DS 4

Corrigé

Étude d'une suite de racines

Application à l'optimalité d'un contrôle

Partie I – Un contrôle classique

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré n qu'on écrit

$$P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$

où $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $a_k \in \mathbb{C}$.
Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de P.
Montrer que

$$\Big(\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ |a_k| \leqslant 1\Big) \implies |\alpha| < 2.$$

On suppose que $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ |a_k| \leqslant 1$.
On raisonne par l'absurde et on suppose que $|\alpha| \geqslant 2$. On a

$$\alpha^n = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k \alpha^k.$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned}
|\alpha^n| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k \alpha^k\right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\,|\alpha|^k \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |\alpha|^k && \text{car } \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ |a_k| \leqslant 1 \\
&= \frac{|\alpha|^n - 1}{|\alpha| - 1} && (\text{car } |\alpha| \neq 1 \text{ car } |\alpha| \geqslant 2) \\
&\leqslant |\alpha|^n - 1 && \left(\text{car } |\alpha| - 1 \geqslant 1 \text{ donc } \frac{1}{|\alpha| - 1} \leqslant 1\right)
\end{aligned}$$

C'est absurde.

Partie II – Étude d'une fonction auxiliaire

Dans la suite, on considère la fonction

$$f_n : \left\{ \begin{array}{rcl} [1,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^{n+1} - 2t^n + 1. \end{array} \right.$$

2. (a) Étudier le signe de $f_n'(t)$ pour $t \in [1,2]$.

Soit $t \in [1,2]$. On a $f_n'(t) = (n+1)t^n - 2nt^{n-1} = t^{n-1}((n+1)t - 2n)$.
Comme $t \geqslant 0$, on a

$$f_n'(t) \geqslant 0 \iff (n+1)t - 2n \geqslant 0 \iff t \geqslant \frac{2n}{n+1} = 2 - \frac{2}{n+1},$$

avec égalité si et seulement si $t = 2 - \dfrac{2}{n+1}$. D'où le tableau de signes :

t	1		$2 - \frac{2}{n+1}$		2
$f_n'(t)$		$-$	0	$+$	

(b) En déduire la valeur de u_n telle que le tableau de variations de f_n soit

t	1		$2 - u_n$		2
f_n		$\searrow$	$f_n(2-u_n)$	$\nearrow$	

On précisera les valeurs en 1 *et* 2 *mais on ne calculera pas* $f_n(2-u_n)$.

La valeur $\boxed{u_n := \dfrac{2}{n+1}}$ convient. De plus, on a

$$f_n(1) = 0 \qquad \text{et} \qquad f_n(2) = 1.$$

On a alors le tableau de variations

t	1		$2 - \frac{2}{n+1}$		2
f_n	0	$\searrow$	$f_n(2-u_n)$	$\nearrow$	1

(c) En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que f_n s'annule en un unique point sur $]1, 2]$.

Comme f_n est strictement décroissante sur $[0, 2 - u_n]$ et que $f_n(0) = 0$, on a

$$f_n(2 - u_n) < 0.$$

Comme $f_n(1) > 0$, comme f_n est strictement croissante sur $[0, 2 - u_n]$ et qu'elle est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique point dans $[2 - u_n, 1]$ en lequel f_n s'annule.
De plus, f_n ne s'annule pas sur $]0, 2 - u_n]$. Finalement,

$$\boxed{\text{il existe un unique point dans }]0,1] \text{ en lequel } f_n \text{ s'annule.}}$$

3. On note

$$m_n := 1 - \left(2 - \frac{2}{n+1}\right)^n \times \frac{2}{n+1}.$$

(a) Sans justification, donner un équivalent simple de m_n quand $n \to \infty$.

