

Chapitre 1

Éléments de logique

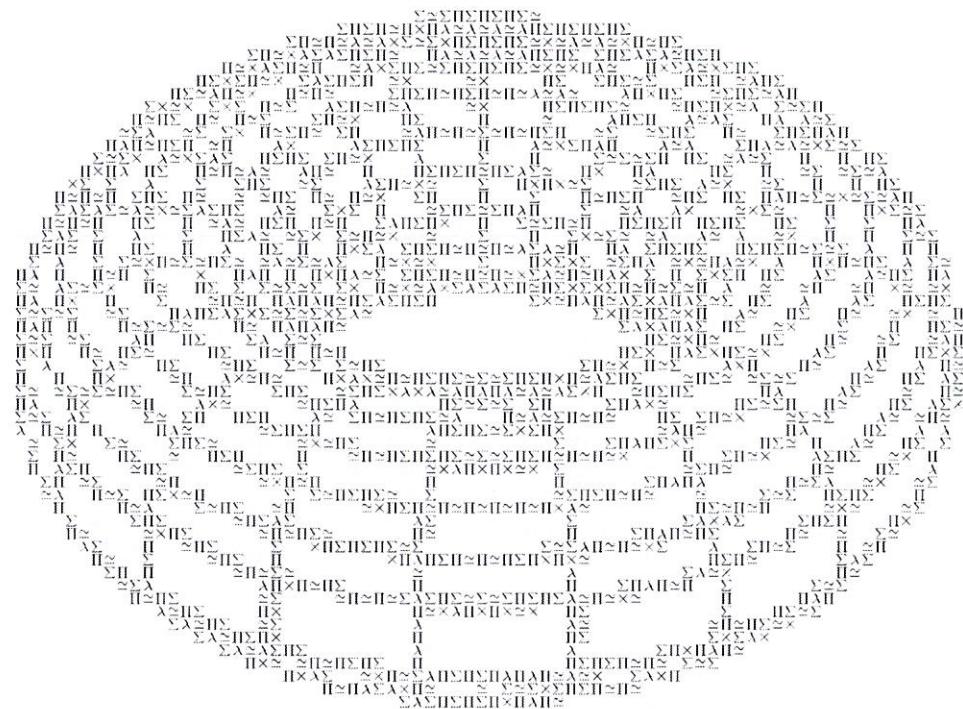


Illustration de couverture du livre

Homotopy Type Theory : Univalent Foundations of Mathematics (2013)

Au tournant du vingtième siècle (entre 1880 et 1920), poussées par des paradoxes indépassables, les mathématiciens ont été contraints de s'engager dans une grande tâche de refondation. On a appelé cette période de l'histoire des mathématiques : la crise des fondements. Depuis, les mathématiques ont acquis des fondations solides, formelles.

À titre d'exemple important, mentionnons Les éléments de mathématiques, écrits collectivement par un groupe de mathématiciens réunis sous le pseudonyme de Nicolas BOURBAKI. Cette œuvre, commencée en 1935, avait pour objectif de présenter toutes les mathématiques contemporaines en ne partant de « rien ».

Récemment, sous l'impulsion du mathématicien Vladimir VOEVODSKY (1966–2017), une nouvelle approche de fondation des mathématiques a émergé, appelé « fondation univalente ».

Dans ce premier chapitre du cours de mathématiques, on se donne un but analogue — mais qu'on poursuivra avec moins de rigueur : définir un cadre dans lequel on peut dire et faire des mathématiques.



1

Éléments de logique

plan de cours et principaux résultats

I. Deux notations, une abréviation

- 1) Le symbole \coloneqq
- 2) Le « ssi de définition »
- 3) La locution *ie*

II. Assertions

1.1

- 1) Définition
 - a) Assertions
 - b) La locution « on a »
- Convention 1.1
Si P est une assertion, on écrira « On a P » pour dire que P est vraie.
- 2) Variables libres, variables liées/muettes, prédictats
- 3) Vocabulaire

III. Opérations sur les assertions

1.5
1.4

- 1) Négation
- 2) Conjonction
- 3) Disjonction
- 4) Négation de la conjonction, négation de la disjonction
 - a) Un calcul
 - b) Interchangeabilité
- 5) Lois de De Morgan

Proposition 1.2 ^①

- 1) $\text{non}(\text{non}(P)) \equiv P$
- 2) $\text{non}(P \text{ et } Q) \equiv \text{non}(P) \text{ ou } \text{non}(Q)$
- 3) $\text{non}(P \text{ ou } Q) \equiv \text{non}(P) \text{ et } \text{non}(Q)$

6) Implication

- a) Définition
- b) Exemples
- c) Vocabulaire
- d) Implication réciproque
- e) Principe de contraposition

Proposition 1.3^⑦

$$(P \implies Q) \equiv (\neg Q \implies \neg P)$$

- f) Négation de l'implication

Proposition 1.4^⑧

$$\neg(P \implies Q) \equiv (P \text{ et } \neg Q)$$

- g) Ne pas confondre « donc » et « \implies »
- h) Une autre écriture de $P \implies Q$

7) Équivalence

- a) Définition
- b) Lien entre équivalence et implication
- c) Vocabulaire
- d) Ne pas confondre « ie » et « \iff »

8) Double-distributivité entre « et » et « ou »

Proposition 1.5^⑨

- 1) $(P \text{ et } Q) \text{ ou } R \equiv (P \text{ ou } R) \text{ et } (Q \text{ ou } R)$
- 2) $(P \text{ ou } Q) \text{ et } R \equiv (P \text{ et } R) \text{ ou } (Q \text{ et } R)$

9) Chaînes d'implication

IV. Tautologies

1) Définition

- a) Formules propositionnelles
- b) Définition des tautologies
- c) Exemples

2) Principe du tiers-exclu

3) Raisonnement par l'absurde

V. Quantificateurs

1.8

1) Quantificateur universel

- a) Définition
- b) Assertions universellement quantifiées sur le vide

Proposition 1.6

L'assertion « $\forall x \in \emptyset, P(x)$ » est toujours vraie.

