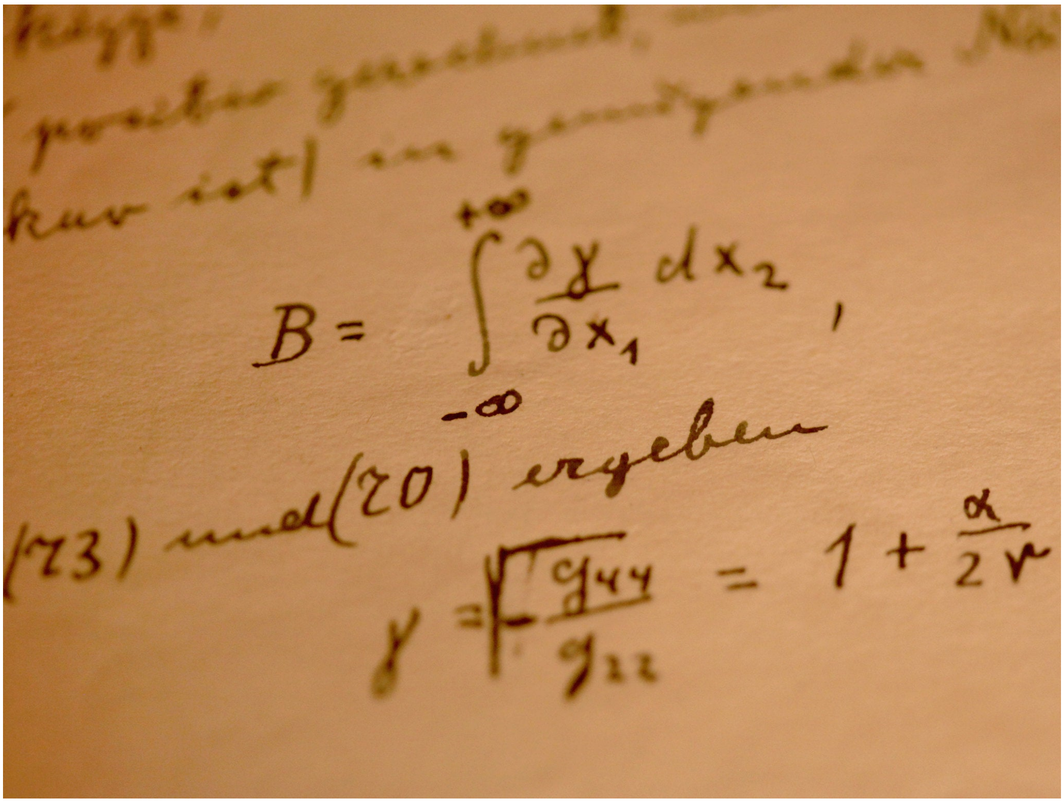
Lycée Chateaubriand
Colas Bardavid

Éléments de rédaction mathématique



Extrait d'un manuscript d'Albert Einstein

Les règles de bonne rédaction d'un texte mathématique sont utiles à plusieurs titres. D'abord, elles permettent d'écrire des textes clairs, aisément compréhensibles. Ensuite, elles assurent au texte une grande rigueur dans la présentation des idées qui y est faite. Enfin, ces règles permettent aussi la mise en place d'un cadre clair qui aide à la recherche de solutions.

Savoir bien rédiger une preuve mathématique est l'une des compétences essentielles que vous devrez acquérir cette année. Si vous suivez les conseils suivants à la lettre, vous progresserez très vite.

Dans toutes vos évaluations, une part explicite de la note sera consacrée à la rédaction. De plus, des points de malus seront appliqués quand les règles suivantes ne sont pas appliquées.

Tant que vous ne maîtriserez pas la rédaction mathématique, votre niveau restera plafonné.

Reprenez ce texte autant de fois que nécessaire et n'hésitez pas à me poser des questions.

