Discriminant et racines I

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 1.1

Calculer les nombres suivants. On attend la forme la plus simple possible.

a) $\dfrac{10-\sqrt{16}}{4}$ ....

b) $\dfrac{5+\sqrt{9}}{6}$ ....

c) $\dfrac{-6-\sqrt{12}}{2}$ ....

d) $\dfrac{8+\sqrt{48}}{4}$ ....

Calcul 1.2

Calculer les nombres suivants. On attend les résultats sous la forme d'une fraction irréductible.

a) $5^2 - 4 \times 5 \times \dfrac{3}{8}$ ....

b) $(-6)^2 + \dfrac{3}{5} \times (-7) \times 15$ ....

c) $-7^2 - 8 \times \dfrac{1}{3} \times 27$ ....

d) $\left(-\dfrac{5}{4}\right)^2 - 5 \times \dfrac{17}{32} \times \dfrac{24}{15}$ ....

Premiers calculs

Calcul 1.3 — Premiers discriminants.

Pour chacun des polynômes définis ci-dessous, calculer son discriminant :

a) $X^2 + 2X + 3$ ....

b) $-X^2 - 2X + 4$ ....

Calcul 1.4 — Calculs de discriminants.

Pour chacun des polynômes définis ci-dessous, calculer son discriminant :

a) $3X^2 - 4X + \dfrac{7}{4}$ ....

b) $\dfrac{1}{2}X^2 + \dfrac{2}{3}X - \dfrac{3}{4}$ ....

c) $\dfrac{4}{5}X^2 - \sqrt{7}X - \dfrac{5}{6}$ ....

d) $\dfrac{\sqrt{6}}{7}X^2 + \sqrt{3}X + \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ....

Calcul 1.5 — Premières racines.

Déterminer les racines de chacun des polynômes suivants :

a) $X^2 + 2X - 4$ ......

b) $-X^2 - 3X + 2$ ....

Calcul 1.6 — Calculs de racines.

Déterminer les racines de chacun des polynômes suivants :

a) $4X^2 - 3X + \dfrac{1}{4}$ ......

b) $\dfrac{1}{2}X^2 + \dfrac{1}{2}X - 3$ ......

c) $2X^2 + \dfrac{1}{3}X - \dfrac{1}{3}$ ......

d) $3X^2 - 2\sqrt{2}X - \dfrac{2}{3}$ ......

Calcul 1.7 — Un polynôme paramétré.

Soit $b \in \mathbb{R}$. On considère le polynôme $P = X^2 + bX + 1$.

a) Lorsque $b = -2$, le polynôme P admet-il deux racines distinces ? ....

b) Calculer le discriminant de P en fonction de b. ....

c) Pour quelles valeurs de b le polynôme admet-il deux racines distinctes ? ...

Calcul 1.8 — Un deuxième polynôme paramétré.

Soit $a \in \mathbb{R}^*$, un réel non nul. On considère le polynôme $Q = aX^2 + 3X - 5$.

a) Calculer le discriminant de Q. ....

b) Pour quelles valeurs de a le polynôme Q a-t-il exactement une racine ? ....

Calcul 1.9 — Un troisième polynôme paramétré.

Soit $c \in \mathbb{R}$. On considère le polynôme $R = 2X^2 - 5X + c$.

a) Calculer le discriminant de R. ....

b) Pour quelles valeurs de c le polynôme R n'admet-il aucune racine ? ....

Calcul 1.10 — Inéquations I.

Résoudre les inéquations suivantes. On attend le résultat sous la forme d'un intervalle ou de la réunion de deux intervalles.

a) $2x^2 - 5x + 3 > 0$ ....

b) $y^2 + 3y \leqslant 2$ ....

c) $-t^2 < 5t + 4$ ....

Calcul 1.11 — Inéquations II.

Résoudre les inéquations suivantes. On attend le résultat sous la forme d'un intervalle ou de la réunion de deux intervalles.

a) $4z \geqslant \dfrac{3}{4} - z^2$ ....

b) $\dfrac{1}{3}u^2 + \dfrac{2}{5}u + \dfrac{3}{7} > 0$ ....

c) $v - \sqrt{3} \geqslant v^2$ ....

