Troisième composition de mathématiques

4 heures

- *Tout résultat ou raisonnement doit être clairement justifié, sauf mention du contraire.*
- *La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.*
- *La présentation de la copie sera prise en compte dans l'évaluation :*
  - ▷ *encadrez les résultats principaux ;*
  - ▷ *soulignez les résultats et arguments intermédiaires importants ;*
  - ▷ *soignez votre écriture ;*
  - ▷ *maintenez une marge dans vos copies, aérez vos copies ;*
  - ▷ *enfin, numérotez vos copies.*
- *Les documents, calculatrices et autres appareils électroniques sont interdits.*
- *Si un élève constate ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Contrôle des racines d'un polynôme

Trois contrôles supplémentaires

Notations et but du problème

Dans tout ce problème,

- *on fixe $n \in \mathbb{N}^*$, un entier ;*
- *on fixe $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme complexe, unitaire, de degré n, qu'on écrit*

$$P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0,$$

  où $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $a_k \in \mathbb{C}$;
- *on fixe $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine complexe de P, quelconque.*

Le but de ce problème est de majorer $|\alpha|$ en fonction des coefficients de P.

Les ensembles de parties $\{\mathbf{I}, \mathbf{II}\}$, $\{\mathbf{III}\}$, $\{\mathbf{IV}\}$ et $\{\mathbf{V}, \mathbf{VI}\}$ sont largement indépendants.

Le barème est donné à titre indicatif.

Partie I – Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.
Le but de cette partie est de montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz, à savoir :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \times \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}.$$

1. Soient $A, B, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$(AB + \alpha\beta)^2 \leqslant \left(A^2 + \alpha^2\right)\left(B^2 + \beta^2\right).$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P(n)$ l'assertion

$$\text{« } \forall (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \times \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2} \text{ ».}$$

(a) Montrer que $P(1)$ est vraie.

(b) Montrer que $P(2)$ est vraie.

(c) Montrer, en utilisant $P(2)$, que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(n) \implies P(n+1).$$

(d) Conclure.

Partie II – Un premier contrôle

3. (a) Montrer que

$$|\alpha|^n \leqslant \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2} \times \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} \left(|\alpha|^k\right)^2}.$$

(b) En déduire

$$|\alpha| \leqslant \sqrt{1 + |a_{n-1}|^2 + |a_{n-2}|^2 + \cdots + |a_1|^2 + |a_0|^2}.$$

On pourra raisonner par l'absurde.

Partie III – Un deuxième contrôle

4. (a) Montrer que

$$\forall a > -1,\ \forall \alpha > 1,\ \ (1+a)^\alpha \geqslant 1 + \alpha \times a.$$

(b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $2^n \geqslant n$.

5. On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ C \longmapsto C^{n+1} - 2C + 1. \end{cases}$$

(a) Étudier les variations de f et déterminer le réel $w_n \geqslant 0$ tel que le tableau de variations de f soit

C	0	w_n	$+\infty$
f	$\searrow$	$f(w_n)$	$\nearrow$

(b) Montrer que f est strictement décroissante sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

(c) Soit $C \geqslant 0$. Montrer que

$$f(C) \leqslant 0 \implies C \geqslant \frac{1}{2}.$$

(d) Montrer que

$$\forall C \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}, \quad C \times \frac{C^n - 1}{C - 1} \geqslant 1 \implies C \geqslant \frac{1}{2}.$$

6. On suppose $\alpha \neq 0$. Montrer que

$$1 \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{|a_k|^{\frac{1}{n-k}}}{|\alpha|} \right)^{n-k}.$$

7. Dans cette question, on pose

$$A := \max\Big(|a_{n-1}|\,,\ |a_{n-2}|^{\frac{1}{2}}\,,\ |a_{n-3}|^{\frac{1}{3}}\,,\ \ldots,\ |a_1|^{\frac{1}{n-1}}\,,\ |a_0|^{\frac{1}{n}}\Big).$$

(a) On suppose $\alpha \neq 0$ et on note $C := \dfrac{A}{|\alpha|}$.

(i) Simplifier l'expression $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} C^{n-k}$.

(ii) On suppose que $C \neq 1$. Montrer que $C \times \dfrac{C^n - 1}{C - 1} \geqslant 1$.

