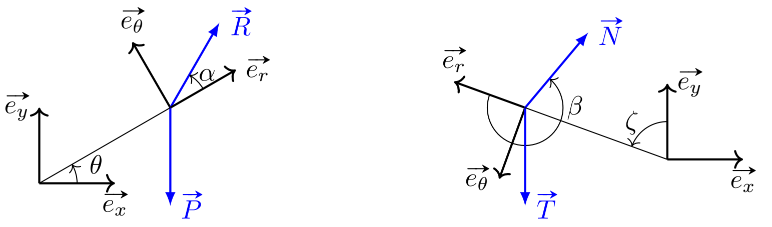
Moment cinétique

Prérequis et constantes utiles
Coordonnées polaires, projections, produit vectoriel, moment d'une force.

Projections préparatoires

Entraînement 1.1 — Calculs de produits scalaires.

On considère les vecteurs suivants où $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{T}$ sont verticaux.



Calculer les produits scalaires en fonction des normes ($\|\overrightarrow{P}\|$, $\|\overrightarrow{T}\|$, etc.) ainsi que des différents angles apparaissant sur les schémas.

a) $\overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{e_\theta}$ ....

b) $\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{e_y}$ ....

c) $\overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{e_y}$ ....

d) $\overrightarrow{T} \cdot \overrightarrow{e_r}$ ....

e) $\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{e_r}$ ....

f) $\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{e_\theta}$ ....

Entraînement 1.2 — Projections dans une base.

En utilisant la formule donnant la décomposition d'un vecteur $\overrightarrow{v}$ dans une base orthonormée $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ sous la forme $\overrightarrow{v} = (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{e_1})\,\overrightarrow{e_1} + (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{e_2})\,\overrightarrow{e_2}$, décomposez les vecteurs présents dans le schéma de l'exercice précédent dans chaque base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$ et $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$.

a) $\overrightarrow{P}$ dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$ ......

b) $\overrightarrow{P}$ dans la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ ......

c) $\overrightarrow{T}$ dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$ ......

d) $\vec{T}$ dans la base $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ ......

e) $\vec{R}$ dans la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$ ......

f) $\vec{R}$ dans la base $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ ......

g) $\vec{N}$ dans la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$ ......

h) $\vec{N}$ dans la base $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ ......

Produit vectoriel

Entraînement 1.3 — Produits vectoriels à partir de décompositions.

En utilisant toujours le schema du premier exercice et les décompositions du deuxième, donner l'expression des produits vectoriels suivants :

a) $\vec{P} \wedge \vec{R}$ ...

b) $\vec{T} \wedge \vec{e_r}$ ...

c) $\vec{e_x} \wedge \vec{N}$ ...

A.N.

Entraînement 1.4 — Produits vectoriels à partir des coordonnées.

On donne les deux vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$ définis de manière numérique :

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{B} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Calculer les produits vectoriels

a) $\vec{A} \wedge \vec{B}$ ....

b) $(\vec{B} + \vec{A}) \wedge \vec{A}$ ....

Moment cinétique

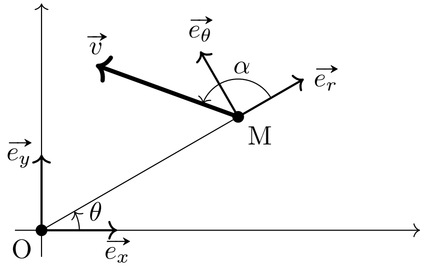
A.N. **Entraînement 1.5 — Bataille de chiffres.**

Parmi les quatre planètes décrites dans le tableau ci-dessous, laquelle a le moment cinétique de rotation autour du Soleil qui est le plus important ?

	Masse	Distance au Soleil	Vitesse sur l'orbite
Mercure	3×10^{26} g	58×10^{9} m	$170 \times 10^{3}\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$
Vénus	5×10^{27} g	$1{,}1 \times 10^{10}$ cm	$35 \times 10^{3}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$
Terre	6×10^{21} t	$150\,000\,000$ km	$30\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$
Mars	6×10^{23} kg	230×10^{6} km	$87 \times 10^{5}\,\mathrm{cm \cdot h^{-1}}$

Entraînement 1.6 — Un moustique allumé.

