Produit scalaire I

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 1.1 — Meli-melo.

Choississez la bonne réponse :

a) On considère les points $\mathrm{A}(2,3)$, $\mathrm{B}(1,-2)$ et $\mathrm{C}\left(-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$.

Alors, le vecteur $\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ a pour coordonnées.

(a) $\begin{pmatrix}-14\\-6\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}6\\-14\end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix}-6\\-14\end{pmatrix}$

....

b) L'ensemble des solutions de l'équation $(2x-3)(-5x+15)=0$ est :

(a) $\left\{\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right\}$ (b) $\left\{\frac{3}{2},3\right\}$ (c) $\left\{\frac{1}{3},3\right\}$ (d) $\left\{3,\frac{2}{3}\right\}$

....

c) La forme factorisée de l'expression $4x^2-9$ est :

(a) $(4x-3)(4x+3)$ (b) $(2x-9)(2x+9)$ (c) $(2x-3)(2x+3)$

....

d) L'écriture fractionnaire la plus simple de l'expression $\frac{4x+5}{3}-\frac{9x-2}{5}$ est :

(a) $\frac{-5x+7}{8}$ (b) $\frac{-7x+31}{15}$ (c) $\frac{-7x+19}{12}$

....

e) L'écriture scientifique du nombre $\frac{4\times10^{-4}\times6\times10^{-6}}{5\times10^{-5}}$ est :

(a) $4{,}8\times10^{-5}$ (b) $4{,}8\times10^{-15}$ (c) $4{,}8\times10^{5}$ (d) $4{,}8\times10^{-6}$

....

Tests d'orthogonalité

Calcul 1.2

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux : vrai ou faux ?

On calculera le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ ....

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ ....

c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ ....

Calcul 1.3

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux : vrai ou faux ?

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 7 \times 10^{-8} \\ 4 \times 10^{5} \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \times 10^{4} \\ -7 \times 10^{-9} \end{pmatrix}$ ....

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{2}{x} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$ où x est un nombre réel non nul ....

c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} x - 2 \\ 3 + x \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x + 2 \\ 3 - x \end{pmatrix}$ où x est un nombre réel non nul ....

Calcul 1.4 — Trouver le réel x.

Dans chacun des cas suivants, déterminer le réel x pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ -3 \end{pmatrix}$ ....

b) $\vec{u}\begin{pmatrix} -x \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ x - 4 \end{pmatrix}$ ....

c) $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{1+x}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{x-1}{5} \end{pmatrix}$ ....

Calcul 1.5 — Trouver les deux réels x.

Dans chacun des cas suivants, déterminer les deux réels x pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix} \sqrt{17}x - 3 \\ 5 + 9x \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \sqrt{17}x + 3 \\ 5 - 9x \end{pmatrix}$ ....

b) $\vec{u}\begin{pmatrix} 4x - 7 \\ x + 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 4x - 7 \\ 20x - 35 \end{pmatrix}$ ....

Équations réduites de droite

Calcul 1.6

Déterminer l'équation réduite de la droite (d_1) passant par le point $\mathrm{A}(-6,-4)$ et dont un vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ ....

Calcul 1.7

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation réduite de la droite donnée.

a) La droite (d_2) passant par le point $\mathrm{B}\left(\frac{1}{3},-\frac{3}{2}\right)$ et dont un vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$.

....

b) La droite (d_3) passant par le point $\mathrm{C}(\sqrt{7},-3\sqrt{7})$ et dont un vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$.

....

c) La droite (d_4) passant par le point $\mathrm{D}\left(\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et dont un vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$.

....

Calcul 1.8

Déterminer l'équation réduite de la droite (d_5) passant par le point $\mathrm{E}(\sqrt{5},-1)$ et perpendiculaire à la droite (D) d'équation $x-\sqrt{5}y+5=0$ ....

