cases} \tag{28}$$

特别, x_0 是同余式(25) 的解.

4.6.1 模p 平方根

设p 为奇素数. 对任意给定的整数a, 应用高斯二次互反律(§4.3 定理4)可以快速地判断a 是否为模p 平方剩余, 即二次同余式

$$x^2 \equiv a \pmod p$$

是否有解, 也就是说解的存在性.

现在在有解的情况下, 即a 满足 $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \equiv 1 \pmod p$ 的情况下, 考虑二次同余式的具体求解. 求解过程如下:

对奇素数p ,将$p-1$ 写成$p-1 = 2^t \cdot s,\ t \geq 1$, 其中$s$ 是奇数.

(0) 任意选取一个模p 平方非剩余n, 即整数n 使得

$$\left(\frac{n}{p}\right) = -1.$$

再令$b := n^s \pmod p$. 有

$$b^{2^t} \equiv 1, \quad b^{2^{t-1}} \equiv -1 \pmod p.$$

即b 是模p 的2^t 次单位根, 但非模p 的2^{t-1} 次单位根.

(i) 计算$x_{t-1} := a^{\frac{s+1}{2}} \pmod p$. 有$a^{-1}x_{t-1}^2$ 满足同余式

$$y^{2^{t-1}} \equiv 1 \pmod p,$$

即$a^{-1}x_{t-1}^2$ 是模p 的2^{t-1} 次单位根. 事实上,

$$(a^{-1}x_{t-1}^2)^{2^{t-1}} \equiv a^{2^{t-1}s} \equiv a^{(p-1)/2} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \equiv 1 \pmod p.$$

(ii) 如果$t = 1$, 则$x = x_{t-1} = x_0 \equiv a^{\frac{s+1}{2}} \pmod p$ 满足

$$x^2 \equiv a \pmod p.$$

如果$t \geq 2$, 要寻找x_{t-2} 使得$a^{-1}x_{t-2}^2$ 满足

$$y^{2^{t-2}} \equiv 1 \pmod p.$$

即$a^{-1}x_{t-2}^2$ 是模p 的2^{t-2} 次单位根.

要寻找x_{t-2} 使得$a^{-1}x_{t-2}^2$ 满足$y^{2^{t-2}} \equiv 1 \pmod{p}$.

由

$$(a^{-1}x_{t-1}^2)^{2^{t-1}} - 1 = ((a^{-1}x_{t-1}^2)^{2^{t-1}} - 1)((a^{-1}x_{t-1}^2)^{2^{t-1}} + 1) \equiv 0 \pmod{p},$$

得 $(a^{-1}x_{t-1}^2)^{2^{t-1}} \equiv 1$ 或 $(a^{-1}x_{t-1}^2)^{2^{t-1}} \equiv -1$

(a) 如果

$$(a^{-1}x_{t-1}^2)^{2^{t-2}} \equiv 1 \pmod{p},$$

则令$j_0 := 0, \quad x_{t-2} := x_{t-1} = x_{t-1}b^{j_0} \pmod{p}$;

(b) 如果

$$(a^{-1}x_{t-1}^2)^{2^{t-2}} \equiv -1 \equiv (b^{-2})^{2^{t-2}} \pmod{p},$$

则令$j_0 := 1, \quad x_{t-2} := x_{t-1}b = x_{t-1}b^{j_0} \pmod{p}$.

上述x_{t-2} 为所求.

如此下去, ...

假设找到整数x_{t-k} 使得$a^{-1}x_{t-k}^2$ 满足

$$y^{2^{t-k}} \equiv 1 \pmod p,$$

即$a^{-1}x_{t-k}^2$ 是模p 的2^{t-k} 次单位根:

$$(a^{-1}x_{t-k}^2)^{2^{t-k}} \equiv 1 \pmod p.$$

(k+1) 如果$t = k$, 则$x = x_{t-k} \pmod p$ 满足$x^2 \equiv a \pmod p$.

如果$t \geq k+1$, 要寻找x_{t-k-1} 使得$a^{-1}x_{t-k-1}^2$ 满足

$$y^{2^{t-k-1}} \equiv 1 \pmod p.$$

即$a^{-1}x_{t-k-1}^2$ 是模p 的2^{t-k-1} 次单位根.