On trouve

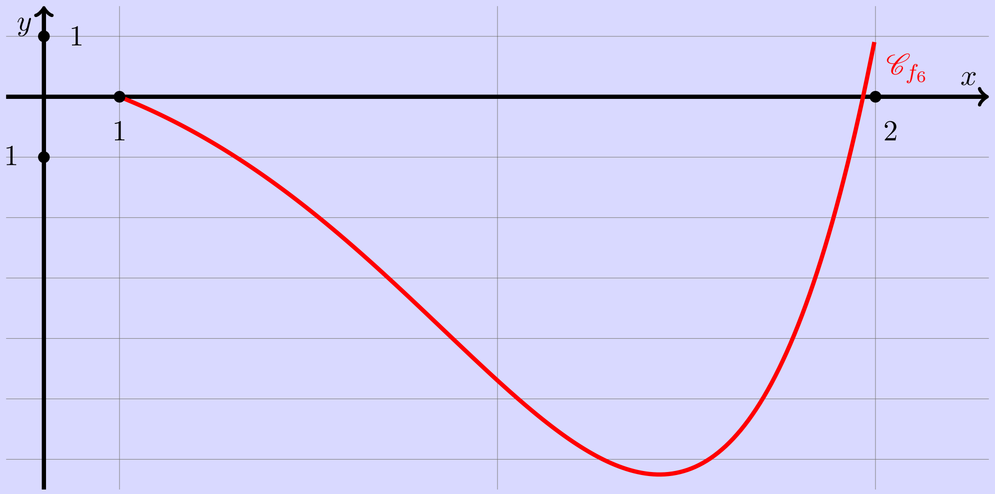
$$\boxed{m_n \sim -\frac{1}{e} \times \frac{2^{n+1}}{n}.}$$

(b) En déduire la limite de la suite $(m_n)_n$.

On a donc $\boxed{m_n \longrightarrow -\infty.}$

4. Dessiner l'allure de $\mathscr{C}_{f_n}$.
On attend un dessin propre, schématique, sur lequel figurent quelques valeurs remarquables.

Voici l'allure du graphe de f_6.



Partie III – Premières propriétés de la suite des racines

5. (a) Soit $t \in]1,2]$. Montrer que

$$P_n(t) = 0 \iff f_n(t) = 0.$$

On calcule, comme $t \neq 1$,

$$\begin{aligned} P_n(t) &= t^n - \sum_{k=0}^{n-1} t^k \\ &= t^n - \frac{t^n - 1}{t-1} \\ &= \frac{t^n(t-1) - t^n + 1}{t-1} \\ &= \frac{t^{n+1} - 2t^n + 1}{t-1} = \frac{f_n(t)}{t-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien

$$\boxed{P_n(t) = 0 \iff f_n(t) = 0.}$$

(b) En déduire que P_n possède une unique racine dans $]1, +\infty[$.

- Comme, d'après la question **2.** (c), f_n possède un unique zéro dans $]1,2]$, on en déduit que P_n possède une unique racine dans $]1,2]$.
- Il nous reste à prouver que $\forall t > 2$, $P_n(t) \neq 0$.
  Cela découle (par exemple) de la question **1.** qui dit que si $|t| \geqslant 2$, alors t ne peut pas être racine de P_n. En effet P_n est bien un polynôme unitaire dont tous les coefficients sont de module au plus 1.

Ainsi,

$$\boxed{P_n \text{ possède une unique racine dans }]1, +\infty[.}$$

Notation

Dans toute la suite du problème, pour tout $n \geqslant 2$, on note x_n cette unique racine.

6. Montrer que $2 - \dfrac{2}{n+1} \leqslant x_n < 2$.

Comme $f\left(2 - \dfrac{2}{n+1}\right) < 0$ et $f_n(2) > 0$, le théorème des valeurs intermédiaires nous assure que l'unique zéro x_n de f_n vérifie nécessairement

$$2 - \frac{2}{n+1} \leqslant x_n < 2.$$

7. (a) Calculer x_2.

Le réel x_2 est racine du polynôme $X^2 - X - 1$ et vérifie $x_2 > 1$. On trouve $\boxed{x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}.}$

(b) Montrer que $x_2 > \dfrac{3}{2}$.

