

Principe fondamental de la dynamique

Prérequis

Coordonnées polaires, Équations différentielles simples

Pour commencer

🍏 Entraînement 1.1 — Une relation algébrique.



La vitesse v (en régime permanent) d'un mobile vérifie l'équation

$$m_1(v - v_1) + m_2(v - v_2) = p.$$

Donner l'expression de v

🍏 Entraînement 1.2 — Une équation différentielle.



On suppose que la vitesse $v(t)$ d'un mobile vérifie l'équation différentielle

$$\frac{dv}{dt} = -kv + a_0$$

et qu'elle vaut v_0 à l'instant t_0 .

Donner l'expression de $v(t)$

🍏 Entraînement 1.3 — Analyse dimensionnelle.



a) Quelle est la dimension de la quantité de mouvement ?

b) La constante de gravitation universelle vaut $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$.

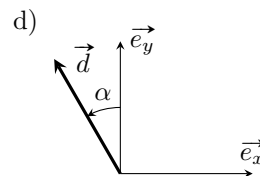
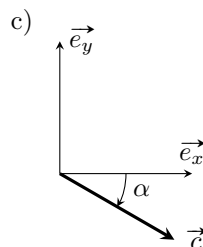
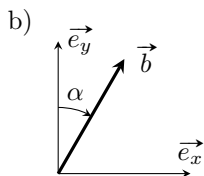
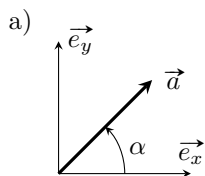
Quelle est la dimension de la force gravitationnelle (et donc des autres forces) ?

Décomposition de vecteurs

🍏 Entraînement 1.4 — Des projections.



On considère les vecteurs suivants :



Décomposer dans la base (\vec{e}_x, \vec{e}_y) les vecteurs :

a) \vec{a}

b) \vec{b}

c) \vec{c}

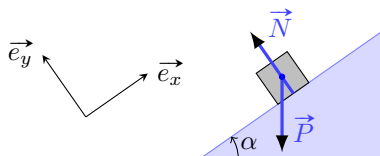
d) \vec{d}

🍏 Entraînement 1.5 — Sur un plan incliné.



On considère la situation représentée ci-dessous.

Décomposer dans la base (\vec{e}_x, \vec{e}_y) les vecteurs suivants.



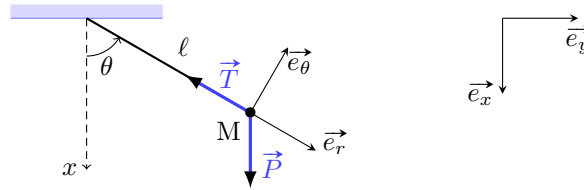
a) \vec{P}

b) \vec{N}

🍏 Entraînement 1.6 — Avec un pendule simple.



On considère la situation



Décomposer dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ les vecteurs suivants :

a) \vec{P}

c) $\vec{P} + \vec{T}$.

b) \vec{T}

🍏 Entraînement 1.7 — Avec un pendule simple (suite).



On se place dans la même situation que ci-dessus. Décomposer dans la base (\vec{e}_x, \vec{e}_y) :

a) \vec{P}

c) $\vec{P} + \vec{T}$.

b) \vec{T}

De l'accélération à la position (et *vice versa*)

Entraînement 1.8 — Du vecteur position au vecteur accélération.



On considère un point M en mouvement dont les coordonnées cartésiennes dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sont, à chaque instant $x(t) = \frac{1}{2}a_0t^2 + x_0$, $y(t) = -v_0t$ et $z(t) = z_0$.

Donner les expressions du vecteur :

a) position

c) accélération

b) vitesse

Entraînement 1.9 — Du vecteur accélération au vecteur position.