寻找x_{t-k-1}使得$a^{-1}x_{t-k-1}^2$满足$y^{2^{t-k-1}} \equiv 1 \pmod p$.

由

$$(a^{-1}x_{t-k}^2)^{2^{t-k}}-1 = ((a^{-1}x_{t-k}^2)^{2^{t-k-1}}-1)((a^{-1}x_{t-k}^2)^{2^{t-k-1}}+1) \equiv 0 \pmod p,$$

得 $(a^{-1}x_{t-k}^2)^{2^{t-k-1}} \equiv 1$ 或 $(a^{-1}x_{t-k}^2)^{2^{t-k-1}} \equiv -1$

(a) 如果

$$(a^{-1}x_{t-k}^2)^{2^{t-k-1}} \equiv 1 \pmod p,$$

则令$j_{k-1} := 0, x_{t-k-1} := x_{t-k} = x_{t-k}b^{j_{k-1}2^{k-1}} \pmod p$;

(b) 如果

$$(a^{-1}x_{t-k}^2)^{2^{t-k-1}} \equiv -1 \equiv (b^{-2^k})^{2^{t-k-1}} \pmod p,$$

则令$j_{k-1} := 1, x_{t-k-1} := x_{t-k}b^{2^{k-1}} = x_{t-k}b^{j_{k-1}2^{k-1}} \pmod p$.

上述x_{t-k-1}为所求.

寻找x_{t-k-1} 使得$a^{-1}x_{t-k-1}^2$ 满足$y^{2^{t-k-1}} \equiv 1 \pmod p$.

递归关系式: $x_{t-k-1} := x_{t-k}b^{2^{k-1}} = x_{t-k}b^{j_{k-1}2^{k-1}}$

特别地, 对于$k = t-1$, 有

$$\begin{aligned} x &= x_0 \equiv x_1 b^{j_{t-2}2^{t-2}} \\ &\equiv \ldots \equiv x_{t-1} b^{j_0 + j_1 2 + \cdots + j_{t-2}2^{t-2}} \\ &\equiv a^{\frac{s+1}{2}} b^{j_0 + j_1 2 + \cdots + j_{t-2}2^{t-2}} \pmod p \end{aligned}$$

满足同余式

$$x^2 \equiv a \pmod p.$$

例4.6.1 应用上述算法求解同余式$x^2 \equiv 186 \pmod{401}$.

解 因为$a = 186 = 2 \cdot 3 \cdot 31$, 计算勒让得符号

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2}{401}\right) &= (-1)^{(401^2-1)/8} = 1, \\
\left(\frac{3}{401}\right) &= (-1)^{\frac{3-1}{2}\frac{401-1}{2}}\left(\frac{401}{3}\right) = \left(\frac{-1}{3}\right) = -1, \\
\left(\frac{31}{401}\right) &= (-1)^{\frac{31-1}{2}\frac{401-1}{2}}\left(\frac{401}{31}\right) = \left(\frac{-2}{31}\right) \\
&= \left(\frac{-1}{31}\right)\left(\frac{2}{31}\right) = (-1)^{\frac{31-1}{2}}(-1)^{\frac{31^2-1}{8}} = -1,
\end{aligned}$$

所以

$$\left(\frac{186}{401}\right) = \left(\frac{2}{401}\right)\left(\frac{3}{401}\right)\left(\frac{31}{401}\right) = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) = 1.$$

故原同余式有解.

下面具体求解:

对$p=401$, 写$p-1=400=2^4\cdot 25$, 其中$t=4,\ s=25$ 是奇数.

任选一个模401 平方非剩余$n=3$, 即$n=3$ 使得$(\frac{3}{403})=-1$.

再令$b:=3^{25}\equiv 268 \pmod{401}$.

(i) 计算$x_3:=186^{\frac{25+1}{2}}\equiv 103 \pmod{401}$. 以及$a^{-1}\equiv 235 \pmod{401}$.

(ii) 因为$(a^{-1}x_3^2)^{2^2}\equiv 98^4\equiv -1 \pmod{401}$,

我们令$j_0:=1,\ x_2:=x_3b^{j_0}=103\cdot 268\equiv 336 \pmod{401}$,

(iii) 因为$(a^{-1}x_2^2)^2\equiv(-1)^2\equiv 1 \pmod{401}$,

我们令$j_1:=0,\ x_1:=x_2b^{j_1 2}=336 \pmod{401}$.

