Calcul de produits

Prérequis

Si $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, on note

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n.$$

Notez bien que l'indice k qui intervient dans l'expression précédente pourrait porter un autre nom. Ainsi, on a $\prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{i=1}^{n} a_i$.

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 1.1 — Trois calculs.

Calculer :

a) $(-2)^5 - 1$ ....

b) $\dfrac{1}{5} - 1$ ....

c) $\sqrt{(-3)^4 \times 4^{-3}}$

Calcul 1.2 — Des carrés.

Soient a, b et c des nombres réels. Développer :

a) $(a+b)^2$ ....

b) $(a-b)^3$ ....

c) $(a+b-c)^2$

Premières manipulations

Calcul 1.3 — Écritures (I).

Écrivez les expressions suivantes à l'aide du symbole « $\prod$ ».

a) $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 99$ ....

b) $3^3 \times 4^4 \times 5^5 \times \cdots \times 50^{50}$ ....

c) $3^5 \times 4^6 \times 5^7 \times \cdots \times 15^{17}$ ....

d) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ ....

Calcul 1.4 — Écritures (II).

Écrivez les expressions suivantes à l'aide du symbole « $\prod$ ».

a) $2x_1 \times 5x_2 \times 10x_3 \times \cdots \times \big(9n^2+1\big)x_{3n}$ ....

b) $(x_1+x_2) \times (x_2+x_3) \times (x_3+x_4) \times \cdots \times (x_{n-1}+x_n)$ ....

c) $(x_1+y_1) \times (x_2+y_2) \times (x_3+y_3) \times \cdots \times (x_n+y_n)$ ....

d) $(x_0+y_n) \times (x_1+y_{n-1}) \times (x_2+y_{n-2}) \times \cdots \times (x_{n-1}+y_1) \times (x_n+y_0)$ ....

Calcul 1.5 — Un mélange de produits et de sommes.

Écrivez les expressions suivantes à l'aide des symboles « $\prod$ » et « $\sum$ ».

a) $x_1 + x_1x_2 + x_1x_2x_3 + \cdots + (x_1x_2x_3\cdots x_n)$ ....

b) $x_1 \times (x_1+x_2) \times (x_1+x_2+x_3) \times \cdots \times (x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)$ ....

Calcul 1.6

Déterminer la valeur de chacune des expressions suivantes.

a) $\displaystyle\prod_{k=1}^{5} k$ ....

b) $\displaystyle\prod_{k=0}^{3} (2k+1)$ ....

c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{8} (k-3)^2$ ....

d) $\displaystyle\prod_{k=1}^{10} \frac{k}{k+1}$ ....

Calcul 1.7 — Un produit constant.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Que vaut $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} 2$?

a) $2n$

b) $2(n+1)$

c) $2(n-1)$

d) 2^n

e) 2^{n+1}

f) 2^{n-1}

....

Calcul 1.8

Soit $n \in \mathbb{N}$. Que vaut $\displaystyle\prod_{k=0}^{4n} 2$? Il y a deux réponses possibles.

(a) $8n$
(b) $2^4 \times 2^n$
(c) $2^{4(n+1)}$
(d) 2×2^{4n}
(e) $4^{2(n+1)}$
(f) 2^{4n+1}

....

Télescopage

Calcul 1.9 — Principe du télescopage (I).

On considère des réels non nuls $a_1, a_2, \dots, a_n$. Pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on pose $b_k = \displaystyle\prod_{i=1}^{k} \frac{a_{i+1}}{a_i}$.

a) Que vaut b_1 ? ....

b) Que vaut b_2 ? ....

c) Que vaut b_3 ? ....

d) Que vaut b_{n-1} ? ....

Calcul 1.10 — Principe du télescopage (II).

On considère deux entiers naturels n et p tels que $2 \leqslant p \leqslant n$. On considère également des réels non nuls $a_1, a_2, \dots, a_n$.

À laquelle des expressions suivantes est égal $\displaystyle\prod_{k=p}^{n} \frac{a_{k-1}}{a_k}$?

(a) $\dfrac{a_1}{a_n}$
(b) $\dfrac{a_n}{a_1}$
(c) $\dfrac{a_2}{a_n}$
(d) $\dfrac{a_n}{a_2}$
(e) $\dfrac{a_{p-1}}{a_n}$
(f) $\dfrac{a_n}{a_{p-1}}$
(g) $\dfrac{a_{n-1}}{a_p}$
(h) $\dfrac{a_p}{a_{n-1}}$

....

