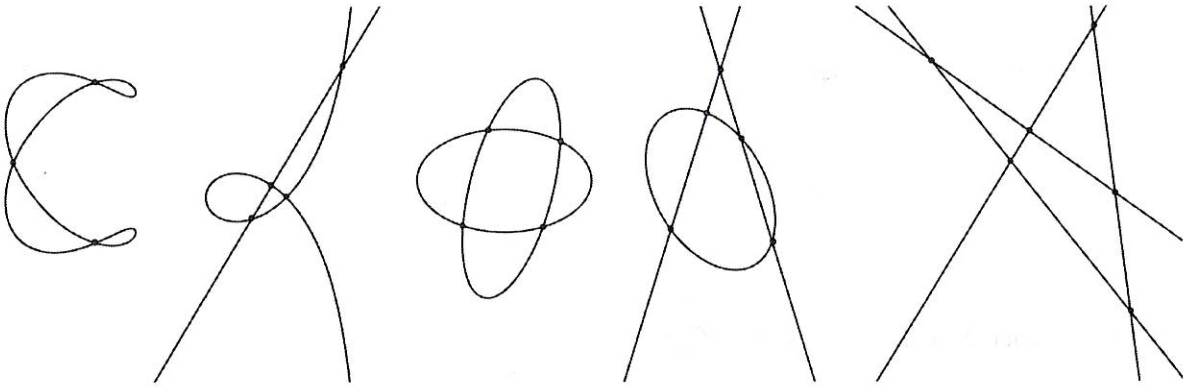
Lycée CHATEAUBRIAND
Colas Bardavid

Chapitre 12

Polynômes I



Exemples de courbes algébriques, définies par des polynômes

Polynômes

Les fonctions polynomiales sont les fonctions les plus simples qu'on puisse imaginer.

Dans l'ordre, on a d'abord les fonctions constantes, puis les fonctions affines, puis les fonctions polynomiales de degré 2 : ils correspondent aux expressions « a », « $aX+b$ » puis « aX^2+bX+c ».
Ensuite, on a les fonctions polynomiales de degré 3, etc.

En général, on va étudier les expressions du type

$$\boxed{a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0.}$$

CHAPITRE 12

Polynômes I.

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
(De façon générale, ce qui suit fonctionne pour un corps K quelconque).

I) Présentation & définition.

1) Exemples.

Sont des polynômes:
- $3X+1$ ⚠ c'est X pas x.
- $9X^2+14X-3$ ⚠ X ne doit pas être défini.
- 2 est un polynôme.
- $\sum_{k=0}^{n} kX^k$ où $n\in\mathbb{N}$
- $5X^3-3X+2$
- 0 est un polynôme
- $iX^3+(3i-2)X^2+(5i-1)X+(8i-3)$ est un polynome à coefficients complexes.
- $\frac{2}{3}X^3-\frac{4}{5}X+\frac{13}{8}$
- $\pi X^2-eX+\sqrt{2}$

2) Notations.

On les note P, Q, R, S, T, U, V, W etc
exemple:
On pourra écrire:

"Posons $P := X^2 - 8$"

⚠ On n'écrit pas : "Posons $P(X) = X^2 - 8$"

Un polynôme n'est pas une fonction : c'est une "somme formelle de puissance de X".

3/ Exemples de calcul

a Addition

On a : $(2X^3 + 3X^2 + X + 1) + (4X^2 + 2X + 3) = 2X^3 + 7X^2 + 3X + 4$

b Multiplication

Notons $P := X^2 - X + 2$ et $Q := X^2 - X - 1$

On a $P \times Q = (X^2 - X + 2)(X^2 - X - 1)$
$= X^4 - 2X^3 + 2X^2 - X - 2$

⚠ J'ordonne mon calcul en calculant
1) le terme en X^4
2) le terme en X^3
...

Et $Q \times P = (\dots) = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - X - 2$

c Scalairisation.

On multiplie un polynôme par un scalaire (ie un élément de $\mathbb{K}$)

On a $3 \cdot (2X^2 - 8X + 2) = 6X^2 - 24X + 6$

d Exemple - bilan.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On calcule

$(X - 1)(1 + X + X^2 + \dots + X^n) = X(1 + X + X^2 + \dots + X^n) - (1 + X + X^2 + \dots + X^n)$
$= X + X^2 + X^3 + \dots + X^{n+1} - (1 + X + X^2 + \dots + X^n) = X^{n+1} - 1$

Fait :

$(X - 1)(1 + X + X^2 + \dots + X^n) = X^{n+1} - 1$

remarque :

C'est Bernoulli pour "$a := X$" et "$b := 1$".

e) Pas de division

Pour l'instant, l'écriture $\frac{X+2}{X^2-8}$ est interdite.

4/ L'ensemble des polynômes.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coeff. réels. De même, $\mathbb{C}[X]$; plus généralem^t : $\mathbb{K}[X]$ (ou $K[X]$).

exemple :

- $e^{i\frac{\pi}{8}}X^{17} - 9X^2 + 1 \in \mathbb{C}[X]$
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors
  $(X-1)\left[\sum_{k=0}^{n}(X^k + X^2 - 1)^k\right]^n \in \mathbb{R}[X]$

Fait :

On a $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$.

démonstration :

cf polycopié ☒

5/ L'indéterminée.

En mathématiques, un certain nombre d'objets bien déterminés sont désignés par un symbole (ou une suite de symbole) connu de tous : c'est leur "nom propre".

exemples :

- i
- $\mathbb{R}$
- arccos
- e
- $\emptyset$
- ln
- π
- $\mathrm{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$
- 1
- $\mathrm{pgcd} : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$
- $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$
- 0
- 3
- $\mathbb{N}$

X est le nom propre donné à un objet mathématique précis appelé indéterminée

⚠ Pas de "Soit X l'indéterminée".

Définition (à oublier) : on ne s'en servira jamais

On pose $X := (0, 1, 0, 0, 0 \dots)$

6/ Premières propriétés.

Fait : ①

1) • $(P+Q)+R = P+(Q+R)$
• $P \times Q = Q \times P$
• $P+0 = 0+P = P$
• $(-P)+P = P+(-P) = 0$

2) • $(P \times Q) \times R = P \times (Q \times R)$
• $P \times Q = Q \times P$
• $1 \times P = P \times 1 = P$

3) • $P(Q+R) = P \times Q + P \times R$
• $(P+Q)R = P \times R + Q \times R$

démononration :

cf polycopié

Corollaire :

$\mathbb{K}[X]$ = (le $\mathbb{K}$ crochet X)

$(\mathbb{K}[X], +, \times, 0, 1)$ est un anneau commutatif

7/ Ecriture canonique d'un polynôme.

a L'écriture canonique.

Théorème - Définition :

Soit P un polynome.

1) Alors P s'écrit de façon unique

$$P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$$

avec $n \in \mathbb{N}$, $\forall i$, $a_i \in \mathbb{K}$ et $a_n \neq 0$.