Voici les sept règles fondamentales de bonne rédaction mathématique :

- **Ancrez les maths dans le français**
- **Introduisez vos variables**
- **Fixez les objets provenant d'$\exists$-assertions**
- **Le symbole $\forall$ est réservé aux maths**
- **Attention à l'usage de $\iff$**
- **Attention à l'usage de $\implies$**
- **Attention à l'usage de $\forall$ et $\exists$**

1 Les sept règles

Voici pour commencer quelques règles simples à suivre impérativement.

► Règle n° 1 : Ancrez les maths dans le français

N'écrivez jamais d'énoncé mathématique qui ne soit pas inclus dans une phrase en français.

En pratique, c'est très simple, il suffit dans la plupart des cas de commencer ses phrases par *« On a »*.

Exemples

✗✗✗ N'écrivez pas : « $2 + 2 = 4$ ».

✔✔✔ Écrivez : « *On a* $2 + 2 = 4$. »

✗✗✗ N'écrivez pas : « $x = 2$ ».

✔✔✔ Écrivez : « *Donc, on a* $x = 2$. »

Quand des assertions s'enchaînent, ne vous contentez pas de les superposer en les alignant. Utilisez des conjonctions de coordination entre elles.

Exemples

✗✗✗ N'écrivez pas :

$$\begin{aligned} \text{« } \textit{On a} \quad & \frac{xy}{x+y} = \frac{1}{4} \\ & \frac{x+y}{y} = 4x \\ & \frac{x}{y} = 4x - 1 \\ & \frac{1}{y} = \frac{4x-1}{x}. \text{ »} \end{aligned}$$

✔✔✔ Écrivez :

$$\begin{aligned} \text{« } \textit{On a} \quad & \frac{xy}{x+y} = \frac{1}{4} \\ \textit{donc} \quad & \frac{x+y}{y} = 4x \\ \textit{donc} \quad & \frac{x}{y} = 4x - 1 \\ \textit{donc} \quad & \frac{1}{y} = \frac{4x-1}{x}. \text{ »} \end{aligned}$$

Si vous écrivez des maths « qui flottent », c'est-à-dire qui ne font pas partie d'une phrase en français, vous pourrez être sanctionné par un point de malus.

► Règle n° 2 : Introduisez vos variables

Si vous utilisez la lettre x dans votre preuve, vérifiez avant que celle-ci a été définie.

Si vous utilisez la lettre x sans l'avoir définie, il s'agit d'une faute grave et vous pourrez être sanctionné par un point de malus. Attention : si vous commettez cette faute plusieurs fois, les points de malus pourront s'ajouter.

Voici plusieurs façons dont elle peut avoir été définie.

- Vous avez pris soin d'écrire auparavant : *« Soit $x \in \mathbb{R}$ »*.
- La variable x est introduite dans l'énoncé.
  Dans ce cas, vous n'avez pas besoin de réintroduire x. Vous pouvez le faire néanmoins si vous le souhaitez.
- La lettre x est fixée auparavant dans votre texte ou dans l'énoncé ; par exemple, vous avez écrit *« Fixons $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^5 = x^2 + 1$ »*.
- Si la lettre x n'est utilisée que dans une seule phrase, vous pouvez commencer celle-ci par la locution *« Pour $x \in \mathbb{R}$ »*.

Attention ! Le quantificateur « $\forall x \in \mathbb{R}$ » ne définit pas la variable x. Une fois que la phrase mathématique introduite par « $\forall x$ » est terminée, la variable x cesse d'être définie.