Calcul 1.11 — Des télescopages en situation.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

a) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}$ ....

b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k-1}$ ....

c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k^2+k-1}{k^2+3k+1}$ ....

d) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k^2}$ ....

Calculs plus avancés

Calcul 1.12

Soit $n \geqslant 3$. Calculer les expressions suivantes.

a) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k-1}$ ....

b) $\displaystyle\prod_{k=3}^{n} \frac{k-2}{k+2}$ ....

Calcul 1.13

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la valeur de chacune des expressions suivantes.

a) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 3^k$ ....

b) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} 3^{a^k}$ (avec $a \neq 1$) ....

Calcul 1.14 — Factorielle.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle *factorielle de* n, l'entier noté $n!$ et défini par $n! = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k$.

a) Donner une relation simple entre $(n+1)!$ et $n!$ ....

b) Donner une expression simple de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$ ne faisant intervenir que des puissances de 2 et des factorielles. ....

Réponses mélangées

$\frac{a_2}{a_1}$ $\quad$ $\frac{a_3}{a_1}$ $\quad$ $\displaystyle\prod_{k=1}^{8} 2$ $\quad$ $3^{\frac{n(n+1)}{2}}$ $\quad$ -33 $\quad$ $a^2+2ab+b^2$ $\quad$ $\displaystyle\prod_{k=1}^{99} k$ $\quad$ $\frac{9}{8}$ $\quad$ $\frac{n(n+1)}{2}$

$\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(x_k+x_{k+1})$ $\quad$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\prod_{i=1}^{k} x_i$ $\quad$ $\frac{24}{(n-1)n(n+1)(n+2)}$ $\quad$ $2n+1$ $\quad$ $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x_k+y_{n-k})$ $\quad$ e

105 $\quad$ $\displaystyle\prod_{k=1}^{3n}(k^2+1)x_k$ $\quad$ $\displaystyle\prod_{k=3}^{15} k^{k+2}$ $\quad$ e $\quad$ $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} x_i$ $\quad$ $\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ $\quad$ $-\frac{4}{5}$ $\quad$ 120

$\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(x_k+y_k)$ $\quad$ $\displaystyle\prod_{k=3}^{50} k^k$ $\quad$ $a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$ $\quad$ $(n+1)! = (n+1)\times n!$ $\quad$ 0 $\quad$ $\frac{1}{11}$ $\quad$ $\frac{1}{n+1}$

d et f $\quad$ $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ $\quad$ $\frac{1}{n^2+3n+1}$ $\quad$ $\frac{n+1}{2n}$ $\quad$ $3^{\frac{1-a^n}{1-a}}$ $\quad$ $\frac{a_4}{a_1}$ $\quad$ $\frac{a_n}{a_1}$

► Réponses et corrigés page 5

Fiche n° 1. Calcul de produits

Réponses

1.1 a) $\boxed{-33}$

1.1 b) $\boxed{-\dfrac{4}{5}}$

1.1 c) $\boxed{\dfrac{9}{8}}$

1.2 a) $\boxed{a^2+2ab+b^2}$

1.2 b) $\boxed{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$

1.2 c) $\boxed{\begin{matrix} a^2+b^2+c^2 \\ +2ab-2ac-2bc \end{matrix}}$

1.3 a) $\boxed{\prod_{k=1}^{99} k}$

1.3 b) $\boxed{\prod_{k=3}^{50} k^k}$

1.3 c) $\boxed{\prod_{k=3}^{15} k^{k+2}}$

1.3 d) $\boxed{\prod_{k=1}^{8} 2}$

1.4 a) $\boxed{\prod_{k=1}^{3n} (k^2+1)x_k}$

1.4 b) $\boxed{\prod_{k=1}^{n-1} (x_k+x_{k+1})}$

1.4 c) $\boxed{\prod_{k=1}^{n} (x_k+y_k)}$

1.4 d) $\boxed{\prod_{k=0}^{n} (x_k+y_{n-k})}$

1.5 a) $\boxed{\sum_{k=1}^{n}\prod_{i=1}^{k} x_i}$

1.5 b) $\boxed{\prod_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} x_i}$

