Droites du plan

Remarque
Dans toute cette fiche, le plan est muni d'un repère.

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 1.1

Calculer :

a) $\dfrac{-2}{3} \times \dfrac{-7}{4} - \dfrac{1}{2}$ ....

b) $\dfrac{3}{5}\sqrt{8} - \dfrac{7}{13}\sqrt{32}$ ....

c) $\dfrac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}{\frac{-5}{3} + \frac{-3}{5}}$ ....

d) $\dfrac{-2\sqrt{5} - \sqrt{45}}{-\sqrt{80} + 6\sqrt{5}}$ ....

Calcul 1.2

Résoudre les équations suivantes, en donnant la valeur de leur unique solution.

a) $-3 + 4x - 9 + 6x = 0$ ....

b) $\dfrac{3}{5}x - \dfrac{1}{2} + x = -\dfrac{4}{3}$ ....

c) $\sqrt{3}x - 3\sqrt{12} = \sqrt{27}x - 4\sqrt{75}$ ...

d) $\dfrac{5}{\sqrt{2}}x + \sqrt{8} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ....

Équations de droites

Calcul 1.3 — Avec un point et un vecteur directeur.

On considère la droite (d) passant par le point $\mathrm{A}(-7, 4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}$.

a) Déterminer une équation cartésienne de (d) ....

b) Déterminer l'équation réduite de (d) ....

Calcul 1.4 — Droites passant par deux points (I).

On considère la droite (d) passant par les points $\mathrm{A}(-3, 2)$ et $\mathrm{B}(6, -3)$.

a) Déterminer une équation cartésienne de (d) ....

b) Déterminer l'équation réduite de (d) ....

Calcul 1.5 — Droites passant par deux points (II).

On considère la droite (d) passant par les points $\mathrm{A}\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{3}\right)$ et $\mathrm{B}\left(\frac{1}{3}, -\frac{6}{5}\right)$.

a) Déterminer une équation cartésienne de (d) ....

b) Déterminer l'équation réduite de (d) ....

Calcul 1.6

On considère la droite (d) passant par les points $\mathrm{A}\left(-3\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$ et $\mathrm{B}\left(\sqrt{8}, -2\sqrt{12}\right)$.

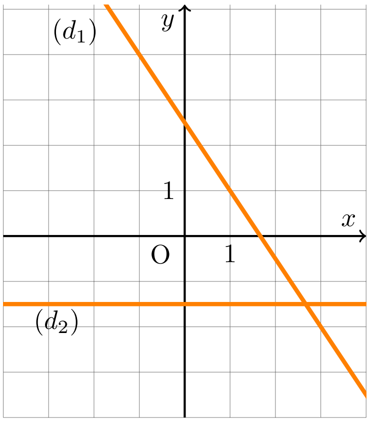
a) Déterminer une équation cartésienne de (d) ....

b) Calculer l'abscisse du point de (d) d'ordonnée nulle ....

c) Calculer l'ordonnée du point de (d) d'abscisse -3 ....

Calcul 1.7 — Détermination graphique.

On considère les droites (d_1) et (d_2) tracées dans le repère ci-dessous.



À l'aide du graphique, déterminer :

a) les coordonnées d'un vecteur directeur de (d_1) ....

b) une équation cartésienne de (d_1) ....

c) l'équation réduite de (d_1) ....

d) l'équation réduite de (d_2) ....

Calcul 1.8 — Des calculs de coordonnées de points.

On considère la droite (d) d'équation cartésienne $-2x + 3y - 7 = 0$.

a) Calculer l'ordonnée du point de (d) d'abscisse -6 ....

b) Calculer l'abscisse du point de (d) d'ordonnée $\dfrac{7}{3}$ ....

c) Calculer l'ordonnée du point de (d) d'abscisse $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ....

d) Déterminer les coordonnées du point de (d) dont l'abscisse et l'ordonnée sont égales ....

Calcul 1.9 — Des droites parallèles.

On considère la droite (d) d'équation cartésienne $-\dfrac{2}{3}x + \dfrac{4}{5}y - \dfrac{1}{2} = 0$. Déterminer :

a) une équation cartésienne de la droite (d'), parallèle à (d), passant par le point de coordonnées $(-2, 5)$

....

b) une équation cartésienne de la droite (d''), parallèle à (d), passant par le point de coordonnées $(-30, 60)$

....

Calcul 1.10 — Avec des paramètres (I).

Soit $t \in \mathbb{R}$. On considère la droite (d) dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -t+1 \\ t+2 \end{pmatrix}$ et passant par $\mathrm{A}(-3, 2)$.

a) Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) ....

b) Déterminer la valeur de t pour que la droite (d) soit parallèle à $(\mathrm{O}x)$ ......