- c) Notations

- 2) Quantificateur existentiel
 - a) Définition
 - b) Notations
 - c) Quantificateur d'existence unique
 - d) Vocabulaire
- 3) Ordre des quantificateurs
 - a) Non-interchangeabilité $\forall - \exists$
 - b) Interchangeabilités $\forall - \forall$ et $\exists - \exists$
- 4) « Pour tout x tel que... »
- 5) Négation des quantificateurs

Proposition 1.7^⑦

- 1) $\text{non}(\forall x \in E, P(x)) \equiv \exists x \in E : \text{non}(P(x))$
- 2) $\text{non}(\exists x \in E : P(x)) \equiv \forall x \in E, \text{non}(P(x))$

VI. Démonstrations : méthodes et exemples

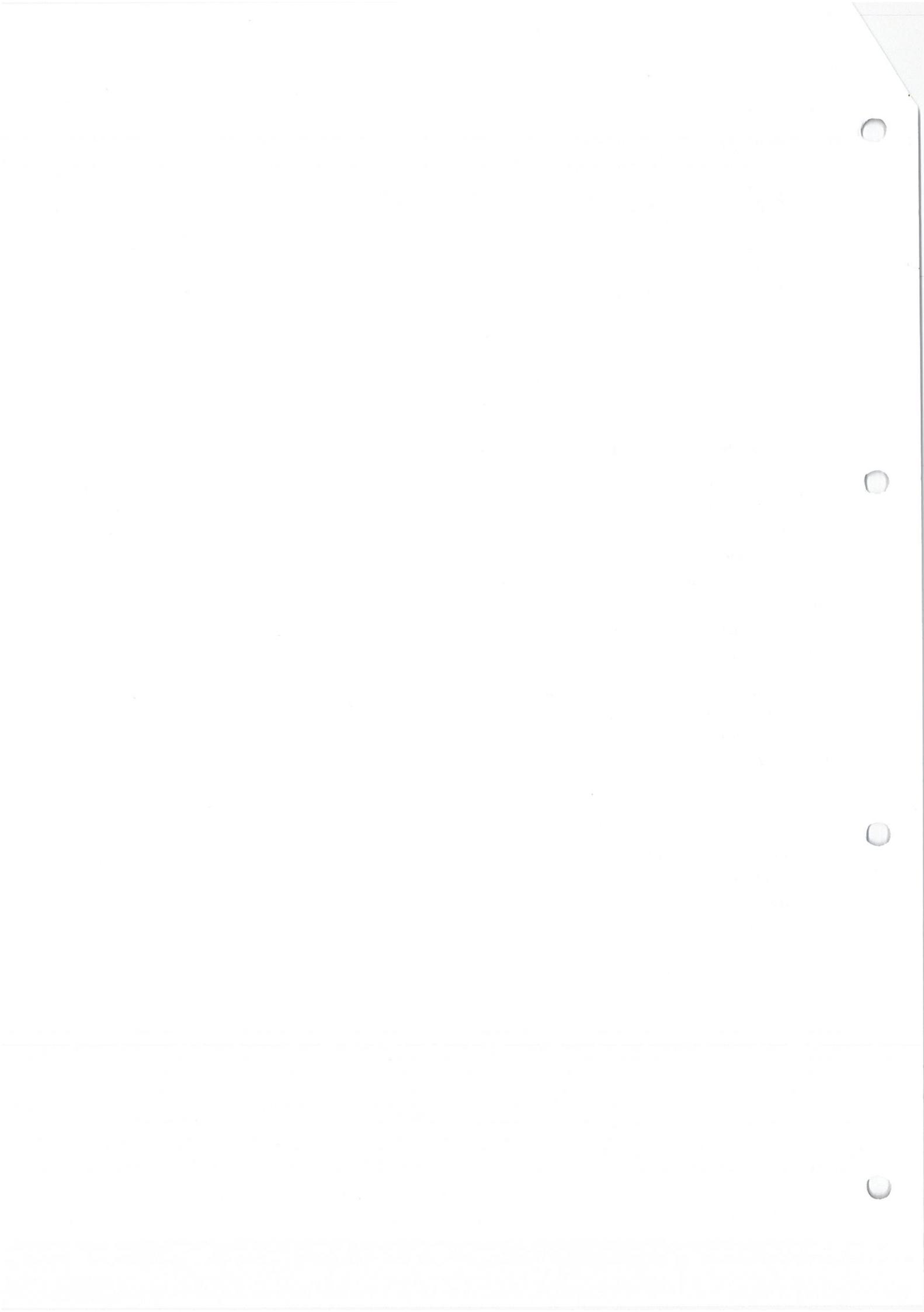
- 1) \forall -assertions
- 2) Implications
- 3) Démonstration par contraposition
- 4) Équivalences
- 5) Démonstration par disjonctions de cas
- 6) $\forall \Rightarrow$ -assertions
- 7) Démonstrations par l'absurde
- 8) \exists -assertions
 - a) Explicitement
 - b) En invoquant une autre \exists -assertion
 - c) Par analyse-synthèse
- 9) Assertions d'existence unique
- 10) Démonstration par analyse-synthèse

1.31	
1.18	
1.24	
1.47	

VII. Principes de récurrence

- 1) Récurrences simples
- 2) Récurrences doubles
- 3) Récurrences fortes
- 4) Autres types de récurrence

2.22	
2.19	
2.17	



M VI Démonstration : méthodes et Exemples

1) V-Assertions

Pour montrer que " $\forall x \in E, P(x)$ ", on fixe :

" $\exists q, \forall x \in E, P(x)$ "

Soit $x \in E$.

