# Cahier d'entraînement en physique-chimie

## Classes préparatoires de seconde année

Ce cahier d'entraînement a été écrit collectivement par des professeurs en classes préparatoires scientifiques.


**Coordination**

Colas Bardavid et Catherine Lavainne

**Équipe des participants**

Steve Arnefaux
Stéphane Bargot
Chloé Barraud
Fabien Baudribos
Laurent Beau
Julien Bellier
Lionel Beluze
Marc Beutier
Ariane Beyrath
Allan Bildé
Guillaume Blot-Teyssedre
Olivier Boinot-Turpault
Cécile Bonnand
Alexis Brès
Frederic Bruneau
Geoffroy Burgunder
Erwan Capitaine
Vincent Combette
Guillaume Davieau
Jean-Marie Delorme
Frédéric Desforges
Alexis Drouard
Hervé George
Florence Goutverg
Mathieu Hebding
Lucas Henry
Didier Hérisson
Fanny Jospitre
Joris Laleque
Catherine Lavainne
Alain Lombard
Louis Péault
Gwenaël Raillet
Mathieu Rigaut
Alain Robichon
Renaud Ruamps
Pierre-Simon Saulue
Théo Tassin
Étienne Thibierge
Delphine Viandier
Anthony Yip



Le pictogramme de l'horloge a été créé par Ralf Schmitzer (The Noun Project).
Le pictogramme du bulldozer a été créé par Ayub Irawan (The Noun Project).
Le pictogramme de la calculatrice a été créé par Sita Raisita (The Noun Project).

L'illustration de la couverture a été réalisée par Regolo Bizzi.

*Version 0.0.10 — 14 septembre 2024*

# Sommaire

*Mode d'emploi du cahier d'entraînement* . . . . . v

## Généralités

☐ fiche 1. Opérateurs vectoriels . . . . . 3

## Mécanique

☐ fiche 2. Changements de référentiel . . . . . 13

☐ fiche 3. Loi du frottement solide . . . . . 23

## Électromagnétisme en régime permanent

☐ fiche 4. Électrostatique . . . . . 31

☐ fiche 5. Magnétostatique . . . . . 44

## Électromagnétisme en régime variable

☐ fiche 6. Équations de Maxwell . . . . . 55

☐ fiche 7. Induction . . . . . 67

☐ fiche 8. Ferromagnétisme . . . . . 82

☐ fiche 9. Ondes électromagnétiques I . . . . . 88

☐ fiche 10. Ondes électromagnétiques II . . . . . 99

## Optique

☐ fiche 11. Modèle scalaire de la lumière . . . . . 107

☐ fiche 12. Interférences à deux ondes . . . . . 115

☐ fiche 13. Interférences à N ondes . . . . . 127

## Thermodynamique

☐ fiche 14. Outils mathématiques pour la diffusion . . . . . 139

☐ fiche 15. Diffusion particulaire . . . . . 143

☐ fiche 16. Diffusion thermique . . . . . 155

☐ fiche 17. Transferts thermiques . . . . . 172

☐ fiche 18. Tables et diagrammes thermodynamiques . . . 181
☐ fiche 19. Thermodynamique industrielle . . . 194

## Électronique

☐ fiche 20. Signaux . . . 204
☐ fiche 21. ALI . . . 216
☐ fiche 22. ALI saturé . . . 225
☐ fiche 23. Oscillateurs électroniques . . . 235
☐ fiche 24. Circuits logiques . . . 242

## Physique moderne

☐ fiche 25. Physique statistique . . . 249
☐ fiche 26. Physique quantique . . . 254
☐ fiche 27. Physique du laser . . . 263

## Conversion de puissance

☐ fiche 28. Puissance en régime sinusoïdal . . . 273
☐ fiche 29. Transformateurs . . . 282
☐ fiche 30. Conversion électro-magnéto-mécanique . . . 291
☐ fiche 31. Conversion électronique statique . . . 300

## Ondes

☐ fiche 32. Propagation des ondes et interfaces . . . 308
☐ fiche 33. Propagation des ondes et dispersion . . . 315

## Mécanique des fluides

☐ fiche 34. Cinématique des fluides . . . 323
☐ fiche 35. Dynamique des fluides (PSI) . . . 330
☐ fiche 36. Dynamique des fluides (PC) . . . 341
☐ fiche 37. Bilans en mécanique des fluides . . . 356

## Thermochimie

☐ fiche 38. Transformations chimiques . . . 365

## Électrochimie


☐ fiche 39. Courbes intensité-potentiel . . . . . 376

☐ fiche 40. Phénomène de corrosion . . . . . 383

☐ fiche 41. Piles et accumulateurs . . . . . 392

# Mode d'emploi

## Qu'est-ce que le cahier d'entraînement ?

Le *cahier d'entraînement en physique-chimie* est un outil destiné à renforcer l'acquisition de **réflexes utiles en physique et en chimie**.

*Il ne se substitue en aucun cas aux TD donnés par votre professeur* ; travailler avec ce cahier d'entraînement vous permettra en revanche d'aborder avec plus d'aisance les exercices de physique-chimie.

Pour donner une analogie, on pourrait dire que ce cahier d'entraînement est comparable aux **exercices de musculation** d'un athlète : ils sont nécessaires pour mieux réussir le jour J lors de la compétition, mais ils ne sont pas suffisants : un coureur de sprint fait de la musculation, mais il fait également tout un tas d'autres exercices.

Ce cahier a été conçu par une large équipe de professeurs en classes préparatoires, tous soucieux de vous apporter l'aide et les outils pour réussir.

## Comment est-il organisé ?

Le cahier est organisé en *fiches d'entraînement*, chacune correspondant à un thème issu de votre programme de deuxième année.

Chaque fiche est composée d'une suite de petits exercices, appelés *entraînements*, dont le temps de résolution estimé est indiqué par une (🕒), deux (🕒🕒), trois (🕒🕒🕒) ou quatre (🕒🕒🕒🕒) horloges.

## Les pictogrammes

Certains entraînements sont accompagnés d'un pictogramme.

Ces entraînements sont **basiques et transversaux**.

Les compétences qu'ils mettent en jeu ne sont pas forcément spécifiques au thème de la fiche et peuvent être transversales.

*Ce pictogramme a été choisi car le bulldozer permet de construire les fondations, et que c'est sur des fondations solides que l'on bâtit les plus beaux édifices. Ces entraînements sont donc le gage pour vous d'acquérir un socle solide de savoir-faire.*

Ces entraînements vous entraînent au **calcul à la main**.

Dans ces entraînements, les calculs doivent être faits **sans calculatrice**.

## Comment utiliser ce cahier ?

Le cahier d'entraînement ne doit pas remplacer vos TD. Il s'agit d'un outil à utiliser en complément de votre travail « normal » en physique (apprentissage du cours, recherche de TD, recherche des DM).

**Un travail personnalisé.**

Le cahier d'entraînement est prévu pour être **utilisé en autonomie**.

Choisissez vos entraînements en fonction des difficultés que vous rencontrez, des chapitres que vous étudiez, ou bien en fonction des conseils de votre professeur.

Ne cherchez pas à faire linéairement ce cahier : les fiches ne sont pas à faire dans l'ordre, mais en fonction des points que vous souhaitez travailler.

**Un travail régulier.**

Pratiquez l'entraînement à un rythme régulier : **une dizaine de minutes par jour** par exemple. Privilégiez un travail régulier sur le long terme plutôt qu'un objectif du type « faire dix fiches par jour pendant les vacances ».

**Un travail efficace.**

Utilisez les réponses et les corrigés de façon appropriée : il est important de chercher suffisamment par vous-même avant d'aller les regarder. Il faut vraiment **persévérer** dans votre raisonnement et vos calculs avant d'aller voir le corrigé si vous voulez que ces entraînements soient efficaces.

## Une erreur ? Une remarque ?

Si jamais vous voyez une erreur d'énoncé ou de corrigé, ou bien si vous avez une remarque à faire, n'hésitez pas à écrire à l'adresse `cahier.entrainement@gmail.com`.

Si vous pensez avoir décelé une erreur, merci de donner aussi l'identifiant de la fiche, écrit en gris en haut à gauche de chaque fiche.

# Énoncés

# Opérateurs vectoriels

**Prérequis**
Notation avec et sans le symbole nabla $\vec{\nabla}$ des opérateurs :

- gradient : $\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{\nabla} f$
- divergence : $\text{div}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$
- rotationnel : $\overrightarrow{\text{rot}}(f) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$

Expressions de ces opérateurs vectoriels en coordonnées cartésiennes.

Dans toute cette fiche, les grandeurs $a$, $b$ et $c$ sont des constantes ayant la dimension d'une longueur.

## Sur l'opérateur gradient

### Entraînement 1.1 — Quelle écriture pour le gradient ?

Le gradient est un opérateur vectoriel qui s'applique à des fonctions scalaires. Pour un système de coordonnées cartésiennes $(x, y, z)$ décrivant l'espace, la définition du gradient d'une fonction $f(x, y, z)$ est :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{\nabla}(f) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z}$$

On considère la fonction $V(x, y, z) = xyz$. Quelle est la bonne expression du gradient de $V$ ?

(a) $\nabla(V) = zy\,\vec{e_x} + zx\,\vec{e_y} + yx\,\vec{e_z}$

(b) $\text{grad}\left(\vec{V}\right) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ yz \end{pmatrix}$

(c) $\overrightarrow{\text{grad}}(V) = zy\,\vec{e_y} + zx\,\vec{e_x} + yx\,\vec{e_z}$

(d) $\vec{\nabla}(V) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$

.....

### Entraînement 1.2 — Calcul de gradients en coordonnées cartésiennes.

On munit l'espace d'un repère cartésien dont le système de coordonnées est noté $(x, y, z)$.

On rappelle l'expression de l'opérateur gradient dans ce système de coordonnées :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f(x, y, z)) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(xy + yz + zx + \dfrac{xyz}{a}\right)$ .....

b) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(3x^2 + 2a(y - z) + b^2\right)$ .....

c) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(x^2y + y^2z + z^2x + a^3\right)$ .....

d) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(2xy + 8a^2\mathrm{e}^{z/(2b)} - 6c^2\right)$ .....

e) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(8x^2y + \dfrac{6a^4}{y} - 5b^2z\right)$ .....

**Entraînement 1.3 — Calcul de gradients en coordonnées cylindriques.**

On munit l'espace d'un repère cylindrique dont le système de coordonnées est noté $(r, \theta, z)$.

On donne l'expression de l'opérateur gradient dans ce système de coordonnées :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f(r,\theta,z)) = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e_z}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(3z - \dfrac{r^2}{a} - 2r\theta\right)$ .....

b) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\dfrac{a^2}{r^2}\mathrm{e}^{5\theta}\right)$ .....

c) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\sqrt{r^2 - a^2}\right)$ .....

d) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(7\theta\left(\dfrac{r}{a}\right)^4 + \ln(z/b)\right)$ .....

e) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\dfrac{z}{r}\sin(\theta)\right)$ .....

**Entraînement 1.4 — La bonne formule.**

On introduit deux systèmes de coordonnées pour décrire un plan : des coordonnées cartésiennes $(x_1, x_2)$ et des coordonnées polaires $(\rho, \alpha)$.

Parmi les formules suivantes de gradient à deux dimensions d'une fonction scalaire $g$ du plan, identifier la seule écriture valable :

(a) $\overrightarrow{\text{grad}}(g(x_1,x_2)) = \dfrac{\partial g}{\partial x_1}\overrightarrow{e_{x_1}} + \dfrac{\partial g}{\partial x_2}\overrightarrow{e_{x_2}}$

(b) $\vec{\nabla} g(x_1,x_2) = \dfrac{\partial g}{\partial x_2}\overrightarrow{e_{x_1}} + \dfrac{\partial g}{\partial x_1}\overrightarrow{e_{x_1}}$

(c) $\overrightarrow{\text{grad}}(g(r,\alpha)) = \dfrac{\partial g}{\partial \rho}\overrightarrow{e_\rho} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \rho}\overrightarrow{e_\alpha}$

(d) $\vec{\nabla} \cdot g(r,\rho) = \dfrac{\partial g}{\partial \rho}\overrightarrow{e_\rho} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial g}{\partial \alpha}\overrightarrow{e_\alpha}$

.....

## Entraînement 1.5 — Valeurs et projections d'un gradient.

On munit l'espace d'un repère cartésien dont le système de coordonnées est noté $(x, y, z)$.

On donne l'expression de l'opérateur gradient dans ce système de coordonnées :

$$\vec{\nabla}(f(x,y,z)) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z}.$$

On considère la fonction $g(x,y,z) = (x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 - 1$, on note $\mathrm{M}(x,y,z)$ un point quelconque de l'espace et A le point de coordonnées $(-1, 1, 2)$.

a) Calculer $g(\mathrm{A})$ .....

b) La quantité $2z$ correspond à :

(a) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(g) \cdot \vec{e_x}$ (b) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(g) \cdot \vec{e_y}$ (c) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(g) \cdot \vec{e_z}$

.....

c) La quantité $2y + 2$ correspond à :

(a) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(g) \cdot \vec{e_x}$ (b) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(g) \cdot \vec{e_y}$ (c) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(g) \cdot \vec{e_z}$

.....

d) La quantité $2x - 4$ correspond à :

(a) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(g) \cdot \vec{e_x}$ (b) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(g) \cdot \vec{e_y}$ (c) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(g) \cdot \vec{e_z}$

.....

e) La quantité $\vec{\nabla} g(M)$ correspond au vecteur :

(a) $\begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y-1) \\ 2z \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2(y-1) \\ 2(x+2) \\ 2z \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y+1) \\ 2z \end{pmatrix}$

.....

f) Calculer $\left\| \vec{\nabla} g(\mathrm{A}) \right\|$ .....

## Entraînement 1.6 — Enquête sur une fonction.

On considère une fonction $f(x,y,z)$ inconnue telle que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = 2xy\vec{e_x} + x^2\vec{e_y} + a^2\vec{e_z}$.

a) Quelle est l'unique relation valable ?

(a) $\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 2xy$ (b) $\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = x^2$ (c) $\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = y$

.....

b) Quelle primitive est solution de la réponse précédente ?

(a) $f(x,y,z) = xy^2 + g(x,y)$ (b) $f(x,y,z) = x^2y + g(y,z)$ (c) $f(x,y,z) = x^2y + yx^2$

.....

c) Que vérifie la dérivée partielle par rapport à $y$ de la réponse précédente ?

(a) $\dfrac{\partial g}{\partial y} = 0$ (b) $\dfrac{\partial g}{\partial y} = x^2$ (c) $\dfrac{\partial g}{\partial y} = 1$

.....

d) En s'appuyant sur les réponses précédentes, quelle est la bonne expression de $g$ ?

(a) $g = a^2 y + \text{Cste}$ (b) $g = a^2 z + \text{Cste}$ (c) $g = a^2 + \text{Cste}$

.....

e) Quelle est l'expression de la fonction $f(x, y, z)$ telle que $f(0, 0, 0) = 0$ ?

(a) $f = x^2 y + a^2 z$ (b) $f = y^2 z + a^2 x$ (c) $f = x^2 z + a^2 y$

.....

## Sur l'opérateur divergence

**Entraînement 1.7 — Calcul de divergences en coordonnées cartésiennes.**

On munit l'espace d'un repère cartésien dont le système de coordonnées est noté $(x, y, z)$.

On donne l'expression de l'opérateur divergence dans ce système de coordonnées :

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\text{div}\left(3x^2\vec{e_x} + 2ay\vec{e_y} - 2bz\vec{e_z}\right)$ .....

b) $\text{div}\left(2xy\vec{e_y} + 8a^2 \mathrm{e}^{\frac{z}{2b}}\vec{e_z} - 6b^2\vec{e_x}\right)$ .....

c) $\text{div}\left(8x^2 y\vec{e_x} + \frac{6x^4}{y}\vec{e_y}\right)$ .....

d) $\text{div}(x\vec{e_z} + z\vec{e_x})$ .....

e) $\text{div}\left(x^2 y\vec{e_x} - yx^2(\vec{e_y} - \vec{e_z})\right)$ .....

**Entraînement 1.8 — Calcul de divergences en coordonnées cylindriques.**

On munit l'espace d'un repère cylindrique dont le système de coordonnées est noté $(r, \theta, z)$.

On donne l'expression de l'opérateur divergence dans ce système de coordonnées :

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\text{div}\left(-\frac{r^2}{a}\vec{e_r} - 2r\theta\vec{e}_\theta + 3z\vec{e}_z\right)$ .....

b) $\text{div}(r\vec{e}_\theta)$ .....

**Entraînement 1.9 — Bataille de divergences.**

Quel est le champ dont la divergence au point $A(-1,-1,1)$ est maximale ?

(a) $x^2\vec{e_x}+y^2\vec{e_y}+z^2\vec{e_z}$

(b) $y^2\vec{e_x}+x^2\vec{e_y}+z^2\vec{e_z}$

(c) $z^2\vec{e_x}+x^2\vec{e_y}+y^2\vec{e_z}$

(d) $y^2\vec{e_x}+x^2\vec{e_z}+z^2\vec{e_y}$

.....

**Entraînement 1.10 — Choix du système de coordonnées.**

On munit l'espace d'un système de coordonnées cartésiennes $(x,y,z)$ et d'un système de coordonnées sphériques $(r,\theta,\varphi)$. On s'intéresse au champ vectoriel $\overrightarrow{OM}=x\vec{e_x}+y\vec{e_y}+z\vec{e_z}=r\vec{e_r}$ et on donne l'expression de l'opérateur divergence en coordonnées sphériques :

$$\mathrm{div}(\vec{A})=\frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 A_r}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\mathrm{div}(x\vec{e_x}+y\vec{e_y}+z\vec{e_z})$ .....

b) $\mathrm{div}(r\vec{e_r})$ .....

On munit l'espace de dimension 2 d'un système de coordonnées cylindro-polaires $(r,\theta)$.

On s'intéresse au champ vectoriel $\overrightarrow{OM}=x\vec{e_x}+y\vec{e_y}=r\vec{e_r}$.

c) La divergence de ce champ en tout point vaut :

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

.....

## Sur l'opérateur rotationnel

**Entraînement 1.11 — Calcul de rotationnels en coordonnées cartésiennes.**

On munit l'espace d'un repère cartésien dont le système de coordonnées est noté $(x,y,z)$.

On donne l'expression de l'opérateur rotationnel dans ce système de coordonnées :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{A})=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e_x}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e_y}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e_z}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\big(3x^2\vec{e_x}+2by\vec{e_y}-2cz\vec{e_z}\big)$ .....

b) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\big(2xy\vec{e_x}+8c^2\mathrm{e}^{\frac{z}{2c}}\vec{e_y}-6c^2\vec{e_z}\big)$ .....

c) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(8x^2y\vec{e_x}+\frac{6x^4}{y}\vec{e_y}\right)$ .....

d) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(-x\vec{e_z}+z\vec{e_x})$ .....

e) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\big(x^2y\vec{e_x}-yx^2(\vec{e_y}-\vec{e_z})\big)$ .....

