Calcul de sommes I

Prérequis

Dans cette fiche, on utilisera la notation suivante : si $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}$, on note

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 1.1 — Quelques simplifications.

Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}$, les nombres suivants.

a) $\sqrt{45} - 7\sqrt{5}$ ....

c) $5 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$ ....

b) $3\sqrt{98} - 5\sqrt{2}$ ....

Calcul 1.2 — Avec la quantité conjuguée.

Écrire sans radical au dénominateur les nombres suivants.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ....

c) $\dfrac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$ ....

b) $\dfrac{2 - \sqrt{6}}{\sqrt{3}}$ ....

d) $\dfrac{\sqrt{2} - 1}{3 - \sqrt{2}}$ ....

Calcul 1.3 — Quelques fractions.

Soit $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 0, 2\}$.

Mettre au même dénominateur les fractions suivantes.

a) $\dfrac{m-1}{m} - \dfrac{1}{m+1}$ ....

b) $\dfrac{m-3}{2m-4} + \dfrac{3}{2m}$ ....

c) $\dfrac{4m}{m^2-1} - \dfrac{m+2}{m(m+1)}$ ....

Premières sommes

Rappel

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on a $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Calcul 1.4 — Sommes d'entiers consécutifs.

Calculer les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} k$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k-1)$ ....

e) $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} k$ ....

Secondes sommes

Rappel

- La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique vaut
$$\frac{\text{nombre de termes} \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}.$$
- La somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q (où $q \neq 1$) vaut
$$\text{premier terme} \times \frac{(1 - q^{\text{nombre de termes}})}{1-q}.$$

Calcul 1.5

Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.

Dans chacun des cas suivants, calculer :

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{15} u_k$, si $u_0 = 2$ et $r = 4$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=5}^{18} u_k$, si $u_0 = -1$ et $r = -3$ ....

Calcul 1.6

Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.

Dans chacun des cas suivants, calculer :

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{8} u_k$, si $u_0 = 2$ et $q = 4$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=5}^{12} u_k$, si $u_0 = -1$ et $q = -3$ ....

Calcul 1.7 — Utilisation du symbole de somme (I).

Écrire à l'aide du symbole $\sum$ les expressions suivantes.

a) $\dfrac{2}{3^2} + \dfrac{2^2}{3^3} + \dfrac{2^3}{3^4} + \cdots + \dfrac{2^{10}}{3^{11}}$ ....

b) $\dfrac{2}{3^2} + \dfrac{1}{3^3} + \dfrac{1}{2 \times 3^4} + \cdots + \dfrac{1}{2^8 \times 3^{11}}$ ....

c) $-1 + 2 - 2^2 + 2^3 - 2^4 + \cdots + 2^{35}$ ....

d) $1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + \cdots + 2^{2n}$ ....

Calcul 1.8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} 2^k$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} 2^k$ ....

e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^k$ ....

f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k$ ....

Calcul 1.9 — Utilisation du symbole de somme (II).

Écrire à l'aide du symbole $\sum$ les expressions suivantes.

a) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$ ....

b) $1 - 2 + 4 + \cdots + (-2)^n$, où $n \in \mathbb{N}$ ....

c) $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{2n+1}$, où $n \in \mathbb{N}$ ....

d) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{15} + \dfrac{8}{75} + \cdots + \dfrac{2^{n+1}}{3 \times 5^n}$, où $n \in \mathbb{N}$ ....

Calcul 1.10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3+2^k)$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2+5\times 3^k)$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2^k+3^k)$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+3^k)$ ....

e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(1-4^k+5k)$ ....

Calcul 1.11

Calculer la somme de tous les entiers impairs compris entre 1 et 2 000 ....

Calculs plus avancés

Calcul 1.12 — Une nouvelle somme.

