DS 4

4 heures

- *Tout résultat ou raisonnement doit être clairement justifié, sauf mention du contraire.*
- *La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.*
- *La présentation de la copie sera prise en compte dans l'évaluation :*
  - ▷ *encadrez les résultats principaux ;*
  - ▷ *soulignez les résultats et arguments intermédiaires importants ;*
  - ▷ *soignez votre écriture ;*
  - ▷ *maintenez une marge dans vos copies, aérez vos copies ;*
  - ▷ *enfin, numérotez vos copies (et non vos pages).*
- *Les documents, calculatrices et autres appareils électroniques sont interdits.*
- *Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie en expliquant les initiatives que vous avez été amené à prendre.*
- *Ne rendez pas le sujet avec vos copies.*

Transferts entre contrôles polynomiaux

Une minoration asymptotique

Dans tout ce sujet,
l'utilisation de la formule de Stirling est interdite.

Partie I – Étude d'un polynôme.

Notations

- *Dans cette partie, on fixe* $n \in \mathbb{N}^*$.
- *On note*
$$P_n \coloneqq (2X-1)^{3n}.$$
- *On écrit*
$$P_n = \sum_{k=0}^{3n} a_k X^k$$
où $\forall k \in [\![0, 3n]\!]$, $a_k \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\forall t \in [0,1],\ |P_n(t)| \leqslant 1$.

2. Donner l'expression de a_k pour tout $k \in [\![0, 3n]\!]$.

3. Soit $k \in [\![0, 3n]\!]$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur k pour que $\dfrac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \geqslant 1$.

4. En déduire la valeur de $\max\limits_{k \in [\![0,3n]\!]} |a_k|$.

Partie II – Étude d'une première suite.

Notation

Dans cette partie, on considère la suite $(\mathsf{C}_n)_{n \geqslant 0}$ *définie par*
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \mathsf{C}_n = \binom{3n}{2n}.$$

5. Calculer C_3.

6. Montrer que $(\mathsf{C}_n)_n$ est strictement croissante.

7. (a) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \mathsf{C}_n = \frac{\prod_{k=1}^{2n}(n+k)}{\prod_{k=1}^{2n} k}.$$

(b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \mathsf{C}_n \geqslant \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2n}$.

(c) En déduire que $2^n = \mathrm{o}(\mathsf{C}_n)$.

Partie III – Trois développements asymptotiques et un lemme.

Théorème de sommation d'équivalents

Dans cette partie, on pourra utiliser librement le théorème suivant, en prenant garde à bien vérifier ses hypothèses.

Théorème (Sommation d'équivalents)**.**
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *deux suites telles que*

$$\begin{cases} \forall n \geqslant 1,\ a_n \geqslant 0 \\ u_n \sim a_n \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \longrightarrow +\infty. \end{cases}$$

Alors, on a

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \sim \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Les questions **8.**, **9.** *et* **10.** *sont indépendantes les unes des autres.*

8. Équivalent de la série harmonique.

(a) Montrer que $\ln(n+1) \sim \ln(n)$.

(b) En utilisant la suite $(\delta_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $\forall n \geqslant 1$, $\delta_n = \ln(n+1) - \ln(n)$, montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n).$$

9. Équivalent de la somme des puissances p-ièmes.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

(a) Donner un équivalent simple de $(n+1)^{p+1} - n^{p+1}$, quand $n \to \infty$.

(b) Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} k^p \sim \frac{n^{p+1}}{p+1} \text{ quand } n \to \infty.$$

10. Comparaison des exponentielles et de la factorielle.

(a) Montrer que $(n+1)\ln(n+1) - n\ln(n) \sim \ln(n)$.

(b) Montrer que $\ln(n!) \sim n\ln(n)$.

(c) En déduire que

$$\forall a > 1,\ \ a^n = \mathrm{o}(n!).$$

11. Un premier lemme.

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ et soient $C \in \mathbb{R}$ et $D > 0$ tels que

$$u_n = C + \frac{D}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = Cn + D\ln(n) + \mathrm{o}(\ln(n)).$$

Partie IV – Étude d'une suite binomiale.