2) On dit que

- n est le degré de P, noté $\deg(P)$
- les a_k sont les coefficients de P, notés $\text{coeff}_k(P)$
- a_0 est le coefficient constant
- a_n est le coefficient dominant, noté $\text{coeff}_{dom}(P)$
- $a_n X^n$ est le terme dominant de P

b Exemples

$\deg(4X^2+2X-1)=2$

- Notons $P: 4X^2+2X-1$
  On a $\text{coeff}_4(P)=0$
- $\deg(X)=1$
  et $\deg(1)=0$

c Quelques propriétés.

Fait:

- Les coeff de la somme sont les sommes des coeff
  Ie: $\text{coeff}_k(P+Q)=\text{coeff}_k(P)+\text{coeff}_k(Q)$
- De plus, $\text{coeff}_k(\lambda P)=\lambda\,\text{coeff}_k(P)$

⚠ Faux : $\text{coeff}_k(PQ) \neq \text{coeff}_k(P)\times\text{coeff}_k(Q)$

Fait:

C'est vrai pour les coefficients constants et dominants

Ie: $\begin{cases}\text{coeff}_0(PQ)=\text{coeff}_0(P)\times\text{coeff}_0(Q)\\ \text{coeff}_{dom}(PQ)=\text{coeff}_{dom}(P)\times\text{coeff}_{dom}(Q).\end{cases}$

d Définition

Soit $P\in\mathbb{K}[X]$

Définition:

- On dit que P est unitaire ssi $\text{coeff}_{dom}(P)=1$
- On dit que P est constant ssi $\exists a\in\mathbb{K} : P=a$

8/ Quelques identités ①

- $(X+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k a^{n-k}$
- $X^n - 1 = (X-1)(1 + X + \dots + X^{n-1})$
- $X^n - a^n = (X-a) \sum_{k=0}^{n-1} X^k a^{n-1-k}$

Proposit° ①:

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$

- $(P+Q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k Q^{n-k}$
- $P^n - Q^n = (P-Q) \sum_{k=0}^{n-1} P^k Q^{n-1-k}$

démonstration:

Comme $\mathbb{K}[X]$ est un anneau commutatif, c'est ok ☒

9/ Une expression du produit.

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ qu'on écrit

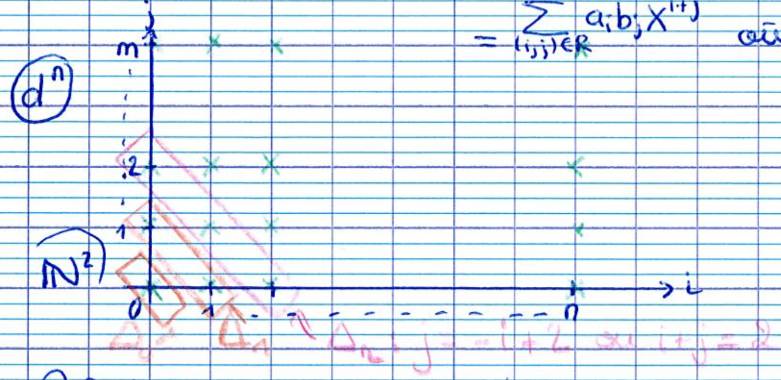
$P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $Q = \sum_{j=0}^{n} b_j X^j$

On considère le polynome PQ

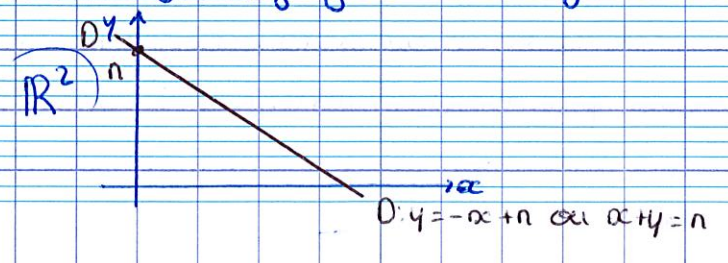
On a

$$PQ = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j X^j\right) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_i X^i b_j X^j$$

$$= \sum_{(i,j) \in R} a_i b_j X^{i+j} \quad \text{où } R \overset{AC}{:=} [\![0,n]\!] \times [\![0,m]\!]$$



① Astuce jolie: je fais l'analogie avec la géométrie dans $\mathbb{R}^2$

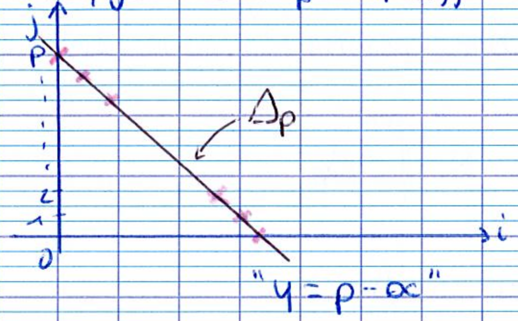


!!!

Bilan:

1) Si $p \in \mathbb{N}$, je note $\Delta_p := \{(i,j) \in R \mid i+j=p\}$

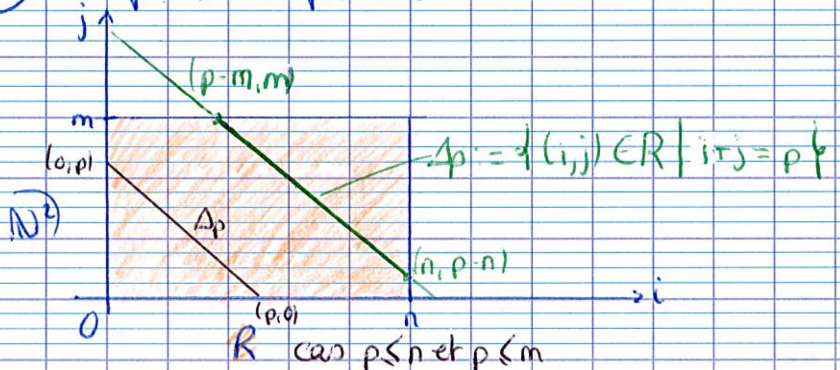
2) On a



remarque:

On a card $\Delta_p = p+1$ si $p \leq n$ et $p \leq m$.

d^n Si $p > n$ ou $p > m$.



Fait:

1) "$\Delta_p \xrightarrow[p \to \infty]{} \emptyset$"

2) $\Delta_{n+m} \neq \emptyset$

3) Mieux, on a $\Delta_{n+m} = \{(n,m)\}$

4) Et : $\forall p > n+m$, $\Delta_p = \emptyset$

démonstration:

1) est une version intuitive qui découle de 4).

