Primitives III

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 1.1 — Factorisations.

Soit x un réel. Factoriser les expressions suivantes (on pourra utiliser le discriminant).

a) $3x^2 - 18x + 24$ ....

b) $3x^2 - 18x + 24 + x^2 - 4x + 4$

c) $5x^4 - 10x^2 - 15$ ....

d) $x^3 + x^2 - 2x$ ....

Calcul 1.2 — Un peu de trigonométrie.

Soit x un réel. Transformer les expressions suivantes pour ne les exprimer qu'en fonction de $\cos(x)$.

a) $\cos(-x)$ ....

b) $\sin^2(x) - 1$ ....

c) $\sin^2(x) - 2\cos(-x - 13\pi)$ ....

d) $\sin^4(x) + \sin^2(x) - 2\cos(x)$ ....

Primitives de fonctions élémentaires

Calcul 1.3 — Fonctions élémentaires (I).

Déterminer l'expression d'une primitive des fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto x^3 + 2$ ....

b) $x \longmapsto \dfrac{1}{3x}$ ....

c) $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ....

d) $x \longmapsto \dfrac{1}{x^5}$ ....

e) $x \longmapsto \dfrac{1}{x^{1/3}}$ ....

f) $x \longmapsto \dfrac{1}{e^{12x}}$ ....

Calcul 1.4 — Fonctions élémentaires (II).

Déterminer l'expression d'une primitive des fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto \mathrm{e}^3$ ....

b) $x \longmapsto 3\mathrm{e}^{5x} - x^2$ ....

c) $x \longmapsto \dfrac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2}$ ...

d) $x \longmapsto 2\sin(2x)$ ....

e) $x \longmapsto 3\cos(3x+5)$ ...

f) $x \longmapsto \sin(2-5x)$ .....

Primitives de formes remarquables

Dans les exercices suivants, on fera apparaître des expressions de la forme

$$nu'(x)u(x)^{n-1},\ \frac{u'(x)}{u(x)} \text{ ou } u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$$

pour primitiver les fonctions proposées.

Calcul 1.5 — Fonction puissance (I).

Déterminer l'expression d'une primitive des fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto (2x+1)(x^2+x)^5$ .....

b) $x \longmapsto (2x+3)(x^2+3x+12)^{10}$

c) $x \longmapsto (x^2+1)(x^3+3x+4)$.

d) $x \longmapsto \dfrac{8x^2}{(x^3+2)^3}$ ....

Calcul 1.6 — Fonction puissance (II).

Déterminer l'expression d'une primitive des fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto (\mathrm{e}^x+1)^{-3}\mathrm{e}^x$ ....

b) $x \longmapsto (\mathrm{e}^x+1)(\mathrm{e}^x+x)^{22}$

c) $x \longmapsto x\sqrt{1-2x^2}$ .....

d) $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ ....

Calcul 1.7 — Fonction puissance (III).

Déterminer l'expression d'une primitive des fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto \sin(x)\cos(x)$ ....

b) $x \longmapsto \cos(x)\sin^5(x)$ ......

c) $x \longmapsto (3\sin(x)+2)^5\cos(x)$

d) $x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{(\cos(x)+3)^2}$ ......

Calcul 1.8 — Fonction inverse (I).

Déterminer l'expression d'une primitive des fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto \dfrac{1}{2x-3}$ ....

b) $x \longmapsto \dfrac{4x^3+3x^2}{x^4+x^3}$ ......

c) $x \longmapsto \dfrac{3x^2+4x}{x^3+2x^2+1}$ ...

d) $x \longmapsto \dfrac{5x^4+3x^2+1}{x^5+x^3+x+12}$

e) $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+x}$ ....

f) $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$ ....

Calcul 1.9 — Fonction inverse (II).

Déterminer l'expression d'une primitive des fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$ ....

b) $x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ ....

c) $x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ ....

d) $x \longmapsto \dfrac{\sin^2(x)\cos(x)}{\sin^3(x)+5}$ ..

Calcul 1.10 — Fonction exponentielle.

