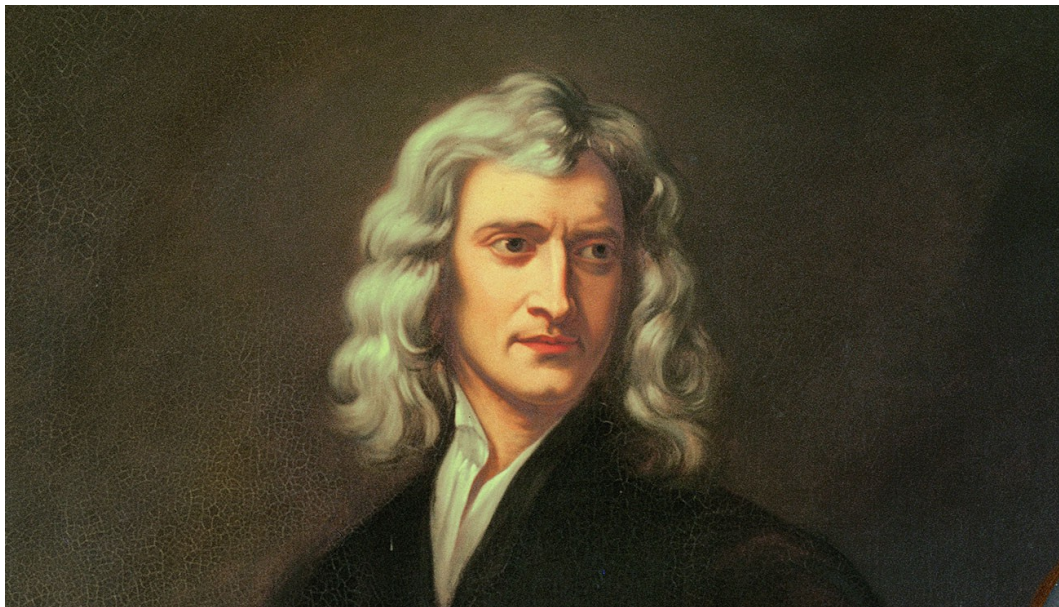


Chapitre 17

Limites et comparaisons



Isaac NEWTON
(1642 – 1727)

« Je ne sais pas ce que j'ai pu sembler être aux yeux du monde, mais à mes yeux je n'ai été qu'un enfant, jouant sur le rivage et heureux de trouver de temps à autre un galet plus lisse ou un coquillage plus beau que les autres, alors que le grand océan de la vérité s'étendait devant moi, encore inexploré. »

Isaac Newton
The Portsmouth Papers

Newton

Physicien, mathématicien, alchimiste, passionné d'astronomie, grand argentier de l'État et homme d'Église, Sir Isaac Newton fut un génie comme l'histoire en a peu connu.

Père du principe de la gravitation universelle, des lois du mouvement, du principe d'action-réaction, du télescope, du calcul différentiel... Newton a marqué l'histoire par son œuvre, impressionnante tant par sa profondeur que son étendue.

Sommaire

I.	Adhérence, intérieur et voisinages.....	p. 4
II.	Limites : définition.....	p. 6
III.	Opérations sur les limites.....	p. 11
IV.	Limites et inégalités.....	p. 14
V.	Relations de comparaison.....	p. 17

Dans tout ce chapitre, I est un intervalle de \mathbb{R} tel que $\ell(I) > 0$.

I. Adhérence, intérieur et voisinages

1. Adhérence

Définition 1

L'adhérence de I dans $\overline{\mathbb{R}}$, notée \overline{I} est définie par

$$\overline{I} := I \cup \{\text{les bornes de } I\}.$$

Exemples

- $\overline{]0, 1[} = [0, 1]$
- $\overline{]0, 1]} = [0, 1]$
- $\overline{]0, +\infty[} = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$
- $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

On rappelle que « $-\infty$ » et « $+\infty$ » ne sont que des symboles et en aucun cas des nombres.

