Dérivation II

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 1.1

Donner (sous la forme d'un intervalle) l'ensemble des solutions des inégalités suivantes.

a) $\dfrac{4}{3}x > \dfrac{6}{5}$ ....

b) $-\dfrac{2}{3}x + 1 \leqslant \dfrac{5}{7}$ ....

c) $-2x - \dfrac{2}{9} < \dfrac{1}{2}x$ ....

d) $2x - \dfrac{1}{3} \geqslant \dfrac{1}{5} + \dfrac{7}{3}x$ ....

Calcul 1.2

Simplifier les fractions suivantes.

a) $\dfrac{2^5 \times 3^4}{2^8 \times 3^2}$ ......

b) $\dfrac{3^3 \times 2^5}{6^4}$ ......

c) $\dfrac{12^3 \times 10^4}{15^2 \times 8^2}$ ....

Calcul 1.3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 3x^2 - 10x - 3.$$

Calculer $f(a)$ pour les valeurs de a suivantes.

a) $a = -\dfrac{1}{2}$ ......

b) $a = \sqrt{3}$ ....

c) $a = \dfrac{\sqrt{2}}{5}$ ......

d) $a = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ ..

e) $a = -\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

f) $a = \dfrac{\sqrt{8}-4}{2}$ ..

Dérivation de polynômes

Calcul 1.4

Donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions f suivantes, définies sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = 2x^4 + 5x^3 - x^2 - 6x + 2$ ....

b) $f(x) = \dfrac{1}{10}x^5 - \dfrac{5}{12}x^4 + \dfrac{3}{2}x^3 - \dfrac{3}{10}x^2 - \dfrac{592}{3247}$ ....

c) $f(x) = \dfrac{2x^{10}}{5} - x^3 + \dfrac{2x^7}{7} - \dfrac{x^6}{12} + \dfrac{x^2}{4} + 46$ ....

Calcul 1.5

Pour chacune des questions suivantes, calculer $f'(a)$.

a) $f(x) = 5x^3 + 3x - 2$ et $a = 1 + \sqrt{6}$ ....

b) $f(x) = x^3 + 5x^2 - x - 1$ et $a = 1 + \sqrt{3}$ ....

c) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 10$ et $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ....

d) $f(x) = x^4 - \dfrac{1}{2}x^2 + 3x - 5$ et $a = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ ....

Opérations usuelles et polynômes

On admet que les fonctions de cette partie sont dérivables sur leur domaine de définition, qu'on ne cherchera pas à expliciter.

Calcul 1.6 — Inverses (I).

Donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions f suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{1}{3x+1}$ ....

b) $f(x) = \dfrac{1}{2x^2 - 3x + 4}$ ....

c) $f(x) = \dfrac{1}{-\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + x - 2}$ ....

Calcul 1.7 — Inverses (II).

Donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions f suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{1}{\frac{-2}{3}x^3 + 2x^2 - 2x}$ ....

b) $f(x) = \dfrac{1}{\frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{4}x^4 - \frac{17}{2}x^2}$ ....

Calcul 1.8 — Quotients (I).

Donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions f suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{2x+3}{-5x+4}$ ....

b) $f(x) = \dfrac{4x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{2x-1}$ ....

Calcul 1.9 — Quotients (II).

Donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions f suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5x^2 - 2}{-x^3 - x}$ ....

b) $f(x) = \dfrac{x^4 - x^3 + x^2 + 1}{x^2 + x + 1}$ ....

Calcul 1.10 — Quotients à simplifier (I).

Simplifier les expressions suivantes en enlevant les fractions au numérateur et au dénominateur.

a) $f(x) = \dfrac{\frac{1}{x} + 3}{2 - \frac{3}{x}}$ ....

b) $f(x) = \dfrac{3 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}}{-2 - \frac{2}{x^3} + \frac{-2}{x}}$ ....

À l'aide des calculs précédents, donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions f suivantes.

c) $f(x) = \dfrac{\frac{1}{x} + 3}{2 - \frac{3}{x}}$ ....

d) $f(x) = \dfrac{3 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}}{-2 - \frac{2}{x^3} + \frac{-2}{x}}$ ....

Calcul 1.11 — Quotients à simplifier (II).

