DS 3

4 heures

- *Tout résultat ou raisonnement doit être clairement justifié, sauf mention du contraire.*
- *La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.*
- *La présentation de la copie sera prise en compte dans l'évaluation :*
  - ▷ *encadrez les résultats principaux ;*
  - ▷ *soulignez les résultats et arguments intermédiaires importants ;*
  - ▷ *soignez votre écriture ;*
  - ▷ *maintenez une marge dans vos copies, aérez vos copies ;*
  - ▷ *enfin, numérotez vos copies (et non vos pages).*
- *Les documents, calculatrices et autres appareils électroniques sont interdits.*
- *Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie en expliquant les initiatives que vous avez été amené à prendre.*
- *Ne rendez pas le sujet avec vos copies.*

Contrôles des polynômes

Plusieurs résultats de transfert.

Notation générale

- *Dans tout le sujet, P désigne un polynôme à coefficients complexes, qu'on écrit*

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k,$$

où $n \in \mathbb{N}$, où $\forall k \in [\![0, n]\!], a_k \in \mathbb{C}$ et où $a_n \neq 0$.

- *On suppose $n \geqslant 1$.*

Définitions

Soit $M \in \mathbb{R}_+$.

- *On dit que M* contrôle les coefficients de P $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \ \ |a_k| \leqslant M.$$

- *Si $A \subset \mathbb{C}$, on dit que M* contrôle P sur A $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\forall z \in A, \ \ |P(z)| \leqslant M.$$

Les parties I, II, III et IV sont indépendantes.
La partie V utilise la partie IV.

Partie I – Premiers contrôles.

1. Un premier transfert de contrôles.
Soit $M \in \mathbb{R}_+$. Montrer que

$$M \text{ contrôle les coefficients de } P \implies (n+1)M \text{ contrôle } P \text{ sur } \mathbb{U}.$$

2. Un exemple.
On suppose que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} X^k$. Montrer que $\dfrac{n3^{n-1}}{2^n}$ contrôle P sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Partie II – Contrôle par le cercle-unité.

Notation et définition

- *Si* $m \in \mathbb{N}^*$ *et* $p \in \mathbb{Z}$*, on note*

$$\mathsf{S}_m(p) \coloneqq \frac{1}{m} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_m} \omega^p.$$

- *Soient* $a, b \in \mathbb{Z}$*.*
  On dit que a divise b *ou que* b est multiple de a $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\exists k \in \mathbb{Z} : b = k \times a$.

3. Un lemme sur les multiples.
Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et soient $k, \ell \in [\![0, m-1]\!]$.
Montrer que

$$(k - \ell) \text{ multiple de } m \iff k = \ell.$$

4. Calcul de $\mathsf{S}_m(p)$.
Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{Z}$.
Montrer que

$$\mathsf{S}_m(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \text{ multiple de } m \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notation

Si $m \in \mathbb{N}^*$ *et* $\ell \in \mathbb{Z}$*, on note*

$$\mathsf{C}_m(P, \ell) \coloneqq \frac{1}{m} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_m} P(\omega)\omega^{-\ell}.$$

5. Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et soit $\ell \in \mathbb{Z}$.
Montrer que

$$\mathsf{C}_m(P, \ell) = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathsf{S}_m(k - \ell).$$

6. Montrer que

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathsf{C}_{n+1}(P, k) = a_k.$$

7. Contrôle des coefficients par le cercle-unité.
Soit $M \in \mathbb{R}_+$. Montrer que

$$M \text{ contrôle } P \text{ sur } \mathbb{U} \implies M \text{ contrôle les coefficients de } P.$$

Partie III – Contrôles sur le cercle-unité.