3) • Déjà, $(n,m) \in R$ et de plus $(n,m) \in \Delta_{n+m}$

• Soit $(i,j) \in R$ tq $i+j = n+m$

On a donc $\underbrace{(n-i)}_{\geq 0} + \underbrace{(m-j)}_{\geq 0} = 0$ avec $n-i \geq 0$ et $m-j \geq 0$

car $i \in [\![0,n]\!]$ et $j \in [\![0,m]\!]$

Donc $i=n$ et $j=m$

• CCL : $\Delta_{n+m} = \{(n,m)\}$

4) Soit $p > n+m$. Mq $\Delta_p = \emptyset$

ORPA et oaq $\Delta_p \neq \emptyset$ et on fixe $(i_0, j_0) \in \Delta_p$

On a $i_0 \leq n$ et $j_0 \leq m$; donc $i_0 + j_0 \leq n+m$

Donc $p \leq n+m$. Absurde ■

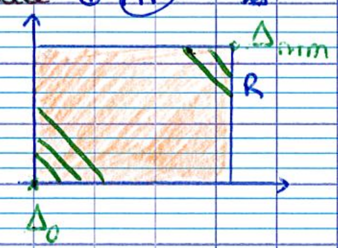
Fait:

On a $R = \bigsqcup_{p=0}^{n+m} \Delta_p$

démonstration:

exercice ⊕ AF ■

dⁿ



Revenons aux polynômes.

On écrit $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $Q = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j$ avec $n, m \in \mathbb{N}$ et $\forall i, j,\ a_i \in \mathbb{K}$ et $b_j \in \mathbb{K}$.

On a

$$PQ = \sum_{(i,j) \in R} a_i b_j X^{i+j} \overset{\text{sommat° par paquets}}{=} \sum_{p=0}^{n+m} \sum_{(i,j) \in \Delta_p} a_i b_j X^{i+j} = \sum_{p=0}^{n+m} \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq m \\ \text{tq } i+j=p}} a_i b_j X^{i+j}$$

$$= \sum_{p=0}^{n+m} \Big(\underbrace{\sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq m \\ \text{tq } i+j=p}} a_i b_j}_{\text{C'est le coeff}_p \text{ de } P \times Q} \Big) X^p$$

Fait: *

① On a $\text{coeff}_p(PQ) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq m \\ \text{tq } i+j=p}} a_i b_j$

② * On a $\forall p \in \mathbb{N},\ \text{coeff}_p(PQ) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq \deg(P) \\ 0 \leq j \leq \deg(Q) \\ \text{tq } i+j=p}} \text{coeff}_i(P) \times \text{coeff}_j(P)$

II) Degré

1) Cas du polynôme nul.

On pose $\deg(0_{\mathbb{K}[X]}) = -\infty$

2/ Degré de la somme

!!! ⚠ $\deg(P+Q) = \deg(P) + \deg(Q)$: c'est Faux +++ 😮

Contre-exemple:

$\deg(2X) = \deg(X+X) \overset{?}{=} \deg(X) + \deg(X)$: NON ☒

Proposition:

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors :

1) $\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$

2) On a mieux:

$\deg P < \deg Q \Rightarrow \deg(P+Q) = \deg Q$.

3) Ie :

$\deg(P) \neq \deg(Q) \Rightarrow \deg(P+Q) = \max(\deg P, \deg Q)$.

démonstration:

C'est évident. Oaq P et $Q \neq 0$

1) Soit $k > \max(\deg P, \deg Q)$

On a $k > \deg(P)$; donc (K)$^{+}$ $\text{coeff}_k(P) = 0$

De même : $\text{coeff}_k(Q) = 0$

Donc $\text{coeff}_k(P+Q) = 0$ (Rappel: $\text{coeff}_k(P+Q) = \text{coeff}_k(P) + \text{coeff}_k(Q)$)

- Notons $d := \deg(P+Q)$

On a $\text{coeff}_d(P+Q) \neq 0$ par définition

- Donc on a $d \leq \max(\deg P, \deg Q)$

2) Notons $p := \deg(P)$ et $q := \deg(Q)$. Oaq $p < q$. On a

$\max(\deg P, \deg(Q)) = q$

On a mq $\forall k > q$, $\text{coeff}_k(P+Q) = 0$

Et $\text{coeff}_q(P+Q) = \underbrace{\text{coeff}_q(P)}_{=0 \text{ car } q > \deg(P)} + \text{coeff}_q(Q)$

$= \text{coeff}_q(Q) = \text{coeff}_{dom}(Q) \neq 0$

CCL : $\deg(P+Q) = q = \deg(Q)$ ☒

Si $P=0$:

On a $P+Q=Q$ et donc $\deg(P+Q)=\deg(Q)$

Mais $\forall n\in\mathbb{N}$, $\max(-\infty,n)=n$

Mieux !! $\forall n\in\mathbb{N}\cup\{-\infty\}$, $\max(-\infty,n)=n$

Donc $\max(\deg P, \deg Q)=\deg Q$ ∎

remarque

La réciproque de 3) est fausse.

$\deg(P+Q)=\max(\deg P, \deg Q) \not\Rightarrow \deg P\neq\deg Q$ en général.

démonstration :

$P=Q=X^2$ on a $\deg P=\deg Q$ et

$\deg(P+Q)=\max(\deg P, \deg Q)$ ∎

3) Degré du produit

Proposition (1) :

$\deg(PQ)=\deg(P)+\deg(Q)$

démonstration :

- Si $P=0$, on a $PQ=0$ donc $\deg(PQ)=-\infty$

  Et $\forall n\in\mathbb{N}$, $-\infty+n=-\infty$

  Mieux : $\forall n\in\mathbb{N}\cup\{-\infty\}$, $-\infty+n=-\infty$. ∎
- De même si $Q=0$ ∎
- Oqp $P,Q\neq0$ et on écrit :

  $P=\sum_{i=0}^{n}a_iX^i$ et $Q=\sum_{j=0}^{m}b_jX^j$ avec $n,m\in\mathbb{N}$ et avec

  $\forall i,j \begin{cases}a_i\in\mathbb{K}\\ b_j\in\mathbb{K}\end{cases}$ et $\begin{cases}b_m\neq0\\ a_n\neq0\end{cases}$

  On a $n=\deg P$ et $m=\deg(Q)$

  On a $PQ=\sum_{j=0}^{m}b_jX^jP$

  Et, si $j_0\in\mathbb{N}$, on a

  $X^{j_0}P=\sum_{i=0}^{n}a_iX^{i+j_0}$ et donc $\deg(X^{j_0}P)=j_0+n$

  On a $PQ=\underbrace{b_mX^mP}_{\substack{\deg(\cdot)=m+n\\ \text{car } b_m\neq0\ (\mathbb{K})}}+\underbrace{\boxed{\sum_{j=0}^{m-1}b_j\underbrace{\boxed{X^jP}}_{\deg(\cdot)=j+n}}}_{\substack{\deg(\cdot)\leq j+n\\ \leq m-1+n\\ \text{i.e. } \deg(\cdot)\leq m+n-1}}$

  $\deg(\cdot)\leq m+n-1$

Donc : $\deg(PQ) = m+n = \deg(P)+\deg(Q)$ ☒

remarque* :

dans la démonstration, on a utilisé le fait que :

$\lambda \neq 0 \Rightarrow \deg(\lambda P) = \deg(P)$ à l'endroit (*)

- C'est vrai dans $\mathbb{K}[X]$, c'est vrai dans $K[X]$ mais en général, c'est faux dans $A[X]$.

ex : on se place dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}[X]$ et on considère

$P := \bar{3}X + \bar{1} \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}[X]$

$\lambda := \bar{2} \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

On a $\lambda \neq 0_{\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}}$ et $\lambda P = \bar{2}\times\bar{3}X + \bar{2} = \bar{6}X + \bar{2} = \bar{0}X + \bar{2}$

$= \bar{2}$ car $\bar{6} = \bar{0}$

- En revanche, c'est vrai si A est intègre.