**Entraînement 1.12 — Calcul de rotationnels en coordonnées cylindriques.**

On munit l'espace d'un repère cylindrique dont le système de coordonnées est noté $(r, \theta, z)$.

On donne l'expression de l'opérateur divergence dans ce système de coordonnées :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{A}) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e_z}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(-\frac{r^2}{a}\vec{e_r} - 2r\theta\vec{e_\theta} + 3z\vec{e_z}\right)$ .....

b) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(r\vec{e_\theta})$ .....

## Sur la représentation graphique

**Entraînement 1.13 — Exploiter une carte de champ.**

On considère un champ $\vec{v}(\mathrm{M})$ dérivant d'un gradient de potentiel $\Phi$, c'est-à-dire tel qu'en tout point M :

$$\vec{v}(\mathrm{M}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \Phi(\mathrm{M})$$

La figure dessous représente les lignes de champ (en traits pleins) et les équipotentielles (en tirets). Le système est invariant par translation orthogonalement au plan de la figure. Les valeurs du potentiel $\Phi(\mathrm{M})$ sont données pour chaque équipotentielle en UA (unité arbitraire).

On admet que le champ est tel que $\mathrm{div}\ \vec{v} = \vec{0}$, c'est-à-dire à flux conservatif. Autrement dit, le long d'un tube de champ de section $S$ la quantité $vS$ est conservée.

a) Par rapport aux équipotentielles, les lignes de champ sont orientées :

(a) parallèlement (b) orthogonalement (c) aléatoirement

.....

b) Estimer graphiquement $v(\mathrm{C})$ en UA/m sachant que $\mathrm{AB} \approx 50\,\mathrm{cm}$ .....

c) Le vecteur $\vec{v}(\mathrm{C})$ est orienté dans le sens du vecteur :

(a) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ (b) $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$

.....

d) Estimer graphiquement $\dfrac{v(\mathrm{C})}{v(\mathrm{D})}$ en calculant un rapport de longueurs .....

## Sur les opérateurs Laplaciens

**Entraînement 1.14 — Opérateur Laplacien scalaire en coordonnées cartésiennes.**

On munit l'espace d'un repère cartésien dont le système de coordonnées est noté $(x, y, z)$.

On donne l'expression de l'opérateur laplacien (scalaire) dans ce système de coordonnées :

$$\Delta(f(x,y,z)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\Delta\left(\dfrac{x^2 y}{a} + bz + c^2\right)$ .....

b) $\Delta(y^2 - 5az)$ .....

c) $\Delta\left(b^2 \ln(\dfrac{z}{a}) + 3x^2\right)$ .....

**Entraînement 1.15 — Opérateur Laplacien vectoriel en coordonnées cartésiennes.**

On munit l'espace d'un repère cartésien dont le système de coordonnées est noté $(x, y, z)$.

On donne l'expression de l'opérateur laplacien (vectoriel) dans ce système de coordonnées :

$$\Delta(\vec{A}(x,y,z)) = \Delta A_x \vec{e_x} + \Delta A_y \vec{e_y} + \Delta A_z \vec{e_z}$$

On dispose d'un vecteur $\vec{A}$ dont les coordonnées cartésiennes sont les suivantes : $\begin{pmatrix} \dfrac{x^2 y}{a} + bz + c^2 \\ y^2 - 5az \\ b^2 \ln\left(\dfrac{z}{a}\right) + 3x^2 \end{pmatrix}$

Développer $\Delta\vec{A}$ .....

# Bilan sur les opérateurs

**Entraînement 1.16 — Scalaire ou vecteur ?**

Les différents opérateurs rencontrés peuvent être des opérateurs :

(a) scalaires s'appliquant à des scalaires
(b) scalaires s'appliquant à des vecteurs
(c) vectoriels s'appliquant à des scalaires
(d) vectoriels s'appliquant à des vecteurs

a) Quel cas correspond à l'opérateur « gradient » ? .....

b) Quel cas correspond à l'opérateur « divergence » ? .....

c) Quel cas correspond à l'opérateur « rotationnel » ? .....

d) Quel cas correspond à l'opérateur « laplacien »appliqué à un champ scalaire ? .....

e) Quel cas correspond à l'opérateur « laplacien »appliqué à un champ vectoriel ? .....

# Autres entraînements

**Entraînement 1.17 — Calcul de gradients en coordonnées sphériques.**

On munit l'espace d'un repère cylindrique dont le système de coordonnées est noté $(r, \theta, \varphi)$.

On donne l'expression de l'opérateur gradient dans ce système de coordonnées :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f(r,\theta,\varphi)) = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\overrightarrow{e_\varphi}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(r + 2a\theta + \dfrac{6b}{\varphi}\right)$ .....

b) $\overrightarrow{\text{grad}}\big((r\sin(\theta-\varphi))^3\big)$ .....

c) $\overrightarrow{\text{grad}}\big(r^2\sqrt{\varphi}\sin\theta\big)$ .....

d) $\overrightarrow{\text{grad}}(\tan(\theta))$ .....

**Entraînement 1.18 — Calcul de divergences en coordonnées sphériques.**

On munit l'espace d'un repère sphérique dont le système de coordonnées est noté $(r, \theta, \varphi)$.

On donne l'expression de l'opérateur divergence dans ce système de coordonnées :

$$\mathrm{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial(\sin(\theta)A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\mathrm{div}\left(r\vec{e_r} + 2a\sin\theta\vec{e_\theta} + \frac{6a}{\varphi}\vec{e_\varphi}\right)$ .....

b) $\mathrm{div}\left(r^2\sin(\theta)\sqrt{\varphi}(\vec{e_r} + \vec{e_\theta} + \vec{e_\varphi})\right)$ .....

c) $\mathrm{div}(r\vec{e_\theta})$ .....

**Entraînement 1.19 — Calcul de rotationnels en coordonnées sphériques.**

On munit l'espace d'un repère sphérique dont le système de coordonnées est noté $(r, \theta, \varphi)$.

On donne l'expression de l'opérateur divergence dans ce système de coordonnées :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{A}) = \frac{1}{r\sin(\theta)}\left(\frac{\partial(\sin(\theta)A_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{e_r} + \left(\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{e_\varphi}.$$

Développer les expressions suivantes :

a) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(r\vec{e_r} + 2a\theta\vec{e_\theta} + \frac{6b}{\varphi}\vec{e_\varphi}\right)$ .....

b) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(r^2\sin(\theta)\sqrt{\varphi}\vec{e_r}\right)$ .....

c) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(r\vec{e_\theta})$ .....

## Réponses mélangées

$-4c\mathrm{e}^{\frac{z}{2c}}\vec{e_x} - 2x\vec{e_z}$ (a) $\left(-\frac{2r}{a} - 2\right)\vec{e_r} - 2\vec{e}_\theta + 3\vec{e_z}$ (b) (a)

$-\frac{2a^2}{r^3}\mathrm{e}^{5\theta}\vec{e_r} + \frac{5a^2}{r^3}\mathrm{e}^{5\theta}\vec{e}_\theta$ $\frac{2y}{a}$ $4r\sin\theta\sqrt{\varphi} + 2r\cos\theta\sqrt{\varphi} + \frac{r}{2\sqrt{\varphi}}$ $2x + 4\frac{a^2}{b}\mathrm{e}^{\frac{z}{2b}}$

$\vec{e_r} + \frac{2a}{r}\vec{e_\theta} + \frac{-6b}{r\sin\theta\varphi^2}\vec{e_\varphi}$ 0,80 UA/m $\frac{6b}{r\varphi\tan\theta}\vec{e_r} - \frac{6b}{r\varphi}\vec{e_\theta} + \frac{2a\theta}{r}\vec{e_\varphi}$

$28\frac{\theta r^3}{a^4}\vec{e_r} + 7\frac{r^3}{a^4}\vec{e}_\theta + \frac{1}{z}\vec{e_z}$ (a) $\left(z + y + \frac{yz}{a}\right)\vec{e_x} + \left(x + z + \frac{xz}{a}\right)\vec{e_y} + \left(x + y + \frac{yx}{a}\right)\vec{e_z}$ $\vec{0}$ $2\vec{e_\varphi}$

$-4\theta\vec{e_z}$ $3r^2\begin{pmatrix}\sin^3(\theta-\varphi)\\ \cos(\theta-\varphi)\sin^2(\theta-\varphi)\\ -\frac{1}{\sin\theta}\cos(\theta-\varphi)\sin^2(\theta-\varphi)\end{pmatrix}$ 2 (b) (c) $-3\frac{r}{a} + 1$

(b) (c) $6x\vec{e_x} + 2a\vec{e_y} - 2a\vec{e_z}$ 0 $r\sqrt{\varphi}\begin{pmatrix}2\sin\theta\\ \cos\theta\\ \frac{1}{2\varphi}\end{pmatrix}$ (b) $\frac{8x^2}{y}(3x - y)\vec{e_z}$

$\begin{pmatrix}\frac{2y}{a}\\ 2\\ 6 - \frac{b^2}{z^2}\end{pmatrix}$ (b) (a) $-\frac{z\sin\theta}{r^2}\vec{e_r} + \frac{z\cos\theta}{r^2}\vec{e}_\theta + \frac{\sin\theta}{r}\vec{e_z}$ (a) 0

$2\vec{e_y}$ (b) $6 - \frac{b^2}{z^2}$ (a) $1/\tan(\theta)$ $\frac{r}{\sqrt{r^2 - a^2}}\vec{e_r}$ $6x + 2a - 2b$ 3

$2\vec{e_z}$ $x^2\vec{e_x} - 2xy(\vec{e_y} + \vec{e_z}) - x^2\vec{e_z}.$ 2 $16xy\vec{e_x} + \left(8x^2 - \frac{6a^4}{y^2}\right)\vec{e_y} - 5b^2\vec{e_z}$

$(2xy + z^2)\vec{e_x} + (2yz + x^2)\vec{e_y} + (2xz + y^2)\vec{e_z}$ (d) 3 $2\sqrt{17}$ (d) $x(2y - x)$

(d) (b) (c) $\frac{r}{2\sqrt{\varphi}}\vec{e_\theta} - r\sqrt{\varphi}\cos(\theta)\vec{e_\varphi}$ $3 + \frac{4a\cos\theta}{r} - \frac{6}{\varphi^2\sin\theta}\frac{a}{r}$

$\frac{1}{r\cos^2\theta}\vec{e_\theta}$ (a) $2y\vec{e_x} + 2x\vec{e_y} + 4\frac{a^2}{b}\mathrm{e}^{z/(2b)}\vec{e_z}$ 16 $16xy - \frac{6x^4}{y^2}$

► Réponses et corrigés page 402

# Changements de référentiel

**Prérequis**
Principe fondamental. Mouvement relatif de référentiels. Forces d'inertie.

**Constantes utiles**
→ Accélération de la pesanteur : $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$

## Avant toute chose

### Entraînement 2.1 — Trajectoires et référentiels.

On s'intéresse ici au mouvement de la valve V d'une roue de vélo. En changeant de référentiel, la trajectoire de ce point peut être perçue de manière différente.

On définit trois référentiels :

- le référentiel $\mathcal{R}_1$ lié à la Terre,
- le référentiel $\mathcal{R}_2$ lié au cadre du vélo,
- le référentiel $\mathcal{R}_3$ lié à la roue du vélo.

Voici différentes trajectoires pour le point V.

Parmi les quatre trajectoires présentées ci-dessus, quelle est celle qui peut correspondre à un mouvement décrit dans :

a) le référentiel $\mathcal{R}_1$ ? .....

b) le référentiel $\mathcal{R}_2$ ? .....

c) le référentiel $\mathcal{R}_3$ ? .....

**Entraînement 2.2 — Référentiel galiléen... ou pas (I) ?**

Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel tout solide ne subissant aucune force extérieure est immobile ou animé d'un mouvement rectiligne uniforme. Tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est lui-même galiléen.

On considère un référentiel $\mathcal{R}_0(\mathrm{O}, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ galiléen ainsi que les trois référentiels suivants :

- $\mathcal{R}_1(\mathrm{O}', \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$, en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}_0$.
- $\mathcal{R}_2(\mathrm{O}, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$, animé d'un mouvement de rotation uniforme par rapport à $\mathcal{R}_0$.
- $\mathcal{R}_3(\mathrm{A}, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$, en translation non uniforme par rapport à $\mathcal{R}_0$.

a) $\mathcal{R}_1$ est un référentiel galiléen : vrai ou faux ? .....

b) $\mathcal{R}_2$ est un référentiel galiléen : vrai ou faux ? .....

c) $\mathcal{R}_3$ est un référentiel galiléen : vrai ou faux ? .....

**Entraînement 2.3 — Référentiel galiléen... ou pas (II) ?**

Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel tout solide ne subissant aucune force extérieure est animé d'un mouvement rectiligne uniforme. Tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est lui-même galiléen.

Dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, on s'intéresse aux mouvements d'un train et de l'un des passagers à bord. On note $\mathcal{R}_\mathrm{t}$ le référentiel lié au train et $\mathcal{R}_\mathrm{p}$ le référentiel lié au passager à bord du train.

Dans chacune des situations proposées, indiquez quel(s) est (sont) le(s) référentiel(s) galiléen(s) parmi les options suivantes :

(a) $\mathcal{R}_\mathrm{t}$ et $\mathcal{R}_\mathrm{p}$
(b) ni $\mathcal{R}_\mathrm{t}$ ni $\mathcal{R}_\mathrm{p}$
(c) uniquement $\mathcal{R}_\mathrm{t}$
(d) uniquement $\mathcal{R}_\mathrm{p}$

a) Le train suit une ligne droite à vitesse constante ; le passager est assis sur son siège.

.....

b) Le train suit une courbe à vitesse constante ; le passager est assis sur son siège.

.....

c) Le train freine sur une ligne droite ; le passager marche le long du train à vitesse constante.

.....

d) Le train suit une courbe à vitesse constante ; le passager marche le long du train.

.....

# Composition de mouvements

**Entraînement 2.4 — Autour de l'accélération.**

On considère un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen lié au repère $(\mathrm{O}, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ et un référentiel $\mathcal{R}'$, lié au repère cylindrique $(\mathrm{O}, \vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$. Un point M, en mouvement dans ces deux référentiels, est repéré par ses coordonnées cylindriques habituelles $r$, $\theta$ et $z = 0$. L'angle $\theta$ suit la loi : $\theta = \omega t$ où $\omega$ est une constante.

**• Caractérisation du mouvement de $\mathcal{R}'$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$**

a) Le vecteur rotation du référentiel $\mathcal{R}'$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ vaut $\vec{\Omega}$ :

(a) $\theta\vec{e_z}$ (b) $-\dot{\theta}\vec{e_x}$ (c) $\omega\vec{e_z}$ (d) $\dot{\omega}\vec{e_z}$

b) Le référentiel $\mathcal{R}'$ est galiléen.

(a) Vrai (b) Faux

**• Composantes de l'accélération de M dans le référentiel $\mathcal{R}$**

c) Par homogénéité, identifier l'expression de l'accélération radiale $a_r$ de M dans $\mathcal{R}$ en coordonnées cylindriques.

(a) $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ (b) $\dot{r} - r^2\dot{\theta}$ (c) $\ddot{r} - r^2\dot{\theta}^2$ (d) $\ddot{r} - r^2\dot{\theta}$

d) Par homogénéité, identifier l'expression de l'accélération orthoradiale $a_\theta$ de M dans $\mathcal{R}$ en coordonnées cylindriques.

(a) $2\dot{r}\dot{\theta} + r\dot{\theta}$ (b) $2\ddot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$ (c) $2\dot{r}\ddot{\theta} + r\ddot{\theta}$ (d) $2\dot{r}\dot{\theta}$

**• Composition des accélérations**

La loi de composition des accélérations assure que :

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(\mathrm{M}) = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(\mathrm{M}) + \vec{a_\mathrm{e}} + \vec{a_\mathrm{C}}$$

avec $\vec{a}_{\mathcal{R}}(\mathrm{M}) = \left.\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{\mathcal{R}}$, $\vec{a}_{\mathcal{R}'}(\mathrm{M}) = \left.\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{\mathcal{R}'}$, et comme $\mathcal{R}'$ est en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à $\mathcal{R}$,

$$\vec{a_\mathrm{e}} = \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right) \quad \text{et} \quad \vec{a_\mathrm{C}} = 2\vec{\Omega} \wedge \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'}$$

e) Exprimer $\vec{a_\mathrm{e}}$ en fonction de $r$, $\omega$ et d'un vecteur unitaire de la base cylindrique ..

f) Exprimer $\vec{a_\mathrm{C}}$ en fonction de $\dot{r}$, $\omega$ et d'un vecteur unitaire de la base cylindrique ..

g) En déduire l'accélération $\vec{a}_{\mathcal{R}'}(\mathrm{M})$ .....

# Forces d'inertie

**Entraînement 2.5 — Forces d'inertie à prendre en compte.**

Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_t$ est considéré galiléen. On considère l'étude d'une masse ponctuelle M dont on observe le mouvement dans différents référentiels $\mathcal{R}_i$ en mouvement par rapport à $\mathcal{R}_t$.

On définit les quatre référentiels suivants :

- $\mathcal{R}_1$ lié à un manège en rotation uniforme autour d'un axe fixe dans $\mathcal{R}_t$,
- $\mathcal{R}_2$ lié à un paquebot en mouvement rectiligne uniforme dans $\mathcal{R}_t$,
- $\mathcal{R}_3$ lié à un train en phase de décélération uniforme en ligne droite dans $\mathcal{R}_t$.
- $\mathcal{R}_4$ lié à une caisse en chute libre dans $\mathcal{R}_t$.

L'étude du mouvement de M dans ces référentiels $\mathcal{R}_i$ amène à envisager de prendre en compte des forces d'inertie :

(a) force d'inertie d'entraînement centrifuge quand $\mathcal{R}_i$ est en rotation dans $\mathcal{R}_t$

(b) force d'inertie de Coriolis

(c) force d'inertie d'entraînement quand $\mathcal{R}_i$ est en translation rectiligne dans $\mathcal{R}_t$

(d) aucune force d'inertie

Déterminer les forces d'inertie à prendre en compte dans les situations suivantes :

a) M est immobile dans $\mathcal{R}_1$ .....

b) M est en mouvement dans $\mathcal{R}_1$ ..

c) M est en mouvement dans $\mathcal{R}_2$ ..

d) M est en mouvement dans $\mathcal{R}_3$ ..

e) M est fixe dans $\mathcal{R}_3$ .....

f) M est en mouvement dans $\mathcal{R}_4$ ..