(Montrons) que $P(x)$

(..)

(Ainsi,) $P(x)$

(Ainsi,) on a montré, ~~"~~ " $\forall x \in E, P(x)$ "

Exemple :

Mq $\forall x > 0, x + \frac{1}{x} \geq 2$) dis

Soit $x > 0$

Mq $x + \frac{1}{x} \geq 2$) dis

M^d Delta + Reflexe Je préfère $\geq 0 \& < 0 = \mathbb{R}^*$

Posons $\Delta := x + \frac{1}{x} - 2$

On a $\Delta = \frac{x^2 + 1 - 2x}{x}$

Mise au même dénominateur, ie factoriser

$$\Delta = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$$

Ainsi $x + \frac{1}{x} \geq 2$

(C) : Ainsi, on a ~~pas pas~~ $\forall x > 0, x + \frac{1}{x} \geq 2$) dis

2) Implications

Pour mq " $P \Rightarrow Q$ ", on fera

"Montrons $P \Rightarrow Q$

Supposons P

Montrons Q

(...)

Ainsi, on a Q

Ainsi, on a montré $P \Rightarrow Q$

Exemple: Montrons que $\forall n \in \mathbb{Z}, n\text{pair} \Rightarrow n^2\text{pair}$

Mq $\forall n \in \mathbb{Z}, n\text{pair} \Rightarrow n^2\text{pair}$

Soit $n \in \mathbb{Z}$

Mq $n\text{pair} \Rightarrow n^2\text{pair}$

Supposons $n\text{pair}$

Montrons que $n^2\text{pair}$

Comme n est pair, fixons $k \in \mathbb{Z}$ tq $n = 2k$

$$\text{On a } n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$$

Ainsi, n^2 est pair

Ainsi, on a $n\text{pair} \Rightarrow n^2\text{pair}$

ccl : on a mq

$\forall n \in \mathbb{Z}, n\text{pair} \Rightarrow n^2\text{pair}$

3) Démonstration par contreposition

Mq $\forall n \in \mathbb{Z}, n^2 \text{ pair} \Rightarrow n \text{ pair}$

Soit $n \in \mathbb{Z}$

Mq $n^2 \text{ pair} \Rightarrow n \text{ pair}$

Par contreposition, mq $n \text{ impair} \Rightarrow n^2 \text{ impair}$

Supposons $n \text{ impair}$

Mq $n^2 \text{ impair}$

Comme $n \text{ impair}$, fixons $k \in \mathbb{Z}$, ~~$n = 2k + 1$~~ n

$$\text{On a } n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

$$= 2(2k^2 + 2k) + 1$$

¶

Ainsi, n^2 est impair

Par contreposition, on a mq $n^2 \text{ pair} \Rightarrow n \text{ pair}$

Ainsi, $n^2 \text{ pair} \Rightarrow n \text{ pair}$

CC1 : on a mq $\forall n \in \mathbb{Z}, n^2 \text{ pair} \Rightarrow n \text{ pair}$

4) Equivalences

On raisonne par double-équivalence-implication

Pour montrer que $P \Leftrightarrow Q$, on fera

Mq $P \Leftrightarrow Q$

On raisonne par double-implication

Mq $P \Rightarrow Q$

(...)

Ainsi, on a $P \Rightarrow Q$

Mq $Q \Rightarrow$

(...)

Ainsi, on a $Q \Rightarrow P$

CC1. Par double implication, on a mq

$P \Rightarrow Q$

Ex :

Mq $\forall n \in \mathbb{Z}$, n pair $\Leftrightarrow n^2$ pair

~~Procérons par double~~ :

Soit $n \in \mathbb{Z}$

Mq ~~n pair~~ $\Rightarrow n^2$ pair

On raisonne par double-implication (ORDI)

• Mq n pair $\Rightarrow n^2$ pair

Supposons n pair

Mq n^2 pair

↑ n pair, fixons $k \in \mathbb{Z}$ tq $n = 2k$

On a $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$

Ainsi n^2 pair

Donc ~~n pair~~ $\Rightarrow n^2$ pair

• Mq n^2 pair $\Rightarrow n$ pair

On raisonne par contreposition

Mq n impair $\Rightarrow n^2$ impair

Supposons n impair

Mq n^2 impair

↑ n impair, fixons $k \in \mathbb{Z}$ tq $n = 2k+1$

On a $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$

Ainsi, on a n^2 impair

Ainsi, ~~n^2 pair \Rightarrow n pair~~ n impair \Rightarrow n^2 impair

Ainsi n^2 pair \Rightarrow n pair

Ainsi, n^2 pair \Leftrightarrow n pair

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, n \text{ pair} \Leftrightarrow n^2 \text{ pair}}$

5) Par disjonction de cas

Méthode $\forall n \in \mathbb{Z}, \frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{Z}$

Soit $n \in \mathbb{Z}$

Méthode $\frac{(n+1)n}{2} \in \mathbb{Z}$

On distingue deux cas

Premier cas : on suppose n pair

Finons $k \in \mathbb{Z}$ tq $n = 2k$

Donc

$$\frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{2k(2k+1)}{2} = k(2k+1) \in \mathbb{Z}$$

Dans ce cas $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{Z}$

Deuxième cas, on suppose n impair

Donc $n+1$ est pair

D'après le premier cas : $\frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2} \in \mathbb{Z}$

$$\text{or } \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n+2}{2} + (n+1)$$

Comme $n+1 \in \mathbb{Z}$, on a $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{Z}$

Dans ce cas, on a $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{Z}$

Dans tout les cas, on a $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{Z}$

CC1 : On a mg $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{Z}$

Rq : 1) Évidemment, on aurait pu dire " $n = 2k + 1$ "