Déterminer l'expression d'une primitive des fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto \left(3x^2+\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x^3+\ln(x)}$ ....

b) $x \longmapsto (x^2+x+5)\mathrm{e}^{x^3+\frac{3}{2}x^2+15x-12}$

c) $x \longmapsto \sin(x)\mathrm{e}^{-\cos(x)+3}$ ....

d) $x \longmapsto \exp(x)\exp(\mathrm{e}^x)$ ....

Primitives par décomposition

Calcul 1.11 — Un premier exemple de décomposition.

a) Déterminer l'expression d'une primitive de $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t}$ ....

b) Mettre sous forme de fraction $1-\dfrac{1}{1+t}$ ....

c) En déduire l'expression d'une primitive de $t \longmapsto \dfrac{t}{1+t}$ ....

Calcul 1.12 — Un second exemple de décomposition.

a) Déterminer l'expression d'une primitive de $x \longmapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ ....

b) Simplifier l'expression $\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{x^3}{1+x^2}$ ....

c) En déduire l'expression d'une primitive de $x \longmapsto \dfrac{x^3}{1+x^2}$ ....

Calcul 1.13 — Un troisième exemple de décomposition.

a) Écrire sous forme de fraction la quantité $\dfrac{1}{3-x}+\dfrac{1}{3+x}$ ....

b) En déduire l'expression d'une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{9-x^2}$ ....

Soit a un réel non nul.

c) Écrire sous forme de fraction la quantité $\dfrac{1}{a-x}+\dfrac{1}{a+x}$ ....

d) En déduire l'expression d'une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{a^2-x^2}$ ....

e) Déterminer l'expression d'une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{25-16x^2}$ ....

Calcul 1.14 — En autonomie.

En utilisant la stratégie des exercices précédents, déterminer l'expression d'une primitive des fonctions suivantes :

a) $x \longmapsto \dfrac{x+2}{x+1}$ ....

b) $x \longmapsto \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$ ....

Calcul 1.15 — Une fraction de sinus.

a) Écrire sous forme de fraction la quantité $\dfrac{1}{2+\cos(x)}+\dfrac{1}{2-\cos(x)}$ ....

b) En déduire l'expression d'une primitive de $x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{3+\sin^2(x)}$ ....

Calculs plus avancés

On note ψ (prononcer *psi*) la primitive s'annulant en 0 de la fonction

$$x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}.$$

Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\psi'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. On ne cherchera pas à calculer la fonction ψ.

Calcul 1.16 — Dérivation autour de ψ.

Déterminer l'expression de la dérivée des fonctions suivantes :

a) $x \longmapsto \psi(3x)$ ....

b) $x \longmapsto \psi(2x-3)$ ...

c) $x \longmapsto \psi(x^3)$ ....

d) $x \longmapsto \psi^2(x)$ ....

Calcul 1.17 — Primitive grâce à ψ (I).

Déterminer l'expression d'une primitive des fonctions suivantes. Cettte expression fera intervenir ψ.

a) $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{3}}{1+3x^2}$ .....

b) $x \longmapsto \dfrac{1}{9+x^2}$ ......

Calcul 1.18 — Primitive grâce à ψ (II).

a) Mettre le polynôme $x^2 + 10x + 26$ sous forme canonique. ....

b) En déduire l'expression, en fonction de ψ, d'une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2 + 10x + 26}$

Calcul 1.19 — Primitive grâce à ψ (III).

a) Mettre sous forme de fraction la quantité $\dfrac{2x}{x^2+9} - \dfrac{7}{x^2+9}$. ....

b) En déduire l'expression, en fonction de ψ, d'une primitive de $x \longmapsto \dfrac{2x-7}{x^2+9}$ ......

Calcul 1.20 — En autonomie.

Déterminer l'expression, en fonction de ψ, d'une primitive des fonctions suivantes :

a) $x \longmapsto \dfrac{3}{9x^2 - 12x + 5}$ ..

b) $x \longmapsto \dfrac{x}{x^4+3}$ ....

Maintenant, on note φ (prononcer *phi*) la primitive sur $]-1, 1[$ et s'annulant en 0 de la fonction

$$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ainsi, on a, pour $x \in \,]-1, 1[$, $\varphi'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. On ne cherchera pas à calculer la fonction φ.

