Probabilités

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 1.1

Calculer :

a) $0{,}3 \times 0{,}04$ ....

b) $1 - (0{,}07 + 0{,}2)$ ..

c) $\dfrac{21}{40} \times \dfrac{35}{9}$ ....

Calcul 1.2

Calculer :

a) $0{,}3 \times 0{,}6 + 0{,}7 \times 0{,}1$ ....

b) $-2 \times \dfrac{1}{6} + 1{,}5 \times \dfrac{1}{3} + 10 \times \dfrac{1}{2}$ .....

Calcul 1.3

Simplifier les expressions :

a) $p \times 0{,}05 + (1 - p) \times 0{,}6$ ....

b) $-a(1 - a) + (1 - a^2)$ ....

Calculs de probabilités

Calcul 1.4 — Avec un tableau de probabilités.

On donne le tableau de probabilités suivant :

	A	$\overline{A}$
B	0,45	0,15
$\overline{B}$	0,07	0,33

Calculer les probabilités suivantes. On donnera les résultats sous forme décimale.

a) $\mathrm{P}(\overline{A})$ ....

b) $\mathrm{P}(B)$ ....

c) $\mathrm{P}(A \cap B)$ ....

d) $\mathrm{P}(A \cup B)$ ....

e) $\mathrm{P}(\overline{A} \cap \overline{B})$ ....

f) $\mathrm{P}(\overline{A} \cap B)$ ....

Calcul 1.5 — Avec un tableau d'effectifs.

On donne le tableau d'effectifs suivant :

	A	$\overline{A}$	Total
B	125	225	350
$\overline{B}$	100	50	150
Total	225	275	500

Calculer les probabilités suivantes. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

a) $\mathrm{P}(\overline{A})$ ....

b) $\mathrm{P}(B)$ ....

c) $\mathrm{P}(A \cap B)$ ....

d) $\mathrm{P}(A \cup B)$ ....

e) $\mathrm{P}(\overline{A} \cap \overline{B})$ ....

f) $\mathrm{P}(\overline{A} \cap B)$ ....

Calcul 1.6

On considère deux événements A et B tels que $\mathrm{P}(\overline{A}) = 0{,}3$ et $\mathrm{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}15$.

Calculer :

a) $\mathrm{P}(A \cup B)$ ....

b) $\mathrm{P}(A)$ ....

Calcul 1.7 — Avec un tableau dans un cas concret.

On a interrogé 500 personnes sur leurs loisirs. Les choix proposés étaient le ski et la randonnée. Parmi les personnes interrogées, 125 personnes font du ski, un cinquième des skieurs font aussi de la randonnée et 300 personnes n'ont pas d'activité physique.

On note R : « la personne fait de la randonnée » et S : « La personne fait du ski ».

Calculer les probabilités suivantes. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

a) $\mathrm{P}(\overline{R})$ ....

b) La probabilité que la personne fasse du ski et de la randonnée. ....

c) $\mathrm{P}(S \cup R)$ ....

d) $\mathrm{P}(S)$ ....

e) $\mathrm{P}(\overline{S} \cap \overline{R})$ ....

f) $\mathrm{P}_R(S)$ ....

Calcul 1.8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On donne le tableau d'effectifs suivant :

	A	$\overline{A}$
B	n^2	$2n + 2n^2$
$\overline{B}$	n	$n + n^2$

Calculer les probabilités suivantes.

On donnera les résultats sous forme de fractions les plus simples possibles.

a) $\mathrm{P}(\overline{A})$ ....

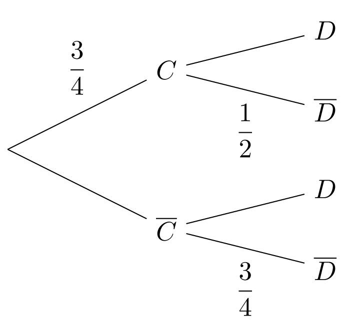
b) $\mathrm{P}(A \cup B)$ ....

c) $\mathrm{P}_A(B)$ ....

d) $\mathrm{P}_B(A)$ ....

Calcul 1.9 — Avec un arbre.

