Intégration des fonctions trigonométriques

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 1.1

Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser les expressions suivantes.

a) $(2x+1)(3x-2)-(x+1)(2x+1)$ ....

b) $(x-1)^2+(3-3x)(x-5)$ ....

c) x^2-6x+9 ....

d) $3x\mathrm{e}^{x+x^2}-6x^2\mathrm{e}^x$ ....

Calcul 1.2

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer l'expression de $f'(x)$ dans les cas suivants.

a) $f(x)=(x-1)(x+1)$ ....

b) $f(x)=-(1-x)^2$ ....

c) $f(x)=5\cos\left(-x+\dfrac{\pi}{7}\right)$ ....

d) $f(x)=\mathrm{e}^{3x}$ ....

Premières intégrales

Calcul 1.3 — Pour commencer.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin(t)\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\cos(t)\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_0^{\pi}(\cos(t)-\sin(t))\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\sin(t)+5\cos(t))\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 1.4 — Avec des bornes plus compliquées.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin(t)\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{2\pi+\frac{\pi}{3}} \sin(t)\,\mathrm{d}t$ ....

e) $\displaystyle\int_{-\pi-\frac{2\pi}{3}}^{\frac{11\pi}{4}} \sin(t)\,\mathrm{d}t$ ....

f) $\displaystyle\int_{-\frac{9\pi}{4}}^{\frac{25\pi}{6}} \sin(t)\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 1.5 — Composition avec des fonctions affines.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-2\sin(-2t)-2)\,\mathrm{d}t$ .....

b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(3t)\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{6}}^{1} \cos\Big(3\pi t+\frac{\pi}{2}\Big)\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{6}}^{1} \Big(3\cos(\pi t)+\frac{\pi}{2}\Big)\,\mathrm{d}t$ ......

Secondes intégrales

Calcul 1.6 — Reconnaître la dérivée d'une composée (I).

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} 2t\cos(t^2)\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(3t)\cos(3t)\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\cos^2(t)\,\mathrm{d}t$ ....

e) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t$ ....

f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t)}{\cos^3(t)}\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 1.7 — Reconnaître la dérivée d'une composée (II).

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^{1} \mathrm{e}^t\sin(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\sin(t)}\cos(t)\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-3\sin(2t)+1}\cos(2t)\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_0^{1} t\mathrm{e}^{t^2}\cos(\mathrm{e}^{t^2})\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 1.8 — Une formule générale.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Combien vaut $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\sin^n(t)\,\mathrm{d}t$?

(a) n (b) $n+1$ (c) $n-1$ (d) $\dfrac{1}{n}$ (e) $\dfrac{1}{n+1}$ (f) $\dfrac{1}{n-1}$

....

Calcul 1.9 — À l'aide d'une intégration par parties (I).

Calculer les intégrales suivantes. On pourra intégrer par parties.

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos(t)\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos(t)\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (t^2+t+1)\sin(t)\,\mathrm{d}t$ ......

Calcul 1.10 — À l'aide d'une intégration par parties (II).

Calculer les intégrales suivantes. On pourra intégrer par parties.

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t\cos(t)\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t\sin(t)\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2t}\sin(t)\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \mathrm{e}^{-2t}\sin(3t)\,\mathrm{d}t$ ....

Calculs plus avancés

Entraînement 1.11 — Intégrales de Wallis.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Calculer I_0. ....

b) Calculer I_1. ....

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer laquelle des relations suivantes est vraie.

(a) $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}I_n$ (b) $I_{n+2} = \dfrac{n}{n+1}I_n$ (c) $I_{n+2} = \dfrac{n+2}{n+1}I_n$ (d) $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n}I_n$

....

L'objectif des questions suivantes est de déterminer une formule générale pour I_{2n+1} et I_{2n} pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans ce but, pour les questions d), e), f) et g), on utilisera le résultat de la question c) et on ne cherchera pas à calculer les produits d'entiers intervenant lors de ces calculs.

d) Calculer I_2. ....

e) Calculer I_3. ....

f) Calculer I_4. ....

g) Calculer I_5. ....

