Formes exponentielles

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 1.1 — Fractions : additions et soustractions.

Effectuer les calculs suivants.

a) $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}$ ....

b) $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}$ ....

c) $\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}$ ......

d) $\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}$ ...

e) $-\dfrac{2\pi}{5}+\dfrac{3\pi}{4}$ ...

f) $-\dfrac{7\pi}{12}+\dfrac{5\pi}{3}$ ...

Calcul 1.2 — Des calculs de modules.

Calculer le module de chacun des nombres complexes suivants.

a) $1+\mathrm{i}$ ....

b) $1-\mathrm{i}$ ....

c) $2-\mathrm{i}\sqrt{3}$ ......

d) $-\sqrt{2}+\mathrm{i}$ ......

e) $3-4\mathrm{i}$ ....

f) $-2\sqrt{3}+4\mathrm{i}$ ...

Premiers calculs

Calcul 1.3 — Mise sous forme exponentielle de formes algébriques.

Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivants.

a) i ....

b) $-\mathrm{i}$ ....

c) $1+\mathrm{i}$ ....

d) $1-\mathrm{i}$ ....

e) $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ ......

f) $-2\sqrt{3}-2\mathrm{i}$ ...

Calcul 1.4 — Mise sous forme exponentielle de produits.

Déterminer la forme exponentielle de $z_1 \times z_2$ dans chacun des cas suivants.

a) $z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}$ et $z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$ ....

b) $z_1 = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ et $z_2 = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}$ ....

c) $z_1 = \sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}$ et $z_2 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}$ ....

d) $z_1 = \sqrt{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$ et $z_2 = \sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ ....

Calcul 1.5 — Mise sous forme exponentielle de quotients.

Déterminer la forme exponentielle de $\dfrac{z_1}{z_2}$ dans chacun des cas suivants.

a) $z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}$ et $z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$ ....

b) $z_1 = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ et $z_2 = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}$ ....

c) $z_1 = \sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}$ et $z_2 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}$ .....

d) $z_1 = \sqrt{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$ et $z_2 = \sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ ....

Calcul 1.6 — Mise sous forme exponentielle de puissances.

Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes :

a) $z = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}\right)^4$ ....

b) $z = \left(2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\right)^5$ ....

c) $z = \left(3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}\right)^6$ ....

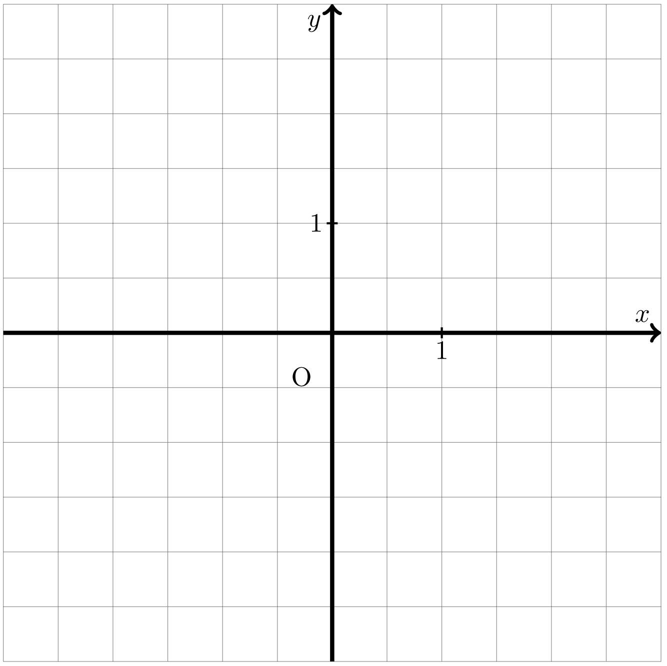
d) $z = \left(\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}\right)^4$ ....

e) $z = \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}} \times \sqrt{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\right)^3$ ....

f) $z = \left(\dfrac{\sqrt{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}\right)^4$ ....

Calcul 1.7 — Affixes.

Placer les points dans le repère orthonormé direct ci-dessous :



a) Le point M d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ ....

b) Le point N d'affixe $-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$ ....

c) Le point P d'affixe $\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$ ....

d) Le point Q d'affixe $-(1+\mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$ ....

Calcul 1.8 — Mise sous forme exponentielle.

Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes :

a) $-e^{i\frac{\pi}{3}}$ ....

b) $ie^{-i\frac{\pi}{4}}$ ....

c) $\dfrac{e^{-i\frac{\pi}{6}}}{-2i}$ ....

d) $(1+i)e^{i\frac{\pi}{5}}$ ....

e) $4\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)e^{i\frac{\pi}{12}}$ ....

f) $\dfrac{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}$ ....

Calcul 1.9 — Associer forme exponentielle et forme algébrique.

Pour chacun des nombres complexes suivants, donner sa forme exponentielle parmi les propositions (a), (b), (c) ou (d).

(a) $2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ (b) $2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$ (c) $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ (d) $2e^{i\frac{5\pi}{4}}$

a) $1-i$ ....

b) $-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ ....

c) $i\sqrt{6}+\sqrt{2}$ ....

d) $i-\sqrt{3}$ ....

Calcul 1.10 — Des formes algébriques grâce à la forme exponentielle (I).

À l'aide de leur forme exponentielle, déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants.

a) $(1+i)^6$ ....

b) $(1-i)^4$ ....

c) $(\sqrt{3}+i)^5$ ....

d) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2024}$ ....

Calcul 1.11 — Des formes algébriques grâce à la forme exponentielle (II).

À l'aide de leur forme exponentielle, déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants.

a) $\dfrac{i^5}{(1-i)^6}$ ....

b) $\dfrac{(1+i)^3}{\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)^4}$ ....

c) $\left(\dfrac{2-2i\sqrt{3}}{1-i}\right)^5$ ....

d) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{(1+i)^2}\right)^{10}$ ....

Calculs plus avancés

Calcul 1.12 — Une forme exponentielle.

Déterminer la forme exponentielle de $\left((1+\mathrm{i}\sqrt{3})(1-\mathrm{i})\right)^{20}$ ....

Calcul 1.13

Donner la forme algébrique de $\dfrac{(1+\mathrm{i})^4}{(1-\mathrm{i})^3}+\dfrac{(1-\mathrm{i})^4}{(1+\mathrm{i})^3}$ ....

Calcul 1.14 — Une valeur remarquable de sinus et cosinus.

Soit $z=\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1+\mathrm{i}}$.

a) Déterminer la forme exponentielle du nombre complexe z ....

b) Déterminer la forme algébrique du nombre complexe z ....

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ ....

Réponses mélangées

$\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2}$	$-8\mathrm{i}$	$\frac{7\pi}{20}$	$\frac{7\pi}{12}$	voir corrigé	voir corrigé	$2\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}$			
2	$\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{11\pi}{6}}$	$\sqrt{7}$	$9\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{5}}$	$\frac{7\pi}{12}$	$4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$	$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	-4		
$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$	$2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$	$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{23\pi}{30}}$	$2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{30}}$	$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$	$-16\sqrt{3}+16\mathrm{i}$	$-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$		
a	$\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$	$\sqrt{2}$	$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$	c	$\frac{\pi}{12}$	$3^6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$	$2^6(\sqrt{3}-1)-\mathrm{i}2^6(\sqrt{3}+1)$	b	
voir corrigé	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}}$	$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{20\pi}{3}}$	$\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$	voir corrigé	$\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{9\pi}{20}}$		
d	$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$	$\sqrt{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{47\pi}{30}}$	$2^5\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{10\pi}{3}}$	$3\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}$	$\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$	$4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$	$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$	$\frac{13\pi}{12}$	
$\sqrt{2}$	$6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$	$2\sqrt{7}$	$\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$	$2^{30}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}$	5	1	$24\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{8}-\mathrm{i}\frac{1}{8}$

▶ Réponses et corrigés page 5

Fiche n° 1. Formes exponentielles

Réponses

1.1 a) $\boxed{\dfrac{7\pi}{12}}$

1.1 b) $\boxed{\dfrac{\pi}{12}}$

1.1 c) $\boxed{\dfrac{5\pi}{6}}$

1.1 d) $\boxed{\dfrac{7\pi}{12}}$

1.1 e) $\boxed{\dfrac{7\pi}{20}}$

1.1 f) $\boxed{\dfrac{13\pi}{12}}$

1.2 a) $\boxed{\sqrt{2}}$

1.2 b) $\boxed{\sqrt{2}}$

1.2 c) $\boxed{\sqrt{7}}$

1.2 d) $\boxed{\sqrt{3}}$

1.2 e) $\boxed{5}$

1.2 f) $\boxed{2\sqrt{7}}$

1.3 a) $\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}$

1.3 b) $\boxed{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}$

1.3 c) $\boxed{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$

1.3 d) $\boxed{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$

1.3 e) $\boxed{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}$

1.3 f) $\boxed{4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}}$

1.4 a) $\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}$

1.4 b) $\boxed{6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}$

1.4 c) $\boxed{\sqrt{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{47\pi}{30}}}$