On considère un point M de masse m en chute libre soumis à son poids $\vec{P} = mg\vec{e}_z$. Ce point M a été lancé avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$ et une position initiale $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

Donner les expressions du vecteur :

a) accélération

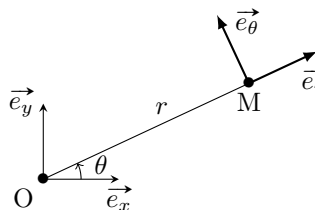
c) position

b) vitesse

Autour des coordonnées polaires

Dans ce paragraphe, on considère un point M repéré par la distance r et l'angle θ en coordonnées polaires ; la distance r et l'angle θ dépendent du temps t : le point M est mobile.

On représente la situation par le schéma ci-contre.



🍏 Entraînement 1.10 — Fondamental.



Décomposer dans la base (\vec{e}_x, \vec{e}_y) les vecteurs :

a) \vec{e}_r

b) \vec{e}_θ

🍏 Entraînement 1.11



Exprimer dans la base (\vec{e}_x, \vec{e}_y) les vecteurs :

a) $\frac{d\vec{e}_r}{dt}$

b) $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$

🍏 Entraînement 1.12 — Deux dérivées à connaître.



Exprimer dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ les vecteurs :

a) $\frac{d\vec{e}_r}{dt} \dots\dots\dots$

b) $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \dots\dots\dots$

QCM Entraînement 1.13 — Vecteur position en coordonnées polaires.



Comment s'exprime le vecteur position \vec{OM} en coordonnées polaires ?

(a) $\vec{OM} = r\vec{e}_r + \theta\vec{e}_\theta$

(c) $\vec{OM} = r\vec{e}_r$

(b) $\vec{OM} = r\vec{e}_r + \dot{\theta}\vec{e}_\theta$

(d) $\vec{OM} = \theta\vec{e}_\theta$

.....

Entraînement 1.14 — Accélération en coordonnées polaires.



Exprimer en coordonnées polaires :

a) le vecteur vitesse \vec{v}

b) le vecteur accélération \vec{a}

Étude de systèmes en équilibre

A.N. Entraînement 1.15 — Tension d'un fil.



Une bille d'acier de poids $P = 2,0 \text{ N}$, fixée à l'extrémité d'un fil de longueur $\ell = 50 \text{ cm}$ est attirée par un aimant exerçant une force $F = 1,0 \text{ N}$. À l'équilibre, le fil s'incline d'un angle α et l'on a

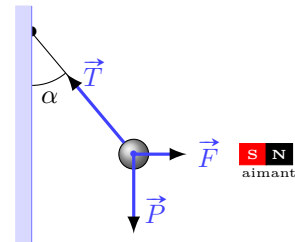
$$\vec{T} + \vec{F} + \vec{P} = \vec{0}$$

où \vec{T} est la tension exercée par le fil.

Calculer :

a) la tension T du fil

b) l'angle α (en radian)

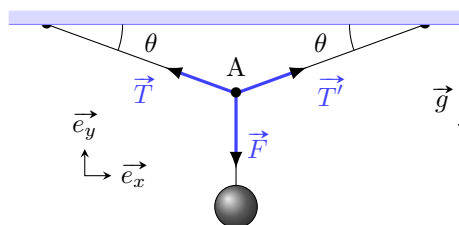


Entraînement 1.16 — Masse suspendue.

Un objet qui pèse 800 N est suspendu en équilibre à l'aide de deux cordes symétriques qui font un angle $\theta = 20^\circ$ avec l'horizontal.

Le point A est soumis à trois forces :

$$\vec{T}, \vec{T}' \text{ et } \vec{F}.$$



On note \vec{R} la résultante des forces.

a) Exprimer la composante horizontale R_x en fonction de T , T' et θ . ..

b) Exprimer la composante verticale R_y en fonction de T , T' , F et θ . .

c) Déterminer la tension T en résolvant l'équation $\vec{R} = \vec{0}$

Mouvements rectilignes

A.N. Entraînement 1.17 — Chute avec frottement.

Un corps de masse $m = 2 \text{ kg}$ tombe verticalement avec une accélération de $a = 9 \text{ m.s}^{-2}$. Lors de sa chute il subit la force de pesanteur ainsi qu'une force de frottement due à l'air.