Exercice 2

- 1) A-t-on $\overline{\overline{I}} = \overline{I}$?
- 2) A-t-on $\overline{I} \cap \mathbb{R} = I$?

2. Intérieur

Définition 3

L'intérieur de I , noté $\overset{\circ}{I}$ ou \hat{I} est défini par

$$\overset{\circ}{I} := I \setminus \{\text{les bornes de } I\}.$$

Exemple

- $\overset{\circ}{[0, 1]} =]0, 1[$

Exercice 4

Caractériser les intervalles d'intérieur vide.

3. Voisinages

Dans ce paragraphe, on introduit le formalisme des voisinages. Il est tout à fait analogue au formalisme « APCR » qu'on a introduit pour les suites.

Définition 5

Soit $a \in \bar{I}$.

- Soit $P(f)$ un prédicat de f , fonction réelle.
Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

On dit que $P(f)$ est vrai au voisinage de a et on note « $P(f)$ au $\mathcal{V}(a)$ » $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

▷ quand $a \in \mathbb{R}$: $\exists \delta > 0 : P(f|_{I \cap]a-\delta, a+\delta[})$ est vraie

▷ quand $a = +\infty$: $\exists A \in \mathbb{R} : P(f|_{I \cap [A, +\infty[})$ est vraie

▷ quand $a = -\infty$: $\exists A \in \mathbb{R} : P(f|_{I \cap]-\infty, A])$ est vraie

- Soit $Q(x)$ un prédicat de $x \in \mathbb{R}$.

On dit que $Q(x)$ est vrai au voisinage de a et on note « $Q(x)$ au $\mathcal{V}(a)$ » $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

▷ quand $a \in \mathbb{R}$: $\exists \delta > 0 : \forall x \in]a - \delta, a + \delta[, Q(x)$

▷ quand $a = +\infty$: $\exists A \in \mathbb{R} : \forall x \in [A, +\infty[, Q(x)$

▷ quand $a = -\infty$: $\exists A \in \mathbb{R} : \forall x \in]-\infty, A], Q(x)$

Exemples

- $P(f) = \text{« } f \text{ est croissante »}$.

On considère la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 - 42 \end{cases}$. Alors,

- ▷ f est croissante au $\mathcal{V}(+\infty)$.
- ▷ f est décroissante au $\mathcal{V}(-\infty)$.
- ▷ f n'est ni croissante ni décroissante au $\mathcal{V}(0)$.

- $\sin(\cdot)$ est strictement croissante au $\mathcal{V}(0)$.

- $\begin{cases} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x} \end{cases}$ n'est pas bornée au $\mathcal{V}(0)$ ie $\forall \delta > 0, \begin{cases}]0, \delta[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x} \end{cases}$ n'est pas bornée.

- $\cos(x) > 0$ au $\mathcal{V}(0)$.

- $\frac{1}{x} \leq 1$ au $\mathcal{V}(+\infty)$.

- $\frac{\exp(\sqrt{x})}{2} > x^{42}$ au $\mathcal{V}(+\infty)$.

II. Limites : définition

1. Les neuf cas

Définition 6

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Soient $a \in \bar{I}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

On dit que f tend vers ℓ en a ou que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a , et on note

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{a}{\longrightarrow} \ell \quad \text{ou} \quad f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$$

Δ ,
ssi ...

a) **Premier cas** : $a \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$

Définition 7

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} \ell \quad \Delta \text{ ssi} \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Autrement dit : « Quitte à être très proche de a , je peux être, après application de la fonction $f(\cdot)$ aussi proche que je veux de ℓ »

Remarque

- Dans cette définition, on peut remplacer le « $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ » par « $|f(x) - \ell| \leq 2\varepsilon$ » ou par « $|f(x) - \ell| \leq 50\varepsilon$ », etc.

Exemples

- $\sqrt{x} \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0$.
« Si x est petit, \sqrt{x} est petit. »
- $\sqrt{x} \underset{x \rightarrow 2}{\longrightarrow} \sqrt{2}$.
« Si x est proche de 2, \sqrt{x} est proche de $\sqrt{2}$. »

Fait 8

Si f est définie en a (ie si $a \in I$) alors

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} \ell \implies \ell = f(a).$$

Démonstration. — Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\delta > 0$ tel que $\forall x \in I, |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.