Exemples

✗✗✗ N'écrivez pas :
*« On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 2x - 1$.
En effet, on a $x^2 - (2x - 1) = (x - 1)^2 \geqslant 0$. »*

✔✔✔ Écrivez :
*« On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 2x - 1$.
En effet, pour $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 - (2x - 1) = (x - 1)^2 \geqslant 0$. »*

✔✔✔ Ou bien, écrivez :
*« Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 2x - 1$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x^2 - (2x - 1) = (x - 1)^2 \geqslant 0$. »*

✗✗✗ N'écrivez pas :
« On pose $u_n = 4n^2 - 2$. »

✗✗✗ N'écrivez pas non plus :
« On pose $u_n \coloneqq 4n^2 - 2$. »

✔✔✔ Écrivez :
« On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n \coloneqq 4n^2 - 2$. »

► **Règle n° 3 :** $\boxed{\textbf{Fixez les objets provenant d'}\exists\textbf{-assertions}}$

Quand la variable α apparaît dans une assertion du type « $\exists \alpha \in E : \cdots$ », remarquez bien que « α » cesse d'être défini quand l'assertion mathématique se termine.

Si vous voulez utiliser le $\alpha \in E$ de l'assertion, il faut le fixer.

Exemples

✘✘✘ N'écrivez pas :
« *On sait que* $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+ : \alpha^2 = 2$. *On a alors* $\alpha^4 = 4$. »

✔✔✔ Écrivez :
« *On sait que* $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+ : \alpha^2 = 2$. *Fixons un tel* $\alpha \in \mathbb{R}_+$. *On a alors* $\alpha^4 = 4$. »

✘✘✘ N'écrivez pas :
« *Comme* n *est pair, on a* $n = 2p$, *où* $p \in \mathbb{Z}$. »

✔✔✔ Écrivez :
« *Comme* n *est pair, fixons* $p \in \mathbb{Z}$ *tel que* $n = 2p$. »

✘✘✘ N'écrivez pas :
« *Grâce au théorème des valeurs intermédiaires, on sait qu'il existe* $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *tel que*

$$\alpha^5 = \alpha^2 + 1.$$

Montrons que $\alpha \leqslant 2$. »

✔✔✔ Écrivez :
« *Grâce au théorème des valeurs intermédiaires, on sait qu'il existe* $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *tel que*

$$\alpha^5 = \alpha^2 + 1.$$

Fixons un tel $\alpha \geqslant 0$. *Montrons que* $\alpha \leqslant 2$. »

► Règle n° 4 : Le symbole $\forall$ est réservé aux maths

N'utilisez pas le symbole « $\forall$ » comme abréviation dans une phrase en français.

Exemples

✘✘✘ N'écrivez pas :
« *On sait que* $\forall x \in \mathbb{R}$, *le nombre* x^2 *est positif ou nul.* »

✔✔✔ Écrivez :
« *On sait que pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *le nombre* x^2 *est positif ou nul.* »

✔✔✔ Ou bien, écrivez :
« *On sait que :* $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0.$ »

✘✘✘ N'écrivez pas :
« $\forall n \in \mathbb{N}$, *on pose* $u_n := n^2 + 1.$ »

✘✘✘ N'écrivez pas non plus :
« *On pose* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n := n^2 + 1.$ »

✔✔✔ Écrivez :
« *Pour* $n \in \mathbb{N}$, *on pose* $u_n := n^2 + 1.$ »

Il en est de même pour le symbole « $\exists$ ».

► Règle n° 5 : Attention à l'usage de $\iff$

L'usage du symbole « $\iff$ » est réservé aux moments où l'« on dit des mathématiques » :

- quand on annonce ce qu'on va montrer :

Exemple

✔✔✔ « *Soit* $t > 0$. *Montrons que* $\exp(t) \geqslant 1 \iff t \geqslant 0.$ »

- quand on conclut :

Exemple

✔✔✔ « *On a montré que*

$$\forall n \in \mathbb{Z},\quad n^2 \equiv 1\ [2] \iff n \equiv 1\ [2]. \text{ »}$$

- quand on invoque un résultat :

Exemple

✔✔✔ « *Soit* $z \in \mathbb{C}^*$. *D'après le cours, on sait que*

$$|z| = 1 \iff z^{-1} = \overline{z}. \text{ »}$$

Quand vous êtes en train de montrer quelque chose, en général, n'utilisez pas le symbole « $\iff$ ». Ce symbole est utilisé à tort et à travers. Il est bien souvent utilisé à la place de *« donc »*.