Calcul 1.21 — Dérivation.

Déterminer l'expression de la dérivée des fonctions suivantes :

a) $x \longmapsto \varphi(3x)$ ....

b) $x \longmapsto \varphi(2x-3)$ ....

c) $x \longmapsto \varphi(\sqrt{x})$ ....

d) $x \longmapsto \varphi^2(x^3)$ ....

Calcul 1.22 — Primitives.

Déterminer l'expression d'une primitive des fonctions suivantes. Cette expression fera intervenir φ. On pourra, comme dans la série d'exercices sur la fonction ψ, commencer par écrire les polynômes sous forme canonique.

a) $x \longmapsto \dfrac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$ .... $\boxed{}$

b) $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{25-16x^2}}$ ...... $\boxed{}$

c) $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{-x^2-8x-15}}$. $\boxed{}$

d) $x \longmapsto \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}$ .... $\boxed{}$

Réponses mélangées

$5(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2+1)$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{3}{5}\mathrm{e}^{5x} - \frac{x^3}{3}$ $\quad$ $(x+5)^2+1$ $\quad$ $x \longmapsto x + \frac{1}{x+1}$

$x \longmapsto \frac{3}{2}x^{2/3}$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{1}{3}\psi\big(\frac{x}{3}\big)$ $\quad$ $x \longmapsto \ln\big(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\big)$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{1}{18}(3\sin(x)+2)^6$ $\quad$ $\cos(x)$

$t \longmapsto t - \ln|1+t|$ $\quad$ $x \longmapsto \ln\big|x^3+2x^2+1\big|$ $\quad$ $x \longmapsto \ln|\sin(x)|$ $\quad$ $x \longmapsto \ln\big|x^4+x^3\big|$

$x \longmapsto \frac{1}{2x^2-6x+5}$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{1}{3}\mathrm{e}^{x^3+\frac{3}{2}x^2+15x-12}$ $\quad$ $x \longmapsto \psi(x+5)$ $\quad$ $x \longmapsto -\frac{\mathrm{e}^{-12x}}{12}$

$-\cos^2(x)+2\cos(x)+1$ $\quad$ $x \longmapsto x + \ln|x+1|$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{(\ln(x))^2}{2}$ $\quad$ $x \longmapsto -\cos(2x)$

$x \longmapsto \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{x^2}{2} + 5x + \frac{4}{x}$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{-4/3}{(x^3+2)^2}$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{x^4}{4} + 2x$ $\quad$ $2(x-2)(2x-7)$

$x \longmapsto \frac{1}{3}\varphi(x^3)$ $\quad$ $\frac{t}{1+t}$ $\quad$ $x \longmapsto \exp(\mathrm{e}^x)$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{1}{3}\ln|x|$ $\quad$ $t \longmapsto \ln|1+t|$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{1}{6}\sin^6(x)$

$x \longmapsto \psi(\sqrt{3}x)$ $\quad$ $\frac{2a}{a^2-x^2}$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{(x^3+3x+4)^2}{6}$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{\ln(1+x^2)}{2}$ $\quad$ $x \longmapsto \mathrm{e}^{-\cos(x)+3}$

$x \longmapsto \frac{1}{3}\ln\big|\sin^3(x)+5\big|$ $\quad$ $x \longmapsto 2\sqrt{x}$ $\quad$ $\cos^4(x) - 3\cos^2(x) - 2\cos(x) + 2$ $\quad$ $\frac{2x-7}{x^2+9}$

$x \longmapsto \ln\big|\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\big|$ $\quad$ $x \longmapsto \psi(3x-2)$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{(\mathrm{e}^x+x)^{23}}{23}$ $\quad$ $x \longmapsto \varphi(5x)$ $\quad$ $x \longmapsto \varphi(x+4)$

$x \longmapsto -\frac{1}{2}\cos^2(x)$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{1}{6}\ln\left|\frac{3+x}{3-x}\right|$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{1}{4}\ln\frac{2-\cos x}{2+\cos x}$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{3}}\psi\Big(\frac{x^2}{\sqrt{3}}\Big)$