Comme $a \in I$ et $|a - a| \leq \delta$, on a $|f(a) - \ell| \leq \varepsilon$.

Ainsi, on a montré que

$$\forall \varepsilon > 0, |f(a) - \ell| \leq \varepsilon.$$

On sait que dans ce cas, on a nécessairement $|f(a) - \ell| = 0$, ie $f(a) = \ell$. ■

Remarque

Ainsi, le cas intéressant est quand $a \notin I$.

Exemples

- $\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$.
- On considère $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$. Alors, f n'a pas de limite en 0.

b) Deuxième cas : $a \in \mathbb{R}$ et $\ell = +\infty$

Définition 9

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty \quad \triangleq \quad \text{ssi} \quad \forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 : \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \implies f(x) \geq A$$

Une fonction f qui tend vers $+\infty$ en a ne peut pas être définie en a .

Remarque

- Dans cette définition, on peut remplacer le « $\forall A \in \mathbb{R}$ » par « $\forall A \geq 0$ ».

Exemple

- On considère $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x} \end{cases}$. Alors on a $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$.

c) Troisième cas : $a = +\infty$ et $\ell \in \mathbb{R}$

Définition 10

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell \quad \triangleq \quad \text{ssi} \quad \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R} : \forall x \in I, x \geq x_0 \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Exemples

- $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
- $\arctan(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$.

d) **Quatrième cas** : $a = +\infty$ et $\ell = +\infty$

Définition 11

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \stackrel{\Delta}{\text{ssi}} \forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R} : \forall x \in I, x \geq x_0 \implies f(x) \geq A$$

Exemples

- $x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.
- $\exp(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.
- $\lfloor x \rfloor \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

e) **Autres cas**

Exercice 12

- 1) Quels sont les autres cas ?
- 2) Donner les définitions dans ces cas-là.

2. Fonctions convergentes

Définition 13

Soit $a \in \bar{I}$ et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f converge en a $\stackrel{\Delta}{\text{ssi}}$ $\exists \ell \in \mathbb{R} : f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

3. Unicité de la limite

Proposition-définition 14

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \bar{I}$ et $\ell_1, \ell_2 \in \bar{\mathbb{R}}$.

- Alors,

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_1 \\ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_2 \end{array} \right\} \implies \ell_1 = \ell_2.$$

- Dans ce cas, cet unique $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$ est appelé la limite de f en a et est noté

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_a f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_a f.$$

Démonstration. — On laisse au lecteur le soin, à titre d'exercice, de démontrer cette assertion. ■

4. Limites par valeurs inférieures et supérieures

Définition 15

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, soit $a \in \bar{I} \cap \mathbb{R}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$.

- On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a par valeurs supérieures $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$f|_{I \cap]a, +\infty[}(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell.$$

On note alors

$$f(x) \xrightarrow[x > a]{} \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{a^+} \ell \quad \text{ou} \quad f \xrightarrow{a^+} \ell.$$

- De même, on définit « $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a par valeurs inférieures » et les notations correspondantes.

Exemples

- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Alors, on a

$$f \xrightarrow[0^+]{} 1 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in]0, \delta[, |f(x) - 1| \leq \varepsilon.$$

- On considère la fonction $g : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lfloor x \rfloor \end{cases}$. Alors, on a

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -1 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(0) = 0.$$

Proposition 16

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, soit $a \in I$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, on a

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \iff \begin{cases} f(a) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} \ell \\ f(x) = \ell \\ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \ell \end{cases}.$$

Démonstration. — Elle est laissée au lecteur à titre d'exercice. ■

5. Cas d'une fonction non définie en un point

Définition 17

Soit $a \in \overset{\circ}{I}$ et soit $f : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