Calcul 1.9

On considère les points $\mathrm{A}(-1,-3)$, $\mathrm{B}(2,6)$, $\mathrm{C}(17,1)$. Déterminer :

a) l'équation réduite de la droite (d_6) passant par le point A et perpendiculaire à la droite (AB)

....

b) l'équation réduite de la droite (d_7) passant par le point C et perpendiculaire à la droite (BC)

....

Calculs plus avancés

Calcul 1.10 — Être ou ne pas être un rectangle.

On se donne les points $\mathrm{A}\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$, $\mathrm{B}\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$, $\mathrm{C}\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ et $\mathrm{D}(x, y)$.

a) Calculer $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ....

b) Exprimer en fonction de x le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ ....

c) Exprimer en fonction de y le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BD}}$ ....

d) Déterminer les réels x et y pour que le quadrilatère ABDC soit un rectangle .....

Calcul 1.11

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2\sqrt{2}x + 3$. Déterminer les valeurs de x telles que les tangentes aux points d'abscisse x et $-x$ sont perpendiculaires ....

Calcul 1.12

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + bx$. Déterminer les valeurs possibles de b, en sachant que les tangentes aux points d'abscisse 1 et -1 sont perpendiculaires ....

Réponses mélangées

(b) | 0 | (c) | Vrai | $x = -\frac{5}{2}$ | $y = 3x - 50$ | $y = 4x - 7\sqrt{7}$ | $y = \sqrt{5}x + 4$

$y = \frac{2}{5}x - \frac{8}{5}$ | Vrai | Faux | $x = -\frac{1}{2}$ ou $x = \frac{1}{2}$ | $x = \frac{3}{2}$ ou $x = -\frac{3}{2}$ | $b = \sqrt{3}$ ou $b = -\sqrt{3}$

$x = 6$ | Vrai | $2x - 3$ | $y = \frac{1}{2}x - \frac{5\sqrt{2}}{2}$ | (a) | $y = -\frac{1}{3}x - 19$ | $y = \frac{3}{4}x - \frac{7}{3}$

(c) | $\frac{3}{2}y - \frac{5}{4}$ | $(x, y) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ | (b) | Vrai | $x = \frac{47}{17}$ | $x = \frac{7}{4}$ ou $x = \frac{2}{9}$ | Vrai

► Réponses et corrigés page 5

Fiche n° 1. Produit scalaire I

Réponses

1.1 a) .... $\boxed{\text{c}}$

1.1 b) .... $\boxed{\text{b}}$

1.1 c) .... $\boxed{\text{c}}$

1.1 d) .... $\boxed{\text{b}}$

1.1 e) .... $\boxed{\text{a}}$

1.2 a) .... $\boxed{\text{Vrai}}$

1.2 b) .... $\boxed{\text{Vrai}}$

1.2 c) .... $\boxed{\text{Vrai}}$

1.3 a) .... $\boxed{\text{Vrai}}$

1.3 b) .... $\boxed{\text{Vrai}}$

1.3 c) .... $\boxed{\text{Faux}}$

1.4 a) .... $\boxed{x = -\frac{5}{2}}$

1.4 b) .... $\boxed{x = 6}$

1.4 c) .... $\boxed{x = \frac{47}{17}}$

1.5 a) .... $\boxed{x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = \frac{1}{2}}$

1.5 b) .... $\boxed{x = \frac{7}{4} \text{ ou } x = \frac{2}{9}}$

1.6 .... $\boxed{y = \frac{2}{5}x - \frac{8}{5}}$

1.7 a) .... $\boxed{y = \frac{3}{4}x - \frac{7}{3}}$

1.7 b) .... $\boxed{y = 4x - 7\sqrt{7}}$

1.7 c) .... $\boxed{y = \frac{1}{2}x - \frac{5\sqrt{2}}{2}}$

1.8 .... $\boxed{y = \sqrt{5}x + 4}$

1.9 a) .... $\boxed{y = -\frac{1}{3}x - 19}$

1.9 b) .... $\boxed{y = 3x - 50}$

1.10 a) .... $\boxed{0}$

1.10 b) .... $\boxed{2x - 3}$

1.10 c) .... $\boxed{\frac{3}{2}y - \frac{5}{4}}$

1.10 d) .... $\boxed{(x, y) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)}$