Pour tout entier naturel n non nul, on note

$$\mathsf{S}_1(n)=\sum_{k=1}^{n}k \quad \text{et} \quad \mathsf{S}_2(n)=\sum_{k=1}^{n}k^2.$$

a) Développer $(k+1)^3$ ....

b) Exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3-\sum_{k=1}^{n}k^3$ en fonction de $\mathsf{S}_1(n)$, $\mathsf{S}_2(n)$ et n ....

c) Remarquer que dans la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3-\sum_{k=1}^{n}k^3$, la majorité des termes se simplifient.
En déduire une expression très simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3-\sum_{k=1}^{n}k^3$ ....

d) Exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2$ en fonction de n ....

Calcul 1.13 — **Même raisonnement.**

Soit $n \in \mathbb{N}$.

À partir du développement de $(k+1)^4$ et en raisonnant de la même manière que dans l'exercice précédent, calculer $\sum_{k=1}^{n} k^3$ ....

Calcul 1.14

Soit $(u_n)_n$ la suite définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = n \times 2^n$.

a) Calculer $u_{k+1} - u_k$, où $k \in \mathbb{N}$ ....

b) En déduire $\sum_{k=0}^{n} (k+2)2^k$ ....

Réponses mélangées

$(n+1)^3 - 1$ $\quad \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{3}$ $\quad 2^{n+1} - 1$ $\quad \frac{n(n+3)}{2}$ $\quad \sum_{k=0}^{9} \frac{2^{1-k}}{3^{k+2}}$ $\quad \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

$2^{n+1}(n+1)$ $\quad \frac{n^2+n-2}{2}$ $\quad 2(2^n - 1) + \frac{3}{2}(3^n - 1)$ $\quad n$ $\quad 2^k(k+2)$

$3\,\mathsf{S}_2(n) + 3\,\mathsf{S}_1(n) + n$ $\quad -398\ 520$ $\quad \frac{7 - 2\sqrt{10}}{3}$ $\quad 512$ $\quad \frac{3m^2 - m + 2}{m(m+1)(m-1)}$

$\frac{m^2 - m - 1}{m(m+1)}$ $\quad n(n+1) + \frac{3}{2}(3^n - 1)$ $\quad 2\sqrt{6}$ $\quad 1\ 000\ 000$ $\quad \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\quad \sum_{k=1}^{10} \frac{2^k}{3^{k+1}}$

$\frac{3n(n+1)}{2}$ $\quad -4\sqrt{5}$ $\quad \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}}{3 \times 5^k}$ $\quad \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \frac{n(n-1)}{2}$ $\quad \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ $\quad 0$

$n + 1 + \frac{1 - 4^{n+1}}{3} + \frac{5n(n+1)}{2}$ $\quad 3n + 2(2^n - 1)$ $\quad \sum_{k=0}^{n} 2^{2k}$ $\quad \frac{m^2 - 6}{2m(m-2)}$ $\quad 16\sqrt{2}$

$2^n(2^{n+1} - 1)$ $\quad \sum_{k=0}^{35} \left(-(-2)^k\right)$ $\quad 2^{n+1} - 2$ $\quad k^3 + 3k^2 + 3k + 1$ $\quad -497$ $\quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$

$2n + 2 + \frac{5}{2}\left(3^{n+1} - 1\right)$ $\quad \frac{3^{n+1} - 1}{2}$ $\quad 174\ 762$ $\quad \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ $\quad \sum_{k=0}^{n} (-2)^k$ $\quad \frac{2\sqrt{2} - 1}{7}$

▶ Réponses et corrigés page 6

Fiche n° 1. Calcul de sommes I

Réponses

1.1 a) .... $\boxed{-4\sqrt{5}}$

1.1 b) .... $\boxed{16\sqrt{2}}$

1.1 c) .... $\boxed{2\sqrt{6}}$

1.2 a) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

1.2 b) .... $\boxed{\dfrac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{3}}$