On donne l'arbre pondéré :



Calculer :

a) $\mathrm{P}(\overline{C})$ ....

b) $\mathrm{P}(C \cap \overline{D})$ ....

c) $\mathrm{P}_C(D)$ ....

d) $\mathrm{P}(D)$ ....

e) $\mathrm{P}(\overline{D})$ ....

f) $\mathrm{P}_D(C)$ ....

Calcul 1.10

On donne $\mathrm{P}(A) = 0{,}45$ et $\mathrm{P}_A(B) = 0{,}6$. Calculer :

a) $\mathrm{P}(\overline{A})$ ....

b) $\mathrm{P}(A \cap B)$ ....

Calcul 1.11

On donne $\mathrm{P}(A) = 0{,}05$ ainsi que $\mathrm{P}(B) = 0{,}1$ et $\mathrm{P}_A(B) = 0{,}8$. Calculer :

a) $\mathrm{P}_B(A)$ ....

b) $\mathrm{P}(A \cap B)$ ....

c) $\mathrm{P}(A \cup B)$ ....

Calcul 1.12 — Avec un arbre dans un cas concret.

On a interrogé un grand nombre de personnes sur leurs habitudes musicales. 30% de la population interrogée est composée de mineurs. 20% des mineurs écoutent de la musique sur support physique alors que 55% des majeurs écoutent de la musique en streaming.

On note J : « la personne interrogée est mineure » et S : « la personne écoute de la musique en streaming ». On interroge une personne au hasard.

Calculer les probabilité suivantes ; on donnera les réponses sous forme de fractions irréductibles.

a) La probabilité que la personne soit majeure ....

b) $\mathrm{P}_J(S)$ ....

c) $\mathrm{P}(J \cap S)$. ....

d) La probabilité que la personne interrogée écoute de la musique en streaming .....

e) $\mathrm{P}_S(J)$ ....

Calcul 1.13

On considère A et B deux événements indépendants tels que $\mathrm{P}(A) = 0{,}8$ et $\mathrm{P}(B) = 0{,}2$.

Calculer :

a) $\mathrm{P}(A \cap B)$ ....

b) $\mathrm{P}_A(B)$ ....

c) $\mathrm{P}(A \cup B)$ ....

Calcul 1.14

On considère A et B deux événements indépendants tels que $\mathrm{P}(A) = 0{,}75$ et $\mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}36$.

Calculer :

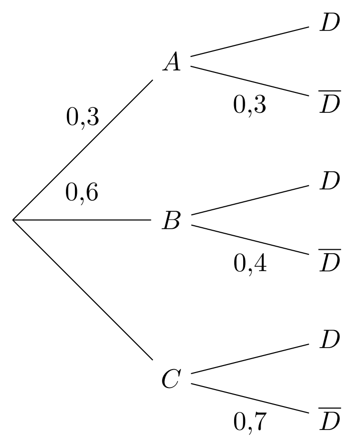
a) $\mathrm{P}(B)$ ....

b) $\mathrm{P}(A \cup B)$ ....

c) $\mathrm{P}(A \cap \overline{B})$ ....

Calcul 1.15

On considère l'arbre pondéré suivant.



Calculer les probabilités suivantes. On donnera les résultats sous forme décimale.

a) $\mathrm{P}(C)$ ....

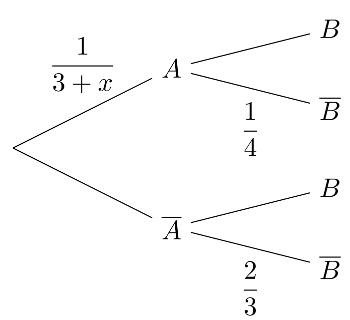
b) $\mathrm{P}_A(D)$ ....

c) $\mathrm{P}(D)$ ....

d) $\mathrm{P}_D(A)$ ....

Calcul 1.16

Soit $x > 0$. On considère l'arbre pondéré :



Calculer :

a) $\mathrm{P}(\overline{A})$ ....

b) $\mathrm{P}(A \cap B)$ ....

c) $\mathrm{P}(B)$ ....

d) $\mathrm{P}_B(A)$ ....

Variables aléatoires

Calcul 1.17 — Une loi de probabilité incomplète.

On donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

x_i	1	2	3	4	5	6
$\mathrm{P}(X = x_i)$	0,1	0,15	0,2	0,01		0,39

Calculer :

a) $\mathrm{P}(X = 5)$ ....

b) $\mathrm{P}(X \leqslant 4)$ ....

