Racines n-ièmes

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 1.1

Exprimer les nombres suivants sous forme de fraction irréductible.

a) $\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{3} - 2$ ....

b) $\dfrac{3}{5} + \dfrac{5}{3}$ ....

c) $\dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{2}$ ....

d) $\dfrac{2 - \frac{1}{2}}{5 - \frac{1}{2}}$ ....

Calcul 1.2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $2x + \pi = \dfrac{3}{5}x - 1$ ....

b) $x^2 + 7x = 44$ ....

c) $x^2 - x + 5 = 4 - 2x$ ....

d) $\dfrac{x+1}{x-2} = x - 1$ ....

Racines n-ièmes de l'unité

Calcul 1.3

On considère le nombre complexe $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$. Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique $x + \mathrm{i}y$ (où x et y sont réels).

a) j^3 ....

b) $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2$ ....

c) $\mathrm{j}(\mathrm{j}+1)$ ....

d) $\dfrac{\mathrm{j}}{\mathrm{j}^2 + 1}$ ....

e) $\overline{\mathrm{j}}$ ....

f) $\dfrac{1+\mathrm{j}}{1-\mathrm{j}}$ ....

Calcul 1.4

On considère un nombre complexe α tel que $\alpha^5 = 1$ et $\alpha \neq 1$.

a) Calculer $\left(\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1\right)(\alpha - 1)$ ....

b) En déduire la valeur de $\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1$ ....

c) Calculer $\alpha(\alpha + 1)\left(\alpha^2 + 1\right)$ ....

d) En déduire la valeur de $\left(\alpha^2 + \alpha + 1\right)\left(\alpha^3 + \alpha + 1\right)\left(\alpha^4 + \alpha + 1\right)\left(\alpha^2 + 1\right)$ ....

Calcul 1.5

On considère un nombre complexe β tel que $\beta^7 = 1$ et $\beta \neq 1$.

a) Calculer $\left(\beta^6 + \beta^5 + \beta^4 + \beta^3 + \beta^2 + \beta + 1\right)(\beta - 1)$ ....

b) En déduire la valeur de $\beta^6 + \beta^5 + \beta^4 + \beta^3 + \beta^2 + \beta + 1$ ....

c) Calculer $\dfrac{\beta}{1 + \beta^2} + \dfrac{\beta^2}{1 + \beta^4} + \dfrac{\beta^3}{1 + \beta^6}$ ....

Calcul 1.6 — Somme et produit des racines n-ièmes de l'unité.

On considère un entier naturel $n \geqslant 2$.

Pour k entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n - 1$, on note $\omega_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$.

a) Calculer $\omega_0 + \omega_1 + \cdots + \omega_{n-1}$ ....

b) Calculer $\omega_0 \times \omega_1 \times \cdots \times \omega_{n-1}$ ....

Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Calcul 1.7 — Racines carrées (I).

Étant donnés deux réels a et b, on cherche les couples de réels (x, y) tels que $z = x + \mathrm{i}y$ vérifie $z^2 = a + \mathrm{i}b$.

On dit alors que z est une racine carrée de $a + ib$.

a) Exprimer a et b en fonction de x et de y. ....

b) Calculer $x^2 + y^2$ en fonction de a et b. *Indication : pensez au module !* ....

c) Déterminer, sous forme algébrique, les racines carrées de $3 + 4\mathrm{i}$ ....

Calcul 1.8 — Racines carrées (II).

Calculer, sous forme algébrique, les racines carrées des nombres complexes suivants.

On procèdera comme dans l'exercice précédent.

a) $1 - 2\sqrt{6}\mathrm{i}$ ....

b) $-\dfrac{99}{4} + 5\mathrm{i}$ ....

Calcul 1.9 — Racines cubiques.

Étant donné un nombre complexe a, on dit qu'un nombre complexe z est une racine cubique de a lorsque $z^3 = a$. Si a est non nul, il admet alors trois racines cubiques distinctes. Dans cet exercice, on cherche z sous sa forme algébrique $z = x + \mathrm{i}y$ (où x et y sont réels).

Calculer, sous forme algébrique, les racines cubiques des nombres complexes suivants.