Calculs plus avancés

Calcul 1.12 — Propositions paramétrées I.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

Pour quelle(s) valeur(s) de a la proposition « $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geqslant 0$ » est-elle vraie ?

a) Avec $P = aX^2 + 3X - 4$ ....

b) Avec $P = \dfrac{2}{5}X^2 + 2aX + \dfrac{1}{3}$ ....

c) Avec $P = \dfrac{3}{2}X^2 - \dfrac{5}{7}X + \dfrac{a}{2}$ ....

Calcul 1.13 — Propositions paramétrées II.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

Pour quelle(s) valeur(s) de a la proposition « $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geqslant 0$ » est-elle vraie ?

a) Avec $P = aX^2 + 3aX - 4$ ....

b) Avec $P = \dfrac{2a}{5}X^2 + 2X + \dfrac{a}{3}$ ....

c) Avec $P = \dfrac{3}{2}X^2 - \dfrac{7}{5}aX + \dfrac{a}{6}$ ....

Calcul 1.14 — Un système paramétré.

Soit $t \in \mathbb{R}$. On considère le système $\begin{cases} (x-5)^2 + (y-5)^2 = 5 \\ y = tx \end{cases}$ d'inconnues x et y.

Pour quelles valeurs de t le système précédent a-t-il des solutions ? ....

Réponses mélangées

$]-\infty, 1[\cup \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$	$\frac{13}{7}$	$\frac{35}{2}$	$-1-\sqrt{5}$ et $-1+\sqrt{5}$	$-\frac{43}{16}$	-5	Non	-27
-3 et 2	-8	20	$a \in \left[-\sqrt{\frac{2}{15}}, \sqrt{\frac{2}{15}}\right]$	$25 - 8c$	$\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$ et $\frac{-3-\sqrt{17}}{2}$		
$a \in \left[\frac{25}{147}, +\infty\right[$	$a \in \left[0, \frac{25}{49}\right]$	$t \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$	$\frac{29}{3}$	$-3-\sqrt{3}$	$a \in \left[\sqrt{\frac{15}{2}}, +\infty\right[$	$2+\sqrt{3}$	
$c \in \left]\frac{25}{8}, +\infty\right[$	$b^2 - 4$	$-\frac{9}{20}$	$\frac{\sqrt{2}-2}{3}$ et $\frac{\sqrt{2}+2}{3}$.	$\left]-\infty, -2-\frac{\sqrt{19}}{2}\right] \cup \left[-2+\frac{\sqrt{19}}{2}, +\infty\right[$			
$b \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$	Aucune	$\frac{3-\sqrt{5}}{8}$ et $\frac{3+\sqrt{5}}{8}$	-121	$9 + 20a$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$	
$\varnothing$	Aucune	$\left[\frac{-3-\sqrt{17}}{2}, \frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right]$	$\frac{35}{18}$	$]-\infty, -4[\cup]-1, +\infty[$	$\mathbb{R}$	$\frac{4}{3}$	

► Réponses et corrigés page 5

Fiche n° 1. Discriminant et racines I

Réponses

1.1 a) .... $\boxed{\dfrac{3}{2}}$

1.1 b) .... $\boxed{\dfrac{4}{3}}$

1.1 c) .... $\boxed{-3-\sqrt{3}}$

1.1 d) .... $\boxed{2+\sqrt{3}}$

1.2 a) .... $\boxed{\dfrac{35}{2}}$

1.2 b) .... $\boxed{-27}$

1.2 c) .... $\boxed{-121}$

1.2 d) .... $\boxed{-\dfrac{43}{16}}$

1.3 a) .... $\boxed{-8}$

1.3 b) .... $\boxed{20}$

1.4 a) .... $\boxed{-5}$

1.4 b) .... $\boxed{\dfrac{35}{18}}$

1.4 c) .... $\boxed{\dfrac{29}{3}}$

1.4 d) .... $\boxed{\dfrac{13}{7}}$

1.5 a) .... $\boxed{-1-\sqrt{5} \text{ et } -1+\sqrt{5}}$

1.5 b) .... $\boxed{\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2} \text{ et } \dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}}$

1.6 a) .... $\boxed{\dfrac{3-\sqrt{5}}{8} \text{ et } \dfrac{3+\sqrt{5}}{8}}$

1.6 b) .... $\boxed{-3 \text{ et } 2}$

1.6 c) .... $\boxed{-\dfrac{1}{2} \text{ et } \dfrac{1}{3}}$

1.6 d) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}-2}{3} \text{ et } \dfrac{\sqrt{2}+2}{3}.}$