On prendra $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ pour l'intensité du champ de pesanteur.

Quelle est l'intensité de la force de frottement ?

A.N. Entraînement 1.18 — Contact dans un ascenseur.

Un homme de masse $m = 80 \text{ kg}$ est dans un ascenseur. Cet ascenseur monte avec une accélération $a = 1 \text{ m.s}^{-2}$. On note \vec{F} la force exercée par l'homme sur le plancher de l'ascenseur.

On prendra $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ pour l'intensité du champ de pesanteur.

Quelle est l'intensité de \vec{F} ?

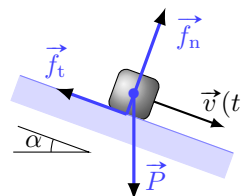
Entraînement 1.19 — Calcul d'une action de contact.



Un bloc de masse m , de poids \vec{P} glisse à une vitesse $v(t)$, variable au cours du temps, sur un support plan qui exerce une action de contact.

Celle-ci se décompose en deux actions :

- une action normale à la surface \vec{f}_n ;
- une action de frottement \vec{f}_t opposée à la vitesse de glissement.



Le plan est incliné d'un angle α , comme figuré ci-contre.

Déterminer (en fonction d'au moins une des données P , $v(t)$, m et α) :

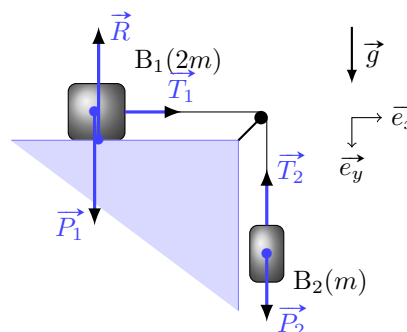
a) l'intensité de l'action normale f_n

b) l'intensité du frottement f_t

Entraînement 1.20 — Calcul d'une accélération.



Deux blocs B_1 et B_2 de masse respective $2m$ et m sont reliés par un fil. On passe le fil dans la gorge d'une poulie, puis on maintient le bloc B_1 sur la table alors que l'autre est suspendu dans l'air. On libère le bloc B_1 qui glisse alors sur la table. On note T_1 et T_2 les tensions exercées par le fil sur les blocs, a_1 et a_2 les accélérations respectives des blocs B_1 et B_2 , et g le champ de pesanteur. Les frottements sont négligeables.



a) Exprimer a_1 en fonction de m et T_1

b) Exprimer l'accélération a_2 de B_2 en fonction de m , g et T_2

c) Le fil étant inextensible et sans masse on a $a_1 = a_2$ et $T_1 = T_2$.

