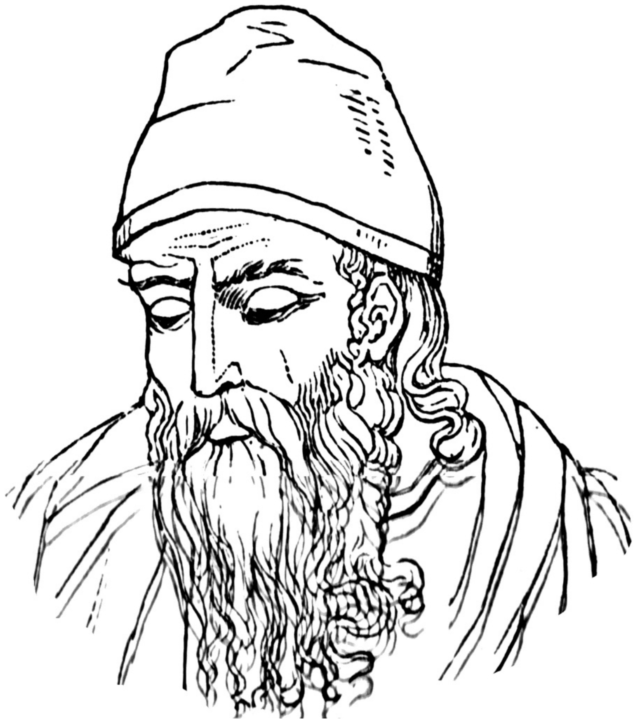
Lycée CHATEAUBRIAND
Colas Bardavid

Premières définitions

Un premier contact avec les mathématiques de MPSI



EUCLIDE d'Alexandrie (vivant vers 300 av. JC)

On sait très peu de choses d'Euclide ; par exemple, on ne connaît pas ses dates de naissance et de mort précises.

Il est l'auteur de plusieurs ouvrages de mathématiques, le plus célèbre d'entre eux étant les Éléments, *composé de treize livres. Cet ouvrage est remarquable par sa structure hypothético-déductive, enchaînant définitions, axiomes et propositions. De ce fait, il constitue un modèle de la pratique mathématique.*

I. Théorie des ensembles

Soient E et F des ensembles.

1) Inclusion

Définition DFN. **1**
On dit que l'ensemble F est inclus dans E *(on dit aussi que* F est une partie de E *ou que* F est un sous-ensemble de E*) et on note* $F \subset E$ *ou* $F \subseteq E$ $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

2) Injections, surjections, bijections

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

Définition DFN. **2**
On dit que l'application $f : E \longrightarrow F$ est injective $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

Définition DFN. **3**
On dit que l'application $f : E \longrightarrow F$ est surjective $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

Définition DFN. **4**
On dit que l'application $f : E \longrightarrow F$ est bijective $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

....

II. Suites réelles

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1) Suites croissantes et décroissantes

Définition DFN.**5**
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

Définition DFN.**6**
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

De même, on définit :

Définition DFN.**7**
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

Définition DFN.**8**
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

2) Suites majorées, minorées, bornées

Définition DFN.**9**
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

Définition DFN.**10**
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

Définition DFN.**11**
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

3) Limites des suites réelles

Définition DFN.**12**
Soit $\ell \in \mathbb{R}$. *On dit que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ *et on note* $u_n \longrightarrow \ell$ $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

Définition DFN.**13**
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ *et on note* $u_n \longrightarrow +\infty$ $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

Définition DFN.**14**
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ *et on note* $u_n \longrightarrow -\infty$ $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

Définition DFN.**15**
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

4) Suites géométriques et arithmétiques

Définition DFN.**16**
Soit $r \in \mathbb{R}$. *On dit que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison r $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

Définition DFN.**17**
Soit $a \in \mathbb{R}$. *On dit que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison a $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

5) Propriétés vraies à partir d'un certain rang

Définition DFN.**18**
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

Définition DFN.**19**
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

Définition DFN.**20**
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

III. Parties réelles

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

1) Majorants, minorants

Définition DFN. **21**
Soit $M \in \mathbb{R}$. *On dit que* M est un majorant de A $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

Définition DFN. **22**
Soit $m \in \mathbb{R}$. *On dit que* m est un minorant de A $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

2) Plus grand élément, plus petit élément

Soit $a \in \mathbb{R}$.