On dit que f tend vers ℓ en a $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\overset{>}{\longrightarrow}} \ell \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \rightarrow a}{\overset{<}{\longrightarrow}} \ell.$$

On note alors

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\overset{\neq}{\longrightarrow}} \ell.$$

Exemples

- Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On verra bientôt que

$$f \text{ est dérivable en } a \quad \overset{\Delta}{\text{ssi}} \quad \exists \ell \in \mathbb{R} : \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{x \rightarrow a}{\overset{\neq}{\longrightarrow}} \ell.$$

- On a $\frac{1}{x^2} + 1 \underset{x \rightarrow 0}{\overset{\neq}{\longrightarrow}} +\infty$.

III. Opérations sur les limites

1. Une fonction convergente est localement bornée

Proposition 18

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \bar{I}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Alors,

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \implies f \text{ est bornée au } \mathcal{V}(a).$$

Démonstration. — Cf. cours. ■

Remarque

- On remarquera évidemment l'analogie avec le résultat suivant portant sur les suites

$$\forall (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad (u_n)_n \text{ converge} \implies (u_n)_n \text{ bornée.}$$

Exemple

- On considère $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x} \end{cases}$.
 - On a $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Donc, f est bornée au $\mathcal{V}(+\infty)$.
 - Mais, f n'est pas bornée sur \mathbb{R}_+^* .

2. Opérations algébriques sur les limites

On dispose pour les limites de fonctions de résultats analogues à ceux pour les limites de suites. On laisse au lecteur le soin de les énoncer et de les démontrer.

Exemples

Soit $a \in \bar{I}$, soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et soient $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$.

- On a

$$\left. \begin{array}{l} f \xrightarrow{a} \ell_1 \\ g \xrightarrow{a} \ell_2 \end{array} \right\} \implies \left(f + g \xrightarrow{a} \ell_1 + \ell_2 \quad \text{et} \quad fg \xrightarrow{a} \ell_1 \ell_2 \right).$$

- On a

$$\left. \begin{array}{l} f \xrightarrow{a} +\infty \\ g \text{ bornée au } \mathcal{V}(a) \end{array} \right\} \implies f + g \xrightarrow{a} +\infty.$$

- etc.

3. Composition des limites

a) Cas fonctions – fonctions

Théorème 19

Soient I et J des intervalles et soient $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$.

Soit $a \in \bar{I}$, soit $b \in \bar{J}$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

Alors, on a

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b \\ g(X) \xrightarrow{X \rightarrow b} \ell \end{array} \right\} \Rightarrow g \circ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell.$$

Démonstration. — Cf. cours. ■

Exemples

- On a $\sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. En effet, on a

$$\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad \sin(X) \xrightarrow{X \rightarrow 0} 0.$$

- On a $\ln\left(\frac{\ln(x)}{\ln(x)+1}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

En effet,

▷ on a

$$\frac{\ln(x)}{\ln(x)+1} = \frac{\ln(x)}{\ln(x)\left(1 + \frac{1}{\ln(x)}\right)} = \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{1}{\ln(x)}}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1;$$

▷ et $\ln(X) \xrightarrow{X \rightarrow 1} 0$.

b) Application : calcul d'une limite en un point fini en se ramenant à 0 !!

On veut calculer $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$:

- On pose $x = a + h$.
- On pose $g(h) = f(a + h)$.
- On calcule $\lim_{h \rightarrow 0} g(h)$.
- Par composition des limites, le résultat trouvé vaut $\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h)$.

Exemple

- Calculons $\lim_{x \xrightarrow{<} \pi} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\pi - x}}$.

Cf. cours.

c) Cas suites – fonctions

Le résultat précédent se transpose au cas où l'on compose une suite par une fonction. En effet, si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on peut considérer la « suite composée $f \circ (u_n)_n$ », qui n'est autre que $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$.

Théorème 20

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $(u_n)_n \in I^{\mathbb{N}}$.

Soit $a \in \bar{I}$. Soit $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$.