Calcul 1.18 — Une loi de probabilité incomplète.

Soit $x \in]0,1[$. On donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.

x_i	1	2	3	4
$\mathrm{P}(X = x_i)$	0,2	x	x^2	0,3

Combien vaut nécessairement x ? ....

Calcul 1.19

On donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

x_i	0	1	2	3
$\mathrm{P}(X = x_i)$	1/10	2/10	3/10	4/10

Calculer, sous forme de fraction irréductible :

a) $\mathrm{E}(X)$ ....

b) $\mathrm{V}(X)$ ....

Calcul 1.20

On donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

x_i	1	2	3	4	5	6
$\mathrm{P}(X \leqslant x_i)$	5/28	1/4	1/2	17/28	23/28	1

Calculer, sous forme de fraction irréductible :

a) $\mathrm{P}(X = 3)$ ....

b) $\mathrm{P}(X = 4)$ ....

Calcul 1.21

On donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

x_i	2	4	8	16	32
$\mathrm{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

Calculer $\mathrm{E}(X)$ ....

Calcul 1.22

On donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

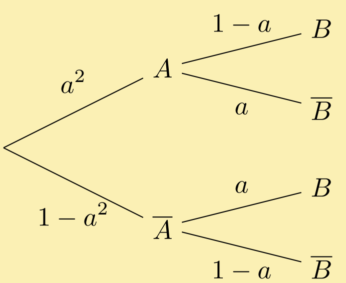
x_i	-2	-1	0	1	5
$\mathrm{P}(X = x_i)$	0,2	0,3	0,2	0,15	0,15

Calculer m pour que $E(X + m) = 0$ ....

Calculs plus avancés

Calcul 1.23 — Avec un arbre.

Soit $a \in\,]0, 1[$. On donne l'arbre pondéré :



Calculer :

a) $\mathrm{P}(B)$ ....

b) $\mathrm{P}_B(A)$ ....

Calcul 1.24

On considère une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \{1, 2, \dots, n\}$ et telle que pour tout entier i de $\{1, 2, \dots, n\}$, on ait $\mathrm{P}(X = i) = \dfrac{1}{n}$.

Calculer :

a) $\mathrm{E}(X)$ ....

b) $\mathrm{V}(X)$ ....

Calcul 1.25

Soit a un réel différent de 1. On considère une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \{1, a, a^2, a^3 \dots, a^n\}$ et telle que pour tout entier i de $\{0, 1, 2, \dots, n\}$, on ait $\mathrm{P}(X = a^i) = \dfrac{1}{n+1}$.

Calculer :

$\mathrm{E}(X)$ ....

Calcul 1.26

Soit $x \in \,]0, 1[$ et soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{1, x\}$. On donne $\mathrm{P}(X = 1) = x$.

Calculer :

a) $\mathrm{E}(X)$ ....

b) $\mathrm{V}(X)$ ....

Réponses mélangées

$\dfrac{7}{10}$ $\dfrac{a}{1+2a}$ 1 $0{,}15$ $\dfrac{1}{4}$ $a(1-a)(1+2a)$ $\dfrac{n+1}{2}$ $\dfrac{6}{25}$ $0{,}15$ $0{,}11$

$\dfrac{1}{2}$ $0{,}48$ $\dfrac{62}{5}$ $0{,}7$ $0{,}7$ $0{,}48$ $0{,}6$ $0{,}1$ $x(1-x)^3$ $0{,}6$ $\dfrac{3}{4}$ $\dfrac{1}{4}$

$0{,}87$ $0{,}27$ $\dfrac{9}{16}$ $0{,}73$ $\dfrac{3}{28}$ $\dfrac{49}{24}$ $\dfrac{n}{3n+2}$ $\dfrac{4}{5}$ $\dfrac{3}{8}$ $0{,}67$ $\dfrac{3}{5}$ $\dfrac{48}{125}$

$\dfrac{(n+1)(n-1)}{12}$ $0{,}33$ $\dfrac{17+4x}{36+12x}$ $0{,}46$ $\dfrac{9}{17+4x}$ $\dfrac{6}{7}$ $0{,}012$ $\dfrac{11}{20}$ $1-a$ $\dfrac{5}{8}$