1.2 c) .... $\boxed{\dfrac{7-2\sqrt{10}}{3}}$

1.2 d) .... $\boxed{\dfrac{2\sqrt{2}-1}{7}}$

1.3 a) .... $\boxed{\dfrac{m^2-m-1}{m(m+1)}}$

1.3 b) .... $\boxed{\dfrac{m^2-6}{2m(m-2)}}$

1.3 c) .... $\boxed{\dfrac{3m^2-m+2}{m(m+1)(m-1)}}$

1.4 a) .... $\boxed{\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}}$

1.4 b) .... $\boxed{\dfrac{n^2+n-2}{2}}$

1.4 c) .... $\boxed{\dfrac{n(n+3)}{2}}$

1.4 d) .... $\boxed{\dfrac{n(n-1)}{2}}$

1.4 e) .... $\boxed{\dfrac{3n(n+1)}{2}}$

1.5 a) .... $\boxed{512}$

1.5 b) .... $\boxed{-497}$

1.6 a) .... $\boxed{174\ 762}$

1.6 b) .... $\boxed{-398\ 520}$

1.7 a) .... $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\frac{2^k}{3^{k+1}}}$

1.7 b) .... $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{9}\frac{2^{1-k}}{3^{k+2}}}$

1.7 c) .... $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{35}\left(-(-2)^k\right)}$

1.7 d) .... $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^{2k}}$

1.8 a) .... $\boxed{n}$

1.8 b) .... $\boxed{2^{n+1}-2}$

1.8 c) .... $\boxed{2^{n+1}-1}$

1.8 d) .... $\boxed{2^n(2^{n+1}-1)}$

1.8 e) .... $\boxed{\dfrac{3^{n+1}-1}{2}}$

1.8 f) .... $\boxed{0}$

1.9 a) .... $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}}$

1.9 b) .... $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-2)^k}$

1.9 c) .... $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}}$

1.9 d) .... $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{k+1}}{3\times 5^k}}$

1.10 a) .... $\boxed{3n+2(2^n-1)}$

1.10 b) .... $\boxed{2n+2+\dfrac{5}{2}(3^{n+1}-1)}$

1.10 c) .... $\boxed{2(2^n-1)+\dfrac{3}{2}(3^n-1)}$

1.10 d) .... $\boxed{n(n+1)+\dfrac{3}{2}(3^n-1)}$

1.10 e) .... $\boxed{n+1+\dfrac{1-4^{n+1}}{3}+\dfrac{5n(n+1)}{2}}$

1.11 .... $\boxed{1\ 000\ 000}$

1.12 a) .... $\boxed{k^3+3k^2+3k+1}$

1.12 b) .... $\boxed{3\,\mathsf{S}_2(n)+3\,\mathsf{S}_1(n)+n}$

1.12 c) .... $\boxed{(n+1)^3-1}$

1.12 d) .... $\boxed{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

1.13 .... $\boxed{\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}}$

1.14 a) .... $\boxed{2^k(k+2)}$

1.14 b) .... $\boxed{2^{n+1}(n+1)}$

Corrigés

1.1 a) On a $\sqrt{45}-7\sqrt{5}=3\sqrt{5}-7\sqrt{5}=-4\sqrt{5}$.

1.2 a) On a $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

1.2 b) On a $\dfrac{2-\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\dfrac{(2-\sqrt{6})\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{18}}{3}=\dfrac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{3}$.

1.2 c) On a $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})}=\dfrac{5-2\sqrt{10}+2}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=\dfrac{7-2\sqrt{10}}{3}$.

1.2 d) On a $\dfrac{\sqrt{2}-1}{3-\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{2}-1)(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}=\dfrac{3\sqrt{2}+2-3-\sqrt{2}}{9-2}=\dfrac{2\sqrt{2}-1}{7}$.

1.4 a) On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}k=\sum_{k=1}^{n}k+n+1=\frac{n(n+1)}{2}+n+1=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2\times(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

1.4 b) On a $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}k=\sum_{k=1}^{n}k-1=\frac{n(n+1)}{2}-1=\frac{n(n+1)-2}{2}$.

1.5 a) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{15}u_k=\frac{16\times(u_0+u_{15})}{2}$. Or $u_{15}=u_0+15r=2+15\times4=62$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{15}u_k=\frac{16\times(2+62)}{2}=512$.