Simplifier les expressions suivantes en enlevant les fractions au numérateur et au dénominateur.

a) $f(x) = \dfrac{\frac{2x+3}{x-4}}{\frac{-x-2}{x^2+x}}$ ....

b) $f(x) = \dfrac{\frac{1}{2x} - \frac{-x-2}{x+2}}{3x-1}$ ....

À l'aide des calculs précédents, donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions f suivantes.

c) $f(x) = \dfrac{\frac{2x+3}{x-4}}{\frac{-x-2}{x^2+x}}$ ....

d) $f(x) = \dfrac{\frac{1}{2x} - \frac{-x-2}{x+2}}{3x-1}$ ....

Calcul 1.12 — Signe de la dérivée.

Pour chacune des fonctions suivantes, donner l'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$.
On attend les solutions sous la forme d'une intervalle ou d'une réunion d'intervalle.

On commencera par déterminer l'ensemble de définition de f.

a) $f(x) = \dfrac{2}{3}x^2 - \dfrac{4}{7}x + 2$ .....

b) $f(x) = \dfrac{3x^2-5}{x^2+1}$ ....

c) $f(x) = \dfrac{\frac{1}{8}x - \frac{2}{3}}{\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}}$ ....

d) $f(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{5}x + 5}$ ....

Calcul 1.13 — Dériver puis factoriser (I).

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer $f'(x)$ puis factoriser le numérateur du quotient obtenu.

a) $f(x) = \dfrac{-1}{\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x - 1}$ ....

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - 9x^2 + 27x - 5}$ ....

c) $f(x) = \dfrac{-1}{\frac{x^3}{3} - 64x + 21}$ ....

d) $f(x) = \dfrac{-1}{\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 9x}$ ....

Calcul 1.14 — Dériver puis factoriser (II).

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer $f'(x)$ puis factoriser le numérateur du quotient obtenu.

a) $f(x) = \dfrac{1}{\frac{-1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3}$ ....

b) $f(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{8}x - 1}$ ....

c) $f(x) = \dfrac{-1}{2x^3 + 6x^2 - 14x + 7}$ ....

d) $f(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{6}x^3 - 5x^2 + 3x - 4}$ ....

Calculs plus avancés

Calcul 1.15 — Avec des racines.

Si u est une fonction dérivable à valeurs strictement positives, alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable et on a

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

Donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions f suivantes. On ne cherchera pas à déterminer les ensembles de dérivabilité.

a) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 2x - 10}$ ....

b) $f(x) = \sqrt{2x^3 + 6x^2 - x + 3}$ ....

c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x+1}{-3x+9}}$ ....

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x^3 - x}{x^5 - x^2}}$ ....

Calcul 1.16 — Avec des sommes.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dériver les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$.

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n$ et $0! = 1$.

a) $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k$ ....

b) $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$ ....

c) $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ ....

d) $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(3x)^{2k}}{(2k)!}$ ....

Calcul 1.17 — Expressions formelles.

Soient f, g et h trois fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ ne s'annulant pas. Exprimer les dérivées des fonctions suivantes en fonction de f, g, h et leurs dérivées.

Par exemple, la dérivée de $fg + h$ est $f'g + fg' + h'$.

On pourra utiliser que

$$(f^n)' = nf'f^{n-1}.$$

a) $fg + gh$ .....

b) $\dfrac{f^2}{g}$ ....

c) $\dfrac{f^3 + g}{gh}$ ......

d) $g - \dfrac{f}{h^3}$ ......

e) $f^3 g^2$ ....

f) $\dfrac{f}{\frac{g}{h}}$ ....

g) $\sqrt{\dfrac{f}{g}}$ ....

h) fgh ....