On raisonne par équivalences. On a

$$\begin{aligned} x_2 > \frac{3}{2} &\iff \frac{1+\sqrt{5}}{2} > \frac{3}{2} \\ &\iff 1+\sqrt{5} > 3 \\ &\iff \sqrt{5} > 2 \\ &\iff 5 > 4 && \text{car } (\cdot)^2 \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Donc, comme on a $5 > 4$, on a bien $\boxed{x_2 > \dfrac{3}{2}.}$

8. Montrer que $x_n \longrightarrow 2$.

Comme on a $\forall n \geqslant 2,\ 2 - \dfrac{2}{n+1} \leqslant x_n < 2$ et comme $2 - \dfrac{2}{n+1} \longrightarrow 2$, par encadrement, on en déduit que

$$\boxed{x_n \longrightarrow 2.}$$

Partie IV – Optimalité du contrôle classique

9. Montrer que 2 contrôle les racines de $\mathscr{E}$.

Il s'agit d'une reformulation de la question **1.**.

10. Soit $M \in \mathbb{R}_+$. Montrer que

$$M \text{ contrôle les racines de } \mathscr{E} \implies M \geqslant 2.$$

Soit $M \in \mathbb{R}_+$ tel que M contrôle les racines de $\mathscr{E}$.
Comme $P_n \in \mathscr{E}_n$ et comme $x_n \in \mathsf{Z}_{\mathbb{C}}(P_n)$, on a (par définition de M) $|x_n| \leqslant M$.
En faisant tendre $n \to \infty$, on obtient

$$\boxed{2 \leqslant M.}$$

Partie V – Un premier lemme

11. Montrer que

$$\delta_n \times p_n \longrightarrow \ell \implies (1+\delta_n)^{p_n} \longrightarrow e^{\ell}.$$

Supposons que $\delta_n \times p_n \longrightarrow \ell$. On a

$$(1+\delta_n)^{p_n} = \exp\Big(p_n \ln(1+\delta_n)\Big).$$

De plus, comme $\delta_n \longrightarrow 0$, on a $\ln(1+\delta_n) \sim \delta_n$, d'après le cours. Donc, on a

$$p_n \ln(1+\delta_n) \sim p_n \times \delta_n \quad \text{et donc} \quad p_n \ln(1+\delta_n) \longrightarrow \ell.$$

Comme $\exp(\cdot)$ est continue en ℓ, on a

$$\boxed{(1+\delta_n)^{p_n} = \exp\Big(p_n \ln(1+\delta_n)\Big) \longrightarrow e^{\ell}.}$$

12. Applications.

(a) (i) Soit $n \geqslant 2$. Montrer que $n! \geqslant 3^{n-2}$.

On raisonne par récurrence.

- On pose, pour $n \geqslant 2$, $\mathscr{P}(n)$: « $n! \geqslant 3^{n-2}$ ».
- Déjà, $\mathscr{P}(2)$ est vraie. En effet, on a $2! = 2$ et $3^{2-2} = 1$.
- Montrons que $\forall n \geqslant 2,\ \mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$.
  Soit $n \geqslant 2$ tel que $\mathscr{P}(n)$. On a $n! \geqslant 3^{n-2}$. On a donc $(n+1)! \geqslant 3^{n-2}(n+1)$. Or, comme $n \geqslant 2$, on a $n+1 \geqslant 3$ et donc

  $$(n+1)! \geqslant 3^{n-2}(n+1) \geqslant 3^{n-2} \times 3 = 3^{(n+1)-2}.$$

  Donc, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Ainsi, d'après le principe de récurrence, on a $\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \ n! \geqslant 3^{n-2}.}$

(ii) En déduire que

$$\left(1+\frac{1}{n!}\right)^{2^n} \longrightarrow 1.$$

On a donc

$$0 \leqslant \frac{2^n}{n!} \leqslant \frac{2^n}{3^{n-2}} = \frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^n \longrightarrow 0.$$