On considère un moustique M dont le vecteur vitesse de norme v fait un angle $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ avec le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ comme représenté dans le schéma ci-dessous.

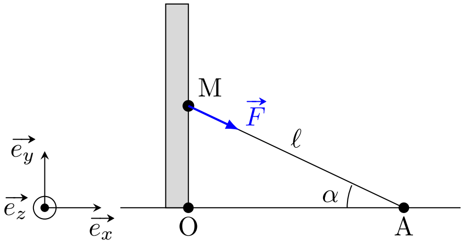


Que vaut le moment cinétique du moustique M par rapport à O ? ....

Moment d'une force

Entraînement 1.7 — Fil accroché au mur.

On considère un mur auquel est accroché un filin duquel on tire depuis un point A. Il s'agit de trouver le moment de la force $\overrightarrow{F}$ par rapport aux axes (Oz) et (Az).

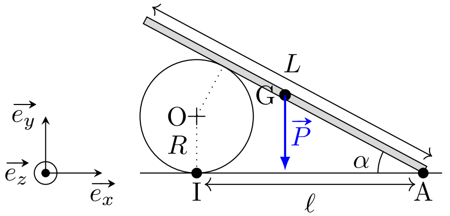


a) $\mathcal{M}_{Oz}(\overrightarrow{F})$ ....

b) $\mathcal{M}_{Az}(\overrightarrow{F})$ ....

Entraînement 1.8 — Planche de cirque.

On considère une planche homogène de masse m appuyée sur un cylindre. Calculons le moment du poids de cette planche par rapport aux divers points intéressant du système.



a) $\overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\overrightarrow{P})$ ..

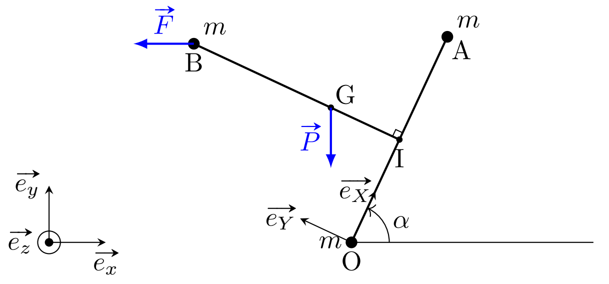
b) $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{P})$ ..

c) $\overrightarrow{\mathcal{M}_I}(\overrightarrow{P})$ ..

Exercice récapitulatif

Entraînement 1.9 — Basculement d'une barre en T.

On considère trois masses m réparties aux trois sommets d'un triangle OAB isocèle en B et reliées par des tiges sans masse de sorte que $\mathrm{OA} = \mathrm{IB} = a$ avec I le milieu du segment [OA]. Le baricentre G des trois masses se situe sur le segment [IB] de sorte que $\mathrm{GB} = \dfrac{2}{3}\,a$. On notera P et F les normes des deux forces représentées sur le schéma.



a) Écrire le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ dans la base $(\overrightarrow{e_X}, \overrightarrow{e_Y})$ ....

b) Écrire le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ dans la base $(\overrightarrow{e_X}, \overrightarrow{e_Y})$ ....

c) Écrire le vecteur $\overrightarrow{P}$ dans la base $(\overrightarrow{e_X}, \overrightarrow{e_Y})$ ....

d) Écrire le vecteur $\overrightarrow{F}$ dans la base $(\overrightarrow{e_X}, \overrightarrow{e_Y})$ ....

e) Calculer $\overrightarrow{\mathcal{M}_{\mathrm{O}}}(\overrightarrow{F})$ ....

f) Calculer $\overrightarrow{\mathcal{M}_{\mathrm{O}}}(\overrightarrow{P})$ ....

g) En supposant qu'il y ait équilibre entre les deux moments, déterminer l'expression $\tan\alpha$ dans ce cas. ....