2) On a $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n(n+1)}{2} = \sum_{k=1}^n k$

!!! 3) \textcircled{T} $(R^*) \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ et $\binom{n}{3} = \frac{(n)(n-1)(n-2)}{3!}$
 $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$

4) \textcircled{T} $(R^*) \quad [0, n] \text{ a } n+1 \text{ éléments}$

Donc $[0, n-1]$ a n éléments

$$\binom{n}{k} = \frac{(n-0)(n-1)(n-2)\dots(n-3)\dots(n-(k-1))}{k!}$$

exo) Mg $\forall n \in \mathbb{Z}, n$ pair $\Leftrightarrow n^3$ pair

exo) Mg $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad n$ pair $\Leftrightarrow n^k$ pair

Rq \textcircled{T} : $\frac{n \cdot (n-1) \dots (n-(k-1))}{k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))(n-k)\dots 2 \cdot 1}{k!(n-k)(n-(k+1))\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}$
 $= \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Rq \textcircled{T} : $\frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \dots (n-(k-1))}{1 \cdot 2 \dots k} \cdot \frac{(n+1)}{(k+1)}$

$$! = \frac{(n+1) n (n-1) \dots (n-(k-1))}{\binom{n+1}{k+1} (k+1)!}$$

AC $\rightsquigarrow = \binom{n+1}{k+1} (k+1)!$ Forme d'absorption

F^{mle} d'absorption :

$$\frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} \quad (*)$$

(A) Démontrer (*) avec $\frac{n!}{k!(n-k)!}$

6) $\forall \Rightarrow$ -assertion

Pour montrer que " $\forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)$ " on fera
"Mq $\forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)$ "

Soit $x \in E$ tel que $P(x)$

Montrons que $Q(x)$

Ainsi, on a $Q(x)$

Ainsi, on a mq $\forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)$

Exemple : (on admet : $\forall x \geq 0, \sqrt{x} > 0$) (exo)

Mq $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement croissante
 $x \rightarrow \sqrt{x}$

(*) c'est une \forall -assertion, mieux, une $\forall \Rightarrow$ -assertion

i.e. mq $\forall x, y \in \mathbb{R}^+, x < y \Rightarrow \sqrt{x} < \sqrt{y}$

Soient $x, y \in \mathbb{R}^+$ tq $x < y$

Mq $\sqrt{x} < \sqrt{y}$

On pose $\Delta := \sqrt{y} - \sqrt{x}$

On a $y \geq x$ donc $y > 0$ donc $\sqrt{y} > 0$

donc $\sqrt{x} + \sqrt{y} > 0$

On a $\Delta = \frac{(\sqrt{y} - \sqrt{x})(\sqrt{y} + \sqrt{x})}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} = \frac{y - x}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} > 0$

Donc, on a $\sqrt{x} < \sqrt{y}$

Ainsi, on a mq $\forall x, y \in \mathbb{R}^+, x < y \Rightarrow \sqrt{x} < \sqrt{y}$

Rq : Mg $\forall x > 0$, $\sqrt{x} > 0$

Soit $x > 0$

Mg $\sqrt{x} > 0$

On supp. que $\sqrt{x} \leq 0$

$\hat{C} \sqrt{x} \leq 0$, on $\sqrt{x} = 0$

donc $x = (\sqrt{x})^2 = 0^2 = 0$

c'est absurde

Donc $\sqrt{x} > 0$

Donc $\forall x > 0$, $\sqrt{x} > 0$

F) Demo par l'absurde

OPRQD

Ex : Mg $\sqrt{2}$ est irrationnel

ORPA et on supp que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

Fixons donc $p, q \in \mathbb{Z}$ tq

On a $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, i.e. on a

$$p^2 = 2q^2$$

donc p^2 est pair

Or, $\forall n \in \mathbb{Z}$, n pair $\Rightarrow n^2$ pair, donc p est pair

Fixons $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2k$

On a $(2k)^2 = 2q^2$ donc $2k^2 = q^2$

donc q^2 est pair, donc q est pair

c'est absurde car p, q sont pairs et premiers entre eux

Ainsi, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Exo

Mg $\sqrt{5} > 3\sqrt{3} - 3$

8) \exists -Assertions

Pour montrer que " $\exists x \in E : P(x)$ " on fera

$$^a \text{ Mg } \exists x \in E : P(x)$$

Posons $x_0 := \dots$

On a $x_0 \in E$

On a $P(x_0)$

Ainsi, On a $\exists x \in E : P(x)$

Ex: Mg $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{R} . x < z < y$

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tq $x < y$

Mg $\exists z \in \mathbb{R} : x < z < y$

Posons $z_0 := \frac{x+y}{2}$

On a $x < y$ donc $x+z_0 < x+y$

donc $x < \frac{x+y}{2}$, i.e. $x < z_0$

Et on a $x < y$ donc $x+y < y+y$

donc $\frac{x+y}{2} < y$, i.e. $z_0 < y$

Ainsi, $x < z_0 < y$

Donc $\exists z \in \mathbb{R} : x < z < y$

CC: On a mg $\forall x, y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R} : x < z < y$

Rq Soient $x < y$, alors

$\frac{x+y}{2}$ est le milieu de $[x; y]$ R*

$y-x$ est la longueur de $[x; y]$ R*

$\frac{y-x}{2}$ est le rayon de $[x; y]$ R*

$$\text{On a } \begin{cases} x + \frac{y-x}{2} = \frac{x+y}{2} \\ y - \frac{y-x}{2} = \frac{x+y}{2} \end{cases} \quad \text{AC}$$

b) en invoquant une autre \exists -assertion

$\text{Mg } \exists x \in E : P(x)$

On sait que $\exists y \in F : Q(y)$

Fixons un tel y

(...)