(iv) 因为$a^{-1}x_1^2\equiv -1 \pmod{401}$,

我们令$j_2:=1,\ x_0:=x_1b^{j_2 2^2}=336\cdot 268^4\equiv 304 \pmod{401}$,

则$x\equiv x_0\equiv 304 \pmod{p}$ 满足同余式

$$x^2\equiv 186 \pmod{401}.$$

例4.6.2 求解同余式 $x^2 \equiv 103 \pmod{1601}$.

解 对于$a = 103$, 计算勒让得符号(这里注意到$1601 = 15 \cdot 103 + 56$)

$$\left(\frac{103}{1601}\right) = (-1)^{\frac{103-1}{2}\frac{1601-1}{2}}\left(\frac{1601}{103}\right) = \left(\frac{56}{103}\right) = \left(\frac{2^3 \cdot 7}{103}\right) = \left(\frac{2}{103}\right)\left(\frac{7}{103}\right),$$

继续计算勒让得符号(这里注意到$103 = 15 \cdot 7 + (-2)$),

$$\left(\frac{2}{103}\right) = (-1)^{\frac{103^2-1}{8}} = 1$$

$$\left(\frac{7}{103}\right) = (-1)^{\frac{7-1}{2}\frac{103-1}{2}}\left(\frac{103}{7}\right) = (-1)\left(\frac{-2}{7}\right)$$

$$= (-1)\left(\frac{-1}{7}\right)\left(\frac{2}{7}\right) = (-1)(-1)^{\frac{7-1}{2}}(-1)^{\frac{7^2-1}{8}} = 1,$$

所以 $\left(\frac{103}{1601}\right) = \left(\frac{2}{103}\right)\left(\frac{7}{103}\right) = 1.$

故原同余式有解.

对于奇素数$p = 1601$,将$p-1$ 写成形式$p-1 = 1600 = 2^6 \cdot 25$, 其中$t = 4,\ s = 25$ 是奇数.

(i) 任意选取一个模1601 平方非剩余$n = 3$, 即整数$n = 3$ 使得$\left(\frac{3}{1601}\right) = -1$. 再令$b := 3^{25} \equiv 828 \pmod{p}$.

(ii) 计算$x_5 := a^{\frac{s+1}{2}} \equiv 595 \pmod{p}$ 以及$a^{-1} \equiv 886 \pmod{p}$.

(iii) 因为$(a^{-1}x_3^2)^{2^2} \equiv 98^4 \equiv -1 \pmod{401}$,

我们令$j_0 := 1,\ x_2 := x_3 b^{j_0} = 103 \cdot 268 \equiv 336 \pmod{401}$,

(iv) 因为$(a^{-1}x_2^2)^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod{401}$,

我们令$j_1 := 0,\ x_1 := x_2 b^{j_1 2} = 336 \pmod{401}$.

(v) 因为$a^{-1}x_1^2 \equiv -1 \pmod{401}$,

我们令$j_2 := 1,\ x_0 := x_1 b^{j_2 2^2} = 336 \cdot 268^4 \equiv 304 \pmod{401}$, 则$x \equiv x_0 \equiv 304 \pmod{p}$ 满足同余式

$$x^2 \equiv 186 \pmod{401}.$$

例4.6.11 设$p=8k+5$ 为素数. 如果a 为模p 平方非剩余, 则同余式

$$x^2 \equiv -1 \pmod p$$

的解为$x = \pm a^{\frac{p-1}{4}} \pmod p$.

证 因为勒让得符号

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = (-1)^{4k+2} = 1,$$

所以原同余式有解.

又因为a 为模p 平方非剩余, 即有$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod p$, 从而

$$(a^{\frac{p-1}{4}})^2 \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod p$$

故结论成立. 证毕

4.6.3 合数的情形

本节我们讨论模m 为合数的二次同余式

$$x^2 \equiv a \pmod{m}, \quad (a, m) = 1. \tag{29}$$

有解的条件及解的个数.