Alors, on a

$$\left. \begin{array}{l} u_n \rightarrow a \\ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \end{array} \right\} \Rightarrow f(u_n) \rightarrow \ell.$$

Exemple

- On a $\arctan(\sqrt{n} + 1) \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

En effet,

▷ on a $\sqrt{n} + 1 \rightarrow +\infty$;

▷ et $\arctan(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$.

Exercice 21

Énoncer le théorème dans le cas « suites – suites ».

d) Application : $\cos(\cdot)$ n'a pas de limite en l'infini

Théorème 22

1) La fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right) \end{cases}$ n'admet pas de limite en 0.

2) La fonction $\cos(\cdot)$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

Démonstration. — Cf. cours. ■

IV. Limites et inégalités

1. Passage à la limite dans les inégalités larges

Proposition 23

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $a \in \bar{I}$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

Alors, on a

$$\left. \begin{array}{l} f \geq 0 \text{ au } \mathcal{V}(a) \\ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \end{array} \right\} \implies \ell \geq 0.$$

Démonstration. — Cf. cours. ■

Remarques

- On verra plus loin qu'on a une réciproque partielle quand on a des inégalités strictes. C'est le rétro-passage à la limite dans les inégalités strictes.
- Attention, évidemment, on ne peut pas passer à la limite dans les inégalités strictes.

Exercice 24

Trouver un contre-exemple à l'implication fautive

$$\left. \begin{array}{l} f > 0 \text{ au } \mathcal{V}(a) \\ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \end{array} \right\} \implies \ell > 0.$$

Corollaire 25

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $a \in \bar{I}$. Soient $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$. Soit $M \in \mathbb{R}$.

On suppose que $f \xrightarrow{a} \ell_1$ et $g \xrightarrow{a} \ell_2$.

Alors, on a

- 1) $f \leq g$ au $\mathcal{V}(a) \implies \ell_1 \leq \ell_2$
- 2) $f \leq M$ au $\mathcal{V}(a) \implies \ell_1 \leq M$
- 3) $f \geq M$ au $\mathcal{V}(a) \implies \ell_1 \geq M$

2. Rétro-passage à la limite dans les inégalités strictes

Proposition 26

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $a \in \bar{I}$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \xrightarrow{a} \ell$.

Alors, on a

$$\ell > 0 \implies \exists \varepsilon_0 > 0 : (f \geq \varepsilon_0 \text{ au } \mathcal{V}(a)).$$

Démonstration. — Elle est laissée au lecteur à titre d'exercice. ■

3. Théorèmes d'encadrement

a) Données

Dans ce paragraphe, on considère :

- $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions ;
- $a \in \bar{I}$ un élément de I ou l'une des ses bornes ;
- $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

b) Théorème des gendarmes

Théorème 27 (Théorème des gendarmes)

$$\left. \begin{array}{l} f \leq g \leq h \text{ au } \mathcal{V}(a) \\ f \xrightarrow{a} \ell \\ h \xrightarrow{a} \ell \end{array} \right\} \implies g \xrightarrow{a} \ell.$$

Démonstration. — Laissée en exercice. ■

c) Réflexe : calcul d'une limite nulle par contrôle de la valeur absolue

Corollaire 1

$$\left. \begin{array}{l} |f| \leq g \text{ au } \mathcal{V}(a) \\ g \xrightarrow{a} 0 \end{array} \right\} \implies f \xrightarrow{a} 0$$

Corollaire 2

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ bornée au } \mathcal{V}(a) \\ g \xrightarrow{a} 0 \end{array} \right\} \implies fg \xrightarrow{a} 0$$

d) Étude d'un exemple

Exemple

- Déterminons $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Cf. cours.

e) Divergence par minoration

Proposition 28

On suppose que $f \leq g$ au $\mathcal{V}(a)$. Alors, on a

- $f \xrightarrow{a} +\infty \implies g \xrightarrow{a} +\infty$
- $g \xrightarrow{a} -\infty \implies f \xrightarrow{a} -\infty$

4. Théorèmes de la limite monotone

Théorème 29

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante.

