

DS 6

4 heures

- *Tout résultat ou raisonnement doit être clairement justifié, sauf mention du contraire.*
- *La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.*
- *La présentation de la copie sera prise en compte dans l'évaluation :*
 - ▷ *encadrez les résultats principaux ;*
 - ▷ *soulignez les résultats et arguments intermédiaires importants ;*
 - ▷ *soignez votre écriture ;*
 - ▷ *maintenez une marge dans vos copies, aérez vos copies ;*
 - ▷ *enfin, numérotez vos copies (et non vos pages).*
- *Les documents, calculatrices et autres appareils électroniques sont interdits.*
- *Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie en expliquant les initiatives que vous avez été amené à prendre.*
- *Ne rendez pas le sujet avec vos copies.*

Notations générales

Dans tout le sujet, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} , et E désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel.

On rappelle que E^* désigne l'espace vectoriel $L(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires sur E .

Définitions et propriétés admises

Soit $f \in L(E)$.

- On dit que f est nilpotent ssi

$$\exists k \in \mathbb{N} : f^k = 0_{L(E)}.$$

On note $\text{Nil}(E)$ l'ensemble des endomorphismes nilpotents de E .

- Si f est nilpotent, il existe un plus petit entier naturel k tel que $f^k = 0_{L(E)}$.
On l'appelle indice de nilpotence de f .

Autour de la nilpotence

Deux résultats

Les parties I, II et IV sont indépendantes.
La partie III utilise des résultats de la partie II.

Partie I – Réduction des endomorphismes nilpotents.

Hypothèse

- Dans cette partie, on suppose E de dimension finie et on pose $n := \dim E$.

Données et notations

- On fixe $f \in L(E)$.
- Dans cette partie, on fixe $a \in E$ et $p \in \mathbb{N}^*$, et on suppose que

$(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a))$ est libre

$(\text{Id}_E, f, \dots, f^{p-1}, f^p)$ est liée.

- On fixe $\Phi \in E^*$ telle que

$$\forall i \in \llbracket 0, p-2 \rrbracket, \quad \Phi(f^i(a)) = 0 \quad \text{et} \quad \Phi(f^{p-1}(a)) = 1.$$

- On pose

$$F := \text{Vect}(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a)) \quad \text{et} \quad G := \left\{ x \in E \mid \forall i \in \mathbb{N}, \Phi(f^i(x)) = 0 \right\}.$$

1. Existence de Φ .

Justifier l'existence de Φ .

2. (a) Montrer que $(\text{Id}_E, f, \dots, f^{p-1})$ est libre.
(b) Montrer que F est stable par f .
(c) Montrer que G est stable par f .
(d) Montrer que F et G sont en somme directe.

3. Pour $i \in \mathbb{N}$, on note $\Phi_i := \Phi \circ f^i$.

- (a) Montrer que $\forall i \in \mathbb{N}, \Phi_i \in E^*$.
(b) Montrer que

$$G = \bigcap_{i=0}^{p-1} \ker \Phi_i.$$

- (c) Montrer que $(\Phi_0, \dots, \Phi_{p-1})$ est une famille libre.

4. On admet que $\dim G = n - p$, ce qui sera démontré dans la partie IV.

Montrer que $E = F \oplus G$.

5. Étude du cas nilpotent.

On suppose $E \neq \{0_E\}$. Soit $g \in \text{Nil}(E)$, dont on note q l'indice de nilpotence.

On admet qu'il existe $b \in E$ tel que

$$(b, g(b), \dots, g^{q-1}(b)) \text{ est libre}$$

et on fixe un tel b .

On pose $H := \text{Vect}(b, g(b), \dots, g^{q-1}(b))$; on admet que H est stable par g .

On note $g|_H$ l'endomorphisme induit par g sur H .

Donner la matrice de $g|_H$ dans la base $(g^{q-1}(b), g^{q-2}(b), \dots, g(b), b)$ de H .

6. Bilan.

On suppose $E \neq \{0_E\}$ et on considère $g \in \text{Nil}(E)$.

En raisonnant par récurrence sur la dimension de E , montrer qu'il existe une base \mathcal{B} de E telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} \boxed{J_{k_1}} & & & (0) \\ & \boxed{J_{k_2}} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \boxed{J_{k_r}} \end{pmatrix}$$

où $r \in \mathbb{N}^*$, où $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $k_i \in \mathbb{N}^*$ et où, pour $k \in \mathbb{N}^*$, la matrice $J_k \in \text{M}_k(\mathbb{K})$ est définie par

$$J_k := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Partie II – Algébrisation des développements limités.

Une notation

Pour $n \in \mathbb{N}$ et pour $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, on note $P \equiv_n Q \stackrel{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\exists R \in \mathbb{K}[X] : P - Q = X^{n+1}R.$$

7. Compatibilité aux opérations algébriques.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $P_1, Q_1, P_2, Q_2 \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$P_1 \equiv_n Q_1 \quad \text{et} \quad P_2 \equiv_n Q_2.$$

(a) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que $P_1 + \lambda P_2 \equiv_n Q_1 + \lambda Q_2$.