Calcul 1.11 — Avec des paramètres (II).

Soit $t \in \mathbb{R}$. On considère la droite (d) dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix} t^2 \\ -2t+1 \end{pmatrix}$ et passant par $\mathrm{A}\left(-\dfrac{3}{4}, \dfrac{6}{7}\right)$.

a) Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) ....

b) Déterminer la valeur de t pour que la droite (d) soit parallèle à $(\mathrm{O}y)$ ......

Intersections de droites

Calcul 1.12 — Une première intersection.

On considère (d_1) la droite d'équation $x + y + 1 = 0$ et (d_2) la droite d'équation $x + 11 = 0$.

Calculer les coordonnées du point d'intersection de (d_1) et (d_2) ....

Calcul 1.13 — Quelques autres intersections.

Soit (d) la droite d'équation $-\dfrac{2}{3}x + \dfrac{7}{5}y - 5 = 0$. Calculer les coordonnées :

a) du point d'intersection de (d) avec l'axe des abscisses ....

b) du point d'intersection de (d) avec l'axe des ordonnées ....

c) du point d'intersection de (d) avec la première bissectrice ....

Calcul 1.14

Soient (d_1) la droite d'équation $2x - 3y + 4 = 0$ et (d_2) la droite d'équation $-5x + 9y - 7 = 0$.

Calculer les coordonnées du point d'intersection de (d_1) et (d_2) ....

Calcul 1.15

Soient (d_1) la droite d'équation $3\sqrt{3}x - \sqrt{2}y + 1 = 0$ et (d_2) la droite d'équation $-\sqrt{12}x + \sqrt{8}y + 2 = 0$.

Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (d_1) et (d_2) ....

Calcul 1.16

Soient (d_1) la droite d'équation $4x + y - 6 = 0$ et $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = x^2 + 3x - 1$.

Déterminer les coordonnées des deux points d'intersection de (d) et de $\mathscr{P}$.

Calcul 1.17

Soient (d) la droite d'équation $-x + y + 3 = 0$ et $\mathscr{C}$ le cercle d'équation $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$.

Déterminer les coordonnées des deux points d'intersection de (d) et de $\mathscr{C}$ ..

Calculs plus avancés

Calcul 1.18

Soit a un réel. On considère la droite (d) d'équation cartésienne

$$\frac{1}{a^2+1}x + (a^2-1)y - 2 = 0.$$

a) Déterminer, si elle existe, l'ordonnée du point de (d) d'abscisse a ....

b) Déterminer l'abscisse du point de (d) d'ordonnée $(a-1)$ ....

Calcul 1.19

Soit m un réel.

On considère

- (d_1) la droite d'équation cartésienne $mx + 4(m-1)y + 11 = 0$;
- (d_2) la droite d'équation cartésienne $2x + my + 2 = 0$.

a) Déterminer une condition sur le réel m pour que les droites (d_1) et (d_2) soient sécantes

....

b) Dans les conditions précédentes, déterminer les coordonnées du point d'intersection de (d_1) et (d_2)

....

Calcul 1.20

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$. Soit m un réel.

On note

- $\mathsf{T}_{f,m}$ la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse m ;
- (d) la droite d'équation $3x + 2y - 5 = 0$.

a) Déterminer une équation de $\mathsf{T}_{f,m}$ ....

b) Déterminer les coordonnées de l'éventuel point d'intersection de $\mathsf{T}_{f,m}$ et de (d) ..

Calcul 1.21

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 5$ et $g(x) = -2x^2 + 3$. Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

a) Déterminer une équation de $\mathsf{T}_{f,a}$, la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a

....

b) Déterminer une équation de $\mathsf{T}_{g,-a}$, la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse $-a$

....

c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathsf{T}_{f,a}$ et $\mathsf{T}_{g,-a}$ ......

Réponses mélangées

$(-5,-2)$ $\quad y = -\dfrac{5}{9}x + \dfrac{1}{3}$ $\quad y = \dfrac{14}{55}x - \dfrac{212}{165}$ $\quad \dfrac{7}{15}x - \dfrac{11}{6}y - \dfrac{106}{45} = 0$ $\quad -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{4}{5}y - \dfrac{16}{3} = 0$

$\dfrac{5}{68}$ $\quad \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad -5x + 3y - 47 = 0$ $\quad -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{4}{5}y - 68 = 0$ $\quad \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{2}\right)$ $\quad \left(0, \dfrac{25}{7}\right)$

$(-2t+1)x - t^2y + \dfrac{6}{7}t^2 - \dfrac{3}{2}t + \dfrac{3}{4} = 0$ $\quad y = \dfrac{5}{3}x + \dfrac{47}{3}$ $\quad \left(\dfrac{-7-\sqrt{77}}{2}, 20 + 2\sqrt{77}\right)$ $\left(\dfrac{-7+\sqrt{77}}{2}, 20 - 2\sqrt{77}\right)$