Exemples

✘✘✘ « *On vient de montrer que* $3\alpha + 2 = -\alpha - 1$. *Donc,*

$$3\alpha + 2 = -\alpha - 1 \iff 4\alpha = -3 \iff \alpha = -\frac{3}{4}. \text{ »}$$

✔✔✔ Écrivez :
« *On vient de montrer que* $3\alpha + 2 = -\alpha - 1$. *Donc,* $4\alpha = -3$ *et donc* $\alpha = -\frac{3}{4}$. »

✘✘✘ N'écrivez pas :
[*dans cet exemple, on sait que a vérifie* $2\alpha \geqslant 3\alpha - 1$.]
« *On a* $2\alpha \geqslant 3\alpha - 1 \iff \alpha \leqslant 1$. »

✔✔✔ Écrivez :
« *On a* $2\alpha \geqslant 3\alpha - 1$, ie *on a* $\alpha \leqslant 1$. »

✔✔✔ Écrivez :
« *On a* $2\alpha \geqslant 3\alpha - 1$, *c'est-à-dire* $\alpha \leqslant 1$. »

Cette règle admet une excepetion.

Le signe « $\iff$ » pourra être utilisé dans une démonstration lorsque cette démonstration est entièrement balisée, très directe et que son déroulement n'a pas à être interrompu par des calculs annexes. Dans ce cas, on la précèdera de la locution rédactionnelle « On a les équivalences suivantes ».

En pratique, cette exception est pratiquement réservée à la résolution de systèmes d'équations linéaires.

Exemple

✔✔✔ « *Soient* $x, y \in \mathbb{R}$. *On a les équivalences suivantes :*

$$\begin{cases} -x - y = -1 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} -x - y = -1 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 0. \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions du système considéré est $\{(1, 0)\}$.

► Règle n° 6 : Attention à l'usage de $\implies$

De même, l'usage de « $\implies$ » est réservé aux moments où l'« on dit des mathématiques » :

- quand on annonce ce qu'on va montrer :

Exemples

✔✔✔ « *Montrons que*

$$\forall x, y \in]1, +\infty[, \quad x > y \implies \frac{x}{x-1} < \frac{y}{y-1}. \text{ »}$$

- quand on conclut :

Exemples

✔✔✔ « *On a montré que*

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \;\; n^2 \equiv 1 \; [2] \implies n \equiv 1 \; [2]. \text{ »}$$

- quand on invoque un résultat :

Exemples

✔✔✔ « *Soit $z \in \mathbb{C}$. D'après le cours, on sait que*

$$|z| = 1 \quad \implies \quad \exists \theta \in [0, 2\pi[\, : z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}. \text{ »}$$

En revanche, quand on fait des mathématiques, on n'emploie pas ce symbole.

En particulier, on ne fait pas de démonstration en alignant des « $\implies$ ».
À la place, on part de quelque chose qui est vrai et on enchaîne les *« donc »*.

Exemple

✘✘✘ N'écrivez pas :
« *Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :*

$$(x-1)^2 \geqslant 0 \quad \implies \quad x^2 - 2x + 1 \geqslant 0 \quad \implies \quad x^2 \geqslant 2x - 1.$$

Ainsi, on a montré que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 2x - 1$. »

✘✘✘ Pire, n'écrivez pas :
« *On a : $\forall x \in \mathbb{R}$,*

$$(x-1)^2 \geqslant 0 \quad \implies \quad x^2 - 2x + 1 \geqslant 0 \quad \implies \quad x^2 \geqslant 2x - 1.$$

Ainsi, on a montré que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 2x - 1$. »

✔✔✔ Écrivez :
« *Soit $x \in \mathbb{R}$.*
On a $(x-1)^2 \geqslant 0$, donc $x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$ et donc $x^2 \geqslant 2x - 1$.
Ainsi, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \;\; x^2 \geqslant 2x - 1. \text{ »}$$

Il est essentiel de comprendre que « $\implies$ » n'est pas du tout interchangeable avec *« donc »*.

