Dérivation III

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 1.1

Écrire sous la forme $ax + by + cz$, où a, b et c sont des réels.

a) $\dfrac{x-y+z}{3} + \dfrac{1}{4}x - 2y$ ....

b) $\dfrac{1}{2}(x-3y-z) - \dfrac{x-y-z}{4}$ ....

c) $\dfrac{3x+2y-z}{5} + \dfrac{x+y-2z}{3}$ ....

d) $x - \dfrac{x+y}{2} - \dfrac{1}{3}(y-x+z)$ ....

Calcul 1.2

Développer et ordonner selon les puissances de x.

a) $(x-1)(x+1) + x(x-2)(2x-1)$ ....

b) $\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{3}\right)^2 + \dfrac{x+x^2}{2}$ ....

c) $(x-1)(x-2)(x-3) - x^3$ ....

d) $x^2 - \left(2x - \dfrac{1}{4}\right)^2$ ....

Dérivées de fonctions composées

Calcul 1.3 — Puissances (I).

Déterminer l'expression de la dérivée de f, définie par les expressions suivantes.

a) $f(x) = (2x-1)^3$ ....

b) $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{3}-2\right)^4$ ....

c) $f(x) = (1-x)^5$ ....

d) $f(x) = \dfrac{1}{(1-2x)^3}$ ....

Calcul 1.4 — Puissances (II).

Déterminer l'expression de la dérivée de f, définie par les expressions suivantes.

a) $f(x) = \sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2}x)^6$ ....

b) $f(x) = \sqrt{3}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\sqrt{6}x\right)^3$ ....

c) $f(x) = -\dfrac{1}{\left(3-\frac{x}{2}\right)^3}$ ....

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{(\sqrt{2}-\sqrt{3}x)^2}$ ....

Calcul 1.5 — Produits de puissances (I).

Déterminer l'expression de la dérivée de f, définie par les expressions suivantes.

a) $f(x) = (1-2x)^2\left(1-\dfrac{x}{2}\right)^2$ ....

b) $f(x) = (2x-1)^2(3x+2)^4$ ....

Calcul 1.6 — Produits de puissances (II).

Déterminer l'expression de la dérivée de f, définie par les expressions suivantes.

a) $f(x) = (x-\sqrt{2})^4(2x+\sqrt{2})^2$ ....

b) $f(x) = \left(2x-\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{x}{3}+2\right)^2$ ....

Calcul 1.7 — Quotients (I).

Déterminer l'expression de la dérivée de f, définie par les expressions suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{2x-1}{1-3x}$ .....

b) $f(x) = \dfrac{(1-x)^3}{(2x+1)^2}$ ..

Calcul 1.8 — Quotients (II).

Déterminer l'expression de la dérivée de f, définie par les expressions suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{(1-2x)^6}{2(1-x)^2}$ ..

b) $\dfrac{\sqrt{2}(2+\sqrt{2}x)^3}{1-\sqrt{2}x}$ .....

Dérivation à partir de relations fondamentales

Calcul 1.9

On considère une fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et vérifiant, pour tout x réel non nul :

$$f'(x) = \frac{1}{x} + x.$$

On note, si $x \neq -\dfrac{1}{2}$, $g(x) = f(2x+1)$ et, si $x \neq 1$, $h(x) = f(1-x)$.

a) Que vaut $g'(x)$? ...

b) Calculer $g'\left(\dfrac{1}{2}\right)$ ...

c) Que vaut $h'(x)$? ...

d) Calculer $h'(1+\sqrt{2})$

Calcul 1.10

On considère une fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{2x}{3+x^2}.$$

On note, pour tout réel x, $g(x) = f(2x+1)$ et $h(x) = f(1-x)$.

a) Que vaut $g'(x)$? ......

b) Calculer $g'\left(\sqrt{2} - \dfrac{1}{2}\right)$.

c) Que vaut $h'(x)$? ......

d) Calculer $h'(2)$. ....