**Entraînement 2.6 — Force d'inertie centrifuge.**

Un point M de masse $m$ est animé d'une vitesse $\vec{v}(\mathrm{M}) = v\vec{e_\theta}$ dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_0$ lié au repère $(\mathrm{O}, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$. On étudie le mouvement de M dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}_1$ en rotation par rapport à $\mathcal{R}_0$ caractérisée par le vecteur rotation instantanée $\vec{\omega}$.

Une force d'inertie d'entrainement, ici centrifuge, s'exerce sur le point M : $\vec{f_{\mathrm{ie}}} = m\omega^2\overrightarrow{\mathrm{HM}}$, où H est le projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation. La distance OM vaut $\ell$.

Déterminer, dans la base $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$, l'expression de la force d'inertie centrifuge dans les situations suivantes.

a) $\vec{\omega} = \omega_0\vec{e_z}$ et le point M est placé sur l'axe $(\mathrm{O}z)$ .....

b) $\vec{\omega} = \omega_0\vec{e_z}$ et le point M possède les coordonnées cylindriques $(\ell,0,0)$ ...

c) $\vec{\omega} = \omega_0\vec{e_z}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ est incliné de $\dfrac{\pi}{3}$ par rapport à $(\mathrm{O}z)$. .....

## Entraînement 2.7 — Force de Coriolis.

L'étude du mouvement d'un point M est réalisée dans un référentiel non galiléen $\mathcal{R}_1$, en rotation uniforme autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_0$.

Ce point matériel M de masse $m$ possède un vecteur vitesse $\vec{v} = v_1\vec{e_x}$ dans $\mathcal{R}_1$, quand il passe en O. Le vecteur rotation de $\mathcal{R}_1$ par rapport à $\mathcal{R}_0$ vaut $\vec{\Omega} = \Omega_0(\vec{e_y} + \vec{e_z})$.

On rappelle l'expression de la force d'inertie de Coriolis : $\overrightarrow{f_{\text{iC}}} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$.

La force de Coriolis subie par le point M en O vaut :

(a) $\overrightarrow{f_{\text{iC}}} = 2mv_1\Omega_0(-\vec{e_y} - \vec{e_z})$

(b) $\overrightarrow{f_{\text{iC}}} = 2mv_1\Omega_0(\vec{e_y} + \vec{e_z})$

(c) $\overrightarrow{f_{\text{iC}}} = 2mv_1\Omega_0(-\vec{e_y} + \vec{e_z})$

(d) $\overrightarrow{f_{\text{iC}}} = 2mv_1\Omega_0(\vec{e_y} - \vec{e_z})$

.....

## Entraînement 2.8 — Forces de Coriolis (II).

Un point M de masse $m$ est animé d'une vitesse $\vec{v}(\text{M})$ dans un référentiel non galiléen $\mathcal{R}$ en rotation par rapport à un référentiel galiléen $\mathcal{R}_0$. Le vecteur rotation de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{R}_0$ est noté $\vec{\omega}$.

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'expression de la force de Coriolis définie par $\overrightarrow{f_{\text{iC}}} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}(\text{M})$).

**• Premier cas : on étudie le mouvement de M dans la base cartésienne.**

a) $\vec{v}(\text{M}) = v_1\vec{e_y}$ et $\vec{\omega} = \omega_0\vec{e_z}$ .....

b) $\vec{v}(\text{M}) = v_1\vec{e_y} + v_2\vec{e_z}$ et $\vec{\omega} = \omega_0\vec{e_x}$ .....

**• Deuxième cas : on étudie le mouvement de M dans la base cylindrique.**

c) $\vec{v}(\text{M}) = v_1\vec{e_r}$ et $\vec{\omega} = \omega_0\vec{e_z}$ .....

d) $\vec{v}(\text{M}) = v_1\vec{e_\theta} + v_2\vec{e}_z$ et $\vec{\omega} = \omega_0\vec{e_z}$ .....

**Entraînement 2.9 — Force de Coriolis dans le référentiel terrestre.**

On s'intéresse au référentiel terrestre $\mathcal{R}_\mathrm{t}$, lié au repère $(\mathrm{A}, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$. Ce référentiel est en rotation autour de l'axe $(\mathrm{O}, Z)$ par rapport au référentiel géocentrique $\mathcal{R}_\mathrm{g}$, supposé galiléen. Le mouvement de rotation de $\mathcal{R}_\mathrm{t}$ par rapport à $\mathcal{R}_\mathrm{g}$ est caractérisé par le vecteur rotation $\vec{\Omega} = \Omega\vec{e_z}$.

Le point A est repéré par sa latitude $\lambda$.

Ces référentiels sont représentés ci-dessous.

a) Quelle est la valeur numérique de $\Omega$ ?

(a) $2{,}6 \times 10^{-2}\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$

(b) $1{,}7 \times 10^{-3}\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$

(c) $7{,}3 \times 10^{-5}\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$

.....

b) Parmi les projections du vecteur $\vec{\Omega}$ dans la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$, laquelle est correcte ?

(a) $\Omega \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\lambda \\ \cos\lambda \end{pmatrix}$

(b) $\Omega \begin{pmatrix} \cos\lambda \\ 0 \\ \sin\lambda \end{pmatrix}$

(c) $\Omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\lambda \\ \sin\lambda \end{pmatrix}$

.....

On s'intéresse au mouvement d'un point M de masse $m$ dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_\mathrm{t}$ ; on suppose qu'il est animé d'une vitesse $\vec{v}(M) = \dot{z}\vec{e_z}$.

*On rappelle l'expression de la force de Coriolis subie par* M *dans* $\mathcal{R}_\mathrm{t}$ *:*

$$\overrightarrow{f_{iC}} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(\mathrm{M}).$$

c) Exprimer $\overrightarrow{f_{\mathrm{iC}}}$ en fonction de $m$, $\Omega$, $\dot{z}$ et d'un vecteur de la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$.

.....

# Dynamique

**Entraînement 2.10 — Pendule en rotation.**

On s'intéresse à un pendule composé d'une tige (masse négligeable, longueur $\ell = 1{,}0\,\mathrm{m}$) et d'une bille placée en M de masse $m$. Ce pendule est fixé en O à un axe vertical en rotation uniforme à la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega\vec{e_z}$. Sous l'action de la rotation, le pendule s'incline d'un angle $\alpha$ par rapport à la verticale tout en restant dans le plan $(\mathrm{O}, \vec{e_r}, \vec{e_z})$.

On rappelle que la force d'inertie centrifuge vaut

$$\vec{f_{\mathrm{ie}}} = m\omega^2\,\overrightarrow{\mathrm{HM}},$$

où H est le projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation.

a) La force centrifuge subie par le M vaut :

(a) $\vec{f_{\mathrm{ie}}} = -m\omega^2\overrightarrow{\mathrm{OM}}$

(b) $\vec{f_{\mathrm{ie}}} = m\omega^2\ell\sin(\alpha)\vec{e}_z$

(c) $\vec{f_{\mathrm{ie}}} = m\omega^2\ell\sin(\alpha)\vec{e}_r$

(d) $\vec{f_{\mathrm{ie}}} = -m\omega^2\ell\vec{e_\theta}$

.....

b) Par homogénéité, déterminer la relation qui lie $\omega$ et $\alpha$ :

(a) $\omega = \dfrac{\ell}{g\sqrt{\cos\alpha}}$

(b) $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{\ell\cos\alpha}}$

(c) $\omega = \dfrac{g}{\ell}\sqrt{\cos\alpha}$

(d) $\omega = \sqrt{\dfrac{\ell}{g}\cos\alpha}$

.....

c) Déterminer pour quelle valeur de la vitesse angulaire $\omega$ l'angle $\alpha$ vaut 45° .....

## Entraînement 2.11 — Un pendule sur une voiture.

On s'intéresse à un pendule de masse $m = 5\,\mathrm{g}$ suspendu au rétroviseur d'une voiture animée pour $t < 0$ d'une vitesse $\vec{v} = v_0\vec{e_x}$ constante dans le référentiel terrestre (galiléen) $\mathcal{R}_0(\mathrm{O}, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$.

À $t = 0$, le véhicule accélère avec une accélération $\vec{a} = a\vec{e_x}$ constante, avec $a = 5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$.

L'étude du mouvement du pendule est menée dans le référentiel $\mathcal{R}_1$ lié à la voiture.

On rappelle que la force d'inertie d'entraînement vaut $\vec{f_{\mathrm{ie}}} = -m\vec{a_{\mathrm{e}}}$. Sous l'action de cette force, le pendule se stabilise pour une valeur particulière de l'angle $\theta$ notée $\theta_{\mathrm{e}}$.

a) Déterminer $\dfrac{f_{\mathrm{ie}}}{P}$, le rapport de la norme de $\vec{f_{\mathrm{ie}}}$ sur celle du poids .....

b) La force d'inertie d'entrainement est négligeable devant le poids.

(a) vrai (b) faux

.....

c) Décomposer le vecteur $\vec{P}$ dans la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$ .....

d) Décomposer le vecteur $\vec{T}$ dans la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$ .....

e) Décomposer le vecteur $\vec{f_{\mathrm{ie}}}$ dans la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$ .....

f) Parmi les quatre expressions du principe fondamental appliqué à la bille, dans le référentiel de la voiture, laquelle est juste ?

(a) $m\left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_1} = \vec{P} + \vec{T}$

(b) $m\left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_1} + \vec{f_{\mathrm{ie}}} = \vec{P} + \vec{T}$

(c) $m\left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_1} = \vec{P} + \vec{T} + m\vec{a}$

(d) $m\left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_1} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{f_{\mathrm{ie}}}$

.....

g) L'application du principe fondamental permet d'exprimer la position d'équilibre du pendule. Parmi les trois propositions, laquelle est homogène ?

(a) $\tan(\theta_{\mathrm{e}}) = \dfrac{g}{ma}$ (b) $\tan(\theta_{\mathrm{e}}) = \dfrac{a}{g}$ (c) $\tan(\theta_{\mathrm{e}}) = mag$

.....

h) Grâce à la relation trouvée à la question précédente, calculer $\theta_{\mathrm{e}}$ en degrés .....

**Entraînement 2.12 — Palet sur un disque en rotation.**

Un disque horizontal de centre O tourne autour de son axe (O$z$) à vitesse angulaire constante $\vec{\omega} = \omega\vec{e_z}$.

Un palet (assimilable à un point matériel de masse $m$) est posé en un point A du disque, à une distance OA $= d$. On rappelle la force d'inertie centrifuge : $m\omega^2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$.

a) Quelle est l'orientation de la force centrifuge ?

(a) $-\vec{e}_\theta$ (b) $\vec{e}_r$ (c) $-\vec{e}_r$ (d) $\vec{e}_\theta$

.....

b) Sans frottement entre le disque et le palet, quel mouvement du palet peut-on prévoir ?

(a) Le palet se rapproche inexorablement du centre du disque.

(b) Le palet reste immobile dans le référentiel du disque.

(c) Le palet est expulsé radialement du disque.

.....

Il existe une force de frottement telle que le palet reste immobile tant que la norme de la force d'inertie centrifuge est inférieure à $\mu mg$.

c) Déterminer l'expression de la valeur limite $\omega_{\max}$ de la vitesse angulaire en-deçà de laquelle le palet reste immobile.

.....

d) Calculer $\omega_{\max}$ sachant que $d = 5\,\mathrm{cm}$, $m = 150\,\mathrm{g}$ et $\mu = 0{,}5$ .....

**Entraînement 2.13 — Anneau sur tige en rotation.**

On s'intéresse dans cet entraînement au mouvement d'un anneau de masse $m$ placé sur une tige en rotation à la vitesse angulaire $\omega$. Cet anneau subit aussi une force de rappel exercée par un ressort de raideur $k$ fixé sur l'axe de rotation. L'abscisse $x$ de l'anneau sur la tige satisfait l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)x = 0$$

a) Quelle est la dimension du terme $\dfrac{k}{m}$ ? .....

On propose les solutions suivantes pour $x(t)$, dans lesquelles $A$, $\Omega$, $\varphi$ et $\beta$ sont des constantes.

(a) $x(t) = A\cos(\Omega t + \varphi)$

(b) $x(t) = A\cosh(\Omega t + \varphi)$

(c) $x(t) = A\mathrm{e}^{-\beta t}\cos(\Omega t + \varphi)$

b) Quelle est la forme des solutions si $\omega^2 > \dfrac{k}{m}$ ? .....

c) Quelle est la forme des solutions si $\omega^2 < \dfrac{k}{m}$ ? .....

d) On pose $\Omega^2 = \dfrac{k}{m} - \omega^2 > 0$. Expliciter la solution dans le cas où $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = v_0$.

.....

e) Parmi les trois solutions représentées sur les graphiques ci-dessous, laquelle correspond à la situation de la question b).

.....

**Réponses mélangées**

c $\quad \sqrt{\dfrac{\mu g}{d}} \quad$ d $\quad \dfrac{m\omega_0^2 \ell \vec{e_r}}{2} \quad$ b $\quad$ b $\quad$ a $\quad$ d $\quad T^{-2} \quad$ d

c $\quad$ a $\quad 10\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1} \quad T\sin(\theta_\mathrm{e})\vec{e_x} + T\cos(\theta_\mathrm{e})\vec{e_y} \quad -ma\vec{e_x} \quad 2m\omega_0 v_1 \vec{e}_r \quad \ddot{r}\vec{e_r}$

b $\quad$ c $\quad$ d $\quad$ b $\quad$ c $\quad$ c $\quad -mg\vec{e_y} \quad$ c $\quad -\omega^2 r\vec{e_r} \quad$ c

$-2m\omega_0 v_1 \vec{e_\theta} \quad$ b $\quad 2\omega\dot{r}\vec{e_\theta} \quad$ b $\quad -2m\Omega\dot{z}\cos\lambda\,\vec{e}_x \quad$ c $\quad$ a $\quad m\omega_0^2 \ell \vec{e_r}$

b $\quad 2m\omega_0(v_2\vec{e_y} - v_1\vec{e_z}) \quad$ c $\quad \dfrac{v_0}{\Omega}\sin(\Omega t) \quad$ b $\quad$ a et b $\quad$ b $\quad 27° \quad$ a

b $\quad 0{,}5 \quad$ c $\quad$ Faux $\quad \vec{0} \quad$ a $\quad$ Faux $\quad 2m\omega_0 v_1 \vec{e_x} \quad$ Vrai $\quad 3{,}8\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

► Réponses et corrigés page 411

# Loi du frottement solide

## Avant toute chose

**Entraînement 3.1 — Les mots justes.**

Pour chacune des situations exposées, indiquer si entre les deux solides en jeu il y a :

(a) adhérence (b) roulement (c) glissement

a) Une brosse est frottée contre un tableau à feutre pour l'effacer .....

b) Une roue d'un vélo qui se déplace en ligne droite sur une route .....

c) Une roue d'une voiture qui dérape dans un virage sur lequel elle s'engage trop vite .....

d) Un livre est posé sur le tapis roulant d'une caisse de supermarché .....

## Vitesse de glissement

**Entraînement 3.2 — Bagages sur un tapis roulant.**

Étudions l'évolution de différents bagages placés sur un tapis roulant dans le référentiel $\mathcal{R}_0$ lié au sol. La vitesse du tapis roulant s'écrit :

$$\vec{v}(\text{tapis})_{\mathcal{R}_0} = v_0\,\vec{u}_x \quad \text{avec} \quad v_0 = 3{,}6\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}.$$

La vitesse et la quantité de mouvement des différents bagages en translation sur ce tapis s'écrivent :

$$\vec{v}(\text{bagage})_{\mathcal{R}_0} = v_1\overrightarrow{u_x}\ ;$$

$$\vec{p}(\text{bagage})_{\mathcal{R}_0} = p_1\overrightarrow{u_x}.$$

Rappelons la définition de la vitesse de glissement à l'instant $t$ d'un bagage sur le tapis :

$$\vec{v}_{\text{glissement}}(\text{bagage/tapis}) = (v_1 - v_0)\overrightarrow{u_x}.$$

Les affirmations suivantes sont-elles « vraies » ou « fausses » ?

a) La valise de Sam ($m = 20\,\text{kg}$ et $v_1 = 1\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) glisse sur le tapis roulant .....

b) La valise de Paul ($m = 15\,\text{kg}$ et $p_1 = 8{,}0\,\text{N}\cdot\text{s}$) glisse sur le tapis roulant .....

c) Le sac d'Assia ($m = 8\,\text{kg}$ et $v_1 = -1{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) ne glisse pas sur le tapis roulant .....

# Phase d'adhérence et limite de glissement

**Entraînement 3.3 — La bonne relation.**

Un solide immobile sur le sol parfaitement horizontal subit une force de tangentielle (colinéaire à l'axe (O$x$)) lui permettant d'être à la limite de glissement. Ainsi, nous pouvons écrire la relation suivante :

$$\left\|\overrightarrow{R_\mathrm{T}}\right\| = \mu_\mathrm{s}\left\|\overrightarrow{R_\mathrm{N}}\right\|.$$

Le bilan des forces sur ce solide conduit à considérer le poids du solide $\vec{P}$, la réaction normale du sol sur le solide $\vec{R}_\mathrm{N}$, la réaction tangentielle du sol sur le solide $\vec{R}_\mathrm{T}$ et la force de tangentielle $\vec{F}$. La situation est représentée sur le schéma ci-dessous.

Sachant que le solide est de masse $m = 1\,\mathrm{kg}$, que l'intensité de pesanteur vaut $g = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, que le coefficient de frottement statique vaut $\mu_\mathrm{s} = 0{,}5$, identifier la seule relation correcte.

(a) $\overrightarrow{R_\mathrm{T}} \cdot \overrightarrow{e_x} = -5\,\mathrm{N}$

(b) $\overrightarrow{R_\mathrm{N}} \cdot \overrightarrow{e_y} = 5\,\mathrm{N}$

(c) $\vec{F} \cdot \overrightarrow{e_y} = 10\,\mathrm{N}$

(d) $\overrightarrow{R_\mathrm{T}} \cdot \overrightarrow{e_x} = -10\,\mathrm{N}$

.....

**Entraînement 3.4 — Quelle force appliquer ?**

Un solide de masse $m = 350\,\mathrm{g}$ est placé sur un plan incliné faisant un angle $\alpha = 20\,°$ par rapport au plan horizontal.
La force $\vec{F} = F \cdot \overrightarrow{e_x}$ permet de maintenir le solide à la limite de glissement vers le haut. Ainsi, nous pouvons écrire la relation suivante :

$$\left\|\overrightarrow{R_\mathrm{T}}\right\| = \mu_\mathrm{s}\left\|\overrightarrow{R_\mathrm{N}}\right\|$$

avec le coefficient de frottement statique $\mu_\mathrm{s} = 0{,}5$ et $\vec{R} = -R_\mathrm{T}\overrightarrow{e_x} + R_\mathrm{N}\overrightarrow{e_y}$ ($R_\mathrm{T} > 0$ et $R_\mathrm{N} > 0$).

On prend $g = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

a) Quelle est l'expression de $F$ ?

