Objets initiaux et finaux
Produits
Coproduits

1) Objet initial

Déf : Soit $\mathcal{C}$ catégorie

Soit $X \in ob(\mathcal{C})$

On dit q X est un objet initial dans $\mathcal{C}$ ssi

$\forall Y \in ob(\mathcal{C})$, $\exists ! f : X \longrightarrow Y$

($\operatorname{card} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) = 1$)

$\boxed{\textbf{Prop} : \text{Soient } X_1, X_2 \in ob(\mathcal{C}) \text{ deux objets initiaux de } \mathcal{C}}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Alors : 1) } X_1 \simeq X_2 \\ \qquad\quad \text{2) } \exists!\, f : X_1 \xrightarrow{\sim} X_2 . \end{array}}$$

<u>démo</u> : • C X_1 est un objet initial ds $\mathcal{C}$ soit $f : X_1 \to X_2$.

• De m̄, C X_2 obj initial dans $\mathcal{C}$, soit $g : X_2 \to X_1$.

• Donc on a

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & X_2 \arrow[r, "g"] & X_1 \end{tikzcd}$$

On card $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, X_1) = 1$

car X_1 est initial. Donc

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, X_1) = Id_{X_1}$$

• Donc $g \circ f = Id_{X_1}$

• De même, $f \circ g = Id_{X_2}$.

• Donc <u>f, g iso entre X_1 et X_2</u>

• <u>Unicité</u> : ok

Rq : X obj initial dans $\mathcal{C}$

$Y \simeq X$ $\Rightarrow$ Y objet initial

Démo : exo

<u>Exemple(s)</u> :

• <u>(Ens)</u> :

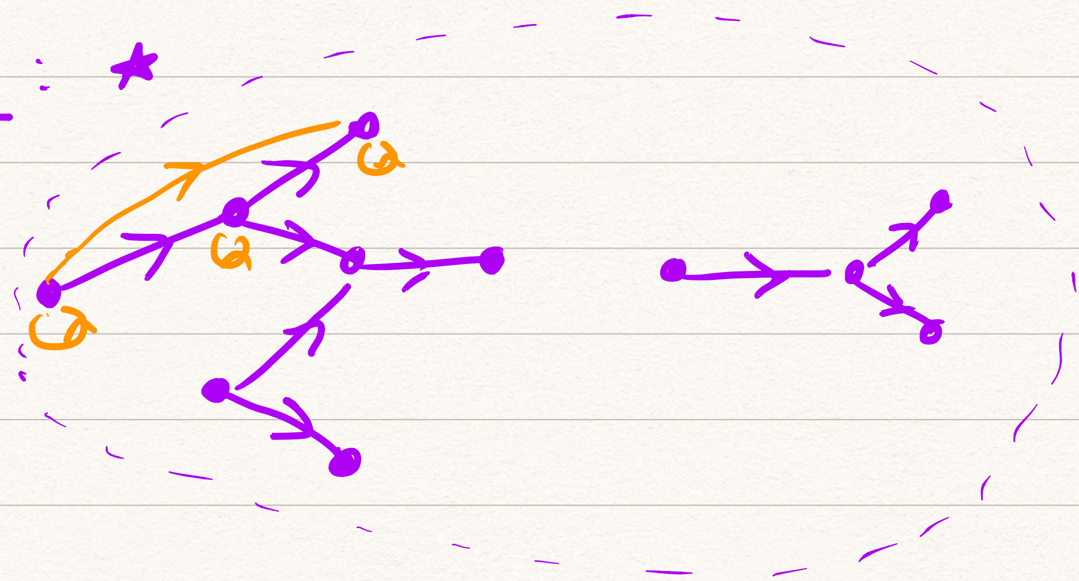
L'ensemble vide est initial car si E ensemble, il y a une unique application $\emptyset \longrightarrow E$ (c'est l'application vide)

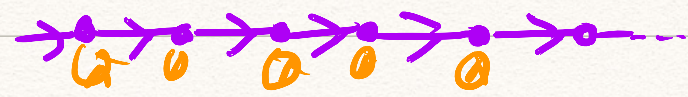
- $(\underline{Top})$: $\emptyset$ l'espace topologique vide