当$m = 2^\delta p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$时, 同余式等价于同余式组:

$$\begin{cases} x^2 \equiv a \pmod{2^\delta}, \\ x^2 \equiv a \pmod{p_1^{\alpha_1}}, \\ \quad \cdots\cdots \\ x^2 \equiv a \pmod{p_k^{\alpha_k}}. \end{cases} \tag{30}$$

因此, 我们先讨论模为奇素数幂p^α 的二次同余式

$$x^2 \equiv a \pmod{p^\alpha}, \qquad (a, p) = 1, \ \alpha > 0. \tag{31}$$

有解的条件及解的个数.

定理4.6.3 设p 是奇素数. 则同余式(31)有解的充分必要条件是a 为模p 平方剩余, 且有解时, (31)式的解数是2.

证 设同余式(31) 有解, 即存在整数$x \equiv x_1 \pmod{p^\alpha}$ 使得

$$x_1^2 \equiv a \pmod{p^\alpha},$$

则我们有 $x_1^2 \equiv a \pmod{p}$. 这就是说, a 为模p 平方剩余. 因此必要性成立.

反过来, 设a 为模p 平方剩余, 那么存在整数$x \equiv x_1 \pmod{p}$ 使得

$$x_1^2 \equiv a \pmod{p}.$$

令$f(x) = x^2 - a$, 则 $f'(x) = 2x, \quad (f'(x_1), p) = (2x_1, p) = 1.$

根据§3.3 定理3.3.2 , 从 $x^2 \equiv a \pmod{p}$ 的解$x \equiv x_1 \pmod{p}$, 可递归地推出唯一的 $x \equiv x_\alpha \pmod{p^\alpha}$, 使得 $x_\alpha^2 \equiv a \pmod{p^\alpha}$.

因为$x^2 \equiv a \pmod{p}$ 只有两个解, 所以 $x^2 \equiv a \pmod{p^\alpha}$ 的解数为2 .

证毕

推论 设p 是奇素数. 则对于任意的整数a, 同余式(31)的解数是

$$T = 1 + \left(\frac{a}{p}\right).$$

证 分3 种情形讨论. 当$\left(\frac{a}{p}\right) = 0$ 时, $x^2 \equiv a \equiv 0 \pmod p$ 有惟一解$x \equiv 0 \pmod p$, 所以解数$T = 1 = 1 + \left(\frac{a}{p}\right)$.

当$\left(\frac{a}{p}\right) = 1$ 时, $x^2 \equiv a \pmod p$ 有2 解, 所以解数$T = 2 = 1 + \left(\frac{a}{p}\right)$.

当$\left(\frac{a}{p}\right) = -1$ 时, $x^2 \equiv a \pmod p$ 无解, 所以解数$T = 0 = 1 + \left(\frac{a}{p}\right)$.

故结论成立. 证毕

再讨论同余式

$$x^2 \equiv a \pmod{2^\alpha}, \qquad (a, 2) = 1,\ \alpha > 0, \tag{32}$$

有解的条件及解的个数.

定理4.6.4 设$\alpha > 1$, 则同余式(32)有解的必要条件是

(i)当$\alpha = 2$ 时, $a \equiv 1 \pmod 4$; (ii)当$\alpha \geq 3$ 时, $a \equiv 1 \pmod 8$.

若上述条件成立, 则(32)有解.

进一步, 当$\alpha = 2$ 时, 解数是2; 当$\alpha \geq 3$ 时, 解数是4.

证 若同余式(32)有解, 则存在整数x_1, 使得 $x_1^2 \equiv a \pmod{2^\alpha}$,

根据$(a, 2) = 1$, 我们有$(x_1, 2) = 1$. 记$x_1 = 1 + t \cdot 2$, 上式可写成

$$a \equiv 1 + t(t+1) \cdot 2^2 \pmod{2^\alpha}.$$

注意到$2 \mid t(t+1)$, 我们有

(i)当$\alpha = 2$, $a \equiv 1 \pmod 4$; (ii)当$\alpha \geq 3$, $a \equiv 1 \pmod 8$.

因此, 必要性成立.