Donc, d'après la question **12.**(a)(i), on a

$$\boxed{\left(1+\frac{1}{n!}\right)^{2^n} \longrightarrow e^0 = 1.}$$

(b) Déterminer la limite de la suite de terme général

$$\left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{(n+1)^n}.$$

Déjà, on a

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Comme $\frac{1}{n} \times n \longrightarrow 1$, d'après la question **12.** (a) (i) avec « $p_n = n$ » et « $\delta_n = \frac{1}{n}$ », on a

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e^1 = e.$$

Donc, on a

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} \longrightarrow e.$$

Donc, en réappliquant la question **12.** (a) (i) avec « $p_n = (n+1)^n$ » et « $\delta_n = n^n$ », on obtient

$$\boxed{\left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{(n+1)^n} \longrightarrow e^e.}$$

13. Le premier lemme.

Montrer que

$$\delta_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \implies (1+\delta_n)^n \longrightarrow 1.$$

Supposons que $\delta_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$. On a donc $\delta_n \times n \longrightarrow 0$. Donc, en appliquant la question **12.** (a) (i), on obtient

$$\boxed{(1+\delta_n)^n \longrightarrow e^0 = 1.}$$

Partie VI – Un deuxième lemme

14. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\delta_n \neq 0$ et que $\delta_n = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$.

(a) Montrer que

$$\frac{(1+\delta_n)^n - 1}{n\delta_n} = 1 + \frac{\delta_n}{n} \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \delta_n^{k-2}.$$

D'après la formule du binôme de Newton, on a

$$(1+\delta_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \delta_n^{k-2} = 1 + n\delta_n + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \delta_n^{k}.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\frac{(1+\delta_n)^n - 1}{n\delta_n} &= \frac{n\delta_n + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \delta_n^{k}}{n\delta_n} \\
&= 1 + \frac{1}{n} \times \frac{\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \delta_n^{k}}{\delta_n} \\
&= 1 + \frac{\delta_n}{n} \times \frac{\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \delta_n^{k}}{\delta_n^2} \\
&= 1 + \frac{\delta_n}{n} \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \delta_n^{k-2},
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{ce qu'on voulait démontrer.}}$

(b) Montrer que

$$\left| \frac{\delta_n}{n} \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \delta_n^{k-2} \right| \leqslant \frac{2^n\,|\delta_n|}{n} \ \text{ APCR.}$$

Comme $\delta_n = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$, on a $\delta_n \longrightarrow 0$; et donc on a $|\delta_n| \leqslant 1$ APCR.
Soit donc N_0 tel que pour tout $n \geqslant N_0$, on a $|\delta_n| \leqslant 1$.
Soit $n \geqslant N_0$. On calcule :

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\delta_n}{n} \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \delta_n^{k-2} \right| &\leqslant \frac{|\delta_n|}{n} \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |\delta_n|^{k-2} \\
&\leqslant \frac{|\delta_n|}{n} \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} && \text{(car pour tout } \ell \geqslant 0,\ |\delta_n|^{\ell} \leqslant 1) \\
&\leqslant \frac{|\delta_n|}{n} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}}_{=2^n} = \frac{2^n\,|\delta_n|}{n}.
\end{aligned}$$

Donc, on a

$$\boxed{\left|\frac{\delta_n}{n}\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\delta_n^{k-2}\right| \leqslant \frac{2^n\,|\delta_n|}{n} \quad \text{APCR.}}$$

(c) **Le deuxième lemme.**

En déduire que

$$(1+\delta_n)^n - 1 \sim n\delta_n \text{ quand } n \to \infty.$$

Comme $\delta_n = \mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{2^n}\Big)$, la suite $(2^n\delta_n)_n$ est bornée. Donc, on a

$$\frac{2^n\,|\delta_n|}{n} \longrightarrow 0$$

et donc

$$\frac{\delta_n}{n}\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\delta_n^{k-2} \longrightarrow 0 \qquad \text{quand } n \to \infty.$$