- Soit $(E, \leq)$ ens. ordonné)
J'associe à $(E, \leq)$ la catégorie
$\mathcal{C}_{(E,\leq)}$ dont les objets sont
les éléments de E
et $Hom(x,y) = \begin{cases} \{\to\} & \text{si } x \leq y \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$

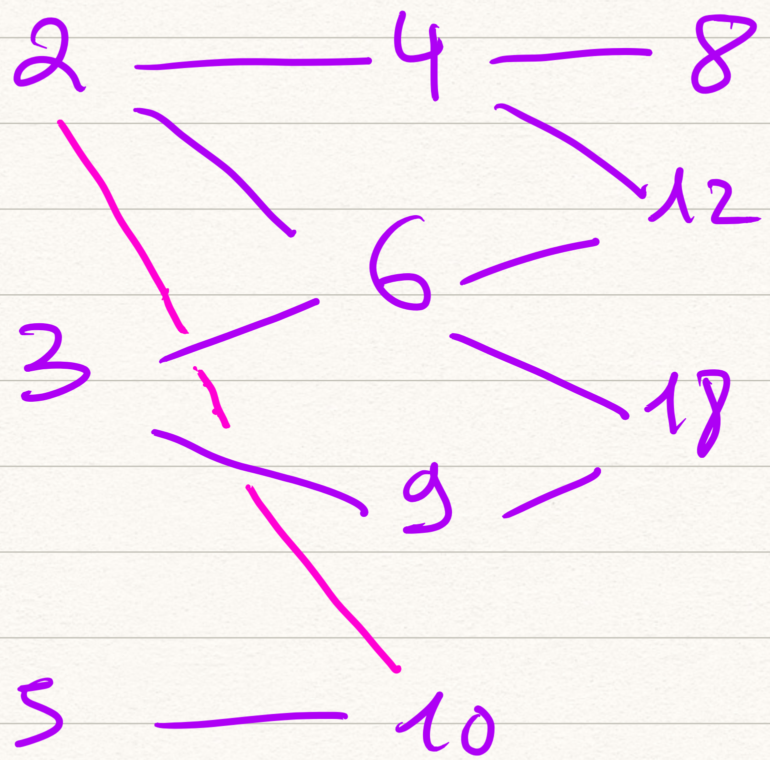
__Dessin__ : $\star$

$\mathcal{C}_{(E,\leq)}$:



* $\mathcal{C}_{(\mathbb{Z},\leq)}$: 

* $\mathcal{C}_{(\mathbb{N},|)}$:



<u>Retour au cas $g^{\underline{al}}$</u> : $\mathcal{C}_{(E,\leq)}$

Quel est l'objet initial de cette catégorie ?

Analyse - synthèse

Soit $x_0 \in E$ un objet initial de $\mathcal{C}(E, \leq)$. Alors : $\forall y \in E$, $\mathrm{Hom}(x_0, y)$ est de card 1

Donc : est $\neq \emptyset$

Donc $\forall y \in E$, $x_0 \leq y$

Donc x_0 minore E

Or $x_0 \in E$. Donc $x_0 = +$ petit él^t de E

$\boxed{\text{Prop : } \mathcal{C}(E, \leq) \text{ admet un objet initial} \iff E \text{ admet un + petit él}^t\text{. Dans ce cas, ils sont égaux.}}$

Exemples (suite) :

- $\boxed{(\mathrm{Diff})}$ catégorie des variétés diff.

$\emptyset$ est l'objet initial

- $\boxed{(\mathrm{Grp}) :}$ Notons $\{e\}$ le groupe à un élément.

Soit G un groupe.
A-t-on un unique $\boxed{\varphi : \{e\} \longrightarrow G}$

Unicité : ok car $\varphi(e) = e_G$ pour φ morphisme de groupes

Existence : ok

$\boxed{\text{Bilan : le groupe nul est un objet initial dans (Grp)}}$

$\boxed{\bullet \ (\mathrm{Ann})}$

<u>Piège</u> : 1) L'anneau nul $\{0\}$ n'est pas un objet initial dans (Ann).