Réponses mélangées

$\|\vec{P}\|\,\|\vec{R}\|\cos(\theta+\alpha)\,\vec{e_z}$ $\qquad aP\left(-\dfrac{\cos\alpha}{2}+\dfrac{\sin\alpha}{3}\right)\vec{e_z}$ $\qquad \vec{P}=-\|\vec{P}\|\,\vec{e_y}$

$P(-\sin\alpha\,\vec{e_X}-\cos\alpha\,\vec{e_Y})$ $\qquad -\ell F\sin\alpha\cos\alpha$ $\qquad -mg\left(\ell-\dfrac{L}{2}\cos\alpha\right)\vec{e_z}$

$-\|\vec{T}\|\vec{e_y}$ $\qquad F(-\cos\alpha\,\vec{e_X}+\sin\alpha\,\vec{e_Y})$ $\qquad \dfrac{3P-6F}{3F+2P}$ $\qquad 0$

$-mg\left(\ell-\dfrac{L}{2}\cos\alpha\right)\vec{e_z}$ $\qquad -\|\vec{P}\|\,\cos\theta$ $\qquad \|\vec{R}\|\,\sin(\theta+\alpha)$

$aF\left(\dfrac{\sin\alpha}{2}+\cos\alpha\right)\vec{e_z}$ $\qquad -\|\vec{T}\|\,\cos(\zeta)$ $\qquad \begin{pmatrix}-7\\14\\-7\end{pmatrix}$ $\qquad \|\vec{P}\|(-\sin(\theta)\,\vec{e_r}-\cos(\theta)\,\vec{e_\theta})$

$\|\vec{R}\|(\cos(\theta+\alpha)\,\vec{e_x}+\sin(\theta+\alpha)\,\vec{e_y})$ $\qquad \|\vec{N}\|\,\sin(\beta)$ $\qquad \dfrac{a}{2}\,\vec{e_X}+\dfrac{a}{3}\,\vec{e_Y}$

$\dfrac{mgL}{2}\,\cos\alpha\,\vec{e_z}$ $\qquad \|\vec{N}\|(-\sin(\beta+\zeta)\,\vec{e_x}+\cos(\zeta+\beta)\,\vec{e_y})$ $\qquad \|\vec{N}\|\cos(\zeta+\beta)\,\vec{e_z}$

La Terre $\qquad \vec{T}=\|\vec{T}\|(-\cos(\zeta)\,\vec{e_r}+\sin(\zeta)\,\vec{e_\theta})$ $\qquad \|\vec{N}\|\,\cos(\beta)$

$\dfrac{a}{2}\,\vec{e_X}+a\,\vec{e_Y}$ $\qquad m\,r\,v\sin(\alpha)\,\vec{e_z}$ $\qquad \|\vec{R}\|(\cos(\alpha)\,\vec{e_r}+\sin(\alpha)\,\vec{e_\theta})$

$\|\vec{N}\|\,\cos(\zeta+\beta)$ $\qquad \begin{pmatrix}7\\-14\\7\end{pmatrix}$ $\qquad \|\vec{N}\|(\cos(\beta)\,\vec{e_r}+\sin(\beta)\,\vec{e_\theta})$ $\qquad -\|\vec{T}\|\sin(\zeta)\,\vec{e_z}$

► Réponses et corrigés page 7

Fiche n° 1. Moment cinétique

Réponses

1.1 a) .... $\boxed{-\|\overrightarrow{P}\|\ \cos\theta}$

1.1 b) .... $\boxed{\|\overrightarrow{N}\|\ \cos(\zeta+\beta)}$

1.1 c) .... $\boxed{\|\overrightarrow{R}\|\ \sin(\theta+\alpha)}$

1.1 d) .... $\boxed{-\|\overrightarrow{T}\|\ \cos(\zeta)}$

1.1 e) .... $\boxed{\|\overrightarrow{N}\|\ \cos(\beta)}$

1.1 f) .... $\boxed{\|\overrightarrow{N}\|\ \sin(\beta)}$

1.2 a) .... $\boxed{\overrightarrow{P}=-\|\overrightarrow{P}\|\,\overrightarrow{e_y}}$