(a) $mg\cos(\alpha)(1 - \mu_\mathrm{s}\tan(\alpha))$

(b) $mg\cos(\alpha)(\tan(\alpha) - \mu_\mathrm{s})$

(c) $mg\cos(\alpha)(1 + \mu_\mathrm{s}\tan(\alpha))$

(d) $mg\cos(\alpha)(\mu_\mathrm{s} + \tan(\alpha))$

.....

b) Calculer $F$ .....

### Entraînement 3.5 — Fixe ou mobile ?

Un cube de masse $m = 200\,\text{g}$ est posé sur un table fixe dans le référentiel d'étude. Un opérateur exerce une action mécanique sur ce dernier afin de le mettre en mouvement.

Y parviendra-t-il ?

Afin de répondre à cette question, nous allons seulement exprimer la force de réaction modélisant l'action de la table sur le cube :

$$\vec{R} = \vec{T} + \vec{N} = T\,\vec{e_x} + N\,\vec{e_z}$$

D'après la loi de Coulomb, le cube ne glissera pas sur son support si :

$$\left\|\vec{T}\right\| < \mu_\text{s}\left\|\vec{N}\right\|$$

avec $\mu_\text{s} = 0{,}6$ le coefficient statique de frottement.
Des mesures donnent $\left\|\vec{R}\right\| = 3{,}5\,\text{N}$ avec $\alpha = 25°$.

a) Calculer la composante tangentielle $T$ de $\vec{R}$ .....

b) Calculer la composante normale $N$ de $\vec{R}$ .....

c) Vrai ou Faux : Le cube glisse sur la table .....

### Entraînement 3.6 — Cône de frottement.

L'ouverture du cône de frottement d'un contact solide/solide, noté $\alpha$, dépend du coefficient de frottement statique $\mu_\text{s}$ et des normes maximales $R_\text{N}$ et $R_\text{T}$ des réactions normale et tangentielle où aucun glissement ne se produit. La relation exacte est la suivante :

$$\mu_\text{s} = \tan(\alpha) = \frac{R_\text{T}}{R_\text{N}}.$$

On considère différents couples de solides et pour chaque couple on mesure une grandeur différente. Quelle est la situation de plus grande ouverture de cône de frottement ?

(a) $R_\text{N} = 2R_\text{T}$

(b) $\alpha = 30°$

(c) $\mu_\text{s} = 0{,}8$

(d) $2\alpha = \dfrac{\pi}{4}$

.....

# Phase de glissement

**Entraînement 3.7 — Une luge tractée (I).**

Un enfant assis dans une luge est tracté par un adulte. L'ensemble {enfant + luge} de masse $m$ évolue suivant la direction (O$x$) et est soumis à l'ensemble des forces représentées sur le schéma ci-contre.

Comment écrire la réaction $\vec{R}$ totale du sol sur la luge ?

(a) $\vec{R} = \vec{N}$

(b) $\vec{R} = \vec{T}$

(c) $\vec{R} = \vec{N} - \vec{T}$

(d) $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$

.....

**Entraînement 3.8 — Une luge tractée (II).**

Un enfant assis dans une luge est tracté par un adulte. L'ensemble {enfant + luge} de masse $m$ évolue suivant la direction (O$x$) et est soumis à l'ensemble des forces représentées sur le schéma ci-contre.
Comme la luge glisse sur la neige, la loi de Coulomb impose :

$$\left\|\vec{T}\right\| = f_\mathrm{d}\left\|\vec{N}\right\|$$

avec $f_\mathrm{d}$ le coefficient de frottement dynamique neige/luge.
Le bilan mécanique permet d'écrire les deux relations suivantes :

$$\begin{cases} N = mg - F\sin(\alpha) & (1) \\ m\ddot{x} = T + F\cos(\alpha) & (2) \end{cases}$$

avec $T = \vec{R}\cdot\vec{e_x}$ et $N = \vec{R}\cdot\vec{e_z}$.

a) Exprimer $T$ en fonction de $f_\mathrm{d}$, $m$, $g$, $F$ et $\alpha$ .....

b) Quelle est alors l'équation différentielle régissant le mouvement ?

(a) $\ddot{x} = -f_\mathrm{d}g + \dfrac{F}{m}(\cos(\alpha) + f_\mathrm{d}\sin(\alpha))$

(b) $\ddot{x} = f_\mathrm{d}g + \dfrac{F}{m}(\cos(\alpha) + f_\mathrm{d}\sin(\alpha))$

(c) $\ddot{x} = f_\mathrm{d}g + \dfrac{F}{m}(\cos(\alpha) - f_\mathrm{d}\sin(\alpha))$

(d) $\ddot{x} = -f_\mathrm{d}g + \dfrac{F}{m}(\cos(\alpha) - f_\mathrm{d}\sin(\alpha))$

.....

c) Que devient l'équation du mouvement pour $\alpha = 0$ ? .....

### Entraînement 3.9 — Fin de la phase de glissement.

Un solide de masse $m$, lié à un ressort, glisse sur un support horizontal et fixe dans le référentiel d'étude. L'équation différentielle régissant l'évolution de ce solide lorsque ce dernier se déplace suivant les $x$ croissants, s'écrit :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = -fg$$

avec $m = 300\,\mathrm{g}$, $k = 20\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}$, $f = 0{,}2$ et $g = 10\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

À l'instant initial, le solide n'a pas de vitesse initiale et sa position est repérée par $x(t=0) = x_0 = -9{,}0\,\mathrm{cm}$.

Nous pourrons poser $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

a) Quelle expression de $x(t)$ est correcte ?

(a) $\left(x_0 + \dfrac{fmg}{k}\right)\cos(\omega_0 t) - \dfrac{fmg}{k}$

(b) $\left(x_0 - \dfrac{fmg}{k}\right)\cos(\omega_0 t) + \dfrac{fmg}{k}$

(c) $x_0 \cos(\omega_0 t)$

(d) $-\dfrac{fmg}{k} + x_0 \cos(\omega_0 t)$

.....

b) Quelle est la vitesse du solide ?

(a) $-\left(x_0 + \dfrac{fmg}{k}\right)\omega_0 \sin(\omega_0 t)\overrightarrow{u_x}$

(b) $-\left(x_0 - \dfrac{fmg}{k}\right)\omega_0 \sin(\omega_0 t)\overrightarrow{u_x}$

(c) $-x_0\omega_0 \sin(\omega_0 t)\overrightarrow{u_x}$

(d) $x_0\omega_0 \sin(\omega_0 t)\overrightarrow{u_x}$

.....

c) Déterminer l'expression littérale la vitesse de glissement du solide sur son support.

.....

d) À quel instant $t_1$ (en ms) la phase de glissement s'arrête-t-elle ? .....

e) Déterminer la position $x_1$ (en cm) du solide à l'instant $t_1$ .....

### Entraînement 3.10 — Calcul du coefficient de frottement.

La masse $m$ glisse sur une table, entrainée par la masse $M = \dfrac{4}{3}m$.
Lorsque les deux masses se sont déplacées d'une distance $h = 15\,\mathrm{cm}$, leur vitesse est $v = 82\,\mathrm{cm \cdot s^{-1}}$.
Une étude énergétique conduit à la relation suivante :

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mv^2 = Mgh - f_\mathrm{d}mgh$$

avec $g = 10\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

a) Déterminer l'expression de $f_\mathrm{d}$ en fonction de $g$, $h$ et $v$ .....

b) Déterminer la valeur numérique de $f_\mathrm{d}$ .....

**Entraînement 3.11 — Palet glissant sur un tapis roulant.**

Un palet de centre d'inertie G et de masse $m$ glisse sur un tapis roulant. La position et la vitesse de ce palet par rapport au sol fixe sont données respectivement par $\overrightarrow{OG} = x(t)\overrightarrow{e_x}$ et $\vec{v}(G,t) = v(t)\overrightarrow{e_x}$

La vitesse du tapis par rapport au sol est $\vec{v}_{\text{tapis}} = v_0\overrightarrow{e_x}$ tel que $v_0 = 1\,260\,\text{m}\cdot\text{h}^{-1}$.

Les courbes suivantes donnent l'évolution de la position et de la vitesse du palet au cours du temps.

a) Quelle est l'expression de la vitesse de glissement du palet sur le tapis ?

(a) $(v(t) - v_0)\overrightarrow{e_x}$

(b) $(v(t) + v_0)\overrightarrow{e_x}$

(c) $(v_0 - v(t))\overrightarrow{e_x}$

.....

b) Déterminer la date $t_1$ pour laquelle le glissement s'arrête .....

c) Déterminer la position du palet $x_1$ en µm à la date $t_1$ .....

# De l'adhérence au glissement

**Entraînement 3.12 — Déplacement d'une armoire.**

Une armoire, trop lourde pour être portée, est déplacée dans une pièce par glissement sur le sol qui est parfaitement horizontal.
Au cours de la manœuvre, on enregistre l'évolution au cours du temps, de la norme de $\vec{R}_{\mathrm{T}}$.

Le vecteur $\vec{R}_{\mathrm{T}}$ est la composante tangentielle de la force exercée par le sol sur l'armoire. Nous noterons $R_{\mathrm{T}}$ sa norme.

Déterminer par exploitation graphique :

a) L'instant où démarre la phase de glissement .....

b) La durée pendant laquelle l'armoire glisse .....

c) La force tangentielle maximale en phase statique .....

d) La force tangentielle en phase dynamique .....

On cherche à exploiter ces données pour évaluer le coefficient de frottement statique et dynamique sol/armoire que l'on note respectivement $\mu_{\mathrm{s}}$ et $\mu_{\mathrm{d}}$. On estime que l'armoire pèse entre 70 kg et 90 kg et on rappelle les lois de Coulomb : $R_{\mathrm{T}} \leqslant \mu_{\mathrm{s}} R_{\mathrm{N}}$ en phase d'adhérence ; $R_{\mathrm{T}} = \mu_{\mathrm{d}} R_{\mathrm{N}}$ en phase de glissement.

e) Quel est l'ordre de grandeur de $\mu_{\mathrm{s}}$ le plus probable ?

(a) 0,2 (b) 0,5 (c) 0,9

.....

f) Quel est l'ordre de grandeur de $\mu_{\mathrm{d}}$ le plus probable ?

(a) 0,2 (b) 0,5 (c) 0,9

.....

**Réponses mélangées**

Faux (a) Faux (c) $f_\mathrm{d}(F\sin(\alpha) - mg)$ (a) (a) 384 ms

$-\left(x_0 + \dfrac{fmg}{k}\right)\omega_0 \sin(\omega_0 t)\overrightarrow{u_x}$ $-1{,}5\,\mathrm{N}$ Vrai $\dfrac{1}{6}\left(8 - 7\dfrac{v^2}{gh}\right)$ (a) 1,6 ms

(c) (c) (b) $\ddot{x} = -f_\mathrm{d}g + \dfrac{F}{m}$ 7 s Faux (b) 3,2 N 3,0 cm (a)

5 s 2,8 N (a) 350 N (d) 0,8 (d) 175 N $-70\,\mu\mathrm{m}$ (a)

► Réponses et corrigés page 545

# Électrostatique

**Prérequis**
Repérages cartésien, cylindrique et sphérique.
Intégrales curvilignes, de surface et de volume.
Champs scalaires et vectoriels. Gradient. Théorème de Gauss.

**Constantes utiles**
→ Charge élémentaire : $e = 1{,}60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ ;
→ Permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$.

## Distributions de charge : symétries, invariances, charge totale

### Entraînement 4.1 — Calculs intégraux de longueurs, surfaces et volumes.

On rappelle les déplacements élémentaires dans chacun des trois systèmes de coordonnées :

- en coordonnées cartésiennes : $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}x\,\overrightarrow{e_x} + \mathrm{d}y\,\overrightarrow{e_y} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_z}$
- en coordonnées cylindriques (ou cylindro-polaires) : $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}r\,\overrightarrow{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{e}_\theta + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_z}$
- en coordonnées sphériques : $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}r\,\overrightarrow{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{e}_\theta + r\sin(\theta)\,\mathrm{d}\varphi\,\overrightarrow{e}_\varphi$

a) Exprimer l'élément de circonférence $\mathrm{d}\mathcal{C}$ d'un disque de rayon $R$ .....

b) Grâce à un calcul intégral, retrouver la circonférence d'un cercle de rayon $R$.

.....

c) En coordonnées cylindriques, exprimer l'aire $\mathrm{d}\mathcal{S}$ de l'élément de surface orthogonal à $\overrightarrow{e_z}$.

.....

d) Grâce à un calcul d'intégrale, retrouver la surface d'un disque de rayon $R$ .

e) Grâce à un calcul d'intégrale, retrouver le volume d'une boule de rayon $R$ .

### Entraînement 4.2 — Charge totale d'une distribution linéique.

Dans chacun des cas suivants, déterminer la charge totale des distributions linéiques suivantes à l'aide de la relation : $Q = \displaystyle\int \lambda(\mathrm{M})\,\mathrm{d}\ell_\mathrm{M}$.

a) Pour une tige de longueur $\ell$ chargée avec une densité linéique de charge uniforme $\lambda_0$.

.....

b) Pour un anneau de rayon $a$ dont la densité linéique de charge, non uniforme, est $\lambda(\mathrm{M}) = q_0\theta/a$ avec $q_0$ une constante et $\theta$ l'angle qui repère le point M sur l'anneau.

.....

### Entraînement 4.3 — Feuille d'aluminium chargée.

Soit une feuille d'aluminium de format A4 à laquelle 1 000 électrons ont été arrachés. La feuille porte alors la charge électrique $Q$.

a) Exprimer la charge $Q$ en fonction de la charge électrique élémentaire $e$ .....

b) Exprimer la surface $S$ de la feuille en fonction des longueurs $L$ et $\ell$ .....

c) En déduire la valeur de la charge surfacique moyenne $\sigma = Q/S$ portée par la feuille ....

### Entraînement 4.4 — Quadrupôle électrostatique.

On considère la distribution de charges ci-dessous.

a) Quels sont les trois plans de symétrie de la distribution ?

.....

b) Quels sont les deux plans d'antisymétrie de la distribution ?

.....

### Entraînement 4.5 — Autour d'une sphère chargée.

*Tous les résultats devront être donnés en écriture scientifique.*

a) Quel est le volume en $\mathrm{m}^3$ d'une sphère de rayon $R = 25\,\mathrm{cm}$ ? .....

b) Que vaut la charge totale de la sphère, en coulomb, si celle-ci est chargée avec une densité volumique uniforme de $\rho_0 = 50{,}0\,\mathrm{nC \cdot m^{-3}}$ ?

.....

c) Quelle est l'aire de la surface de la sphère en $\mathrm{m}^2$ ? .....

d) Que vaut la charge totale de la sphère, en coulomb, si celle-ci est chargée avec une densité surfacique uniforme $\sigma = 8\,\mathrm{\mu C \cdot m^{-2}}$ ?

.....

**Entraînement 4.6 — Tube chargé localement.**

Un tube conducteur d'axe (O$z$) possède une densité surfacique de charge $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos(\theta)$, avec $\sigma_0$ une constante et $\theta$ l'angle des coordonnées cylindriques $(r, \theta, z)$.

a) Comment s'exprime l'aire d'un élément de surface d$S$ du tube ?

(a) $\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z$ (b) $R\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$ (c) $R\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$ (d) $R\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

.....

b) Comment s'exprime la charge totale $Q$ portée par le tube ?

(a) $Q = \displaystyle\int_{r=0}^{R}\int_{z=0}^{H} \sigma(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z$

(b) $Q = \displaystyle\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{H} \sigma(\theta) R\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$

(c) $Q = \displaystyle\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{H} \sigma(\theta) R\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$

(d) $Q = \displaystyle\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} \sigma(\theta) R\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

.....

c) À l'aide du calcul d'une intégrale, déterminer la charge totale $Q$ .....

**Entraînement 4.7 — Autour d'un cylindre chargé.**

Soit un câble cylindrique d'axe (O$z$), de hauteur $h$ et de rayon $R$, doté d'une densité volumique de charge $\rho$.

a) Laquelle de ces formules permet de calculer l'aire de la surface latérale du cylindre ?

(a) $\pi R^2 h$ (c) $4\pi R^2 h$

(b) $2\pi R h$ (d) $4\pi R h$

.....

b) Sans négliger les effets de bords, déterminer les invariances de cette distribution de charge si,

$$\text{pour } 0 \leqslant z \leqslant h,\ \rho = \rho_0 \left(\frac{r}{R}\right)^3,$$

avec $\rho_0$ une constante homogène à une charge volumique.

(a) invariance par translation parallèlement à $\vec{e_x}$ (c) invariance par translation parallèlement à $\vec{e_z}$

(b) invariance par rotation autour de l'axe (O$z$) (d) aucune invariance

.....

c) Même question si, pour $0 \leqslant z \leqslant h$, $\rho = \rho_0 \left(\frac{r}{R}\right)^3 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ .....

d) Même question si le cylindre est de hauteur infinie avec $\rho = \rho_0 \left(\frac{r}{R}\right)^3$ .....

# De la distribution de charge au champ électrostatique

**Entraînement 4.8 — Superpositions et symétries.**

Sur le schéma ci-contre figurent, en $M_1$ et $M_2$, les champs électrostatiques $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ respectivement générés par les deux charges $q_1 = +e$ et $q_2 = +e$.

a) Exprimer le champ électrostatique total $\vec{E}$ au point $M_1$ en fonction des vecteurs de la base

.....

b) Exprimer le champ électrostatique total $\vec{E}$ au point $M_2$ en fonction des vecteurs de la base.

.....

Le plan $(M_2, \vec{e_y}, \vec{e_z})$, nommé $\mathcal{P}$, est un plan de symétrie de la distribution de charge.

c) Quelles propositions sont correctes ?

(a) $\vec{E}(M_3) = -2\vec{e_x} + 8\vec{e_y}$ (c) $\vec{E}(M_2) \in \mathcal{P}$

(b) $\vec{E}(M_3) = 2\vec{e_x} + 8\vec{e_y}$ (d) $\vec{E}(M_2) \perp \mathcal{P}$

.....

**Entraînement 4.9 — Symétrie d'une distribution volumique de charge.**

Le champ électrostatique créé par la distribution volumique ci-contre est noté $\vec{E}$. Le plan $(\Pi_1)$ est un plan de symétrie de la distribution. Le plan $(\Pi_2)$ est un plan d'antisymétrie de la distribution.

On rappelle qu'en tout point d'un plan de symétrie (resp. antisymétrie) de la distribution, le champ électrostatique appartient (resp. est perpendiculaire) à ce plan.

a) Quel vecteur unitaire est normal au plan $(\Pi_1)$ ? .....

b) Quel vecteur unitaire est normal au plan $(\Pi_2)$ ? .....

c) En un point $M(x, 0, 0)$ de l'axe $(Ox)$, identifier l'expression correcte parmi celles proposées.