<u>démo</u> : Si $A \xrightarrow{\varphi} B$ on impose

$\varphi(1_A) = 1_B$ dans (Ann).

Si j'ai $\varphi : \{0\} \longrightarrow A$ j'ai

alors $\varphi(0) = 0_A$
$= 1_A$

Donc $0_A = 1_A$

$\boxed{\text{Prop : } 0_A = 1_A \Rightarrow A \text{ est l'anneau nul}}$

■

2) $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, \times)$ n'est pas

initial.

Démo : Soit A anneau

Soit $\varphi : \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \to A$.

J'ai $\varphi(1+1) = 1_A + 1_A$

$= 2 \cdot 1_A$

$= \varphi(2) = \varphi(0)$

$= 0_A$.

Donc $\boxed{\text{la caractéristique de } A \text{ divise } 2}$

Donc $\mathrm{Hom}_{(\mathrm{Ann})}\left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\right) = \emptyset$.

$\blacksquare$

Prop : $\mathbb{Z}$ est l'objet initial de (Ann).

<u>démo</u> : Soit $A \in ob(\mathcal{Ann})$

<u>Analyse</u> :

On cherche $\varphi : \mathbb{Z} \to A$.

On a $\varphi(0) = 0_A$

$\varphi(1) = 1_A$

$$\varphi(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ fois}}) = 1_A + \cdots + 1_A$$

$\varphi(n) = n \cdot 1_A$ si $n \in \mathbb{N}$

$\varphi(-n) = -n \cdot 1_A$

<u>Synthèse</u> : ok C'est bien défini.

■

Rq : • Si $\varphi : A \to B \in Hom_{(\mathcal{Ann})}(A, B)$ et si J idéal de B alors $\varphi^{-1} J$ idéal de A.

• Donc si A anneau

J'ai $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow A$

Donc $\varphi^{-1}(\{0_A\})$ idéal de $\mathbb{Z}$

Donc $\exists ! \, n_A \in \mathbb{N} : \varphi^{-1}(\{0_A\}) = n_A\mathbb{Z}$

C'est la caractéristique de A

• Ex : caractéristique $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = 6$

• exo Mq $\mathbb{Z}$ obj initial de (Ann NC)

2) Objet final

Déf : $\mathcal{C}$ cat.
$X \in \mathcal{C}$

On dit que X est un objet

final ⚠

$$\boxed{\forall y \in ob(\mathcal{C}),\quad \exists!\, y \to x}$$

Rq : X objet final de $\mathcal{C}$

$\Updownarrow$

X objet initial de $\mathcal{C}^{op}$

Corollaire de la Rq :

Unicité à unique iso près de l'objet final

Rq : On aurait pu dire aussi "X objet co initial".

Exemples :

- $\boxed{(\text{Ens})}$

L'objet final est $\{*\}$

où $\forall E$ ens., $\exists! f : E \longrightarrow \{*\}$.

- De m̄ dans (Top), (Diff), etc.

- $\mathcal{C}_{(E, \leq)}$: objet final

⇕

⊕ d'élt

- $\boxed{(\text{Grp})}$: $\{e\}$ est un objet final

- $\boxed{(\text{Ann})}$ $\{0\}$ est un objet final.

3) Coproduits

Déf : $\mathcal{C}$ catégorie
X, Y objets de $\mathcal{C}$

On dit q $\left(Z,\ i_X : \begin{matrix} Z \\ \uparrow \\ X \end{matrix},\ i_Y : \begin{matrix} Z \\ \uparrow \\ Y \end{matrix}\right)$

est un coproduit de X et Y $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\begin{tikzcd}
\forall T & & \\
& Z \arrow[ul, dashed, "\exists !"'] & X \arrow[l, "i_X"] \arrow[ull, bend right] \\
& Y \arrow[u, "i_Y"'] \arrow[uul, bend left] &
\end{tikzcd}$$

Rq : (Z, i_X, i_Y) coproduit de X et Y dans $\mathcal{C}$

ssi

(Z, i_X, i_Y) est un produit de X et Y dans $\mathcal{C}^{op}$

Exemples :

• (Ens)

Soient X, Y ensembles.