En déduire l'accélération en fonction uniquement de g

Réponses mélangées

$$\begin{array}{llllll}
 \frac{p + m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} & -\sin(\theta)\vec{e}_x + \cos(\theta)\vec{e}_y & -T \cos(\theta)\vec{e}_x - T \sin(\theta)\vec{e}_y & & & \\
 a_0 \vec{e}_x & P \cos(\theta)\vec{e}_r - P \sin(\theta)\vec{e}_\theta & \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta & 1,6 \text{ N} & \text{MLT}^{-1} & \\
 -\dot{\theta} \cos(\theta)\vec{e}_x - \dot{\theta} \sin(\theta)\vec{e}_y & c \cos(\alpha)\vec{e}_x - c \sin(\alpha)\vec{e}_y & \frac{g}{3} & a \cos(\alpha)\vec{e}_x + a \sin(\alpha)\vec{e}_y & & \\
 b \sin(\alpha)\vec{e}_x + b \cos(\alpha)\vec{e}_y & (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta & \left(v_0 - \frac{a_0}{k}\right)e^{-k(t-t_0)} + \frac{a_0}{k} & & & \\
 (P \cos(\theta) - T)\vec{e}_r - P \sin(\theta)\vec{e}_\theta & -P \sin(\alpha)\vec{e}_x - P \cos(\alpha)\vec{e}_y & 2,2 \text{ N} & & & \\
 -\dot{\theta} \sin(\theta)\vec{e}_x + \dot{\theta} \cos(\theta)\vec{e}_y & \cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y & \dot{\theta}\vec{e}_\theta & \text{MLT}^{-2} & & \\
 \frac{T_1}{2m} & P \cos \alpha & \left(\frac{1}{2}a_0 t^2 + x_0\right)\vec{e}_x - v_0 t \vec{e}_y + z_0 \vec{e}_z & N \vec{e}_y & & \\
 (T' + T) \sin \theta - F & (v_0 t + x_0)\vec{e}_x + y_0 \vec{e}_y + \frac{1}{2}gt^2 \vec{e}_z & -T \vec{e}_r & & & \\
 -d \sin(\alpha)\vec{e}_x + d \cos(\alpha)\vec{e}_y & (P - T \cos(\theta))\vec{e}_x - T \sin(\theta)\vec{e}_y & 0,46 \text{ rad} & & & \\
 -m \frac{dv}{dt} + P \sin \alpha & g \vec{e}_z & v_0 \vec{e}_x + gt \vec{e}_z & (T' - T) \cos \theta & \textcircled{c} & \\
 a_0 t \vec{e}_x - v_0 \vec{e}_y & P \vec{e}_x & g - \frac{T_2}{m} & 1,17 \text{ kN} & 864 \text{ N} & -\dot{\theta} \vec{e}_r
 \end{array}$$

► Réponses et corrigés page ??

Fiche n° 1. Principe fondamental de la dynamique

Réponses

- 1.1 $\frac{p + m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$
- 1.2 $\left(v_0 - \frac{a_0}{k}\right)e^{-k(t-t_0)} + \frac{a_0}{k}$
- 1.3 a) MLT^{-1}
- 1.3 b) MLT^{-2}
- 1.4 a) $a \cos(\alpha) \vec{e}_x + a \sin(\alpha) \vec{e}_y$
- 1.4 b) $b \sin(\alpha) \vec{e}_x + b \cos(\alpha) \vec{e}_y$
- 1.4 c) $c \cos(\alpha) \vec{e}_x - c \sin(\alpha) \vec{e}_y$
- 1.4 d) $-d \sin(\alpha) \vec{e}_x + d \cos(\alpha) \vec{e}_y$
- 1.5 a) $-P \sin(\alpha) \vec{e}_x - P \cos(\alpha) \vec{e}_y$
- 1.5 b) $N \vec{e}_y$
- 1.6 a) $P \cos(\theta) \vec{e}_r - P \sin(\theta) \vec{e}_\theta$
- 1.6 b) $-T \vec{e}_r$
- 1.6 c) $(P \cos(\theta) - T) \vec{e}_r - P \sin(\theta) \vec{e}_\theta$
- 1.7 a) $P \vec{e}_x$
- 1.7 b) $-T \cos(\theta) \vec{e}_x - T \sin(\theta) \vec{e}_y$
- 1.7 c) $(P - T \cos(\theta)) \vec{e}_x - T \sin(\theta) \vec{e}_y$
- 1.8 a) $\left(\frac{1}{2} a_0 t^2 + x_0\right) \vec{e}_x - v_0 t \vec{e}_y + z_0 \vec{e}_z$
- 1.8 b) $a_0 t \vec{e}_x - v_0 \vec{e}_y$
- 1.8 c) $a_0 \vec{e}_x$
- 1.9 a) $g \vec{e}_z$
- 1.9 b) $v_0 \vec{e}_x + g t \vec{e}_z$
- 1.9 c) $(v_0 t + x_0) \vec{e}_x + y_0 \vec{e}_y + \frac{1}{2} g t^2 \vec{e}_z$
- 1.10 a) $\cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y$
- 1.10 b) $-\sin(\theta) \vec{e}_x + \cos(\theta) \vec{e}_y$
- 1.11 a) $-\dot{\theta} \sin(\theta) \vec{e}_x + \dot{\theta} \cos(\theta) \vec{e}_y$
- 1.11 b) $-\dot{\theta} \cos(\theta) \vec{e}_x - \dot{\theta} \sin(\theta) \vec{e}_y$
- 1.12 a) $\dot{\theta} \vec{e}_\theta$
- 1.12 b) $-\dot{\theta} \vec{e}_r$
- 1.13 \odot
- 1.14 a) $\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$
- 1.14 b) $(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \vec{e}_\theta$
- 1.15 a) $2,2 \text{ N}$
- 1.15 b) $0,46 \text{ rad}$
- 1.16 a) $(T' - T) \cos \theta$
- 1.16 b) $(T' + T) \sin \theta - F$
- 1.16 c) $1,17 \text{ kN}$
- 1.17 $1,6 \text{ N}$
- 1.18 864 N
- 1.19 a) $P \cos \alpha$
- 1.19 b) $-m \frac{dv}{dt} + P \sin \alpha$
- 1.20 a) $\frac{T_1}{2m}$