$\dfrac{6}{5}$ $\quad (-11, 10)$ $\quad \left(\dfrac{5a^2-2}{2a}, 12a^2 - 1\right)$ $\quad \dfrac{2}{3}$ $\quad -\dfrac{25}{48}$ $\quad -2\sqrt{3} + 3\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ $\quad -\dfrac{5}{3}$

$(t+2)x + (t-1)y + t + 8 = 0$ $\quad \left(-\dfrac{15}{2}, 0\right)$ $\quad (7,7)$ $\quad \left(\dfrac{75}{11}, \dfrac{75}{11}\right)$ $\quad -\dfrac{5}{2}$ $\quad \dfrac{7-\sqrt{3}}{3}$

$-2\sqrt{2}$ $\quad y = (-6m+2)x + 3m^2 + 1$ $\quad \sqrt{3}x + \sqrt{2}y + 2\sqrt{6} = 0$ $\quad \left(\dfrac{-3m-8}{m^2-8m+8}, \dfrac{22-2m}{m^2-8m+8}\right)$.

$-a^5 + a^4 + 2a^2 + a + 1$ $\quad \left(\dfrac{4-5\sqrt{2}}{2}, \dfrac{-2-5\sqrt{2}}{2}\right)$ $\left(\dfrac{4+5\sqrt{2}}{2}, \dfrac{-2+5\sqrt{2}}{2}\right)$ $\quad$ si $m \neq \dfrac{7}{12}$, $\left(\dfrac{-6m^2+3}{-12m+7}, \dfrac{9m^2-30m+13}{-12m+7}\right)$

0 $\quad 3x + 2y - 5 = 0$ $\quad y = -\dfrac{3}{2}$ $\quad y = -4 \times (-a)(x+a) - 2a^2 + 3$ $\quad 0$

$\dfrac{2a^2-a+2}{a^4-1}$ si $a \notin \{-1, 1\}$ $\quad m \neq 4 - 2\sqrt{2}$ et $m \neq 4 + 2\sqrt{2}$ $\quad -5x - 9y + 3 = 0$

$y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{5}{2}$ $\quad \dfrac{-3}{5}$ $\quad 7$ $\quad y = 6a(x-a) + 3a^2 + 5$ $\quad -\dfrac{62}{65}\sqrt{2}$ $\quad -2$

► Réponses et corrigés page 7

Fiche n° 1. Droites du plan

Réponses

1.1 a) $\boxed{\dfrac{2}{3}}$

1.1 b) $\boxed{-\dfrac{62}{65}\sqrt{2}}$

1.1 c) $\boxed{\dfrac{5}{68}}$

1.1 d) $\boxed{-\dfrac{5}{2}}$

1.2 a) $\boxed{\dfrac{6}{5}}$

1.2 b) $\boxed{-\dfrac{25}{48}}$

1.2 c) $\boxed{7}$

1.2 d) $\boxed{\dfrac{-3}{5}}$

1.3 a) $\boxed{-5x+3y-47=0}$

1.3 b) $\boxed{y=\dfrac{5}{3}x+\dfrac{47}{3}}$

1.4 a) $\boxed{-5x-9y+3=0}$

1.4 b) $\boxed{y=-\dfrac{5}{9}x+\dfrac{1}{3}}$

1.5 a) $\boxed{\dfrac{7}{15}x-\dfrac{11}{6}y-\dfrac{106}{45}=0}$

1.5 b) $\boxed{y=\dfrac{14}{55}x-\dfrac{212}{165}}$

1.6 a) $\boxed{\sqrt{3}x+\sqrt{2}y+2\sqrt{6}=0}$

1.6 b) $\boxed{-2\sqrt{2}}$

1.6 c) $\boxed{-2\sqrt{3}+3\dfrac{\sqrt{6}}{2}}$

1.7 a) $\boxed{\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}}$

1.7 b) $\boxed{3x+2y-5=0}$

1.7 c) $\boxed{y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{5}{2}}$

1.7 d) $\boxed{y=-\dfrac{3}{2}}$

1.8 a) $\boxed{-\dfrac{5}{3}}$

1.8 b) $\boxed{0}$

1.8 c) $\boxed{\dfrac{7-\sqrt{3}}{3}}$

1.8 d) $\boxed{(7,7)}$

1.9 a) $\boxed{-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{4}{5}y-\dfrac{16}{3}=0}$

1.9 b) $\boxed{-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{4}{5}y-68=0}$