"On utilise ce y pour construire un x_0 convenable"

(ex n)

Ex: $\text{Mg } \forall a, b \in \mathbb{R}, \exists x, y \in \mathbb{R} : a < x < y < b$

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$

$\text{Mg } \exists x, y \in \mathbb{R} : a < x < y < b$

Je sais que : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta \Rightarrow \exists \gamma \in \mathbb{R} \text{ tel que } \alpha < \gamma < \beta$

Donc en particulier (pour $\alpha = a$ et $\beta = b$),

on sait que $\exists z_0 \in \mathbb{R} : a < z_0 < b$

Fixons un tel z_0 .

De plus, en particulier avec $\alpha = z_0$ et $\beta = b$ on a

$\exists y_0 \in \mathbb{R} : z_0 < y_0 < b$

Fixons un tel y_0

On a $a < z_0 < y_0 < b$

Donc : $\exists x_0, y_0 \in \mathbb{R} : a < x_0 < y_0 < b$

CC1: $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b \Rightarrow \exists x, y \in \mathbb{R} : a < x < y < b$

c) Analyse synthèse

cf voir plus loin

$$g) \exists! x \in E : P(x)$$

$$\text{Mq } \exists! x \in E : P(x)$$

Existence

$$\text{cf(8)}$$

sketch

$$\left(\dots \right)$$

Unicité

Soit $x_1, x_2 \in E$ tq $P(x_1)$ et $P(x_2)$

$$\text{Mq } x_1 = x_2$$

$$\left(\dots \right)$$

$$\text{Ainsi, } x_1 = x_2$$

D'où l'unicité

CL : on a mq $\exists! x \in E : P(x)$

Ex : On admet l'existence de $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(\text{Mq : si } x \in \mathbb{R}, \text{ on pose } \exp(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n)$$

$$\left(\text{Rq : } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n - 7}{n^2 - 5n + 8 - \frac{1}{n}} = 2 \right)$$

Mq $\exists ! f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \begin{cases} f \text{ dérivable} \\ f' = f \text{ et } f(0) = 1 \end{cases}$

(Rq: Si P et Q sont des assertions, on note

$$\begin{cases} Q \\ P \end{cases} := P \wedge Q$$

'Existence': ok car $\exp' = \exp$

'Unicité':

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tq $\begin{cases} f \text{ est dérivable} \\ f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$

Mq $f = \exp$

• D'Artuce: Posons $g := \frac{f}{\exp}$

Cette def° est légitime car $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$

La fonction g est dérivable

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a:

$$g'(x) = \frac{f'(x) \cdot \exp(x) - f(x) \cdot \exp'(x)}{\exp^2(x)}$$

$$= \frac{f(x) \exp(x) - f(x) \cdot \exp(x)}{(\dots)}$$

$$g'(x) = 0$$

donc g est constante

$$\text{or } g(0) = \frac{1}{1} = 1$$

donc $g = 1$

$$\text{donc } f = \exp$$

!!! 10) Analyses - Synthèses

L'AS permet de trouver des solut°

L'AS permet de

- résoudre des éq° "compliquées"
- mg des \exists -Assertions
- mg des $\exists!$ -assertions

Si on veut trouver tous les $x \in E$ tels que $P(x)$, on fera

Ex : résoudre $\sqrt{x^2 - 3x + 2} = |x - 3|$

Analyse

Soit $x \in E$ tel que $P(x)$:

donc

donc

donc

(1. + x)

donc $x = 1$ ou $x = 2$ (par exemple)

Synthèse

Posons $x = 1$

Mg $P(x)$

Souvent, on écrit "Vérifions que $P(x)$ "

(...)

(C1 ; 1. + x)

Ex : Résolvons l'équation $\sqrt{x^2 - 3x + 2} = |x - 5|$

ORPAS

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sqrt{x^2 - 3x + 2} = |x - 5|$

Donc $x^2 - 3x + 2 = (x - 5)^2$

ic $x^2 - 3x + 2 = x^2 - 10x + 25$

donc $7x = 23$, i.e. $x = \frac{23}{7}$

Synthèse

$$\text{Posons } z := \frac{23}{7}$$

Vérifions $P(z)$

$$\text{On a } z^2 - 3z + 2 = \frac{(23)^2}{7^2} - 3 \times \frac{23}{7} + 2 \times \frac{7^2}{7^2}$$

$$\text{Astuce de calcul} = \frac{23(23-21)}{7^2} + 2 \times \frac{49}{7^2}$$

$$= \frac{163}{49} = \left(\frac{12}{7}\right)^2$$

$$\text{Donc } \sqrt{z^2 - 3z + 2} = \frac{12}{7}$$

$$\text{de plus } |z - 5| = \left|5 - \frac{23}{7}\right| = \frac{|35 - 23|}{7} = \frac{12}{7}$$

$$\text{Donc } \sqrt{z^2 - 3z + 2} = |z - 5|$$

CC1: L'ensemble S des solution est $\left\{\frac{23}{7}\right\}$

ou Donc l'ensemble

$$\text{Donc } \left\{z \in \mathbb{R} \mid \sqrt{z^2 - 3z + 2} = |z - 5|\right\} = \left\{\frac{23}{7}\right\}$$

Rq: Si à l'issue de l'analyse, on ne trouve qu'une valeur possible, alors on a montré l'unicité.

