DS 4

4 heures

- *Tout résultat ou raisonnement doit être clairement justifié, sauf mention du contraire.*
- *La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.*
- *La présentation de la copie sera prise en compte dans l'évaluation :*
  - ▷ *encadrez les résultats principaux ;*
  - ▷ *soulignez les résultats et arguments intermédiaires importants ;*
  - ▷ *soignez votre écriture ;*
  - ▷ *maintenez une marge dans vos copies, aérez vos copies ;*
  - ▷ *enfin, numérotez vos copies.*
- *Les documents, calculatrices et autres appareils électroniques sont interdits.*
- *Si un élève constate ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Étude d'une suite de racines

Application à l'optimalité d'un contrôle

Notations

- *Si* $P \in \mathbb{C}[X]$*, on désigne par* $\mathsf{Z}_{\mathbb{C}}(P)$ *l'ensemble des racines complexes de* P*.*
- *Si* $\mathscr{P}(n)$ *est un prédicat de* $n \in \mathbb{N}$ *:*
  - ▷ *on notera « $\mathscr{P}(n)$ APCR » l'assertion « $\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N_0,\ \mathscr{P}(n)$ » ;*
  - ▷ *« $\mathscr{P}(n)$ APCR » se lit « $\mathscr{P}(n)$ (est vraie) à partir d'un certain rang ».*
- *Pour* $n \geqslant 2$*, on pose*

$$P_n := X^n - X^{n-1} - X^{n-2} - \cdots - X - 1.$$

Dans ce problème, on s'intéresse aux racines du polynôme P_n*.*

- *Dans ce qui suit, on fixe un entier naturel* n *tel que* $n \geqslant 2$*.*

Les parties I, II, V et VI peuvent être cherchées sans que les autres parties n'aient été traitées.

Le barème est donné à titre indicatif.

Partie I – Un contrôle classique **4 points/70**

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré n qu'on écrit

$$P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$

où $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $a_k \in \mathbb{C}$.
Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de P.
Montrer que

$$\Big(\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ |a_k| \leqslant 1\Big) \implies |\alpha| < 2.$$

On pourra raisonner par l'absurde.

Partie II – Étude d'une fonction auxiliaire **8 points/70**

Notation

Dans la suite, on considère la fonction

$$f_n : \begin{cases} [1,2] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto t^{n+1} - 2t^n + 1. \end{cases}$$

2. (a) Étudier le signe de $f_n'(t)$ pour $t \in [1,2]$.

(b) En déduire la valeur de u_n telle que le tableau de variations de f_n soit

t	1		$2-u_n$		2
f_n		$\searrow$	$f_n(2-u_n)$	$\nearrow$	

On précisera les valeurs en 1 *et* 2 *mais on ne calculera pas* $f_n(2-u_n)$.

(c) En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que f_n s'annule en un unique point sur $]1,2]$.

3. On note

$$m_n := 1 - \left(2 - \frac{2}{n+1}\right)^n \times \frac{2}{n+1}.$$

(a) Sans justification, donner un équivalent simple de m_n quand $n \to \infty$.

(b) En déduire la limite de la suite $(m_n)_n$.

4. Dessiner l'allure de $\mathscr{C}_{f_n}$.
On attend un dessin propre, schématique, sur lequel figurent quelques valeurs remarquables.

Partie III – Premières propriétés de la suite des racines

6 points/70

5. (a) Soit $t \in]1,2]$. Montrer que

$$P_n(t) = 0 \iff f_n(t) = 0.$$

(b) En déduire que P_n possède une unique racine dans $]1,+\infty[$.

Notation

Dans toute la suite du problème, pour tout $n \geqslant 2$, *on note* x_n *cette unique racine.*

6. Montrer que $2 - \dfrac{2}{n+1} \leqslant x_n < 2$.

7. (a) Calculer x_2.

(b) Montrer que $x_2 > \dfrac{3}{2}$.

8. Montrer que $x_n \longrightarrow 2$.

Partie IV – Optimalité du contrôle classique 5 points/70

Notations et définition

- *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{E}_n$ l'ensemble des polynômes unitaires de degré n à coefficients complexes de module au plus 1.*
- *On pose $\mathscr{E} := \bigcup_{n \geqslant 0} \mathscr{E}_n$.*
- *Soit $M \in \mathbb{R}_+$. On dit que M* contrôle les racines de $\mathscr{E}$ *quand*

$$\forall P \in \mathscr{E},\ \forall \alpha \in \mathsf{Z}_{\mathbb{C}}(P),\ \ |\alpha| \leqslant M.$$