1.10 a) $\boxed{(t+2)x+(t-1)y+t+8=0}$

1.10 b) $\boxed{-2}$

1.11 a) $\boxed{(-2t+1)x-t^2y+\dfrac{6}{7}t^2-\dfrac{3}{2}t+\dfrac{3}{4}=0}$

1.11 b) $\boxed{0}$

1.12 $\boxed{(-11,10)}$

1.13 a) $\boxed{\left(-\dfrac{15}{2},0\right)}$

1.13 b) $\boxed{\left(0,\dfrac{25}{7}\right)}$

1.13 c) $\boxed{\left(\dfrac{75}{11},\dfrac{75}{11}\right)}$

1.14 $\boxed{(-5,-2)}$

1.15 $\boxed{\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\sqrt{2}\right)}$

1.16 .... $\left(\dfrac{-7-\sqrt{77}}{2}, 20+2\sqrt{77}\right)$ $\left(\dfrac{-7+\sqrt{77}}{2}, 20-2\sqrt{77}\right)$

1.17 .... $\left(\dfrac{4-5\sqrt{2}}{2}, \dfrac{-2-5\sqrt{2}}{2}\right)$ $\left(\dfrac{4+5\sqrt{2}}{2}, \dfrac{-2+5\sqrt{2}}{2}\right)$

1.18 a)............. $\dfrac{2a^2-a+2}{a^4-1}$ si $a \notin \{-1,1\}$

1.18 b)................. $-a^5+a^4+2a^2+a+1$

1.19 a) .... $m \neq 4-2\sqrt{2}$ et $m \neq 4+2\sqrt{2}$

1.19 b) .... $\left(\dfrac{-3m-8}{m^2-8m+8}, \dfrac{22-2m}{m^2-8m+8}\right)$.

1.20 a) .... $y = (-6m+2)x + 3m^2 + 1$

1.20 b)...... si $m \neq \dfrac{7}{12}$, $\left(\dfrac{-6m^2+3}{-12m+7}, \dfrac{9m^2-30m+13}{-12m+7}\right)$

1.21 a) .... $y = 6a(x-a) + 3a^2 + 5$

1.21 b) .... $y = -4 \times (-a)(x+a) - 2a^2 + 3$

1.21 c)..................... $\left(\dfrac{5a^2-2}{2a}, 12a^2-1\right)$

Corrigés

1.1 a) On a $\dfrac{-2}{3} \times \dfrac{-7}{4} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{6} - \dfrac{3}{6} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

1.1 b) On a $\dfrac{3}{5}\sqrt{8} - \dfrac{7}{13}\sqrt{32} = \dfrac{3}{5} \times 2\sqrt{2} - \dfrac{7}{13} \times 4\sqrt{2} = \dfrac{6}{5}\sqrt{2} - \dfrac{28}{13}\sqrt{2} = \dfrac{78}{65}\sqrt{2} - \dfrac{140}{65}\sqrt{2} = -\dfrac{62}{65}\sqrt{2}$.

1.1 c) On a $\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}{\frac{-5}{3}+\frac{-3}{5}} = \dfrac{\frac{2}{6}-\frac{3}{6}}{\frac{-25}{15}-\frac{9}{15}} = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{15}{34} = \dfrac{5}{68}$.

1.1 d) On a $\dfrac{-2\sqrt{5}-\sqrt{45}}{-\sqrt{80}+6\sqrt{5}} = \dfrac{-2\sqrt{5}-3\sqrt{5}}{-4\sqrt{5}+6\sqrt{5}} = -\dfrac{5}{2}$.

1.2 a) On a $-3+4x-9+6x=0 \iff 10x=12 \iff x=\dfrac{12}{10}=\dfrac{6}{5}$.

1.2 b) On a $\dfrac{3}{5}x - \dfrac{1}{2} + x = -\dfrac{4}{3} \iff \dfrac{8}{5}x = -\dfrac{8}{6} + \dfrac{3}{6} \iff x = -\dfrac{5}{6} \times \dfrac{5}{8} \iff x = -\dfrac{25}{48}$.

1.2 c) On a $\sqrt{3}x - 3\sqrt{12} = \sqrt{27}x - 4\sqrt{75} \iff \sqrt{3}x - 3\sqrt{3}x = 3 \times 2\sqrt{3} - 4 \times 5\sqrt{3} \iff -2\sqrt{3}x = -14\sqrt{3}$.
On obtient $x = 7$.

1.2 d) On a $\dfrac{5}{\sqrt{2}}x + \sqrt{8} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \iff \dfrac{5}{\sqrt{2}}x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{2} \iff \dfrac{5}{\sqrt{2}}x = -\dfrac{3}{2}\sqrt{2} \iff x = -\dfrac{3}{2}\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{5}$.
On obtient $x = -\dfrac{3}{5}$.