$\dfrac{1}{4}$ $0{,}39$ $\dfrac{1-a^{n+1}}{(n+1)(1-a)}$ $\dfrac{1}{4}$ $-x^2+2x$ $\dfrac{7}{10}$ $0{,}45$ $\dfrac{9}{10}$ $\dfrac{1}{20}$ $\dfrac{7}{16}$ $0{,}35$

$0{,}6-0{,}55p$ $\dfrac{2}{5}$ 2 $-0{,}2$ $\dfrac{2+x}{3+x}$ $\dfrac{1}{10}$ $0{,}84$ $\dfrac{3}{12+4x}$ $0{,}55$ $\dfrac{n}{n+1}$

$\dfrac{9}{20}$ $0{,}85$ $0{,}16$ $0{,}4$ $0{,}2$ $\dfrac{3}{4}$ $\dfrac{4}{5}$ $\dfrac{1}{4}$ $\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ $\dfrac{31}{6}$ $0{,}25$ $0{,}04$

► Réponses et corrigés page 9

Fiche n° 1. Probabilités

Réponses

1.1 a) .... $\boxed{0{,}012}$

1.1 b) .... $\boxed{0{,}73}$

1.1 c) .... $\boxed{\dfrac{49}{24}}$

1.2 a) .... $\boxed{0{,}25}$

1.2 b) .... $\boxed{\dfrac{31}{6}}$

1.3 a) .... $\boxed{0{,}6 - 0{,}55p}$

1.3 b) .... $\boxed{1 - a}$

1.4 a) .... $\boxed{0{,}48}$

1.4 b) .... $\boxed{0{,}6}$

1.4 c) .... $\boxed{0{,}45}$

1.4 d) .... $\boxed{0{,}67}$

1.4 e) .... $\boxed{0{,}33}$

1.4 f) .... $\boxed{0{,}15}$

1.5 a) .... $\boxed{\dfrac{11}{20}}$

1.5 b) .... $\boxed{\dfrac{7}{10}}$

1.5 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}}$

1.5 d) .... $\boxed{\dfrac{9}{10}}$

1.5 e) .... $\boxed{\dfrac{1}{10}}$

1.5 f) .... $\boxed{\dfrac{9}{20}}$

1.6 a) .... $\boxed{0{,}85}$

1.6 b) .... $\boxed{0{,}7}$

1.7 a) .... $\boxed{\dfrac{4}{5}}$

1.7 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{20}}$

1.7 c) .... $\boxed{\dfrac{2}{5}}$

1.7 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}}$

1.7 e) .... $\boxed{\dfrac{3}{5}}$

1.7 f) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}}$

1.8 a) .... $\boxed{\dfrac{3}{4}}$

1.8 b) .... $\boxed{\dfrac{3}{4}}$

1.8 c) .... $\boxed{\dfrac{n}{n+1}}$

1.8 d) .... $\boxed{\dfrac{n}{3n+2}}$

1.9 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}}$

1.9 b) .... $\boxed{\dfrac{3}{8}}$

1.9 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

1.9 d) .... $\boxed{\dfrac{7}{16}}$

1.9 e) .... $\boxed{\dfrac{9}{16}}$

1.9 f) .... $\boxed{\dfrac{6}{7}}$

1.10 a) .... $\boxed{0{,}55}$

1.10 b) .... $\boxed{0{,}27}$

1.11 a) .... $\boxed{0{,}4}$

1.11 b) .... $\boxed{0{,}04}$

1.11 c) .... $\boxed{0{,}11}$

1.12 a) .... $\boxed{\dfrac{7}{10}}$

1.12 b) .... $\boxed{\dfrac{4}{5}}$

1.12 c) .... $\boxed{\dfrac{6}{25}}$

1.12 d) .... $\boxed{\dfrac{5}{8}}$

1.12 e) .... $\boxed{\dfrac{48}{125}}$

1.13 a) .... $\boxed{0{,}16}$

1.13 b) .... $\boxed{0{,}2}$

1.13 c) .... $\boxed{0{,}84}$

1.14 a) .... $\boxed{0{,}48}$

1.14 b) .... $\boxed{0{,}87}$

1.14 c) .... $\boxed{0{,}39}$

1.15 a) .... $\boxed{0{,}1}$

1.15 b) .... $\boxed{0{,}7}$

1.15 c) .... $\boxed{0{,}6}$