$x \longmapsto \frac{x^2}{2} - \frac{\ln(1+x^2)}{2}$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{(x^2+3x+12)^{11}}{11}$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{6x^2\varphi(x^3)}{\sqrt{1-x^6}}$ $\quad$ $x \longmapsto -\frac{1}{4x^4}$

$x \longmapsto \frac{1}{40}\ln\left|\frac{5+4x}{5-4x}\right|$ $\quad$ $x \longmapsto \ln|\mathrm{e}^x + x|$ $\quad$ $x \longmapsto \mathrm{e}^3 x$ $\quad$ $-\cos^2(x)$ $\quad$ $\frac{6}{9-x^2}$

$x \longmapsto \ln(x^2+9) - \frac{7}{3}\psi\Big(\frac{x}{3}\Big)$ $\quad$ $x \longmapsto -\ln|\cos(x)|$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{3}{1+9x^2}$ $\quad$ $x \longmapsto -\frac{1}{6}(1-2x^2)^{3/2}$

$x \longmapsto \ln\big|x^5+x^3+x+2\big|$ $\quad$ $x \longmapsto \sin(3x+5)$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{1}{4}\varphi\big(\frac{4x}{5}\big)$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{(x^2+x)^6}{6}$

$x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$ $\quad$ $x \longmapsto -\frac{1}{2(1+\mathrm{e}^x)^2}$ $\quad$ x $\quad$ $\frac{4}{4-\cos^2(x)}$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$

$x \longmapsto \frac{2\psi(x)}{1+x^2}$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$ $\quad$ $x(x-1)(x+2)$ $\quad$ $3(x-2)(x-4)$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{1}{\cos(x)+3}$

$x \longmapsto \ln\sqrt{|2x-3|}$ $\quad$ $x \longmapsto \mathrm{e}^{x^3+\ln(x)}$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{3x^2}{1+x^6}$ $\quad$ $x \longmapsto \frac{1}{5}\cos(2-5x)$

► Réponses et corrigés page 7

Fiche n° 1. Primitives III

Réponses

1.1 a) .... $\boxed{3(x-2)(x-4)}$

1.1 b) .... $\boxed{2(x-2)(2x-7)}$

1.1 c) .... $\boxed{5(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2+1)}$