1.11 .... $\boxed{x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = -\frac{3}{2}}$

1.12 .... $\boxed{b = \sqrt{3} \text{ ou } b = -\sqrt{3}}$

Corrigés

1.1 a) On a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2 \\ -2 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $2\overrightarrow{AC} = 2\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_B \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - 2 \\ -\frac{3}{2} - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -9 \end{pmatrix}$.

Donc, on a $\vec{p} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -14 \end{pmatrix}$.

1.1 b) On a $(2x - 3)(-5x + 15) = 0 \iff 2x - 3 = 0 \text{ ou } -5x + 15 = 0 \iff x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = \frac{15}{5} = 3$.

On trouve $\left\{\frac{3}{2}, 3\right\}$.

1.1 c) On a $4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x - 3)(2x + 3)$.

1.1 d) On a

$$\frac{4x + 5}{3} - \frac{9x - 2}{5} = \frac{5(4x + 5)}{15} - \frac{3(9x - 2)}{15} = \frac{20x + 25}{15} - \frac{27x - 6}{15} = \frac{20x + 25 - (27x - 6)}{15} = \frac{31}{15} - \frac{7}{15}x.$$

1.1 e) On a $\dfrac{4 \times 10^{-4} \times 6 \times 10^{-6}}{5 \times 10^{-5}} = \dfrac{4 \times 6 \times 10^{-4} \times 10^{-6}}{5 \times 10^{-5}} = \dfrac{24}{5} \times 10^{-4-6+5} = 4{,}8 \times 10^{-5}$.

1.2 a) On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-2) \times 3 + (-3) \times (-2) = 0$. Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont bien orthogonaux.

1.2 b) On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(-\frac{3}{4}\right) \times \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = 0$. Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont bien orthogonaux.

1.2 c) On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-\sqrt{2}) \times 5 + 5 \times \sqrt{2} = 0$. Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont bien orthogonaux.

1.3 a) On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = 7 \times 10^{-8} \times 4 \times 10^{4} + 4 \times 10^{5} \times (-7 \times 10^{-9}) = 28 \times 10^{-4} - 28 \times 10^{-4} = 0$. Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont bien orthogonaux.

1.3 b) On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = x \times \frac{2}{x} + \frac{3}{2} \times \left(-\frac{4}{3}\right) = 2 - 2 = 0$. Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont bien orthogonaux.

1.3 c) On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = (x-2) \times (x+2) + (3+x) \times (3-x) = x^2 - 4 + 9 - x^2 = 5$. Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.

1.4 a) On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6x - 15$. Donc, on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff x = -\frac{15}{6} = -\frac{5}{2}$.

1.4 b) On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-x) \times \frac{2}{3} + 2 \times (x-4) = -\frac{2x}{3} + 2x - 8 = \frac{-2x + 6x - 24}{3} = \frac{4x - 24}{3}$.
Donc, on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff 4x - 24 = 0 \iff x = \frac{24}{4} = 6$.

1.4 c) On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1+x}{2} \times \frac{3}{8} + (-2) \times \frac{x-1}{5} = \frac{3x+3}{16} - \frac{2x-2}{5} = \frac{15x + 15 - 32x + 32}{80} = \frac{-17x + 47}{80}$.
Donc, on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff -17x + 47 = 0 \iff x = \frac{47}{17}$.

1.5 a) On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = (\sqrt{17}x - 3) \times (\sqrt{17}x + 3) + (5 + 9x)(5 - 9x) = 17x^2 - 9 + 25 - 81x^2 = 16 - 64x^2$.
Donc, on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff 16 - 64x^2 = 0 \iff 64x^2 = 16 \iff x^2 = \frac{16}{64} = \frac{1}{4} \iff x = \frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{1}{2}$.

