PCSI 3 Lycée Sainte-Geneviève
2021/2022 Samedi 4 juin 2022

DS 7

4 heures

- *Tout résultat ou raisonnement doit être clairement justifié, sauf mention du contraire.*
- *La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.*
- *La présentation de la copie sera prise en compte dans l'évaluation :*
  - ▷ $\boxed{\text{\textit{encadrez les résultats principaux ;}}}$
  - ▷ *soulignez les résultats et arguments intermédiaires importants ;*
  - ▷ *soignez votre écriture ;*
  - ▷ *maintenez une marge dans vos copies, aérez vos copies ;*
  - ▷ *enfin, numérotez vos copies (et non vos pages).*
- *Les documents, calculatrices et autres appareils électroniques sont interdits.*
- *Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie en expliquant les initiatives que vous avez été amené à prendre.*
- *Ne rendez pas le sujet avec vos copies.*

Étude d'une série trigonométrique

Dans ce problème, on montre que la série

$$\sum_n \frac{\sin(n)}{n}$$

est semi-convergente et que sa somme vaut $\frac{\pi-1}{2}$.

Pour cela, on utilise le lemme de Riemann-Lebesgue, dont la démonstration proposée utilise des méthodes préhilbertiennes.

On utilise aussi des techniques d'Abel.

Partie I – Quelques calculs fondamentaux.

Définitions et notations

- *Si* $f, g \in \mathscr{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$, *on pose*

$$(f \mid g) := \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

  On admet que $(\cdot \mid \cdot)$ *est un produit scalaire sur* $\mathscr{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$.

- *Pour* $k \in \mathbb{N}^*$, *on pose*

$$\mathsf{c}_k : \begin{cases} [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \cos(kt) \end{cases} \quad \textit{et} \quad \mathsf{s}_k : \begin{cases} [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \sin(kt). \end{cases}$$

1. Soient $k, \ell \in \mathbb{N}$. Calculer et donner une expression simple de

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-\ell)t}\,\mathrm{d}t$$

en fonction de k et ℓ.

2. Soient $k, \ell \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\begin{cases} (\mathsf{c}_k \mid \mathsf{c}_k) = \pi \\ (\mathsf{s}_k \mid \mathsf{s}_k) = \pi \end{cases} \quad \text{et} \quad k \neq \ell \implies \begin{cases} (\mathsf{c}_k \mid \mathsf{c}_\ell) = 0 \\ (\mathsf{s}_k \mid \mathsf{s}_\ell) = 0. \end{cases}$$

Partie II – Lemme faible de Riemann-Lebesgue.

Notations

- *Dans cette partie :*
  - ▷ *on fixe* $(E, (\cdot\,|\,\cdot))$ *un espace préhilbertien réel ;*
  - ▷ *on fixe* $(e_n)_{n\geqslant 1} \in E^{\mathbb{N}^*}$ *une suite de vecteurs telle que*

$$\forall n, m \in \mathbb{N}^*, \quad (e_n\,|\,e_m) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- *On note, pour* $N \geqslant 1$,

$$F_N \coloneqq \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_N).$$

3. Soit $x \in E$. Montrer que

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad x - \sum_{k=1}^{N} (x\,|\,e_k)\, e_k \in (F_N)^{\perp}.$$

4. Montrer que

$$\forall x \in E,\ \forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{N} (x\,|\,e_k)^2 + \left\| x - \sum_{k=1}^{N} (x\,|\,e_k)\, e_k \right\|^2.$$

5. Soit $x \in E$. Montrer que la série $\sum_n (x\,|\,e_n)^2$ est convergente.

6. Soit $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

(a) Montrer que

$$\int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt)\, \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

(b) **Lemme faible de Riemann-Lebesgue.**
Montrer que

$$\int_0^{2\pi} f(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\, \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Partie III – Lemme de Riemann-Lebesgue.

Données

Dans cette partie, on fixe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

7. Donner l'expression, en fonction de a et b et à l'aide de la partie entière, de deux entiers $k_0 \in \mathbb{Z}$ et $\ell_0 \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$[a, b] \subset \Big[2k_0\pi, 2(k_0 + \ell_0)\pi\Big].$$

On fixe de tels entiers k_0 et ℓ_0 dans la suite.

8. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.
On étend f en une fonction continue $\widetilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\widetilde{f} : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} f(a) & \text{si } x < a \\ f(x) & \text{si } x \in [a, b] \\ f(b) & \text{si } x > b. \end{cases} \end{array} \right.$$

(a) Représenter graphiquement la fonction $\widetilde{f}$ par rapport à f.

