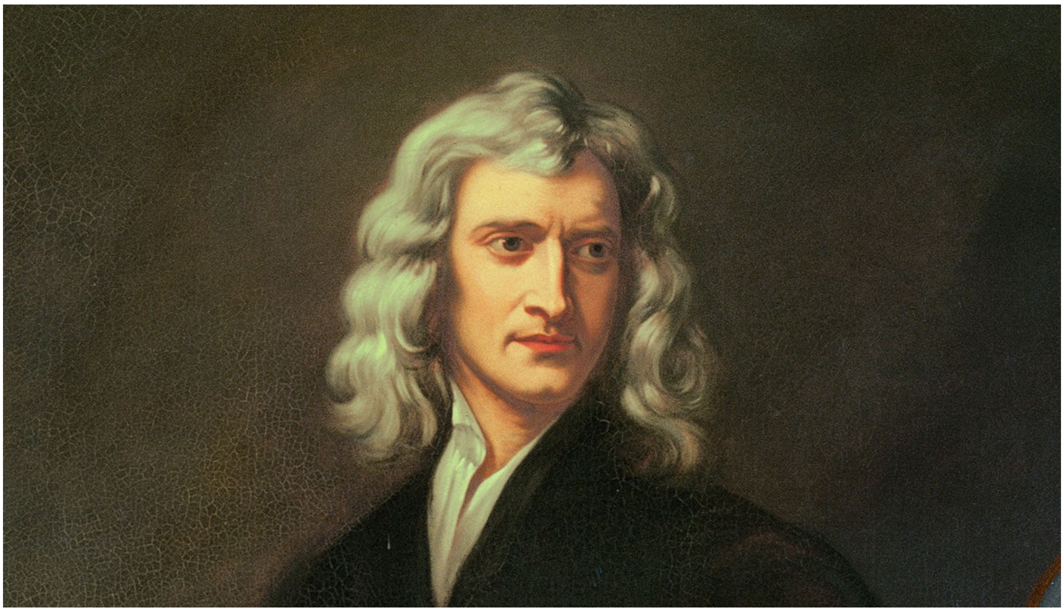
Chapitre 20

Limites et comparaisons



Isaac Newton
(1642 – 1727)

« Je ne sais pas ce que j'ai pu sembler être aux yeux du monde, mais à mes yeux je n'ai été qu'un enfant, jouant sur le rivage et heureux de trouver de temps à autre un galet plus lisse ou un coquillage plus beau que les autres, alors que le grand océan de la vérité s'étendait devant moi, encore inexploré. »

Isaac Newton
The Portsmouth Papers

Newton

Physicien, mathématicien, alchimiste, passionné d'astronomie, grand argentier de l'État et homme d'Église, Sir Isaac Newton fut un génie comme l'histoire en a peu connu.

Père du principe de la gravitation universelle, des lois du mouvement, du principe d'action-réaction, du télescope, du calcul différentiel... Newton a marqué l'histoire par son œuvre, impressionnante tant par sa profondeur que son étendue.

Sommaire

Dans tout ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $\ell(I) > 0$.

I. Adhérence, intérieur et voisinages

1) Adhérence

Définition LIM.1
L'adhérence de I dans $\overline{\mathbb{R}}$, *notée* $\overline{I}$ *est définie par*

$$\overline{I} := I \cup \{\text{les bornes de } I\}.$$

Exemples

- $\overline{]0,1[} = [0,1]$
- $\overline{]0,1]} = [0,1]$
- $\overline{]0,+\infty[} = [0,+\infty[\cup \{+\infty\}$
- $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

On rappelle que « $-\infty$ » et « $+\infty$ » ne sont que des symboles
et en aucun cas des nombres.

Exercice LIM.2

1) *A-t-on* $\overline{\overline{I}} = \overline{I}$ *?*
2) *A-t-on* $\overline{I} \cap \mathbb{R} = I$ *?*

2) Intérieur

Définition LIM.3
L'intérieur de I, *noté* $\mathring{I}$ *ou* $\overset{\frown}{\mathring{I}}$ *est défini par*

$$\mathring{I} := I \setminus \{\text{les bornes de } I\}.$$

Exemple

- $\overset{\frown}{\mathring{[0,1]}} =]0,1[$

Exercice LIM.4
Caractériser les intervalles d'intérieur vide.

3) Voisinages

Dans ce paragraphe, on introduit le formalisme des voisinages. Il est tout à fait analogue au formalisme « APCR » qu'on a introduit pour les suites.

Définition LIM.**5**

Soit $a \in \overline{I}$.