(a) $\vec{E}(M) = \vec{0}$ (b) $\vec{E}(M) = E(M)\vec{e_x}$ (c) $\vec{E}(M) = E(M)\vec{e_y}$ (d) $\vec{E}(M) = E(M)\vec{e_z}$

.....

**Entraînement 4.10 — Invariances d'une distribution volumique de charge.**

La grille infinie représentée ci-dessous est constituée de tiges infinies selon $\vec{e_z}$ et est chargée uniformément négativement.

Soit M un point de l'espace repéré par $(x, y, z)$.

Sachant que les composantes du champ électrique $\vec{E}$ possèdent les mêmes invariances que celles de la distribution de charges, lesquelles de ces expressions sont valides si l'étude des symétries a déjà été menée ?

(a) $\vec{E}(x,y,z) = E_x(y)\vec{e_x} + E_y(y)\vec{e_y}$

(b) $\vec{E}(x,y,z) = E_x(x,y)\vec{e_x} + E_y(x,y)\vec{e_y}$

(c) $\vec{E}(x,y,z) = E_x(x,y) + E_y(x,y)$

(d) $\|\vec{E}\|(x,y,z) = \|\vec{E}\|(x,y,0)$

.....

**Entraînement 4.11 — Homogénéités.**

Dans les expressions suivantes, $\rho$, $\sigma$ et $\lambda$ sont des densités de charge volumique, surfacique et linéique. Le potentiel électrostatique est noté $V$ et $a$, $\ell$, $h$ et $r$ sont des longueurs.

a) Parmi les expressions suivantes, identifier celles qui sont homogènes à une charge électrique.

(a) $4\pi a^2\rho$ (b) $\lambda\pi a^2$ (c) $\rho\pi a^2 h$ (d) $\dfrac{\sigma\ell^3}{a}$

.....

b) Parmi les expressions suivantes, identifier celles qui sont homogènes à un champ électrostatique.

(a) $\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ (b) $(V_2 - V_1)e$ (c) $\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ (d) $\dfrac{\rho r}{\varepsilon_0}$

.....

**Entraînement 4.12 — Tracé d'une composante du champ.**

La composante radiale du champ électrostatique créé au point M par une sphère de centre O, de rayon $R$, dotée d'une densité volumique de charge $\rho_0$, est donnée en fonction de la distance $r = \mathrm{OM}$ par

$$E_r(r < R) = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0} \qquad \text{et} \qquad E_r(r > R) = \frac{3\rho_0 R^3}{\varepsilon_0 r^2}.$$

Laquelle de ces courbes décrit l'évolution de $E_r$ en fonction de $r$ ? .....

**Entraînement 4.13 — Calcul d'un champ électrostatique par intégration.**

Un disque, d'axe (O$z$) et de rayon $R$, possède une charge surfacique uniforme $\sigma$. On note P un point du disque tandis que M est un point de l'espace qui appartient à l'axe (O$z$).

a) Comment s'exprime l'aire élémentaire d$S$ centrée sur P$(r, \theta)$ ?

(a) $\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z$

(b) $\mathrm{d}S = r\sin(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

(c) $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$

(d) $\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

b) Quelle est l'expression du produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{PM}} \cdot \vec{e_z}$ ?

(a) $\overrightarrow{\mathrm{PM}} \cdot \vec{e_z} = \mathrm{PM}$

(b) $\overrightarrow{\mathrm{PM}} \cdot \vec{e_z} = \mathrm{d}z$

(c) $\overrightarrow{\mathrm{PM}} \cdot \vec{e_z} = z$

(d) $\overrightarrow{\mathrm{PM}} \cdot \vec{e_z} = r$

c) Quelle est l'expression de la distance $\mathrm{PM} = \left\|\overrightarrow{\mathrm{PM}}\right\|$ ?

(a) $\mathrm{PM} = z^2 + r^2$

(b) $\mathrm{PM} = \sqrt{z^2 + r^2}$

(c) $\mathrm{PM} = \sqrt{\mathrm{d}z^2 + \mathrm{d}r^2}$

(d) $\mathrm{PM} = \mathrm{d}r + \mathrm{d}z$

Le principe de superposition énonce que le champ électrostatique en M est la somme des champs électrostatiques créés par chaque élément de surface d'aire d$S$ et de charge $\mathrm{d}Q = \sigma\,\mathrm{d}S$. L'expression du champ créé par une source ponctuelle permet alors d'exprimer la composante axiale $E_z = \vec{E} \cdot \vec{e_z}$ du champ créé par le disque sur l'axe (O$z$) par :

$$E_z = \iint_P \frac{\sigma\,\mathrm{d}S}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{\mathrm{PM}} \cdot \vec{e_z}}{\mathrm{PM}^3} = \int_{r=0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{\sigma\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z}{(r^2+z^2)^{3/2}}.$$

d) Calculer l'intégrale précédente à l'aide du changement de variable $u = r^2$.

e) Simplifier l'expression obtenue en d) si $z \ll R$ afin de retrouver l'expression du champ créé par un plan infini uniformément chargé.

f) Sachant que $(1+\varepsilon)^\alpha = 1 + \alpha\varepsilon$ à l'ordre 1 en $\varepsilon$ quand $\varepsilon \to 0$, simplifier l'expression obtenue en d) si $z \gg R$ afin de retrouver l'expression du champ créé par une charge ponctuelle $Q_0 = \pi R^2 \sigma$.

# Flux électrostatique

**Entraînement 4.14 — Signe d'un flux électrostatique à travers une surface.**

Le flux $\phi = \iint \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ du champ électrostatique $\vec{E}$ à travers une surface orientée $(S)$ dépend de l'orientation de cette surface (voir ci-dessous la flèche sur chaque contour).

a) Quels sont les cas pour lesquels $\phi > 0$ ? .....

b) Que vaut $\phi$ dans le cas e ? .....

**Entraînement 4.15 — Flux électrostatique à travers une calotte sphérique.**

Une charge ponctuelle $q$, placée au centre O d'un repère sphérique, crée le champ électrostatique $\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}\vec{e}_r$ avec $(r, \theta, \varphi)$ les coordonnées sphériques du point M .

La calotte sphérique représentée ci-contre (en deux dimensions) est la portion de sphère de rayon $R$ qui intersecte le demi-cône d'axe de révolution $(\mathrm{O}z)$ et de demi-angle $\alpha > 0$.

a) Comment s'exprime un élément de surface $\mathrm{d}S$ de la calotte sphérique ?

a) $\mathrm{d}S = R^2\cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$

b) $\mathrm{d}S = R\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$

c) $\mathrm{d}S = R\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

d) $\mathrm{d}S = R^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

.....

b) Comment s'exprime le flux $\phi$ du champ électrostatique $\vec{E}$ à travers la calotte sphérique ?

a) $\phi = \displaystyle\int_{\varphi=\pi-\alpha}^{\pi+\alpha}\int_{\theta=0}^{2\pi}\vec{E}\cdot R^2\cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_r$

b) $\phi = \displaystyle\int_{\varphi=-\alpha}^{\alpha}\int_{\theta=0}^{\pi}\vec{E}\cdot R^2\cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_r$

c) $\phi = \displaystyle\int_{\theta=\pi-\alpha}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\vec{E}\cdot R^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_r$

d) $\phi = \displaystyle\int_{\theta=-\alpha}^{\alpha}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\vec{E}\cdot R^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_r$

.....

c) Calculer la double intégrale. Écrire le résultat obtenu sous la forme $\phi = K(1-\cos\alpha)$, avec $K$ une constante à exprimer en fonction de $q$ et $\varepsilon_0$. .....

d) Réaliser l'application numérique de $\phi$ dans le cas où $\alpha = \pi$ et $q = e$. .....

**Entraînement 4.16 — Avec le théorème de Gauss.**

Une distribution volumique, de charge volumique inconnue, crée un champ électrostatique dont l'expression en repérage sphérique est $\vec{E}(\mathrm{M}) = E_r\,\vec{e}_r = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}\left(1+\dfrac{r}{a}\right)\mathrm{e}^{-r/a}\,\vec{e}_r$, où $q$ et $a$ sont des constantes positives.

a) Exprimer le flux électrostatique $\phi(\vec{E})$ à travers une sphère de rayon $r$ en fonction de $E(r)$ et $r$.

.....

b) Exprimer la charge $Q = \varepsilon_0\phi(\vec{E})$ (théorème de Gauss) située à l'intérieur de la sphère de rayon $r$.

(a) $\dfrac{q}{\varepsilon_0}\left(1+\dfrac{r}{a}\right)\mathrm{e}^{-r/a}$

(b) $q\left(a+\dfrac{r}{a}\right)\mathrm{e}^{-r/a}$

(c) $q\left(1+\dfrac{r}{a}\right)\mathrm{e}^{-r/a}$

(d) $-q\,\mathrm{e}^{-r/a}$

.....

c) Quelles sont les valeurs limites de $Q$ pour $r \to 0$ et $r \to +\infty$ ? .....

# Circulation du champ électrostatique – Potentiel électrostatique

**Entraînement 4.17 — Signe d'une circulation électrostatique le long d'un chemin.**

Les lignes du champ électrostatique $\vec{E}$ produit par une charge ponctuelle $q$ négative convergent vers cette charge. La circulation $\mathcal{C} = \displaystyle\int \vec{E}\cdot\vec{\mathrm{d}\ell}$ le long d'un chemin orienté dépend de l'orientation de ce chemin.

Pour chaque chemin orienté, indiquer si la circulation $\mathcal{C}$ est positive, négative ou nulle.

a) A→B . b) B→C . c) C→D . d) D→A .

**Entraînement 4.18 — Orientation du champ au sein d'un condensateur plan.**

Le schéma ci-contre représente un condensateur plan dont les armatures sont portées aux potentiels $V_1 = -6\,\mathrm{V}$ et $V_2 = 3\,\mathrm{V}$. Deux surfaces équipotentielles sont représentées en pointillés.

a) Donner l'orientation du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$ ?

(a) $\vec{e_x}$ (b) $-\vec{e_y}$ (c) $-\vec{e_x}$ (d) $\vec{e_z}$

.....

b) Donner l'orientation du vecteur champ électrostatique $\vec{E}$ ?

(a) $\vec{e_x}$ (b) $-\vec{e_y}$ (c) $-\vec{e_x}$ (d) $\vec{e_z}$

.....

**Entraînement 4.19 — Circulation et différence de potentiel.**

Soit un segment orienté allant d'un point A à un point B de coordonnées cartésiennes respectives $(a, 0)$ et $(2a, 2a)$. Le vecteur-déplacement élémentaire en repérage cartésien s'exprime comme $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}x\overrightarrow{e_x} + \mathrm{d}y\overrightarrow{e_y}$.

a) Laquelle des relations suivantes est valable le long du segment A B ?

(a) $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$ (b) $\mathrm{d}y = 2\,\mathrm{d}x$ (c) $\mathrm{d}x = 0$ (d) $\mathrm{d}y = 0$

.....

Soit un champ $\overrightarrow{E} = E_0\left(1 - \mathrm{e}^{-x/a}\right)\overrightarrow{e_x}$, avec $a > 0$.

b) Sachant que le champ électrostatique est orienté dans le sens des potentiels électriques $V$ décroissants, déterminer sans calcul lequel de $V(x = a)$ ou $V(x = 2a)$ est le potentiel le plus élevé .....

c) La circulation électrostatique sur le segment AB est reliée à la différence de potentiel électrique par

$$V(\mathrm{A}) - V(\mathrm{B}) = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}.$$

Exprimer $V(\mathrm{A}) - V(\mathrm{B})$ en fonction de $E_0$ et $a$ .....

**Entraînement 4.20 — Approximation dipolaire.**

Soit un dipôle électrostatique constitué de deux charges ponctuelles opposées $+q$ et $-q$, séparées par une distance $\mathrm{AB} = a$. D'après le principe de superposition, le potentiel créé par ce doublet en un point M s'écrit

$$V(\mathrm{M}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\mathrm{AM}} - \frac{1}{\mathrm{BM}}\right).$$

a) Laquelle de ces propositions donne l'expression de $\mathrm{AM} = \|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\|$ au carré en fonction de $a$ et $\theta$ ?

(a) $\mathrm{AM}^2 = r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - ar\sin(\theta)$ (c) $\mathrm{AM}^2 = r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - ar\cos(\theta)$

(b) $\mathrm{AM}^2 = r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + ar\cos(\theta)$

.....

On se place dans l'approximation dipolaire, c'est-à-dire loin du doublet de charges : $r \gg a$.

b) Réaliser un développement limité de $1/\mathrm{AM}$ à l'ordre 1 en $a/r$ .....

c) Même question pour $1/\mathrm{BM}$ .....

d) En déduire l'expression du potentiel $V(\mathrm{M})$ dans l'approximation dipolaire.

.....

**Entraînement 4.21 — Effet de pointe.**

Un individu porte une charge négative, ce qui modifie localement les propriétés du champ électrostatique. La figure ci-dessous représente qualitativement les lignes de champ en trait plein tandis que les (surfaces) équipotentielles sont illustrées en pontillés. L'échelle du schéma est 1 division $\leftrightarrow$ 40 cm.

a) Comment sont orientées les lignes de champ électrostatique ?

(a) vers l'individu

(b) sortant de l'individu

.....

b) Quel est le signe des valeurs de potentiel électrostatique des équipotentielles représentées ? .....

c) Évaluer l'ordre de grandeur du champ en A .

d) Indiquer par une analyse de la carte de champ, et sans aucun calcul, laquelle de ces propositions est vraisemblable :

(a) $\vec{E}(\mathrm{B}) > \vec{E}(\mathrm{A})$

(b) $\|\vec{E}(\mathrm{B})\| > \|\vec{E}(\mathrm{A})\|$

(c) $\vec{E}(\mathrm{B}) = \vec{E}(\mathrm{A})$

(d) $\|\vec{E}(\mathrm{B})\| < \|\vec{E}(\mathrm{A})\|$

.....

## Toujours plus d'électrostatique

**Entraînement 4.22 — Charge totale et charge moyenne.**

La charge totale d'une distribution occupant un volume $V$ s'exprime comme $Q = \iiint_{(V)} \rho \, \mathrm{d}V$ avec $\rho$ la charge volumique et $\mathrm{d}V$ le volume élémentaire dont les expressions en repérages cartésien, cylindrique et sphérique sont respectivement $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$ et $\mathrm{d}V = r^2 \sin(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$.

Déterminer la charge totale et la charge volumique moyenne $\rho_\mathrm{m} = Q/V$ des distributions ci-dessous.

*On notera que $\rho_0$ est une constante homogène à une charge volumique.*

a) Un pavé, d'épaisseur $2H$ selon la direction $\vec{e_z}$ $(-H \leqslant z \leqslant +H)$ et de base d'aire $\mathcal{A}$ a une charge volumique $\rho(x, y, z) = \rho_0 \left(1 - \dfrac{z^2}{H^2}\right)$.

.....

b) Un cylindre, de rayon $R$ et de hauteur $H$, a une charge volumique $\rho(r, \theta, z) = \rho_0 \left(1 - \dfrac{r^2}{R^2}\right)$.

.....

c) L'espace (infini) a une charge volumique $\rho(r, \theta, \varphi) = \rho_0 \dfrac{R^2}{r^2} \exp\left(-\dfrac{r}{R}\right)$ où $R$ est une constante homogène à une distance.

.....

**Entraînement 4.23 — Analyse dimensionnelle.**

Laquelle de ces expressions n'est pas homogène à un potentiel électrostatique $V$ (ou une tension $U$) si $C$ est une capacité de condensateur, $q$ une charge électrique, $T$ une température, $R$ la constante des gaz parfaits, $\mathcal{N}_\mathrm{A}$ la constante d'Avogadro, $E_z$ un champ électrostatique et $d$ une distance ?

(a) $U = Cq$ (b) $V = RT/q\mathcal{N}_\mathrm{A}$ (c) $U = E_z d$

.....

**Entraînement 4.24 — Calcul de divergence de champ électrostatique.**

Le champ électrostatique et sa divergence en repérage cylindrique sont respectivement

$$\vec{E} = E_r\vec{e_r} + E_\theta\vec{e_\theta} + E_z\vec{e_z} \quad \text{et} \quad \operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rE_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\,.$$

Exprimer la divergence du champ $\vec{E_1} = \dfrac{\alpha}{r}\vec{e_r}$ avec $\alpha$ une constante .....

**Entraînement 4.25 — Tracé d'une composante du champ – *Bis repetita.***

Une distribution de charge à symétrie cylindrique, d'axe (O$z$), de rayons caractéristiques $R_1$ et $R_2$, produit en un point de coordonnée radiale $r$ un champ électrostatique de composante radiale donnée par

$$\begin{cases} E_r(r < R_1) = -\dfrac{\alpha r^2}{3\varepsilon_0} \\ E_r(R_1 < r < R_2) = -\dfrac{\alpha R_1^3}{3\varepsilon_0 r} \\ E_r(r > R_2) = \dfrac{1}{\varepsilon_0 r}\left(-\dfrac{\alpha R_1^3}{3} + \sigma R_2\right) \end{cases}$$

avec $\alpha$ et $\sigma$ deux constantes positives.

Laquelle de ces courbes décrit l'évolution de $E_r$ en fonction de $r$ ? .....

**Entraînement 4.26 — Orientation du champ créé par une charge ponctuelle.**

Sur le schéma ci-contre, on trouve 3 surfaces équipotentielles générées par une charge ponctuelle placée au centre.

a) Donner l'orientation du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$ ?

(a) $\vec{e_\theta}$ (b) $-\vec{e_r}$ (c) $-\vec{e_\theta}$ (d) $\vec{e_r}$

.....

b) Donner l'orientation du vecteur champ électrostatique $\vec{E}$ ?

(a) $\vec{e_\theta}$ (b) $-\vec{e_r}$ (c) $-\vec{e_\theta}$ (d) $\vec{e_r}$

.....

**Entraînement 4.27 — Un potentiel, une courbe.**

Les expressions des potentiels électrostatiques $V_\mathrm{a}$, $V_\mathrm{b}$ et $V_\mathrm{c}$ données ci-après rendent compte de situations physiques volontairement non détaillées ici. Les fonctions $V_\mathrm{a}$, $V_\mathrm{b}$ et $V_\mathrm{c}$ sont définies pour des valeurs de $r$ strictement positives. Enfin, $\lambda$, $\sigma$ et $\rho$ sont des constantes positives.

$$V_\mathrm{a}(r) = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad , \quad V_\mathrm{b}(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R^2 - r^2) & \text{si } r \leqslant R \\ \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\dfrac{R^3}{r} & \text{si } r \geqslant R \end{cases} \quad \text{et} \quad V_\mathrm{c}(x) = V_0 - \frac{\sigma}{\varepsilon_0}x$$

Attribuer à chaque potentiel électrostatique une courbe.

a) $V_\mathrm{a}$ ..... b) $V_\mathrm{b}$ ..... c) $V_\mathrm{c}$ .....