On l'écrira à la fin de l'analyse (modulo l'existence)

$$\text{Mq } \forall f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \exists g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: \begin{cases} f = g + h \\ g \text{ paire} \\ h \text{ impaire} \end{cases}$$

Soit f une fonction de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

Mq $\exists g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

ORPAS

Analyse

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\text{On a } f(x) = g(x) + h(x)$$

$$f(-x) = g(-x) + h(-x)$$

$$\text{donc } f(-x) = g(x) - h(x)$$

$$\text{donc } g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

Rq Ainsi, si g existe on sait qu'elle est unique

$$\text{et } h(x) = f(x) - g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Synthèse

$$\text{Posons } g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

$$\text{et } h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Vérifions que $\begin{cases} f = g + h \\ h \text{ impaire} \\ g \text{ paire} \end{cases}$

On a

$$\begin{aligned} g(x) + h(x) &= \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } g(-x) &= \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} \\ &= \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x) \end{aligned}$$

$$\text{et } h(-x) = f(-x) - (-(-x))$$

$$h(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = -h(x)$$

Ainsi h impaire, g paire et $f = g + h$

Ainsi, $\exists g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : (\dots)$

CC1 On a mg V $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\exists g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : (\dots)$

VII Principe de récurrence (rec)

1) rec Simple

Thm : (Principe de rec)

Soit $P(n)$ un prédictat de $n \in \mathbb{N}$

Ex: $P(n) = n^2$ pair

On suppose que :

1) $P(0)$ est vrai

2) $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Alors on a $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$

D/ ORPA et osp $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \text{non } P(n_0)$

Posons $A := \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ est fausse}\}$

On sait que $A \neq \emptyset$

Notons n_0 le plus petit élément de A

On a $n_0 \in A \therefore P(0)$ est vrai; $n_0 \neq 0$

et donc $n_0 \geq 1$

Posons $n_1 := n_0 - 1$

On a : $n_1 \in \mathbb{N}$ car $n_0 \geq 1$

$n_1 < n_0$

Donc : $P(n_1)$ est vrai

Or, on sait que $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow P(n+1)$

Donc $P(n_1+1)$ est vrai; i.e $P(n_0)$ est vrai

Absurde on a $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, P(n)}$

$\sqrt{3} >$

Ex et modèle de réduction

Soit $a \in \mathbb{R}$ tq $a \neq 1$

$$\text{Mq } \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $P(n) \quad " \sum_{k=0}^n a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}"$

Mq par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$

• Mq $P(0)$

$$\text{On a } \sum_{k=0}^0 a^k = a^0 = 1 \quad R^X$$

$$\text{et } \frac{a^{0+1} - 1}{a - 1} = 1 \quad \forall a \in \mathbb{R}, a^0 = 1 \\ 0^0 = 1$$

d'où $P(0)$

• Mq $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $P(n)$

Mq $P(n+1)$

$$\begin{aligned} \text{On a } \sum_{k=0}^{n+1} a^k &= \sum_{k=0}^n a^k + a^{n+1} \\ &= \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} + a^{n+1} = \frac{a^{n+1} - 1 + (a-1)a^{n+1}}{a - 1} \\ &= \frac{a^{n+1} - 1 + a^{n+2} - a^{n+1}}{a - 1} = \frac{a^{n+2} - 1}{a - 1} \end{aligned}$$

D'où $P(n+1)$

D'où l'hérédité

Ainsi, par rec, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$

2) Recurrences doubles

Prop : Soit $P(n)$ un prédictorale $n \in \mathbb{N}$ tel que :

- $P(0)$ et $P(1)$ sont V
- $\forall n \in \mathbb{N}, (P(n) \text{ et } P(n+1)) \Rightarrow P(n+2)$

Alors, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$

D/ **exo***

Rqve : • Ecrire $P(n)$: " $\forall n \in \mathbb{N} \ n \leq 2^n$ "
est un Bug[∞]. Que serait $P(0)$?
ce qui n'a pas de sens.

- De même, on peut faire des recurrences triples, etc.
(exo) l'énoncer

Ex : Considérons (U_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_1 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+2} = 3U_{n+1} - U_n \end{cases}$$

Mq $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 2^n + 1$

ORP **rec**

On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: " $U_n = 2^n + 1$ "

On a $P(0)$

$$\text{En effet : } U_0 = 2 = 2^0 + 1$$

On a $P(1)$

$$\text{En effet } U_1 = 3 = 2^1 + 1$$

$\forall n \in \mathbb{N}, (P(n) \text{ et } P(n+1)) \Rightarrow P(n+2)$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $P(n)$ et $P(n+1)$

Mq $P(n+2)$

$$\text{On a } U_{n+2} = 3U_{n+1} - 2U_n$$

D'après $P(n)$ et $P(n+1)$,

$$U_{n+2} = 3(2^{n+1} + 1) - 2(2^n + 1)$$

$$= 3 \cdot 2^{n+1} + 3 - 2^{n+1} - 2$$

$$= 2^{n+2} + 1$$

D'où $P(n+2)$

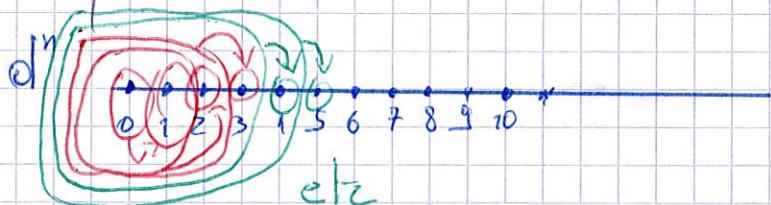
D'où l'hérédité double

Ccl : par rec double, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 2^n + 1$

3) Recurrence Forte

Pour mq $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ par rec forte, on doit faire
• mq $P(0)$

• mq $P(n+1)$ en utilisant si on veut $P(n), P(n-1), \dots, P(0)$



La rec forte est \oplus puissante que la rec simple

Mais H

Soit $P(n)$ un prédicat de $n \in \mathbb{N}$ tel que

Thm $P(0)$ vrai et $\forall k \in [0; n], P(k) \rightarrow P(n)$

* D/ On introduit un nouveau prédicat $Q(n)$ défini par

$$Q(n) : \forall k \in [0; n], P(k)$$

pour $n \in \mathbb{N}$

$O_n \circ Q(0)$ vrai

En effet, $P(0)$ est V donc on a bien $\forall k \in [0; 0], P(k)$

Mg $\forall n \in \mathbb{N}, Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $Q(n)$

