Intégration I

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 1.1

Calculer, en donnant le résultat sous forme de fraction irréductible :

a) $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}$ ....

b) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}$ ....

c) $\dfrac{2}{3} - \dfrac{3}{2}$ ....

Calcul 1.2

Exprimer les nombres suivants sous la forme « $2^a 5^b$ » (avec $a, b \in \mathbb{Z}$).

a) $\dfrac{10^2}{5^4}$ ....

b) $\dfrac{1}{2^2 \times \frac{1}{5^2}}$ ......

c) $\dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{10}$ ....

Premières intégrales

Calcul 1.3

Calculer :

a) $\displaystyle\int_0^1 t \, \mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^1 2t^2 \, \mathrm{d}t$ ......

c) $\displaystyle\int_0^1 (-t+1) \, \mathrm{d}t$ ..

Calcul 1.4 — Une formule générale.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Combien vaut $\displaystyle\int_0^1 t^n \, \mathrm{d}t$?

(a) $n+1$ (b) $n-1$ (c) $\dfrac{1}{n}$ (d) $\dfrac{1}{n+1}$ (e) $\dfrac{1}{n-1}$

....

Calcul 1.5 — Variations autour d'une puissance.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer :

a) $\displaystyle\int_{-1}^1 t^n \, \mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^n \, \mathrm{d}t$ ....

c) $1 - \displaystyle\int_0^1 nt^n \, \mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} t^n \, \mathrm{d}t$ ....

Calcul 1.6

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{t^{2n}}{2^n}\,\mathrm{d}t$ ....

Secondes intégrales

Calcul 1.7 — Variations autour d'une fraction.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Calculer :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{t^{2n}}\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 1.8

Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculer $\displaystyle\int_0^2 \left(\frac{t^3}{2}\right)^n \mathrm{d}t$ ....

b) Calculer $\displaystyle\int_0^{2^n} nt^{2n-1}\,\mathrm{d}t$ ....

Calculs plus avancés

Calcul 1.9 — Une somme d'intégrales.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\int_0^2 2t\,\mathrm{d}t + \int_0^2 3t^2\,\mathrm{d}t + \int_0^2 4t^3\,\mathrm{d}t + \cdots + \int_0^2 (n+1)t^n\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 1.10 — Une fraction de fractions.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Calculer $\dfrac{n}{\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t}$ ....

Réponses mélangées

$-\dfrac{\sqrt{2}}{(2n-1)2^n}$ $\quad \dfrac{1}{2}4^{n^2}$ $\quad \dfrac{1-(-1)^{n-1}}{1-n}$ $\quad \dfrac{1}{(1-n)2^{n-1}}$ $\quad \dfrac{1}{6}$ $\quad \dfrac{2^{n+1}-1}{4^{n+1}(n+1)}$

$2(2^{n+1}-1)$ $\quad -\dfrac{5}{6}$ $\quad \dfrac{1}{(n+1)2^{n+1}}$ $\quad \dfrac{2}{3}$ $\quad$ e $\quad 2^{-2}5^2$ $\quad \dfrac{\sqrt{2}}{2n+1}$ $\quad -\dfrac{(n-1)}{n^{n-2}}$

$\dfrac{5}{6}$ $\quad 2^{-1}5^{-1}$ $\quad \dfrac{1}{1-n}$ $\quad \dfrac{2}{3}$ $\quad \dfrac{1-(-1)^{n+1}}{n+1}$ $\quad \dfrac{2^{2n+1}}{3n+1}$ $\quad 2^2 5^{-2}$ $\quad \dfrac{1}{2}$ $\quad \dfrac{1}{n+1}$

► Réponses et corrigés page 3

Fiche n° 1. Intégration I

Réponses

1.1 a) .... $\boxed{\dfrac{5}{6}}$

1.1 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{6}}$

1.1 c) .... $\boxed{-\dfrac{5}{6}}$

1.2 a) .... $\boxed{2^2 5^{-2}}$

1.2 b) .... $\boxed{2^{-2} 5^2}$

1.2 c) .... $\boxed{2^{-1} 5^{-1}}$

1.3 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

1.3 b) .... $\boxed{\dfrac{2}{3}}$

1.3 c) .... $\boxed{\dfrac{2}{3}}$

1.4 .... $\boxed{\mathrm{e}}$

1.5 a) .... $\boxed{\dfrac{1-(-1)^{n+1}}{n+1}}$

1.5 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{(n+1)2^{n+1}}}$

1.5 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{n+1}}$

1.5 d) .... $\boxed{\dfrac{2^{n+1}-1}{4^{n+1}(n+1)}}$

1.6 .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2n+1}}$

1.7 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{1-n}}$

1.7 b) .... $\boxed{\dfrac{1-(-1)^{n-1}}{1-n}}$

1.7 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{(1-n)2^{n-1}}}$

1.7 d) .... $\boxed{-\dfrac{\sqrt{2}}{(2n-1)2^n}}$

1.8 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}4^{n^2}}$

1.8 b) .... $\boxed{\dfrac{2^{2n+1}}{3n+1}}$

1.9 .... $\boxed{2(2^{n+1}-1)}$

1.10 .... $\boxed{-\dfrac{(n-1)}{n^{n-2}}}$

Corrigés

1.2 c) On a $\dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{10} = 2 \times \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{2 \times 5} = 2^{-1}5^{-1}$.

1.4 On a $\displaystyle\int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{0}{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

1.5 c) On a $\displaystyle 1 - \int_0^1 nt^n \,\mathrm{d}t = 1 - n\int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t = 1 - n \times \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

1.5 d) On a $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} t^n \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{4^{n+1}}\right) = \frac{2^{n+1}-1}{(n+1)4^{n+1}}$.

1.6 On a $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{t^{2n}}{2^n} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2^n}\left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2^n}\frac{\sqrt{2}^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2^n}\frac{\sqrt{2}^{2n}\sqrt{2}}{2n+1} = \frac{1}{2^n}\frac{2^n\sqrt{2}}{2n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n+1}$.

1.7 a) On a $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^n} \,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{-n} \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{-n+1}}{-n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{1-n}$.

1.9 Pour commencer, on peut écrire

$$\begin{aligned}\int_0^2 2t\,\mathrm{d}t + \int_0^2 3t^2\,\mathrm{d}t + \int_0^2 4t^3\,\mathrm{d}t + \cdots + \int_0^2 (n+1)t^n\,\mathrm{d}t &= \sum_{k=0}^{n}\int_0^2 (k+1)t^k\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left[t^{k+1}\right]_0^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n} 2^{k+1} = 2\sum_{k=0}^{n} 2^k.\end{aligned}$$

Or, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k = \frac{2^{n+1}-1}{2-1} = 2^{n+1}-1$. Donc, la somme cherchée vaut $2(2^{n+1}-1)$.

1.10 Pour commencer, remarquons que

$$\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{-n+1}}{-n+1}\right]_0^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{1-n}\left[\frac{1}{t^{n-1}}\right]_0^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{1-n}\frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}} = \frac{1}{1-n}n^{n-1}.$$

Ainsi, on trouve

$$\frac{n}{\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t} = -(n-1)n^{2-n} = -\frac{(n-1)}{n^{n-2}}.$$