1) Soit $a \in \overset{\circ}{I}$ (donc, $a \in I$ et donc $a \in \mathbb{R}$).

Alors, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existent et sont finies et on a

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x).$$

2) Si b est la borne supérieure de I (on a $b \in \overline{\mathbb{R}}$).

Alors, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ et on a :

a) si f est bornée au $\mathcal{V}(b)$, alors $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \in \mathbb{R}$;

b) sinon, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$

3) Si b est la borne inférieure de I (on a $b \in \overline{\mathbb{R}}$).

Alors, $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ et on a :

a) si f est bornée au $\mathcal{V}(b)$, alors $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) \in \mathbb{R}$;

b) sinon, $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = -\infty$

Remarque

- On a évidemment un énoncé analogue quand f est décroissante et on laisse au lecteur le soin de l'énoncer.

Exemple

- On considère la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x < 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases} \end{cases}$. Alors, f est croissante.

Démonstration. — Cf. cours. ■

V. Relations de comparaison

Dans cette partie, on fixe $a \in \bar{I}$ et on considère f et g deux fonctions définies sur I ou sur $I \setminus \{a\}$.

1. Définitions

a) Négligeabilité

Définition 30

On dit que f est négligeable devant g au $\mathcal{V}(a)$ et on note

$$\begin{aligned} f = o_a(g) \quad \text{ou} \quad f(x) = o_a(g(x)) \\ \text{ou} \quad f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x)) \quad \text{ou} \quad f(x) = o(g(x)) \text{ quand } x \rightarrow a \end{aligned}$$

$$\overset{\Delta}{\text{ssi}} \exists \varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R} \quad : \quad \begin{cases} f = \varepsilon g \text{ au } \mathcal{V}(a) \\ \varepsilon \xrightarrow{a} 0 \end{cases}.$$

b) Équivalence

Définition 31

On dit que f est équivalente à g au $\mathcal{V}(a)$ et on note

$$\begin{aligned} f \sim_a g \quad \text{ou} \quad f(x) \sim_a g(x) \\ \text{ou} \quad f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x) \quad \text{ou} \quad f(x) \sim g(x) \text{ quand } x \rightarrow a \end{aligned}$$

$$\overset{\Delta}{\text{ssi}} \exists \theta : I \longrightarrow \mathbb{R} \quad : \quad \begin{cases} f = \theta g \text{ au } \mathcal{V}(a) \\ \theta \xrightarrow{a} 1 \end{cases}.$$

c) Domination

Définition 32

On dit que f est dominée par g au $\mathcal{V}(a)$ et on note

$$\begin{aligned} f = O_a(g) \quad \text{ou} \quad f(x) = O_a(g(x)) \\ \text{ou} \quad f(x) = O_{x \rightarrow a}(g(x)) \quad \text{ou} \quad f(x) = O(g(x)) \text{ quand } x \rightarrow a \end{aligned}$$

$$\overset{\Delta}{\text{ssi}} \exists M \in \mathbb{R} : |f| \leq M|g| \text{ au } \mathcal{V}(a).$$

2. En pratique !!

En pratique, comme pour les équivalents de suites, on compare f à g en étudiant le quotient $\frac{f}{g}$.
Si g ne s'annule pas au $\mathcal{V}(a)$ sauf éventuellement en a , on a

En pratique

- $f = o_a(g) \iff \frac{f}{g} \xrightarrow{a} 0$
- $f \sim_a g \iff \frac{f}{g} \xrightarrow{a} 1$
- $f = O_a(g) \iff \frac{f}{g}$ est bornée au $\mathcal{V}(a)$

3. Cas particuliers très importants !!!

Dans des cas simples mais importants, le langage des équivalents, petits « o » et grands « O » permet de reformuler des propriétés remarquables des fonctions.
À retenir !