Notations

- *Dans cette partie, on fixe $a, b \in \mathbb{N}^*$ deux entiers naturels tels que $a < b$.*
- *On considère la suite $(\mathsf{B}_n)_n$ définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ \mathsf{B}_n = \binom{b \times n}{a \times n}.$$

Dans la partie **I.**, *on s'est penché sur le cas $a = 2$ et $b = 3$.*

12. Donner un équivalent simple de $\dfrac{\mathsf{B}_{n+1}}{\mathsf{B}_n}$, quand $n \to \infty$.

13. (a) Soit $c \in \mathbb{N}^*$. Déterminer des réels C, D et E tels que

$$\ln(cn+1) + \cdots + \ln(cn+c) = C\ln(n) + D + \frac{E}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

(b) En déduire des réels α et β tels que

$$\ln(\mathsf{B}_{n+1}) - \ln(\mathsf{B}_n) = \alpha + \frac{\beta}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Dans la suite, on fixe de tels nombres réels α et β.

(c) Montrer que

$$\ln(\mathsf{B}_n) = \alpha n + \beta\ln(n) + \mathrm{o}(\ln(n)).$$

14. Un second lemme.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à termes > 0, soit $A \in \mathbb{R}$ et soit $B > 0$ tels que

$$\ln(u_n) = An - B\ln(n) + \mathrm{o}(\ln(n)).$$

Montrer que, pour tout $\gamma > B$, on a,

$$\frac{\exp(A)^n}{n^\gamma} = \mathrm{o}(u_n).$$

15. En déduire que

$$\frac{\left(\dfrac{b^b}{a^a(b-a)^{b-a}}\right)^n}{n} = \mathrm{o}(\mathsf{B}_n).$$

16. En déduire que

$$6^n = \mathrm{o}\left(\binom{3n}{2n}\right).$$

Partie V – Sommation d'équivalents.

Notations et hypothèses

- *Dans cette partie, on considère* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *et* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$*, deux suites à termes* > 0.
- *Pour* $n \in \mathbb{N}$*, on note*

$$U_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n} u_k \quad \text{et} \quad A_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

- *On suppose que* $u_n \sim a_n$.
- *On suppose que* $A_n \longrightarrow +\infty$.

Le but de cette partie est de démontrer le théorème admis dans la partie **III**.

17. Soit $\varepsilon > 0$.

(a) Expliquer pourquoi $\exists N_0 \in \mathbb{N}^* : \forall n \geqslant N_0,\ \left| \frac{u_k}{a_k} - 1 \right| \leqslant \varepsilon$.

Dans la suite, on fixe un tel N_0.

(b) Montrer que, pour tout $n \geqslant N_0$, on a

$$\left| \frac{U_n}{A_n} - 1 \right| \leqslant \frac{U_{N_0-1} + A_{N_0-1}}{A_n} + \frac{\displaystyle\sum_{k=N_0}^{n} a_k \left| \frac{u_k}{a_k} - 1 \right|}{A_n}.$$

(c) En déduire que, pour tout $n \geqslant N_0$, on a

$$\left| \frac{U_n}{A_n} - 1 \right| \leqslant \frac{U_{N_0-1} + A_{N_0-1}}{A_n} + \varepsilon.$$

(d) En déduire que

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N_1,\ \left| \frac{U_n}{A_n} - 1 \right| \leqslant 2\varepsilon.$$

18. Montrer que $U_n \sim A_n$.

Partie VI – Minoration asymptotique du transfert.

- *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et soit $M \in \mathbb{R}_+$. On dit que*
  - ▷ M contrôle P sur $[0,1]$ $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\forall t \in [0,1],\ |P(t)| \leqslant M.$$

  - ▷ M contrôle les coefficients de P $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ |a_k| \leqslant M,$$

  où l'on a écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, *où* $n \in \mathbb{N}$, *où* $\forall k \in [\![0,n]\!], a_k \in \mathbb{R}$.

- *Soit $K \in \mathbb{R}_+$ et soit $n \in \mathbb{N}$.*

  On dit que K permet le transfert des contrôles sur $\mathbb{R}_n[X]$ $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \Big(1 \textit{ contrôle } P \textit{ sur } [0,1]\Big) \implies \Big(K \textit{ contrôle les coefficients de } P\Big).$$

19. Soit $(K_n)_n \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ K_n \text{ permet le transfert des contrôles sur } \mathbb{R}_n[X].$$

Montrer que

$$\frac{27^n}{n} = \mathrm{o}(K_{3n}).$$

FIN DU SUJET.