**Entraînement 4.28 — Énergie électrostatique au sein d'un condensateur.**

Soit un condensateur sphérique dont l'armature interne est une sphère de rayon $R$ et l'armature externe une sphère de rayon $R+h$. Le champ électrostatique entre les deux armatures est $\vec{E} = -\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r}$, avec $-Q$ la charge portée par l'armature interne.

L'énergie électrostatique stockée entre les armatures du condensateur est

$$\mathcal{E} = \int_{r=R}^{R+h}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{\varepsilon_0\vec{E}^2}{2}r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi.$$

Exprimer $\mathcal{E}$ en fonction de $R$, $h$, $Q$ et $\varepsilon_0$ .....

## Réponses mélangées

nulle  (b) et (c)  (d)  $\frac{1}{r}\left(1+\frac{a\cos(\theta)}{2r}\right)$  0  Courbe (3)  (d)

$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$  $+1\,000\times e$  (d)  $\pi R^2$  (b)  $1\times10^2\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}$.  (a)  $\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 z^2}$

$2\pi R$  (c)  $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\sqrt{\frac{z^2}{z^2+R^2}}\right)$  (a)  $1{,}8\times10^{-8}\,\mathrm{V\cdot m}$  (c)  $V(a)$

$\frac{1}{r}\left(1-\frac{a\cos(\theta)}{2r}\right)$  $(\mathrm{O},\vec{e_x},\vec{e_z})$ et $(\mathrm{O},\vec{e_y},\vec{e_z})$  (b)  $2\pi^2 q_0$  positif  Courbe (1)

$6\times10^{-6}\,\mathrm{C}$  (c)  négative  (c)  (b)  $5\vec{e_y}$  (c) et (d)  $\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{h}{R(R+h)}$

$\underbrace{\frac{q}{2\varepsilon_0}}_{K}(1-\cos\alpha)$  $6{,}5\times10^{-2}\,\mathrm{m^3}$  (c)  $Q=\rho_0\pi R^2 H/2,\ \rho_\mathrm{m}=\rho_0/2$  0  (b) et (d)

(b)  $4\pi r^2 E(r)$  nulle  (a) et (f)  $E_0 a(1+\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{-1})$  (b)  $R\,\mathrm{d}\theta$

(c)  $Q=\rho_0 4\pi R^3,\ \rho_\mathrm{m}=0$  $\vec{e_y}$  (c)  (a)  $\frac{qa\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$  $\vec{e_z}$  positive

$(\mathrm{O},\vec{e_x}+\vec{e_y},\vec{e_z})$, $(\mathrm{O},\vec{e_x}-\vec{e_y},\vec{e_z})$ et $(\mathrm{O},\vec{e_x},\vec{e_y})$  $L\times\ell$  $3{,}3\times10^{-9}\,\mathrm{C}$  $2{,}57\times10^{-15}\,\mathrm{C\cdot m^{-2}}$  (b)

$r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$  0  $q$ et 0  $\frac{4}{3}\pi R^3$  (b)  Courbe (2)  $-2\vec{e_x}+8\vec{e_y}$  $\lambda_0\ell$  (d)

(b) et (c)  $7{,}9\times10^{-1}\,\mathrm{m^2}$  $Q=4\rho_0\mathcal{A}H/3,\ \rho_\mathrm{m}=2\rho_0/3$  (d)  (a)  (a) et (d)

▶ Réponses et corrigés page 420

# Magnétostatique

**Prérequis**
Repérages cartésien, cylindrique et sphérique. Intégrales curvilignes, de surface et de volume. Champs scalaire et vectoriel. Théorème d'Ampère.

**Constantes utiles**

→ Charge électrique élémentaire : $e = 1{,}602 \times 10^{-19}$ C

→ Masse de l'électron : $m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg

→ Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H \cdot m^{-1}}$

## Distributions de courant et densités de courant

**Entraînement 5.1 — Dimension de densités de courant.**

La dimension d'une intensité électrique est notée I, celle d'un temps T, et celle d'une longueur L.

a) On note $\vec{j}$ une densité volumique de courant, $\vec{j_s}$ une densité surfacique de courant et $I$ l'intensité d'un courant. Quelles sont les relations correctes ?

(a) $I = \iint \vec{j} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$ (b) $\vec{j} = \iint I\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ (c) $I = \iiint \vec{j} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}V}$ (d) $I = \int \vec{j_s} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$

b) Comment s'écrit la dimension de la norme d'une densité volumique de courant $\vec{j}$ ?

(a) $\mathrm{I \cdot L^{-3}}$ (b) $\mathrm{I \cdot T \cdot L^{-2}}$ (c) $\mathrm{I \cdot T \cdot L^{-3}}$ (d) $\mathrm{I \cdot L^{-2}}$

c) Comment s'écrit la dimension de la norme d'une densité surfacique de courant $\vec{j_s}$ ?

(a) $\mathrm{I \cdot L^{-1}}$ (b) $\mathrm{I \cdot T \cdot L^{-1}}$ (c) $\mathrm{I \cdot L^{2}}$ (d) $\mathrm{I \cdot L^{-2}}$

**Entraînement 5.2 — Densité volumique de courant en coordonnées cylindriques.**

Soit un conducteur cylindrique (rayon $a$ et longueur $\ell$) d'axe (O$z$) parcouru par un courant d'intensité

$$I = \iint \vec{j} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S},$$

où $\vec{j} = j_0 \dfrac{b}{r} \vec{e_z}$ est le vecteur densité volumique de courant, avec $j_0$ et $b$ constants, et $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \mathrm{d}S\vec{e_z}$ un élément de section orientée.

Exprimer $I$ en fonction de la section $S$ du conducteur, du rayon $a$ et des constantes $j_0$ et $b$.

**Entraînement 5.3 — Densité surfacique de courant en coordonnées cylindriques.**

Soit un conducteur cylindrique (rayon $a$ et longueur $\ell$) d'axe (O$z$) parcouru par un courant d'intensité

$$I = \int \vec{j_s} \cdot \vec{d\ell},$$

où $\vec{j_s} = j_{s,0}\vec{e_\theta}$ est un vecteur densité surfacique de courant constant et $\vec{d\ell} = dz\vec{e_z}$ un élément de longueur orientée.

Exprimer $I$ en fonction de la longueur $\ell$ du conducteur et de la constante $j_{s,0}$.

.....

# Symétries et invariances

**Entraînement 5.4 — Vent solaire.**

Le vent solaire est un flux de particules chargées, majoritairement constitué de protons et de noyaux d'hélium. Le Soleil est considéré comme ponctuel et placé à l'origine O d'un repère sphérique. En première approximation, le vent solaire est assimilé à un courant de particules radial et stationnaire.

a) Si l'émission est isotrope, quelle est l'expression simplifiée du vecteur densité de courant en M$(r, \theta, \varphi)$ ?

(a) $\vec{j}(\mathrm{M}) = j_r(r,\theta)\vec{e_\theta}$

(b) $\vec{j}(\mathrm{M}) = j_\theta(r)\vec{e_\theta}$

(c) $\vec{j}(\mathrm{M}) = j_r(r,\theta)\vec{e_r}$

(d) $\vec{j}(\mathrm{M}) = j_r(r)\vec{e_r}$

.....

b) Exprimer alors l'intensité $I_R$ du courant électrique traversant une sphère de rayon $R$.

.....

**Entraînement 5.5 — Propriétés de symétrie d'une distribution de courant (I).**

Soit un solénoïde d'axe (O$x$), parcouru par un courant stationnaire d'intensité $I$.

On rappelle qu'un plan de symétrie (resp. antisymétrie) d'une distribution de courant est un plan pour lequel les courants de la distribution sont répartis de manière strictement identique (resp. opposée) de part et d'autre du plan.

Parmi les propositions ci-dessous, quelles sont celles qui sont correctes ?

(a) Le plan ($x$O$y$) est un plan de symétrie de la distribution.

(b) Le plan ($x$O$y$) est un plan d'antisymétrie de la distribution même si le solénoïde n'est pas infiniment long.

(c) Le plan ($x$O$z$) est un plan d'antisymétrie de la distribution.

(d) Le plan ($x$O$z$) est un plan de symétrie de la distribution seulement si le solénoïde est infiniment long.

.....

**Entraînement 5.6 — Propriétés de symétrie d'une distribution de courant (II).**

On considère la situation suivante, où deux fils infinis sont parcourus par des courants de même intensité $I$ et de même sens (de l'arrière vers l'avant).

On rappelle qu'en tout point d'un plan de symétrie (respectivement d'antisymétrie) de la distribution, le champ magnétostatique est perpendiculaire (respectivement appartient) à ce plan.

a) Le plan $(x\mathrm{O}y)$ est un plan d'antisymétrie pour la distribution.

Quelles sont les propositions correctes ?

(a) Le vecteur $\vec{e_z}$ est normal à ce plan.

(b) Au point O, le champ $\vec{B}$ est selon $\pm\vec{e_z}$.

(c) Au point $\mathrm{P}_1$, le champ $\vec{B}$ appartient à ce plan.

(d) Au point $\mathrm{P}_3$, le champ $\vec{B}$ appartient à ce plan.

.....

b) Le plan $(y\mathrm{O}z)$ est un plan de symétrie pour la distribution.

Quelles sont les propositions incorrectes ?

(a) Le vecteur $\vec{e_x}$ est normal à ce plan.

(b) $\vec{B}(\mathrm{P}_4) = B_y(\mathrm{P}_4)\vec{e_y} + B_z(\mathrm{P}_4)\vec{e_z}$

(c) Au point $\mathrm{P}_2$, le champ $\vec{B}$ est selon $\pm\vec{e_y}$.

(d) $\vec{B}(\mathrm{O}) = B(\mathrm{O})\vec{e_z}$

.....

c) Quelles sont les propositions incomplètes ou incorrectes ?

(a) Le plan $(x\mathrm{O}z)$ est un plan d'antisymétrie pour la distribution.

(b) $\vec{B}(\mathrm{O}) = \vec{0}$

(c) Le champ $\vec{B}$ est toujours perpendiculaire au plan $(x\mathrm{O}z)$.

(d) $\vec{B}(\mathrm{P}_2) = -\vec{B}(\mathrm{P}_1)$

.....

**Entraînement 5.7 — Couche épaisse infinie parcourue par un courant.**

Soit une couche infinie suivant les axes (O$x$) et (O$y$), située entre les plans d'équations $z = d$ et $z = -d$, parcourue par un courant de densité volumique uniforme $\vec{j} = j_0\vec{e_x}$.

a) Exprimer l'intensité $I$ du courant qui traverse la surface $\Sigma$ orientée suivant $\vec{e_x}$ ...

b) Quelles sont les invariances de cette distribution de courant ?

(a) invariance par translation parallèlement à l'axe (O$x$)

(b) invariance par rotation autour de l'axe (O$z$)

(c) invariance par translation parallèlement à l'axe (O$y$)

(d) aucune invariance

.....

c) Le champ magnétostatique au point M est suivant le vecteur $\vec{e_y}$.

Sachant que les composantes du champ magnétostatique possèdent les mêmes invariances que la distribution, déterminer l'expression correcte.

(a) $\vec{B}(M) = B_y(y)\vec{e_y}$ (b) $\vec{B}(M) = B_y(z)\vec{e_y}$ (c) $\vec{B}(M) = B_y(y,z)\vec{e_y}$

.....

## Champs magnétostatiques

**Entraînement 5.8 — Théorème de superposition.**

Deux solénoïdes longs, parcourus par des courants stationnaires d'intensités $I_1$ et $I_2$, sont positionnés perpendiculairement entre eux et à égale distance d'un point O. En ce point, le champ magnétostatique produit par le solénoïde (1) est supposé s'écrire $\vec{B_1}(\mathrm{O}) = \mu_0 n_1 I_1 \vec{e_x}$, avec $n_1$ le nombre de spires par unité de longueur du solénoïde (1).

a) Par analogie avec l'expression fournie pour le solénoïde (1), écrire le champ magnétostatique produit par le solénoïde (2) au point O.

.....

b) D'après le théorème de superposition, comment s'écrit alors le champ total produit au point O ?

(a) $\vec{B}(\mathrm{O}) = \mu_0(n_1 I_1 + n_2 I_2)\vec{e_z}$

(b) $\vec{B}(\mathrm{O}) = \mu_0(n_1 I_1 - n_2 I_2)\vec{e_z}$

(c) $\vec{B}(\mathrm{O}) = \mu_0(n_1 I_1 - n_2 I_2)(\vec{e_x} + \vec{e_y})$

(d) $\vec{B}(\mathrm{O}) = \mu_0(n_1 I_1 \vec{e_x} - n_2 I_2 \vec{e_y})$

.....

## Entraînement 5.9 — Analyse dimensionnelle et champ magnétique.

Sachant que la force magnétique s'exprime comme $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$, avec $\vec{v}$ une vitesse, $q$ une charge électrique et $\vec{B}$ un champ magnétique, déterminer laquelle des expressions ci-dessous est homogène à la norme $B$ d'un champ magnétique si $m$ est une masse et $R$ un rayon.

(a) $\dfrac{qv}{mR}$ (b) $\dfrac{mR}{qv}$ (c) $\dfrac{qR}{mv}$ (d) $\dfrac{mv}{qR}$

.....

## Entraînement 5.10 — Graphes et expressions d'un champ magnétique.

On donne les graphes associés aux champs magnétiques créés par divers dispositifs, chacun étant parcouru par un courant d'intensité $I$.

Le champ magnétique d'un conducteur cylindrique de rayon $a$ parcouru par un courant volumique uniforme est donné par

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \text{ pour } 0 < r < a \qquad \text{et} \qquad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \text{ pour } r > a.$$

Quel graphe correspond au champ magnétique créé par ce conducteur cylindrique ? .....

## Entraînement 5.11 — Champ magnétostatique quadrupolaire.

En repérage cartésien et dans le plan d'équation $z = 0$, les composantes du champ magnétostatique créé par un quadrupôle sont $B_x = ky$, $B_y = kx$ et $B_z = 0$, avec $k$ une constante non nulle.

a) Quelle carte de champ correspond à l'expression du champ donnée ci-dessus ? .....

b) En ce qui concerne la carte de champ (1), quelle est la proposition valide ?

(a) $\vec{B}(\mathrm{M}) = \vec{B}(\mathrm{N})$ (b) $B(\mathrm{M}) < B(\mathrm{N})$ (c) $B(\mathrm{M}) > B(\mathrm{N})$

.....

# Circulation et flux magnétostatiques

**Entraînement 5.12 — Circulation d'un champ magnétostatique sur un chemin.**

La circulation $\mathcal{C} = \int_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot \vec{\mathrm{d}\ell}$ du champ magnétostatique $\vec{B}$ le long d'un chemin orienté $(\Gamma)$ dépend de l'orientation de ce chemin. Pour chaque cas, exprimer $\mathcal{C}$ le long du chemin $\overset{\frown}{\mathrm{ABC}}$ en fonction du pas $d$ du quadrillage. Sur chaque ligne de champ, la norme $B$ du champ est supposée uniforme.

a) ..... b) ..... c) .....

**Entraînement 5.13 — Courants enlacés.**

Pour chaque cas, exprimer l'intensité $I_{\text{enl}}$ des courants enlacés par le contour $(C)$ en fonction de l'intensité du courant $I$. Attention aux signes !

a) ..... b) ..... c) ..... d) .....

**Entraînement 5.14 — Signe d'un flux magnétostatique à travers une surface.**

On sait que le flux $\phi = \iint \vec{B} \cdot \vec{\mathrm{d}S}$ du champ magnétostatique $\vec{B}$ à travers une surface orientée $(S)$ dépend de l'orientation de cette surface (voir ci-dessous la flèche sur chaque contour).

a) Quels sont les cas pour lesquels $\phi > 0$ ? .....

b) Que vaut $\phi$ dans le cas d ? .....

**Entraînement 5.15 — Flux à travers une spire carrée.**

Soit une spire carrée de côté $a$, orientée dans le sens ABCD. On note $x$ l'abscisse du côté BC. Dans le demi-espace tel que $x \geqslant 0$, règne un champ magnétostatique $\vec{B}$ uniforme perpendiculaire au plan de la spire.

Exprimer le flux magnétostatique à travers la spire orientée, de normale $\vec{n}$, défini par $\phi(\vec{B}) = \iint \vec{B} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S$.

a) Pour $x < 0$ ...

b) Pour $x \in [0, a]$

c) Pour $x > a$ ...

**Entraînement 5.16 — Théorème d'Ampère et flux d'un champ non-uniforme.**

Un fil conducteur est bobiné en $N$ spires jointives sur un tore circulaire de rayon moyen $R$ à section carrée de côté $a$. La normale de chaque spire est orientée suivant le vecteur $\vec{e_\theta}$ de la base cylindrique. L'intensité du courant parcourant la bobine est notée $I$.

Le champ magnétostatique créé par cette bobine à l'intérieur du tore s'écrit : $\vec{B} = B(r)\vec{e_\theta}$.

a) Soit un cercle de centre O, de rayon $R - \dfrac{a}{2} < r < R + \dfrac{a}{2}$ et orienté suivant le vecteur $\vec{e_\theta}$. Quelle est l'intensité du courant enlacé par ce cercle ?

(a) $I$ (b) $NI$ (c) $\dfrac{a}{R}I$ (d) $\dfrac{a}{R}NI$

.....

b) Le théorème d'Ampère s'écrit : $\oint \vec{B} \cdot \vec{\mathrm{d}l} = \mu_0 I_{\mathrm{enl}}$, avec $I_{\mathrm{enl}}$ l'intensité du courant enlacé par le contour fermé choisi. En déduire l'expression de la composante $B(r)$ du champ .....

c) Exprimer le flux $\phi(\vec{B}) = \iint \vec{B} \cdot \mathrm{d}S\vec{e_\theta}$ à travers la surface d'une spire .....

**Entraînement 5.17 — Flux magnétostatique au sein d'un circuit magnétique.**

Dans le circuit magnétique représenté ci-contre, de perméabilité relative $\mu_\mathrm{r} = 4\,000$, chaque colonne possède une section carrée de côté $a = 20\,\mathrm{cm}$. Celle de gauche est bobinée, formant un solénoïde de $N = 1\,000$ spires jointives et de longueur $\ell = 10\,\mathrm{cm}$.

Le circuit est alimenté par un courant d'intensité $I = 200\,\mathrm{mA}$. Le champ magnétostatique produit est guidé dans le circuit selon les lignes fléchées en pointillés et a pour intensité $B = \mu_0\mu_\mathrm{r}NI/\ell$.

a) Calculer avec un chiffre significatif la valeur du champ magnétostatique au sein du solénoïde.

.....

b) Le flux magnétostatique à travers $(S)$ s'exprime comme $\phi = NBS$. Calculer $\phi$ .....

c) Sachant que le flux $\phi_2$ traversant $(S_2)$ vérifie $4\phi_2 = \phi$, calculer le flux $\phi_1$ traversant $(S_1)$ .

