GSH弹势的声波行为

§1 弹性体的声波理论

记

$$\begin{aligned}\Delta &= -tr\left(\widehat{u}\right) && (1)\\ u_s &= \sqrt{tr\left(\widehat{u}_*^2\right)} && (2)\\ u_t &= \sqrt[3]{tr\left(\widehat{u}_*^3\right)} && (3)\end{aligned}$$

为3×3弹应变矩阵$\widehat{u}$的3个不变量。各项同性弹性体的势能将是它们的函数：

$$\mathcal{U}=\mathcal{U}\left(\Delta,u_s,u_t\right) \tag{4}$$

其给出的3×3弹应力矩阵是

$$\widehat{\sigma}=-\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\widehat{u}} \tag{5}$$

给出的$3\times3\times3\times3$（四阶）刚度张量是

$$\overline{\overline{\mathfrak{M}}}=\text{对称化}\left(\frac{\partial\widehat{\sigma}}{\partial\widehat{u}}\right) \tag{6}$$

这里的记号是：

$$\begin{aligned}\widehat{u}_* &= \widehat{u}+\frac{\Delta}{3}\widehat{1} && (7)\\ \widehat{u}_{**} &= \widehat{u}_*\widehat{u}_*-\frac{u_s^2}{3}\widehat{1} && (8)\\ \widehat{1} &= \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad\text{单位矩阵} && (9)\end{aligned}$$

波矢量$\overrightarrow{k}$的声波矩阵是：

$$\widehat{\Upsilon}=\left(\frac{1}{\rho\left|\overrightarrow{k}\right|}\right)\overleftarrow{k}\,\overline{\overline{\mathfrak{M}}}\,\overrightarrow{k} \tag{10}$$

计算它的本征值和本征矢即得波速平方和极化方向。注意由于$\overline{\overline{\mathfrak{M}}}$是对称化的，$\widehat{\Upsilon}$是对称矩阵。

特别注意计算上述公式的微分导数时，必须将应变$\widehat{u}$视为非对称的一般矩阵：

$$\widehat{u} = \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} & u_{xz} \\ u_{yx} & u_{yy} & u_{yz} \\ u_{zx} & u_{zy} & u_{zz} \end{pmatrix} \tag{11}$$

计算完所有一阶、二阶导数后再取对称化：

$$u_{yx} = u_{xy}, \quad u_{zx} = u_{xz}, \quad u_{zy} = u_{yz} \tag{12}$$

§2 GSH弹势的声波计算

2012年文献给出的：

$$\mathcal{U} = \mathcal{B}\Delta^a \left(\frac{\Delta^2}{a+2} + \frac{u_s^2}{\xi} - \frac{\chi}{\xi}\frac{u_t^3}{\Delta} \right) \tag{13}$$

它有4个参数: $a, \xi, \chi, \mathcal{B}$。如果取$\chi = 0$它是2003年的GSH模型。取$a = 0$，$\chi = 0$时退化为古典胡克定律。

声波矩阵的计算步骤是：

1. 首先将（11）代入（1，2，3）计算出三个应变不变量。在默认重复脚标自动求和下，有：

$$\begin{aligned} \Delta &= -\widehat{u}_{ii} && (14) \\ u_s &= \sqrt{\widehat{u}_{ij}^* \widehat{u}_{ji}^*} && (15) \\ u_t &= \sqrt[3]{\widehat{u}_{ij}^* \widehat{u}_{jk}^* \widehat{u}_{ki}^*} && (16) \end{aligned}$$

2. 然后在将它们代入(13)算出势能函数$\mathcal{U} = \mathcal{U}_{a,\xi,\chi}(u_{xx}, u_{yy}, u_{zz}, u_{xy}, u_{xz}, u_{yz}, u_{yx}, u_{zx}, u_{zy})$。注意它有9个自变量，3个参数。

3. 将其代入(5)，计算导数后得到九个应力分量$\widehat{\sigma}_{ij}(u_{xx}, u_{yy}, u_{zz}, u_{xy}, u_{xz}, u_{yz}, u_{yx}, u_{zx}, u_{zy})$。

4. 再计算这九个应力分量的导数得到“非对称刚度”：

$$\overset{=}{\mathfrak{M}}{}^{\text{非对称}}_{ijlk} = \frac{\partial \widehat{\sigma}_{ij}}{\partial \widehat{u}_{lk}} = \frac{\partial \mathcal{U}_{a,\xi,\chi}}{\partial \widehat{u}_{ij} \partial \widehat{u}_{lk}}$$

然后对前后两个脚标做对称化：

$$\overset{=}{\mathfrak{M}}_{ijlk} = \frac{1}{4}\left(\overset{=}{\mathfrak{M}}{}^{\text{非对称}}_{ijlk} + \overset{=}{\mathfrak{M}}{}^{\text{非对称}}_{jilk} \overset{=}{\mathfrak{M}}{}^{\text{非对称}}_{ijlk} \overset{=}{\mathfrak{M}}{}^{\text{非对称}}_{ijkl} \right)$$

得到对称的刚度张量。

5. 利用（10）计算声波矩阵，即：

$$\widehat{\Upsilon}_{ij} = \left(\frac{1}{\rho\left|\overrightarrow{k}\right|^2}\right)\overleftarrow{k}_m\bar{\bar{\mathfrak{M}}}_{mijn}\overrightarrow{k}_n$$

6. 令应变$\widehat{u}$对称，即取（12）。

7. 计算声波矩阵的本征值和本征矢，可得波矢$\overrightarrow{k}$下的3个声速$c_{1,2,3}$和极化方向。

由于GSH弹势的非线性行为，上面的计算最好交给Mathematica或Mapple软件。虽然都可以给出解析表达式，但过于复杂这里就不写出了。对简单的$\widehat{u} = -\Delta\widehat{1}/3$的各向同性应变和应力情况，取$\overleftarrow{k} = (k, 0, 0)$沿着$x$方向，结果是

$$\begin{aligned}
\widehat{\sigma} &= \mathcal{B}\Delta^{a+1}\widehat{1} \\
\widehat{\Upsilon} &= \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} c_L & 0 & 0 \\ 0 & c_T & 0 \\ 0 & 0 & c_T \end{pmatrix} \\
c_L &= \sqrt{\mathcal{B}\Delta^a\left(\frac{4}{3\xi} + a + 1\right)} \\
c_T &= \sqrt{\frac{\mathcal{B}\Delta^a}{\xi}}
\end{aligned}$$

对应的波速比是：$g_0 = \frac{c_L}{c_T} = \sqrt{\frac{4}{3} + (a+1)\,\xi}$。

上面计算的应力$\widehat{\sigma}_{ij}$和声速$c_{1,2,3}$等都是6个应变分量$u_{xx}, u_{yy}, u_{zz}, u_{xy}, u_{xz}, u_{yz}$的函数。消去应变可得到声速随应力的变化关系（这往往需要数值计算）。