(b) Montrer que $P_1 \times P_2 \equiv_n Q_1 \times Q_2$.

8. Une caractérisation analytique.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que

$$P \equiv_n 0_{\mathbb{K}[X]} \iff (P(t) = o(t^n) \text{ quand } t \rightarrow 0).$$

Notation

Si $f \in \mathcal{C}^\infty([-1, 1[, \mathbb{K})$ et si $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\mathsf{T}_{f,n} := \sum_{k=0}^n f^{(k)}(0) \frac{X^k}{k!} \in \mathbb{K}[X].$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $f, g \in \mathcal{C}^\infty([-1, 1[, \mathbb{K})$.
- (a) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que $\mathsf{T}_{f+\lambda g, n} = \mathsf{T}_{f,n} + \lambda \mathsf{T}_{g,n}$.
 - (b) Montrer que $\mathsf{T}_{f \times g, n} \equiv_n \mathsf{T}_{f,n} \times \mathsf{T}_{g,n}$.

Partie III – Existence d’une racine p -ième pour les unipotents.

Notations

- Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et si $k \in \mathbb{N}$, on note $\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$.
- Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\mathsf{R}_{\alpha,n} := \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} X^k.$$

Polynômes d’endomorphismes

- Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et qu’on écrit

$$P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_d X^d$$

(où $d \in \mathbb{N}$ et où $\forall i, a_i \in \mathbb{K}$), et si $f \in \mathsf{L}(E)$, alors on pose

$$P(f) := a_0 \text{Id}_E + a_1 f + \cdots + a_d f^d.$$

- On admet que, pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a alors

$$(P + \lambda Q)(f) = P(f) + \lambda Q(f) \quad \text{et} \quad (PQ)(f) = P(f) \circ Q(f).$$

10. (a) Calculer $\mathsf{R}_{1/2,3}$.
 (b) Calculer $(\mathsf{R}_{1/2,3})^2$.
11. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\mathsf{R}_{1/p,n})^p \equiv_n 1 + X$.
12. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\forall f \in \text{Nil}(E)$, $\exists g \in \mathsf{L}(E) : g^p = \text{Id}_E + f$.

Remarque

Les endomorphismes qui s’écrivent $\text{Id}_E + f$ où $f \in \text{Nil}(E)$ sont appelés unipotents. On a ainsi démontré, dans cette partie, que les endomorphismes unipotents admettent des racines p -ièmes pour tout $p \geq 1$.

Partie IV – Un peu de dualité.

Hypothèse

- Dans cette partie, on suppose E de dimension finie et on pose $n := \dim E$.

Notations et propriétés admises

- Si $\mathcal{F} \in E^n$ et qu'on écrit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$, où $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \in E$, on pose

$$\text{CL}_{\mathcal{F}} : \begin{cases} \mathbb{K}^n \longrightarrow E \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \longmapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i. \end{cases}$$

- On pose également

$$\text{CL} : \begin{cases} E^n \longrightarrow \text{L}(\mathbb{K}^n, E) \\ \mathcal{F} \longmapsto \text{CL}_{\mathcal{F}}. \end{cases}$$

On admet que CL est linéaire.

- Si $\mathcal{B} \in E^n$, on admet que

$$\mathcal{B} \text{ base de } E \implies \text{CL}_{\mathcal{B}} \text{ isomorphisme ;}$$

dans ce cas, on note $\text{Coords}_{\mathcal{B}} := (\text{CL}_{\mathcal{B}})^{-1}$.

- Si $\mathcal{G} \in (E^*)^n$ et qu'on écrit $\mathcal{G} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, où $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \varphi_i \in E^*$, on pose

$$\text{EV}_{\mathcal{G}} : \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ x \longmapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

13. Soit $\mathcal{F} \in E^n$. Montrer que

$$\text{CL}_{\mathcal{F}} \text{ isomorphisme} \implies \mathcal{F} \text{ base de } E.$$

14. Montrer que CL est un isomorphisme.

15. Soit \mathcal{G} une base de E^* . Montrer que $\text{EV}_{\mathcal{G}}$ est un isomorphisme.

16. Soit \mathcal{G} une base de E^* .

(a) Montrer qu'il existe \mathcal{B} une base de E telle que $\text{Coords}_{\mathcal{B}} = \text{EV}_{\mathcal{G}}$.

(b) On écrit $\mathcal{G} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ et on considère une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $\text{Coords}_{\mathcal{B}} = \text{EV}_{\mathcal{G}}$.

Montrer que, pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\bigcap_{i=1}^p \ker \varphi_i = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n).$$

17. Une formule de dualité.

Soit $p \in \mathbb{N}$ et soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_p) \in (E^*)^p$ une famille libre de formes linéaires de E .

Montrer que

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^p \ker \varphi_i\right) = n - p.$$

FIN DU SUJET.