1.2 b) .... $\boxed{\|\overrightarrow{P}\|(-\sin(\theta)\,\overrightarrow{e_r}-\cos(\theta)\,\overrightarrow{e_\theta})}$

1.2 c) .... $\boxed{-\|\overrightarrow{T}\|\overrightarrow{e_y}}$

1.2 d) .. $\boxed{\overrightarrow{T}=\|\overrightarrow{T}\|(-\cos(\zeta)\,\overrightarrow{e_r}+\sin(\zeta)\,\overrightarrow{e_\theta})}$

1.2 e) . $\boxed{\|\overrightarrow{R}\|(\cos(\theta+\alpha)\,\overrightarrow{e_x}+\sin(\theta+\alpha)\,\overrightarrow{e_y})}$

1.2 f) .... $\boxed{\|\overrightarrow{R}\|(\cos(\alpha)\,\overrightarrow{e_r}+\sin(\alpha)\,\overrightarrow{e_\theta})}$

1.2 g) ....
$\boxed{\|\overrightarrow{N}\|(-\sin(\beta+\zeta)\,\overrightarrow{e_x}+\cos(\zeta+\beta)\,\overrightarrow{e_y})}$

1.2 h) .... $\boxed{\|\overrightarrow{N}\|(\cos(\beta)\,\overrightarrow{e_r}+\sin(\beta)\,\overrightarrow{e_\theta})}$

1.3 a) .... $\boxed{\|\overrightarrow{P}\|\ \|\overrightarrow{R}\|\cos(\theta+\alpha)\,\overrightarrow{e_z}}$

1.3 b) .... $\boxed{-\|\overrightarrow{T}\|\sin(\zeta)\,\overrightarrow{e_z}}$

1.3 c) .... $\boxed{\|\overrightarrow{N}\|\cos(\zeta+\beta)\,\overrightarrow{e_z}}$

1.4 a) .... $\boxed{\begin{pmatrix}-7\\14\\-7\end{pmatrix}}$

1.4 b) .... $\boxed{\begin{pmatrix}7\\-14\\7\end{pmatrix}}$

1.5 .... $\boxed{\text{La Terre}}$

1.6 .... $\boxed{m\,r\,v\sin(\alpha)\,\overrightarrow{e_z}}$

1.7 a) .... $\boxed{-\ell F\sin\alpha\cos\alpha}$

1.7 b) .... $\boxed{0}$

1.8 a) .... $\boxed{\dfrac{mgL}{2}\ \cos\alpha\,\overrightarrow{e_z}}$

1.8 b) .... $\boxed{-mg\left(\ell-\dfrac{L}{2}\cos\alpha\right)\overrightarrow{e_z}}$

1.8 c) .... $\boxed{-mg\left(\ell-\dfrac{L}{2}\cos\alpha\right)\overrightarrow{e_z}}$

1.9 a) .... $\boxed{\dfrac{a}{2}\,\overrightarrow{e_X}+a\,\overrightarrow{e_Y}}$

1.9 b) .... $\boxed{\dfrac{a}{2}\,\overrightarrow{e_X}+\dfrac{a}{3}\,\overrightarrow{e_Y}}$

1.9 c) .... $\boxed{P(-\sin\alpha\,\overrightarrow{e_X}-\cos\alpha\,\overrightarrow{e_Y})}$

1.9 d) .... $\boxed{F(-\cos\alpha\,\overrightarrow{e_X}+\sin\alpha\,\overrightarrow{e_Y})}$

1.9 e) .... $\boxed{aF\left(\dfrac{\sin\alpha}{2}+\cos\alpha\right)\overrightarrow{e_z}}$

1.9 f) .... $\boxed{aP\left(-\dfrac{\cos\alpha}{2}+\dfrac{\sin\alpha}{3}\right)\overrightarrow{e_z}}$

1.9 g) .... $\boxed{\dfrac{3P-6F}{3F+2P}}$

Corrigés

1.1 a) $\vec{P} \cdot \vec{e_\theta} = \|\vec{P}\| \times \|\vec{e_\theta}\| \times \cos(\pi + \theta) = -\|\vec{P}\| \cos\theta$

....