1.3 a) La droite (d) est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}$; elle admet donc une équation cartésienne de la forme $-5x+3y+c=0$. Le point $A(-7,4)$ appartient à la droite, donc ses coordonnées vérifient son équation. On a donc $-5 \times (-7) + 3 \times 4 + c = 0$, ce qui donne $c = -47$. La droite (d) admet donc pour équation cartésienne $-5x+3y-47=0$.

1.3 b) On a $-5x + 3y - 47 = 0 \iff 3y = 5x + 47 \iff y = \dfrac{5}{3}x + \dfrac{47}{3}$.

....

1.4 a) La droite (d) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}} \\ y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \end{pmatrix}$. On obtient l'équation $-5x - 9y + 3 = 0$.

....

1.5 a) La droite (d) est dirigée par $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} \frac{11}{6} \\ \frac{7}{15} \end{pmatrix}$.

On obtient l'équation $\dfrac{7}{15}x - \dfrac{11}{6}y + c = 0$. En remplaçant x et y par les coordonnées de B, on obtient $c = -\dfrac{106}{45}$ ce qui donne l'équation cartésienne $\dfrac{7}{15}x - \dfrac{11}{6}y - \dfrac{106}{45} = 0$.

....

1.5 b) On a

$$\frac{7}{15}x - \frac{11}{6}y - \frac{106}{45} = 0 \iff \frac{11}{6}y = \frac{7}{15}x - \frac{106}{45} = 0 \iff y = \frac{6}{11} \times \left(\frac{7}{15}x - \frac{106}{45}\right) \iff y = \frac{14}{55}x - \frac{212}{165}.$$

....

1.6 a) La droite (d) est dirigée par $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} 5\sqrt{2} \\ -5\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

On obtient une équation cartésienne de la forme $-5\sqrt{3}x - 5\sqrt{2}y + c = 0$ avec c réel. En remplaçant x et y par les coordonnées de A, on obtient $c = -10\sqrt{6}$, ce qui donne l'équation cartésienne $-5\sqrt{3}x - 5\sqrt{2}y - 10\sqrt{6} = 0$. En divisant par -5 on obtient $\sqrt{3}x + \sqrt{2}y + 2\sqrt{6} = 0$.

....

1.6 b) L'abscisse x du point de (d) d'ordonnée nulle est la solution de l'équation $\sqrt{3}x + \sqrt{2} \times 0 + 2\sqrt{6} = 0$, ce qui donne $x = \dfrac{-2\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = -2\sqrt{2}$.

....

1.6 c) L'ordonnée y du point de (d) d'abscisse -3 est la solution de l'équation $\sqrt{3} \times (-3) + \sqrt{2}y + 2\sqrt{6} = 0$, ce qui donne $\sqrt{2}y = -2\sqrt{6} + 3\sqrt{3}$ et donc $y = -2\sqrt{3} + \dfrac{3\sqrt{6}}{2}$.

....

1.7 a) En repérant les points du quadrillage par lesquels passe (d_1), on trouve $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

....

1.7 b) Comme un vecteur directeur de (d_1) est $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, une équation cartésienne de (d_1) est de la forme $3x + 2y + c = 0$. Pour déterminer c, remarquons que le point de coordonnées $(1, 1)$ appartient à (d_1). On a donc $3 \times 1 + 2 \times 1 + c = 0$ et donc $c = -5$.

....

1.7 d) On détermine graphiquement l'équation réduite de (d_2). C'est $y = -\dfrac{3}{2}$.

....

1.8 a) On cherche y tel que $-2 \times (-6) + 3y - 7 = 0$, ce qui donne $5 + 3y = 0$, c'est-à-dire $y = -\dfrac{5}{3}$.

....

1.8 b) On cherche x tel que $-2x + 3 \times \dfrac{7}{3} - 7 = 0$, ce qui donne $-2x + 7 - 7 = 0$, c'est-à-dire $x = 0$.

....

1.8 c) On cherche y tel que $-2 \times \dfrac{-\sqrt{3}}{2} + 3y - 7 = 0$, ce qui donne $\sqrt{3} - 7 + 3y = 0$, c'est-à-dire $y = \dfrac{7 - \sqrt{3}}{3}$.

....

1.8 d) On cherche x et y tels que $x = y$ et $-2x + 3y - 7 = 0$ ce qui est équivalent à $x = y$ et $-2x + 3x - 7 = 0$, ce qui donne $x = y = 7$. Le point a donc pour coordonnées $(7, 7)$.

....

1.9 a) Deux droites parallèles sont dirigées par les mêmes vecteurs directeurs, donc le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ dirige aussi (d'). La droite (d') a donc une équation cartésienne de la forme $-\dfrac{2}{3}x + \dfrac{4}{5}y + c = 0$.