1.20 b)..... $\boxed{g - \frac{T_2}{m}}$

1.20 c)..... $\boxed{\frac{g}{3}}$

Corrigés

1.2 La solution de l'équation homogène est $v(t) = Ae^{-kt}$. Une solution particulière (constante) est $v = \frac{a_0}{k}$. Les solutions sont $v(t) = Ae^{-kt} + \frac{a_0}{k}$. La condition initiale $v(t_0) = v_0$ donne

$$A = \left(v_0 - \frac{a_0}{k}\right)e^{kt_0}.$$

Il en découle la solution générale $v(t) = \left(v_0 - \frac{a_0}{k}\right)e^{-k(t-t_0)} + \frac{a_0}{k}$.

1.3 a) En effet, si on note p la quantité de mouvement, m la masse et v la vitesse, on a $[p] = [mv]$, $[v] = \text{LT}^{-1}$ et $[m] = \text{M}$.

1.3 b) En vertu de la loi de gravitation universelle $F_g = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$, d'où

$$[F] = [G] \times \text{M}^2\text{L}^{-2} = \text{L}^3\text{M}^{-1}\text{T}^{-2} \times \text{L}^{-2} = \text{MLT}^{-2}$$

1.4 a) La composante suivant \vec{e}_x correspond au produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{e}_x = a \times 1 \times \cos(\alpha)$. De même la composante suivant \vec{e}_y est le produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{e}_y = a \times 1 \times \cos(\pi/2 - \alpha) = a \sin(\alpha)$.

1.4 b) La composante suivant \vec{e}_x vaut $b_x = \vec{b} \cdot \vec{e}_x = b \cos(\pi/2 - \alpha) = b \sin(\alpha)$. De même la composante suivant \vec{e}_y vaut $b_y = \vec{b} \cdot \vec{e}_y = b \cos(\alpha)$.

1.4 c) On a $c_x = \vec{c} \cdot \vec{e}_x = c \cos(\alpha)$ et $c_y = \vec{c} \cdot \vec{e}_y = c \cos(\pi/2 + \alpha) = -c \sin(\alpha)$.

1.4 d) On trouve $d_x = \vec{d} \cdot \vec{e}_x = d \cos(\pi/2 + \alpha) = -d \sin(\alpha)$ et $d_y = \vec{d} \cdot \vec{e}_y = d \cos(\alpha)$.

1.5 a) Le poids a pour composante suivant \vec{e}_x , $P_x = \vec{P} \cdot \vec{e}_x = P \cos(\alpha + \pi/2) = -P \sin(\alpha)$. De même sa composante suivant \vec{e}_y s'écrit $P_y = \vec{P} \cdot \vec{e}_y = P \cos(\alpha + \pi) = -P \cos(\alpha)$. Ainsi, le poids s'écrit

$$\vec{P} = -P \sin(\alpha) \vec{e}_x - P \cos(\alpha) \vec{e}_y.$$

1.5 b) \vec{N} est colinéaire au vecteur unitaire \vec{e}_y et de même sens ; on a donc $\vec{N} = N \vec{e}_y$.