Donc, d'après la question **14.** (a), on a $\dfrac{(1+\delta_n)^n - 1}{n\delta_n} \longrightarrow 1$, *ie* $(1+\delta_n)^n - 1 \sim n\delta_n$, *ie* :

$$(1+\delta_n)^n - 1 = n\delta_n + \mathrm{o}(n\delta_n).$$

Finalement, on a

$$\boxed{(1+\delta_n)^n = 1 + n\delta_n + \mathrm{o}(n\delta_n).}$$

15. Un raffinement.

Montrer que

$$(1+\delta_n)^n = 1 + n\delta_n + \frac{n^2\delta_n^2}{2} + \mathrm{o}\Big(n^2\delta_n^2\Big) \text{ quand } n \to \infty.$$

En utilisant la formule de Newton, de même que dans la question **14.** (a), on a

$$\frac{\Big((1+\delta_n)^n - (1+n\delta_n)\Big) - \frac{n(n+1)}{2}\delta_n^2}{\frac{n(n+1)}{2}\delta_n^2} = 1 + \frac{2\delta_n}{n(n+1)}\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}\delta_n^{k-3}.$$

Or, on a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{2\delta_n}{n(n+1)}\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}\delta_n^{k-3}\right| &\leqslant \frac{2\,|\delta_n|}{n(n+1)}\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k} \qquad \text{APCR} \\
&\leqslant \frac{2\,|\delta_n|}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \\
&= \frac{2\,|\delta_n|\,2^n}{n(n+1)} \longrightarrow 0 \qquad \text{car } \delta_n = \mathrm{O}\Big(\frac{1}{2^n}\Big).
\end{aligned}$$

Donc, on a

$$\Big((1+\delta_n)^n - (1+n\delta_n)\Big) \sim \frac{n(n+1)}{2}\delta_n^2.$$

Or, comme $n = \mathrm{o}\Big(n^2\Big)$, on a $n\delta_n^2 = \mathrm{o}\Big(n^2\delta_n^2\Big)$; et donc

$$\frac{n(n+1)}{2}\delta_n^2 = \frac{n^2\delta_n^2 + n\delta_n^2}{2} \sim \frac{n^2\delta_n^2}{2}.$$

Finalement, on a

$$\Big((1+\delta_n)^n - (1+n\delta_n)\Big) \sim \frac{n^2\delta_n^2}{2}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{(1+\delta_n)^n = 1 + n\delta_n + \frac{n^2\delta_n^2}{2} + \mathrm{o}\Big(n^2\delta_n^2\Big).}$$

Partie VII – Étude de la suite des racines

On rappelle que la suite $(x_n)_n$ introduite dans la partie **III.** *vérifie la relation suivante*

$$\forall n \geqslant 2,\ \ x_n^{n+1} - 2x_n^n + 1 = 0.$$

et qu'on a démontré que $x_n \longrightarrow 2$.

16. (a) Montrer que $f_n(x_{n+1}) > 0$.

Soit $t \in [1,2]$. On a

$$\begin{aligned} f_n(t) &= t^n(t-2)+1 \\ f_{n+1}(t) &= t^{n+1}(t-2)+1. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \frac{f_{n+1}(t)}{t} + 1 - \frac{1}{t} \\ &= \frac{f_{n+1}(t)}{t} + \frac{t-1}{t}. \end{aligned}$$

Donc, on calcule

$$\begin{aligned} f_n(x_{n+1}) &= \frac{f_{n+1}(x_{n+1})}{x_{n+1}} + \frac{x_{n+1}-1}{x_{n+1}} \\ &= \frac{x_{n+1}-1}{x_{n+1}}. \end{aligned}$$

Comme $x_{n+1} > 1$, on obtient $\boxed{f_n(x_{n+1}) > 0.}$

(b) En déduire que $(x_n)_n$ est strictement croissante.