Analyse : Soit Z un

$X \xrightarrow{i_X} Z$

$Y \xrightarrow{i_Y} Z$

coproduit

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i_X"] \arrow[rr, bend left, "f"] & Z \arrow[r, "\exists ! \varphi"] & T \\
 & Y \arrow[u, "i_Y"] \arrow[ur, bend right, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Notons $X \amalg Y$ l'union disjointe de X et Y

C'est $X \amalg Y := X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}$

"copie de X" "copie de Y"

On a $i_X : X \longrightarrow X \amalg Y$
$x \longmapsto (x, 0)$

et $i_Y : Y \longrightarrow X \amalg Y$
$y \longmapsto (y, 1)$

Soit T ens. Soient $f : X \longrightarrow T$
$g : Y \longrightarrow T$

Je cherche $\varphi : X \amalg Y \longrightarrow T$

tq $\begin{cases} \varphi \circ i_X = f \\ \varphi \circ i_Y = g \end{cases}$

Soit $z \in X \amalg Y$. Deux cas :

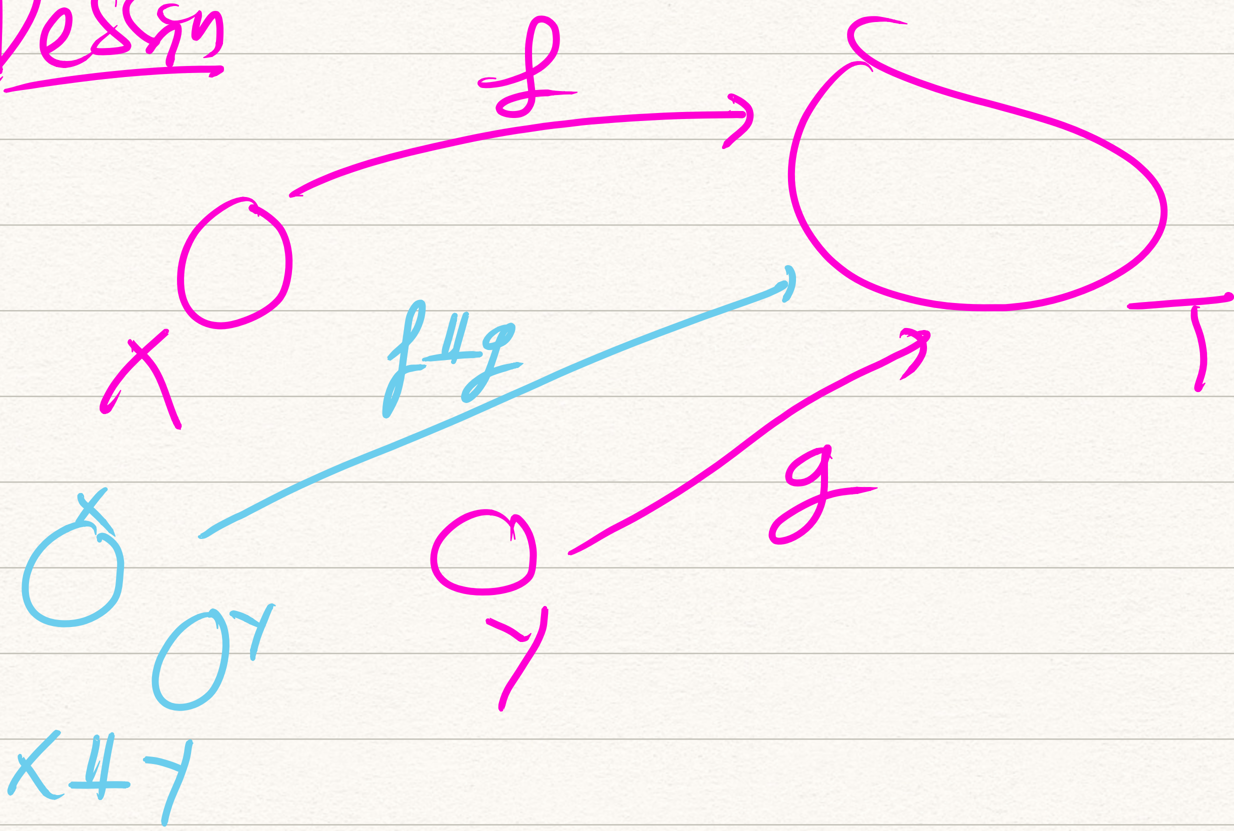
1°) Si $z = (x, 0)$ ie $z = \varepsilon_X(x)$