访问主页
标题页
目录页
第 97 页 共 130 页
返回
全屏显示
关闭
退出

现在, 若必要条件满足, 则

(i) 当$\alpha = 2$ 时, $a \equiv 1 \pmod 4$, 这时

$$x \equiv 1,\ 3 \pmod{2^\alpha}$$

是同余式(32)仅有的二解.

(ii) 当$\alpha \geq 3$ 时, $a \equiv 1 \pmod 8$. 这时,

对$\alpha = 3$, 易验证:

$$x \equiv \pm 1,\ \pm 5 \pmod{2^3}$$

是同余式(32)仅有的4 解, 它们可表示为

$$\pm(1 + t_3 \cdot 2^2), \quad t_3 = 0, \pm 1, \ldots,$$

或者

$$\pm(x_3 + t_3 \cdot 2^2), \quad t_3 = 0, \pm 1, \ldots.$$

对$\alpha = 4$, 由

$$(x_3 + t_3 \cdot 2^2)^2 \equiv a \pmod{2^4},$$

并注意到

$$2\, x_3(t_3 \cdot 2^2) \equiv t_3 \cdot 2^3 \pmod{2^4},$$

我们有

$x_3^2 + t_3 \cdot 2^3 \equiv a \pmod{2^4}$, 或$t_3 \equiv \frac{a-x_3^2}{2^3} \pmod{2}$.

故同余式

$$x^2 \equiv a \pmod{2^4}$$

的解可表示为

$$x = \pm(1 + 4 \cdot \frac{a - x_3^2}{2^3} + t_4 \cdot 2^3), \quad t_4 = 0, \pm 1, \ldots,$$

或者

$$x = \pm(x_4 + t_4 \cdot 2^3), \quad t_4 = 0, \pm 1, \ldots.$$

类似地, 对于$\alpha \geq 4$, 如果满足同余式 $x^2 \equiv a \pmod{2^{\alpha-1}}$
的解为 $x = \pm(x_{\alpha-1} + t_{\alpha-1}) \cdot 2^{\alpha-2},\ t_{\alpha-1} = 0,\ \pm 1,\ \ldots.$
则由 $(x_{\alpha-1} + t_{\alpha-1} \cdot 2^{\alpha-2})^2 \equiv a \pmod{2^\alpha}$,
并注意到 $2\,x_{\alpha-1}(t_{\alpha-1} \cdot 2^{\alpha-2}) \equiv t_{\alpha-1} \cdot 2^{\alpha-1} \pmod{2^\alpha}$,
我们有 $x_{\alpha-1}^2 + t_{\alpha-1} \cdot 2^{\alpha-1} \equiv a \pmod{2^\alpha}$,
或 $t_{\alpha-1} \equiv \frac{a - x_{\alpha-1}^2}{2^{\alpha-1}} \pmod 2$.
故同余式 $x^2 \equiv a \pmod{2^\alpha}$ 的解可表示为

$$x = \pm(x_{\alpha-1} + \frac{a - x_{\alpha-1}^2}{2^{\alpha-1}} \cdot 2^{\alpha-2} + t_\alpha \cdot 2^{\alpha-1}), \quad t_\alpha = 0, \pm 1, \ldots,$$

或者

$$x = \pm(x_\alpha + t_\alpha \cdot 2^{\alpha-1}), \quad t_\alpha = 0, \pm 1, \ldots.$$

它们对模2^α 为4 个解:

$$x_\alpha,\ x_\alpha + 2^{\alpha-1},\ -x_\alpha,\ -(x_\alpha + 2^{\alpha-1}).$$

证毕

例4.6.12 求解同余式$x^2 \equiv 57 \pmod{64}$. $\quad 64 = 2^6$

解 因为$57 \equiv 1 \pmod 8$, 所以同余式有4 个解.

$\alpha = 3$时, 解为$\pm(1+4t_3)$, $t_3 = 0, \pm 1, \ldots$.

$\alpha = 4$时, 由于$(1+4t_3)^2 \equiv 57 \pmod{2^4}$, 或$t_3 \equiv \frac{57-1^2}{8} \equiv 1 \pmod 2$.

故$x^2 \equiv a \pmod{2^4}$的解: $\pm(1+4\cdot 1+8t_4) = \pm(5+8t_4)$, $t_4 = 0, \pm 1, \ldots$.