Proposition :*

Soit A intègre et soient $P, Q \in A[X]$.

Alors $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

4) Intégrité de $\mathbb{K}[X]$

Proposition :

1) $\mathbb{K}[X]$ est intègre.

2) (1) $PQ = 0 \Rightarrow (P = 0$ ou $Q = 0)$

3) (1) $PQ \neq 0 \Leftarrow P \neq 0$ et $Q \neq 0$.

démonstration :

3) Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tq $\begin{cases} P \neq 0 \\ Q \neq 0 \end{cases}$

(!) Je passe par $\deg(.)$ On a $\begin{cases} \deg(P) \in \mathbb{N} \\ \deg(Q) \in \mathbb{N} \end{cases}$

Or $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$ Donc $\deg(PQ) \in \mathbb{N}$

Donc $PQ \neq 0$ ☒

remarque* :

On a donc mq en général;

$$A \text{ intègre} \Rightarrow A[X] \text{ intègre}.$$

Corollaire: (T)

$$\left.\begin{array}{l} PQ = PR \\ P \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow Q = R$$

démonstration:

cf chapitre 11

!!! 5) Espace de $\mathbb{K}_n[X]$.

Définition: (T)

$$\mathbb{K}_n[X] := \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \leq n\}$$

Proposition:

$\mathbb{K}_n[X]$ est stable par combinaisons linéaires (CL).

ie (T) $\left.\begin{array}{l} P, Q \in \mathbb{K}_n[X] \\ \lambda, \mu \in \mathbb{K} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda P + \mu Q \in \mathbb{K}_n[X]$

démonstration: (T)

$$\deg(\lambda P + \mu Q) \leq \max(\underbrace{\deg(\lambda P)}_{\leq n}, \underbrace{\deg(\mu Q)}_{\leq n})$$

$$\leq n \quad \text{car } P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$$

III) Évaluation des polynômes

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

1) Définition

a Évaluation

Définition:

L'évaluation de P en α, notée $P(\alpha)$, est l'élément de $\mathbb{K}$ défini par

$$P(\alpha) := \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k$$

si P s'écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $\forall k, a_k \in \mathbb{K}$

remarque :

Il faudrait vérifier que si P s'écrit $P = \sum_{\ell=0}^{m} b_\ell X^\ell$ avec $m \in \mathbb{N}$ et $\forall \ell, b_\ell \in \mathbb{K}$ alors on a

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k = \sum_{\ell=0}^{m} b_\ell \alpha^\ell \quad \text{(cf ORAL)}$$

exemples :

- Si $P := 3X^2 - 2X + 8$, alors
  $P(i) = -3 - 2i + 8 = 5 - 2i$ et
  $P(1) = 3 - 2 + 8 = 9$
  et $P(0) = 8$

Fait :

1) $P(1)$ est la somme des coeff de P.

2) ie $P(1) \sum_{k=0}^{\deg P} \text{coeff}_k(P)$

3) $P(0) = \text{coeff}_0(P)$

démonstration :

ok

b Fonction associée à un polynôme.

Définition :

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

La fonction associée à P, notée $\widetilde{P}$, est la fonction de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ définie par :

$$\widetilde{P} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$x \longmapsto \text{l'évaluation en } x \text{ de } P \text{ (noté } P(x))$$

remarque :

On a donc $\forall x \in \mathbb{K}, \underbrace{\widetilde{P}(x)}_{\text{la valeur que la fonct}^\circ \text{ prend en } x} = \underbrace{P(x)}_{\text{l'évaluation du polynôme } P \text{ en } x}$

Fait :

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors:
1) $\widetilde{P} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
2) On a $\widetilde{P} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

c) Évaluation en une matrice.

L'intérêt des polynômes c'est qu'on peut les évaluer dans pleins d'endroits différents !!

Pour évaluer un polynôme en α, j'ai besoin :

(i) de calculer α^k donc j'ai besoin d'un produit.

(ii) de calculer $a_k \alpha^k$; j'ai besoin de pouvoir "scalairiser"

(iii) de faire $a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots + a_n\alpha^n$; j'ai besoin d'une somme.

Exemples d'ensembles qui vérifient ces conditions :

- Déjà, (i)+(iii) : on veut des anneaux.
- Si R est un anneau, on veut en plus la possibilité d'écrire λx quand $\begin{cases} \lambda \in \mathbb{R} \\ x \in R \end{cases}$
- $M_2(\mathbb{R})$
- $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et plus généralement : $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$
  et plus généralement $\mathcal{C}^p(I, \mathbb{R})$ où $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$
- $\mathbb{R}[X]$
- $M_n(\mathbb{R})$
- $\mathbb{C}$

Bilan :

① $\widetilde{P} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mange seulem^t des réels.

② Mais P mange $\mathbb{R}$, $M_n(\mathbb{R})$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ etc.

exemple :

On pose $P := 5X^3 - 2X^2 + 8X - 5$.

Alors, si $A \in M_2(\mathbb{R})$, on a :

$P(A) = 5A^3 - 2A^2 + 8A - 5$

On écrit $P = 5X^3 - 2X^2 + 8X - 5X^0$

Donc $P(A) = 5A^3 - 2A^2 + 8A - 5.I_2$ ⚠

AF avec $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2/ Propriétés fausses

Proposition:

Sont fausses en général

1) $P(\alpha+\beta) = P(\alpha) + P(\beta)$

2) $P(\alpha\beta) = P(\alpha)P(\beta)$

démonstration:

AF^{++} : recherche de contre-exemple.

3/ Propriétés vraies

Proposition:

1/ $(P+Q)(\alpha) = P(\alpha) + Q(\alpha)$

2/ $(PQ)(\alpha) = P(\alpha) \times Q(\alpha)$

démonstration:

1/ ok ☒

2/ On écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{\ell=0}^{m} b_\ell X^\ell$ avec $m, n \in \mathbb{N}$ et $\forall k, \ell,\ a_k \in \mathbb{K},\ b_\ell \in \mathbb{K}$.