Réponses mélangées

$\dfrac{-5x^4-4x^3-x^2-2}{(x^3+x)^2}$ $\quad$ $\dfrac{-11}{(2x-3)^2}$ $\quad$ $\left]-\infty,-\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ $\quad$ $108+30\sqrt{6}$

$\dfrac{6\left(x+1+\sqrt{\frac{10}{3}}\right)\left(x+1-\sqrt{\frac{10}{3}}\right)}{(2x^3+6x^2-14x+7)^2}$ $\quad$ $3+5\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ $\quad$ $f'g+fg'+g'h+gh'$ $\quad$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}x^{k-1}$ $\quad$ $[0,+\infty[$ $\quad$ $-\dfrac{23}{4}-\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\dfrac{3x^3-x^2+2x}{-2x^3-2x^2-2}$ $\quad$ $\dfrac{16x^3-22x^2+10x+1}{(2x-1)^2}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}$ $\quad$ $\left]-\infty,-\dfrac{8}{5}\right]$ $\quad$ $\dfrac{3x+1}{2x-3}$ $\quad$ $\dfrac{-2x^4+8x^3+61x^2+80x+24}{(-x-2)^2(x-4)^2}$

$\dfrac{-2x^2+5x^3+17x}{\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{4}x^4-\frac{17}{2}x^2\right)^2}$ $\quad$ $\dfrac{(x-8)(x+8)}{\left(\frac{x^3}{3}-64x+21\right)^2}$ $\quad$ $\dfrac{-3(x-3)^2}{(x^3-9x^2+27x-5)^2}$ $\quad$ $\dfrac{f'gh-fg'h+fgh'}{g^2}$

$\left]\dfrac{9}{10},+\infty\right[$ $\quad$ $4x^9+2x^6-\dfrac{x^5}{2}-3x^2+\dfrac{x}{2}$ $\quad$ $\dfrac{2x^2-4x+2}{\left(\frac{-2}{3}x^3+2x^2-2x\right)^2}$ $\quad$ $-\dfrac{69}{25}-2\sqrt{2}$

$\dfrac{\left(\frac{1}{2}x+3\right)^2}{\left(\frac{1}{12}x^3+\frac{3}{2}x^2+9x\right)^2}$ $\quad$ $\dfrac{x^4}{2}-\dfrac{5x^3}{3}+\dfrac{9x^2}{2}-\dfrac{3x}{5}$ $\quad$ $\dfrac{2}{3}$ $\quad$ $\dfrac{-4x^5+4x^3-2x^2-1}{2(x^4-x)^2}\sqrt{\dfrac{x^4-x}{2x^2-1}}$

$\dfrac{11}{4}$ $\quad$ $\dfrac{2f'fg+f^2g'}{g^2}$ $\quad$ $\dfrac{x^2+6x-1}{\left(-\frac{1}{3}x^3-3x^2+x-2\right)}$ $\quad$ $\dfrac{(x+2)^2}{\left(\frac{1}{3}x^3+2x^2+4x-1\right)^2}$

$\dfrac{f'g-fg'}{2g^2\sqrt{\frac{f}{g}}}$ $\quad$ $g'-\dfrac{f'h^3-3fh'h^2}{h^6}$ $\quad$ $\dfrac{23}{(-5x+4)^2}$ $\quad$ $\dfrac{7}{6(3-x)^2}\sqrt{\dfrac{-3x+9}{2x+1}}$ $\quad$ $\left[\dfrac{3}{7},+\infty\right[$

$\dfrac{2x^3+5x^2+3x}{-x^2+x+8}$ $\quad$ $8x^3+15x^2-2x-6$ $\quad$ $6-\dfrac{10}{\sqrt{3}}$ $\quad$ $\dfrac{-\frac{1}{2}(x-10+\sqrt{94})(x-10-\sqrt{94})}{\left(\frac{1}{6}x^3-5x^2+3x-4\right)^2}$

$\dfrac{6x^2+12x-1}{2\sqrt{2x^3+6x^2-x+3}}$ $\quad$ $\dfrac{13}{2}-\dfrac{13\sqrt{5}}{2}$ $\quad$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{3(3x)^{2k-1}}{(2k-1)!}$ $\quad$ 1200 $\quad$ $\left[\dfrac{3}{7},+\infty\right[$

$\dfrac{3-4x}{(2x^2-3x+4)^2}$ $\quad$ $\dfrac{2x^5+2x^4+2x^3-2x^2-1}{(x^2+x+1)^2}$ $\quad$ $\dfrac{(x-1)(x+2)}{\left(\frac{-1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x+3\right)^2}$ $\quad$ $21+16\sqrt{3}$