1.6 a) $\boxed{120}$

1.6 b) $\boxed{105}$

1.6 c) $\boxed{0}$

1.6 d) $\boxed{\dfrac{1}{11}}$

1.7 $\boxed{\text{e}}$

1.8 $\boxed{\text{d et f}}$

1.9 a) $\boxed{\dfrac{a_2}{a_1}}$

1.9 b) $\boxed{\dfrac{a_3}{a_1}}$

1.9 c) $\boxed{\dfrac{a_4}{a_1}}$

1.9 d) $\boxed{\dfrac{a_n}{a_1}}$

1.10 $\boxed{\text{e}}$

1.11 a) $\boxed{\dfrac{1}{n+1}}$

1.11 b) $\boxed{2n+1}$

1.11 c) $\boxed{\dfrac{1}{n^2+3n+1}}$

1.11 d) $\boxed{\dfrac{n+1}{2n}}$

1.12 a) $\boxed{\dfrac{n(n+1)}{2}}$

1.12 b) $\boxed{\dfrac{24}{(n-1)n(n+1)(n+2)}}$

1.13 a) $\boxed{3^{\frac{n(n+1)}{2}}}$

1.13 b) $\boxed{3^{\frac{1-a^n}{1-a}}}$

1.14 a) $\boxed{\begin{matrix} (n+1)! \\ =(n+1)\times n! \end{matrix}}$

1.14 b) $\boxed{\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}}$

Corrigés

1.9 a) On a $b_1 = \prod_{i=1}^{1} \dfrac{a_{i+1}}{a_i} = \dfrac{a_2}{a_1}$.

1.9 b) On a $b_2 = \prod_{i=1}^{2} \dfrac{a_{i+1}}{a_i} = \dfrac{a_2}{a_1} \times \dfrac{a_3}{a_2} = \dfrac{a_3}{a_1}$.

1.9 c) On a $b_3 = \prod_{i=1}^{3} \dfrac{a_{i+1}}{a_i} = \dfrac{a_2}{a_1} \times \dfrac{a_3}{a_2} \times \dfrac{a_4}{a_3} = \dfrac{a_4}{a_1}$.

1.9 d) Pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on a $b_k = b_{k-1} \times \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$. Ainsi, si $b_{k-1} = \dfrac{a_k}{a_1}$, alors $b_k = \dfrac{a_k}{a_1} \times \dfrac{a_{k+1}}{a_k} = \dfrac{a_{k+1}}{a_1}$.

Un raisonnement par récurrence permet donc de conclure que $b_{n-1} = \dfrac{a_n}{a_1}$.

1.11 a) On considère $a_k = k$. Ainsi, le principe du télescopage permet d'affirmer que

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{a_1}{a_{n+1}} = \frac{1}{n+1}.$$

1.11 b) On considère $a_k = 2k+1$. Ainsi, le principe du télescopage permet d'affirmer que

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k-1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_n}{a_0} = 2n+1.$$

1.11 c) On considère $a_k = k^2+k-1$. Ainsi, le principe du télescopage permet d'affirmer que

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{k^2+k-1}{k^2+3k+1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{a_1}{a_{n+1}} = \frac{1}{n^2+3n+1}.$$

1.11 d) On observe que $k^2-1 = (k-1)(k+1)$. On considère alors $a_k = \dfrac{k+1}{k}$ et on applique le principe du télescopage : on trouve $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_n}{a_1} = \frac{n+1}{2n}$.

1.12 a) On observe que $\dfrac{k+1}{k-1} = \dfrac{(k+1)k}{k(k-1)}$. On considère alors $a_k = (k+1)k$ et on applique le principe du télescopage : on trouve $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k-1} = \prod_{k=2}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_n}{a_1} = \frac{n(n+1)}{2}$.

1.12 b) On observe que $\dfrac{k-2}{k+2} = \dfrac{(k-2)(k-1)k(k+1)}{(k-1)k(k+1)(k+2)}$. On considère alors $a_k = (k-2)(k-1)k(k+1)$ et on applique le principe du télescopage : on trouve $\displaystyle\prod_{k=3}^{n} \frac{k-2}{k+2} = \prod_{k=3}^{n} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{a_3}{a_{n+1}} = \frac{24}{(n-1)n(n+1)(n+2)}$.

1.13 a) On a

$$\prod_{k=1}^{n} 3^k = 3^{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} k\right)} = 3^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

1.13 b) On a

$$\prod_{k=0}^{n-1} 3^{a^k} = 3^{\left(\sum\limits_{k=0}^{n-1} a^k\right)} = 3^{\frac{1-a^n}{1-a}}.$$

1.14 b) On a

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} = \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)(2k)}{(2k)^2} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} (2k-1)(2k)}{\left(\prod\limits_{k=1}^{n} 2k\right)^2} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{2n} k}{\left(2^n \prod\limits_{k=1}^{n} k\right)^2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$