$\alpha = 5$时, 由于$(5+8t_4)^2 \equiv 57 \pmod{2^5}$, 或$t_4 \equiv \frac{57-5^2}{16} \equiv 0 \pmod 2$.

故$x^2 \equiv a \pmod{2^5}$ 的解: $\pm(5+8\cdot 0+16t_5) = \pm(5+16t_5)$, $t_5 = 0, \pm 1, \ldots$.

$\alpha = 6$时, 由于$(5+16t_5)^2 \equiv 57 \pmod{2^5}$ 或$t_5 \equiv \frac{57-5^2}{32} \equiv 1 \pmod 2$.

故$x^2 \equiv a \pmod{2^6}$ 的解为

$$x = \pm(5+16\cdot 1+32t_6) = \pm(21+32t_6),\ t_6 = 0, \pm 1, \ldots.$$

因此, 同余式模$64 = 2^6$ 的解是: 21, 53, $-21 \equiv 43$, $-53 \equiv 11 \pmod{64}$.

4.7 $x^2+y^2=p$

定理4.7.1 设p 是素数. 那么$x^2+y^2=p$ 有解的充分必要条件是$p=2$ 或-1 为模p 平方剩余, 即$p=2$ 或$p=4k+1$.

证 设(x_0,y_0) 是方程$x^2+y^2=p$ 的解, 即$x_0^2+y_0^2=p$,
则一定有

$$0<|x_0|,\ |y_0|<p,\quad (x_0,p)=(y_0,p)=1.$$

因此, 存在y_0^{-1}使得

$$y_0^{-1}y_0\equiv 1 \pmod p.$$

当$p>2$时,

$$(x_0y_0^{-1})^2=(p-y_0^2)(y_0^{-1})^2\equiv -(y_0^{-1}y_0)^2\equiv -1 \pmod p.$$

即$x^2\equiv -1 \pmod p$有解, 从而$p=4k+1$. 必要性成立.

再证充分性. $p=2$ 时, $p=1^2+1^2$. 方程有解.

$p>2$时, $p=4k+1$. 因为$\left(\frac{-1}{p}\right)=1$, 所以存在整数$x_0$ 使得

$$x_0^2 \equiv -1 \pmod p, \quad 0<|x_0|<\frac{p}{2}.$$

由此推出, 对于整数x_0, $y_0=1$, 存在整数m_0 使得

$$x_0^2+y_0^2=m_0 p, \quad 0<m_0<p.$$

设m是使得

$$x^2+y^2=mp, \quad 0<m<p.$$

成立的最小正整数. 要证明$m=1$.

$x^2+y^2=mp, \quad 0<m<p$. 要证明$m=1$.

若$m>1$, 我们令 $u\equiv x, \ v\equiv y \pmod m, \quad |u|, |v|\le \frac{m}{2}$. 则有

$$0<u^2+v^2\le \frac{m^2}{2}, \quad u^2+v^2\equiv x^2+y^2 \pmod m.$$

进而 $(u^2+v^2)(x^2+y^2)=m'm^2p, \quad 0<m'<m.$

将上式变形为

$$(ux+vy)^2+(uy-vx)^2=m'm^2p.$$

因为

$$ux+vy\equiv x^2+y^2\equiv 0, \quad uy-vx\equiv 0 \pmod m,$$

所以整数$x'=\dfrac{ux+vy}{m}, \ y'=\dfrac{uy-vx}{m}$ 和m'满足

$$x'^2+y'^2=(\frac{ux+vy}{m})^2+(\frac{uy-vx}{m})^2=m'p.$$

这与m 的最小性矛盾. 故$m=1$.

例4.7.1 设$p = 797$ 为素数. 求正整数x, y 使得$x^2 + y^2 = p$

解 因为p 是$8k + 5$ 形式的素数,所以

$$x = x_0 = 2^{(p-1)/4} \equiv 215 \pmod{p}$$

是同余式$x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ 的解.

现在令$y_0 = 1$, 有$x_0^2 + y_0^2 = m_0 \cdot p$, 其中$m_0 = 58$.