1.1 d) .... $\boxed{x(x-1)(x+2)}$

1.2 a) .... $\boxed{\cos(x)}$

1.2 b) .... $\boxed{-\cos^2(x)}$

1.2 c) .... $\boxed{-\cos^2(x)+2\cos(x)+1}$

1.2 d) .... $\boxed{\cos^4(x)-3\cos^2(x)-2\cos(x)+2}$

1.3 a) .... $\boxed{x\longmapsto \dfrac{x^4}{4}+2x}$

1.3 b) .... $\boxed{x\longmapsto \dfrac{1}{3}\ln|x|}$

1.3 c) .... $\boxed{x\longmapsto 2\sqrt{x}}$

1.3 d) .... $\boxed{x\longmapsto -\dfrac{1}{4x^4}}$

1.3 e) .... $\boxed{x\longmapsto \dfrac{3}{2}x^{2/3}}$

1.3 f) .... $\boxed{x\longmapsto -\dfrac{\mathrm{e}^{-12x}}{12}}$

1.4 a) .... $\boxed{x\longmapsto \mathrm{e}^3 x}$

1.4 b) .... $\boxed{x\longmapsto \dfrac{3}{5}\mathrm{e}^{5x}-\dfrac{x^3}{3}}$

1.4 c) .... $\boxed{x\longmapsto \frac{x^2}{2}+5x+\frac{4}{x}}$

1.4 d) .... $\boxed{x\longmapsto -\cos(2x)}$

1.4 e) .... $\boxed{x\longmapsto \sin(3x+5)}$

1.4 f) .... $\boxed{x\longmapsto \dfrac{1}{5}\cos(2-5x)}$

1.5 a) .... $\boxed{x\longmapsto \dfrac{(x^2+x)^6}{6}}$

1.5 b) .... $\boxed{x\longmapsto \dfrac{(x^2+3x+12)^{11}}{11}}$

1.5 c) .... $\boxed{x\longmapsto \dfrac{(x^3+3x+4)^2}{6}}$

1.5 d) .... $\boxed{x\longmapsto \dfrac{-4/3}{(x^3+2)^2}}$

1.6 a) .... $\boxed{x\longmapsto -\dfrac{1}{2(1+\mathrm{e}^x)^2}}$

1.6 b) .... $\boxed{x\longmapsto \dfrac{(\mathrm{e}^x+x)^{23}}{23}}$

1.6 c) .... $\boxed{x\longmapsto -\dfrac{1}{6}(1-2x^2)^{3/2}}$

1.6 d) .... $\boxed{x\longmapsto \dfrac{(\ln(x))^2}{2}}$

1.7 a) .... $\boxed{x\longmapsto -\dfrac{1}{2}\cos^2(x)}$

1.7 b) .... $\boxed{x\longmapsto \dfrac{1}{6}\sin^6(x)}$

1.7 c) .... $\boxed{x\longmapsto \dfrac{1}{18}(3\sin(x)+2)^6}$

1.7 d) .... $\boxed{x\longmapsto \dfrac{1}{\cos(x)+3}}$

1.8 a) .... $\boxed{x\longmapsto \ln\sqrt{|2x-3|}}$

1.8 b) .... $\boxed{x\longmapsto \ln\left|x^4+x^3\right|}$

1.8 c) .... $\boxed{x\longmapsto \ln\left|x^3+2x^2+1\right|}$

1.8 d) .... $\boxed{x\longmapsto \ln\left|x^5+x^3+x+2\right|}$

1.8 e) .... $\boxed{x\longmapsto \ln|\mathrm{e}^x+x|}$

1.8 f) .... $\boxed{x\longmapsto \ln\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right)}$

1.9 a) .... $\boxed{x\longmapsto \ln\left|\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right|}$

1.9 b) .... $\boxed{x\longmapsto \ln|\sin(x)|}$

1.9 c) .... $\boxed{x \longmapsto -\ln|\cos(x)|}$

1.9 d) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{1}{3}\ln\left|\sin^3(x)+5\right|}$

1.10 a) .... $\boxed{x \longmapsto \mathrm{e}^{x^3+\ln(x)}}$

1.10 b) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{x^3+\frac{3}{2}x^2+15x-12}}$

1.10 c) .... $\boxed{x \longmapsto \mathrm{e}^{-\cos(x)+3}}$

1.10 d) .... $\boxed{x \longmapsto \exp(\mathrm{e}^x)}$

1.11 a) .... $\boxed{t \longmapsto \ln|1+t|}$

1.11 b) .... $\boxed{\dfrac{t}{1+t}}$

1.11 c) .... $\boxed{t \longmapsto t-\ln|1+t|}$

1.12 a) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x^2)}{2}}$

1.12 b) .... $\boxed{x}$

1.12 c) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{\ln(1+x^2)}{2}}$

1.13 a) .... $\boxed{\dfrac{6}{9-x^2}}$

1.13 b) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{1}{6}\ln\left|\frac{3+x}{3-x}\right|}$

1.13 c) .... $\boxed{\dfrac{2a}{a^2-x^2}}$

1.13 d) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right|}$

1.13 e) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{1}{40}\ln\left|\dfrac{5+4x}{5-4x}\right|}$

1.14 a) .... $\boxed{x \longmapsto x+\ln|x+1|}$

1.14 b) .... $\boxed{x \longmapsto x+\dfrac{1}{x+1}}$

1.15 a) .... $\boxed{\dfrac{4}{4-\cos^2(x)}}$

1.15 b) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{2-\cos x}{2+\cos x}}$

1.16 a) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{3}{1+9x^2}}$

1.16 b) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{1}{2x^2-6x+5}}$

1.16 c) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{3x^2}{1+x^6}}$

1.16 d) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{2\psi(x)}{1+x^2}}$

1.17 a) .... $\boxed{x \longmapsto \psi(\sqrt{3}x)}$

1.17 b) .... $\boxed{x \longmapsto \frac{1}{3}\psi\left(\frac{x}{3}\right)}$

1.18 a) .... $\boxed{(x+5)^2+1}$

1.18 b) .... $\boxed{x \longmapsto \psi(x+5)}$

1.19 a) .... $\boxed{\dfrac{2x-7}{x^2+9}}$

1.19 b) .... $\boxed{x \longmapsto \ln(x^2+9)-\dfrac{7}{3}\psi\left(\dfrac{x}{3}\right)}$