Mg $Q(n+1)$

Soit $k \in [0, n+1]$

Mg $\neg P(k)$

On distingue deux cas

Si $k \in [0, n]$, on a bien $P(k)$ car on a supposé $Q(n)$ vraie

Mg $P(n+1)$

On a supposé dans l'énoncé

$\forall m \in \mathbb{N}, (\forall p \in [0, m] P(p)) \Rightarrow P(m+1)$

i.e $\forall m \in \mathbb{N}, Q(m) \Rightarrow Q(m+1)$

En particulier, on a $Q(n) \Rightarrow P(n+1)$

or $Q(n)$ vraie

Donc $P(n+1)$ vraie

D'où $P(k)$

D'où : $\forall k \in [0, n+1], P(k) ; i.e Q(n+1)$

Donc, on a mg $\forall n \in \mathbb{N}, Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$

Pour rec, on a donc $\forall n \in \mathbb{N}$,

(AC)

Ex : Mg n entier ≥ 2 est le produit de nombres premiers

On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: "n'est le produit de ab premiers"

Mg $\forall n \geq 2, P(n)$ par (AC) forte

$P(2)$ est vrai, en effet, 2 est premier

Mg $\forall n \geq 2, (\forall k \in [2, n], P(k)) \Rightarrow P(n+1)$

Soit $n \geq 2$ tq $\forall k \in [2, n], P(k)$

Mg $P(n+1)$

On distingue 2 cas :

Si $n+1$ est

Si non, (i.e. si $(n+1)$ n'est pas premier, il est composé)

Fixons donc $k, P \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{N}$ tq :

$$n+1 = k \cdot P$$

$\exists P(k)$ et $P(P)$ sont vraies, \textcircled{AC} , k et P

peuvent s'écrire \exists produit de nb premiers

Dès même pour $P(n+1)$

D'où l'hérédité forte

D'où $\forall n \geq 2, P(n)$

Rq : on a $(\forall x \in [0,1], x^2 \leq x)$ et $(\forall x > 1, x^2 > x)$

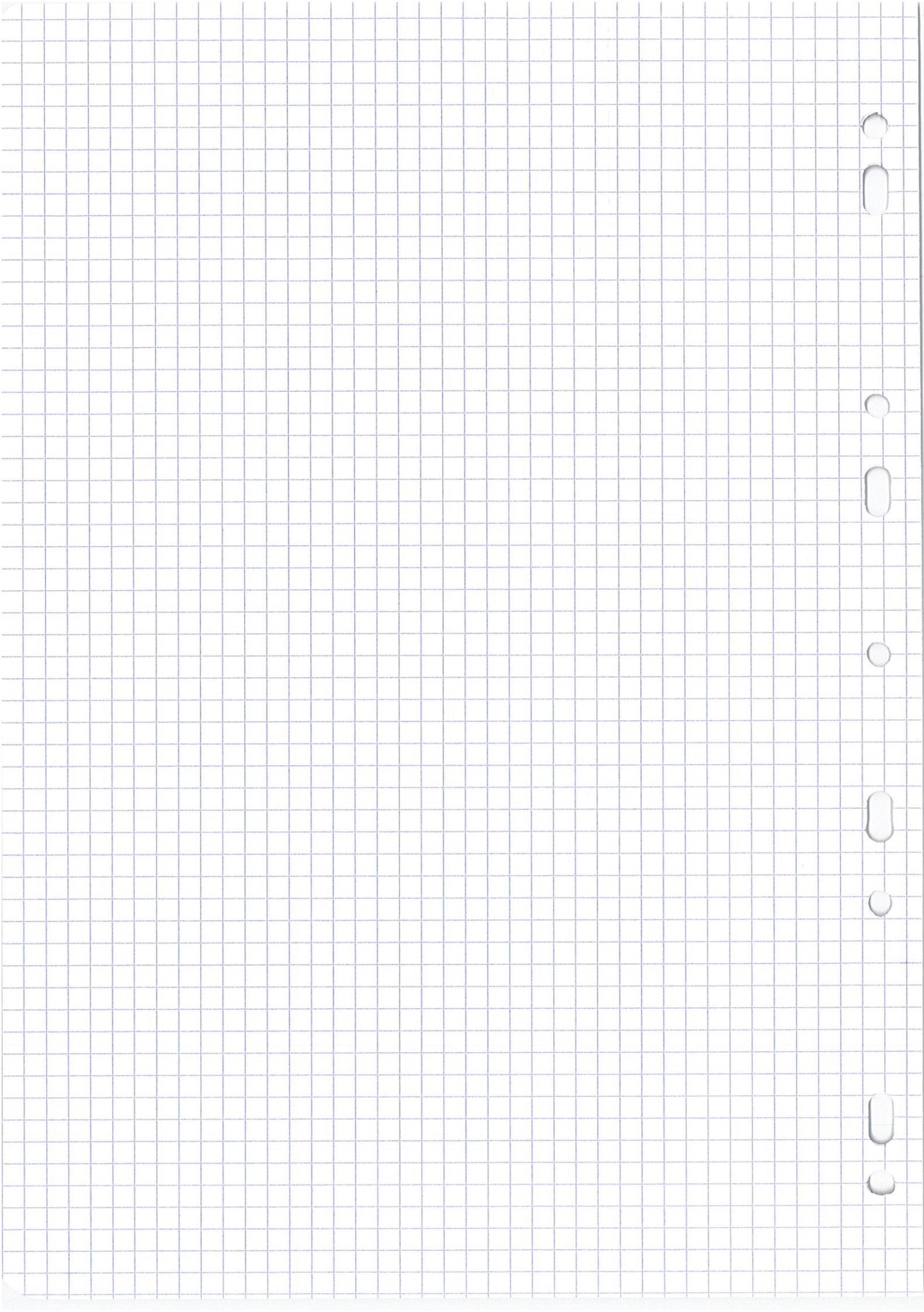
Δ \forall ne fixe pas la valeur de la variable

i) Autres types de \textcircled{rec}

- Les initialisations peuvent commencer à 1, 2 etc

- On peut faire des \textcircled{rec} descendantes

- On peut faire des \textcircled{rec} finies ascendantes ou descendantes



Annexe du cours

① Dans " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ ", la variable "x" est liée
Ce n'est pas un prédictat de x