Calcul 1.11

On considère une fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \sqrt{2x^2+1}.$$

On note, pour tout réel x, $g(x) = f\left(\dfrac{x+1}{3}\right)$ et $h(x) = 2f(2-x)$.

a) Que vaut $g'(x)$? ...

b) Calculer $g'(2)$ .....

c) Que vaut $h'(x)$? ...

d) Calculer $h'(0)$. .....

Équations de tangentes

Calcul 1.12 — Des équations de tangentes.

Pour les fonctions f définies par les expressions suivantes, et pour les réels a suivants, donner une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.

a) $f(x) = 3x^2 - x + 1$ et $a = 1$ ....

b) $f(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$ et $a = 2$ ....

c) $f(x) = \dfrac{2x}{1-x}$ et $a = 2$ ....

d) $f(x) = (x+2)^3 - (1+x)^2$ et $a = -\dfrac{1}{2}$ ....

Calcul 1.13 — Des ordonnées à l'origine.

Pour les fonctions f définies par les expressions suivantes, et pour les réels a suivants, déterminer l'ordonnée à l'origine de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.

a) $f(x) = (x-1)^2 + (1-x)^3$ et $a = 3$ ....

b) $f(x) = \dfrac{(1-2x)}{(2-x)^2}$ et $a = -1$ ....

c) $f(x) = \left(1 - \dfrac{x}{2}\right)^2 (2x+1)^2$ et $a = \dfrac{1}{2}$. ....

d) $f(x) = \dfrac{1}{(3x+1)^2}$ et $a = \dfrac{1}{3}$ ....

Calculs plus avancés

Notation. Si f est une fonction et si a un réel en lequel f est dérivable, on note $\mathsf{T}_{f,a}$ la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.

Calcul 1.14 — Intersection de tangentes.

On définit, pour tout x réel, $f(x) = 2(1-x)^3$ et $g(x) = 3(1-x)^2$. Soit a un réel différent de 0 et 1.

Déterminer l'abscisse du point d'intersection de $\mathsf{T}_{f,a}$ et $\mathsf{T}_{g,a}$ ....

Calcul 1.15 — Tangente passant par un point donné.

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = 3\Big(1 - \frac{x}{2}\Big)^2,$$

pour $x \in \mathbb{R}$.

Dans chacun des cas suivants, trouver les deux valeurs de $a \in \mathbb{R}$ telles que $\mathsf{T}_{f,a}$ passe par ...

a) le point de coordonnées $(0, 0)$ ....

b) le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ....

Calcul 1.16 — Avec un paramètre.

On considère un réel b et, pour x réel, la fonction f définie par, $f(x) = \dfrac{x}{(bx)^2 + 1}$.

a) Pour quelles valeurs de b la tangente $\mathsf{T}_{f,2}$ est-elle horizontale ? ....

b) Soit a un réel non nul.

Pour quelle valeur de b (à exprimer éventuellement en fonction de a) la droite $\mathsf{T}_{f,a}$ passe-t-elle par l'origine ?

....

Réponses mélangées

$\frac{7}{12}x - \frac{7}{3}y + \frac{1}{3}z$ $\quad \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ $\quad \frac{6}{(1-2x)^4}$ $\quad -\frac{1}{(1-3x)^2}$ $\quad y = 5x - 2$ $\quad 5$

$\frac{3}{\sqrt{2}}$ $\quad \frac{6}{(\sqrt{2}-\sqrt{3}x)^3}$ $\quad 4x + \frac{2}{2x+1} + 2$ $\quad \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad \frac{1}{3}$ $\quad y = \frac{11x}{2} - \frac{11}{2}$ $\quad -6$

$6(2x-1)^2$ $\quad \frac{-24}{(6-x)^4}$ $\quad (4x-5)(1-2x)\left(1-\frac{x}{2}\right)$ $\quad -6x^2 + 11x - 6$ $\quad \frac{3x^2}{4} + \frac{x}{6} + \frac{1}{9}$