$3f'f^2g^2+2f^3g'g$ $\quad$ $\left]-\infty,\dfrac{4}{5}\right]$ $\quad$ $f'gh+fg'h+fgh'$ $\quad$ $\left]-\dfrac{4}{45},+\infty\right[$ $\quad$ $\dfrac{3x-1}{\sqrt{3x^2-2x-10}}$

$\dfrac{-4x^4+4x^3-7x^2+2x-2}{2(x^3+x^2+1)^2}$ $\quad$ $\dfrac{5}{2}-2\sqrt{2}$ $\quad$ $\dfrac{(3f'f^2+g')gh-(f^3+g)(g'h+gh')}{(gh)^2}$

$\dfrac{2x+1}{6x^3-2x}$ $\quad$ $35-22\sqrt{2}$ $\quad$ $\dfrac{-3}{(3x+1)^2}$ $\quad$ $\dfrac{-6x^2-6x+1}{2(3x^2-x)^2}$ $\quad$ $\dfrac{9}{8}$ $\quad$ $\dfrac{-\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{8}x-1\right)^2}$

► Réponses et corrigés page 8

Fiche n° 1. Dérivation II

Réponses

1.1 a) .... $\boxed{\left]\frac{9}{10},+\infty\right[}$

1.1 b) .... $\boxed{\left[\frac{3}{7},+\infty\right[}$

1.1 c) .... $\boxed{\left]-\frac{4}{45},+\infty\right[}$

1.1 d) .... $\boxed{\left]-\infty,-\frac{8}{5}\right]}$

1.2 a) .... $\boxed{\frac{9}{8}}$

1.2 b) .... $\boxed{\frac{2}{3}}$

1.2 c) .... $\boxed{1200}$

1.3 a) .... $\boxed{\frac{11}{4}}$

1.3 b) .... $\boxed{6-\frac{10}{\sqrt{3}}}$

1.3 c) .... $\boxed{-\frac{69}{25}-2\sqrt{2}}$

1.3 d) .... $\boxed{-\frac{23}{4}-\frac{7\sqrt{2}}{2}}$

1.3 e) .... $\boxed{\frac{13}{2}-\frac{13\sqrt{5}}{2}}$

1.3 f) .... $\boxed{35-22\sqrt{2}}$

1.4 a) .... $\boxed{8x^3+15x^2-2x-6}$

1.4 b) .... $\boxed{\frac{x^4}{2}-\frac{5x^3}{3}+\frac{9x^2}{2}-\frac{3x}{5}}$

1.4 c) .... $\boxed{4x^9+2x^6-\frac{x^5}{2}-3x^2+\frac{x}{2}}$

1.5 a) .... $\boxed{108+30\sqrt{6}}$

1.5 b) .... $\boxed{21+16\sqrt{3}}$

1.5 c) .... $\boxed{\frac{5}{2}-2\sqrt{2}}$

1.5 d) .... $\boxed{3+5\sqrt{\frac{3}{2}}}$

1.6 a) .... $\boxed{\frac{-3}{(3x+1)^2}}$

1.6 b) .... $\boxed{\frac{3-4x}{(2x^2-3x+4)^2}}$

1.6 c) .... $\boxed{\frac{x^2+6x-1}{\left(-\frac{1}{3}x^3-3x^2+x-2\right)}}$

1.7 a) .... $\boxed{\frac{2x^2-4x+2}{\left(\frac{-2}{3}x^3+2x^2-2x\right)^2}}$

1.7 b) .... $\boxed{\frac{-2x^2+5x^3+17x}{\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{4}x^4-\frac{17}{2}x^2\right)^2}}$