- Déjà, on a vu que $\forall t \in]1, x_n], \; f_n(t) \leqslant 0$.
- Par conséquent, on a $x_{n+1} > x_n$.
- Ainsi, la suite $\boxed{(x_n)_n \text{ est strictement croissante.}}$

17. On considère la suite $(\varepsilon_n)_n$ définie par

$$\forall n \geqslant 2, \;\; x_n = 2 - \varepsilon_n.$$

(a) Montrer que $\varepsilon_n \longrightarrow 0$.

On a montré dans la question **8.** que $x_n \longrightarrow 2$. On a donc $\boxed{\varepsilon_n \longrightarrow 0.}$

(b) Montrer que

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2^n} \frac{1}{\left(1 - \frac{\varepsilon_n}{2}\right)^n}.$$

On réécrit la relation fondamentale de x_n, à savoir

$$\boxed{x_n^n \times (x_n - 2) = -1}$$

en forçant à apparaître ε_n. On obtient

$$(2 - \varepsilon_n)^n \times \varepsilon_n = 1 \quad \text{donc} \quad 2^n \left(1 - \frac{\varepsilon_n}{2^n}\right)^n \varepsilon_n = 1.$$

Donc,

$$\boxed{\varepsilon_n = \frac{1}{2^n} \frac{1}{\left(1 - \frac{\varepsilon_n}{2}\right)^n}.}$$

(c) En déduire que

$$\varepsilon_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n \quad \text{APCR.}$$

Comme $\varepsilon_n \longrightarrow 0$, on a $1 - \dfrac{\varepsilon_n}{2} \longrightarrow 1$. Donc, on a

$$1 - \frac{\varepsilon_n}{2} \geqslant \frac{2}{3} \;\; \text{APCR.}$$

Donc, on a

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{\varepsilon_n}{2}\right)^n} \leqslant \left(\frac{3}{2}\right)^n \;\; \text{APCR.}$$

Donc, on a

$$\boxed{\varepsilon_n = \frac{1}{2^n} \frac{1}{\left(1 - \frac{\varepsilon_n}{2}\right)^n} \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n \text{ APCR.}}$$

(d) En déduire que $\varepsilon_n \sim \dfrac{1}{2^n}$ quand $n \to \infty$.

Comme par ailleurs on a $\forall n \geqslant 2,\ \varepsilon_n > 0$ (puisque $\forall n,\ x_n < 2$), on en déduit que (à partir d'un certain rang) :

$$n\,|\varepsilon_n| = n\varepsilon_n \leqslant n\left(\frac{3}{4}\right)^n \longrightarrow 0.$$

Le premier lemme, de la question **13.**, s'applique donc : on a

$$\left(1 - \frac{\varepsilon_n}{2}\right)^n \longrightarrow e^0 = 1.$$

Par conséquent, on a $\boxed{\varepsilon_n \sim \dfrac{1}{2^n}}$ quand $n \to \infty$.

18. On considère la suite $(\alpha_n)_n$ définie par

$$\forall n \geqslant 2,\ \ x_n = 2 - \frac{1}{2^n} + \alpha_n.$$

(a) (i) Montrer que $2^n\alpha_n = 1 - 2^n\varepsilon_n$.

On a $x_n = 2 - \varepsilon_n = 2 - \dfrac{1}{2^n} + \alpha_n$. Par conséquent, on a

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2^n} - \alpha_n.$$

Donc,

$$2^n\varepsilon_n = 1 - 2^n\alpha_n \quad \text{donc} \quad \boxed{2^n\alpha_n = 1 - 2^n\varepsilon_n.}$$

(ii) En déduire que $\alpha_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$.