On a alors

$$PQ = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) \times \left(\sum_{\ell=0}^{m} b_\ell X^\ell\right) = \sum_{(k,\ell) \in [\![0,n]\!] \times [\![0,m]\!]} a_k b_\ell X^{k+\ell}$$

$$\text{Donc } (PQ)(\alpha) = \left(\sum_{(k,\ell)\in \dots} a_k b_\ell X^{k+\ell}\right)(\alpha) = \sum_{(k,\ell)\in \dots} a_k b_\ell \alpha^{k+\ell}$$

$$\text{Et } P(\alpha) \times Q(\alpha) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{m} b_\ell \alpha^\ell\right) = \sum_{(k,\ell) \in [\![0,n]\!] \times [\![0,m]\!]} a_k b_\ell \alpha^{k+\ell}$$ ☒

remarque:

$(\lambda P)(\alpha) = \lambda P(\alpha)$ quand $\lambda \in \mathbb{K}$.

Reformulation:

Notons $\text{év}_\alpha : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}$
$P \longmapsto P(\alpha)$

remarque:

Plus généralem^t, si $\mathcal{B}$ est une structure avec $(+, \times, \cdot)$ et si $\beta \in \mathcal{B}$, on dispose de

$\text{év}_\beta : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathcal{B}$
$P \longmapsto P(\beta)$

Proposition:

1) $\text{év}_\alpha(P+Q) = \text{év}_\alpha(P) + \text{év}_\alpha(Q)$
2) $\text{év}_\alpha(PQ) = \text{év}_\alpha(P) \times \text{év}_\alpha(Q)$
3) $\text{év}_\alpha(1) = 1$

ie $\text{év}_\alpha : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}$ est un morphisme d'anneaux

remarque:

Comme $\text{év}_\beta(\lambda P) = \lambda \text{év}_\beta(P)$
On dit que $\text{év}_\beta : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathcal{B}$ est un morphisme de $(+, \times, \cdot)$-structure.

!!!

4) Interpolation de Lagrange.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Théorème:

échec + cf plus tard. (IV, 7)

IV) Racines.

1) Racines

Définition:

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et soit $\alpha \in \mathbb{K}$.

On dit que α est une racine de P ssi $P(\alpha) = 0$ ($\triangleq$)

remarque :

On note $Z_{\mathbb{K}}(P)$ l'ensemble de ses racines dans $\mathbb{K}$.

exemples :

Soit $P := X^2 + 1$

- On a $Z_{\mathbb{R}}(P) = \emptyset$
- On a $Z_{\mathbb{C}}(P) = \{-i, i\}$

On a $Z_{\mathbb{C}}(X^n - 1) = \mathbb{U}_n$ si $n \geqslant 1$

et $Z_{\mathbb{R}}(X^n) = \{0\}$ si $n \geqslant 1$

Et $Z_{\mathbb{C}}(X^2 + X + 1) = \{j, \bar{j}\}$ $(X^3 - 1) = (X-1)(1+X+X^2)$

Fait :

$Z_{\mathbb{K}}(PQ) = Z_{\mathbb{K}}(P) \cup Z_{\mathbb{K}}(Q)$ ~~$Z_{\mathbb{K}}(PQ) = Z_{\mathbb{K}}(P) \times Z_{\mathbb{K}}(Q)$~~ mal-typé

(C'est l'intégrité).

2/ Caractérisation des racines.

On va mq $P(\alpha) = 0$ ssi je peux factoriser P par $X - \alpha$.

Proposition :

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et soit $\alpha \in \mathbb{K}$

Alors, on a

$$P(\alpha) = 0 \iff \exists Q \in \mathbb{K}[X] : P = (X - \alpha)Q.$$

démonstration :

($\Leftarrow$) Osq $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$ tq $P = (X-\alpha)Q$.

Fixons un tel Q.

On a alors $P(\alpha) = ((X-\alpha)Q)(\alpha) = (\alpha - \alpha)Q(\alpha) = 0$

Jolie preuve

($\Rightarrow$) Osq $P(\alpha) = 0$

On écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $\forall k, a_k \in \mathbb{K}$

Astuce On a donc $P = P - P(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k - \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k$

$= \sum_{k=1}^{n} a_k X^k - \sum_{k=1}^{n} a_k \alpha^k$ car $a_0 X^0 = a_0 = a_0 \alpha^0$

$= \sum_{k=1}^{n} a_k (X^k - \alpha^k)$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k (X-\alpha) \sum_{i=0}^{k-1} X^i \alpha^{k-1-i}$$

$$= (X-\alpha)\left[\sum_{k=1}^{n} a_k \left(\sum_{i=0}^{k-1} \alpha^{k-1-i} X^i\right)\right]$$

CCL : $\exists Q \in \mathbb{K}[X] : P = (X-\alpha)Q$ $\boxtimes$

3/ Factorisation simultanée.

Proposition :

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ des racines de P deux à deux distinctes.

Alors : $\exists Q \in \mathbb{K}[X] : P = (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\dots(X-\alpha_N)Q$.

démonstration :

rec finie ascendante

On note $\mathcal{P}(k)$: " $\exists Q \in \mathbb{K}[X] : P = \left(\prod_{i=1}^{k}(X-\alpha_i)\right) Q$ " si $k \in [\![1, N]\!]$

- $k=1$: ok d'après 2/ comme $P(\alpha_1) = 0$, on sait que $\exists Q \in \mathbb{K}[X] : P = (X-\alpha_1)Q$.
- Hérédité :

  Mq $\forall k \in [\![1, N-1]\!]$, $\mathcal{P}(k) \Rightarrow \mathcal{P}(k+1)$

  Soit $k \in [\![1, N-1]\!]$ tq $\mathcal{P}(k)$.

  Fixons donc $Q \in \mathbb{K}[X]$ tq $P = \left[\prod_{i=1}^{k}(X-\alpha_i)\right] Q$

  On évalue en α_{k+1}. On a :

  $$\underbrace{P(\alpha_{k+1})}_{\substack{=0 \text{ car} \\ \alpha_{k+1} \text{ racine}}} = \underbrace{\underbrace{\left[\prod_{i=1}^{k}(\alpha_{k+1}-\alpha_i)\right]}_{\substack{\neq 0 \text{ car } \alpha_i \text{ sont} \\ 2 \text{ à } 2 \text{ distinctes}}}}_{\neq 0 \text{ par intégrité}} Q(\alpha_{k+1})$$

  Donc $Q(\alpha_{k+1}) = 0$

  D'après 2/, on écrit $Q = (X-\alpha_{k+1})S$ avec $S \in \mathbb{K}[X]$

  Bilan : on a $P = \left(\prod_{i=1}^{k}(X-\alpha_i)\right)(X-\alpha_{k+1})S$

  Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie $\boxtimes$

4/ Le degré majore le nombre de racines.

!!! Théorème:

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul. Alors

- P possède au plus $\deg(P)$ racines.
- Ie $|Z_{\mathbb{K}}(P)| \leq \deg(P)$.

remarque:

- encore vrai dans $\mathbb{K}[X]$
- encore vrai dans $A[X]$ si A intègre.
- faux si A non intègre.

démonstration:

On pose $n := \deg(P)$

On écrit $Z_{\mathbb{K}}(P) := \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\}$ où $N := |Z_{\mathbb{K}}(P)|$

Les α_k sont 2 à 2 distincts.