Trois réflexes

- Soit $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\ell \neq 0$.
Alors,

$$f \sim_a \ell \iff f(x) \xrightarrow{a} \ell.$$

-

$$f = o_a(1) \iff f(x) \xrightarrow{a} 0$$

-

$$f = O_a(1) \iff f \text{ est bornée au } \mathcal{V}(a)$$

4. Inversion des ordres de comparaison !!

Proposition 33

Quand on inverse des fonctions, on inverse leur ordre de comparaison :

$$f = o_a(g) \implies \frac{1}{g} = o_a\left(\frac{1}{f}\right).$$

5. Exemples !!!

a) Exemples quand $x \rightarrow +\infty$

- $\ln(x) = o(x)$
- $x = o(x^3)$
- $\frac{1}{x} = o(1)$
- $\frac{x^2}{5} - 2x + \frac{1}{x} \sim \frac{x^2}{5}$
- $4x\sqrt{x} + \ln(x) \sim 4x\sqrt{x}$
- $\boxed{\frac{1}{x} + \frac{8}{x^2} \sim \frac{1}{x}}$

L'idée de ce dernier équivalent est que

- ▷ $\frac{8}{x^2}$ tend vite vers 0 ;
- ▷ $\frac{1}{x}$ tend moins vite vers 0 ;
- ▷ donc, $\frac{8}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right)$.

b) Exemples quand $x \rightarrow 0$

- $\boxed{5x^2 + \sqrt{x} - 6x - x^3 \sim \sqrt{x}}$

Ici, il faut comprendre que pour les puissance de x , les ordres de comparaison quand $x \rightarrow 0$ sont inverses de ceux, usuels, quand $x \rightarrow +\infty$.

Ainsi, on a

$$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a > b \implies x^a = o_{x \rightarrow 0}(x^b)}.$$

Ici, on a donc

- ▷ $x^2 = o(\sqrt{x})$ donc $5x^2 = o(\sqrt{x})$
- ▷ $x = o(\sqrt{x})$ donc $-6x = o(\sqrt{x})$
- ▷ $x^3 = o(\sqrt{x})$ donc $-x^3 = o(\sqrt{x})$

et donc

- ▷ $5x^2 = o(\sqrt{x})$
- ▷ $-6x = o(\sqrt{x})$
- ▷ $-x^3 = o(\sqrt{x})$

et donc

$$5x^2 + \sqrt{x} - 6x - x^3 \sim \sqrt{x}.$$

- Qui est le plus petit entre $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x^2}$ au $\mathcal{V}(0)$?
Cf. cours

c) Exemples quand $x \rightarrow 1$

On s'intéresse aux fonctions définies au voisinage de 1 telles que $f(1) = 0$ ou $f(x) \xrightarrow{1} \pm\infty$. On veut connaître la vitesse à laquelle elle tendent vers 0 ou, au contraire, la vitesse à laquelle elles « explosent ».

- $\frac{1}{x-1} + 3\ln(x) \underset{1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$
- $(x-1)^2 = o_1(x-1)$
- $6(x-1) + 3(x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1)^3 \underset{x \rightarrow 1}{\sim} 6(x-1)$

6. Équivalents remarquables

Proposition 34

On a

- $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$
- $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$
- $\exp(x) - 1 \underset{0}{\sim} x$
- $\sqrt{1+x} - 1 \underset{0}{\sim} \frac{x}{2}$
- Plus généralement, si $\alpha \in \mathbb{R}^*$, on a $\boxed{(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x.}$
- En particulier (pour $\alpha = -1$), on a $\frac{1}{1+x} - 1 \underset{0}{\sim} -x.$

Démonstration. — Il s'agit de faire apparaître des taux d'accroissement. On laisse au lecteur le soin de le mettre en œuvre. ■

7. Développements asymptotiques

a) Notation

Notation 35

Soit $a \in \bar{I}$.

Soient $f, g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$.