- La phrase mathématique « $P \implies Q$ » signifie exactement *« Si P alors Q »*.
- En revanche, quand on dit *« P donc Q »*, cela signifie *« d'une part P est vraie, d'autre part $P \implies Q$ est vraie ; ainsi Q est vraie »*.

Ainsi, il est tout à fait possible que $P \implies Q$ soit vrai sans que P ne le soit. Par exemple, il est correct de dire *« Si les poules avaient des dents, alors on aurait $1 + 1 = 0$ »*.

Une dernière façon de saisir cette différence entre « $\implies$ » et *« donc »* est de lire les deux phrases suivantes et de bien comprendre qu'elles n'ont pas la même signification.

- *« Si Socrate est un chat, Socrate est mortel »* : cette phrase est vraie.
- *« Socrate est un chat, donc Socrate est mortel »* : cette phrase est fausse (car on parle du philosophe).

► Règle n° 7 : Attention à l'usage de ∀ et de ∃

De même, l'usage des symboles ∀, ∃ est réservé aux moments où l'« on dit des mathématiques » :

- quand on annonce ce qu'on va montrer :

Exemples

✔✔✔ « *Montrons que* $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 1 - 2x$. »

✔✔✔ « *Soit* $a > 0$. *Montrons que* $\exists x \in \mathbb{R}_+ : x^5 = x^2 + a$. »

- quand on conclut :

Exemples

✔✔✔ « *Ainsi, on a montré que* $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 1 - 2x$. »

✔✔✔ « *On a montré que* $\forall a \in \mathbb{C},\ \exists z \in \mathbb{C} : z^2 = a$. »

- quand on invoque un résultat :

Exemples

✔✔✔ « *Or, on sait que* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(1+x) \leqslant x$. »

✔✔✔ « *Soit* $z \in \mathbb{C}$. *D'après le cours, on sait que*

$$|z| = 1 \quad \Longrightarrow \quad \exists \theta \in [0, 2\pi[: z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$ »

✔✔✔ « *Grâce au théorème des valeurs intermédiaires, on sait que*

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+ :\ \alpha^5 = \alpha^2 + 1.$$ »

En revanche, quand on fait des mathématiques, on n'emploie pas ces symboles.

- On ne fait pas de démonstration en empilant des ∀-assertions. À la place, on fixe un élément (on écrit « *Soit …* ») et on travaille avec cet élément.

Exemple

✘✘✘ N'écrivez pas :
« *On a :*
  ▷ $\forall x \in \mathbb{R},\ (x-1)^2 \geqslant 0$;
  ▷ *donc* $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$;
  ▷ *et donc* $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 2x - 1$,
ce qu'on voulait démontrer. »

✔✔✔ Écrivez :
« *Soit* $x \in \mathbb{R}$.
Comme $(x-1)^2 \geqslant 0$, *après calcul, on trouve* $x^2 \geqslant 2x - 1$.
Ainsi, on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 2x - 1.$$ »

- De même, dans une démonstration, on n'enchaîne pas des $\exists$-assertions.

Exemple

✘✘✘ N'écrivez pas :
« Soit $a \in \mathbb{C}$.
D'après le cours, on sait que $\exists z \in \mathbb{C} : z^2 = a$.
Donc, $\exists z \in \mathbb{C} : z^4 = a^2$ et donc $\exists z \in \mathbb{C} : z^4 + z^2 = a^2 + a$.
On a montré que $\forall a \in \mathbb{C},\ \exists z \in \mathbb{C} : z^4 + z^2 = a^2 + a$. »

✘✘✘ Pire, n'écrivez pas :
« Soit $a \in \mathbb{C}$.
D'après le cours, on sait que

$$\exists z \in \mathbb{C} : z^2 = a \implies z^4 = a^2 \implies z^4 + z^2 = a^2 + a.$$