1.8 a) .... $\boxed{\frac{23}{(-5x+4)^2}}$

1.8 b) .... $\boxed{\frac{16x^3-22x^2+10x+1}{(2x-1)^2}}$

1.9 a) .... $\boxed{\frac{-5x^4-4x^3-x^2-2}{\left(x^3+x\right)^2}}$

1.9 b) .... $\boxed{\frac{2x^5+2x^4+2x^3-2x^2-1}{\left(x^2+x+1\right)^2}}$

1.10 a) .... $\boxed{\frac{3x+1}{2x-3}}$

1.10 b) .... $\boxed{\frac{3x^3-x^2+2x}{-2x^3-2x^2-2}}$

1.10 c) .... $\boxed{\frac{-11}{(2x-3)^2}}$

1.10 d) .... $\boxed{\frac{-4x^4+4x^3-7x^2+2x-2}{2(x^3+x^2+1)^2}}$

1.11 a) .... $\boxed{\frac{2x^3+5x^2+3x}{-x^2+x+8}}$

1.11 b) .... $\boxed{\dfrac{2x+1}{6x^3-2x}}$

1.11 c) .... $\boxed{\dfrac{-2x^4+8x^3+61x^2+80x+24}{(-x-2)^2(x-4)^2}}$

1.11 d) .... $\boxed{\dfrac{-6x^2-6x+1}{2(3x^2-x)^2}}$

1.12 a) .... $\boxed{\left[\dfrac{3}{7},+\infty\right[}$

1.12 b) .... $\boxed{[0,+\infty[}$

1.12 c) .... $\boxed{\left]-\infty,-\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[}$

1.12 d) .... $\boxed{\left]-\infty,\dfrac{4}{5}\right]}$

1.13 a) .... $\boxed{\dfrac{(x+2)^2}{\left(\frac{1}{3}x^3+2x^2+4x-1\right)^2}}$

1.13 b) .... $\boxed{\dfrac{-3(x-3)^2}{(x^3-9x^2+27x-5)^2}}$

1.13 c) .... $\boxed{\dfrac{(x-8)(x+8)}{\left(\frac{x^3}{3}-64x+21\right)^2}}$

1.13 d) .... $\boxed{\dfrac{\left(\frac{1}{2}x+3\right)^2}{\left(\frac{1}{12}x^3+\frac{3}{2}x^2+9x\right)^2}}$

1.14 a) .... $\boxed{\dfrac{(x-1)(x+2)}{\left(\frac{-1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x+3\right)^2}}$

1.14 b) .... $\boxed{\dfrac{-\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{8}x-1\right)^2}}$

1.14 c) .... $\boxed{\dfrac{6\left(x+1+\sqrt{\frac{10}{3}}\right)\left(x+1-\sqrt{\frac{10}{3}}\right)}{(2x^3+6x^2-14x+7)^2}}$

1.14 d) .... $\boxed{\dfrac{-\frac{1}{2}(x-10+\sqrt{94})(x-10-\sqrt{94})}{\left(\frac{1}{6}x^3-5x^2+3x-4\right)^2}}$

1.15 a) .... $\boxed{\dfrac{3x-1}{\sqrt{3x^2-2x-10}}}$

1.15 b) .... $\boxed{\dfrac{6x^2+12x-1}{2\sqrt{2x^3+6x^2-x+3}}}$

1.15 c) .... $\boxed{\dfrac{7}{6(3-x)^2}\sqrt{\dfrac{-3x+9}{2x+1}}}$

1.15 d) .... $\boxed{\dfrac{-4x^5+4x^3-2x^2-1}{2(x^4-x)^2}\sqrt{\dfrac{x^4-x}{2x^2-1}}}$

1.16 a) .... $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}}$

1.16 b) .... $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}x^{k-1}}$

1.16 c) .... $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}}$

1.16 d) .... $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{3(3x)^{2k-1}}{(2k-1)!}}$

1.17 a) .... $\boxed{f'g+fg'+g'h+gh'}$

1.17 b) .... $\boxed{\dfrac{2f'fg+f^2g'}{g^2}}$

1.17 c) .... $\boxed{\dfrac{(3f'f^2+g')gh-(f^3+g)(g'h+gh')}{(gh)^2}}$

1.17 d) .... $\boxed{g'-\dfrac{f'h^3-3fh'h^2}{h^6}}$

1.17 e) .... $\boxed{3f'f^2g^2+2f^3g'g}$

1.17 f) .... $\boxed{\dfrac{f'gh-fg'h+fgh'}{g^2}}$

1.17 g) .... $\boxed{\dfrac{f'g-fg'}{2g^2\sqrt{\frac{f}{g}}}}$

1.17 h) .... $\boxed{f'gh+fg'h+fgh'}$

Corrigés

1.2 c) On a $\dfrac{12^3 \times 10^4}{15^2 \times 8^2} = \dfrac{(2^2)^3 \times 3^3 \times 5^4 \times 2^4}{3^2 \times 5^2 \times (2^3)^2} = 3 \times 5^2 \times 2^4 = 1200$.