On remplace x et y par les coordonnées du point : $-\dfrac{2}{3} \times (-2) + \dfrac{4}{5} \times 5 + c = 0$, ce qui donne $c = -4 - \dfrac{4}{3} = -\dfrac{16}{3}$.

On obtient $-\dfrac{2}{3}x + \dfrac{4}{5}y - \dfrac{16}{3} = 0$.

....

1.9 b) De même qu'au calcul précédent, (d'') a une équation cartésienne de la forme $-\dfrac{2}{3}x + \dfrac{4}{5}y + c = 0$.

On remplace x et y par les coordonnées du point : $-\dfrac{2}{3} \times (-30) + \dfrac{4}{5} \times 60 + c = 0$, ce qui donne $c = -68$.

On obtient $-\dfrac{2}{3}x + \dfrac{4}{5}y - 68 = 0$.

....

1.10 a) La droite (d) est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -t+1 \\ t+2 \end{pmatrix}$, donc elle admet une équation cartésienne de la forme $(t+2)x + (t-1)y + c = 0$.

Le point $\mathrm{A}(-3, 2)$ appartient à la droite, donc ses coordonnées vérifient son équation, on obtient donc l'équation $(t+2) \times (-3) + (t-1) \times 2 + c = 0$, ce qui donne $c = t + 8$.

La droite (d) admet donc pour équation cartésienne $(t+2)x + (t-1)y + t + 8 = 0$.

....

1.10 b) La droite (d) est parallèle à l'axe des abscisses si, et seulement si, la seconde coordonnée de tous ses vecteurs directeurs est nulle, ce qui donne $t + 2 = 0$, c'est-à-dire $t = -2$.

....

1.11 a) La droite (d) est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} t^2 \\ -2t+1 \end{pmatrix}$, donc elle admet une équation cartésienne de la forme $(-2t+1)x - (t^2)y + c = 0$.

Le point $\mathrm{A}\left(-\dfrac{3}{4}, \dfrac{6}{7}\right)$ appartient à la droite, donc ses coordonnées vérifient son équation. On obtient donc l'équation $(-2t+1) \times (-\dfrac{3}{4}) - t^2 \times \dfrac{6}{7} + c = 0$, ce qui donne $c = \dfrac{6}{7}t^2 - \dfrac{3}{2}t + \dfrac{3}{4}$.

La droite (d) admet donc pour équation cartésienne $(-2t+1)x - t^2y + \dfrac{6}{7}t^2 - \dfrac{3}{2}t + \dfrac{3}{4} = 0$.

....

1.11 b) La droite (d) est parallèle à l'axe des ordonnées si, et seulement si, la première coordonnée de tous ses vecteurs directeurs est nulle, ce qui donne $t^2 = 0$, c'est-à-dire $t = 0$.

....

1.12 Les coordonnées (x, y) du point d'intersection de (d_1) et (d_2) sont les solutions du système $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x + 11 = 0. \end{cases}$

Or, on a $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x + 11 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -11 \\ y = 10 \end{cases}$. D'où le résultat.

....

1.13 a) Les coordonnées (x, y) du point d'intersection de (d) et de l'axe des abscisses sont les solutions du système $\begin{cases} -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{7}{5}y - 5 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$. L'unique solution de ce système est $\left(-\dfrac{15}{2}, 0\right)$.

1.13 b) Les coordonnées (x, y) du point d'intersection de (d) et de l'axe des ordonnées sont les solutions du système $\begin{cases} -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{7}{5}y - 5 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$. L'unique solution de ce système est $\left(0, \dfrac{25}{7}\right)$.

1.13 c) Les coordonnées (x, y) du point d'intersection de (d) et de la première bissectrice sont les solutions du système $\begin{cases} -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{7}{5}y - 5 = 0 \\ y = x \end{cases}$.

Or, on a $\begin{cases} -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{7}{5}y - 5 = 0 \\ y = x \end{cases} \iff \begin{cases} -\dfrac{10}{15}x + \dfrac{21}{15}x - 5 = 0 \\ y = x \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{75}{11} \\ y = x \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{75}{11} \\ y = \dfrac{75}{11} \end{cases}$.

1.14 Les coordonnées (x, y) du point d'intersection de (d_1) et (d_2) sont solutions de $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ -5x + 9y = 7 \end{cases}$.

On a $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ -5x + 9y = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} 10x - 15y - 10x + 18y = -20 + 14 \\ 6x - 9y - 5x + 9y = -12 + 7 \end{cases} \iff \begin{cases} 3y = -6 \\ x = -5 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -5 \\ y = -2 \end{cases}$.