Définition DFN. **23**
On dit que a est le plus grand élément de A $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

Définition DFN. **24**
On dit que a est le plus petit élément de A $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

3) Bornes supérieure et inférieure

Définition DFN. **25**
Soit $s \in \mathbb{R}$. *On dit que* s est la borne supérieure de A $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

....

Définition DFN. **26**
Soit $m \in \mathbb{R}$. *On dit que* m est la borne inférieure de A $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

....

4) Intérieur, adhérence, accumulation et densité

Définition DFN.**27**
Soit $x \in \mathbb{R}$. *On dit que* x est un point intérieur à A $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

Définition DFN.**28**
Soit $x \in \mathbb{R}$. *On dit que* x est un point adhérent à A $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

Définition DFN.**29**
Soit $x \in \mathbb{R}$. *On dit que* x est un point d'accumulation de A $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

Définition DFN.**30**
Soit B *une partie de* A. *On dit que* B est dense dans A $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

5) Parties convexes

Définition DFN.**31**
On dit que A est convexe $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

IV. Fonctions réelles

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1) Croissance et décroissance

Définition DFN.**32**
On dit que f est croissante (sur I) $\overset{\triangle}{\text{ssi}}$

....

Définition DFN.**33**
On dit que f est strictement croissante (sur I) $\overset{\triangle}{\text{ssi}}$

....

De même :

Définition DFN.**34**
On dit que f est décroissante (sur I) $\overset{\triangle}{\text{ssi}}$

....

Définition DFN.**35**
On dit que f est strictement décroissante (sur I) $\overset{\triangle}{\text{ssi}}$

....

2) Extrema

Soit $a \in I$.

Définition DFN.**36**
On dit que f atteint son maximum en a (sur I) $\overset{\triangle}{\text{ssi}}$

....

Définition DFN.**37**
On dit que f atteint son minimum en a (sur I) $\overset{\triangle}{\text{ssi}}$

....

3) Extrema locaux

Soit a un point intérieur à I.

Définition DFN.**38**
On dit que f admet un maximum local en a (sur I) $\overset{\triangle}{\text{ssi}}$

....

Définition DFN.**39**
On dit que f admet un minimum local en a (sur I) $\overset{\triangle}{\text{ssi}}$

....

4) Parité et imparité

Définition DFN.**40**
Soit $A \subset \mathbb{R}$. *On dit que* A est symétrique par rapport à 0 $\overset{\triangle}{\text{ssi}}$

....

Définition DFN.**41**
On suppose I *symétrique par rapport à* 0. *On dit que* f est paire $\overset{\triangle}{\text{ssi}}$

....

Définition DFN.**42**
On suppose I *symétrique par rapport à* 0. *On dit que* f est impaire $\overset{\triangle}{\text{ssi}}$

....

5) Périodicité

Définition DFN.**43**
On suppose $I = \mathbb{R}$. *Soit* $T > 0$. *On dit que* f est T-périodique $\overset{\triangle}{\text{ssi}}$

....

Définition DFN.**44**
On suppose $I = \mathbb{R}$. *On dit que* f est périodique $\overset{\triangle}{\text{ssi}}$

....

6) lipschitzianité

Définition DFN.**45**
Soit $C > 0$. *On dit que* f est C-lipschitzienne $\overset{\triangle}{\text{ssi}}$

....

Définition DFN.**46**
On dit que f est lipschitzienne $\overset{\triangle}{\text{ssi}}$

....

Définition DFN.**47**
On dit que f est localement lipschitzienne $\overset{\triangle}{\text{ssi}}$

....

....