1.20 a) .... $\boxed{x \longmapsto \psi(3x-2)}$

1.20 b) .... $\boxed{x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{3}}\psi\left(\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right)}$

1.21 a) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{3}{\sqrt{1-9x^2}}}$

1.21 b) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{-x^2+3x-2}}}$

1.21 c) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}}$

1.21 d) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{6x^2\varphi(x^3)}{\sqrt{1-x^6}}}$

1.22 a) .... $\boxed{x \longmapsto \varphi(5x)}$

1.22 b) .... $\boxed{x \longmapsto \frac{1}{4}\varphi\left(\frac{4x}{5}\right)}$

1.22 c) .... $\boxed{x \longmapsto \varphi(x+4)}$

1.22 d) .... $\boxed{x \longmapsto \frac{1}{3}\varphi(x^3)}$

Corrigés

1.4 a) La fonction est constante !

1.5 a) On reconnaît une forme $x \longmapsto u'(x)u(x)^5$, où $u : x \longmapsto x^2 + x$.

1.5 b) On reconnaît une forme $x \longmapsto u'(x)u(x)^{10}$, où $u : x \longmapsto x^2 + 3x + 12$.

1.5 c) On reconnaît une forme $x \longmapsto \dfrac{1}{3}u'(x)u(x)$, où $u : x \longmapsto x^3 + 3x + 4$.

1.5 d) On reconnaît une forme $x \longmapsto \dfrac{8}{3}u'(x)u(x)^{-3}$, où $u : x \longmapsto x^3 + 2$.

1.6 a) On reconnaît une forme $x \longmapsto u'(x)u(x)^{-3}$, où $u : x \longmapsto \mathrm{e}^x + 1$.

1.6 b) On reconnaît une forme $x \longmapsto u'(x)u(x)^{22}$, où $u : x \longmapsto \mathrm{e}^x + x$.

1.6 c) On reconnaît une forme $x \longmapsto \dfrac{-1}{4}u'(x)u(x)^{1/2}$, où $u : x \longmapsto 1 - 2x^2$.

1.6 d) On reconnaît une forme $x \longmapsto u'(x)u(x)$, où $u : x \longmapsto \ln(x)$.

1.7 a) On reconnaît une forme $x \longmapsto u'(x)u(x)$, où $u : x \longmapsto \cos(x)$.

1.7 b) On reconnaît une forme $x \longmapsto u'(x)u(x)^5$, où $u : x \longmapsto \sin(x)$.

1.7 c) On reconnaît une forme $x \longmapsto \dfrac{1}{3}u'(x)u(x)^5$, où $u : x \longmapsto 3\sin(x) + 2$.

1.7 d) On reconnaît une forme $x \longmapsto u'(x)u(x)^{-2}$, où $u : x \longmapsto \cos(x) + 3$.

1.8 b) On reconnaît une forme $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, où $u : x \longmapsto x^4 + x^3$.

1.8 c) On reconnaît une forme $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, où $u : x \longmapsto x^3 + 2x^2 + 1$.

1.8 d) On reconnaît une forme $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, où $u : x \longmapsto x^5 + x^3 + x + 12$.

1.8 e) On reconnaît une forme $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, où $u : x \longmapsto \mathrm{e}^x + x$.

1.8 f) On reconnaît une forme $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, où $u : x \longmapsto \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$. Les valeurs absolues n'ont pas été utilisées ici car la somme de deux exponentielles est une quantité toujours positive.

1.9 a) On reconnaît une forme $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, où $u : x \longmapsto \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$.

1.9 b) On reconnaît une forme $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, où $u : x \longmapsto \sin(x)$.

1.9 c) On reconnaît une forme $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, où $u : x \longmapsto \cos(x)$.