On note

$$\begin{aligned} f = g + o_a(h) \quad \text{ou} \quad f(x) = g(x) + o_a(h(x)) \\ \text{ou} \quad f(x) = g(x) + o_{x \rightarrow a}(h(x)) \quad \text{ou} \quad f(x) = g(x) + o(h(x)) \text{ quand } x \rightarrow a \\ \Delta_{\text{ssi}} \quad f - g = o_a(h). \end{aligned}$$

Remarques

- On a alors $f = g + \varphi$, où φ est une fonction vérifiant $\varphi = o_a(h)$.
- Si besoin est, on pourra aussi écrire

$$f = g + \varepsilon h$$

où $\varepsilon(\cdot)$ est une fonction qui tend vers 0 en a .

b) Dictionnaire Petits « o » \longleftrightarrow Équivalents !!!

Proposition 36

$$\begin{aligned} f \underset{a}{\sim} g &\iff f = g + \underset{a}{o}(f) \\ &\iff f = g + \underset{a}{o}(g). \end{aligned}$$

Démonstration. — On a les équivalences successives :

$$\begin{aligned} f \underset{a}{\sim} g &\iff \frac{f}{g} \underset{a}{\rightarrow} 1 \\ &\iff \frac{f}{g} - 1 \underset{a}{\rightarrow} 0 \\ &\iff \frac{f - g}{g} \underset{a}{\rightarrow} 0 \\ &\iff f - g = \underset{a}{o}(g) \\ &\iff f = g + \underset{a}{o}(g). \end{aligned}$$

8. Développements asymptotiques remarquables !!!

a) Le résultat

Proposition 37

On a, quand $x \rightarrow 0$,

- $\exp(x) = 1 + x + o(x)$
- $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$
- $\forall \alpha \neq 0, (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$
- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$

Démonstration. — Il s'agit de la traduction dans le langage des développements asymptotiques des équivalents remarquables donnés plus haut qui, rappelons-le, sont des traductions dans le langage des équivalents de limites de taux d'accroissement et donc d'existences de nombres dérivés. ■

Remarques

Plus généralement :

- si f est dérivable en 0 et si $f'(0) \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &\underset{0}{\sim} f'(0)x \\ \text{ie } f(x) &= f(0) + f'(0)x + \underset{0}{o}(x). \end{aligned}$$

- si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$, on a

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \underset{0}{o}(h)$$

ce qui s'écrit aussi $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underset{a}{o}(x-a)$.

b) Application

Calculons $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \exp(x) - \sqrt{1+x} - \frac{1}{1+x}}{x}$.
Cf. cours.

9. Croissance comparées

Proposition 38

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et soient $a, b > 0$. On a

- $\alpha < \beta \implies x^\alpha = o_{+\infty}(x^\beta)$
- $\alpha > 0 \implies \ln(x)^\beta = o_{+\infty}(x^\alpha)$
- $a > 1 \implies x^\alpha = o_{+\infty}(a^x)$
- $a < b \implies a^x = o_{+\infty}(b^x)$

Exemple

- On a $\ln(x)^{50} = o_{+\infty}(\sqrt{x})$.

10. Propriétés

Les relations \sim_a , o_a et O_a vérifient exactement les mêmes propriétés que leurs analogues séquentiels.

Exemples

- $\left. \begin{array}{l} f \sim_a g \\ g \neq 0 \text{ au } \mathcal{V}(a) \end{array} \right\} \implies \frac{1}{f} \sim_a \frac{1}{g}$
- $\left. \begin{array}{l} f = o_a(g) \\ \lambda \in \mathbb{R}^* \end{array} \right\} \implies f = o_a(\lambda g)$
- $\left. \begin{array}{l} f_1 = o_a(g) \\ f_2 = o_a(g) \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \implies f_1 + \lambda f_2 = o_a(g)$

Autrement dit, l'ensemble des fonctions $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f = o_a(g)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

11. L'équivalence conserve localement le signe !!!

Proposition 39

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $a \in \bar{I}$.

- $\begin{cases} f \sim_a g \\ f > 0 \text{ au } \mathcal{V}(a) \end{cases} \implies g > 0 \text{ au } \mathcal{V}(a)$
- Plus généralement, $f \sim_a g \implies f$ et g ont même signe au $\mathcal{V}(a)$.