1.1 c) $\vec{R} \cdot \vec{e_y} = \|\vec{R}\| \times \|\vec{e_y}\| \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\theta + \alpha)\right) = \|\vec{R}\| \sin(\theta + \alpha)$

....

1.1 d) $\vec{T} \cdot \vec{e_r} = \|\vec{T}\| \times \|\vec{e_r}\| \times \cos(\pi + \zeta) = -\|\vec{T}\| \cos(\zeta)$

....

1.1 f) $\vec{N} \cdot \vec{e_\theta} = \|\vec{N}\| \times \|\vec{e_\theta}\| \times \cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) = \|\vec{N}\| \sin(\beta)$

....

1.3 a) $\vec{P} \wedge \vec{R} = -\|\vec{P}\|\, \vec{e_y} \wedge \|\vec{R}\|(\cos(\theta+\alpha)\, \vec{e_x} + \sin(\theta+\alpha)\, \vec{e_y}) = -\|\vec{P}\|\, \|\vec{R}\| \cos(\theta+\alpha)\, \vec{e_y} \wedge \vec{e_x} + \vec{0}$

....

1.3 b) $\vec{T} \wedge \vec{e_r} = \|\vec{T}\|(-\cos(\zeta)\, \vec{e_r} + \sin(\zeta)\, \vec{e_\theta}) \wedge \vec{e_r} = \|\vec{T}\| \sin(\zeta)\, \vec{e_\theta} \wedge \vec{e_r} = -\|\vec{T}\| \sin(\zeta)\, \vec{e_z}$

....

1.3 c) $\vec{e_x} \wedge \vec{N} = \vec{e_x} \wedge \|\vec{N}\|(-\sin(\beta+\zeta)\, \vec{e_x} + \cos(\zeta+\beta)\, \vec{e_y}) = \|\vec{N}\| \cos(\zeta+\beta)\, \vec{e_x} \wedge \vec{e_y}$

....

1.4 a) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}6\\5\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\times 4 - 3\times 5\\3\times 6 - 1\times 4\\1\times 5 - 2\times 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\14\\-7\end{pmatrix}$

....

1.4 b) $\left[\begin{pmatrix}6\\5\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right] \wedge \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\7\\7\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\times 3 - 7\times 2\\7\times 1 - 7\times 3\\7\times 2 - 7\times 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\-14\\7\end{pmatrix}$

On aurait aussi pu voir que comme $\vec{A} \wedge \vec{A} = \vec{0}$, cela revient à $\vec{B} \wedge \vec{A} = -\vec{A} \wedge \vec{B}$.

....

1.5 Commençons par tout remettre dans les bonnes unités pour pouvoir calculer le produit $m \times r \times v$ qui correspond au moment cinétique puisque le rayon vecteur est bien perpendiculaire à la vitesse pour une orbite circulaire.

	Masse en kg	Distance en m	Vitesse en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$	Moment cinétique en $\mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}}$
Mercure	3×10^{23}	6×10^{10}	5×10^4	$3 \times 6 \times 5 \times 10^{37} = 9 \times 10^{38}$
Vénus	5×10^{24}	$1{,}1 \times 10^{11}$	$3{,}5 \times 10^4$	$5 \times 1{,}1 \times 10^{39} \times \frac{7}{2} \approx 2 \times 10^{40}$
Terre	6×10^{24}	$1{,}5 \times 10^{11}$	3×10^4	$6 \times \frac{3}{2} \times 3 \times 10^{39} = 2{,}7 \times 10^{40}$
Mars	6×10^{23}	$2{,}3 \times 10^{11}$	$2{,}4 \times 10^4$	$\leqslant 6 \times 10^{38} \times \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} \approx 3{,}7 \times 10^{39}$

C'est bien la Terre qui gagne finalement le concours du plus grand moment cinétique.

....