1.7 a) .... $\boxed{\text{Non}}$

1.7 b) .... $\boxed{b^2-4}$

1.7 c) .... $\boxed{b \in \left]-\infty,-2\right[\cup \left]2,+\infty\right[}$

1.8 a) .... $\boxed{9+20a}$

1.8 b) .... $\boxed{-\dfrac{9}{20}}$

1.9 a) .... $\boxed{25-8c}$

1.9 b) .... $\boxed{c \in \left]\dfrac{25}{8},+\infty\right[}$

1.10 a) .... $\boxed{\left]-\infty,1\right[\cup \left]\dfrac{3}{2},+\infty\right[}$

1.10 b) .... $\boxed{\left[\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2},\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}\right]}$

1.10 c) .... $\boxed{\left]-\infty,-4\right[\cup \left]-1,+\infty\right[}$

1.11 a) .... $\boxed{\left]-\infty,-2-\dfrac{\sqrt{19}}{2}\right] \cup \left[-2+\dfrac{\sqrt{19}}{2},+\infty\right[}$

1.11 b) .... $\boxed{\mathbb{R}}$

1.11 c) .... $\boxed{\varnothing}$

1.12 a) .... $\boxed{\text{Aucune}}$

1.12 b) .... $\boxed{a \in \left[-\sqrt{\dfrac{2}{15}},\sqrt{\dfrac{2}{15}}\right]}$

1.12 c) .... $\boxed{a \in \left[\dfrac{25}{147},+\infty\right[}$

1.13 a) .... $\boxed{\text{Aucune}}$

1.13 b) .... $\boxed{a \in \left[\sqrt{\dfrac{15}{2}},+\infty\right[}$

1.13 c) .... $\boxed{a \in \left[0,\dfrac{25}{49}\right]}$

1.14 .... $\boxed{t \in \left[\dfrac{1}{2},2\right]}$

Corrigés

1.1 a) On a $\dfrac{10-\sqrt{16}}{4} = \dfrac{10-4}{4} = \dfrac{3}{2}$.

1.1 b) On a $\dfrac{5+\sqrt{9}}{6} = \dfrac{5+3}{6} = \dfrac{4}{3}$.

1.1 c) On a $\dfrac{-6-\sqrt{12}}{2} = \dfrac{-6-2\sqrt{3}}{2} = -3-\sqrt{3}$.

1.1 d) On a $\dfrac{8+\sqrt{48}}{4} = \dfrac{8+4\sqrt{3}}{4} = 2+\sqrt{3}$.

1.2 a) On a $5^2 - 4\times 5\times\dfrac{3}{8} = 25 - \dfrac{15}{2} = \dfrac{35}{2}$.

1.2 b) On a $(-6)^2 + \dfrac{3}{5}\times(-7)\times 15 = 36 - 63 = -27$.

1.2 c) On a $-7^2 - 8\times\dfrac{1}{3}\times 27 = -49 - 72 = -121$.

1.2 d) On a $\left(-\dfrac{5}{4}\right)^2 - 5\times\dfrac{17}{32}\times\dfrac{24}{15} = \dfrac{25}{16} - \dfrac{17}{4} = -\dfrac{43}{16}$.

1.4 b) Le discriminant vaut $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 - 4\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{-3}{4} = \dfrac{4}{9} + \dfrac{3}{2} = \dfrac{35}{18}$.

1.4 c) Le discriminant vaut $\left(-\sqrt{7}\right)^2 - 4\times\dfrac{4}{5}\times\dfrac{-5}{6} = 7 + \dfrac{8}{3} = \dfrac{29}{3}$.

1.4 d) Le discriminant vaut $\left(\sqrt{3}\right)^2 - 4\times\dfrac{\sqrt{6}}{7}\times\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 3 - \dfrac{8}{7} = \dfrac{13}{7}$.

1.5 a) Le discriminant vaut 20. Le polynôme a deux racines $x_1 = \dfrac{-2-\sqrt{20}}{2} = \dfrac{-2-2\sqrt{5}}{2} = -1-\sqrt{5}$ et $x_2 = -1+\sqrt{5}$.

1.6 a) Le discriminant vaut 5. Le polynôme a deux racines $x_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2\times 4} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{8}$ et $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{8}$.