Comme $\varepsilon_n \sim \dfrac{1}{2^n}$, on a $1 - 2^n\varepsilon_n \longrightarrow 0$ *ie* on a $2^n\alpha_n \longrightarrow 0$, *ie*

$$\boxed{\alpha_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{2^n}\right).}$$

(b) Montrer que
$$2^n\alpha_n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{\alpha_n}{2}\right)^n=\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{\alpha_n}{2}\right)^n-1.$$

On force à apparaître α_n dans la relation fondamentale de x_n. On a
$$x_n^{n+1}=2x_n^n-1 \qquad ie \qquad \left(2-\frac{1}{2^n}+\alpha_n\right)^{n+1}=2\left(2-\frac{1}{2^n}+\alpha_n\right)^n-1.$$
Donc,
$$2^{n+1}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{\alpha_n}{2}\right)^{n+1}=2^{n+1}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{\alpha_n}{2}\right)^n-1. \tag{$*$}$$
Afin de simplifier les calculs, on pose
$$A(n):=1-\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{\alpha_n}{2}.$$
On a
$$\begin{aligned}2^{n+1}A(n)^{n+1}&=2^{n+1}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{\alpha_n}{2}\right)\times A(n)^n\\&=2^{n+1}A(n)^n-A(n)^n+2^n\alpha_nA(n)^n.\end{aligned}$$
Donc, $(*)$ se réécrit
$$2^{n+1}A(n)^n-A(n)^n+2^n\alpha_nA(n)^n=2^{n+1}A(n)^n-1.$$
Ainsi, on a $2^n\alpha_nA(n)^n=A(n)^n-1$ et donc
$$\boxed{2^n\alpha_n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{\alpha_n}{2}\right)^n=\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{\alpha_n}{2}\right)^n-1.}$$

(c) En déduire que $\alpha_n\sim-\dfrac{n}{2\times 4^n}$.

- Déjà, comme $\alpha_n=\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$, on a
$$-\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{\alpha_n}{2}\sim-\frac{1}{2^{n+1}}=\mathrm{O}\left(\frac{1}{2^n}\right).$$
- Donc, le deuxième lemme, prouvé dans la question **14.** (c), s'applique ; on a
$$\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{\alpha_n}{2}\right)^n-1\sim-\frac{n}{2^{n+1}} \text{ quand } n\to\infty.$$
- En particulier, on a $\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}}+\dfrac{\alpha_n}{2}\right)^n\sim 1$.
- Par conséquent, l'égalité de la question **18.** (b) donne
$$2^n\alpha_n\sim-\frac{n}{2^{n+1}}.$$
- Ainsi, on a $\boxed{\alpha_n\sim-\dfrac{n}{2\times 4^n}.}$

19. Donner le terme suivant du développement asymptotique de x_n.

- Déjà, on considère la suite β_n définie par

$$\forall n \geqslant 2, \quad x_n = 2 - \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2 \times 4^n} + \beta_n.$$

- Par des raisonnements similaires à ceux de la question **18.** (a) (ii), on a

$$\beta_n = \mathrm{o}\left(\frac{n}{4^n}\right).$$

- On écrit

$$x_n = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{n}{4^{n+1}} + \frac{\beta_n}{2}\right).$$

et on pose

$$B(n) := 1 - \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{n}{4^{n+1}} + \frac{\beta_n}{2}.$$

de sorte que $x_n = 2B(n)$.

- Donc, on a

$$\begin{aligned} x_n^n(2 - x_n) &= 2^n B(n)^n \left(\frac{1}{2^n} + \frac{n}{2 \times 4^n} - \beta_n\right) \\ &= B(n)^n + \frac{nB(n)^n}{2^{n+1}} - 2^n B(n)^n \beta_n. \end{aligned}$$

- Ainsi, la relation fondamentale $x_n^n(2 - x_n) = 1$ de x_n s'écrit

$$\boxed{\frac{nB(n)^n}{2^{n+1}} - 2^n B(n)^n \beta_n = 1 - B(n)^n.} \qquad (**)$$

- Maintenant, utilisons le raffinement du deuxième lemme donné dans la question **15.**. On pose

$$\delta_n := -\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{n}{4^{n+1}} + \frac{\beta_n}{2}.$$

On a

$$\begin{aligned} B(n)^n &= (1 + \delta_n)^n \\ &= 1 + n\delta_n + \frac{n^2\delta_n^2}{2} + \mathrm{o}\left(n^2\delta_n^2\right). \end{aligned}$$