Indication : Déterminez une racine cubique, puis utilisez les racines cubiques de 1 *pour trouver les autres.*

a) 8 ....

b) i ....

c) $2(1+\mathrm{i})$ ...

Calcul 1.10 — Racines 5-ièmes.

Étant donné un nombre complexe a, on dit qu'un nombre complexe z est une racine 5-ième de a lorsque $z^5 = a$. Si a est non nul, il admet alors cinq racines 5-ièmes distinctes.

Dans cet exercice, on cherche z sous sa forme trigonométrique $z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathsf{Arg}(z)}$ (où $|z|$ et $\mathsf{Arg}(z)$ sont respectivement le module et un argument de z).

Calculer, sous forme trigonométrique, les racines 5-ièmes des nombres complexes suivants.

Indication : Déterminez une racine 5*-ième, puis utilisez les racines* 5*-ièmes de* 1 *pour trouver les autres.*

a) i ....

b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{1}{2}$ ..

c) $1 + \mathrm{i}$ ......

Calculs plus avancés

Calcul 1.11

Calculer, sous forme algébrique, les racines 4-ièmes de $-119 + 120\mathrm{i}$ .....

Calcul 1.12

On considère $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{7}}$, $A = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.

a) Calculer $A + B$ ....

b) Calculer AB ....

c) Sachant que $\mathsf{Im}(A) > 0$, calculer (A, B) ....

Calcul 1.13

Trouver, sous forme algébrique, les solutions complexes des équations suivantes.

a) $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^4 = 1$ ....

b) $(z-2)^4 = (z-3\mathrm{i})^4$ ....

Calcul 1.14

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $(z+2)^8 - 17(z+2)^4(z-1)^4 + 16(z-1)^8 = 0$.

Indication : considérez les solutions de l'équation $X^2 - 17X + 16 = 0$.

....

Réponses mélangées

4 et -11 $\qquad 0 \qquad \sqrt{a^2+b^2} \qquad \left(\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}, \dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}\right) \qquad 2, -1+\mathrm{i}\sqrt{3}, -1-\mathrm{i}\sqrt{3}$

$3+2\mathrm{i}, -2+3\mathrm{i}, -3-2\mathrm{i}, 2-3\mathrm{i} \qquad \left\{-\dfrac{1}{2}, 0, 4, \dfrac{2}{5}+\dfrac{6}{5}\mathrm{i}, \dfrac{2}{5}-\dfrac{6}{5}\mathrm{i}, -\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}, -\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}\right\} \qquad 2 \qquad -1 \qquad \dfrac{61}{30} \qquad \dfrac{34}{15}$

$-\dfrac{5(\pi+1)}{7} \qquad -\mathrm{i}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i} \qquad 2+\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{3} \qquad -1 \qquad \left\{\dfrac{5}{2}+\dfrac{5}{2}\mathrm{i}, 1+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}, -\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right\}$

$0 \qquad \left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi(12k-1)}{30}}, k \in \{0,1,\dots,4\}\right\} \qquad \dfrac{1}{2}+5\mathrm{i}, -\dfrac{1}{2}-5\mathrm{i} \qquad \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3} \qquad 1 \qquad -\dfrac{1}{6} \qquad 0 \qquad 2+\mathrm{i}, -2-\mathrm{i}$

$\varnothing \qquad 0 \qquad -1 \qquad -2 \qquad -1+\mathrm{i}, \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}-\mathrm{i}\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}-\mathrm{i}\dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \qquad 0 \qquad \left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi(5+4k)}{10}}, k \in \{0,1,\dots,4\}\right\}$

$\sqrt{3}-\mathrm{i}\sqrt{2}, -\sqrt{3}+\mathrm{i}\sqrt{2} \qquad \{0, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\} \qquad \left\{\sqrt[10]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi(1+8k)}{20}}, k \in \{0,1,\dots,4\}\right\}$

$-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} \qquad \dfrac{1}{3} \qquad (a,b) = (x^2-y^2, 2xy) \qquad 0 \qquad -1 \qquad (-1)^{n-1} \qquad -1$