Alors : $\varphi(z) = \varphi(\varepsilon_X(x))$
$= f(x)$

2°) Si $z = (y, 1)$ <u>Déf</u> :

Alors $\varphi(z) = g(y)$.

<u>Dessin</u>



Rq : $\amalg$ est le retournement de $\prod$!

Ex : $\{\star\} \amalg \{\star\} = \{\star, \star\}$

• (Ann)

Soient A, B anneaux

Je cherche un anneau $A \amalg B$ avec
$A \longrightarrow A \amalg B$ et $B \longrightarrow A \amalg B$

tq $\forall$ anneau D, $\forall A \to D$, $\forall B \to D$

$\exists !\ A \amalg B \longrightarrow D$

Réponse : C'est $A \otimes B$ le

produit tensoriel.

On a
$$A \longrightarrow A \otimes B$$
$$a \longmapsto a \otimes 1_B$$

$$B \longrightarrow A \otimes B$$
$$b \longmapsto 1_A \otimes b$$

<u>Déf</u> :

$$A \otimes B := \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \; ; \; n \in \mathbb{N}^*, \, a_i \in A, \, b_i \in B \right\} \Big/ \sim$$

$\sim$ = qui est "the middle player" ?

1) $2a \otimes b \sim a \otimes 2b$

$$na \otimes b \sim a \otimes nb$$

pour $n \in \mathbb{Z}$

2) $(a + a') \otimes b \sim a \otimes b + a' \otimes b$

etc.

Construction de $A \otimes B$

On considère l'ensemble $\mathbb{Z}^{(A \times B)}$

Je l'ens. des suites presque nulles.

Si $(a_0, b_0) \in A \times B$, je note

$$a_0 \otimes b_0 := \begin{cases} (a_0, b_0) \longmapsto 1 \\ (a, b) \longmapsto 0 \end{cases}$$

si $(a, b) \neq (a_0, b_0)$

C'est un groupe abélien

J'obtiens donc ts les élts du type

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i$$

Mieux j'additions $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot a_i \otimes b_i$

si $(\lambda_i)_i \in \mathbb{C}^n$ et $(a_i)_i \in A^n$

$(b_i)_i \in B^n$

Idée : Pour chaq $a \in A$ et chaq $b \in B$, j'invente ex nihilo un produit $a \otimes b$

Muni d'un produit engendré par

$$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') := aa' \otimes bb'$$

Fait :

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{Z}^{(A\times B)}, \\ \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists (\lambda_i)_i \in \mathbb{Z}^n, \\ \exists (a_i) \in A^n, \exists (b_i) \in B^n : \\ \qquad x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot a_i \otimes b_i \end{array}}$$

"tenseur pur"

J'ai créé trop de symboles $a \otimes b$ ex nihilo.

Je considère la relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}^{(A\times B)}$ $\sim$ engendrée par les relations :

1) $\lambda \cdot a \otimes b \sim \lambda a \otimes b$

$\sim a \otimes \lambda b$

2) $(a+a') \otimes b \sim a \otimes b + a' \otimes b$

3) $a \otimes (b+b') \sim a \otimes b + a \otimes b'$

<u>Bilan</u> : on obtient $A \otimes B$

anneau commutatif unitaire muni

de $A \longrightarrow A \otimes B$

$a \longmapsto a \otimes 1_B$

et $B \longrightarrow A \otimes B$

$b \longmapsto 1_A \otimes B$