1.6 a) Le poids a pour composante suivant \vec{e}_r , $P_r = \vec{P} \cdot \vec{e}_r = P \cos(\theta)$. De même sa composante suivant \vec{e}_θ s'écrit $P_\theta = \vec{P} \cdot \vec{e}_\theta = P \cos(\alpha + \pi/2) = -P \sin(\theta)$. Ainsi, le poids s'écrit

$$\vec{P} = P \cos(\theta) \vec{e}_r - P \sin(\theta) \vec{e}_\theta.$$

1.6 b) \vec{T} est colinéaire au vecteur unitaire \vec{e}_r et sens opposé ; on a donc $\vec{T} = -T \vec{e}_r$.

1.7 a) Le poids \vec{P} est colinéaire et de même sens que le vecteur unitaire \vec{e}_x ; on a donc $\vec{P} = P \vec{e}_x$.

1.7 b) La tension du fil \vec{T} a pour composante suivant \vec{e}_x , $T_x = \vec{T} \cdot \vec{e}_x = T \cos(\pi - \theta) = -T \cos(\theta)$. De même, sa composante suivant \vec{e}_y vaut $T_y = \vec{T} \cdot \vec{e}_y = T \cos(\pi/2 + \theta) = -T \sin(\theta)$. Finalement, on trouve $\vec{T} = -T \cos(\theta) \vec{e}_x - T \sin(\theta) \vec{e}_y$.

1.8 a) Le vecteur position est le vecteur $\vec{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$, d'où

$$\vec{OM} = \left(\frac{1}{2} a_0 t^2 + x_0 \right) \vec{e}_x - v_0 t \vec{e}_y + z_0 \vec{e}_z.$$

1.8 b) Dans le système de coordonnées cartésiennes, le vecteur vitesse s'écrit

$$\vec{v} = \dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y + \dot{z} \vec{e}_z = a_0 t \vec{e}_x - v_0 \vec{e}_y.$$

1.8 c) Dans le système de coordonnées cartésiennes, le vecteur accélération s'exprime en fonction des dérivées secondes des coordonnées : $\vec{a} = \ddot{x} \vec{e}_x + \ddot{y} \vec{e}_y + \ddot{z} \vec{e}_z = a_0 \vec{e}_x$.

1.9 a) D'après le PFD, $m g \vec{e}_z = m \vec{a}$ d'où $\vec{a} = g \vec{e}_z$.

1.9 b) L'accélération s'écrit $\vec{a} = \dot{v}_x \vec{e}_x + \dot{v}_y \vec{e}_y + \dot{v}_z \vec{e}_z$. On en déduit

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{v}_x = 0 \\ \dot{v}_y = 0 \\ \dot{v}_z = g \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_x = C_1 \\ v_y = C_2 \\ v_z = gt + C_3 \end{array} \right\}$$

Les conditions initiales imposent $C_1 = v_0$, $C_2 = 0$ et $C_3 = 0$. Finalement $\vec{v} = v_0 \vec{e}_x + gt \vec{e}_z$.

1.9 c) Le vecteur vitesse s'écrit $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$. Par identification avec l'expression obtenue précédemment, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = v_0 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = gt \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = v_0 t + C_4 \\ y = C_5 \\ z = \frac{1}{2}gt^2 + C_6 \end{array} \right\}$$

Les conditions initiales imposent $C_4 = x_0$, $C_5 = y_0$ et $C_6 = 0$. Finalement

$$\vec{OM} = (v_0 t + x_0)\vec{e}_x + y_0\vec{e}_y + \frac{1}{2}gt^2\vec{e}_z.$$

1.10 a) $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_x = \cos(\theta)$ et $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_y = \cos(\pi/2 - \theta) = \sin(\theta)$ d'où $\vec{e}_r = \cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y$.

1.10 b) $\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_x = \cos(\pi/2 + \theta) = -\sin(\theta)$ et $\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_y = \cos(\theta)$ d'où $\vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\vec{e}_x + \cos(\theta)\vec{e}_y$.