On utilisera la question **6.**

(b) Montrer que

$$|\alpha| \leqslant 2 \times \max\Big(|a_{n-1}|\,,\ |a_{n-2}|^{\frac{1}{2}}\,,\ |a_{n-3}|^{\frac{1}{3}}\,,\ \ldots,\ |a_1|^{\frac{1}{n-1}}\,,\ |a_0|^{\frac{1}{n}}\Big).$$

Partie IV – Parties convexes de $\mathbb{C}$

Définitions et notations

- **Segments complexes.**
  Si $a, b \in \mathbb{C}$, on notera

$$\boxed{a, b} := \Big\{ta + (1-t)b \ ;\ t \in [0,1]\Big\}.$$

  ▷ *On a* $\boxed{a, b} \subset \mathbb{C}$.

  ▷ *L'ensemble* $\boxed{a, b}$ *est appelé* segment complexe d'extrémités a et b.

- **Parties convexes de $\mathbb{C}$.**
  Soit $X \subset \mathbb{C}$. On dira que X est une partie convexe de $\mathbb{C}$ *quand*

$$\forall (a, b) \in X^2,\ \boxed{a, b} \subset X.$$

8. Exemples de parties convexes.

(a) Sans justification, donner, en les dessinant, des exemples de parties convexes et des exemples de parties non convexes.

(b) *Dans cette question, on attend des justifications rapides.*

(i) L'ensemble vide est-il une partie convexe de $\mathbb{C}$?

(ii) L'ensemble $\mathbb{C}$ est-il convexe ?

(c) On note $\mathbb{H} := \Big\{z \in \mathbb{C} \ \Big|\ \mathrm{Im}(z) \geqslant 0\Big\}$. Montrer que $\mathbb{H}$ est convexe.

(d) Si $a \in \mathbb{C}$ et si $r > 0$, on note

$$\mathsf{B}(a, r) := \Big\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leqslant r\Big\}.$$

(i) Représenter $\mathsf{B}(i, 1)$.

(ii) Soient $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. Montrer que $\mathsf{B}(a, r)$ est convexe.

9. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$.
On note

$$\Delta^n := \left\{ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in [0,1]^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}.$$

$$\mathscr{H}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i \; ; \; (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Delta^n \right\}.$$

Montrer que $\mathscr{H}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est convexe.

10. Soit X une partie convexe de $\mathbb{C}$, soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in X$.
Montrer que

$$\mathscr{H}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \subset X.$$

Partie V – Théorème de Gauss-Lucas

Notations

- *Dans cette partie, on considère de nouveau notre polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, unitaire, de degré $n \geqslant 1$. On l'écrit*

$$P = \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i).$$

  où $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$ (cette écriture est possible d'après le théorème de d'Alembert-Gauss).
- *Si $Q \in \mathbb{C}[X]$, on désigne par $\mathsf{Z}_{\mathbb{C}}(Q)$ l'ensemble des racines complexes de Q.*

11. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $P(z) \neq 0$.

(a) Montrer que $\forall i \in [\![1, n]\!], \; z - \alpha_i \neq 0$.

(b) Montrer que

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z - \alpha_i}.$$

On pourra commencer par calculer P'.

12. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $P'(z) = 0$ et $P(z) \neq 0$.
Montrer que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|z - \alpha_i|^2} \right) \times z = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|z - \alpha_i|^2} \times \alpha_i \; .$$

On utilisera la question **11.**(b).

13. Théorème de Gauss-Lucas.
En déduire que

$$\mathsf{Z}_{\mathbb{C}}(P') \subset \mathscr{H}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Partie VI – Contrôles

Définition

Soient $Q \in \mathbb{C}[X]$ *et* $M \geqslant 0$.
On dit que M contrôle les racines de Q *quand*

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}, \quad Q(\alpha) = 0 \implies |\alpha| \leqslant M.$$

14. Troisième contrôle.
Soit $M \in \mathbb{R}_+$.

(a) Montrer que

$$M \text{ contrôle les racines de } P \implies M \text{ contrôle les racines de } P'.$$

(b) La réciproque est-elle vraie ?

15. Un contrôle sur le contrôle.
Soit $M \in \mathbb{R}_+$. Montrer que

$$M \text{ contrôle les racines de } P \implies M \geqslant \frac{|a_{n-1}|}{n}.$$

FIN DU SUJET.