Fixons $Q \in \mathbb{K}[X]$ tq $P = \left[\prod_{k=1}^{N}(X-\alpha_k)\right] Q$ d'après 3/.

- On a $Q \neq 0$ car $P \neq 0$
- On pas (*) a $\deg(\cdot)$: on a
$$\deg(P) = \deg\left(\prod_{k=1}^{N}(X-\alpha_k)\right) + \deg(Q)$$
- Comme $Q \neq 0$, on a $\deg Q \geq 0$
- CCL $\deg(P) \geq \deg\left(\prod_{k=1}^{N}(X-\alpha_k)\right)$
- Or $\deg\left(\prod_{k=1}^{N}(X-\alpha_k)\right) = \sum_{k=1}^{N}\deg(X-\alpha_k) = N$
- D'où $n \geq N$ ☒

5/ Critère radical de nullité.

relatif aux racines

a Enoncé

Théorème:

① Un polynôme de degré au plus n possédant au moins $n+1$ racines est nul

② Plus formellemt:

$$\left.\begin{array}{l}\deg P \leq n \\ |Z_{\mathbb{K}}(P)| \geq n+1\end{array}\right\} \Rightarrow P = 0$$

démonstration:

On suppose que $P \neq 0$, oqg $\deg(P) \leq n$ et $|Z_{\mathbb{K}}(P)| \geq n+1$

C'est absurde car $|Z_{\mathbb{K}}(P)| \leq \deg(P) \leq n$ ■

Corollaire:

1) Si P a une infinité de racines, alors P est nul
2) $Z_{\mathbb{K}}(P)$ infini $\Rightarrow P = 0$

démonstration:

ok ■

b Corollaires.

Corollaire:

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ de degré au plus n ie $\in \mathbb{K}_n[X]$

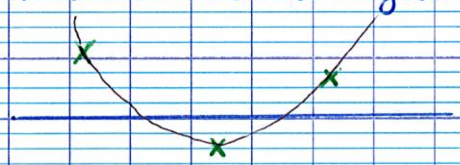
Alors,

1) Si P et Q coïncident en (au moins) $n+1$ points, alors $P = Q$
2) ie
$$|\{a \in \mathbb{K} \mid P(a) = Q(a)\}| \geq n+1 \Rightarrow P = Q$$

remarque:

C'est un résultat de rigidité.

d^n



Il existe une seule parabole (ie $P \in \mathbb{R}_2[X]$) passant par 3 points

démonstration:

1) On pose $S := P - Q$

On a $S \in \mathbb{K}_n[X]$ car $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$

On a $|Z_{\mathbb{K}}(S)| \geq n+1$

Donc d'après le CRN (critère radical de nullité), on a

$S = 0$ ie $P = Q$ ■

c Une belle application.

Fait: R^x

$$X^n - 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega) = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{ik\frac{2\pi}{n}})$$

démonstration :

Notons $P := \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega)$

Montrons que $P = X^n - 1$.

On pose $S = (X^n - 1) - P$

On a $\forall \omega_0 \in \mathbb{U}_n,\ (X^n - 1)(\omega_0) = \omega_0^n - 1 = 1 - 1 = 0$

et aussi : $\forall \omega_0 \in \mathbb{U}_n,\ P(\omega_0) = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (\omega_0 - \omega) = 0$

Donc $\forall \omega_0 \in \mathbb{U}_n,\ S(\omega_0) = 0 - 0$

Donc $\mathbb{U}_n \subset Z_{\mathbb{C}}(S)$ donc $|Z_{\mathbb{C}}(S)| \geq n$

Or $\deg(S) \leq n-1$!! En effet, $\deg(P) = \deg(X^n - 1) = n$ et $\mathrm{coeff}_{dom}(X^n - 1) = 1$ et $\mathrm{coeff}_{dom}(P) = 1$.

Il y a chute de dégré.

Donc $S = 0$ ie $X^n - 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega)$ ▢

d Reformulation

(On suppose ici $\mathbb{K}$ corps infini ; c'est faux pour les corps finis)*

On considère :

$$\tilde{\cdot} : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$$
$$P \longmapsto \tilde{P}$$

On a①
$$\widetilde{P+Q} = \tilde{P} + \tilde{Q}$$
$$\widetilde{PQ} = \tilde{P} \cdot \tilde{Q}$$
$$\tilde{1} = \tilde{1}$$

polynôme 1 $\qquad$ fonct° $\tilde{1}$

C'est un morphisme d'anneau injectif ! (*)

(dem.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tq $\tilde{P} = \tilde{0}$

On a donc $\forall x \in \mathbb{K},\ P(x) = 0$.

Donc P possède une infinité de racines Donc $P = 0$.

Donc $\mathrm{Ker}(\tilde{\cdot}) = \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$

Donc $\mathbb{R}^{\times \mathbb{M}}$ $\tilde{\cdot}$ est injective ▢)

6/ Théorème de d'Alembert-Gauss.
Théorème fondamental de l'algèbre.

Enoncé en 1629. Démontré en 1806.

Théorème:

Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tq $\deg P \geq 1$ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$

Ie, $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $\exists a \in \mathbb{C} : P(a) = 0$.

Corollaire - Réflexe:

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul, de degré $n \in \mathbb{N}$.

Alors P s'écrit

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $\forall k, \alpha_k \in \mathbb{C}$

démonstration.

- théorème: plus tard.
- corollaire

Idée: 1) rec

2) Grâce au théorème, on fixe α une racine de P

3) On écrit $P = (X - \alpha) Q$

4) On montre que $\deg Q = n - 1$

5) On applique rec Q.

!!!

7/ Interpolation de Lagrange.

C'est un résultat un peu fin, très interressant.

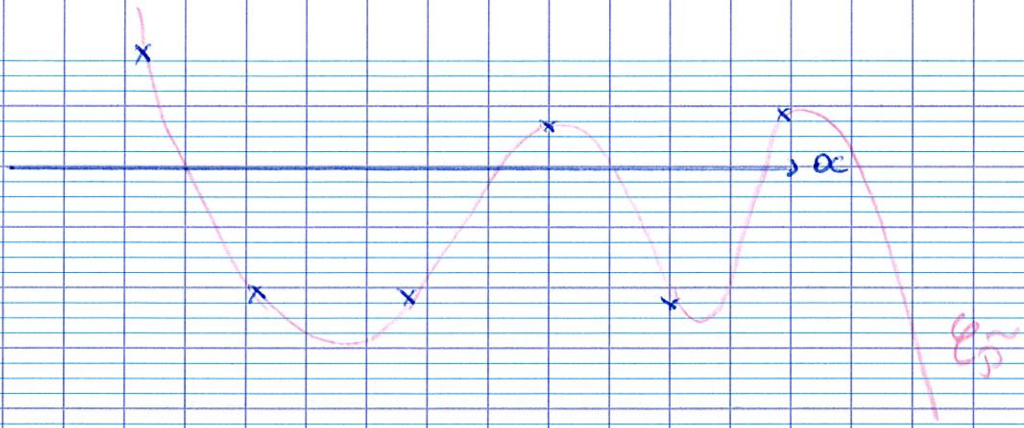
Idée: Je place dans $\mathbb{R}^2$ n points d'abscisses 2 à 2 distinctes

Alors: il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ passant par ces points.