再令$u_0 \equiv x_0 \equiv -17 \pmod{m_0}$, $v_0 \equiv y_0 \equiv 1 \pmod{m_0}$ 以及

$$x_1 = \frac{u_0 \cdot x_0 + v_0 \cdot y_0}{m_0} = -63, \quad y_1 = \frac{u_0 \cdot y_0 - v_0 \cdot x_0}{m_0} = -4$$

有$x_1^2 + y_1^2 = m_1 \cdot p$, 其中$m_1 = 5$.

最后令$u_1 \equiv x_1 \equiv 2 \pmod{m_1}$, $v_1 \equiv y_1 \equiv 1 \pmod{m_1}$ 以及

$$x_2 = \frac{u_1 \cdot x_1 + v_1 \cdot y_1}{m_1} = -26, \quad y_2 = \frac{u_1 \cdot y_1 - v_1 \cdot x_1}{m_1} = 11$$

有$x_2^2 + y_2^2 = p$.

故正整数$x = 26$, $y = 11$ 使得$x^2 + y^2 = p$.

例4.7.2 $p = 100069$ 为素数. 求正整数x, y 使得

$$x^2 + y^2 = p$$

解 因为p 是$8k+5$ 形式的素数, 根据例4.3.5 和例4.6.11 , 知

$$x = x_0 = 2^{\frac{p-1}{4}} \equiv -39705 \pmod p$$

是同余式$x^2 \equiv -1 \pmod p$ 的解.
首先, 令$y_0 = 1$, 有$x_0^2 + y_0^2 = m_0 \cdot p$, 其中$m_0 = 15754$.
其次, 令$u_0 \equiv x_0 \equiv 7557 \pmod{m_0}$, $v_0 \equiv y_0 \equiv 1 \pmod{m_0}$ 以及

$$x_1 = \frac{u_0 \cdot x_0 + v_0 \cdot y_0}{m_0} = -19046, \quad y_1 = \frac{u_0 \cdot y_0 - v_0 \cdot x_0}{m_0} = 3$$

有$x_1^2 + y_1^2 = m_1 \cdot p$, 其中$m_1 = 3625$.
依次, 令$u_1 \equiv x_1 \equiv -921 \pmod{m_1}$, $v_1 \equiv y_1 \equiv 3 \pmod{m_1}$ 以及

$$x_2 = \frac{u_1 \cdot x_1 + v_1 \cdot y_1}{m_1} = 4839, \quad y_2 = \frac{u_1 \cdot y_1 - v_1 \cdot x_1}{m_1} = 15$$

有$x_2^2 + y_2^2 = m_2 \cdot p$, 其中$m_2 = 234$.

依次, 令$u_2 \equiv x_2 \equiv -75 \pmod{m_2}$, $v_2 \equiv y_2 \equiv 15 \pmod{m_2}$ 以及

$$x_3 = \frac{u_2 \cdot x_2 + v_2 \cdot y_2}{m_2} = -1550, \quad y_3 = \frac{u_2 \cdot y_2 - v_2 \cdot x_2}{m_2} = -315$$

有$x_3^2 + y_3^2 = m_3 \cdot p$, 其中$m_3 = 25$.

依次, 令$u_3 \equiv x_3 \equiv 0 \pmod{m_3}$, $v_3 \equiv y_3 \equiv 10 \pmod{m_3}$ 以及

$$x_4 = \frac{u_3 \cdot x_3 + v_3 \cdot y_3}{m_3} = -126, \quad y_4 = \frac{u_3 \cdot y_3 - v_3 \cdot x_3}{m_3} = 620$$

有$x_4^2 + y_4^2 = m_4 \cdot p$, 其中$m_4 = 4$.

最后, 令$u_4 \equiv x_4 \equiv 2 \pmod{m_4}$, $v_4 \equiv y_4 \equiv 0 \pmod{m_4}$ 以及

$$x_5 = \frac{u_4 \cdot x_4 + v_4 \cdot y_4}{m_4} = -63, \quad y_5 = \frac{u_4 \cdot y_4 - v_4 \cdot x_4}{m_4} = 310$$

有$x_5^2 + y_5^2 = m_5 \cdot p$, 其中$m_5 = 1$.

故正整数$x = -63,\ y = 310$ 使得$x^2 + y^2 = p$.