1.5 b) On a

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= (4x-7) \times (4x-7) + (x+1) \times (20x - 35) = (4x-7) \times (4x-7) + 5(x+1) \times (4x-7)\\ &= (4x-7)(4x - 7 + 5(x+1)) = (4x-7)(4x - 7 + 5x + 5) = (4x-7)(9x-2).\end{aligned}$$

Donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff (4x-7)(9x-2) = 0 \iff 4x - 7 = 0$ ou $9x - 2 = 0 \iff x = \frac{7}{4}$ ou $x = \frac{2}{9}$.

1.6 Une équation cartésienne de la droite (d_1) est donnée sous la forme : $-2x + 5y + c = 0$.
Or, on a les équivalences suivantes :

$$\mathrm{A}(-6, -4) \text{ appartient à } (d_1) \iff -2 \times (-6) + 5 \times (-4) + c = 0 \iff 12 - 20 + c = 0 \iff c = 8.$$

Une équation cartésienne de la droite (d_1) est ainsi $-2x + 5y + 8 = 0$.

L'équation réduite de la droite (d_1) est donc $y = \frac{2}{5}x - \frac{8}{5}$.

1.7 a) Une équation cartésienne de la droite (d_2) est donnée sous la forme : $3x - 4y + c = 0$.

Or, on a les équivalences suivantes :

$$\mathrm{B}\left(\frac{1}{3}, -\frac{3}{2}\right) \text{ appartient à } (d_2) \iff 3 \times \frac{1}{3} - 4 \times \left(-\frac{3}{2}\right) + c = 0 \iff 1 + 6 + c = 0 \iff c = -7.$$

Une équation cartésienne de la droite (d_2) est ainsi $3x - 4y - 7 = 0$.

L'équation réduite de la droite (d_2) est donc $y = \frac{3}{4}x - \frac{7}{4}$.

....

1.7 b) Une équation cartésienne de la droite (d_3) est donnée sous la forme : $4x - y + c = 0$.

Or, on a les équivalences suivantes :

$$\mathrm{C}(\sqrt{7}, -3\sqrt{7}) \text{ appartient à } (d_3) \iff 4\sqrt{7} + 3\sqrt{7} + c = 0 \iff c = -7\sqrt{7}.$$

Une équation cartésienne de la droite (d_3) est ainsi $4x - y - 7\sqrt{7} = 0$.

L'équation réduite de la droite (d_3) est donc $y = 4x - 7\sqrt{7}$.

....

1.7 c) Une équation cartésienne de la droite (d_4) est donnée sous la forme : $-2x + 4y + c = 0$.

Or, on a les équivalences suivantes :

$$\mathrm{D}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ appartient à } (d_4) \iff -2 \times \frac{3}{\sqrt{2}} + 4 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + c = 0 \iff -3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + c = 0 \iff c = \sqrt{2}.$$

Une équation cartésienne de la droite (d_4) est ainsi $-2x + 4y + \sqrt{2} = 0$.

L'équation réduite de la droite (d_4) est donc $y = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{4}$.

....

1.8 Un vecteur normal de la droite (d_5) est $\vec{n}\begin{pmatrix}\sqrt{5}\\1\end{pmatrix}$. Une équation cartésienne de la droite (d_5) est donnée sous la forme : $\sqrt{5}x + y + c = 0$. Or, on a les équivalences suivantes :

$$\mathrm{E}(\sqrt{5}, -1) \text{ appartient à } (d_5) \iff \sqrt{5} \times \sqrt{5} - 1 + c = 0 \iff 4 + c = 0 \iff c = -4.$$

Une équation cartésienne de la droite (d_5) est ainsi $\sqrt{5}x + y - 4 = 0$.

L'équation réduite de la droite (d_5) est donc $y = -\sqrt{5}x + 4$.

....