► Réponses et corrigés page 5

Fiche n° 1. Racines n-ièmes

Réponses

1.1 a) .... $\boxed{-\dfrac{1}{6}}$

1.1 b) .... $\boxed{\dfrac{34}{15}}$

1.1 c) .... $\boxed{\dfrac{61}{30}}$

1.1 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{3}}$

1.2 a) .... $\boxed{-\dfrac{5(\pi+1)}{7}}$

1.2 b) .... $\boxed{4 \text{ et } -11}$

1.2 c) .... $\boxed{\varnothing}$

1.2 d) .... $\boxed{2+\sqrt{3} \text{ et } 2-\sqrt{3}}$

1.3 a) .... $\boxed{1}$

1.3 b) .... $\boxed{0}$

1.3 c) .... $\boxed{-1}$

1.3 d) .... $\boxed{-1}$

1.3 e) .... $\boxed{-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

1.3 f) .... $\boxed{\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$

1.4 a) .... $\boxed{0}$

1.4 b) .... $\boxed{0}$

1.4 c) .... $\boxed{-1}$

1.4 d) .... $\boxed{-1}$

1.5 a) .... $\boxed{0}$

1.5 b) .... $\boxed{0}$

1.5 c) .... $\boxed{-2}$

1.6 a) .... $\boxed{0}$

1.6 b) .... $\boxed{(-1)^{n-1}}$

1.7 a) .... $\boxed{(a,b)=(x^2-y^2,2xy)}$

1.7 b) .... $\boxed{\sqrt{a^2+b^2}}$

1.7 c) .... $\boxed{2+\mathrm{i}, -2-\mathrm{i}}$

1.8 a) .... $\boxed{\sqrt{3}-\mathrm{i}\sqrt{2}, -\sqrt{3}+\mathrm{i}\sqrt{2}}$

1.8 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}+5\mathrm{i}, -\dfrac{1}{2}-5\mathrm{i}}$

1.9 a) .... $\boxed{2, -1+\mathrm{i}\sqrt{3}, -1-\mathrm{i}\sqrt{3}}$

1.9 b) .... $\boxed{-\mathrm{i}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}}$

1.9 c) .... $\boxed{\begin{array}{l} -1+\mathrm{i}, \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}-\mathrm{i}\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}, \\ \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}-\mathrm{i}\dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \end{array}}$

1.10 a) .... $\boxed{\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi(5+4k)}{10}}, k\in\{0,1,\dots,4\}\right\}}$

1.10 b) .... $\boxed{\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi(12k-1)}{30}}, k\in\{0,1,\dots,4\}\right\}}$

1.10 c) .... $\boxed{\left\{\sqrt[10]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi(1+8k)}{20}}, k\in\{0,1,\dots,4\}\right\}}$

1.11 .... $\boxed{3+2\mathrm{i}, -2+3\mathrm{i}, -3-2\mathrm{i}, 2-3\mathrm{i}}$

1.12 a) .... $\boxed{-1}$

1.12 b) .... $\boxed{2}$

1.12 c) .... $\boxed{\left(\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}, \dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}\right)}$

1.13 a) .... $\boxed{\{0,\mathrm{i},-\mathrm{i}\}}$

1.13 b) .... $\boxed{\left\{\dfrac{5}{2}+\dfrac{5}{2}\mathrm{i}, 1+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}, -\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right\}}$

1.14 .... $\boxed{\begin{array}{l} \left\{-\dfrac{1}{2}, 0, 4, \dfrac{2}{5}+\dfrac{6}{5}\mathrm{i}, \dfrac{2}{5}-\dfrac{6}{5}\mathrm{i}, \right. \\ \left. -\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}, -\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}\right\} \end{array}}$

Corrigés

1.3 a) On a $\mathrm{j}^3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi} = 1$.

....

1.3 b) Puisque $0 = \mathrm{j}^3 - 1 = (\mathrm{j}-1)\big(1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2\big)$ et $\mathrm{j} \neq 1$, on a alors $1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2 = 0$.

....

1.3 e) On a $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

....