1.11 a) Il suffit de dériver le vecteur $\vec{e}_r = \cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y$ sachant que \vec{e}_x et \vec{e}_y sont des constantes (vectorielles). On a donc $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\cos(\theta)}{dt}\vec{e}_x + \frac{d\sin(\theta)}{dt}\vec{e}_y$. Ici θ dépend du temps, par conséquent $\frac{d\cos(\theta)}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \times \frac{d\cos(\theta)}{d\theta} = -\dot{\theta}\sin(\theta)$. de même $\frac{d\sin(\theta)}{dt} = \dot{\theta}\cos(\theta)$. Finalement,

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = -\dot{\theta}\sin(\theta)\vec{e}_x + \dot{\theta}\cos(\theta)\vec{e}_y.$$

1.11 b) En partant de $\vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\vec{e}_x + \cos(\theta)\vec{e}_y$, on trouve

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\frac{d\sin(\theta)}{dt}\vec{e}_x + \frac{d\cos(\theta)}{dt}\vec{e}_y = -\dot{\theta}\cos(\theta)\vec{e}_x - \dot{\theta}\sin(\theta)\vec{e}_y.$$

1.13 Le vecteur \vec{OM} est colinéaire et de même sens que \vec{e}_r . Sa norme étant égal r , on a $\vec{OM} = r\vec{e}_r$.

1.14 a) Il suffit de dériver le vecteur position en utilisant les résultats des exercices précédents :
 $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$.

1.14 b) Dérivons le vecteur vitesse :

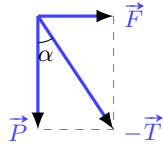
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dt}\vec{e}_r + \dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{d(r\dot{\theta})}{dt}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta.$$

1.15 a) Calculons le carré scalaire :

$$\vec{T}^2 = (-\vec{F} - \vec{P})^2 = F^2 + P^2 + 2\vec{F} \cdot \vec{P} = 5$$

car $\vec{F} \cdot \vec{P} = 0$. Par conséquent, $T = \sqrt{5} \simeq 2,2 \text{ N}$.

1.15 b) Une construction géométrique permet de trouver immédiatement l'angle α :



$$\tan \alpha = F/P \quad \text{soit} \quad \alpha = 0,46 \text{ rad}$$

On peut aussi utiliser les produits scalaires. Par exemple

$$\vec{T} \cdot \vec{F} = T \times F \cos(\pi/2 + \alpha) = -TF \sin \alpha$$

De plus, compte tenu de l'équilibre des forces

$$\vec{T} \cdot \vec{F} = (-\vec{F} - \vec{P}) \cdot \vec{F} = -F^2 - \vec{P} \cdot \vec{F} = -F^2$$

Il en découle $\sin \alpha = F/T$ soit $\alpha = 0,46 \text{ rad}$ (c'est-à-dire $\alpha = 26^\circ$).

1.16 a) $\vec{R} = \vec{T} + \vec{T}' + \vec{F}$. Sa composante horizontale vaut

$$R_x = \vec{R} \cdot \vec{e}_x = \underbrace{\vec{T} \cdot \vec{e}_x}_{-T \cos \theta} + \underbrace{\vec{T}' \cdot \vec{e}_x}_{T' \cos \theta} + \underbrace{\vec{F} \cdot \vec{e}_x}_0 = (T' - T) \cos \theta.$$

1.16 b) La composante verticale de \vec{R} s'écrit

$$R_y = \vec{R} \cdot \vec{e}_y = \underbrace{\vec{T} \cdot \vec{e}_y}_{T \sin \theta} + \underbrace{\vec{T}' \cdot \vec{e}_y}_{T' \sin \theta} + \underbrace{\vec{F} \cdot \vec{e}_y}_{-F} = (T' + T) \sin \theta - F.$$

1.16 c) Résoudre l'équation vectorielle $\vec{R} = \vec{0}$, c'est résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} (T' - T) \cos \theta = 0 \\ (T' + T) \sin \theta - F = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} T' = T \\ T = \frac{F}{2 \sin \theta} \end{cases}$$

Sachant que $F = 800 \text{ N}$ et $\theta = 20^\circ$, on obtient $T = 1,17 \text{ kN}$.