1.15 Les coordonnées (x, y) du point d'intersection de (d_1) et (d_2) sont les solutions du système

$$\begin{cases} 3\sqrt{3}x - \sqrt{2}y + 1 = 0 \\ -\sqrt{12}x + \sqrt{8}y + 2 = 0 \end{cases}.$$

On a $\begin{cases} 3\sqrt{3}x - \sqrt{2}y + 1 = 0 \\ -\sqrt{12}x + \sqrt{8}y + 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3\sqrt{3}x - \sqrt{2}y = -1 \\ -2\sqrt{3}x + 2\sqrt{2}y = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} 6\sqrt{3}x - 2\sqrt{2}y - 6\sqrt{3}x + 6\sqrt{2}y = -2 - 6 \\ 6\sqrt{3}x - 2\sqrt{2}y - 2\sqrt{3}x + 2\sqrt{2}y = -2 - 2 \end{cases}$.

On obtient $\begin{cases} 4\sqrt{2}y = -8 \\ 4\sqrt{3}x = -4 \end{cases}$, ce qui donne $\begin{cases} y = -\sqrt{2} \\ x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$.

1.16 Les coordonnées (x, y) du point d'intersection de (d) et de la parabole $\mathscr{P}$ sont les solutions du système

$$\begin{cases} 4x + y = 6 \\ y = x^2 + 3x - 1 \end{cases}.$$

Ce système est équivalent à $\begin{cases} y = -4x + 6 \\ y = x^3 + 3x - 1 \end{cases}$ lui-même équivalent à $\begin{cases} y = -4x + 6 \\ x^2 + 7x - 7 = 0 \end{cases}$.

On résout $x^2 + 7x - 7 = 0$, dont le discriminant vaut $7^2 - 4 \times 1 \times (-7) = 77$. Ses solutions sont $x_1 = \dfrac{-7 - \sqrt{77}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-7 + \sqrt{77}}{2}$. On obtient comme ordonnées correspondantes $y_1 = -4x_1 + 6 = 14 + 2\sqrt{77} + 6 = 20 + 2\sqrt{77}$ et $y_2 = -4x_2 + 6 = 14 - 2\sqrt{77} + 6 = 20 - 2\sqrt{77}$.

Les coordonnées des points d'intersection cherchés sont donc $\left(\dfrac{-7 - \sqrt{77}}{2}, 20 + 2\sqrt{77}\right)$ et $\left(\dfrac{-7 + \sqrt{77}}{2}, 20 - 2\sqrt{77}\right)$.

1.17 Les coordonnées (x, y) du point d'intersection de (d) et de $\mathscr{C}$ sont les solutions du système

$$\begin{cases} -x + y + 3 = 0 \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 = 25 \end{cases}.$$

Ce système est équivalent à $\begin{cases} y = x - 3 \\ (x-2)^2 + (x-3+1)^2 = 25 \end{cases}$, lui-même équivalent à $\begin{cases} y = x - 3 \\ 2x^2 - 8x - 17 = 0 \end{cases}$.

Les deux solutions des $2x^2 - 8x - 17 = 0$ sont $x_1 = \dfrac{4 - 5\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{4 + 5\sqrt{2}}{2}$. On obtient comme ordonnées correspondantes $y_1 = x_1 - 3 = \dfrac{-2 - 5\sqrt{2}}{2}$ et $y_2 = x_2 - 3 = \dfrac{-2 + 5\sqrt{2}}{2}$.

Les coordonnées des points d'intersection cherchés sont donc $\left(\dfrac{4 - 5\sqrt{2}}{2}, \dfrac{-2 - 5\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\left(\dfrac{4 + 5\sqrt{2}}{2}, \dfrac{-2 + 5\sqrt{2}}{2}\right)$.

....

1.18 a) On remplace x par a dans l'équation de (d), on obtient $\dfrac{1}{a^2+1}a + (a^2 - 1)y - 2 = 0$, ce qui donne $(a^2 - 1)y = 2 - \dfrac{a}{a^2+1}$. Si $a \neq \pm 1$, on obtient $y = \dfrac{2(a^2+1) - a}{(a^2-1)(a^2+1)} = \dfrac{2a^2 - a + 2}{a^4 - 1}$. Sinon, il n'y a pas de point d'abscisse a sur la droite.

....

1.18 b) On remplace y par $a - 1$ dans l'équation de (d) : $\dfrac{1}{a^2+1}x + (a^2 - 1)(a - 1) - 2 = 0$, ce qui donne $x = (2 - (a^2 - 1)(a - 1)) \times (a^2 + 1)$, c'est-à-dire $x = -a^5 + a^4 + 2a^2 + a + 1$.

....

1.19 a) Les droites (d_1) et (d_2) sont sécantes si, et seulement si, elles sont dirigées par des vecteurs non colinéaires.