- *Soit $P(f)$ un prédicat de f, fonction réelle.*
  Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.
  On dit que $P(f)$ est vrai *au voisinage de a et on note « $P(f)$ au $\mathscr{V}(a)$ » $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$*
  - ▷ *quand $a \in \mathbb{R}$:* $\exists \delta > 0 : \ P\Big(f\big|_{I \cap]a-\delta, a+\delta[}\Big)$ *est vraie*
  - ▷ *quand $a = +\infty$:* $\exists A \in \mathbb{R} : \ P\Big(f\big|_{I \cap [A, +\infty[}\Big)$ *est vraie*
  - ▷ *quand $a = -\infty$:* $\exists A \in \mathbb{R} : \ P\Big(f\big|_{I \cap]-\infty, A]}\Big)$ *est vraie*
- *Soit $Q(x)$ un prédicat de $x \in \mathbb{R}$.*
  On dit que $Q(x)$ est vrai *au voisinage de a et on note « $Q(x)$ au $\mathscr{V}(a)$ » $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$*
  - ▷ *quand $a \in \mathbb{R}$:* $\exists \delta > 0 : \ \forall x \in]a-\delta, a+\delta[, \ Q(x)$
  - ▷ *quand $a = +\infty$:* $\exists A \in \mathbb{R} : \ \forall x \in [A, +\infty[, \ Q(x)$
  - ▷ *quand $a = -\infty$:* $\exists A \in \mathbb{R} : \ \forall x \in]-\infty, A], \ Q(x)$

Exemples

- $P(f) =$ « f est croissante ».
  On considère la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 - 42. \end{cases}$ Alors,
  - ▷ f est croissante au $\mathscr{V}(+\infty)$.
  - ▷ f est décroissante au $\mathscr{V}(-\infty)$.
  - ▷ f n'est ni croissante ni décroissante au $\mathscr{V}(0)$.
- $\sin(\cdot)$ est strictement croissante au $\mathscr{V}(0)$.
- $\begin{cases} \mathbb{R}+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{1}{x} \end{cases}$ n'est pas bornée au $\mathscr{V}(0)$ *ie* $\forall \delta > 0, \begin{cases}]0, \delta[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{1}{x} \end{cases}$ n'est pas bornée.
- $\cos(x) > 0$ au $\mathscr{V}(0)$.
- $\dfrac{1}{x} \leqslant 1$ au $\mathscr{V}(+\infty)$.
- $\dfrac{\exp\big(\sqrt{x}\big)}{2} > x^{42}$ au $\mathscr{V}(+\infty)$.

II. Limites : définition

1) Les neuf cas

Définition LIM.**6**
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.
Soient $a \in \overline{I}$ *et* $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
On dit que f tend vers ℓ en a *ou que* $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a, *et on note*

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \qquad \text{ou} \qquad f(x) \underset{a}{\longrightarrow} \ell \qquad \text{ou} \qquad f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$$

$\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ ...

a) Premier cas : $a \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$

Définition LIM.**7**

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \qquad \overset{\Delta}{\text{ssi}} \qquad \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in I,\ |x - a| \leqslant \delta \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Autrement dit : « Quitte à être très proche de a, je peux être, après application de la fonction $f(\cdot)$ aussi proche que je veux de ℓ »

Remarque

- Dans cette définition, on peut remplacer le « $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$ » par « $|f(x) - \ell| \leqslant 2\varepsilon$ » ou par « $|f(x) - \ell| \leqslant 50\varepsilon$ », *etc.*

Exemples

- $\sqrt{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$.
  « Si x est petit, $\sqrt{x}$ est petit. »
- $\sqrt{x} \underset{x \to 2}{\longrightarrow} \sqrt{2}$.
  « Si x est proche de 2, $\sqrt{x}$ est proche de $\sqrt{2}$. »

Fait LIM.**8**
Si f *est définie en* a (ie *si* $a \in I$) *alors*

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \implies \ell = f(a).$$

Démonstration. — Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\delta > 0$ tel que $\forall x \in I,\ |x - a| \leqslant \delta \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Comme $a \in I$ et $|a - a| \leqslant \delta$, on a $|f(a) - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Ainsi, on a montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ |f(a) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On sait que dans ce cas, on a nécessairement $|f(a) - \ell| = 0$, *ie* $f(a) = \ell$.

∎

Remarque
Ainsi, le cas intéressant est quand $a \notin I$.