1.6 Le vecteur vitesse s'écrit dans la base $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ comme $\vec{v} = v(\cos\alpha\, \vec{e_r} + \sin\alpha\, \vec{e_\theta})$. Le produit vectoriel avec $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ s'écrit alors

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge m\overrightarrow{v} = r\,\overrightarrow{e_r} \wedge m\,v(\cos\alpha\,\overrightarrow{e_r} + \sin\alpha\,\overrightarrow{e_\theta}) = m\,r\,v\sin\alpha\,\overrightarrow{e_r} \wedge \overrightarrow{e_\theta}$$

....

1.7 a) D'une part, on commence par déterminer l'expression du vecteur $\overrightarrow{F}$ dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$. On a ici en notant F la norme du vecteur : $\overrightarrow{F} = F(\cos\alpha\,\overrightarrow{e_x} - \sin\alpha\,\overrightarrow{e_y})$. D'autre part, en notant M le point d'action de $\overrightarrow{F}$, on a que $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \ell\sin\alpha\,\overrightarrow{e_y}$. On peut alors calculer

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{\mathrm{O}}}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \overrightarrow{F} = \ell\sin\alpha\,\overrightarrow{e_y} \wedge F(\cos\alpha\,\overrightarrow{e_x} - \sin\alpha\,\overrightarrow{e_y}) = \ell F\sin\alpha\cos\alpha\,(-\overrightarrow{e_z})$$

....

1.8 a) Dans cette configuration, le bras de levier vaut $\dfrac{L}{2}\cos\alpha$ et le point fait tourner dans le sens trigonométrique autour de A, de sorte que $\overrightarrow{\mathcal{M}_{\mathrm{A}}}(\overrightarrow{P}) = \dfrac{mgL}{2}\cos\alpha\,\overrightarrow{e_z}$.

....

1.8 b) Cette fois-ci, le poids fait tourner dans le sens horaire autour de O avec un bras de levier complémentaire du précédent de $\ell - \dfrac{L}{2}\cos\alpha$, d'où le résutat.

....

1.8 c) Même chose que précédemment, I et O étant à la verticale l'un de l'autre.

....

1.9 a) On décompose $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OI}} + \overrightarrow{\mathrm{IB}} = \dfrac{a}{2}\,\overrightarrow{e_X} + a\,\overrightarrow{e_Y}$.

....

1.9 b) On décompose $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \overrightarrow{\mathrm{OI}} + \overrightarrow{\mathrm{IG}} = \dfrac{a}{2}\,\overrightarrow{e_X} + \dfrac{a}{3}\,\overrightarrow{e_Y}$.

....

1.9 c) $\overrightarrow{P} = (\overrightarrow{P}\cdot\overrightarrow{e_X})\,\overrightarrow{e_X} + (\overrightarrow{P}\cdot\overrightarrow{e_Y})\,\overrightarrow{e_Y} = P\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)\overrightarrow{e_X} + \cos(\pi + \alpha)\,\overrightarrow{e_Y}\right] = P(-\sin\alpha\,\overrightarrow{e_X} - \cos\alpha\,\overrightarrow{e_Y})$

....

1.9 d) $\overrightarrow{F} = (\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{e_X})\,\overrightarrow{e_X} + (\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{e_Y})\,\overrightarrow{e_Y} = F\left[\cos(\pi + \alpha)\,\overrightarrow{e_X} + \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right)\overrightarrow{e_Y}\right] = F(-\cos\alpha\,\overrightarrow{e_X} + \sin\alpha\,\overrightarrow{e_Y})$

....

1.9 g) Pour qu'il y ait équilibre, la somme des deux moments doit s'annuler. Les deux étant suivant $\overrightarrow{e_z}$, on doit avoir

$$aF\left(\frac{\sin\alpha}{2} + \cos\alpha\right) + aP\left(-\frac{\cos\alpha}{2} + \frac{\sin\alpha}{3}\right) = 0$$

En divisant par $a\cos\alpha$, il vient

$$\frac{F\tan\alpha}{2} + F - \frac{P}{2} + \frac{P\tan\alpha}{3} = 0$$

On obtient donc

$$\tan\alpha = \frac{\frac{P}{2} - F}{\frac{F}{2} + \frac{P}{3}} = \frac{3P - 6F}{3F + 2P}$$

....