$x + \frac{1}{x-1} - 1$ $\quad \frac{2x-2}{3+(1-x)^2}$ $\quad \frac{5}{3}(2x+7)\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{x}{3}+2\right)$ $\quad \frac{4a^2+a+1}{6a}$ $\quad \{-1, 2\}$

$4(2x-1)(3x+2)^3(9x-1)$ $\quad \frac{1}{2}$ $\quad \frac{14}{15}x + \frac{11}{15}y - \frac{13}{15}z$ $\quad 12x(x-\sqrt{2})^3(2x+\sqrt{2})$ $\quad 20$

$-9\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{6}x\right)^3$ $\quad \frac{3}{2}$ $\quad \frac{4(2x+1)}{3+(2x+1)^2}$ $\quad \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}y - \frac{1}{4}z$ $\quad \frac{1}{9}\sqrt{2x^2+4x+11}$

$\{-2, 2\}$ $\quad y = 2x - 8$ $\quad -\frac{(2x+7)(1-x)^2}{(2x+1)^3}$ $\quad \frac{1}{2}$ $\quad 2x^3 - 4x^2 + 2x - 1$ $\quad -3x^2 + x - \frac{1}{16}$

$-\frac{2(\sqrt{2}x+2)^2(2\sqrt{2}x-5)}{(1-\sqrt{2}x)^2}$ $\quad \frac{2}{3}\left(\frac{x}{3}-2\right)^3$ $\quad -5(1-x)^4$ $\quad \frac{8\sqrt{2}}{11}$ $\quad -\frac{(1-2x)^5(4x-5)}{(x-1)^3}$

$y = \frac{23x}{4} + 6$ $\quad 0$ $\quad \frac{5}{6}x - \frac{5}{6}y - \frac{1}{3}z$ $\quad 12(\sqrt{3}+\sqrt{2}x)^5$ $\quad -2\sqrt{2x^2-8x+9}$

► Réponses et corrigés page 7

Fiche n° 1. Dérivation III

Réponses

1.1 a) .... $\boxed{\dfrac{7}{12}x-\dfrac{7}{3}y+\dfrac{1}{3}z}$

1.1 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}y-\dfrac{1}{4}z}$

1.1 c) .... $\boxed{\dfrac{14}{15}x+\dfrac{11}{15}y-\dfrac{13}{15}z}$

1.1 d) .... $\boxed{\dfrac{5}{6}x-\dfrac{5}{6}y-\dfrac{1}{3}z}$

1.2 a) .... $\boxed{2x^3-4x^2+2x-1}$

1.2 b) .... $\boxed{\dfrac{3x^2}{4}+\dfrac{x}{6}+\dfrac{1}{9}}$

1.2 c) .... $\boxed{-6x^2+11x-6}$

1.2 d) .... $\boxed{-3x^2+x-\dfrac{1}{16}}$

1.3 a) .... $\boxed{6(2x-1)^2}$

1.3 b) .... $\boxed{\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{x}{3}-2\right)^3}$

1.3 c) .... $\boxed{-5(1-x)^4}$

1.3 d) .... $\boxed{\dfrac{6}{(1-2x)^4}}$

1.4 a) .... $\boxed{12(\sqrt{3}+\sqrt{2}x)^5}$

1.4 b) .... $\boxed{-9\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\sqrt{6}x\right)^3}$

1.4 c) .... $\boxed{\dfrac{-24}{(6-x)^4}}$

1.4 d) .... $\boxed{\dfrac{6}{(\sqrt{2}-\sqrt{3}x)^3}}$

1.5 a) .... $\boxed{(4x-5)(1-2x)\left(1-\dfrac{x}{2}\right)}$

1.5 b) .... $\boxed{4(2x-1)(3x+2)^3(9x-1)}$

1.6 a) .... $\boxed{12x(x-\sqrt{2})^3(2x+\sqrt{2})}$

1.6 b) .... $\boxed{\dfrac{5}{3}(2x+7)\left(2x-\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{x}{3}+2\right)}$