1.4 d) $\boxed{3\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}}$

1.5 a) $\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}}$

1.5 b) $\boxed{\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{11\pi}{6}}}$

1.5 c) $\boxed{\sqrt{\dfrac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{23\pi}{30}}}$

1.5 d) $\boxed{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}}}$

1.6 a) $\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{20\pi}{3}}}$

1.6 b) $\boxed{2^5\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{10\pi}{3}}}$

1.6 c) $\boxed{3^6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}$

1.6 d) $\boxed{9\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{5}}}$

1.6 e) $\boxed{24\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$

1.6 f) $\boxed{4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}$

1.7 a) voir corrigé

1.7 b) voir corrigé

1.7 c) voir corrigé

1.7 d) voir corrigé

1.8 a) $\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}}$

1.8 b) $\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$

1.8 c) $\boxed{\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}$

1.8 d) $\boxed{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{9\pi}{20}}}$

1.8 e) $\boxed{2\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}}$

1.8 f) $\boxed{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{30}}}$

1.9 a) c

1.9 b) d

1.9 c) b

1.9 d) a

1.10 a) $\boxed{-8\mathrm{i}}$

1.10 b) .... $\boxed{-4}$

1.10 c) .... $\boxed{-16\sqrt{3}+16\text{i}}$

1.10 d) .... $\boxed{1}$

1.11 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{8}}$

1.11 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{8}-\text{i}\dfrac{1}{8}}$

1.11 c) .... $\boxed{2^6(\sqrt{3}-1)-\text{i}2^6(\sqrt{3}+1)}$

1.11 d) .... $\boxed{-\dfrac{1}{2}+\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

1.12 .... $\boxed{2^{30}\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{3}}}$

1.13 .... $\boxed{2}$

1.14 a) .... $\boxed{\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{12}}}$

1.14 b) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}+\text{i}\dfrac{\sqrt{3}-\text{i}}{2}}$

1.14 c) .... $\boxed{\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}}$

Corrigés

1.1 a) On a $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3\pi}{12}+\dfrac{4\pi}{12}=\dfrac{7\pi}{12}$.

1.1 b) On a $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3\pi}{12}-\dfrac{2\pi}{12}=\dfrac{\pi}{12}$.

1.1 c) On a $\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{4\pi}{6}+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{6}$.

1.1 d) On a $\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{6\pi}{12}+\dfrac{4\pi}{12}-\dfrac{3\pi}{12}=\dfrac{7\pi}{12}$.

1.1 e) On a $-\dfrac{2\pi}{5}+\dfrac{3\pi}{4}=-\dfrac{8\pi}{20}+\dfrac{15\pi}{20}=\dfrac{7\pi}{20}$.

1.1 f) On a $-\dfrac{7\pi}{12}+\dfrac{5\pi}{3}=-\dfrac{7\pi}{12}+\dfrac{20\pi}{12}=\dfrac{13\pi}{12}$.

1.2 a) On a $|1+\text{i}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

1.2 b) On a $|1+\text{i}|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$.

1.2 c) On a $|2-\text{i}\sqrt{3}|=\sqrt{2^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$.

1.2 d) On a $|-\sqrt{2}+\text{i}|=\sqrt{(-\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{3}$.

1.2 e) On a $|3-4\text{i}|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{25}=5$.

1.2 f) On a $|-2\sqrt{3}+4\text{i}|=\sqrt{(-2\sqrt{3})^2+4^2}=\sqrt{12+16}=2\sqrt{7}$.

1.3 c) On a $|1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}$. Notons θ un argument de $1+\mathrm{i}$. On a $\cos(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. La valeur $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ convient et on a ainsi $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

....

1.3 d) On a $|1-\mathrm{i}| = \sqrt{2}$. Notons θ un argument de $1-\mathrm{i}$. On a $\cos(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin(\theta) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. La valeur $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$ convient et on a ainsi $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

....