1.15 d) .... $\boxed{0{,}35}$

1.16 a) .... $\boxed{\dfrac{2+x}{3+x}}$

1.16 b) .... $\boxed{\dfrac{3}{12+4x}}$

1.16 c) .... $\boxed{\dfrac{17+4x}{36+12x}}$

1.16 d) .... $\boxed{\dfrac{9}{17+4x}}$

1.17 a) .... $\boxed{0{,}15}$

1.17 b) .... $\boxed{0{,}46}$

1.18 .... $\boxed{\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}}$

1.19 a)..................... $\boxed{2}$

1.19 b)..................... $\boxed{1}$

1.20 a)..................... $\boxed{\dfrac{1}{4}}$

1.20 b)................... $\boxed{\dfrac{3}{28}}$

1.21 .... $\boxed{\dfrac{62}{5}}$

1.22 .... $\boxed{-0{,}2}$

1.23 a)...... $\boxed{a(1-a)(1+2a)}$

1.23 b)............... $\boxed{\dfrac{a}{1+2a}}$

1.24 a)................ $\boxed{\dfrac{n+1}{2}}$

1.24 b)....... $\boxed{\dfrac{(n+1)(n-1)}{12}}$

1.25 .... $\boxed{\dfrac{1-a^{n+1}}{(n+1)(1-a)}}$

1.26 a)............ $\boxed{-x^2+2x}$

1.26 b)............ $\boxed{x(1-x)^3}$

Corrigés

1.1 b) On a $1-(0{,}07+0{,}2)=1-0{,}27=0{,}73$.

1.1 c) On a $\dfrac{21}{40}\times\dfrac{35}{9}=\dfrac{3\times7\times5\times7}{3\times3\times5\times8}=\dfrac{49}{24}$.

1.2 a) On a $0{,}3\times0{,}6+0{,}7\times0{,}1=0{,}18+0{,}07=0{,}25$.

1.2 b) On a $-2\times\dfrac{1}{6}+1{,}5\times\dfrac{1}{3}+10\times\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}+5=\dfrac{3-2+30}{6}=\dfrac{31}{6}$.

1.3 a) On a $p\times0{,}05+(1-p)\times0{,}6=0{,}05p+0{,}6-0{,}6p=0{,}6-0{,}55p$.

1.3 b) On a $-a(1-a)+(1-a^2)=-a+a^2+1-a^2=1-a$.

1.4 a) On a $\mathrm{P}(\overline{A})=0{,}15+0{,}33=0{,}48$.

1.4 b) On a $\mathrm{P}(B)=0{,}45+0{,}15=0{,}6$.

1.4 c) On a $\mathrm{P}(A\cap B)=0{,}45$.

1.4 d) On a $\mathrm{P}(A\cup B)=0{,}45+0{,}07+0{,}15=0{,}67$.

1.5 a) On a $\mathrm{P}(\overline{A})=\dfrac{275}{500}=\dfrac{25\times11}{25\times20}=\dfrac{11}{20}$.

1.5 b) On a $\mathrm{P}(B)=\dfrac{350}{500}=\dfrac{50\times7}{50\times10}=\dfrac{7}{10}$.

1.5 d) On a $\mathrm{P}(A\cup B)=\dfrac{125+225+100}{500}=\dfrac{450}{500}=\dfrac{9}{10}$.

1.5 e) On a $\mathrm{P}(\overline{A}\cap\overline{B})=\dfrac{50}{500}=\dfrac{1}{10}$.

1.5 f) On a $\mathrm{P}(\overline{A} \cap B) = \dfrac{225}{500} = \dfrac{9 \times 25}{20 \times 25} = \dfrac{9}{20}$.

1.6 a) On a $\mathrm{P}(A \cup B) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$.

1.6 b) On a $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$.

1.7 a) L'énoncé permet de remplir le tableau :

	S	$\overline{S}$	Total
R	25	75	100
$\overline{R}$	100	300	400
Total	125	375	500

On obtient donc $\mathrm{P}(\overline{R}) = \dfrac{400}{500} = \dfrac{4}{5}$.

1.7 b) On a $\mathrm{P}(S \cap R) = \dfrac{25}{500} = \dfrac{1}{20}$.