1.7 a) .... $\boxed{-\dfrac{1}{(1-3x)^2}}$

1.7 b) .... $\boxed{-\dfrac{(2x+7)(1-x)^2}{(2x+1)^3}}$

1.8 a) .... $\boxed{-\dfrac{(1-2x)^5(4x-5)}{(x-1)^3}}$

1.8 b) .... $\boxed{-\dfrac{2(\sqrt{2}x+2)^2(2\sqrt{2}x-5)}{(1-\sqrt{2}x)^2}}$

1.9 a) .... $\boxed{4x+\dfrac{2}{2x+1}+2}$

1.9 b) .... $\boxed{5}$

1.9 c) .... $\boxed{x+\dfrac{1}{x-1}-1}$

1.9 d) .... $\boxed{\dfrac{3}{\sqrt{2}}}$

1.10 a) .... $\boxed{\dfrac{4(2x+1)}{3+(2x+1)^2}}$

1.10 b) .... $\boxed{\dfrac{8\sqrt{2}}{11}}$

1.10 c) .... $\boxed{\dfrac{2x-2}{3+(1-x)^2}}$

1.10 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

1.11 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{9}\sqrt{2x^2+4x+11}}$

1.11 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

1.11 c) .... $\boxed{-2\sqrt{2x^2-8x+9}}$

1.11 d) .... $\boxed{-6}$

1.12 a) .... $\boxed{y=5x-2}$

1.12 b) .... $\boxed{y = \frac{11x}{2} - \frac{11}{2}}$

1.12 c) .... $\boxed{y = 2x - 8}$

1.12 d) .... $\boxed{y = \frac{23x}{4} + 6}$

1.13 a) .... $\boxed{20}$

1.13 b) .... $\boxed{\frac{1}{3}}$

1.13 c) .... $\boxed{\frac{3}{2}}$

1.13 d) .... $\boxed{\frac{1}{2}}$

1.14 .... $\boxed{\frac{4a^2 + a + 1}{6a}}$

1.15 a) .... $\boxed{\{-2, 2\}}$

1.15 b) .... $\boxed{\{-1, 2\}}$

1.16 a) .... $\boxed{\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}}$

1.16 b) .... $\boxed{0}$

Corrigés

1.4 c) On calcule

$$f'(x) = -\frac{3}{2\left(3 - \frac{x}{2}\right)^4} = -\frac{24}{16\left(3 - \frac{x}{2}\right)^4} = -\frac{24}{2^4\left(3 - \frac{x}{2}\right)^4} = \frac{-24}{(6 - x)^4}.$$

....

1.5 a) La dérivée de f se calcule comme la dérivée d'un produit. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2 \times 2(1 - 2x)\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \times 2(1 - 2x)^2\left(1 - \frac{x}{2}\right) \\ &= \left(-4\left(1 - \frac{x}{2}\right) - (1 - 2x)\right)(1 - 2x)\left(1 - \frac{x}{2}\right) \\ &= (-4 + 2x - 1 + 2x)(1 - 2x)\left(1 - \frac{x}{2}\right) \\ &= (4x - 5)(1 - 2x)\left(1 - \frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

....

1.5 b) La dérivée de f se calcule comme la dérivée d'un produit. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \times 2(2x - 1)(3x + 2)^4 + 3 \times 4(2x - 1)^2(3x + 2)^3 \\ &= (4(3x + 2) + 12(2x - 1))(2x - 1)(3x + 2)^3 \\ &= (36x - 4)(2x - 1)(3x + 2)^3 \\ &= 4(2x - 1)(3x + 2)^3(9x - 1). \end{aligned}$$

....

1.6 a) La dérivée de f se calcule comme la dérivée d'un produit. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4(x - \sqrt{2})^3(2x + \sqrt{2})^2 + 2 \times 2(x - \sqrt{2})^4(2x + \sqrt{2}) \\ &= \left(8x + 4\sqrt{2} - 4x + 4\sqrt{2}\right)(x - \sqrt{2})^3(2x + \sqrt{2}) \\ &= 12x(x - \sqrt{2})^3(2x + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

....