1.3 f) On peut observer que $\mathrm{j}^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}-2\pi} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = \bar{\mathrm{j}}$ et $|1-\mathrm{j}|^2 = 3$. Ainsi,

$$\frac{1+\mathrm{j}}{1-\mathrm{j}} = \frac{(1+\mathrm{j})\big(1-\mathrm{j}^2\big)}{(1-\mathrm{j})\big(1-\bar{\mathrm{j}}\big)} = \frac{1}{3}(\mathrm{j}-\mathrm{j}^2) = \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

....

1.4 c) On a $\alpha(\alpha+1)\big(\alpha^2+1\big) = \alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha = -1$.

....

1.4 d) L'idée est d'exploiter pleinement les égalités $\alpha^5 = 1$ et $\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1 = 0$. Ainsi, en tenant compte du résultat de la question précédente, on a

$$\big(\alpha^2+\alpha+1\big)\big(\alpha^3+\alpha+1\big)\big(\alpha^4+\alpha+1\big) = -\big(\alpha^4+\alpha^3\big)\big(\alpha^4+\alpha^2\big)\big(\alpha^3+\alpha^2\big) = -\alpha^2\big(\alpha^2+1\big)(\alpha+1)^2 = \alpha(\alpha+1).$$

Puis

$$\big(\alpha^2+\alpha+1\big)\big(\alpha^3+\alpha+1\big)\big(\alpha^4+\alpha+1\big)\big(\alpha^2+1\big) = \alpha(\alpha+1)\big(\alpha^2+1\big) = -1.$$

....

1.5 c) L'idée est d'exploiter pleinement les égalités $\beta^7 = 1$ et $\beta^6+\beta^5+\beta^4+\beta^3+\beta^2+\beta+1 = 0$. On a alors $\big(1+\beta^2\big)\big(1+\beta^3\big)\big(1+\beta^6\big) = \beta^6$, $\beta\big(1+\beta^4\big)\big(1+\beta^6\big) = 1+\beta+\beta^4+\beta^5$, $\beta^2\big(1+\beta^2\big)\big(1+\beta^6\big) = \beta+\beta^2+\beta^3+\beta^4$ et $\beta^3\big(1+\beta^2\big)\big(1+\beta^4\big) = 1+\beta^2+\beta^3+\beta^5$. D'où, on trouve $\dfrac{\beta}{1+\beta^2} + \dfrac{\beta^2}{1+\beta^4} + \dfrac{\beta^3}{1+\beta^6} = -2$.

....

1.6 a) Comme $\omega_1 \neq 1$ et $\omega_k = (\omega_1)^k$, on a $\omega_0+\omega_1+\cdots+\omega_{n-1} = \dfrac{1-(\omega_1)^n}{1-\omega_1} = \dfrac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi}}{1-\omega_1} = 0$ (somme des termes d'une suite géométrique).

....

1.6 b) On sait que $1+2+3+\cdots+(n-1) = \dfrac{(n-1)n}{2}$ (somme des termes d'une suite arithmétique). Ainsi, on trouve $\omega_0 \times \omega_1 \times \cdots \times \omega_{n-1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}(1+2+3+\cdots+(n-1))} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(n-1)} = \big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\big)^{n-1} = (-1)^{n-1}$.

....

1.7 a) On a $a+\mathrm{i}b = z^2 = (x+\mathrm{i}y)^2 = x^2-y^2+\mathrm{i}2xy$. D'où $a = x^2-y^2$ et $b = 2xy$.

....

1.7 b) On a $x^2+y^2 = |z|^2 = \left|z^2\right| = |a+\mathrm{i}b| = \sqrt{a^2+b^2}$.

....

1.7 c) On doit résoudre le système $\begin{cases} 2xy = 4 \\ x^2 - y^2 = 3 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \end{cases}$ qui équivaut au système $\begin{cases} xy > 0 \\ x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \end{cases}$.

Il y a donc deux couples de solutions $(x, y) = (2, 1)$ et $(x, y) = (-2, -1)$. Ainsi, les racines carrées de $3 + 4\mathrm{i}$ sont $2 + \mathrm{i}$ et $-2 - \mathrm{i}$.