Soit $n \in \mathbb{N}$.

h) Déterminer une expression de I_{2n+1} à l'aide de produits d'entiers. ....

i) En déduire une expression de I_{2n+1} à l'aide de factorielles. ....

j) Déterminer une expression de I_{2n} à l'aide de produits d'entiers. ....

k) En déduire une expression de I_{2n} à l'aide de factorielles. ....

Réponses mélangées

$\frac{1}{2}$	$2(x-1)(-x+7)$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	2	1	$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$	1	$(x-3)^2$	$\frac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}$
$\frac{1}{3}$	$\sqrt{2}$	$\frac{\sin(e)-\sin(1)}{2}$	$\frac{1}{6}$	$5\sin\left(-x+\frac{\pi}{7}\right)$	$3xe^{x}(e^{x^2}-2x)$	π	$2-\pi$	
$\frac{e-e^{-2}}{6}$	1	$\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times 1$	$\frac{1+2e^{\pi}}{5}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{\pi^2}{4}-2$	$\cos(1)-\cos(e)$	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$	
$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{1}{3\pi}$	$2x$	$\frac{3-2e^{-\frac{\pi}{3}}}{13}$	$\frac{2}{3}\times 1$	$\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}$	$\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}$	$3e^{3x}$	$\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$
$e-1$	e	$\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}$	$\frac{\sqrt{2}+1}{2}$	$\frac{3}{2\pi}+\frac{7\pi}{12}$	a	0	-2
$\frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{4}$	$(2x+1)(2x-3)$	8	$\sqrt{2}$	$2(1-x)$	0	$\frac{\pi-2}{2}$

► Réponses et corrigés page 5

Fiche n° 1. Intégration des fonctions trigonométriques

Réponses

1.1 a) .... $\boxed{(2x+1)(2x-3)}$

1.1 b) ...... $\boxed{2(x-1)(-x+7)}$

1.1 c) .... $\boxed{(x-3)^2}$

1.1 d) .... $\boxed{3x\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{x^2}-2x)}$

1.2 a) .... $\boxed{2x}$

1.2 b) .... $\boxed{2(1-x)}$

1.2 c) .... $\boxed{5\sin\left(-x+\dfrac{\pi}{7}\right)}$

1.2 d) .... $\boxed{3\mathrm{e}^{3x}}$

1.3 a) .... $\boxed{2}$

1.3 b) .... $\boxed{\sqrt{2}}$

1.3 c) .... $\boxed{-2}$

1.3 d) .... $\boxed{8}$

1.4 a) .... $\boxed{0}$

1.4 b) .... $\boxed{0}$

1.4 c) .... $\boxed{\sqrt{2}}$

1.4 d) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}}$

1.4 e) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}}$

1.4 f) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}}$

1.5 a) .... $\boxed{2-\pi}$

1.5 b) .... $\boxed{-\dfrac{2}{3}}$

1.5 c) .... $\boxed{-\dfrac{1}{3\pi}}$

1.5 d) .... $\boxed{\dfrac{3}{2\pi}+\dfrac{7\pi}{12}}$

1.6 a) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

1.6 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}}$

1.6 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{6}}$

1.6 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{3}}$

1.6 e) .... $\boxed{1}$

1.6 f) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

1.7 a) .... $\boxed{\cos(1)-\cos(\mathrm{e})}$

1.7 b) .... $\boxed{\mathrm{e}-1}$

1.7 c) .... $\boxed{\dfrac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-2}}{6}}$