1.6 b) La dérivée de f se calcule comme la dérivée d'un produit. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \times 3 \times \left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{x}{3} + 2\right)^2 + \frac{1}{3} \times 2 \times \left(2x - \frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{x}{3} + 2\right) \\ &= \left(6\left(\frac{x}{3} + 2\right) + \frac{2}{3}\left(2x - \frac{1}{2}\right)\right)\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{x}{3} + 2\right) \\ &= \left(2x + 12 + \frac{4x}{3} - \frac{1}{3}\right)\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{x}{3} + 2\right) \\ &= \frac{5}{3}(2x + 7)\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{x}{3} + 2\right). \end{aligned}$$

....

1.8 a) Déjà, on écrit que $f(x) = \dfrac{1}{2}(1 - 2x)^6 (1 - x)^{-2}$. Ensuite, on calcule, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \times 6 \times (-2)(1 - 2x)^5 (1 - x)^{-2} + \frac{1}{2} \times (-2) \times (-1)(1 - 2x)^6 (1 - x)^{-3} \\ &= -6(1 - 2x)^5 (1 - x)^{-2} + (1 - 2x)^6 (1 - x)^{-3} \\ &= (1 - 2x)^5 (1 - x)^{-3} (-6(1 - x) + (1 - 2x)) \\ &= (1 - 2x)^5 (1 - x)^{-3} (4x - 5). \end{aligned}$$

....

1.9 a) Soit x un réel non nul tel que $2x + 1$ est non nul. Alors g est dérivable en x et on a

$$g'(x) = 2 \times f'(2x + 1) = 4x + \frac{2}{2x + 1} + 2.$$

....

1.9 c) Soit x un réel tel que $1 - x \neq 0$. Alors h est dérivable en x et on a

$$h'(x) = -f'(1 - x) = x + \frac{1}{x - 1} - 1.$$

....

1.11 a) La dérivée de $x \mapsto f(ax + b)$ est $x \mapsto af'(ax + b)$. On a donc

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{3} f\left(\frac{x + 1}{3}\right) = \frac{1}{3}\sqrt{2\frac{(x + 1)^2}{9} + 1} \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2(x + 1)^2 + 9}{9}} = \frac{1}{9}\sqrt{2(x^2 + 2x + 1) + 9} = \frac{1}{9}\sqrt{2x^2 + 4x + 11}. \end{aligned}$$

....

1.12 a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f'(x) = 6x - 1$.

Une équation de la tangente à la courbe de f en 1 est

$$y = f(1) + f'(1)(x - 1) = 3 + 5(x - 1) = 5x - 2.$$

....

1.13 a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, $f'(x) = 2(x - 1) - 3(1 - x)^2$.

Donc, la tangente au point d'abscisse 3 a pour équation

$$y = f(3) + f'(3)(x - 3) = -4 - 8(x - 3) = -8x + 20.$$

Donc, l'ordonnée à l'origine de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a vaut 20.

....

1.13 c) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ et pour tout x dans $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{x}{2}\right)(2x+1)^2 + 2 \times 2 \times \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 (2x+1) \\ &= \left(-(2x+1) + 4\left(1 - \frac{x}{2}\right)\right)\left(1 - \frac{x}{2}\right)(2x+1) \\ &= (-4x+3)\left(1 - \frac{x}{2}\right)(2x+1). \end{aligned}$$

Ainsi, comme $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$, on en déduit qu'une équation de la tangente au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ est

$$y = \frac{9}{4} + \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}x + \frac{3}{2}.$$

Donc, l'ordonnée à l'origine vaut $\frac{3}{2}$.

1.13 d) Si $x \neq -\frac{1}{3}$, on a $f'(x) = \frac{-6}{(3x+1)^2}$. Donc une équation de la tangente en $\frac{1}{3}$ est

$$y = \frac{1}{8} - \frac{6}{8}\left(x - \frac{1}{3}\right) = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}.$$

Donc, l'ordonnée à l'origine vaut $\frac{1}{2}$.