# Dipôle magnétostatique

**Entraînement 5.18 — Spire circulaire et développement dipolaire.**

Le champ magnétostatique créé en un point $\mathrm{M}(0,0,z)$ par un courant d'intensité $I$ parcourant une spire de rayon $R$ et d'axe $(\mathrm{O}z)$ est $\vec{B}(\mathrm{M}) = \dfrac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}}\vec{e_z}$.

a) Quel est le moment magnétique associé à cette source de champ magnétostatique ?

(a) $\vec{\mathcal{M}} = \pi R^2 I$ (b) $\vec{\mathcal{M}} = \mu_0 \pi R^2 I \vec{e_z}$ (c) $\vec{\mathcal{M}} = \pi R^2 I \vec{e_z}$

.....

b) Simplifier l'expression du champ magnétostatique dans l'approximation dipolaire $z \gg R$.

.....

**Entraînement 5.19 — Champ créé par un dipôle.**

La carte de champ d'un dipôle magnétique de centre O et de moment magnétique $\vec{m}$ est représentée ci-contre. Le champ magnétostatique est noté $\vec{B}$.

En s'aidant de la carte fournie et en étudiant la situation pour certains angles particuliers, identifier l'expression correcte de $\vec{B}$ en un point M quelconque loin du dipôle.

(a) $\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\sin(\theta)\vec{e_r} - \cos(\theta)\vec{e_\theta})$

(b) $\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\sin(\theta)\vec{e_r} + \cos(\theta)\vec{e_\theta})$

(c) $\vec{B}(\mathrm{M}) = \dfrac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\cos(\theta)\vec{e_r} - \sin(\theta)\vec{e_\theta})$

(d) $\vec{B}(\mathrm{M}) = \dfrac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\cos(\theta)\vec{e_r} + \sin(\theta)\vec{e_\theta})$

.....

**Entraînement 5.20 — Équilibre d'un aimant.**

Un aimant très fin, de moment magnétique $\vec{m}$, est posé sur une pointe en un point O différent de son centre de gravité G. L'ensemble est plongé dans un champ magnétostatique $\overrightarrow{B_{\text{ext}}}$ vertical uniforme. L'aimant subit le couple magnétique de moment $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \overrightarrow{B_{\text{ext}}}$. À l'équilibre, il est à l'horizontale.

a) Exprimer la projection du moment $\vec{\Gamma}$ suivant l'axe $(\mathrm{O}z)$ .....

b) Le moment du poids par rapport à l'axe $(\mathrm{O}z)$ s'écrit $-dMg$, avec $M$ la masse de l'aimant et $d = \mathrm{OG}$. En supposant qu'il n'y a pas d'autre moment, exprimer la distance $d$ à l'équilibre.

.....

**Entraînement 5.21 — Moment de force magnétique.**

On rappelle qu'un dipôle de moment magnétique $\vec{m}$, baignant dans un champ magnétostatique extérieur uniforme $\vec{B}$, subit des forces magnétiques de moment $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$.

Pour chaque situation suivante (boucle de courant ou aimant droit), les vecteurs $\vec{m}$ et $\vec{B}$ sont dans le plan (O$xy$). Indiquer la direction et le sens du moment $\vec{\Gamma}$.

a) ..... b) ..... c) ..... d) .....

**Entraînement 5.22 — Force exercée sur un dipôle.**

Un dipôle de moment magnétique $\vec{m}$ dans un champ magnétostatique $\overrightarrow{B_{\text{ext}}}$ non uniforme subit la force $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_{\text{p}})$, avec $E_{\text{p}} = -\vec{m} \cdot \overrightarrow{B_{\text{ext}}}$. En coordonnées cylindriques, on a $\overrightarrow{\text{grad}}(f(r)) = \dfrac{\text{d}f}{\text{d}r}\vec{e_r}$.

a) Déterminer l'expression de $\vec{F}$ pour un dipôle qui serait de même direction et de même sens qu'un champ d'expression $\overrightarrow{B_{\text{ext}}} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e_\theta}$ (fil rectiligne infini d'axe (O$z$)).

.....

b) Vers quelles zones le dipôle est-il alors attiré ?

(a) celles de champ plus faible (b) celles de champ plus intense

.....

## Toujours plus de magnétostatique

**Entraînement 5.23 — Encore une analyse dimensionnelle (I).**

Quelle expression est homogène à la norme $B$ d'un champ magnétique si $I$ est une intensité électrique, $\mu_0$ la perméabilité magnétique du vide et $R$ un rayon ?

(a) $\dfrac{I}{2\pi R}$ (b) $\dfrac{2\pi R\mu_0}{I}$ (c) $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}$ (d) $\dfrac{2\pi\mu_0}{IR}$

.....

**Entraînement 5.24 — Encore une analyse dimensionnelle (II).**

Quelle expression est homogène à une norme $B$ de champ magnétique si $I$ est une intensité électrique, $N$ un nombre de spires, $S$ une surface et $L$ une inductance ?

(a) $B = \dfrac{LI}{NS}$ (b) $B = \dfrac{LS}{NI}$ (c) $B = \dfrac{NS}{LI}$ (d) $B = \dfrac{NL}{IS}$

.....

**Entraînement 5.25 — Moment magnétique élémentaire : magnéton de Bohr.**

Dans le cadre du modèle classique de Bohr, l'électron (charge $-e$, masse $m_e$) de l'atome d'hydrogène décrit un cercle (rayon $r$, période de révolution $T$) centré sur le noyau atomique (origine O du repère). L'orbite est supposée dans le plan $z = 0$. Le vecteur vitesse $\vec{v}$ indique le sens de rotation de l'électron. La constante de Planck est $h = 6{,}63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$.

a) En considérant que l'électron définit une boucle de courant circulaire (une spire), comment s'exprime l'intensité $I$ correspondante (voir schéma pour l'orientation) ?

(a) $I = eT$ (b) $I = e/T$ (c) $I = -eT$ (d) $I = -e/T$

b) De loin, le système est équivalent à un dipôle magnétique de moment magnétique $\vec{m} = I\vec{S}$, avec $\vec{S}$ le vecteur surface de la spire. Donner l'expression de $\vec{m}$ en fonction de $e$, $T$, $r$ et $\vec{e_z}$.

c) Le moment cinétique de l'électron par rapport au noyau (point O) est $\vec{\sigma} = \dfrac{2m_e}{T}\vec{S}$. Montrer alors que $\vec{m} = \gamma\vec{\sigma}$, avec $\gamma$ le rapport gyromagnétique de l'électron à exprimer en fonction de $e$ et $m_e$.

d) La quantification du moment cinétique $\|\vec{\sigma}\| = n\hbar$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$, conduit à définir un moment magnétique élémentaire $\mu_B$ (magnéton de Bohr). Indiquer alors la ou les propositions correctes.

(a) $\mu_B = \hbar\gamma$ (b) $\mu_B = \dfrac{e\hbar}{2m_e}$ (c) $\mu_B = 9{,}28 \times 10^{-24}\,\mathrm{N \cdot m}$

**Entraînement 5.26 — Énergie magnétique d'un câble coaxial.**

Un cylindre long et creux de rayon $R_1$ est parcouru en surface par un courant d'intensité $I$. Ce courant « revient » par un cylindre de rayon $R_2 > R_1$, coaxial au premier et d'épaisseur négligeable. Cet ensemble forme un câble coaxial de longueur $\ell$ et d'axe (O$z$).

Le champ magnétostatique produit est, en coordonnées cylindriques :

$$\vec{B} = \begin{cases} \vec{0} & \text{pour } r < R_1 \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e_\theta} & \text{pour } R_1 \leqslant r \leqslant R_2 \\ \vec{0} & \text{pour } r > R_2 \end{cases}$$

a) Exprimer le flux propre $\Phi_\mathrm{p}$, c'est-à-dire le flux du champ magnétostatique à travers une tranche du câble de surface $S = \ell R_2$, en fonction de $I$, $\ell$, $R_1$ et $R_2$.

.....

b) En déduire l'expression de l'inductance propre par unité de longueur $\Lambda = \dfrac{L}{\ell} = \dfrac{\Phi_\mathrm{p}}{\ell I}$ du câble en fonction de $R_1$ et $R_2$.

.....

On rappelle que la densité volumique d'énergie magnétique a pour expression $w_\mathrm{m} = \dfrac{B^2}{2\mu_0}$ et que l'énergie magnétique s'exprime alors comme $W_\mathrm{m} = \iiint w_\mathrm{m}\,\mathrm{d}\tau$.

c) Déterminer l'expression de l'énergie magnétique $W_\mathrm{m}$ correspondant à une portion de longueur $\ell$ du câble ainsi formé en fonction de $I$, $\ell$, $R_1$ et $R_2$.

.....

d) En déduire l'expression de l'inductance propre par unité de longueur $\Lambda = \dfrac{L}{\ell} = \dfrac{2W_\mathrm{m}}{\ell I^2}$ du câble en fonction de $R_1$ et $R_2$.

.....

**Réponses mélangées**

$-\vec{e_z}$ $\quad \dfrac{\mu_0\vec{\mathcal{M}}}{2\pi z^3}$ $\quad$ 2 $\quad \dfrac{\mu_0 N I a}{2\pi}\ln\left(\dfrac{R+a/2}{R-a/2}\right)$ $\quad$ a $\quad j_{\mathrm{s},0}\ell$ $\quad \dfrac{\mu_0}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}$ $\quad -I$

$I$ $\quad 4Bd$ $\quad$ b $\quad$ b et c $\quad$ b, c et d $\quad$ 2 $\quad -\dfrac{e}{2m_\mathrm{e}}$ $\quad +\vec{e_z}$ $\quad -Bax$

$4d\ell j_0$ $\quad 4\times10^2\,\mathrm{Wb}$ $\quad -\dfrac{\mu_0 I m}{2\pi r^2}\vec{e_r}$ $\quad 3\times10^2\,\mathrm{Wb}$ $\quad +\vec{e_z}$ $\quad$ d $\quad \dfrac{\mu_0}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}$

a, c et d $\quad$ c $\quad \dfrac{\mu_0 N I}{2\pi r}$ $\quad$ d $\quad$ a et c $\quad$ a, c et d $\quad$ b $\quad mB_\mathrm{ext}$

a et e $\quad$ b $\quad$ a et d $\quad -\dfrac{e}{T}\underbrace{\pi r^2\vec{e_z}}_{\vec{S}}$ $\quad 0$ $\quad$ d $\quad 0$ $\quad$ a $\quad \dfrac{7\pi}{2}Bd$

$\dfrac{\mu_0 I^2\ell}{4\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}$ $\quad -2Bd$ $\quad$ d $\quad$ d $\quad -Ba^2$ $\quad 2j_0 S\dfrac{b}{a}$ $\quad$ b $\quad \dfrac{\mu_0 I\ell}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}$ $\quad$ d

$4\pi R^2 j_r(R)$ $\quad -\mu_0 n_2 I_2\vec{e_y}$ $\quad$ b $\quad +\vec{e_z}$ $\quad$ c $\quad 4I$ $\quad 1\times10^1\,\mathrm{T}$ $\quad \dfrac{mB_\mathrm{ext}}{Mg}$ $\quad 0$

► Réponses et corrigés page 427

# Équations de Maxwell

**Prérequis**
Équations de Maxwell. Opérateurs différentiels.

**Constantes utiles**

→ Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\ \mathrm{F \cdot m^{-1}}$

→ Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 1{,}26 \times 10^{-6}\ \mathrm{T \cdot m \cdot A^{-1}}$

→ dans le vide : $\varepsilon_0 \mu_0 = \dfrac{1}{c^2}$, où $c$ est la célérité de la lumière dans le vide

## Pour commencer

### Entraînement 6.1 — Équations de Maxwell et dimensions.

On munit l'espace d'un repère cartésien $(x, y, z)$ et on note $t$ la dépendance temporelle.

On s'intéresse aux équations de Maxwell auxquelles obéissent les champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ dans un milieu caractérisé par une densité volumique de charge $\rho$ et une densité volumique de courant $\vec{j}$.

a) Parmi les quatre équations suivantes, laquelle n'est pas une équation de Maxwell ?

(a) $\mathrm{div}(\vec{E}) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

(b) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

(c) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

(d) $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\vec{j}) = 0$

.....

On s'intéresse aux relations entre les dimensions qui découlent des équations de Maxwell.

On considère les dimensions suivantes : $L$ pour une longueur, $T$ pour un temps, $M$ pour une masse et $I$ pour une intensité du courant électrique.

On rappelle l'expression de la force de Lorentz : $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

b) Donner la dimension d'une charge électrique $q$ .....

c) Donner la dimension d'un champ magnétique à l'aide de l'expression de la force de Lorentz.

.....

d) Donner la dimension d'un champ électrique à l'aide de l'expression de la force de Lorentz.

.....

e) Retrouver la dimension d'un champ électrique, à l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday.

.....

**Entraînement 6.2 — Courants et ordres de grandeurs.**

L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit aussi, en introduisant le courant de conduction $\vec{j}_{\text{cond}}$ et le courant de déplacement $\vec{j}_{\text{dépl}}$ :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0\big(\vec{j}_{\text{cond}} + \vec{j}_{\text{dépl}}\big), \quad \text{qui est équivalente à} \quad \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0\,\vec{j}_{\text{cond}} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$$

On admet la loi d'Ohm $\vec{j}_{\text{cond}} = \sigma\vec{E}$ et on considère un champ électrique $\vec{E} = E_0\cos(\omega t + \varphi)\vec{e_x}$.

a) Comment s'exprime l'ordre de grandeur de la quantité $\alpha = \dfrac{\|\vec{j}_{\text{cond}}\|}{\|\vec{j}_{\text{dépl}}\|}$ ?

(a) $\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ (c) $\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0\omega}$

(b) $\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}$

.....

b) Laquelle des conditions suivantes permet d'obtenir $\alpha \gg 1$ dans un conducteur (où $\sigma$ a pour ordre de grandeur $10^7\,\text{S}\cdot\text{m}^{-1}$) ?

(a) $f \gg 10^3$ Hz (c) $f \gg 10^{17}$ Hz

(b) $f \gg 10^9$ Hz

.....

On considère une onde électromagnétique de pulsation $\omega = 1{,}0\,\text{rad}\cdot\text{MHz}$.

c) Calculer $\alpha$ si cette onde se propage dans un métal de conductivité $\sigma = 1{,}0\times10^7\,\text{S}\cdot\text{m}^{-1}$ .

d) Calculer $\alpha$ si cette onde se propage dans de l'eau de mer avec $\sigma = 1{,}0\times10^{-4}\,\text{S}\cdot\text{m}^{-1}$ ....

e) Calculer $\alpha$ si cette onde se propage dans du verre avec $\sigma = 1{,}0\times10^{-13}\,\text{S}\cdot\text{m}^{-1}$ .....

**Entraînement 6.3 — Transposition réels $\longleftrightarrow$ complexes.**

On considère les deux champs électriques suivants :

$$\underline{\vec{E}}_1 = E_0\exp[\text{i}(\omega t - kx)]\vec{e_y} - \text{i}E_0\exp[\text{i}(\omega t - kx)]\vec{e_z}$$
$$\text{et} \quad \vec{E}_2 = -E_0\cos[\omega t + kz]\vec{e_x} - E_0\sin[\omega t + kz]\vec{e_y}.$$

a) Exprimer le champ $\vec{E}_1$ associé à $\underline{\vec{E}}_1$.

.....

b) Exprimer le champ $\underline{\vec{E}}_2$ associé à $\vec{E}_2$.

.....

# Champs et opérateurs

**Entraînement 6.4 — Voir la divergence.**

Le théorème de Green-Ostrogradski affirme que pour un champ de vecteurs $\vec{A}$, on a

$$\iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{div}(\vec{A}) \cdot \mathrm{d}\tau = \oiint_{\mathcal{S}} \vec{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

où $\mathcal{V}$ est le volume délimité par la surface $\mathcal{S}$ fermée.

Ce théorème indique que si le flux élémentaire $\mathrm{d}\phi$ du champ de vecteurs $\vec{A}$ à travers une surface infinitésimale fermée $\mathrm{d}\mathcal{S}$ autour d'un point M est non nul, alors la divergence de ce même champ de vecteurs au point M est non nulle. En particulier, si $\mathrm{d}\phi > 0$ (flux sortant) alors $\mathrm{div}\,\vec{A}(\mathrm{M}) > 0$.

On considère le champ de vecteurs suivant :

Dans chacune des zones, en estimant le flux du champ de vecteurs à travers chacune d'entre elles, indiquer si la divergence du champ de vecteurs est nulle, positive ou négative.

a) Zone 1 .....

b) Zone 2 .....

c) Zone 3 .....

d) Zone 4 .....

e) Zone 5 .....

f) Zone 6 .....

**Entraînement 6.5 — Voir le rotationnel.**

Le théorème de Stokes affirme que pour un champ de vecteurs $\vec{A}$, on a

$$\iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$$

où $\mathcal{S}$ est la surface délimitée par le contour $\Gamma$ fermé.

Ce théorème indique que si la circulation élémentaire $\mathrm{d}\mathcal{C}$ du champ de vecteurs $\vec{A}$ à travers un contour fermé $\Gamma$ délimitant une surface infinitésimale $\mathrm{d}S$ est non nulle, alors le rotationnel de ce même champ de vecteurs au point M est non nul. En particulier, si $\mathrm{d}\mathcal{C} > 0$ alors $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}(\mathrm{M}) > 0$.

On considère les champs de vecteurs suivants :

Dans chacune des zones, en estimant la circulation du champ de vecteurs sur chacune d'entre elles, indiquer si la composante du rotationnel selon $\vec{e_z}$ du champ de vecteurs est nulle, positive ou négative.

a) Zone 1 ..... ☐ c) Zone 3 ..... ☐ e) Zone 5 ..... ☐

b) Zone 2 ..... ☐ d) Zone 4 ..... ☐ f) Zone 6 ..... ☐

# Conservation de la charge et potentiel électrique

**Entraînement 6.6 — Conservation de la charge.**

On note $\rho$ la densité volumique de charge et $\vec{j}$ le vecteur densité volumique de courant.

On rappelle les équations de Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ et de Maxwell-Gauss : $\text{div}\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$.

On rappelle aussi le théorème de Schwarz : pour tout champ $\vec{A}$, on a $\text{div}\left(\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \dfrac{\partial(\text{div}\,\vec{A})}{\partial t}$.

a) Développer $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B})$ à l'aide de l'équation de Maxwell-Ampère.

.....

b) Exprimer $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B})$ en injectant l'équation de Maxwell-Gauss.

.....

c) On rappelle que pour tout vecteur $\vec{A}$, $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}) = 0$. Quelle équation obtient-on ?