Comme $\delta_n \sim -\dfrac{1}{2^{n+1}}$, on peut écrire ce développement asymptotique

$$\boxed{B(n)^n = 1 + n\delta_n + \frac{n^2\delta_n^2}{2} + \mathrm{o}\left(\frac{n^2}{4^n}\right).} \qquad (1)$$

- On a
$$n\delta_n = -\frac{n}{2^{n+1}} - \frac{n^2}{4^{n+1}} + \frac{n\beta_n}{2}.$$
Comme $\beta_n = \mathrm{o}\left(\frac{n}{4^n}\right)$, on a
$$\frac{n\beta_n}{2} = \mathrm{o}\left(\frac{n^2}{4^n}\right).$$
On a donc
$$\boxed{n\delta_n = -\frac{n}{2^{n+1}} - \frac{n^2}{4^{n+1}} + \mathrm{o}\left(\frac{n^2}{4^n}\right).} \tag{2}$$
- Travaillons maintenant sur le terme δ_n^2 : on a $\delta_n \sim -\frac{1}{2^{n+1}}$. Donc, on a
$$\delta_n^2 \sim \frac{1}{4^{n+1}} \quad ie \quad \delta_n^2 = \frac{1}{4^{n+1}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{4^n}\right).$$
Donc, on a
$$\boxed{\frac{n^2\delta_n^2}{2} = \frac{n^2}{2\times 4^{n+1}} + \mathrm{o}\left(\frac{n^2}{4^n}\right).} \tag{3}$$
- Bilan : après simplification, en utilisant (1), (2) et (3), on a
$$\boxed{B(n)^n = 1 - \frac{n}{2^{n+1}} - \frac{n^2}{2\times 4^{n+1}} + \mathrm{o}\left(\frac{n^2}{4^n}\right).}$$
- En particulier, on a
$$\frac{nB(n)^n}{2^{n+1}} = \frac{n}{2^{n+1}} - \frac{n^2}{4^{n+1}} - \frac{n^3}{2\times 8^{n+1}} + \mathrm{o}\left(\frac{n^3}{8^n}\right).$$
Comme $\frac{n^3}{2\times 8^{n+1}} = \mathrm{o}\left(\frac{n^2}{4^n}\right)$, on a donc
$$\boxed{\frac{nB(n)^n}{2^{n+1}} = \frac{n}{2^{n+1}} - \frac{n^2}{4^{n+1}} + \mathrm{o}\left(\frac{n^2}{4^n}\right).}$$
- Or, l'identité $(**)$ est
$$\frac{nB(n)^n}{2^{n+1}} - 2^nB(n)^n\beta_n = 1 - B(n)^n\ ;$$
on a donc
$$\left(\frac{n}{2^{n+1}} - \frac{n^2}{4^{n+1}} + \mathrm{o}\left(\frac{n^2}{4^n}\right)\right) - 2^nB(n)^n\beta_n = \frac{n}{2^{n+1}} + \frac{n^2}{2\times 4^{n+1}} + \mathrm{o}\left(\frac{n^2}{4^n}\right).$$

- Donc, on a
$$-2^n B(n)^n \beta_n = \frac{3n^2}{2 \times 4^{n+1}} + \mathrm{o}\left(\frac{n^2}{4^n}\right)$$
donc
$$-2^n B(n)^n \beta_n \sim \frac{3n^2}{2 \times 4^{n+1}}.$$
Comme $B(n)^n \sim 1$ (d'après le premier lemme) et donc $-2^n B(n)^n \beta_n \sim -2^n \beta_n$, on a donc
$$\boxed{\beta_n \sim -\frac{3n^2}{8^{n+1}}.}$$

- Conclusion : on a donc
$$\boxed{x_n = 2 - \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2 \times 4^n} - \frac{3n^2}{8^{n+1}} + \mathrm{o}\left(\frac{n^2}{8^n}\right).}$$