1.3 e) On a $\left|1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right| = 2$. Notons θ un argument de $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$. On a $\cos(\theta) = \dfrac{1}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. La valeur $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ convient et on a ainsi $1+\mathrm{i}\sqrt{3} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

....

1.3 f) On a $\left|-2\sqrt{3}-2\mathrm{i}\right| = 4$. Notons θ un argument de $-2\sqrt{3}-2\mathrm{i}$. On a $\cos(\theta) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{1}{2}$. La valeur $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$ convient et on a ainsi $-2\sqrt{3}-2\mathrm{i} = 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$.

....

1.4 a) On a $z_1 \times z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{15\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.

....

1.4 b) On a $z_1 \times z_2 = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \times 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}} = 6\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}} = 6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{6}} = 6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.

....

1.4 c) On a $z_1 \times z_2 = \sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}} \times \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}} = \sqrt{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}+\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}} = \sqrt{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{47\pi}{30}}$.

....

1.4 d) On a $z_1 \times z_2 = \sqrt{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} \times \sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = 3\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = 3\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}$.

....

1.5 a) On a $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$.

....

1.5 b) On a $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}}{3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}} = \dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}-\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}} = \dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-4\pi-7\pi}{6}} = \dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{11\pi}{6}}$.

....

1.5 c) On a $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}-\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{12\pi-35\pi}{30}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-23\pi}{30}}$.

....

1.5 d) On a $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{9\pi+2\pi}{12}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}}$.

....

1.6 a) On a $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}\right)^4 = \mathrm{e}^{4\times\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{20\pi}{3}}$ ou $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

....

1.6 b) On a $\left(2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\right)^5 = 2^5\mathrm{e}^{-5\times\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = 2^5\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{10\pi}{3}}$ ou $2^5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

....

1.6 c) $\left(3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}\right)^6 = 3^6\mathrm{e}^{6\times\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}} = 3^6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\times7\pi} = 3^6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$.

....

1.6 d) On a $\left(\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}\right)^4 = \left(\sqrt{3}\right)^4\mathrm{e}^{4\times\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}} = 9\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{5}}$.

....

1.6 e) On a

$$\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}} \times \sqrt{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\right)^3 = \left(\sqrt{12}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}+\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\right)^3 = \left(2\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{14\pi}{12}+\mathrm{i}\frac{9\pi}{12}}\right)^3$$
$$= \left(2\sqrt{3}\right)^3\mathrm{e}^{3\times\mathrm{i}\frac{23\pi}{12}} = 24\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{23}{4}\pi} = 24\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}.$$

....

1.6 f) On a $\left(\dfrac{\sqrt{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}\right)^4 = \left(\sqrt{\dfrac{6}{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^4 = \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{9\pi+2\pi}{12}}\right)^4 = \sqrt{2}^4\mathrm{e}^{4\times\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}} = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{3}} = 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

....

1.7 a) On a $|z_{\mathrm{M}}| = 1$ donc M est sur le cercle de centre O et de rayon 1. De plus, un argument de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ est $\dfrac{\pi}{4}$, donc le point M est sur la demi-droite bissectrice de l'angle $\widehat{x\mathrm{O}y}$ du repère.

Le point M se trouve donc à l'intersection du cercle et de cette demi-droite, comme représenté ci-dessous.

....

1.7 b) On a $|z_{\mathrm{N}}| = 2$ donc N est sur le cercle de centre O et de rayon 2. De plus, comme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$, on a $-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\pi} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{3}}$, donc $\mathsf{Re}(z_{\mathrm{N}}) = 1$ et donc N est sur la demi-droite d'équation $x = 1$ et $y > 0$.

Le point N se trouve donc à l'intersection du cercle et de cette demi-droite, comme représenté ci-dessous.

....

1.7 c) On a $\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$. De plus, on a $|z_{\mathrm{P}}| = 1$ donc P est sur le cercle de centre O et de rayon 1. Enfin, $\mathsf{Re}(z_{\mathrm{P}}) = -\dfrac{1}{2}$, donc le point P est sur la demi-droite d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$ et $y < 0$ car $\mathsf{Im}(z_{\mathrm{P}}) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Le point P se trouve donc à l'intersection de ce cercle et de cette demi-droite, comme représenté ci-dessous.

....