1.14 On fixe un réel a. Les équations de $\mathsf{T}_{f,a}$ et $\mathsf{T}_{g,a}$ sont

$$\begin{aligned} \mathsf{T}_{f,a} &: y = 2(1-a)^3 - 6(1-a)^2(x-a) \\ \mathsf{T}_{g,a} &: y = 3(1-a)^2 - 6(1-a)(x-a). \end{aligned}$$

Le point de coordonnées (x, y) appartient à $\mathsf{T}_{f,a}$ et à $\mathsf{T}_{g,a}$ si et seulement s'il vérifie l'équation

$$2(1-a)^3 - 6(1-a)^2(x-a) = 3(1-a)^2 - 6(1-a)(x-a).$$

On résout cette équation. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & 2(1-a)^3 - 6(1-a)^2(x-a) = 3(1-a)^2 - 6(1-a)(x-a) \\ \iff & 6(1-a)(x-a) - 6(1-a)^2(x-a) = 3(1-a)^2 - 2(1-a)^3 \\ \iff & 6(1-a)a(x-a) = (1-a)^2(1+2a) \\ \iff & x - a = \frac{(1-a)^2(1+2a)}{6(1-a)a} \qquad \text{(car } a \neq 0 \text{ et } a \neq 1\text{)} \\ \iff & x = a + \frac{(1-a)(1+2a)}{6a} = \frac{4a^2 + a + 1}{6a}. \end{aligned}$$

1.15 a) Soit a un réel. La tangente à la courbe de f au point d'abscisse a a pour équation

$$y = \frac{3}{2}(a-2)x - \frac{3}{4}\left(a^2 - 4\right).$$

Cette tangente passe par $(0, 0)$ si, et seulement si, $0 = -\frac{3}{4}\left(a^2 - 4\right)$, c'est-à-dire si, et seulement si, $a = 2$ ou $a = -2$.

1.15 b) La tangente passe par $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ si, et seulement si,

$$0 = \frac{3}{2}(a-2)\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\left(a^2 - 4\right),$$

c'est-à-dire si, et seulement si, $(a-2) - (a-2)(a+2) = 0$, c'est-à-dire si, et seulement si, $(a-2)(-a-1) = 0$; ou encore si, et seulement si, $a = 2$ ou $a = -1$.

1.16 a) On fixe un réel b. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = \frac{(bx)^2 + 1 - x(2xb^2)}{((bx)^2+1)^2} = \frac{1 - x^2b^2}{((bx)^2+1)^2}.$$

Une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2 est

$$y = \frac{2}{4b^2+1} + \frac{1-4b^2}{((b4)^2+1)^2}(x-2).$$

Cette tangente est horizontale si, et seulement si, $1 - 4b^2 = 0$, c'est-à-dire si, et seulement si, $b = \frac{1}{2}$ ou $b = -\frac{1}{2}$.

1.16 b) On fixe un réel b et un réel a. Une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est

$$y = \frac{a}{a^2b^2+1} + \frac{1-a^2b^2}{(a^2b^2+1)^2}(x-a) = \frac{a}{a^2b^2+1} - a\frac{1-a^2b^2}{(a^2b^2+1)^2} + \frac{1-a^2b^2}{(a^2b^2+1)^2}x.$$

Cette tangente passe par l'origine si, et seulement si,

$$\frac{a}{a^2b^2+1} - a\frac{1-a^2b^2}{(a^2b^2+1)^2} = 0.$$

Or, on a les équivalences

$$\begin{aligned}
\frac{a}{a^2b^2+1} - a\frac{1-a^2b^2}{(a^2b^2+1)^2} = 0 &\iff \frac{1}{a^2b^2+1} - \frac{1-a^2b^2}{(a^2b^2+1)^2} = 0 \\
&\iff \frac{a^2b^2+1-(1-a^2b^2)}{(a^2b^2+1)^2} = 0 \\
&\iff \frac{2a^2b^2}{(a^2b^2+1)^2} = 0 \\
&\iff b = 0.
\end{aligned}$$