Exemples

- $\dfrac{\sin(x)}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$.
- On considère $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$. Alors, f n'a pas de limite en 0.

b) Deuxième cas : $a \in \mathbb{R}$ et $\ell = +\infty$

Définition LIM.**9**

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty \qquad \overset{\Delta}{\text{ssi}} \qquad \forall A \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in I,\ |x - a| \leqslant \delta \implies f(x) \geqslant A$$

Une fonction f qui tend vers $+\infty$ en a ne peut pas être définie en a.

Remarque

- Dans cette définition, on peut remplacer le « $\forall A \in \mathbb{R}$ » par « $\forall A \geqslant 0$ ».

Exemple

- On considère $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{1}{x} \end{cases}$. Alors on a $f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} +\infty$.

c) Troisième cas : $a = +\infty$ et $\ell \in \mathbb{R}$

Définition LIM.**10**

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell \qquad \overset{\Delta}{\text{ssi}} \qquad \forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 \in \mathbb{R} :\ \forall x \in I,\ x \geqslant x_0 \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Exemples

- $\dfrac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
- $\arctan(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$.

d) Quatrième cas : $a = +\infty$ et $\ell = +\infty$

Définition LIM. 11

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \qquad \overset{\Delta}{\text{ssi}} \qquad \forall A \in \mathbb{R},\ \exists x_0 \in \mathbb{R} :\ \forall x \in I,\ x \geqslant x_0 \implies f(x) \geqslant A$$

Exemples

- $x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
- $\exp(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
- $\lfloor x \rfloor \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

e) Autres cas

Exercice LIM. 12

1) *Quels sont les autres cas ?*
2) *Donner les définitions dans ces cas-là.*

2) Fonctions convergentes

Définition LIM. 13
Soit $a \in \overline{I}$ et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f converge en a $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\exists \ell \in \mathbb{R} : f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.

3) Unicité de la limite

Proposition-définition LIM. 14
Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$ et $\ell_1, \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$.

- *Alors,*
$$\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell_1 \\ f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell_2 \end{array}\right\} \implies \ell_1 = \ell_2.$$
- *Dans ce cas, cet unique $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ est appelé* la limite de f en a *et est noté*
$$\lim_{x\to a} f(x) \qquad \textit{ou} \qquad \lim_a f(x) \qquad \textit{ou} \qquad \lim_a f.$$

Démonstration. — On laisse au lecteur le soin, à titre d'exercice, de démontrer cette assertion. ■

4) Limites par valeurs inférieures et supérieures

Définition LIM.15
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, soit $a \in \overline{I} \cap \mathbb{R}$ et soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

- *On dit que* $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a par valeurs supérieures $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$f\big|_{I\cap]a,+\infty[}(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell.$$

On note alors

$$f(x) \xrightarrow[\substack{x\to a\\ >}]{} \ell \qquad \text{ou} \qquad f(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} \ell \qquad \text{ou} \qquad f(x) \xrightarrow[a^+]{} \ell \qquad \text{ou} \qquad f \xrightarrow[a^+]{} \ell.$$

- *De même, on définit « $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a par valeurs inférieures » et les notations correspondantes.*

Exemples

- Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors, on a

$$f \xrightarrow[0^+]{} 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in]0, \delta[,\ |f(x) - 1| \leqslant \varepsilon.$$

- On considère la fonction $g : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lfloor x \rfloor \end{cases}$. Alors, on a

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = -1 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(0) = 0.$$

Proposition LIM.16
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, soit $a \in I$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, on a

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} f(x) \xrightarrow[x\to a^-]{} \ell \\ f(a) = \ell \\ f(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} \ell. \end{cases}$$

Démonstration. — Elle est laissée au lecteur à titre d'exercice. ■

5) Cas d'une fonction non définie en un point

Définition LIM.17
Soit $a \in \mathring{I}$ et soit $f : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
On dit que f tend vers ℓ en a $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$f(x) \underset{\substack{x \to a \\ >}}{\longrightarrow} \ell \qquad \text{et} \qquad f(x) \underset{\substack{x \to a \\ <}}{\longrightarrow} \ell.$$

On note alors

$$f(x) \underset{\substack{x \to a \\ \neq}}{\longrightarrow} \ell.$$

Exemples

- Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On verra bientôt que

$$f \text{ est dérivable en } a \quad \overset{\Delta}{\mathit{ssi}} \quad \exists \ell \in \mathbb{R} : \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{\substack{x \to a \\ \neq}}{\longrightarrow} \ell.$$

- On a $\dfrac{1}{x^2} + 1 \underset{\substack{x \to 0 \\ \neq}}{\longrightarrow} +\infty$.