1.7 c) On a $\mathrm{P}(S \cup R) = \dfrac{25 + 75 + 100}{500} = \dfrac{200}{500} = \dfrac{2}{5}$.

1.7 d) On a $\mathrm{P}(S) = \dfrac{125}{500} = \dfrac{1}{4}$.

1.7 e) On a $\mathrm{P}(\overline{S} \cap \overline{R}) = \dfrac{300}{500} = \dfrac{3}{5}$.

1.7 f) On a $\mathrm{P}_R(S) = \dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4}$.

1.8 a) Le total est $n^2+2n+2n^2+n+n+n^2 = 4n^2+4n$, donc on a $\mathrm{P}(\overline{A}) = \dfrac{2n + 2n^2 + n + n^2}{4n^2 + 4n} = \dfrac{3n^2 + 3n}{4n^2 + 4n} = \dfrac{3}{4}$.

1.8 b) On a $\mathrm{P}(A \cup B) = \dfrac{n^2 + 2n + 2n^2 + n}{4n^2 + 4n} = \dfrac{3n^2 + 3n}{4n^2 + 4n} = \dfrac{3}{4}$.

1.8 c) On a $\mathrm{P}_A(B) = \dfrac{n^2}{n^2 + n} = \dfrac{n}{n+1}$.

1.8 d) On a $\mathrm{P}_B(A) = \dfrac{n^2}{3n^2 + 2n} = \dfrac{n}{3n+2}$.

1.9 a) On a $\mathrm{P}(\overline{C}) = 1 - \mathrm{P}(C) = 1 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$.

1.9 b) On a $\mathrm{P}(C \cap \overline{D}) = \mathrm{P}(C) \times \mathrm{P}_C\big(\overline{D}\big) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{8}$.

1.9 c) On a $\mathrm{P}_C(D) = 1 - \mathrm{P}_C\big(\overline{D}\big) = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

1.9 d) Les événements C et $\overline{C}$ forment une partition de l'univers, la formule des probabilités totales donne :

$$\mathrm{P}(D) = \mathrm{P}(C) \times \mathrm{P}_C(D) + \mathrm{P}(\overline{C}) \times \mathrm{P}_{\overline{C}}(D) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{16}.$$

1.9 e) On a $\mathrm{P}(\overline{D}) = 1 - \mathrm{P}(D) = 1 - \dfrac{7}{16} = \dfrac{9}{16}$.

1.9 f) On a $\mathrm{P}_D(C) = \dfrac{\mathrm{P}(D \cap C)}{\mathrm{P}(D)} = \dfrac{\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{7}{16}} = \dfrac{3}{8} \times \dfrac{16}{7} = \dfrac{6}{7}$.

1.10 a) On a $\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A) = 1 - 0{,}45 = 0{,}55$.

1.10 b) On a $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}_A(B) = 0{,}45 \times 0{,}6 = 0{,}27$.

1.11 a) On a $\mathrm{P}_B(A) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \dfrac{\mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}_A(B)}{\mathrm{P}(B)} = \dfrac{0{,}05 \times 0{,}8}{0{,}1} = 0{,}4$.

1.11 b) On a $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}_A(B) = 0{,}05 \times 0{,}8 = 0{,}04$.

1.11 c) On a $\mathrm{P}(\overline{A} \cap B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cup B) = 0{,}05 + 0{,}1 - 0{,}04 = 0{,}11$.

1.12 a) On a $\mathrm{P}(\overline{J}) = 1 - \dfrac{30}{100} = \dfrac{70}{100} = \dfrac{7}{10}$.

1.12 b) On a $\mathrm{P}_J(S) = 1 - \mathrm{P}_J\big(\overline{S}\big) = 1 - \dfrac{20}{100} = \dfrac{80}{100} = \dfrac{4}{5}$.

1.12 c) On a $\mathrm{P}(J \cap S) = \mathrm{P}(J) \times \mathrm{P}_J(S) = \dfrac{3}{10} \times \dfrac{8}{10} = \dfrac{24}{100} = \dfrac{6}{25}$.

1.12 d) Les événements J et $\overline{J}$ forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales, on a $\mathrm{P}(S) = \mathrm{P}(J \cap S) + \mathrm{P}(\overline{J} \cap S) = \dfrac{6}{25} + \dfrac{7}{10} \times \dfrac{55}{100} = \dfrac{6}{25} + \dfrac{77}{200} = \dfrac{48}{200} + \dfrac{77}{200} = \dfrac{125}{200} = \dfrac{5}{8}$.