(b) À l'aide de changements de variables et en utilisant la question **6.**, montrer que

$$\int_{2k_0\pi}^{2(k_0+\ell_0)\pi} \widetilde{f}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

(c) En déduire que

$$\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

9. **Lemme de Riemann-Lebesgue.**
Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue.
Montrer que

$$\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Partie IV – Convergence de la série $\sum_n \frac{\sin(n)}{n^\alpha}$.

Données et notations

- *Dans cette partie, on fixe* $(u_n)_n, (w_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *des suites complexes.*
- *Pour* $n \in \mathbb{N}$, *on note*

$$U_n \coloneqq \sum_{k=0}^{n} u_k \quad \textit{et} \quad W_n \coloneqq \sum_{k=0}^{n} w_k.$$

- *On pose également*

$$U_{-1} \coloneqq 0 \quad \textit{et} \quad W_{-1} \coloneqq 0.$$

10. Transformation d'Abel.

Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n \geqslant m$. Montrer que

$$\sum_{k=m}^{n} U_k w_k = (U_{n+1}W_n - U_m W_{m-1}) - \sum_{k=m}^{n} u_{k+1} W_k.$$

11. Soit $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle.

(a) Construire une suite $(\delta_n)_{n\geqslant 0}$ telle que

$$\forall n \geqslant 0, \quad \sum_{k=0}^{n} \delta_k = a_n. \tag{$*$}$$

(b) Soit $(\delta_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $(*)$.
Montrer que

$$\left.\begin{array}{l} a_n \longrightarrow 0 \\ (a_n)_n \text{ décroît} \\ (U_n)_n \text{ est bornée} \end{array}\right\} \implies \sum_n \delta_{n+1} U_n \text{ est convergente.}$$

12. Théorème d'Abel.

Soit $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle.
Montrer que

$$\left.\begin{array}{l} a_n \longrightarrow 0 \\ (a_n)_n \text{ décroît} \\ (U_n)_n \text{ est bornée} \end{array}\right\} \implies \sum_n a_n u_n \text{ est convergente.}$$

On utilisera la question **10.**.

13. Soit $\alpha > 0$. Montrer que

$$\sum_n \frac{\sin(n)}{n^\alpha} \text{ est convergente.}$$

On utilisera la question **12.**.

Partie V – Calcul de la somme de $\sum_n \frac{\sin(n)}{n}$.

Notation

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$I_n := \int_1^\pi \left(\sum_{k=1}^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\right) \mathrm{d}t.$$

14. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est convergente et que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2).$$

L'utilisation du théorème des séries alternées n'est pas autorisée.

15. Montrer que

$$\forall n \geqslant 1, \quad I_n = -\sum_{k=1}^n \frac{\sin(k)}{k} + \mathrm{i}\left(\sum_{k=1}^n \frac{\cos(k)}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right).$$

16. On considère la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} [1,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} \end{array} \right. .$$

(a) Montrer que

$$\forall n \geqslant 1, \quad I_n = \int_1^\pi \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} \,\mathrm{d}t - \int_1^\pi f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t} \,\mathrm{d}t.$$

(b) Montrer que

$$I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_1^\pi \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} \,\mathrm{d}t.$$

17. Calcul d'une intégrale.

(a) Soient $A, B \in \mathbb{C}$. Calculer

$$\int_1^\pi \frac{A\cos(t/2) + B\sin(t/2)}{\sin(t/2)} \,\mathrm{d}t.$$

(b) (i) Déterminer A, B tels que

$$\forall t \in [1,\pi], \quad \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} = \frac{A\cos(t/2) + B\sin(t/2)}{\sin(t/2)}.$$

(ii) En déduire la valeur de $\int_1^\pi \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} \,\mathrm{d}t$.

18. Valeur des sommes.

Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \frac{\pi - 1}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n} = -\ln\left(2\sin\left(\tfrac{1}{2}\right)\right).$$

Partie VI – La série $\sum_n \frac{\sin(n)}{n}$ est semi-convergente.

19. Montrer que

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(n)^2}{n} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{|\sin(n)|}{n}.$$

20. (a) Montrer que $\sum_n \frac{\sin(n)^2}{n}$ est divergente.

(b) Montrer que $\sum_n \frac{\sin(n)}{n}$ est semi-convergente.

FIN DU SUJET.