Or, (d_1) est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix} 4(1-m) \\ m \end{pmatrix}$ et (d_2) par $\vec{v}\begin{pmatrix} -m \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ces deux vecteurs sont colinéaires si, et seulement si, $4(1 - m) \times 2 - (-m) \times m = 0$.

On obtient l'équation $m^2 - 8m + 8 = 0$ dont les deux solutions sont $m_1 = \dfrac{8 - \sqrt{32}}{2} = 4 - 2\sqrt{2}$ et $m_2 = 4 + 2\sqrt{2}$.

On en déduit que les droites (d_1) et (d_2) sont sécantes si, et seulement si, $m \neq 4 - 2\sqrt{2}$ et $m \neq 4 + 2\sqrt{2}$.

....

1.19 b) Dans les conditions précédentes, les coordonnées du point d'intersection des droites (d_1) et (d_2) sont les solutions du système $\begin{cases} mx + 4(m-1)y = -11 \\ 2x + my = -2 \end{cases}$.

Or, on a

$$\begin{cases} 2mx + 8(m-1)y = -22 \\ 2x = -my - 2 \end{cases} \iff \begin{cases} -m^2y - 2m + 8(m-1)y = -22 \\ x = -\dfrac{1}{2}my - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} (-m^2 + 8m - 8)y = -22 + 2m \\ x = -\dfrac{1}{2}my + 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = \dfrac{2m - 22}{-m^2 + 8m - 8} \\ x = \dfrac{m(11 - m)}{-m^2 + 8m - 8} - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \dfrac{22 - 2m}{m^2 - 8m + 8} \\ x = \dfrac{m^2 - 11m - m^2 + 8m - 8}{m^2 - 8m + 8} \end{cases}.$$

Le point d'intersection des deux droites a donc pour coordonnées $\left(\dfrac{-3m - 8}{m^2 - 8m + 8}, \dfrac{22 - 2m}{m^2 - 8m + 8}\right)$.

....

1.20 a) La fonction f est polynomiale, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on a $f'(x) = -6x + 2$.

La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse m a donc pour équation $y = (-6m+2)(x-m) - 3m^2 + 2m + 1$, c'est-à-dire $y = (-6m+2)x + 3m^2 + 1$.

1.20 b)

Cherchons maintenant l'éventuel point d'intersection de cette droite et de la droite (d).

La tangente est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -6m+2 \end{pmatrix}$, la droite (d) est dirigée par le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ces deux vecteurs sont colinéaires si, et seulement si, $-2(-6m+2) - 3 = 0 \iff 12m - 7 = 0 \iff m = \dfrac{7}{12}$.

Plaçons nous maintenant dans le cas où $m \neq \dfrac{7}{12}$. Les coordonnées (x, y) du point d'intersection de (d) et de la tangente sont les solutions du système

$$\begin{cases} y = (-6m+2)x + 3m^2 + 1 \\ 3x + 2y - 5 = 0 \end{cases}$$

Or, on a

$$\begin{cases} y = (-6m+2)x + 3m^2 + 1 \\ 3x + 2y - 5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = (-6m+2)x + 3m^2 + 1 \\ 3x + 2(-6m+2)x + 6x^2 + 2 - 5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = (-6m+2)x + 3m^2 + 1 \\ (-12m+7)x = -6m^2 + 3 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{-6m^2+3}{-12m+7} \\ y = (-6m+2) \times \dfrac{-6m^2+3}{-12m+7} + 3m^2 + 1 \end{cases}.$$

Les coordonnées du point d'intersection des deux droites sont donc $\left(\dfrac{-6m^2+3}{-12m+7}, \dfrac{9m^2 - 30m + 13}{-12m+7}\right)$.

Si $m = \dfrac{7}{12}$, les droites sont parallèles et donc n'ont pas de point d'intersection.

1.21 a) La droite $\mathsf{T}_{f,a}$ a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, c'est-à-dire $y = 6a(x-a) + 3a^2 + 5$.

1.21 b) La droite $\mathsf{T}_{g,-a}$ a pour équation $y = g'(-a)(x+a) + g(-a)$, c'est-à-dire $y = -4 \times (-a)(x+a) - 2a^2 + 3$.

1.21 c) L'abscisse du point d'intersection est solution de $-4 \times (-a)(x+a) - 2a^2 + 3 = 6a(x-a) + 3a^2 + 5$, ce qui donne si $a \neq 0, x = \dfrac{5a^2 - 2}{2a}$.

On obtient $y = 6a(x-a) + 3a^2 + 5 = 6a\left(\dfrac{5a^2-2}{2a} - a\right) + 3a^2 + 5 = 15a^2 - 6 - 6a^2 + 3a^2 + 5 = 12a^2 - 1$.

Le point d'intersection a donc pour coordonnées $\left(\dfrac{5a^2-2}{2a}, 12a^2 - 1\right)$.