1.3 d) On a $a^2 = \dfrac{1 + 2\sqrt{2} + 2}{4} = \dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

1.3 f) On a $a = \dfrac{2\sqrt{2} - 4}{2} = \sqrt{2} - 2$, ce qui allège les calculs.

1.4 b) On a $f'(x) = \dfrac{1}{10} \times 5 \times x^4 - \dfrac{5}{12} \times 4x^3 + \dfrac{3}{2} \times 3x^2 - \dfrac{3}{10} \times 2x - 0$.

1.5 a) On a $f'(x) = 15x^2 + 3$.

1.5 b) On a $f'(x) = 3x^2 + 10x - 1$.

1.5 c) On a $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$ et $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

1.5 d) On a $f'(x) = 4x^3 - x + 3$.

1.6 a) On pose $u(x) = 3x + 1$. On a $u'(x) = 3$ donc $f'(x) = \dfrac{-u'(x)}{u(x)^2} = \dfrac{-3}{(3x+1)^2}$.

1.6 b) On pose $u(x) = 2x^2 - 3x + 4$. On a $u'(x) = 4x - 3$ donc $f'(x) = \dfrac{-(4x-3)}{(2x^2 - 3x + 4)^2}$.

1.8 a) On pose $u(x) = 2x + 3$ et $v(x) = -5x + 4$. On a $u'(x) = 2$ et $v'(x) = -5$. Donc

$$f'(x) = \frac{2(-5x+4) - (2x+3) \times (-5)}{(-5x+4)^2}.$$

1.9 a) Pour le dénominateur, on a $(-x^3 - x)^2 = (x^3 + x)^2$.

1.10 a) On multiplie le numérateur et le dénominateur par x.

1.10 b) On multiplie le numérateur et le dénominateur par x^3.

1.10 d) On trouve $f'(x) = \dfrac{-8x^4 + 8x^3 - 14x^2 + 4x - 4}{(2x^3 + 2x^2 + 2)^2} = \dfrac{2(-4x^4 + 4x^3 - 7x^2 + 2x - 2)}{4(x^3 + x^2 + 1)^2}$.

1.11 a) On multiplie le numérateur et le dénominateur par $(x-4)$ et par $x^2 + x$. On trouve que

$$f(x) = \frac{(2x+3)(x^2+x)}{(x-4)(-x-2)} = \frac{2x^3 + 5x^2 + 3x}{-x^2 + 2x + 8}.$$

1.11 b) On multiplie le numérateur et le dénominateur par $2x$ et par $x+2$, on trouve :

$$f(x) = \frac{(x+2) - 2x(-x-2)}{(3x^2-1)(2x)(x+2)} = \frac{2x+1}{6x^3-2x}.$$

....

1.12 a) On a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{4}{3}x - \frac{4}{7}$.

....

1.12 b) On a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ car $x^2+1 \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $f'(x) = \frac{16x}{(x^2+1)^2}$. Or on a $(x^2+1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $16x$.

....

1.12 c) On a $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ et $f'(x) = \frac{35}{6(2x+1)^2}$. Donc, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f'(x) > 0$ comme quotient de nombres strictement positifs. Donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{D}_f$.

....

1.12 d) Étudions $\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{5}x + 5$. Le discriminant de cette expression est $\Delta = \frac{16}{25} - 10 < 0$; donc, il n'y a pas de racine et $\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{5}x + 5 \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. De plus, $f'(x) = \frac{-x+\frac{4}{5}}{\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{5}x + 5\right)^2}$. Le dénominateur étant strictement positif, $f'(x)$ est du signe de $-x + \frac{4}{5}$.

....

1.13 a) On a $f'(x) = \frac{x^2+4x+4}{\left(\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x - 1\right)^2}$: on reconnaît la première identité remarquable.

....

1.13 b) On a $f'(x) = \frac{-3x^2+18x-27}{(x^3-9x^2+27x-5)^2} = \frac{-3(x^2-6x+9)}{(x^3-9x^2+27x-5)^2}$. On conclut avec la seconde identité remarquable.

....

1.13 c) On a $f'(x) = \frac{x^2-64}{\left(\frac{x^3}{3} - 64x + 21\right)^2}$. On conclut avec la troisième identité remarquable.