III. Opérations sur les limites

1) Une fonction convergente est localement bornée

Proposition LIM.18
Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Alors,

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \quad \Longrightarrow \quad f \text{ est bornée au } \mathscr{V}(a).$$

Démonstration. — *Cf.* cours. ∎

Remarque

- On remarquera évidemment l'analogie avec le résultat suivant portant sur les suites

$$\forall (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad (u_n)_n \text{ converge} \implies (u_n)_n \text{ bornée.}$$

Exemple

- On considère $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{1}{x} \end{cases}$.
  - ▷ On a $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc, f est bornée au $\mathscr{V}(+\infty)$.
  - ▷ Mais, f n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Opérations algébriques sur les limites

On dispose pour les limites de fonctions de résultats analogues à ceux pour les limites de suites. On laisse au lecteur le soin de les énoncer et de les démontrer.

Exemples

Soit $a \in \overline{I}$, soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et soient $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$.

- On a
$$\left.\begin{array}{l} f \underset{a}{\longrightarrow} \ell_1 \\ g \underset{a}{\longrightarrow} \ell_2 \end{array}\right\} \implies \left(f+g \underset{a}{\longrightarrow} \ell_1+\ell_2 \quad \text{et} \quad fg \underset{a}{\longrightarrow} \ell_1\ell_2 \right).$$
- On a
$$\left.\begin{array}{l} f \underset{a}{\longrightarrow} +\infty \\ g \text{ bornée au } \mathscr{V}(a) \end{array}\right\} \implies f+g \underset{a}{\longrightarrow} +\infty.$$
- *etc.*

3) Composition des limites

a) Cas fonctions – fonctions

Théorème LIM.19
Soient I et J des intervalles et soient $f : I \longrightarrow J$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$.
Soit $a \in \overline{I}$, soit $b \in \overline{J}$. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
Alors, on a
$$\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b \\ g(X) \underset{X \to b}{\longrightarrow} \ell \end{array}\right\} \implies g \circ f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell.$$

Démonstration. — *Cf.* cours. ∎

Exemples

- On a $\sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. En effet, on a
$$\frac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \sin(X) \underset{X \to 0}{\longrightarrow} 0.$$
- On a $\ln\left(\frac{\ln(x)}{\ln(x)+1}\right) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
  En effet,
  ▷ on a
$$\frac{\ln(x)}{\ln(x)+1} = \frac{\ln(x)}{\ln(x)\left(1+\frac{1}{\ln(x)}\right)} = \frac{1}{1+\underbrace{\frac{1}{\ln(x)}}_{\underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1\ ;$$
  ▷ et $\ln(X) \underset{X \to 1}{\longrightarrow} 0$.

b) Application : calcul d'une limite en un point fini en se ramenant à 0

On veut calculer $\lim_{x \to a} f(x)$:

- On pose $x = a + h$.
- On pose $g(h) = f(a+h)$.
- On calcule $\lim_{h \to 0} g(h)$.
- Par composition des limites, le résultat trouvé vaut $\lim_{h \to 0} f(a+h)$.

Exemple

- Calculons $\lim_{x \underset{<}{\to} \pi} \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{\pi - x}}$.

  Cf. cours.

c) Cas suites – fonctions

Le résultat précédent se transpose au cas où l'on compose une suite par une fonction. En effet, si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^N$, on peut considérer la « suite composée $f \circ (u_n)_n$ », qui n'est autre que $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Théorème LIM. **20**

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $(u_n)_n \in I^{\mathbb{N}}$.
Soit $a \in \overline{I}$. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
Alors, on a

$$\left.\begin{array}{l} u_n \longrightarrow a \\ f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \end{array}\right\} \implies f(u_n) \longrightarrow \ell.$$

Exemple

- On a $\arctan(\sqrt{n} + 1) \longrightarrow \dfrac{\pi}{2}$.

  En effet,

  ▷ on a $\sqrt{n} + 1 \longrightarrow +\infty$;

  ▷ et $\arctan(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice LIM. **21**

Énoncer le théorème dans le cas « suites – suites ».

d) Application : cos(·) n'a pas de limite en l'infini

Théorème LIM. **22**

1) *La fonction* $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos\left(\frac{1}{x}\right) \end{array}\right.$ *n'admet pas de limite en* 0.

2) *La fonction* $\cos(\cdot)$ *n'admet pas de limite en* $+\infty$.