9. Montrer que 2 contrôle les racines de $\mathscr{E}$.

10. Soit $M \in \mathbb{R}_+$. Montrer que

$$M \text{ contrôle les racines de } \mathscr{E} \implies M \geqslant 2.$$

Partie V – Un premier lemme 10 points/70

Notations

- *Dans cette partie, on se donne :*
  - ▷ $(\delta_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *une suite telle que* $\delta_n \longrightarrow 0$;
  - ▷ $(p_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *une suite ;*
  - ▷ $\ell \in \mathbb{R}$.
- *On va montrer le résultat suivant, qui servira dans la suite :*

$$\delta_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \implies (1+\delta_n)^n \longrightarrow 1.$$

11. Montrer que

$$\delta_n \times p_n \longrightarrow \ell \implies (1+\delta_n)^{p_n} \longrightarrow e^{\ell}.$$

12. Applications.

(a) (i) Soit $n \geqslant 2$. Montrer que $n! \geqslant 3^{n-2}$.

(ii) En déduire que

$$\left(1+\frac{1}{n!}\right)^{2^n} \longrightarrow 1.$$

(b) Déterminer la limite de la suite de terme général

$$\left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{(n+1)^n}.$$

13. Le premier lemme.

Montrer que

$$\delta_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \implies (1+\delta_n)^n \longrightarrow 1.$$

Partie VI – Un deuxième lemme

12 points/70

Soit $(\delta_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Dans cette partie, on va montrer le résultat suivant, qui servira dans la suite :

$$\delta_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{2^n}\right) \implies (1+\delta_n)^n - 1 \sim n \times \delta_n$$

ainsi qu'un raffinement.

14. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\delta_n \neq 0$ et que $\delta_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

(a) Montrer que

$$\frac{(1+\delta_n)^n - 1}{n\delta_n} = 1 + \frac{\delta_n}{n} \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \delta_n^{k-2}.$$

(b) Montrer que

$$\left| \frac{\delta_n}{n} \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \delta_n^{k-2} \right| \leqslant \frac{2^n \, |\delta_n|}{n} \quad \text{APCR.}$$

(c) **Le deuxième lemme.**
En déduire que

$$(1+\delta_n)^n - 1 \sim n\delta_n \text{ quand } n \to \infty.$$

15. **Un raffinement.**
Montrer que

$$(1+\delta_n)^n = 1 + n\delta_n + \frac{n^2\delta_n^2}{2} + \mathrm{o}\left(n^2\delta_n^2\right) \text{ quand } n \to \infty.$$

On admettra que ces résultats sont encore vrais sans l'hypothèse de non-nullité de $(\delta_n)_n$.

Partie VII – Étude de la suite des racines

25 points/70

Rappels

On rappelle que la suite $(x_n)_n$ *introduite dans la partie* **III.** *vérifie la relation suivante*

$$\forall n \geqslant 2, \ \ x_n^{n+1} - 2x_n^n + 1 = 0.$$

et qu'on a démontré que $x_n \longrightarrow 2$.

16. (a) Montrer que $f_n(x_{n+1}) > 0$.

(b) En déduire que $(x_n)_n$ est strictement croissante.

17. On considère la suite $(\varepsilon_n)_n$ définie par

$$\forall n \geqslant 2, \ \ x_n = 2 - \varepsilon_n.$$

(a) Montrer que $\varepsilon_n \longrightarrow 0$.

(b) Montrer que

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2^n} \frac{1}{\left(1 - \dfrac{\varepsilon_n}{2}\right)^n}.$$

(c) En déduire que

$$\varepsilon_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n \quad \text{APCR.}$$

(d) En déduire que $\varepsilon_n \sim \dfrac{1}{2^n}$ quand $n \to \infty$.

18. On considère la suite $(\alpha_n)_n$ définie par

$$\forall n \geqslant 2, \ \ x_n = 2 - \frac{1}{2^n} + \alpha_n.$$

(a) (i) Montrer que $2^n \alpha_n = 1 - 2^n \varepsilon_n$.

(ii) En déduire que $\alpha_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$.

(b) Montrer que

$$2^n \alpha_n \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{\alpha_n}{2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{\alpha_n}{2}\right)^n - 1.$$

(c) En déduire que $\alpha_n \sim -\dfrac{n}{2 \times 4^n}$.

On a donc prouvé que

$$x_n = 2 - \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2 \times 4^n} + \mathrm{o}\left(\frac{n}{4^n}\right).$$

19. Donner le terme suivant du développement asymptotique de x_n.
Cette question nécessite de prendre des initiatives.

FIN DU SUJET.