1.7 d)

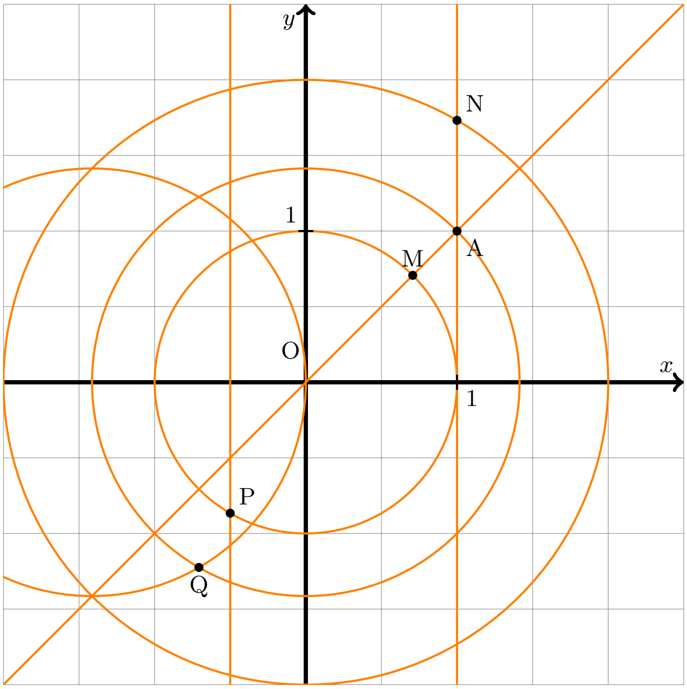
On a

$$-(1+\mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \times \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$$
$$= \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi+\mathrm{i}\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$$
$$= \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{16\pi}{12}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}.$$

On a $|z_{\mathrm{Q}}| = \sqrt{2}$. On en déduit que le point Q est sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre O passant par le point d'affixe $1+\mathrm{i}$, simple à placer.

Puisque qu'un argument de z_{Q} est $\dfrac{4\pi}{3}$, le point Q se trouve dans le troisième quadrant, $x < 0$ et $y < 0$, sommet d'un triangle équilatéral direct OAQ où A est le point d'intersection du cercle $\mathcal{C}$ et de la demi-droite d'équation $y = 0, x < 0$.

Le point Q se trouve donc à l'intersection du cercle $\mathcal{C}$ et du cercle de centre A et de rayon AO.



....

1.8 a) On a $-e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\pi+i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

1.8 b) On a $ie^{-i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{-i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}-i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

1.8 c) On a $\dfrac{e^{-i\frac{\pi}{6}}}{-2i} = \dfrac{1}{2}ie^{-i\frac{\pi}{6}} = \dfrac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{-i\frac{\pi}{6}} = \dfrac{1}{2}e^{i\frac{3\pi}{6}-i\frac{\pi}{6}} = \dfrac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$.

1.8 d) On sait que $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. On a donc $(1+i)e^{i\frac{\pi}{5}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{\pi}{5}} = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{20}+i\frac{4\pi}{20}} = \sqrt{2}e^{i\frac{9\pi}{20}}$.

1.8 e) Comme $\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) < 0$, on a $\left|4\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)e^{i\frac{\pi}{12}}\right| = -4\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

On a donc $4\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)e^{i\frac{\pi}{12}} = -4e^{i\pi}\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)e^{i\frac{\pi}{12}} = -4\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)e^{i\frac{\pi}{12}+i\pi} = -4\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)e^{i\frac{13\pi}{12}} = 2\sqrt{3}e^{i\frac{13\pi}{12}}$.

1.8 f) On a $\dfrac{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \dfrac{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)} = 2\dfrac{e^{-i\frac{\pi}{6}}}{e^{-i\frac{\pi}{5}}} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}+i\frac{\pi}{5}} = 2e^{i\left(-\frac{5\pi}{30}+\frac{6\pi}{30}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{30}}$.

1.9 a) On a $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$; donc $1-i$ est associé à c.

1.9 b) On a $-\sqrt{2}-i\sqrt{2} = -\sqrt{2}(1+i) = -\sqrt{2} \times \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 2e^{i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{4}} = 2e^{i\frac{5\pi}{4}}$ ce qui correspond à d.

1.9 c) On a $i\sqrt{6}+\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$ ce qui correspond à b.

1.9 d) On a $i-\sqrt{3} = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right) = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ce qui correspond à a.

1.10 a) On a $(1+i)^6 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^6 = \sqrt{2}^6 \times e^{6\times i\frac{\pi}{4}} = 8e^{i\frac{3\pi}{2}} = 8\left(\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)\right) = 8(0-i) = -8i$.