On a montré que $\forall a \in \mathbb{C},\ \exists z \in \mathbb{C} : z^4 + z^2 = a^2 + a$. »

✘✘✘ N'écrivez pas non plus :
« Soit $a \in \mathbb{C}$.
D'après le cours, on a

$$\exists z \in \mathbb{C} : z^2 = a \implies \exists z \in \mathbb{C} : z^4 = a^2 \implies \exists z \in \mathbb{C} : z^4+z^2 = a^2+a.$$

On a montré que $\forall a \in \mathbb{C},\ \exists z \in \mathbb{C} : z^4 + z^2 = a^2 + a$. »

✔✔✔ Écrivez :
« Soit $a \in \mathbb{C}$.
D'après le cours, on sait que $\exists z \in \mathbb{C} : z^2 = a$. Fixons un tel $z \in \mathbb{C}$.
On a $z^4 = a^2$ et donc on a $z^4 + z^2 = a^2 + a$.
On a montré que $\forall a \in \mathbb{C},\ \exists z \in \mathbb{C} : z^4 + z^2 = a^2 + a$. »

2 Bonnes pratiques

Les règles suivantes rendront la lecture de vos preuves plus simple et plus agréable.

► Bonne pratique n° 1 : Ne commencez pas une phrase par un symbole mathématique

Si le sujet de votre phrase est « x », commencez votre phrase par *« Le réel x … »*.

Cette règle permet d'éviter des ambiguïtés quand la phrase précédente se termine par un symbole mathématique.

Exemple

✘✘✘ N'écrivez pas :
« On a $y \geqslant 2$. x est dans l'ensemble A. »

✔✔✔ Écrivez :
« On a $y \geqslant 2$. Le nombre x est dans l'ensemble A. »

Remarquez l'ambiguïté dans le premier des exemples ci-dessus.

► Bonne pratique n° 2 : Utilisez *« ou bien … ou bien … »*

Si vous devez exposer une situation où deux cas sont possibles, évitez de dire *« soit … soit … »*.

Exemple

✘✘✘ N'écrivez pas :
« Posons $A := \pi^2 - 10$. Soit $A \geqslant 0$, soit $A < 0$. »

✔✔✔ Écrivez :
« Posons $A := \pi^2 - 10$. Ou bien $A \geqslant 0$, ou bien $A < 0$. »

► Bonne pratique n° 3 : Introduisez et concluez

Avant de démontrer une assertion mathématique, annoncez ce que vous allez faire.
De même, concluez en disant ce que vous venez de démontrer.

Exemple

✘✘✘ N'écrivez pas :
« Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $(x-1)^2 \geqslant 0$ donc $x^2 \geqslant 2x - 1$. »

✔✔✔ Écrivez :
« Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 2x - 1$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $(x-1)^2 \geqslant 0$ donc $x^2 \geqslant 2x - 1$.
Ainsi, on a montré

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 2x - 1. \text{ »}$$

Cette bonne pratique est particulièrement importante quand la preuve est longue.

3 Bilan : les locutions rédactionnelles

Les expressions suivantes ont un sens très précis quand elles sont utilisées dans un texte mathématique. D'une certaine façon, apprendre à rédiger c'est apprendre à utiliser ces expressions quand il le faut et uniquement quand il le faut.

Ces « locutions rédactionnelles » sont :

- « On a »
- « Soit »
- « Notons/Posons »
- « Fixons »
- « Écrivons ... avec »
- « Pour »

► Locution n° 1 : « On a »

On l'utilise pour signifier qu'une assertion mathématique est vraie.

Exemples

✔✔✔ *« On a* $2+2=4$*. »*

✔✔✔ *« On a* $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0$*. »*

Évitez d'écrire *« On a que ... »*

Exemple

✘✘✘ Ne dites pas :
« On a que la fonction f *est paire. »*

✔✔✔ Dites :
« La fonction f *est paire. »*

► Locution n° 2 : « Soit »

La locution « Soit » est utilisée pour introduire une « variable ».