" $x \geq 2$ " est un prédictat de x

PP15 D/ $(P \Rightarrow Q) \equiv (\text{non}(Q)) \Rightarrow (\text{non}(P))$

On a	P	Q	non Q	non P	non Q \Rightarrow non P
	V	V	F	F	V
	V	F	V	F	F
	F	V	F	V	V
	F	F	V	V	V

PP16 D/ $\text{non}(P \Rightarrow Q) \equiv (P \text{ et } \text{non}(Q))$

On a	P Q	$P \Rightarrow Q$	$\text{non}(P \Rightarrow Q)$	$\text{non } Q$	$P \text{ et } \text{non } Q$
	V V	V	F	F	F
	V F	F	V	V	V
	F V	V	F	F	F
	F F	V	F	V	F

② Ex de mauvaise utilisation de " \Leftrightarrow "

~~Soit~~ Soit $x \in \mathbb{R}$: $x^2 + h x + \cancel{12} = 0$

On a $x^2 + h x - \cancel{12} = 0 \quad (\Rightarrow) \quad (x+2)^2 - h^2 - \cancel{12} = 0$

$$(\Rightarrow) (x+2)^2 - 16 = 0$$

$$(\Rightarrow) (x+2)^2 = h^2$$

$$(\Rightarrow) (x+2) = \pm h$$

Bonne red^o, n°1

Soit $x \in \mathbb{R}$ tq $x^2 + h x - 12 = 0$

On a $x^2 + h x - 12 = 0$, i.e. $(x+2)^2 - h^2 - 12 = 0$

i.e. $(x+2)^2 - 16 = 0$ i.e. $(x+2)^2 = 0$ i.e. $(x+2)^2 = h^2$

i.e. on a $(x+2) = \pm h$

Très Bonne red°

Soit $x \in \mathbb{R}$ tq $x^2 + hx - 12 = 0$

On a : $x^2 + hx - 12 = (x+2)^2 - h - 42$
 $= (x+2)^2 - 1^2$

Comme $x^2 + hx - 12 = 0$, on a $(x+2)^2 - 1^2 = 0$
ie $(x+2)^2 = 1^2$ ie $x+2 = \pm 1$

D/ PPZO

On a	P	Q	R	P et Q	R	(P et Q) ou R
	V	V	V	V	V	V
	V	V	F	V	F	V
	V	F	V	F	F	F
	V	F	F	F	F	V
	F	V	V	F	F	F
	F	V	F	F	F	V
	F	F	V	F	F	V
	F	F	F	F	F	F

et	P	Q	R	P ou R	Q ou R	(P ou R) et (Q ou R)
	V	V	V	V	V	V
	V	V	F	V	V	V
	V	F	V	V	V	V
	V	F	F	V	F	F
	F	V	V	V	V	V
	F	V	F	F	V	F
	F	F	V	V	V	V
	F	F	F	F	F	F

De m, on a $(P \text{ ou } Q) \text{ et } R = (P \text{ et } R) \text{ ou } (Q \text{ et } R)$

D/ En effet, pour $x = -2$, $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$
 est fausse. En effet, " $x^2 = 4$ " est vrai, mais, " $x = 2$ " est F
Rq: c'est le seul n que marche

D/PP 25. 1) à faire

* ③ Rq: si $P(x)$ est un prédict de $x \in E$, alors
 dans " $\forall x \in E, P(x)$ " la variable " x " est liée/muette
 $"x^2 \geq 0"$ \Rightarrow libre
 $"\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0"$ \Rightarrow liée

D'une certaine façon, on a l'analogie

$$\sum /+$$

$$\forall / \text{et}$$

En effet, si $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille de réels

$$\text{On a } \sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

Si $P(i)$ est un prédict $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, on a

$$\forall i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, P(i) \Leftrightarrow P(1) \text{ et } P(2) \text{ et } \dots \text{ et } P(n)$$

$$\forall x \in E, P(x) \Leftrightarrow \forall x, (x \in E \Rightarrow P(x))$$

si $E = \emptyset$, $x \in E$ tjs faux donc $x \in E \Rightarrow P(x)$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \geq 0$$

$$\forall x \geq 0, P(x) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+, P(x)$$

Si $a, b \in \mathbb{Z}$, on note

$$\llbracket a ; b \rrbracket = \mathbb{Z} \cap [a, b]$$

④ Considérons le texte

$$\begin{aligned} & " \exists n \in \mathbb{N} : (\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 8) \text{ et} \\ & (\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 7) \end{aligned}$$

$$\text{On a } z^2 - 5 = 7 - 5 = 2.$$

Si je sais que " $\exists x \in E : P(x)$ " est vraie,

je dois, pour utiliser cette assertion, écrire "Fixons un tel $x \in E$ "

CC1 !

Posons $\hookrightarrow :=$
Notons \hookrightarrow

$\exists x \in E : P(x)$ \hookrightarrow
qu'on sait être vraie \hookrightarrow Fixons un tel $x \in E$
et qu'on veut utiliser

Notons "f est croissante"

On sait que "f est croissante" $\equiv \forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

Rq