1.10 b) On a $(1-i)^4 = \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^4 = \sqrt{2}^4 \times e^{-4\times i\frac{\pi}{4}} = 4e^{-i\pi} = -4$.

1.10 c) On a $(\sqrt{3}+i)^5 = \left(2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1}{2}\right)\right)^5 = \left(2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)\right)^5 = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^5 = 2^5e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2^5\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1}{2}\right)$,
ce qui donne $-16\sqrt{3}+16i$.

1.10 d) On a $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2024} = \left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{2024} = e^{-i\frac{2\,024\pi}{4}} = e^{-i506\pi} = \left(e^{-i\pi}\right)^{506} = 1$.

1.11 a) On a $\dfrac{i^5}{(1-i)^6} = \dfrac{i^4 \times i}{\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^6} = \dfrac{1 \times e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}^6e^{-i\frac{6\pi}{4}}} = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\frac{3\pi}{2}}}{8} = \dfrac{1}{8}e^{i2\pi} = \dfrac{1}{8}$.

1.11 b) On a

$$\begin{aligned}\frac{(1+i)^3}{\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)^4} &= \frac{\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3}{\left(\sqrt{2}(1-i)\right)^4} = \frac{\sqrt{2}^3e^{i\frac{3\pi}{4}}}{\left(\sqrt{2}\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\right)^4} = \frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}{2^4e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \frac{\sqrt{2}}{2^3}e^{i\frac{3\pi}{4}+i\frac{4\pi}{4}}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{8}e^{i\frac{7\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{8}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{8}-i\frac{1}{8}.\end{aligned}$$

1.11 c) On a

$$\left(\frac{2-2\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}}\right)^5 = \frac{\left(4\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^5}{\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^5} = \frac{4^5\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}}{\sqrt{2}^5\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}} = \frac{2^{10}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}}{2^2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}} = \frac{2^8}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}$$
$$= 2^7\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right) = 2^7\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-1-\mathrm{i})$$
$$= 2^7\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^6\left(\sqrt{3}-1-\mathrm{i}(1+\sqrt{3})\right) = 2^6(\sqrt{3}-1)-\mathrm{i}2^6(\sqrt{3}+1).$$

1.11 d) On a

$$\left(\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})^2}\right)^{10} = \frac{\left(2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\right)^{10}}{\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^{20}} = \frac{2^{10}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^{10}}{\sqrt{2}^{20}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{20\pi}{4}}} = \frac{2^{10}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{10\pi}{6}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}5\pi}}{2^{10}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}$$
$$= \left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)\times(-1) = -\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

1.12 On a

$$\left((1+\mathrm{i}\sqrt{3})(1-\mathrm{i})\right)^{20} = \left(2\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right)\right)^{20}$$
$$= \left(2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^{20}$$
$$= \left(2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^{20} = (2\sqrt{2})^{20}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^{20} = 2^{30}\mathrm{e}^{20\times\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} = 2^{30}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}.$$

1.13 On a

$$\frac{(1+\mathrm{i})^4}{(1-\mathrm{i})^3}+\frac{(1-\mathrm{i})^4}{(1+\mathrm{i})^3} = \frac{(1+\mathrm{i})^4(1+\mathrm{i})^3}{(1-\mathrm{i})^3(1+\mathrm{i})^3}+\frac{(1-\mathrm{i})^4(1-\mathrm{i})^3}{(1+\mathrm{i})^3(1-\mathrm{i})^3} = \frac{(1+\mathrm{i})^7+(1-\mathrm{i})^7}{(1-\mathrm{i}^2)^3}$$
$$= \frac{\left(\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)^7+\left(\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)^7}{2^3}$$
$$= \frac{\sqrt{2}^7}{2^3}\left(\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^7+\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^7\right) = \sqrt{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{4}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{7\pi}{4}}\right) = \sqrt{2}\times 2\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 2.$$

1.14 a) On a $z = \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{2\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \sqrt{2}\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$.

1.14 b) On a $z = \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \dfrac{1-\mathrm{i}+\mathrm{i}\sqrt{3}-\mathrm{i}^2\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}^2} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

1.14 c) On a donc $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right)$. En passant à la partie réelle et à la partie imaginaire, on obtient

$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \quad \text{et} \quad \sqrt{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

donc $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