C'est un résultat de rigidité mais aussi de "richesse".

d^n

12



Théorème :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $x_1, x_2, \dots x_n \in \mathbb{K}$ 2 à 2 distincts.

Alors :

$$\forall (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n, \exists ! P \in \mathbb{K}_{n-1}[X] : \forall i \in [\![1,n]\!], P(x_i) = y_i$$

démonstration :

- On introduit les polynômes $L_1, L_2, \dots L_n$
- Pour $i_0 \in [\![1,n]\!]$, on pose :

$$\tilde{L}_{i_0} := \prod_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ i \neq i_0}} (X - x_i)$$

On a : 1) Si $i \neq i_0$, on a $\tilde{L}_{i_0}(x_i) = 0$

2) $\tilde{L}_{i_0}(x_{i_0}) = \prod_{i \neq i_0} (x_{i_0} - x_i)$

- Je renormalise en posant, quand $i_0 \in [\![1,n]\!]$

$$L_{i_0} := \frac{\tilde{L}_{i_0}}{\tilde{L}_{i_0}(x_{i_0})}$$

ie on pose $\boxed{L_{i_0} := \dfrac{\prod_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ i \neq i_0}} (X - x_i)}{\prod_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ i \neq i_0}} (x_{i_0} - x_i)}}$

Symbole de Kronecker :

Si $i,j \in \mathbb{Z}$, on pose $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

La définition s'étend à $\mathbb{R}$, etc.

exemples :

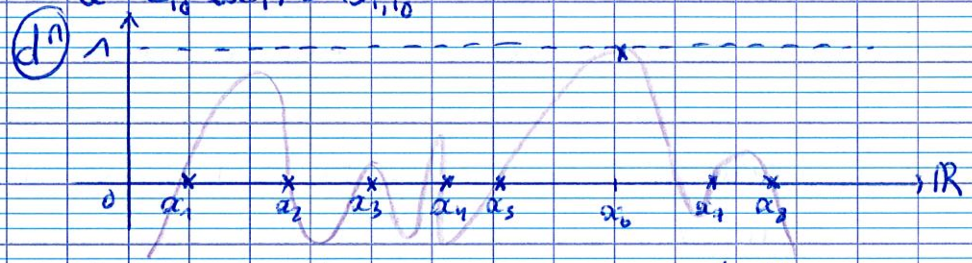
- $S_{2,3} = 0$
- * $I_n = (\delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$

retour démonstration:

- <u>Grande idée</u>:

Si $i_0 \in [\![1, n]\!]$, alors ① $L_{i_0}(x_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = i_0 & \text{(AC)} \\ 0 \text{ si } i \neq i_0 & \text{(AC)} \end{cases}$

ie $L_{i_0}(x_i) = \delta_{i,i_0}$



- A l'aide des L_i, on va démontrer le théorème
- Soient $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$

<u>Unicité</u>:

Soient $P, Q \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tq $\begin{cases} \forall i, P(x_i) = y_i \\ \forall i, Q(x_i) = y_i \end{cases}$

Montrons que $P = Q$.

C'est le critère radical de nullité.

On pose $S := P - Q$. On a $S \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$.

On a $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $S(x_i) = 0$

Comme les x_i sont 2 à 2 distincts, on a $|Z_{\mathbb{K}}(S)| \geq n$

D'après le CNR, $S = 0$ ie $P = Q$ ☒ unicité.

<u>Existence</u>:

On pose $P := \sum_{i=1}^{n} y_i L_i$

Soit $i_0 \in [\![1, n]\!]$, on a $P(x_{i_0}) = \sum_{i=1}^{n} y_i L_i(x_{i_0}) \overset{①}{=} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} y_i \delta_{i,i_0} + y_{i_0} \delta_{i_0,i_0}$

$= y_{i_0}$

<u>CCL</u>: $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $P(x_i) = y_i$ ☒

<u>V | Composition</u>

Soient $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$

1/ Définition

Définition :

Le polynôme composé de P par Q, noté $P \circ Q$, est le polynome défini par :

$$P \circ Q = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k$$

Si on a écrit $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $\forall k, a_k \in \mathbb{K}$

exemple :

- Si $P := X^2 + X + 1$ et $Q = X - 1$

On a : $P \circ Q = (X-1)^2 + (X-1) + 1 = (X^2 - 1) + X$

$= X^2 - X + 1$

et $Q \circ P = P - 1 = X^2 + X$

Ainsi la loi "$\circ$" n'est pas commutative.

* remarques :

- On a vu que si $P \in \mathbb{K}[X]$, si B est une $(+, \times, \cdot)$-structure et si $\beta \in B$, on peut évaluer P en β
- On définit donc $év_\beta : \mathbb{K}[X] \longrightarrow B$

$$P \longmapsto P(\beta)$$

- Cette application est "morphique"

ie $\textcircled{T}$ $\begin{cases} év_\beta(P+Q) = év_\beta(P) + év_\beta(Q) \\ év_\beta(PQ) = év_\beta(P) \times év_\beta(Q) \end{cases}$

- Or $\mathbb{K}[X]$ est une "$(+, \times, \cdot)$-structure".

Fixons $Q_0 \in \mathbb{K}[X]$: je peux considérer

$$év_{Q_0} : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X]$$

Si P s'écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on a

$$\underbrace{év_{Q_0}(P)}_{\text{peut être noté } P(Q_0)} = év_{Q_0}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k Q_0^k = P \circ Q_0$$

remarque :

- La notation $P(Q_0)(= P\circ Q_0)$ est ambiguë et rarem^t utilisée. En effet, qu'est-ce que $P(X-1)$?
  1) Est-ce $P\times(X-1)$?
  2) Ou bien est-ce $P\circ(X-1)$?