1.9 d) On reconnaît une forme $x \longmapsto \dfrac{1}{3}\dfrac{u'(x)}{u(x)}$, où $u : x \longmapsto \sin^3(x) + 5$.

1.10 a) On reconnaît une forme $x \longmapsto u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$, où $u : x \longmapsto x^3 + \ln(x)$.

1.10 b) On reconnaît une forme $x \longmapsto \dfrac{1}{3}u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$, où $u : x \longmapsto x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 + 15x - 12$.

1.10 c) On reconnaît une forme $x \longmapsto u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$, où $u : x \longmapsto -\cos(x) + 3$.

1.10 d) On reconnaît une forme $x \longmapsto u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$, où $u : x \longmapsto \mathrm{e}^x$.

1.11 a) On reconnaît une forme $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, où $u : x \longmapsto 1 + x$.

1.11 c) On décompose $\dfrac{t}{1+t} = 1 - \dfrac{1}{1+t}$, puis on additionne des primitives de chacun de ces termes.

1.12 a) On reconnaît une forme $x \longmapsto \dfrac{1}{2}\dfrac{u'(x)}{u(x)}$, où $u : x \longmapsto 1 + x^2$. Les valeurs absolues n'ont pas été utilisées car $1 + x^2$ est une quantité toujours positive.

1.12 c) On décompose $\dfrac{x^3}{1+x^2} = x - \dfrac{x}{1+x^2}$ puis on additionne des primitives de chacun de ces termes.

1.13 b) On décompose $\dfrac{1}{9-x^2} = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{3-x} + \dfrac{1}{3+x}\right)$ puis on additionne des primitives de chacun de ces termes.

1.13 d) On décompose $\dfrac{1}{a-x^2} = \dfrac{1}{2a}\left(\dfrac{1}{a-x} + \dfrac{1}{a+x}\right)$ puis on additionne des primitives de chacun de ces termes.

1.13 e) On écrit $\dfrac{1}{25-16x^2} = \dfrac{1}{16} \times \dfrac{1}{(5/4)^2 - x^2}$, puis on utilise la question précédente pour calculer une primitive de la fonction.

1.14 a) On décompose $\dfrac{x+2}{x+1} = \dfrac{x+1+1}{x+1} = 1 + \dfrac{1}{x+1}$ puis on primitive chacun des termes.

1.14 b) On décompose $\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \dfrac{(x+1)^2-1}{(x+1)^2} = 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2}$ puis on primitive chacun des termes.

1.15 b) On décompose

$$\frac{\sin(x)}{3+\sin^2(x)} = \frac{\sin(x)}{4-\cos^2(x)} = \frac{1}{4}\left[\frac{\sin(x)}{2+\cos(x)} + \frac{\sin(x)}{2-\cos(x)}\right],$$

puis on additionne des primitives de chacun des termes.

Comme $\cos(x) \in [-1,1]$, les quantités $2+\cos(x)$ et $2-\cos(x)$ sont positives donc on n'a pas utilisé les valeurs absolues.

1.16 a) On utilise la dérivée d'une fonction composée.

1.16 b) On utilise la dérivée d'une fonction composée pour obtenir

$$2\psi(2x-3) = 2\frac{1}{1+(2x-3)^2} = \frac{2}{4x^2-12x+10} = \frac{1}{2x^2-6x+5}.$$

1.16 c) On utilise la dérivée d'une fonction composée pour obtenir

$$3x^2\psi'(x^3) = 3x^2\frac{1}{1+(x^3)^2} = \frac{3x^2}{1+x^6}.$$

1.16 d) On utilise la dérivée d'une puissance :

$$2\psi'(x)\psi(x) = 2 \times \frac{1}{1+x^2} \times \psi(x).$$

1.17 a) On reconnaît une expression de la forme $x \longmapsto u'(x)\psi'(u(x))$ avec $u : x \longmapsto \sqrt{3}x$.

1.17 b) On transforme l'expression pour reconnaître une fonction de la forme $x \longmapsto u'(x)\psi'(u(x))$:

$$\frac{1}{9+x^2} = \frac{1/9}{1+\frac{x^2}{9}} = \frac{1}{3}\frac{1/3}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}.$$

1.18 a) On a $x^2+10x+26 = (x+5)^2 - 25 + 26 = 1 + (x+5)^2$.