1.7 d) .... $\boxed{\dfrac{\sin(\mathrm{e})-\sin(1)}{2}}$

1.8 .... $\boxed{\text{e}}$

1.9 a) .... $\boxed{\dfrac{\pi-2}{2}}$

1.9 b) .... $\boxed{1}$

1.9 c) .... $\boxed{\dfrac{\pi^2}{4}-2}$

1.9 d) .... $\boxed{\pi}$

1.10 a) .... $\boxed{\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}}$

1.10 b) .... $\boxed{\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}}$

1.10 c) .... $\boxed{\dfrac{1+2\mathrm{e}^{\pi}}{5}}$

1.10 d) .... $\boxed{\dfrac{3-2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}}}{13}}$

1.11 a) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{2}}$

1.11 b) .... $\boxed{1}$

1.11 c) .... $\boxed{\text{a}}$

1.11 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{2}}$

1.11 e) .... $\boxed{\dfrac{2}{3}\times 1}$

1.11 f) .... $\boxed{\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{2}}$

1.11 g) .... $\boxed{\dfrac{4}{5}\times\dfrac{2}{3}\times 1}$

1.11 h) .... $\boxed{\prod_{k=1}^{n}\dfrac{2k}{2k+1}}$

1.11 i) .... $\boxed{\dfrac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}}$

1.11 j) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n}\dfrac{2k-1}{2k}}$

1.11 k) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}}$

Corrigés

1.1 b) On a

$$(x-1)^2+(3-3x)(x-5) = (x-1)^2-3(x-1)(x-5) = (x-1)(x-1-3(x-5))$$
$$= (x-1)(-2x+14) = 2(x-1)(-x+7).$$

....

1.1 d) On a $3x\mathrm{e}^{x+x^2}-6x^2\mathrm{e}^x = 3x\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{x^2}-3\times 2x\times x\mathrm{e}^x = 3x\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{x^2}-2x)$.

....

1.2 b) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=-u(x)^2$ où $u(x)=(1-x)$. Les fonctions u et f sont dérivables en tant que fonctions polynomiales et on a $u'(x)=-1$, donc $f'(x)=-2u(x)u'(x)=2(1-x)$.

....

1.3 c) On a $\displaystyle\int_0^{\pi}(\cos(t)-\sin(t))\,\mathrm{d}t = \Big[\sin(t)+\cos(t)\Big]_0^{\pi} = 0-1-(0+1) = -2$.

....

1.4 d) On a

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{2\pi+\frac{\pi}{3}}\sin(t)\,\mathrm{d}t = \Big[-\cos(t)\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{2\pi+\frac{\pi}{3}} = -\cos\Big(2\pi+\frac{\pi}{3}\Big)-\Big(-\cos\Big(\frac{\pi}{6}\Big)\Big)$$
$$= -\cos\Big(\frac{\pi}{3}\Big)+\cos\Big(\frac{\pi}{6}\Big) = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

....

1.4 f) On a

$$\int_{-\frac{9\pi}{4}}^{\frac{25\pi}{6}}\sin(t)\,\mathrm{d}t = \Big[-\cos(t)\Big]_{-\frac{9\pi}{4}}^{\frac{25\pi}{6}} = -\cos\Big(4\pi+\frac{\pi}{6}\Big)+\cos\Big(-2\pi-\frac{\pi}{4}\Big) = -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}.$$

....

1.5 c) On a

$$\int_{-\frac{1}{6}}^{1}\cos\Big(3\pi t+\frac{\pi}{2}\Big)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin\big(3\pi t+\frac{\pi}{2}\big)}{3\pi}\right]_{-\frac{1}{6}}^{1} = \frac{1}{3\pi}\Big(\sin\Big(3\pi+\frac{\pi}{2}\Big)-\sin\Big(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\Big)\Big) = \frac{1}{3\pi}(-1-0) = -\frac{1}{3\pi}.$$

....

1.5 d) On a

$$\int_{-\frac{1}{6}}^{1}\Big(3\cos(\pi t)+\frac{\pi}{2}\Big)\,\mathrm{d}t = 3\int_{-\frac{1}{6}}^{1}\cos(\pi t)\,\mathrm{d}t+\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{1}{6}}^{1}\mathrm{d}t = 3\left[\frac{\sin(\pi t)}{\pi}\right]_{-\frac{1}{6}}^{1}+\frac{\pi}{2}\Big(1-\Big(-\frac{1}{6}\Big)\Big)$$
$$= 3\frac{\sin(\pi)-\sin(-\frac{\pi}{6})}{\pi}+\frac{\pi}{2}\frac{7}{6} = \frac{3}{2\pi}+\frac{7\pi}{12}.$$

....