<u>Fait :</u> (T)

$$P(X) = P$$

démonstration :

Quand je remplace X par X dans l'expression $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, ça ne change rien ☒

2/ <u>Propriétés</u>

Comme $\text{év}_{Q_0} : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X]$ est ~~un~~ "morphique", on a (T)

$\text{év}_{Q_0}(P+Q) = \text{év}_{Q_0}(P) + \text{év}_{Q_0}(Q)$

ie $(P+Q)\circ Q_0 = P\circ Q_0 + Q\circ Q_0$

De même : comme $\text{év}_{Q_0}(PQ) = \text{év}_{Q_0}(P)\times \text{év}_{Q_0}(Q)$,

on a $(PQ)\circ Q_0 = (P\circ Q_0)\times(Q\circ Q_0)$

<u>Proposition</u> (T) :

1) $(P+Q)\circ Q_0 = P\circ Q_0 + Q\circ Q_0$
2) $(PQ)\circ Q_0 = (P\circ Q_0)\times(Q\circ Q_0)$

démonstration :

ok ☒

b <u>Associativité.</u>

<u>Lemme :</u> (T)

$\mathbb{K}\to\mathbb{K}$

$$\widetilde{P\circ Q} = \widetilde{P}\circ\widetilde{Q}$$

composition d'application cf Ch7

$\mathbb{K}[X]$ composition de polynômes cf Ch12

démonstration :

- Notons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

- Soit $a \in \mathbb{K}$. On calcule :
$\widetilde{P \circ Q}(a) = (P \circ Q)(a) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k Q^k\right)(a) = \acute{e}v_a\left(\sum_{k=0}^{n} a_k Q^k\right)$
$= \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \acute{e}v_a(Q^k) = \sum_{k=0}^{n} a_k (\acute{e}v_a(Q))^k$
car $\acute{e}v_a(\cdot)$ est morphique
$= \sum_{k=0}^{n} a_k Q(a)^k$
- Et $(\widetilde{P} \circ \widetilde{Q})(a) = \widetilde{P}(\boxed{\widetilde{Q}(a)})$
$= Q(a)$

Or, par définition, $\widetilde{P}(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$
Donc $\widetilde{P}(Q(a)) = \sum_{k=0}^{n} a_k Q(a)^k$

CCL : On a mq $\forall a \in \mathbb{K}$, $\widetilde{P \circ Q}(a) = (\widetilde{P} \circ \widetilde{Q})(a)$
Donc $\widetilde{P \circ Q} = \widetilde{P} \circ \widetilde{Q}$ ☒

Proposition :
$(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$

démonstration :
Soient $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$.
Alors, on a : Idée : - Je passe par les fonctions associées
- En effet, je sais que la composition des applications est associative.
- J'utilise l'injectivité de ~.

On a $\widetilde{(P \circ Q) \circ R} = \widetilde{(P \circ Q)} \circ \widetilde{R}$
d'après le lemme $= (\widetilde{P} \circ \widetilde{Q}) \circ \widetilde{R}$ car le $\circ$ des application est associatif
$= \widetilde{P} \circ (\widetilde{Q} \circ \widetilde{R})$
$= \widetilde{P} \circ \widetilde{(Q \circ R)}$
$= \widetilde{P \circ (Q \circ R)}$

CCL : $\widetilde{(P \circ Q) \circ R} = \widetilde{P \circ (Q \circ R)}$
Or ~ est injective donc $(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$ ☒

remarque :
C'est vrai dans $A[X]$.

3/ Degré. ⚠

Propriété ①:

$$\deg(P\circ Q) = \begin{cases} \deg P \times \deg Q & \text{si } \deg Q \geq 1 \\ 0 \text{ ou } -\infty & \text{si } \deg Q \leq 0 \end{cases}$$

démonstration:

- contre-exemple:

a)① $P := X-1$ et $Q := 1$

$P\circ Q = 0$ $\deg(P\circ Q) = -\infty$

Mais $\deg(P)\times\deg(Q) = 1\times 0 = 0$

b)① $P := X+1$; $Q := 0$

$P\circ Q = 1$, $\deg(P\circ Q) = 0$

Mais $\deg(P)\times\deg(Q) = 1\times(-\infty) = -\infty$

- cas général:

On suppose que $\deg(Q) \geq 1$

Lemme:

$$\deg(Q^k) = k\deg(Q)$$

démonstration:

$$\deg(Q^k) = \deg(Q\times Q\times\dots\times Q)$$
$$= \deg(Q) + \deg(Q) + \dots + \deg(Q) \quad \blacksquare$$

a) si $P = 0$: ok car on a alors $P\circ Q = 0$

donc $\deg(P\circ Q) = -\infty$ et $\deg(P) = -\infty$ et $\deg(Q) \geq 1$

donc $\deg(P)\times\deg(Q) = -\infty$

b) Oqq $P \neq 0$. On écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $n\in\mathbb{N}$, $\forall k$, $a_k \in \mathbb{K}$ et $a_n \neq 0$.

$$\text{On a } P\circ Q = \underbrace{\boxed{a_n Q^n}}_{\substack{n\deg(Q) \\ \text{car } a_n\neq 0}} + \underbrace{\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\boxed{a_k Q^k}}_{k\deg(Q)}}}_{\text{noté } R}$$

$\leq k\deg(Q)$

$\leq n\deg(Q)-1$

$k<n$
$\deg(Q)>0$

$k\deg(Q) < n\deg(Q)$

$\in \mathbb{K}_{n\deg(Q)-1}[X]$

On a $P\circ Q = a_n Q^n + R$

On a $\deg(a_n Q^n) \neq \deg(R)$ car $\deg(R) < \deg(a_n Q^n)$

Donc $\deg(P\circ Q) = \deg(a_n Q^n) = n\deg(Q) = \deg(P)\deg(Q)$

VI) Dérivation formelle.

1/ Définition.

On sait dériver les fonctions (dérivables) $f : I \to \mathbb{R}$,
Mieux, on sait dériver les fonctions (dérivables) $f : I \to \mathbb{C}$.
- La dérivation des polynômes marche partout :
  - $\mathbb{R}[X]$
  - $\mathbb{C}[X]$ (marche des nb complexes)
  - $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}[X]$
  - $\mathbb{F}_2[X]$

Définition :
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ qu'on écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ (avec $n \in \mathbb{N}$ et $\forall k, a_k \in \mathbb{K}$).
Le polynome dérivé de P, noté P', est défini par
$$P' := \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$$

exemples :
- $(2X^2 - 8X + 2)' = 4X - 8$
- ⚠ si vous écrivez $(4x^2)' = 8x$, c'est faux

2/ Propriétés.

Proposition :
1) a. $(P + \lambda Q)' = P' + \lambda Q'$
   b. $(P + Q)' = P' + Q'$
   c. $(\lambda Q)' = \lambda Q'$
2) $(PQ)' = P'Q + PQ'$
3) $(P\circ Q)' = P'\circ Q \times Q'$

démonstration :

exercice ☒

Proposition 2 :

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors, on a :

1) $\widehat{P} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable

2) On a $(\widetilde{P})' = \widetilde{P'}$ → le '''' des polynômes

le '''' des fonct° réelles

démonstration :

AF ☒

remarque :

- À l'aide de la proposit° 2, on peut montrer la proposit° 1 pour $\mathbb{R}[X]$ (grâce à l'injectivité de $\sim$)
- On peut passer de $\mathbb{R}[X]$ à $\mathbb{C}[X]$: exercice

3/ Degré

Proposition : ⚠

$$\deg(P') = \begin{cases} \deg P - 1 & \text{si } \deg P \geq 1 \\ -\infty & \text{si } \deg P \leq 0 \end{cases}$$

démonstration :

ok ☒