1.6 b) Le discriminant vaut $\dfrac{25}{4}$. Le polynôme a deux racines $x_1 = \dfrac{\frac{1}{1}-\frac{5}{2}}{2\times\frac{1}{2}} = \dfrac{-\frac{6}{2}}{1} = -3$ et $x_2 = 2$.

1.6 c) Le discriminant vaut $\dfrac{25}{9}$. Le polynôme a deux racines $x_1 = \dfrac{-\dfrac{1}{3}-\dfrac{5}{3}}{2\times 2} = \dfrac{-\dfrac{6}{3}}{4} = -\dfrac{2}{4} = -\dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1}{3}$.

1.6 d) Le discriminant vaut 16. Le polynôme a deux racines $x_1 = \dfrac{2\sqrt{2}-4}{2\times 3} = \dfrac{\sqrt{2}-2}{3}$ et $x_2 = \dfrac{\sqrt{2}+2}{3}$.

1.7 a) Lorsque $b=-2$, on a $P = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$ donc le polynôme P admet 1 pour racine double. Donc P n'admet pas deux racines distinctes lorsque $b=-2$.

....

1.7 c) Le polynôme P admet deux racines distinctes si et seulement son discriminant $\Delta = b^2 - 4$ est > 0. Or, on a $\Delta > 0 \iff b^2 > 2^2$ ce qui donne $b < -2$ ou $b > 2$. Donc, le polynôme P admet deux racines distinctes si et seulement si $b \in \left]-\infty, -2\right[\cup \left]2, +\infty\right[$.

....

1.8 b) Le polynôme admet exactement une racine si et seulement si son discriminant Δ vaut 0. Or, on a $\Delta = 0 \iff 9 + 20a = 0$, ce qui donne $a = -\dfrac{9}{20}$.

....

1.9 b) Le polynôme n'admet aucune racine si et seulement si son discriminant Δ est < 0.

Or, on a $\Delta < 0 \iff 25 - 8c < 0 \iff c > \dfrac{25}{8}$. Ainsi, R n'a aucune racine si et seulement si $c \in \left]\dfrac{25}{8}, +\infty\right[$.

....

1.10 a) Les racines sont $x_1 = 1$ et $x_2 = \dfrac{3}{2}$ donc l'ensemble des solutions est $\left]-\infty, 1\right[\cup \left]\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$.

....

1.10 b) On a $y^2 + 3y \leqslant 2 \iff y^2 + 3y - 2 \leqslant 0$. Le discriminant vaut 17 et les racines sont $x_1 = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$ donc l'ensemble des solutions est $\left[\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}, \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}\right]$.

....

1.10 c) On a $-t^2 < 5t + 4 \iff t^2 + 5t + 4 > 0$. Le discriminant vaut 9 et les racines sont $x_1 = -4$ et $x_2 = -1$ donc l'ensemble des solutions est $\left]-\infty, -4\right[\cup \left]-1, +\infty\right[$

....

1.11 a) On a $4z \geqslant \dfrac{3}{4} - z^2 \iff z^2 + 4z - \dfrac{3}{4} \geqslant 0$. Le discriminant vaut 19 et les racines sont $x_1 = -2 - \dfrac{\sqrt{19}}{2}$ et $x_2 = -2 + \dfrac{\sqrt{19}}{2}$ donc l'ensemble des solutions est $\left]-\infty, -2 - \dfrac{\sqrt{19}}{2}\right] \cup \left[-2 + \dfrac{\sqrt{19}}{2}, +\infty\right[$.

....

1.11 b) Le discriminant vaut $-\dfrac{72}{175} < 0$ donc il n'y a pas de racine. Comme le coefficient $\dfrac{1}{3}$ est positif, on sait que l'expression est toujours positive. Donc l'ensemble des solutions est $\mathbb{R}$.

....

1.11 c) On a $v - \sqrt{3} \geqslant v^2 \iff -v^2 + v - \sqrt{3} \geqslant 0$. Le discriminant vaut $1 - 4\sqrt{3} < 0$ donc il n'y a pas de racine. Le coefficient -1 est négatif, l'expression est donc toujours négative. Ainsi, l'ensemble des solutions est $\varnothing$.

....

1.12 a) La proposition est vraie si et seulement si $a > 0$ et le discriminant Δ est $\leqslant 0$. Or $\Delta = 9 + 16a$ donc

$$\Delta \leqslant 0 \iff 9 + 16a \leqslant 0 \iff a \leqslant -\frac{9}{16}.$$

Ceci n'est pas compatible avec $a > 0$. Ainsi, il n'existe pas de valeur de a pour laquelle la proposition est vraie.