1.18 b) On reconnaît une fonction de la forme $x \longmapsto u'(x)\psi'(u(x))$:

$$\frac{1}{x^2+10x+26} = \frac{1}{1+(x+5)^2}.$$

1.19 b) Comme la dérivée de $x \longmapsto x^2+9$ est $x \longmapsto 2x$, alors une primitive de $x \longmapsto \dfrac{2x}{x^2+9}$ est $x \longmapsto \ln(x^2+9)$.

Comme $\dfrac{7}{x^2+9} = \dfrac{7/9}{1+\left(\frac{x}{3}\right)2} = \dfrac{7}{3} \times \dfrac{1/3}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}$, alors une primitive de $x \longmapsto \dfrac{7}{x^2+9}$ est $x \longmapsto \dfrac{1}{3}\psi\left(\dfrac{x}{3}\right)$.

On conclut car la primitive d'une somme est égale à la somme des primitives et car $\dfrac{2x-7}{x^2+9} = \dfrac{2x}{x^2+9} - \dfrac{7}{x^2+9}$.

1.20 a) On commence par utiliser la technique de mise sous forme canonique des trinômes :

$$9x^2 - 12x + 5 = (3x-2)^2 - 4 + 5 = 1 + (3x-2)^2.$$

On reconnaît alors une fonction de la forme $x \longmapsto u'(x)\psi'(u(x))$:

$$\frac{3}{9x^2 - 12x + 5} = \frac{3}{1 + (3x-2)^2}.$$

....

1.20 b) On transforme l'expression pour reconnaître une fonction de la forme $x \longmapsto u'(x)\psi'(u(x))$:

$$\frac{x}{3+x^4} = \frac{x/3}{1 + \frac{(x^2)^2}{3}} = \frac{x/3}{1 + \left(\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{\frac{2x}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right)^2}.$$

....

1.21 b) On utilise la dérivée d'une fonction composée pour obtenir

$$2\varphi'(2x-3) = 2\frac{1}{\sqrt{1-(2x-3)^2}} = \frac{2}{\sqrt{-4x^2+12x-8}} = \frac{1}{\sqrt{-x^2+3x-2}}.$$

....

1.21 c) On utilise la dérivée d'une fonction composée pour obtenir

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}\varphi'(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}.$$

....

1.21 d) On utilise la dérivée d'une fonction composée :

$$2\big(3x^2\big)\varphi'(x^3)\varphi(x^3) = 6x^2 \times \frac{1}{\sqrt{1-(x^3)^2}}\varphi(x).$$

....

1.22 a) On reconnaît une expression de la forme $x \longmapsto u'(x)\varphi'(u(x))$ où $u : x \longmapsto 5x$.

....

1.22 b) On commence par transformer l'expression pour reconnaître la forme $x \longmapsto u'(x)\varphi'(u(x))$. On écrit

$$\frac{1}{\sqrt{25-16x^2}} = \frac{1/5}{\sqrt{1-\frac{16}{25}x^2}} = \frac{1}{4} \times \frac{4/5}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}x\right)^2}}.$$

....

1.22 c) On utilise la méthode de mise sous forme canonique des trinômes et on écrit

$$-x^2 - 8x - 15 = -(x^2+8x+15) = -\big[(x+4)^2 - 16 + 15\big] = 1 - (x+4)^2.$$

On reconnaît ainsi une expression de la forme $x \longmapsto u'(x)\varphi'(u(x))$, à savoir :

$$\frac{1}{\sqrt{-x^2-8x-15}} = \frac{1}{\sqrt{1-(x+4)^2}}.$$

....

1.22 d) On transforme l'expression pour reconnaître une fonction de la forme $x \longmapsto u'(x)\varphi'(u(x))$. Dans ce cas, la fonction $u : x \longmapsto x^3$ convient et on peut écrire :

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}} = \frac{1}{3} \times \frac{3x^2}{\sqrt{1-(x^3)^2}}.$$

....