1.17 Le principe fondamental de la dynamique impose $m\vec{g} + \vec{F} = m\vec{a}$. En projetant la relation précédente suivant la verticale descendante, on obtient $mg - F = ma$ ce qui donne $F = m(g - a) = 1,6 \text{ N}$.

1.18 L'homme subit son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la force de contact dû à l'ascenseur $-\vec{F}$ (principe des actions réciproques). Le principe fondamental de la dynamique donne $m\vec{g} - \vec{F} = m\vec{a}$. En projetant sur la verticale ascendante on obtient $ma = -mg + F$, soit $F = m(a + g) = 80 \times 10,8 = 864 \text{ N}$.

1.19 a) Le principe fondamental de la dynamique donne $\vec{P} + \vec{f}_n + \vec{f}_t = m\vec{a}$ avec $\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{e}_t$ (\vec{e}_t est le vecteur unitaire orienté suivant le vecteur vitesse ; c'est le vecteur tangent de la base de Frenet). Si l'on projette la relation suivant la normale \vec{e}_n au support on aboutit à

$$\underbrace{\vec{P} \cdot \vec{e}_n}_{P \cos(\pi - \alpha)} + \underbrace{\vec{f}_n \cdot \vec{e}_n}_{f_n} + \underbrace{\vec{f}_t \cdot \vec{e}_n}_0 = m \frac{dv}{dt} \underbrace{\vec{e}_t \cdot \vec{e}_n}_0$$

ce qui donne $f_n = -P \cos(\pi - \alpha) = P \cos \alpha$.

1.19 b) En projetant la relation fondamentale de la dynamique suivant la direction tangentielle au support on obtient

$$\underbrace{\vec{P} \cdot \vec{e}_t}_{P \cos(\pi/2 - \alpha)} + \underbrace{\vec{f}_n \cdot \vec{e}_t}_0 + \underbrace{\vec{f}_t \cdot \vec{e}_t}_{-f_t} = m \frac{dv}{dt} \underbrace{\vec{e}_t \cdot \vec{e}_t}_1$$

c'est-à-dire $f_t = -m \frac{dv}{dt} + P \sin \alpha$.

1.20 a) Le principe fondamental appliqué au bloc B₁ donne $2m\vec{g} + \vec{R} + \vec{T}_1 = 2m\vec{a}_1$. Projetons cette relation suivant le sens du mouvement :

$$2m \underbrace{\vec{g} \cdot \vec{e}_x}_0 + \underbrace{\vec{R} \cdot \vec{e}_x}_0 + \underbrace{\vec{T}_1 \cdot \vec{e}_x}_{T_1} = 2m \underbrace{\vec{a}_1 \cdot \vec{e}_x}_{a_1} \quad \text{soit} \quad a_1 = \frac{T_1}{2m}.$$

1.20 b) Le principe fondamental appliqué au bloc B₂ donne $m\vec{g} + \vec{T}_2 = m\vec{a}_2$. Projetons cette relation suivant le sens du mouvement :

$$m \underbrace{\vec{g} \cdot \vec{e}_y}_g + \underbrace{\vec{T}_2 \cdot \vec{e}_y}_{-T_2} = m \underbrace{\vec{a}_2 \cdot \vec{e}_y}_{a_2} \quad \text{soit} \quad a_2 = g - \frac{T_2}{m}.$$

1.20 c) On a les relations :

$$a_1 = \frac{T_1}{2m} \tag{1}$$

$$a_2 = g - \frac{T_2}{m} \tag{2}$$

Multiplions la première relation par $2m$, et la deuxième par m , puis additionnons les. On trouve $2ma_1 + ma_2 = T_1 + mg - T_2$. Comme $a_1 = a_2$ et $T_1 = T_2$, on obtient $3ma_1 = mg$ soit $a_1 = a_2 = g/3$.