Exemples

✔✔✔ *« Soit* $x \in \mathbb{R}$*. »*

✔✔✔ *« Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue. »*

✔✔✔ *« Soit* $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ *une matrice carrée. »*

✔✔✔ *« Soit* $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$*. »*

La locution « Soit » est aussi utilisée pour introduire un objet vérifiant une certaine condition.

Exemples

✔✔✔ « *Soit* $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $x^5 = 2x - 1$. »

✔✔✔ « *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y). \text{ »}$$

Quand on écrit *« Soit* $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $x^5 = 2x - 1$ *»*, on ne suppose pas *a priori* l'existence d'un tel $x \in \mathbb{R}$. D'ailleurs, il est tout à fait correct d'écrire cette phrase même si aucun tel x n'existe. À l'inverse, on écrira *« Fixons* $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $x^5 = 2x - 1$ *»* uniquement après s'être assuré qu'un tel x existe.

On n'utilise pas « Soit » pour introduire une nouvelle notation.

Exemple

✘✘✘ N'écrivez pas :
« *Soit* $A := \pi^2 - 10$. »

✔✔✔ Écrivez :
« *Posons* $A := \pi^2 - 10$. »

✔✔✔ Ou bien, écrivez :
« *Notons* $A := \pi^2 - 10$. »

On utilise souvent la locution « Considérons » pour introduire une application définie par une formule.

Exemple

✘✘✘ Évitez d'écrire :

« *Soit* $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 + x + 1. \end{cases}$ »

✔✔✔ Écrivez plutôt :

« *Considérons la fonction* $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 + x + 1. \end{cases}$ »

► Locution nº 3 : « Notons/Posons »

Les locutions « Notons » et « Posons » sont utilisées pour introduire de nouvelles notations. Elles sont systématiquement utilisées avant le symbole « $:=$ ».

Exemples

✔✔✔ « *Posons* $A := \pi^2 - 10$. »

✔✔✔ « *Notons* $A := \pi^2 - 10$. »

✔✔✔ « *On pose* $A := \pi^2 - 10$. »

✔✔✔ « *On note* $A := \pi^2 - 10$. »

► Locution n° 4 : « Fixons »

La locution « Fixons » est à utiliser pour déclarer un objet dont l'existence est assurée par une $\exists$-assertion.

Par exemple, si $n \in \mathbb{Z}$ est un entier impair, on sait par définition que $\exists p \in \mathbb{Z} : n = 2p + 1$. On peut donc fixer $p \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2p + 1$.

Exemples

✔✔✔ *« Grâce au théorème des valeurs intermédiaires, on sait que*

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+ : \alpha^5 = \alpha^2 + 1.$$

Fixons un tel $\alpha \in \mathbb{R}_+$. »

✔✔✔ *« Comme n est impair, fixons $p \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2p + 1$. »*

✔✔✔ *« Comme la suite $(u_n)_n$ converge, fixons $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \longrightarrow \ell$. »*

✔✔✔ *« Comme P est un polynôme de degré au plus 2, fixons $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $P = aX^2 + bX + c$. »*

Attention à l'erreur de rédaction suivante qui est assez courante.

Exemple

✘✘✘ N'écrivez pas :
« Fixons $x \in \mathbb{R}$ tel que $x = 2$. »

✔✔✔ Écrivez :
« Notons $x := 2$. »

✔✔✔ Ou bien :
« Posons $x := 2$. »

La locution « Fixons » est souvent utilisée sous sa forme « Fixons donc » quand la justification de l'existence de l'objet est dans la phrase précédente.

Exemples

✔✔✔ *« Le nombre entier N est pair. Fixons donc $p \in \mathbb{Z}$ tel que $N = 2p$. »*

✔✔✔ *« On a $\omega \in \mathbb{U}_n$. Fixons donc $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{2\pi}{n}}$. »*

► Locution n° 5 : « Écrivons ... avec »

La locution « Écrivons ... avec » permet d'introduire des objets dont l'existence est assurée par une $\exists$-assertion. En cela, elle remplit le même rôle que la locution « Fixons ».