Démonstration. — *Cf.* cours. ∎

IV. Limites et inégalités

1) Passage à la limite dans les inégalités larges

Proposition LIM.**23**
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *et soit* $a \in \overline{I}$. *Soit* $\ell \in \mathbb{R}$.
Alors, on a

$$\left.\begin{array}{l} f \geqslant 0 \text{ au } \mathscr{V}(a) \\ f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \end{array}\right\} \implies \ell \geqslant 0.$$

Démonstration. — *Cf.* cours. ■

Remarques

- On verra plus loin qu'on a une réciproque partielle quand on a des inégalités strictes. C'est le rétro-passage à la limite dans les inégalités strictes.
- Attention, évidemment, on ne peut pas passer à la limite dans les inégalités strictes.

Exercice LIM.**24**
Trouver un contre-exemple à l'implication fausse

$$\left.\begin{array}{l} f > 0 \text{ au } \mathscr{V}(a) \\ f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \end{array}\right\} \implies \ell > 0.$$

Corollaire LIM.**25**
Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *et soit* $a \in \overline{I}$. *Soient* $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$. *Soit* $M \in \mathbb{R}$.
On suppose que $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell_1$ et $g \underset{a}{\longrightarrow} \ell_2$.
Alors, on a

1) $f \leqslant g$ au $\mathscr{V}(a) \implies \ell_1 \leqslant \ell_2$
2) $f \leqslant M$ au $\mathscr{V}(a) \implies \ell_1 \leqslant M$
3) $f \geqslant M$ au $\mathscr{V}(a) \implies \ell_1 \geqslant M$

2) Rétro-passage à la limite dans les inégalités strictes

Proposition LIM.**26**
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *et soit* $a \in \overline{I}$. *Soit* $\ell \in \mathbb{R}$ *tel que* $f(x) \underset{a}{\longrightarrow} \ell$.
Alors, on a

$$\ell > 0 \quad \implies \quad \exists \varepsilon_0 > 0 : \ \big(f \geqslant \varepsilon_0 \text{ au } \mathscr{V}(a)\big).$$

Démonstration. — Elle est laissée au lecteur à titre d'exercice. ■

3) Théorèmes d'encadrement

a) Données

Dans ce paragraphe, on considère :

- $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions ;
- $a \in \overline{I}$ un élément de I ou l'une des ses bornes ;
- $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

b) Théorème des gendarmes

Théorème LIM. **27** (Théorème des gendarmes)

$$\left.\begin{array}{l} f \leqslant g \leqslant h \text{ au } \mathscr{V}(a) \\ f \underset{a}{\longrightarrow} \ell \\ h \underset{a}{\longrightarrow} \ell \end{array}\right\} \implies g \underset{a}{\longrightarrow} \ell.$$

Démonstration. — Laissée en exercice. ∎

c) Réflexe : calcul d'une limite nulle par contrôle de la valeur absolue

Corollaire LIM. **28**

$$\left.\begin{array}{l} |f| \leqslant g \text{ au } \mathscr{V}(a) \\ g \underset{a}{\longrightarrow} 0 \end{array}\right\} \implies f \underset{a}{\longrightarrow} 0$$

Corollaire LIM. **29**

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ bornée au } \mathscr{V}(a) \\ g \underset{a}{\longrightarrow} 0 \end{array}\right\} \implies fg \underset{a}{\longrightarrow} 0$$

d) Étude d'un exemple

Exemple

- Déterminons $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

  Cf. cours.

e) Divergence par minoration

Proposition LIM. **30**

On suppose que $f \leqslant g$ *au* $\mathscr{V}(a)$*. Alors, on a*

- $f \underset{a}{\longrightarrow} +\infty \implies g \underset{a}{\longrightarrow} +\infty$
- $g \underset{a}{\longrightarrow} -\infty \implies f \underset{a}{\longrightarrow} -\infty$

4) Théorème de la limite monotone

Théorème LIM.31
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante.

1) *Soit $a \in \mathring{I}$ (donc, $a \in I$ et donc $a \in \mathbb{R}$).*
Alors, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ existent et sont finies et on a
$$\lim_{x \to a^-} f(x) \leqslant f(a) \leqslant \lim_{x \to a^+} f(x).$$
2) *Si b est la borne supérieure de I (on a $b \in \overline{\mathbb{R}}$).*
Alors, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ et on a :
   a) *si f est bornée au $\mathscr{V}(b)$, alors $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) \in \mathbb{R}$;*
   b) *sinon, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$*
3) *Si b est la borne inférieure de I (on a $b \in \overline{\mathbb{R}}$).*
Alors, $\lim\limits_{x \to b^+} f(x)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ et on a :
   a) *si f est bornée au $\mathscr{V}(b)$, alors $\lim\limits_{x \to b^+} f(x) \in \mathbb{R}$;*
   b) *sinon, $\lim\limits_{x \to b^+} f(x) = -\infty$*

Remarque

- On a évidemment un énoncé analogue quand f est décroissante et on laisse au lecteur le soin de l'énoncer.