....

1.12 b) La proposition est vraie si et seulement si le discriminant Δ est $\leqslant 0$. Or $\Delta = 4a^2 - \dfrac{8}{15}$. Donc, on a $\Delta \leqslant 0 \iff 4a^2 - \dfrac{8}{15} \leqslant 0$. On obtient $a^2 \leqslant \dfrac{2}{15} \iff a \in \left[-\sqrt{\dfrac{2}{15}}, \sqrt{\dfrac{2}{15}}\right]$.

....

1.12 c) La proposition est vraie si et seulement si le discriminant Δ est $\leqslant 0$. Or $\Delta = \dfrac{25}{49} - 3a$. Donc, on a $\Delta \leqslant 0 \iff \dfrac{25}{49} - 3a \leqslant 0$ ce qui donne $-3c \leqslant -\dfrac{25}{49} \iff c \geqslant \dfrac{25}{147}$.

1.13 a) La proposition est vraie si et seulement si $a > 0$ et le discriminant Δ est $\leqslant 0$. Or $\Delta = 9a^2 + 16a$. C'est une expression du second degré en a dont les racines sont 0 et $-\dfrac{16}{9}$ et de coefficient du second degré positif, donc le discriminant est négatif ou nul si et seulement si $a \in \left[-\dfrac{16}{9}, 0\right]$. Ceci n'est pas compatible avec $a > 0$, par conséquent, il n'existe pas de valeur de a pour laquelle la proposition est vraie.

1.13 b) La proposition est vraie si et seulement si $a > 0$ et le discriminant Δ est $\leqslant 0$. Or $\Delta = 4 - \dfrac{8a^2}{15}$. C'est une expression du second degré en a dont les racines sont $-\sqrt{\dfrac{15}{2}}$ et $\sqrt{\dfrac{15}{2}}$ et de coefficient du second degré négatif, donc le discriminant est négatif ou nul si et seulement si $a \in \left]-\infty, -\sqrt{\dfrac{15}{2}}\right] \cup \left[\sqrt{\dfrac{15}{2}}, +\infty\right[$.

On en déduit que la proposition est vraie si et seulement si $a \in \left[\sqrt{\dfrac{15}{2}}, +\infty\right[$.

1.13 c) La proposition est vraie si et seulement si le discriminant Δ est $\leqslant 0$. Or $\Delta = \dfrac{49}{25}a^2 - a$. Donc, on a $\Delta \leqslant 0 \iff \dfrac{49}{25}a^2 - a \leqslant 0$. C'est une inéquation du second degré en a dont les racines sont 0 et $\dfrac{25}{49}$ et de coefficient du second degré positif, donc $\Delta \leqslant 0 \iff a \in \left[0, \dfrac{25}{49}\right]$.

1.14 Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{cases} (x-5)^2 + (y-5)^2 = 5 \\ y = tx \end{cases} \iff \begin{cases} (x-5)^2 + (tx-5)^2 = 5 \\ y = tx. \end{cases}$$

Le système admet des solutions si et seulement si la première équation, d'inconnue x, admet des solutions.

Or, on a

$$(x-5)^2 + (tx-5)^2 = 5 \iff x^2 - 10x + 25 + t^2x^2 - 10tx + 25 = 5 \iff (1+t^2)x^2 - 10(1+t)x + 45 = 0.$$

On reconnaît une équation du second degré en x de discriminant

$$\Delta = 100(1+t)^2 - 180(1+t^2) = 100 + 200t + 100t^2 - 180 - 180t^2 = -80t^2 + 200t - 80.$$

L'équation admet des solutions si et seulement si $\Delta \geqslant 0$.

Or, on a

$$\Delta \geqslant 0 \iff -80t^2 + 200t - 80 \geqslant 0 \iff 2t^2 - 5t + 2 \leqslant 0.$$

On reconnaît une inéquation du second degré de discriminant $\delta = 9$ dont les racines sont $t_1 = \dfrac{1}{2}$ et $t_2 = 2$.

Puisque le coefficient du second degré de l'inéquation est positif, l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$.

Ainsi, le système initial admet des solutions si et seulement si $t \in \left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$.

Ce système correspond à l'étude de l'intersection d'un cercle et d'une droite.