....

1.13 d) On a $f'(x) = \frac{\frac{1}{4}x^2 + 3x + 9}{\left(\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 9x\right)^2}$. On conclut avec la première identité remarquable car

$$\frac{1}{4}x^2 + 3x + 9 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + 2 \times 3 \times \frac{1}{2}x + 3^2 = \left(\frac{1}{2}x + 3\right)^2.$$

....

1.14 a) On a $f'(x) = \frac{x^2+x-2}{\frac{-1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3}$. Le numérateur est de degré 2. On cherche ses racines. Le discriminant est $\Delta = 9$; il y a donc deux racines : 1 et -2. Ainsi, le numérateur est égal à $(x-1)(x+2)$.

....

1.14 b) On a $f'(x) = \frac{-x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{8}}{\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{8}x - 1}$. Le numérateur est de degré 2 et a pour racines $\frac{1}{2}$ et $-\frac{3}{4}$.

....

1.14 c) On a $f'(x) = \frac{6x^2+12x-14}{(2x^3+6x^2-14x+7)^2}$. Le numérateur est égal à $2(3x^2+6x-7)$. On étudie alors $3x^2+6x-7$ qui a pour racines $-1-\sqrt{\frac{10}{3}}$ et $-1+\sqrt{\frac{10}{3}}$.

....

1.14 d) On a $f'(x) = \dfrac{-\frac{1}{2}x^2 + 10x - 3}{\left(\frac{1}{6}x^3 - 5x^2 + 3x - 4\right)^2}$. Le numérateur a pour racines $10 - \sqrt{94}$ et $10 + \sqrt{94}$.

1.15 a) On pose $u(x) = 3x^2 - 2x - 10$. On a $u'(x) = 6x - 2 = 2(3x - 1)$. Donc $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \dfrac{3x-1}{\sqrt{3x^2 - 2x - 10}}$.

1.15 d) On commence par simplifier par x dans la fraction.

1.16 a) Pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, la dérivée de $x \mapsto x^k$ et $x \mapsto kx^{k-1}$. On conclut en utilisant que la dérivée d'une somme est la somme des dérivées.

1.16 b) Si $u(x) = (-1)^{k+1}\dfrac{x^k}{k}$, alors $u'(x) = (-1)^{k+1}\dfrac{kx^{k-1}}{k}$.

1.16 c) Si $u(x) = \dfrac{x^k}{k!}$ alors $u'(x) = \dfrac{k}{k!}x^{k-1} = \dfrac{k}{1 \times 2 \times \ldots \times (k-1) \times k}x^{k-1} = \dfrac{1}{1 \times 2 \times \ldots \times (k-1)}x^{k-1}$.

En dérivant f, on trouve donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$, ce qui se réécrit en $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}$.

1.16 d) Si $u(x) = \dfrac{(3x)^{2k}}{(2k)!} = \dfrac{3^{2k}x^{2k}}{(2k)!}$, alors $u'(x) = 3^{2k}\dfrac{2k}{(2k)!}x^{2k} = \dfrac{3(3x)^{2k-1}}{(2k-1)!}$.

1.17 b) La dérivée de f^2 est $2f'f$.

1.17 c) La dérivée de $f^3 + g$ est $3f'f^2 + g'$.

1.17 d) La dérivée de h^3 est $3h'h^2$.

1.17 e) La dérivée de f^3 est $3f'f^2$ et celle de g^2 est $2g'g$.

1.17 f) La dérivée de $\dfrac{g}{h}$ est $\dfrac{g'h - gh'}{g^2}$ donc la dérivée de $\dfrac{f}{\frac{g}{h}}$ est $\dfrac{f'\frac{g}{h} - f\frac{g'h - gh'}{h^2}}{\left(\frac{g}{h}\right)^2}$. Pour simplifier l'expression, on termine en multipliant par h^2 le numérateur et le dénominateur.

1.17 g) La dérivée de $\dfrac{f}{g}$ est $\dfrac{f'g - fg'}{g^2}$. On utilise que la dérivée de $\sqrt{u}$ et $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

1.17 h) On a $(fgh)' = ((fg)h)' = (f'g + fg')h + fgh'$.