Exemple

- On considère la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x < 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases} \end{cases}$. Alors, f est croissante.

Démonstration. — *Cf.* cours. ■

V. Relations de comparaison

Dans cette partie, on fixe $a \in \overline{I}$ et on considère f et g deux fonctions définies sur I ou sur $I \setminus \{a\}$.

1) Définitions

a) Négligeabilité

Définition LIM.**32**
On dit que f est négligeable devant g au $\mathscr{V}(a)$ *et on note*

$$f = \underset{a}{\mathrm{o}}(g) \quad \textit{ou} \quad f(x) = \underset{a}{\mathrm{o}}(g(x))$$
$$\textit{ou} \quad f(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(g(x)) \quad \textit{ou} \quad f(x) = \mathrm{o}(g(x)) \textit{ quand } x \to a$$

$$\overset{\triangle}{\text{ssi}} \ \exists \varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R} \quad : \quad \begin{cases} f = \varepsilon g \text{ au } \mathscr{V}(a) \\ \varepsilon \underset{a}{\longrightarrow} 0. \end{cases}$$

b) Équivalence

Définition LIM.**33**
On dit que f est équivalente à g au $\mathscr{V}(a)$ *et on note*

$$f \underset{a}{\sim} g \quad \textit{ou} \quad f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$$
$$\textit{ou} \quad f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \quad \textit{ou} \quad f(x) \sim g(x) \textit{ quand } x \to a$$

$$\overset{\triangle}{\text{ssi}} \ \exists \theta : I \longrightarrow \mathbb{R} \quad : \quad \begin{cases} f = \theta g \text{ au } \mathscr{V}(a) \\ \theta \underset{a}{\longrightarrow} 1. \end{cases}$$

c) Domination

Définition LIM.**34**
On dit que f est dominée par g au $\mathscr{V}(a)$ *et on note*

$$f = \underset{a}{\mathrm{O}}(g) \quad \textit{ou} \quad f(x) = \underset{a}{\mathrm{O}}(g(x))$$
$$\textit{ou} \quad f(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{O}}(g(x)) \quad \textit{ou} \quad f(x) = \mathrm{O}(g(x)) \textit{ quand } x \to a$$

$$\overset{\triangle}{\text{ssi}} \ \exists M \in \mathbb{R} : |f| \leqslant M|g| \text{ au } \mathscr{V}(a).$$

2) En pratique

En pratique, comme pour les équivalents de suites, on compare f à g en étudiant le quotient $\dfrac{f}{g}$.

Si g ne s'annule pas au $\mathscr{V}(a)$ sauf éventuellement en a, on a

En pratique

- $$f = \underset{a}{\mathrm{o}}(g) \iff \frac{f}{g} \underset{a}{\longrightarrow} 0$$
- $$f \underset{a}{\sim} g \iff \frac{f}{g} \underset{a}{\longrightarrow} 1$$
- $$f = \underset{a}{\mathrm{O}}(g) \iff \frac{f}{g} \text{ est bornée au } \mathscr{V}(a)$$

3) Cas particuliers très importants

Dans des cas simples mais importants, le langage des équivalents, petits « o » et grands « O » permet de reformuler des propriétés remarquables des fonctions.
À retenir !

Trois réflexes

- Soit $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\ell \neq 0$. Alors,
$$\boxed{f \underset{a}{\sim} \ell \iff f(x) \underset{a}{\longrightarrow} \ell.}$$
- $$\boxed{f = \underset{a}{\mathrm{o}}(1) \iff f(x) \underset{a}{\longrightarrow} 0}$$
- $$\boxed{f = \underset{a}{\mathrm{O}}(1) \iff f \text{ est bornée au } \mathscr{V}(a)}$$

4) Inversion des ordres de comparaison

Proposition LIM.**35**
Quand on inverse des fonctions, on inverse leur ordre de comparaison :
$$f = \underset{a}{\mathrm{o}}(g) \implies \tfrac{1}{g} = \underset{a}{\mathrm{o}}\left(\tfrac{1}{f}\right).$$