Voyons sur des exemples comment l'employer.

Exemples

✔✔✔ À la place de :
« *Comme n est impair, fixons $p \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2p + 1$.* »

✔✔✔ Vous pouvez aussi écrire :
« *Comme n est impair, écrivons-le $n = 2p + 1$, avec $p \in \mathbb{Z}$.* »

✔✔✔ À la place de :
« *Comme $z \in \mathbb{C}$, fixons $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $z = a + \mathrm{i}b$.* »

✔✔✔ Vous pouvez aussi écrire :
« *Comme $z \in \mathbb{C}$, écrivons-le $z = a + \mathrm{i}b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.* »

✔✔✔ À la place de :
« *Comme $P \in \mathbb{R}[X]$, fixons $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.* »

✔✔✔ Vous pouvez aussi écrire :
« *Comme $P \in \mathbb{R}[X]$, écrivons-le $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.* »

✔✔✔ À la place de :
« *Comme $y \in \mathsf{Im}(f)$, fixons $x \in E$ tel que $y = f(x)$.* »

✔✔✔ Vous pouvez aussi écrire :
« *Comme $y \in \mathsf{Im}(f)$, écrivons $y = f(x)$, avec $x \in E$.* »

Pour se souvenir que c'est le connecteur « avec » qui suit la locution « Écrivons », remarquez que ces deux mots contiennent tous les deux la lettre « v ».

Attention à l'erreur suivante.

Exemple

✘✘✘ « *Soit $z \in \mathbb{C}$. Écrivons-le $z := a + \mathrm{i}b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.* »

Cette rédaction est incorrecte car elle introduit deux fois la lettre z ! Or, une fois qu'une lettre est introduite, la réintroduire est une erreur. Ici, la lettre z est d'abord introduite une première fois par « *Soit $z \in \mathbb{C}$* » puis, elle est de nouveau introduite par « $z :=$ ». À la place, on pourrait écrire :

Exemple

✔✔✔ « *Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Posons $z := a + \mathrm{i}b$.* »

Mais, ici, la meilleure rédaction est :

Exemple

✔✔✔ *« Soit $z \in \mathbb{C}$. Écrivons-le $z = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. »*

Dans certains cas, la locution « Écrivons » introduit aussi une notation. On peut alors utiliser le connecteur « où », comme dans l'exemple suivant.

Exemples

✔✔✔ *« Comme $P \in \mathbb{R}[X]$ est non nul, écrivons-le*

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k,$$

où $n := \mathsf{deg}(P)$ et avec $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. »

► Locution n° 6 : « Pour »

On l'utilise pour introduire un objet mathématique dont la définition se limite à la phrase courante.

Exemples

✔✔✔ *« Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 \geqslant 0$. »*

✔✔✔ *« Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note $u_n := 2^n$. »*

✔✔✔ *« On sait que, pour $t > 0$, on a $\ln(1 + t) \leqslant t$. »*

4 En guise de conclusion

Attention ! Le ton de ce texte est affirmatif et prescriptif alors que certaines des règles ci-dessus ne sont pas suivies par tous les mathématiciens. En particulier, l'usage prescrit ici quant à la locution « Fixons » n'est pas universel. Néanmoins, en suivant ces règles, vous aurez l'assurance de produire des textes mathématiques considérés comme rigoureux par la plupart des mathématiciens.

De façon plus générale, il faut garder à l'esprit que la pratique des mathématiques est une activité humaine régie par des conventions et, en particulier, des conventions de rédaction. Ces conventions ne sont écrites nulle part et il n'y a pas de règle absolue. L'art des mathématiques est précisément celui d'étudier comment un ensemble de règles organise un système. On pourra donc considérer les règles précédentes comme des règles qu'on fixe arbitrairement, et qu'on s'impose de suivre.

De ce point de vue, la rédaction mathématique devient une pratique mathématique.