1.6 a) On pose pour tout $t\in\mathbb{R}$, $u(t)=t^2$, alors $u'(t)=2t$. On a donc

$$\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}2t\cos(t^2)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}u'(t)\cos(u(t))\,\mathrm{d}t = \Big[\sin(u(t))\Big]_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \sin\bigg(\Big(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Big)^2\bigg)-\sin(0^2) = \sin\Big(\frac{\pi}{4}\Big) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

....

1.6 c) On pose pour tout $t\in\mathbb{R}$, $u(t)=\sin(3t)$, alors $u'(t)=3\cos(3t)$. On a donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin(3t)\cos(3t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}u(t)u'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\left[\frac{(u(t))^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sin^2(\frac{\pi}{2})-\sin^2(0)}{6} = \frac{1}{6}.$$

....

1.6 f) On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = \cos(t)$, alors $u'(t) = -\sin(t)$. On a donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t)}{\cos^3(t)}\,\mathrm{d}t = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} u'(t)(u(t))^{-3}\,\mathrm{d}t = -\left[\frac{(u(t))^{-2}}{-2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{4})} - \frac{1}{\cos^2(0)}\right) = \frac{1}{2}(2-1) = \frac{1}{2}.$$

....

1.7 c) On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = -3\sin(2t) + 1$, alors $u'(t) = -6\cos(2t)$. On a donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-3\sin(2t)+1}\cos(2t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{6}\left[\mathrm{e}^{u(t)}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{6}(\mathrm{e}^{-3\sin(\frac{\pi}{2})+1} - \mathrm{e}^{-3\sin(0)+1}) = \frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-2}}{6}.$$

....

1.7 d) On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = \mathrm{e}^{t^2}$, alors $u'(t) = \mathrm{e}^{t^2} \times 2t$. On a donc

$$\int_0^1 t\mathrm{e}^{t^2}\cos(\mathrm{e}^{t^2})\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 \cos(u(t))u'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\sin(u(t))\right]_0^1 = \frac{1}{2}(\sin(\mathrm{e}^{1^2}) - \sin(\mathrm{e}^{0^2})) = \frac{\sin(\mathrm{e}) - \sin(1)}{2}.$$

....

1.8 On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = \sin(t)$, alors $u'(t) = \cos(t)$. On a donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\sin^n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (u(t))^n u'(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{(u(t))^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin^{n+1}(\frac{\pi}{2}) - \sin^{n+1}(0)}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

....

1.9 b) On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = t$ et $v'(t) = \sin(t)$, alors $u'(t) = 1$ et $v(t) = -\cos(t)$. En intégrant par parties, on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\,\mathrm{d}t = \left[t(-\cos(t))\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \times (-\cos(t))\,\mathrm{d}t = 0 - 0 + \left[\sin(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1.$$

....

1.9 c) On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = t^2$ et $v'(t) = \cos(t)$, alors $u'(t) = 2t$ et $v(t) = \sin(t)$. En intégrant par parties, on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos(t)\,\mathrm{d}t = \left[t^2\sin(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t\sin(t)\,\mathrm{d}t = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 0 - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'après la question précédente, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\,\mathrm{d}t = 1$, donc $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{4} - 2$.

Si la question précédente n'avait pas été là, nous aurions enchaîné deux intégrations par parties.

....

1.10 d) Notons l'intégrale à calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \mathrm{e}^{-2t}\sin(3t)\,\mathrm{d}t$.

On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = \mathrm{e}^{-2t}$ et $v'(t) = \sin(3t)$, alors $u'(t) = -2\mathrm{e}^{-2t}$ et $v(t) = -\dfrac{\cos(3t)}{3}$.

En intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned} I &= \left[\mathrm{e}^{-2t}\left(-\frac{\cos(3t)}{3}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} -2\mathrm{e}^{-2t}\left(-\frac{\cos(3t)}{3}\right)\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}(0-1) - \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \mathrm{e}^{-2t}\cos(3t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \mathrm{e}^{-2t}\cos(3t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Une autre intégration par parties avec $a(t) = \mathrm{e}^{-2t}$, $b'(t) = \cos(3t)$, $a'(t) = -2\mathrm{e}^{-2t}$, $b(t) = \dfrac{\sin(3t)}{3}$ donne

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \mathrm{e}^{-2t}\cos(3t)\,\mathrm{d}t &= \left[\mathrm{e}^{-2t}\frac{\sin(3t)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} -2\mathrm{e}^{-2t}\frac{\sin(3t)}{3}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{3}(\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}} - 0) + \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \mathrm{e}^{-2t}\sin(3t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}}}{3} + \frac{2}{3}I. \end{aligned}$$

En regroupant les deux calculs, on obtient $I = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}}}{3} + \frac{2}{3}I\right) = \frac{1}{3} - \frac{2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}}}{9} - \frac{4}{9}I$, donc $I + \frac{4}{9}I = \frac{1}{3} - \frac{2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}}}{9}$, donc $\frac{13}{9}I = \frac{1}{3} - \frac{2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}}}{9}$, d'où $I = \frac{9}{13}\left(\frac{1}{3} - \frac{2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}}}{9}\right) = \frac{1}{13}(3 - 2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}}) = \frac{3 - 2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}}}{13}$.

....

1.11 c) On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = \cos^{n+1}(t)$ et $v'(t) = \cos(t)$, alors $u'(t) = (n+1)\cos^n(t)(-\sin(t))$ et $v(t) = \sin(t)$. En intégrant par parties, on obtient

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t = \left[\cos^{n+1}(t)\sin(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\cos^n(t)(-\sin(t))\sin(t)\,\mathrm{d}t = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\sin^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$, donc

$$I_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)(1 - \cos^2(t))\,\mathrm{d}t = (n+1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(t)\,\mathrm{d}t\right) = (n+1)(I_n - I_{n+2}).$$

Donc $I_{n+2} + (n+1)I_{n+2} = (n+1)I_{n+1}$, d'où $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$, donc $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$.

....

1.11 f) D'après le résultat de la question c), on a $I_4 = \frac{3}{4}I_2 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}$.

....

1.11 g) D'après le résultat de la question c), on a $I_5 = \frac{4}{5}I_3 = \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times 1$.

....

1.11 h) À l'aide des résultats des questions e) et g), on conjecture que

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \times \frac{2n-4}{2n-3} \times \cdots \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times 1 = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}.$$

Le résultat se prouve alors par récurrence.

....

1.11 i) L'idée est de compléter le dénominateur avec le produit des nombres pairs de 2 à $2n$ afin d'obtenir $1 \times 2 \times \cdots \times 2n \times (2n+1) = (2n+1)!$, ce qui donne

$$I_{2n+1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{2k+1} \times \frac{2k}{2k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{2k(2k+1)} = \frac{4^n}{(2n+1)!}\prod_{k=1}^{n} k^2 = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

....

1.11 j) À l'aide des résultats des questions d) et f), on conjecture que

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \frac{2n-5}{2n-4} \times \cdots \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}.$$

Le résultat se prouve alors par récurrence.

....

1.11 k) L'idée est de compléter le numérateur avec le produit des nombres pairs de 2 à $2n$ afin d'obtenir $1 \times 2 \times \cdots \times (2n-1) \times 2n = (2n)!$, ce qui donne

$$I_{2n} = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{2k-1}{2k} \times \frac{2k}{2k}\right) = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)2k}{4k^2} = \frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}.$$

....