1.9 a) Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}2-(-1)\\6-(-3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de la droite (d_6). Une équation de la droite (d_6) est donnée sous la forme : $3x + 9y + c = 0$. Or, on a les équivalences suivantes :

$$\mathrm{A}(-1, -3) \in (d_6) \iff 3 \times (-1) + 9 \times (-3) + c = 0 \iff c = 30.$$

L'équation cartésienne de la droite (d_6) est ainsi $3x + 9y + 30 = 0$. Son équation réduite est donc $y = -\frac{1}{3}x - \frac{10}{3}$.

....

1.9 b) Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\begin{pmatrix}17-2\\1-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15\\-5\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de la droite (d_7). Une équation de la droite (d_7) est donnée sous la forme : $15x - 5y + c = 0$.

Or, on a les équivalences suivantes :

$$\mathrm{C}(17,1) \text{ appartient à } (d_7) \iff 15 \times 17 - 5 \times 1 + c = 0 \iff c = -250.$$

Une équation cartésienne de la droite (d_7) est ainsi $15x - 5y - 250 = 0$. L'équation réduite de la droite (d_7) est donc $y = 3x - 50$.

....

1.10 a) On a $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\\ \frac{5}{2}-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix}\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\\ 1-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$. Donc, on a $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0 \times 2 + \dfrac{3}{2} \times 0 = 0$.

....

1.10 b) On a $\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \begin{pmatrix}x-\dfrac{3}{2}\\ y-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$. Donc, on a $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = 2 \times \left(x - \dfrac{3}{2}\right) + 0 \times (y-1) = 2x - 3$.

....

1.10 c) On a $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix}0\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \begin{pmatrix}x+\frac{1}{2}\\ y-\frac{5}{2}\end{pmatrix}$. Donc, on a $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BD}} = 0 \times \left(x + \dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{3}{2} \times (y - \dfrac{5}{2}) = \dfrac{3}{2}y - \dfrac{15}{4}$.

....

1.10 d) On a $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont orthogonaux. Autrement dit, on a $\widehat{\mathrm{BAC}} = 90^\circ$. Ainsi, le quadrilatère ABDC est un rectangle si, et seulement si, $\widehat{\mathrm{ABD}} = \widehat{\mathrm{ACD}} = 90^\circ$. Donc, on a les équivalences suivantes :

$$\text{ABDC est un rectangle} \iff \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0 \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BD}} = 0 \iff \begin{cases} 2x - 3 = 0 \\ \dfrac{3}{2}y - \dfrac{15}{4} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x = 3 \\ \dfrac{3}{2}y = \dfrac{15}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{15}{4} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

....

1.11 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = 2x + 2\sqrt{2}$.

On sait que l'équation réduite de la tangente de la fonction f au point d'abscisse (x_0, y_0) est donnée par

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

On en déduit donc $\vec{n}(f'(x_0), -1)$ est un vecteur normal de cette tangente.

Par suite, la tangente de la fonction f au point d'abscisse x a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_1}(f'(x), -1)$ et celle au point d'abscisse $-x$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_2}(f'(-x), -1)$.

Or, on a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2} &\iff \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0 \iff f'(x) \times f'(-x) + 1 = 0 \iff f'(x) \times f'(-x) = -1 \\ &\iff (2x + 2\sqrt{2})(-2x + 2\sqrt{2}) = -1 \iff 8 - 4x^2 = -1 \\ &\iff 4x^2 = 9 \iff x^2 = \frac{9}{4} \iff x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = -\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

....

1.12 Pour commencer, on laisse le lecteur vérifier que deux droites de pente p et q sont perpendiculaires si, et seulement si, $pq = 1$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = 2x + b$. Les tangentes aux points d'abscisse 1 et -1 sont perpendiculaires si, et seulement si, $f'(1) \times f'(-1) = -1$. Or, on a

$$f'(1) \times f'(-1) = -1 \iff (2+b)(-2+b) = -1 \iff b^2 - 4 = -1 \iff b^2 = 3 \iff b = \sqrt{3} \text{ ou } b = -\sqrt{3}.$$

....