Remarque : en réalité le système à résoudre est $\begin{cases} 2xy = 4 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$. Mais, il est plus aisé de considérer le système équivalent avec la troisième équation (provenant de l'égalité des modules). Cela permet de déterminer les carrés de x et y facilement. On a donc x et y au signe près. On utilise alors la première équation pour trouver le signe de xy.

....

1.9 a) Les racines cubiques de l'unité sont 1, $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\mathrm{j}^2 = \bar{\mathrm{j}}$. Par ailleurs, $2^3 = 8$. Ainsi, les racines cubiques de 8 sont $2 \times 1 = 2$, $2\mathrm{j} = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $2\bar{\mathrm{j}} = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

....

1.9 b) On a $\mathrm{i} = (-\mathrm{i})^3$. Les racines cubiques de i sont donc $-\mathrm{i} \times 1 = -\mathrm{i}$, $-\mathrm{ij} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$ et $\mathrm{i}\bar{\mathrm{j}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$.

....

1.9 c) On a $2(1 + \mathrm{i}) = \sqrt{2}^3\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{9\pi}{4}} = \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\right)^3 = (-1 + \mathrm{i})^3$. Ainsi, les racines cubiques de 8 sont $(-1 + \mathrm{i}) \times 1 = -1 + \mathrm{i}$, $(-1 + \mathrm{i})\mathrm{j} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ et $(-1 + \mathrm{i})\bar{\mathrm{j}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\frac{1 - \sqrt{3}}{2}$.

....

1.10 a) L'ensemble des racines 5-ièmes de 1 est $\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi k}{5}}, k \in \{0, 1, \ldots, 4\}\right\}$. Comme $\mathrm{i}^5 = \mathrm{i}$ et $\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi k}{5}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi(5+4k)}{10}}$, l'ensemble des racines 5-ièmes de i est $\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi(5+4k)}{10}}, k \in \{0, 1, \ldots, 4\}\right\}$.

....

1.10 b) Comme $\frac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\frac{1}{2} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{30}}\right)^5$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{30}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi k}{5}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi(12k-1)}{30}}$, l'ensemble des racines 5-ièmes de $\frac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\frac{1}{2}$ est $\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi(12k-1)}{30}}, k \in \{0, 1, \ldots, 4\}\right\}$.

....

1.10 c) Comme $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \left(\sqrt[10]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{20}}\right)^5$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{20}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi k}{5}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi(1+8k)}{20}}$, l'ensemble des racines 5-ièmes de $1 + \mathrm{i}$ est $\left\{\sqrt[10]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi(1+8k)}{20}}, k \in \{0, 1, \ldots, 4\}\right\}$.

....

1.11 On commence par calculer une racine carrée de $-119 + 120\mathrm{i}$. On trouve alors $5 + 12\mathrm{i}$ (ou $-5 - 12\mathrm{i}$). Puis, on calcule une racine carrée de $5 + 12\mathrm{i}$. On trouve $3 + 2\mathrm{i}$ (ou son opposé), qui est alors une racine 4-ième de $-119 + 120\mathrm{i}$. Comme les racines 4-ièmes de 1 sont 1, -1, i et $-i$, les racines 4-ièmes de $-119 + 120\mathrm{i}$ sont donc $1 \times (3 + 2\mathrm{i}) = 3 + 2\mathrm{i}$, $i \times (3 + 2\mathrm{i}) = -2 + 3\mathrm{i}$, $-1 \times (3 + 2\mathrm{i}) = -3 - 2\mathrm{i}$ et $-\mathrm{i} \times (3 + 2\mathrm{i}) = 2 - 3\mathrm{i}$.

....

1.12 a) On a $0 = \omega^7 - 1 = (\omega - 1)\left(1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6\right)$ et $\omega \neq 1$. Ainsi, $A + B = -1$.

....

1.12 b) En utilisant $\omega^7 = 1$ et $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = 0$, on trouve $AB = 2$.

....