5) Exemples

a) Exemples quand $x \to +\infty$

- $\ln(x) = \mathrm{o}(x)$
- $x = \mathrm{o}\big(x^3\big)$
- $\dfrac{1}{x} = \mathrm{o}(1)$
- $\dfrac{x^2}{5} - 2x + \dfrac{1}{x} \sim \dfrac{x^2}{5}$
- $4x\sqrt{x} + \ln(x) \sim 4x\sqrt{x}$
- $\boxed{\dfrac{1}{x} + \dfrac{8}{x^2} \sim \dfrac{1}{x}}$

  L'idée de ce dernier équivalent est que
  - ▷ $\dfrac{8}{x^2}$ tend vite vers 0 ;
  - ▷ $\dfrac{1}{x}$ tend moins vite vers 0 ;
  - ▷ donc, $\dfrac{8}{x^2} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

b) Exemples quand $x \to 0$

- $\boxed{5x^2 + \sqrt{x} - 6x - x^3 \sim \sqrt{x}}$

  Ici, il faut comprendre que pour les puissance de x, les ordres de comparaison quand $x \to 0$ sont inverses de ceux, usuels, quand $x \to +\infty$.

  Ainsi, on a

  $$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a > b \implies x^a = \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}\big(x^b\big).}$$

  Ici, on a donc
  - ▷ $x^2 = \mathrm{o}\big(\sqrt{x}\big)$ donc $5x^2 = \mathrm{o}\big(\sqrt{x}\big)$
  - ▷ $x = \mathrm{o}\big(\sqrt{x}\big)$ donc $-6x = \mathrm{o}\big(\sqrt{x}\big)$
  - ▷ $x^3 = \mathrm{o}\big(\sqrt{x}\big)$ donc $-x^3 = \mathrm{o}\big(\sqrt{x}\big)$

  et donc
  - ▷ $5x^2 = \mathrm{o}\big(\sqrt{x}\big)$
  - ▷ $-6x = \mathrm{o}\big(\sqrt{x}\big)$
  - ▷ $-x^3 = \mathrm{o}\big(\sqrt{x}\big)$

  et donc

  $$5x^2 + \sqrt{x} - 6x - x^3 \sim \sqrt{x}.$$

- Qui est le plus petit entre $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{x^2}$ au $\mathscr{V}(0)$?

  Cf. cours

c) Exemples quand $x \to 1$

On s'intéresse aux fonctions définies au voisinage de 1 telles que $f(1) = 0$ ou $f(x) \underset{1}{\longrightarrow} \pm\infty$. On veut connaître la vitesse à laquelle elle tendent vers 0 ou, au contraire, la vitesse à laquelle elles « explosent ».

- $\dfrac{1}{x-1} + 3\ln(x) \underset{1^+}{\sim} \dfrac{1}{x-1}$
- $(x-1)^2 = \underset{1}{\mathrm{o}}(x-1)$
- $6(x-1) + 3(x-1)^2 + \dfrac{2}{3}(x-1)^3 \underset{x \to 1}{\sim} 6(x-1)$

6) Équivalents remarquables

Proposition LIM.**36**
On a

- $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$
- $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$
- $\exp(x) - 1 \underset{0}{\sim} x$
- $\sqrt{1+x} - 1 \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{2}$
- *Plus généralement, si* $\alpha \in \mathbb{R}^*$*, on a* $\boxed{(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha\, x.}$
- *En particulier (pour* $\alpha = -1$*), on a* $\dfrac{1}{1+x} - 1 \underset{0}{\sim} -x$.

Démonstration. — Il s'agit de faire apparaître des taux d'accroissement. On laisse au lecteur le soin de le mettre en œuvre. ■

7) Développements asymptotiques

a) Notation

Notation LIM.**37**
Soit $a \in \overline{I}$.
Soient $f, g, h : I \longrightarrow \mathbb{R}$.
On note

$$\begin{aligned} f = g + \underset{a}{\mathrm{o}}(h) \quad & \text{ou} \quad f(x) = g(x) + \underset{a}{\mathrm{o}}(h(x)) \\ & \text{ou} \quad f(x) = g(x) + \underset{x \to a}{\mathrm{o}}(h(x)) \\ & \text{ou} \quad f(x) = g(x) + \mathrm{o}(h(x)) \text{ quand } x \to a \\ & \overset{\Delta}{\text{ssi}} \ f - g = \underset{a}{\mathrm{o}}(h). \end{aligned}$$

Remarques

- On a alors $f = g + \varphi$, où φ est une fonction vérifiant $\varphi = \underset{a}{\mathrm{o}}(h)$.
- Si besoin est, on pourra aussi écrire
$$f = g + \varepsilon h$$
où $\varepsilon(\cdot)$ est une fonction qui tend vers 0 en a.