1.12 e) On a $\mathrm{P}_S(J) = \dfrac{\mathrm{P}(S \cap J)}{\mathrm{P}(S)} = \dfrac{6/25}{5/8} = \dfrac{6}{25} \times \dfrac{8}{5} = \dfrac{48}{125}$.

1.13 a) On a $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B)$ car A et B sont indépendants. On obtient $\mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}8 \times 0{,}2 = 0{,}16$.

1.13 b) Les événements A et B sont indépendants, donc $\mathrm{P}_A(B) = \mathrm{P}(B)$. On obtient $\mathrm{P}_A(B) = 0{,}2$.

1.13 c) On a $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}8 + 0{,}2 - 0{,}16 = 0{,}84$.

1.14 a) On a $\mathrm{P}(B) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)}$ car A et B sont indépendants. On obtient $\mathrm{P}(B) = \dfrac{0{,}36}{0{,}75} = 0{,}48$.

1.14 b) On a $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}75 + 0{,}48 - 0{,}36 = 0{,}87$.

1.14 c) On a $\mathrm{P}(A\cap\overline{B}) = \mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(\overline{B})$ car A et $\overline{B}$ sont indépendants. Comme $\mathrm{P}(\overline{B}) = 1-\mathrm{P}(B) = 1-0{,}48 = 0{,}52$, on obtient $\mathrm{P}(A\cap\overline{B}) = 0{,}52\times 0{,}75 = 0{,}39$.

....

1.15 a) On a $\mathrm{P}(C) = 1-(\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)) = 1-(0{,}3+0{,}6) = 0{,}1$.

....

1.15 b) On a $\mathrm{P}_A(D) = 1-\mathrm{P}_A\big(\overline{D}\big) = 1-0{,}3 = 0{,}7$.

....

1.15 c) Les événements A, B et C forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales, on a donc $\mathrm{P}(D) = \mathrm{P}(A\cap D)+\mathrm{P}(B\cap D)+\mathrm{P}(C\cap D) = \mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}_A(D)+\mathrm{P}(B)\times\mathrm{P}_B(D)+\mathrm{P}(C)\times\mathrm{P}_C(D)$.

D'où $\mathrm{P}(D) = 0{,}3\times 0{,}7+0{,}6\times 0{,}6+0{,}1\times 0{,}3 = 0{,}21+0{,}36+0{,}03 = 0{,}6$.

....

1.15 d) On a $\mathrm{P}_D(A) = \dfrac{\mathrm{P}(A\cap D)}{\mathrm{P}(D)} = \dfrac{0{,}3\times 0{,}7}{0{,}6} = \dfrac{0{,}3\times 0{,}7}{0{,}3\times 2} = 0{,}35$.

....

1.16 a) On a $\mathrm{P}(\overline{A}) = 1-\mathrm{P}(A) = 1-\dfrac{1}{3+x} = \dfrac{2+x}{3+x}$.

....

1.16 b) On a $\mathrm{P}(A\cap B) = \mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}_A(B) = \dfrac{1}{3+x}\times\dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{12+4x}$.

....

1.16 c) Les événements A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales,

$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}_A(B)+\mathrm{P}(\overline{A})\times\mathrm{P}_{\overline{A}}(B) = \dfrac{1}{3+x}\times\dfrac{3}{4}+\dfrac{2+x}{3+x}\times\dfrac{1}{3} = \dfrac{9}{12(3+x)}+\dfrac{4(2+x)}{12(3+x)} = \dfrac{17+4x}{36+12x}$.

....

1.16 d) On a $\mathrm{P}_B(A) = \dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \dfrac{\dfrac{3}{12+4x}}{\dfrac{17+4x}{36+12x}} = \dfrac{3}{12+4x}\times\dfrac{36+12x}{17+4x} = \dfrac{9}{17+4x}$.

....

1.17 a) On a $\mathrm{P}(X=5) = 1-\Big(\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=6)\Big) = 0{,}15$.

....

1.17 b) On a $\mathrm{P}(X\leqslant 4) = 0{,}1+0{,}15+0{,}2+0{,}01 = 0{,}46$.