1.12 c) A et B sont les solutions de l'équation d'inconnue x : $x^2 - (A+B)x + AB = 0$. C'est-à-dire, $x^2 + x + 2 = 0$. Les solutions de cette équation sont $\frac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$ et $\frac{-1 - \mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$. Comme la partie imaginaire de A est positive, on a donc $A = \frac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$ et $B = \frac{-1 - \mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$.

....

1.13 a) Observons que z vérifie $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^4 = 1$ si et seulement si $\dfrac{z+1}{z-1}$ est une racine 4-ième de 1. C'est-à-dire si et seulement si $\dfrac{z+1}{z-1}$ vaut 1, -1, i ou $-$i. Or l'équation $\dfrac{z+1}{z-1} = 1$ n'a pas de solution (car elle équivaut à $-1 = 1$). Les équations $\dfrac{z+1}{z-1} = -1$, $\dfrac{z+1}{z-1} = \mathrm{i}$ et $\dfrac{z+1}{z-1} = -\mathrm{i}$ ont chacune une unique solution, à savoir 0, $-$i et i respectivement. Ce sont les solutions de notre équation initiale.

....

1.13 b) On commence par observer que les équations $(z-2)^4 = (z-3\mathrm{i})^4$ et $\left(\dfrac{z-2}{z-3\mathrm{i}}\right)^4 = 1$ sont équivalentes puisque $(3\mathrm{i}-2)^4 \neq 0 = (3\mathrm{i}-3\mathrm{i})^4$. On procède alors comme dans la question précédente en résolvant chacune des équations $\dfrac{z-2}{z-3\mathrm{i}} = -1$, $\dfrac{z-2}{z-3\mathrm{i}} = \mathrm{i}$, $\dfrac{z-2}{z-3\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$ et $\dfrac{z-2}{z-3\mathrm{i}} = 1$ (qui elle n'a pas de solution). On trouve alors $\dfrac{5}{2} + \dfrac{5}{2}\mathrm{i}$, $1 + \dfrac{3}{2}\mathrm{i}$ et $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ comme solution de l'équation initiale.

....

1.14 Comme 1 n'est pas solution de l'équation $(z+2)^8 - 17(z+2)^4(z-1)^4 + 16(z-1)^8 = 0$, celle-ci équivaut à l'équation $\left(\left(\dfrac{z+2}{z-1}\right)^4\right)^2 - 17\left(\dfrac{z+2}{z-1}\right)^4 + 16 = 0$. Or $X^2 - 17X + 16 = (X-16)(X-1)$. Il s'agit donc de résoudre

$$\left(\left(\frac{z+2}{z-1}\right)^4 - 16\right)\left(\left(\frac{z+2}{z-1}\right)^4 - 1\right) = 0.$$

Les racines 4-ièmes de 16 sont 2, -2, 2i et -2i. Et les racines 4-ièmes de 1 sont 1, -1, i et $-$i.
L'équation $\dfrac{z+2}{z-1} = 1$ n'a pas de solution.
L'équation $\dfrac{z+2}{z-1} = -1$ a pour unique solution $-\dfrac{1}{2}$.
L'équation $\dfrac{z+2}{z-1} = \mathrm{i}$ a pour unique solution $-\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}\mathrm{i}$.
L'équation $\dfrac{z+2}{z-1} = -\mathrm{i}$ a pour unique solution $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\mathrm{i}$.
L'équation $\dfrac{z+2}{z-1} = 2$ a pour unique solution 4.
L'équation $\dfrac{z+2}{z-1} = -2$ a pour unique solution 0.
L'équation $\dfrac{z+2}{z-1} = 2\mathrm{i}$ a pour unique solution $\dfrac{2}{5} - \dfrac{6}{5}\mathrm{i}$.
L'équation $\dfrac{z+2}{z-1} = -2\mathrm{i}$ a pour unique solution $\dfrac{2}{5} + \dfrac{6}{5}\mathrm{i}$.
L'ensemble des solutions de l'équation initiale est donc $\left\{-\dfrac{1}{2}, 0, 4, \dfrac{2}{5} + \dfrac{6}{5}\mathrm{i}, \dfrac{2}{5} - \dfrac{6}{5}\mathrm{i}, -\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}\mathrm{i}, -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\mathrm{i}\right\}$.

....