1.5 b) On a $\displaystyle\sum_{k=5}^{18}u_k=\frac{14\times(u_5+u_{18})}{2}=\frac{14\times\big(-16+(-55)\big)}{2}=-497$.

1.6 a) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{8}u_k=\frac{u_0\times(1-q^9)}{1-q}=\frac{2(1-4^9)}{1-4}=174\ 762$.

1.6 b) On a $\displaystyle\sum_{k=5}^{12}u_k=\frac{u_5(1-q^8)}{1-q}$. Or $u_5=-1\times(-3)^5=243$. D'où $\displaystyle\sum_{k=5}^{12}u_k=\frac{243(1-(-3)^8)}{1-(-3)}=-398\ 520$.

1.10 a) On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3+2^k)=\sum_{k=1}^{n}3+\sum_{k=1}^{n}2^k=3\times\sum_{k=1}^{n}1+\frac{2(1-2^n)}{1-2}=3n+2(2^n-1)$.

1.10 b) On a

$$\sum_{k=0}^{n}(2+5\times 3^k) = \sum_{k=0}^{n} 2 + \sum_{k=0}^{n}(5\times 3^k) = 2\sum_{k=0}^{n} 1 + 5\sum_{k=0}^{n} 3^k = 2(n+1) + 5\times\frac{3^0(1-3^{n+1})}{1-3} = 2n+2+\frac{5}{2}(3^{n+1}-1).$$

1.11 Le plus grand entier impair compris entre 1 et 2 000 est 1 999 = 2 × 999 + 1. La somme de tous les entiers impairs compris entre 1 et 2 000 est donc

$$\sum_{k=0}^{999}(2k+1) = 2\times\sum_{k=0}^{999} k + \sum_{k=0}^{999} 1 = 2\times\frac{999\times 1\,000}{2} + 1\,000 = 1\,000\,000.$$

1.12 b) On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\big((k+1)^3-k^3\big) = \sum_{k=1}^{n}(k^3+3k^2+3k+1-k^3) = \sum_{k=1}^{n}(3k^2+3k+1) = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1.$

On a donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - \sum_{k=1}^{n} k^3 = 3\,\mathsf{S}_2(n) + 3\,\mathsf{S}_1(n) + n.$

1.12 c) Après simplification, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - \sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=2}^{n+1} k^3 - \sum_{k=1}^{n} k^3 = (n+1)^3 - 1^3.$

1.12 d) On a donc $(n+1)^3 - 1 = 3\,\mathsf{S}_2(n) + 3\,\mathsf{S}_1(n) + n$. Donc, on a

$$\begin{aligned}\mathsf{S}_2(n) &= \frac{(n+1)^3 - 1 - n - 3\mathsf{S}_1(n)}{3}\\ &= \frac{(n+1)^3 - (n+1) - 3\times\frac{n(n+1)}{2}}{3} = \frac{(n+1)\big((n+1)^2 - 1 - \frac{3}{2}n\big)}{3}\\ &= \frac{(n+1)(n^2+\frac{1}{2}n)}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.\end{aligned}$$

1.13 On a $(k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)^4 = \sum_{k=1}^{n}(k^4+4k^3+6k^2+4k+1)$. Donc,

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^4 - \sum_{k=1}^{n} k^4 = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1.$$

Dans le membre de gauche, on enlève tous les termes qui se simplifient et on obtient alors :

$$(n+1)^4 - 1^4 = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4\times\frac{n(n+1)}{2} + n.$$

D'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}\Big((n+1)^4 - 1 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - n\Big) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, après calcul.

1.14 a) On a $u_{k+1} - u_k = (k+1)\times 2^{k+1} - k\times 2^k = 2^k(2k+2-k) = 2^k(k+2)$.

1.14 b) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+2)2^k = \sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k) = \sum_{k=1}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1} - u_0 = (n+1)2^{n+1} - 0\times 2^0 = 2^{n+1}(n+1).$