8. **Interpolation de Lagrange.**
Soient $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ des nombres complexes deux à deux distincts.
Montrer que

$$P = \sum_{i=0}^{n} P(x_i) \frac{\displaystyle\prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (X - x_j)}{\displaystyle\prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (x_i - x_j)}.$$

9. (a) Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C}$. On note

$$Q \coloneqq \prod_{i=1}^{m} (X - \alpha_i).$$

Montrer que

$$Q' = \sum_{i=1}^{m} \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant m \\ j \neq i}} (X - \alpha_j).$$

(b) En déduire que

$$\forall\, \omega \in \mathbb{U}_{n+1}, \quad \prod_{\tau \in \mathbb{U}_{n+1} \setminus \{\omega\}} (\omega - \tau) = (n+1)\omega^n.$$

10. En utilisant les questions **8.** et **9.**(b), montrer que

$$P = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_{n+1}} \frac{P(\omega)}{(n+1)\omega^n} \prod_{\tau \in \mathbb{U}_{n+1} \setminus \{\omega\}} (X - \tau).$$

11. Soit $M \geqslant 0$. Montrer que

$$M \text{ contrôle } P \text{ sur } \mathbb{U}_{n+1} \implies 2^n M \text{ contrôle } P \text{ sur } \mathbb{U}.$$

Partie IV – Différences finies itérées.

Notations

- *Si $Q \in \mathbb{C}[X]$, on note $\Delta Q \coloneqq Q(X+1) - Q$.*
- *On considère l'application $\Delta : \mathbb{C}[X] \longrightarrow \mathbb{C}[X]$ définie par*

$$\Delta : \begin{cases} \mathbb{C}[X] \longrightarrow \mathbb{C}[X] \\ Q \longmapsto \Delta Q. \end{cases}$$

- *Si $m \in \mathbb{N}^*$, on note $\Delta^m \coloneqq \underbrace{\Delta \circ \cdots \circ \Delta}_{m \text{ fois}}$.*

12. On suppose $n \geqslant 1$.

(a) Montrer que

$$\deg(\Delta P) = n - 1.$$

(b) Que vaut le coefficient dominant de ΔP ?

13. (a) Montrer que $\Delta^n(P)$ est un polynôme constant.

(b) Combien vaut $\Delta^n(P)(0)$?

On attend une expression dépendant des a_k.

14. Formule d'itération de Δ.

Montrer que, pour tout $\ell \in [\![0, n]\!]$,

$$\Delta^\ell(P) = \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^{\ell-j} \binom{\ell}{j} P(X+j).$$

15. (a) En déduire que

$$n! a_n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{\ell-j} \binom{\ell}{j} P(j).$$

(b) En déduire que

$$\frac{n! a_n}{n^n} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{\ell-j} \binom{\ell}{j} P\left(\frac{j}{n}\right).$$

Partie V – Contrôle par un segment.

Notation

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note

$$\gamma_k \coloneqq \left(\frac{(2^n+1)n^n}{n!}\right)^k \quad \textit{et} \quad P_k \coloneqq \sum_{\ell=1}^{k} a_\ell X^\ell.$$

16. Soit $M \geqslant 0$. En utilisant la question **15.**(b), montrer que

$$M \text{ contrôle } P \text{ sur } [0,1] \implies |a_n| \leqslant \frac{(2n)^n}{n!} M.$$

17. Montrer que

$$\forall \ell \in [\![0, n]\!], \quad \frac{(2^\ell+1)\ell^\ell}{\ell!} \leqslant \frac{(2^n+1)n^n}{n!}.$$

18. Soit $M \geqslant 0$.

(a) Montrer que

$$M \text{ contrôle } P \text{ sur } [0,1] \quad \implies \quad \Big(\forall k \in [\![0, n]\!], \ \ \gamma_k M \text{ contrôle } P_{n-k} \text{ sur } [0,1]\Big).$$

(b) En déduire que

$$M \text{ contrôle } P \text{ sur } [0,1] \quad \implies \quad \frac{1}{n!}\left(\frac{2(2^n+1)n^{n+1}}{n!}\right)^n M \text{ contrôle les coefficients de } P.$$

Remarque

Ce transfert de contrôles des coefficients à l'aide d'un contrôle de P sur $[0,1]$ n'est pas optimal. Avec les matrices de Vandermonde, on peut montrer que

$$M \textit{ contrôle } P \textit{ sur } [0,1] \quad \implies \quad \left(2\sqrt{n}^{\,n}\right)^{n+1} M \textit{ contrôle les coefficients de } P.$$

FIN DU SUJET.