b) Dictionnaire Petits « o » $\longleftrightarrow$ Équivalents

Proposition LIM. **38**

$$\begin{aligned} f \underset{a}{\sim} g \quad &\iff \quad f = g + \underset{a}{\mathrm{o}}(f) \\ &\iff \quad f = g + \underset{a}{\mathrm{o}}(g). \end{aligned}$$

Démonstration. — On a les équivalences successives :

$$\begin{aligned} f \underset{a}{\sim} g &\iff \frac{f}{g} \underset{a}{\longrightarrow} 1 \\ &\iff \frac{f}{g} - 1 \underset{a}{\longrightarrow} 0 \\ &\iff \frac{f-g}{g} \underset{a}{\longrightarrow} 0 \\ &\iff f - g = \underset{a}{\mathrm{o}}(g) \\ &\iff f = g + \underset{a}{\mathrm{o}}(g). \end{aligned}$$

■

8) Développements asymptotiques remarquables

a) Le résultat

Proposition LIM. **39**
On a, quand $x \to 0$,

- $\exp(x) = 1 + x + \mathrm{o}(x)$
- $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \mathrm{o}(x)$
- $\forall \alpha \neq 0,\ (1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha\, x + \mathrm{o}(x)$
- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + \mathrm{o}(x)$

Démonstration. — Il s'agit de la traduction dans le langage des développements asymptotiques des équivalents remarquables donnés plus haut qui, rappelons-le, sont des traductions dans le langage des équivalents de limites de taux d'accroissement et donc d'existences de nombres dérivés. ■

Remarques
Plus généralement :

- si f est dérivable en 0 et si $f'(0) \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} & f(x) - f(0) \underset{0}{\sim} f'(0)x \\ \textit{ie} \qquad & f(x) = f(0) + f'(0)x + \underset{0}{\mathrm{o}}(x). \end{aligned}$$

- si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$, on a

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \underset{0}{\mathrm{o}}(h)}$$

ce qui s'écrit aussi $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underset{a}{\mathrm{o}}(x-a)$.

b) Application

Calculons $\lim_{x \to 0} \dfrac{2\exp(x) - \sqrt{1+x} - \frac{1}{1+x}}{x}$.

Cf. cours.

9) Croissance comparées

Proposition LIM.**40**
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et soient $a, b > 0$. On a

- $\alpha < \beta \implies x^\alpha \underset{+\infty}{=} \underset{+\infty}{\mathrm{o}}\left(x^\beta\right)$
- $\alpha > 0 \implies \ln(x)^\beta \underset{+\infty}{=} \underset{+\infty}{\mathrm{o}}\left(x^\alpha\right)$
- $a > 1 \implies x^\alpha = \underset{+\infty}{\mathrm{o}}\left(a^x\right)$
- $a < b \implies a^x = \underset{+\infty}{\mathrm{o}}\left(b^x\right)$

Exemple

- On a $\ln(x)^{50} = \underset{+\infty}{\mathrm{o}}\left(\sqrt{x}\right)$.

10) Propriétés

Les relations $\underset{a}{\sim}$, $\underset{a}{\mathrm{o}}$ et $\underset{a}{\mathrm{O}}$ vérifient exactement les mêmes propriétés que leurs analogues séquentiels.

Exemples

- $\left.\begin{array}{l} f \underset{a}{\sim} g \\ g \neq 0 \text{ au } \mathscr{V}(a) \end{array}\right\} \implies \dfrac{1}{f} \underset{a}{\sim} \dfrac{1}{g}$
- $\left.\begin{array}{l} f = \underset{a}{\mathrm{o}}(g) \\ \lambda \in \mathbb{R}^* \end{array}\right\} \implies f = \underset{a}{\mathrm{o}}(\lambda g)$
- $\left.\begin{array}{l} f_1 = \underset{a}{\mathrm{o}}(g) \\ f_2 = \underset{a}{\mathrm{o}}(g) \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \implies f_1 + \lambda f_2 = \underset{a}{\mathrm{o}}(g)$

  Autrement dit, l'ensemble des fonctions $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f = \underset{a}{\mathrm{o}}(g)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

11) L'équivalence conserve localement le signe strict

Proposition LIM.**41**
Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $a \in \overline{I}$.

- $\left\{\begin{array}{l} f \underset{a}{\sim} g \\ f > 0 \text{ au } \mathscr{V}(a) \end{array}\right. \implies g > 0 \text{ au } \mathscr{V}(a)$
- *Plus généralement,* $f \underset{a}{\sim} g \implies f$ *et* g *ont même signe strict au* $\mathscr{V}(a)$.