....

1.18 Le tableau décrit une loi de probabilité si et seulement si $0{,}2+x+x^2+0{,}3 = 1$. On résout $x^2+x-0{,}5 = 0$ de discriminant $\Delta = 1^2-4\times 0{,}5 = 3$, dont les solutions sont $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \in\,]0,1[$.

On a $x_1 < 0$, donc x_1 ne peut représenter une probabilité.

....

1.19 a) On a $\mathrm{E}(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} x_i\times\mathrm{P}(X=x_i) = 0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{2}{10}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{4}{10} = \frac{20}{10} = 2$.

....

1.19 b) On a $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(X)^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} x_i^2\times\mathrm{P}(X=x_i)-2^2$. Donc, on a

$$\mathrm{V}(X) = 0^2\times\frac{1}{10}+1^2\times\frac{2}{10}+2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{4}{10}-2^2 = \frac{50}{10}-4 = 1.$$

....

1.20 a) On a $\mathrm{P}(X=3)=\mathrm{P}(X\leqslant 3)-\mathrm{P}(X\leqslant 2)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}$.

1.20 b) On a $\mathrm{P}(X=4)=\mathrm{P}(X\leqslant 4)-\mathrm{P}(X\leqslant 3)=\dfrac{17}{28}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{28}$.

1.21 On a $\mathrm{E}(X)=\displaystyle\sum_{i=1}^{5}x_i\times\mathrm{P}(X=x_i)=2\times\frac{1}{5}+4\times\frac{1}{5}+8\times\frac{1}{5}+16\times\frac{1}{5}+32\times\frac{1}{5}=\frac{62}{5}$.

1.22 On a $\mathrm{E}(X+m)=\mathrm{E}(X)+m$. Or, on a

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{i=1}^{5}x_i\times\mathrm{P}(X=x_i)=-2\times 0{,}2-1\times 0{,}3+0\times 0{,}2+1\times 0{,}15+5\times 0{,}15=-0{,}7+0{,}9=0{,}2.$$

Donc, on a $\mathrm{E}(X+m)=0\iff 0{,}2+m=0\iff m=-0{,}2$.

1.23 a) Les événements A et $\overline{A}$ forment une partition de Ω. On a donc

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B)&=\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}_A(B)+\mathrm{P}(\overline{A})\times\mathrm{P}_{\overline{A}}(B)\\&=a^2(1-a)+(1-a^2)\times a=(1-a)(a^2+(1+a)a)=a(1-a)(1+2a).\end{aligned}$$

1.23 b) On a $\mathrm{P}_B(A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{a^2(1-a)}{a(1-a)(1+2a)}=\dfrac{a}{1+2a}$.

1.24 a) On a $\mathrm{E}(X)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}i\times\mathrm{P}(X=x_i)=\sum_{i=1}^{n}i\times\frac{1}{n}=\frac{n(n+1)}{2n}=\frac{n+1}{2}$.

1.24 b) On a $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(X)^2=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}i^2\times\frac{1}{n}-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n}-\frac{(n+1)^2}{4}$. Donc, on a

$$\mathrm{V}(X)=\frac{2(n+1)(2n+1)-3(n+1)^2}{12}=\frac{(n+1)(2(2n+1)-3(n+1)}{12}=\frac{(n+1)(n-1)}{12}.$$

1.25 On a

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{i=0}^{n}a^i\times\mathrm{P}(X=a^i)=\sum_{i=0}^{n}a^i\times\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}a^i=\frac{1}{n+1}\times\frac{1-a^{n+1}}{1-a}=\frac{1-a^{n+1}}{(n+1)(1-a)}.$$

1.26 a) On a $\mathrm{E}(X)=1\times\mathrm{P}(X=1)+x\times\mathrm{P}(X=x)=x+x(1-x)=-x^2+2x$.

1.26 b) On a :

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(X)^2\\&=1\times\mathrm{P}(X=1)+x^2\times\mathrm{P}(X=x)-(-x^2+2x)^2\\&=x+x^2(1-x)-(x^4-4x^3+4x^2)\\&=x+x^2-x^3-x^4+4x^3-4x^2=-x^4+3x^3-3x^2+x\\&=x(1-3x+3x^2-x^3)=x(1-x)^3.\end{aligned}$$