例4.7.3 设$p = 100000037$ 为素数. 求正整数x, y 使得

$$x^2 + y^2 = p$$

解 因为p 是$8k+5$ 形式的素数, 根据例4.3.5 和例4.6.11 , 知

$$x = x_0 = 2^{\frac{p-1}{4}} \equiv 55387563 \pmod p$$

是同余式$x^2 \equiv -1 \pmod p$ 的解.

首先, 令$y_0 = 1$, 有$x_0^2 + y_0^2 = m_0 \cdot p$, 其中$m_0 = 30677810$.

其次, 令$u_0 \equiv x_0 \equiv -5968057 \pmod{m_0}$, $v_0 \equiv y_0 \equiv 1 \pmod{m_0}$ 以及

$$x_1 = \frac{u_0 \cdot x_0 + v_0 \cdot y_0}{m_0} = -10775089, \quad y_1 = \frac{u_0 \cdot y_0 - v_0 \cdot x_0}{m_0} = -2$$

有$x_1^2 + y_1^2 = m_1 \cdot p$, 其中$m_1 = 1161025$.

依次, 令$u_1 \equiv x_1 \equiv -325864 \pmod{m_1}$, $v_1 \equiv y_1 \equiv -2 \pmod{m_1}$ 以及

$$x_2 = \frac{u_1 \cdot x_1 + v_1 \cdot y_1}{m_1} = 3024236, \quad y_2 = \frac{u_1 \cdot y_1 - v_1 \cdot x_1}{m_1} = -18$$

有$x_2^2 + y_2^2 = m_2 \cdot p$, 其中$m_2 = 91460$.

依次, 令$u_2 \equiv x_2 \equiv 6056 \pmod{m_2}$, $v_2 \equiv y_2 \equiv -18 \pmod{m_2}$ 以及

$$x_3 = \frac{u_2 \cdot x_2 + v_2 \cdot y_2}{m_2} = 200249, \quad y_3 = \frac{u_2 \cdot y_2 - v_2 \cdot x_2}{m_2} = 594$$

有$x_3^2 + y_3^2 = m_3 \cdot p$, 其中$m_3 = 401$.

依次, 令$u_3 \equiv x_3 \equiv 150 \pmod{m_3}$, $v_3 \equiv y_3 \equiv 193 \pmod{m_3}$ 以及

$$x_4 = \frac{u_3 \cdot x_3 + v_3 \cdot y_3}{m_3} = 75192, \quad y_4 = \frac{u_3 \cdot y_3 - v_3 \cdot x_3}{m_3} = -96157$$

有$x_4^2 + y_4^2 = m_4 \cdot p$, 其中$m_4 = 149$.

依次, 令$u_4 \equiv x_4 \equiv 6812 \pmod{m_4}$, $v_4 \equiv y_4 \equiv -52 \pmod{m_4}$ 以及

$$x_5 = \frac{u_4 \cdot x_4 + v_4 \cdot y_4}{m_4} = -63, \quad y_5 = \frac{u_4 \cdot y_4 - v_4 \cdot x_4}{m_4} = 60445$$

有$x_5^2 + y_5^2 = m_5 \cdot p$, 其中$m_5 = 37$.

依次, 令$u_5 \equiv x_5 \equiv 4 \pmod{m_5}$, $v_5 \equiv y_5 \equiv -13 \pmod{m_5}$ 以及

$$x_6 = \frac{u_5 \cdot x_5 + v_5 \cdot y_5}{m_5} = -20501, \quad y_6 = \frac{u_5 \cdot y_5 - v_5 \cdot x_5}{m_5} = 8928$$

有$x_6^2 + y_6^2 = m_6 \cdot p$, 其中$m_6 = 5$.

最后, 令$u_6 \equiv x_6 \equiv -1 \pmod{m_6}$, $v_6 \equiv y_6 \equiv -2 \pmod{m_6}$ 以及

$$x_7 = \frac{u_6 \cdot x_6 + v_6 \cdot y_6}{m_6} = 529, \quad y_7 = \frac{u_6 \cdot y_6 - v_6 \cdot x_6}{m_6} = -9986$$

有$x_7^2 + y_7^2 = m_7 \cdot p$, 其中$m_7 = 1$.

故正整数$x = 529,\ y = -9986$ 使得$x^2 + y^2 = p$.