(a) $\text{div}\,\vec{j} - \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ (b) $\text{div}\,\vec{j} + \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ (c) $\mu_0\,\text{div}\,\vec{j} + \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ (d) $\mu_0\,\text{div}\,\vec{j} - \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0$

.....

**Entraînement 6.7 — Piège électrostatique.**

On considère une région de l'espace, vide de charges, dans laquelle règne un potentiel :

$$V(x,y,z) = \frac{V_0}{a^2}\left(x^2 + 2y^2 - 3z^2\right),$$

où $V_0$ (en V) et $a$ sont des constantes positives.

a) Donner l'unité de $a$ .....

L'opérateur laplacien en coordonnées cartésiennes est donné par $\Delta V = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}$.

b) Déterminer l'expression de $\Delta V$ .....

c) L'équation de Poisson $\Delta V = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ est-elle vérifiée ? .....

d) L'allure de $V(x,0,0)$ en fonction de l'abscisse $x$ est une portion :

(a) de cercle (b) d'hyperbole (c) d'exponentielle (d) de parabole

.....

L'opérateur gradient en coordonnées cartésiennes est donné par $\overrightarrow{\text{grad}}\,V = \dfrac{\partial V}{\partial x}\vec{e_x} + \dfrac{\partial V}{\partial y}\vec{e_y} + \dfrac{\partial V}{\partial z}\vec{e_z}$.

e) Calculer le champ électrique $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$ en O, origine du repère .....

# Théorèmes de Stokes-Ampère et Green-Ostrogradski

**Entraînement 6.8 — Théorème de Stokes-Ampère.**

Dans le repère $(\mathrm{O}, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$, considérons le vecteur fixe

$$\vec{\omega} = \omega\, \vec{e_z}.$$

Rappelons que, pour tout point M de l'espace, on a

- $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\vec{e_r} + z\vec{e_z}$ dans la base cylindrique $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ ;
- $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$ dans la base cartésienne.

On considère par ailleurs un cylindre infini d'axe O$z$ et de rayon $a$.

On considère le champ de vecteurs défini par :

$$\begin{cases} \vec{v} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OM}} & \text{pour } r < a\,; \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{v} = \vec{0} & \text{pour } r > a\ . \end{cases}$$

a) Déterminer l'expression de $\vec{v} = \omega\vec{e_z} \wedge (r\vec{e_r} + z\vec{e_z})$ .....

b) Déterminer l'expression de $\vec{v} = \omega\vec{e_z} \wedge (x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z})$ .....

En coordonnées cartésiennes, l'opérateur rotationnel est défini par :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\vec{e_z}.$$

c) Calculer $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{v}$ pour $r < a$ en coordonnées cartésiennes .....

Le théorème de Stokes s'énonce de la façon suivante.

Soit $\Gamma$ est un contour fermé et orienté, et soit $\Sigma$ une surface quelconque s'appuyant sur $\Gamma$ et orientée avec la règle du tire-bouchon de Maxwell ou la règle de la main droite. Pour un champ de vecteur $\vec{A}$ défini en tout point, on a :

$$\oint_\Gamma \vec{A}_{(\mathrm{M})} \cdot \vec{\mathrm{d}\ell}_{(\mathrm{M})} = \iint_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{A})_{(\mathrm{M})} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S_{(\mathrm{M})}.$$

En appliquant ce théorème sur un contour fermé circulaire $\Gamma$ de rayon $r$, calculer $v(r)$ dans les deux cas suivants :

d) Pour $r < a$ .....

e) Pour $r > a$ .....

**Entraînement 6.9 — Application du théorème de Green-Ostrogradski.**

On considère le champ suivant :

$$\vec{A}(r,\theta,\varphi) = (ar - br^3)\vec{e_r},$$

en coordonnées sphériques, où $a$ et $b$ sont des constantes.

En coordonnées sphériques, l'opérateur divergence est défini par :

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}.$$

a) Calculer $\operatorname{div}(\vec{A})$ .....

b) Quelle est l'expression de l'élément de volume d'une boule en coordonnées sphériques ?

(a) $\mathrm{d}\tau = r\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

(b) $\mathrm{d}\tau = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

(c) $\mathrm{d}\tau = r\sin\theta\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

(d) $\mathrm{d}\tau = r^2\sin\theta\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

.....

On rappelle le théorème de Green-Ostrogradski.

Soit $\mathcal{S}$ une surface fermée de volume intérieur $\mathcal{V}$, orientée vers l'extérieur par convention. Pour un champ de vecteur $\vec{A}$ défini en tout point, on a :

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div}(\vec{A})\,\mathrm{d}\tau.$$

c) À l'aide de ce théorème, exprimer le flux $\oiint_{\text{sphère}} \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ du champ à travers une sphère de centre O de rayon $R$.

.....

d) Quelle est l'expression de l'élément de surface d'une sphère en coordonnées sphériques ?

(a) $\mathrm{d}S = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

(b) $\mathrm{d}S = r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

(c) $\mathrm{d}S = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

.....

e) Calculer directement le flux du champ à travers la sphère de centre O et de rayon $R$ à partir de l'expression du champ $\vec{A}$.

.....

# Jouons avec les équations de Maxwell

On donne pour les quatre prochains exercices les expressions du rotationnel en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e_z}$$

et en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e_z}.$$

**Entraînement 6.10 — Existence ou non d'un champ électromagnétique.**

Vérifier à l'aide des équations de Maxwell si les champs électromagnétiques suivants existent ou non.

*Répondre par « oui » par « non ».*

On se place dans le vide donc on rappelle que $\varepsilon_0\mu_0 = \dfrac{1}{c^2} = \dfrac{\omega^2}{k^2}$

a) $\vec{E} = E_0\cos(\omega t - kx + \varphi_0)\vec{e_y}$ et $\vec{B} = \dfrac{E_0 k}{\omega}\cos(\omega t - kx + \varphi_0)\vec{e_z}$ .....

b) $\vec{E} = E_0\cos(\omega t + ky)\vec{e_y}$ et $\vec{B} = \dfrac{E_0 k}{\omega}\cos(\omega t + ky)\vec{e_y}$ .....

c)

$$\begin{cases} \vec{E} = E_1\cos(\omega t + kz + \varphi_1)\vec{e_x} + E_2\cos(\omega t + kz + \varphi_2)\vec{e_y} \\ \vec{B} = \dfrac{E_2 k}{\omega}\cos(\omega t + kz + \varphi_2)\vec{e_x} - \dfrac{E_1 k}{\omega}\cos(\omega t + kz + \varphi_1)\vec{e_y} \end{cases}$$

.....

**Entraînement 6.11 — Utilisation de l'équation de Maxwell-Faraday.**

On rappelle l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

On se place dans un milieu vide de charge et de courant (sans champ statique).

Déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}$ associé à chacun des champs électriques $\vec{E}$ suivants.

a) En coordonnées cartésiennes : $E_0\cos(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_x}$

.....

b) En coordonnées cartésiennes : $E_0\cosh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z)\exp(-\alpha t)\vec{e_x}$

.....

c) En coordonnées cylindriques : $\dfrac{E_0}{(kr)^2}\cos(\omega t)\vec{e_z}$

.....

**Entraînement 6.12 — Utilisation de l'équation de Maxwell-Ampère.**

On rappelle l'équation de Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

On se place dans un milieu vide de charge et de courant (pas de champs statiques).

Déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}$ associé à chacun des champs magnétiques $\vec{B}$ suivants.

a) En coordonnées cartésiennes : $B_0 \sin(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_y}$

.....

b) En coordonnées cartésiennes : $B_0 \sinh(\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\alpha z) \exp(-\alpha t)\vec{e_y}$

.....

c) En coordonnées cylindriques : $\dfrac{cB_0}{(kr)^2} \sin(\omega t)\vec{e_\theta}$

.....

**Entraînement 6.13 — Détermination de $\vec{E}$ à partir de $\vec{B}$.**

Le champ magnétique créé dans un solénoïde infini de rayon $R$, d'axe (O$z$), comportant $n$ spires par unité de longueur et parcouru par un courant d'intensité électrique $i(t)$ dépendant du temps est

$$\vec{B} = \mu_0 n i(t) \vec{e_z}.$$

On rappelle que le champ magnétique à l'extérieur d'un solénoïde est nul.

On rappelle les expressions de l'équation de Maxwell-Faraday sous forme locale et intégrale :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{et} \qquad \oint_\Gamma \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\iint_\Sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}.$$

a) Par analyse des invariances, déterminer la ou les variable(s) dont dépend(ent) le champ électrique. On adoptera les coordonnées cylindriques.

(a) $r$ (b) $\theta$ (c) $z$ (d) $r$ et $\theta$

.....

Le champ électrique $\vec{E}$ est dirigé selon $\vec{e_\theta}$.

En utilisant l'équation locale de Maxwell-Faraday, déterminer l'expression du champ électrique créé par le solénoïde dans les deux cas suivants :

b) pour $r < a$ .....

c) pour $r > a$ sachant que le champ est continu .....

On souhaite retrouver ces résultats en passant par la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday. Cette méthode nécessite de choisir une surface sur laquelle nous allons calculer le flux et la circulation.

d) En tenant compte de la direction du champ $\vec{B}$ et des dépendances spatiales du champ $\vec{E}$, quelle surface pouvons nous choisir ?

(a) Une sphère de rayon $r$

(b) Un cylindre de hauteur $h$ et de rayon $r$

(c) Un plan rectangulaire de dimension $r \times z$

(d) Un disque d'axe (O$z$) et de rayon $r$

.....

En utilisant la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday sur cette surface, déterminer l'expression du champ électrique créé par le solénoïde dans les deux cas suivants :

e) pour $r < a$ .....

f) pour $r > a$ .....

## Vecteur de Poynting

**Entraînement 6.14 — Vecteur de Poynting.**

La forme générale du vecteur de Poynting vérifie : $\vec{\Pi} = \dfrac{1}{\mu_0}\vec{E} \wedge \vec{B}$

Développer les vecteurs de Poynting pour les champs électromagnétiques suivants :

a) $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_x}$ et $\vec{B} = B_0 \sin(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_y}$ ....

b) $\vec{E} = E_0 \cosh(\beta z) \exp(-\alpha t)\vec{e_z}$ et $\vec{B} = B_0 \sinh(\beta z) \exp(-\alpha t)\vec{e_y}$ .

**Entraînement 6.15 — Vecteur de Poynting complexe.**

Une onde électromagnétique plane monochromatique se propage suivant l'axe (O$z$). Les expressions des composantes du champ électrique sont :

$$\vec{E} \left| \begin{array}{ll} E_x & = E_{0x} \cos(k\,z - \omega\,t + \psi_1) \\ E_y & = E_{0y} \cos(k\,z - \omega\,t + \psi_2) \\ E_z & = 0 \end{array} \right.$$

Le vecteur d'onde est noté $\vec{k} = k\,\vec{e_z}$ avec $\omega = k\,c$.

***On travaille tout d'abord en notation réelle :***

a) Déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B} = \dfrac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$ .....

b) Déterminer l'expression du vecteur du Poynting $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ ....

***On travaille maintenant en notation complexe :***

c) Déterminer l'expression du champ électrique $\underline{\vec{E}}$ .....

d) Déterminer l'expression du champ magnétique $\underline{\vec{B}}$ .....

e) Déterminer l'expression du conjugué du champ magnétique $\underline{\vec{B}}^*$ ..

f) Calculer les composantes du vecteur complexe $\dfrac{\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*}{2\,\mu_0}$ .....

***Conclusion :***

g) On en déduit que $\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \left\langle \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right\rangle$ vaut : (a) $\left\langle \dfrac{\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*}{2\,\mu_0} \right\rangle$ (b) $\left\langle \dfrac{2\,\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*}{2\,\mu_0} \right\rangle$ (c) $\left\langle \dfrac{\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*}{\mu_0} \right\rangle$ ?

.....

**Entraînement 6.16 — Un bilan d'énergie.**

On considère un condensateur composé de deux disques métalliques de surface $S$, de rayon $R$, distants de $L \ll R$ et séparés par du vide. Lors de la charge, on suppose que, dans le système de coordonnées cylindriques, les champs électrique et magnétique régnant entre les deux armatures sont :

$$\vec{E}(t) = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0 S}\vec{e_z} \qquad \text{et} \qquad \vec{B}(r,t) = \frac{\mu_0}{2S}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} r \vec{e_\theta}.$$

On ne considère aucun courant de conduction dans cet exercice.

On considère que l'énergie stockée dans le condensateur est essentiellement sous forme électrique. La densité volumique d'énergie électromagnétique s'écrit alors $e = \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2}$.

a) Calculer l'énergie stockée $\mathcal{E} = \iiint_{\mathcal{V}} e\,\mathrm{d}\tau$ dans le condensateur sachant que l'élément de volume $\mathrm{d}\tau$, en coordonnées cylindriques, vaut $\mathrm{d}\tau = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$.

.....

b) Calculer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ en $r = R$ .....

c) Calculer le flux sortant $\phi = \iint_{\text{cylindre}} \vec{\Pi} \cdot \vec{\mathrm{d}S}$ à travers la surface cylindrique délimitant le volume entre les deux armatures.

.....

d) Les résultats précédents permettent de déduire que :

(a) $\mathcal{E} + \phi = 0$ (b) $\mathcal{E} + \dfrac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ (c) $\dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \phi = 0$ (d) $\dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \dfrac{\partial \phi}{\partial t} = 0$

.....

e) On rappelle le théorème de Green-Ostrogradski.

Soit $\Sigma$ une surface fermée de volume intérieur $\mathcal{V}$, orientée vers l'extérieur par convention. Pour un champ de vecteur $\vec{A}$ défini en tout point, on a :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{\mathrm{d}S} = \iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{div}(\vec{A})\,\mathrm{d}\tau.$$

En utilisant ce théorème, quelle relation (appelée théorème de Poynting) obtient-on ?

(a) $\dfrac{\partial e}{\partial t} + \dfrac{\partial\left(\mathrm{div}\,\vec{\Pi}\right)}{\partial t} = 0$

(b) $\dfrac{\partial e}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{\Pi} = 0$

(c) $e + \dfrac{\partial\left(\mathrm{div}\,\vec{\Pi}\right)}{\partial t} = 0$

(d) $e + \mathrm{div}\,\vec{\Pi} = 0$

.....

## Réponses mélangées

Oui (d) $\dfrac{1}{c}\left(E_{0x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\,z-\omega\,t+\psi_1)}\,\vec{e_y} - E_{0y}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\,z-\omega\,t+\psi_2)}\,\vec{e_x}\right)$ $\dfrac{M\cdot L}{I\cdot T^3}$ Nulle Négative $\dfrac{E_{0x}^2+E_{0y}^2}{2\,\mu_0\,c}\,\vec{e_z}$

$E_0\cos[\omega t - kx]\vec{e_y} + E_0\sin[\omega t - kx]\vec{e_z}$ $r\omega\vec{e_\theta}$ $-E_0\exp[\mathrm{i}(\omega t + kz)]\vec{e_x} + \mathrm{i}E_0\exp[\mathrm{i}(\omega t + kz)]\vec{e_y}$ m

Positive $-\dfrac{E_0 B_0}{\mu_0}\cosh(\beta z)\sinh(\beta z)\exp(-2\alpha t)\vec{e_x}$ Négative Positive Positive

(c) $r\omega$ $1{,}1\times10^{1}$ $-\dfrac{e}{\varepsilon_0 S}Q\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ $\dfrac{c^3 B_0}{k^2\omega r^3}\cos(\omega t)\vec{e_z}$ $-\omega y\vec{e_x} + \omega x\vec{e_y}$

$\dfrac{E_0 B_0}{\mu_0}\cos(\omega t - kz + \varphi)\sin(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_z}$ Nulle $\dfrac{E_x^2+E_y^2}{\mu_0\,c}\,\vec{e_z}$ Positive

$\dfrac{M}{I\cdot T^2}$ (d) (c) Nulle $4\pi R^3(a - bR^2)$ Négative (b) $\dfrac{a^2}{r}\omega$

$\mu_0\,\mathrm{div}\,\vec{j} + \mu_0\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$ $1{,}1\times10^{-8}$ $-\mu_0 n\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\dfrac{R^2}{2r}\vec{e_\theta}$ oui $-\dfrac{R}{2\varepsilon_0 S^2}Q\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\vec{e_r}$

(a) $E_0\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sinh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z)\exp(-\alpha t)\vec{e_y}$ $\dfrac{LQ^2}{2\varepsilon_0 S}$ (c) (d) (b)

$\dfrac{B_0}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\cosh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z)\exp(-\alpha t)\vec{e_x}$ $\dfrac{M\cdot L}{I\cdot T^3}$ $B_0\dfrac{k}{\varepsilon_0\mu_0\omega}\sin(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_x}$ (a) 0

$-\mu_0 n\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\dfrac{r}{2}\vec{e_\theta}$ $-\dfrac{E_{0y}}{c}\cos(k\,z - \omega\,t + \psi_2)\,\vec{e_x} + \dfrac{E_{0x}}{c}\cos(k\,z - \omega\,t + \psi_1)\,\vec{e_y}$ $4\pi R^3(a - bR^2)$ Nulle $3a - 5br^2$

$-\dfrac{2E_0}{k^2 r^3}\displaystyle\int\cos(\omega t)\vec{e_\theta}\,\mathrm{d}t$ $-\mu_0 n\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\dfrac{r}{2}\vec{e_\theta}$ (b) $2\omega\vec{e_z}$ $\dfrac{1}{c}\left(E_{0x}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k\,z-\omega\,t+\psi_1)}\,\vec{e_y} - E_{0y}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k\,z-\omega\,t+\psi_2)}\,\vec{e_x}\right)$

(b) $E_0\dfrac{k}{\omega}\cos(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_y}$ $I\cdot T$ $\mu_0\,\mathrm{div}\,\vec{j} + \varepsilon_0\,\mu_0\dfrac{\partial\,\mathrm{div}\,\vec{E}}{\partial t}$ $-\mu_0 n\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\dfrac{R^2}{2r}\vec{e_\theta}$

$E_{0x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\,z-\omega\,t+\psi_1)}\,\vec{e_x} + E_{0y}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\,z-\omega\,t+\psi_2)}\,\vec{e_y}$ oui Negative non $\vec{0}$ $1{,}1\times10^{12}$

► Réponses et corrigés page 434

# Induction

**Fiche du « Cahier d'entraînement 1re année » pour se préparer**
⟶ *Champ magnétique, Induction*

**Prérequis**
Champ magnétique. Loi de Faraday. Orientation d'une surface à l'aide de la règle de la main droite (règle du tire-bouchon).
Flux du champ magnétique $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{\mathrm{d}S}$.
Force élémentaire de Laplace $\mathrm{d}\vec{F_\mathrm{L}} = i\vec{\mathrm{d}\ell} \wedge \vec{B}$. Loi des mailles.

## Pour commencer

### Entraînement 7.1 — Orientation d'une surface.

On associe à un contour orienté son vecteur normal en utilisant la règle dite de la main droite ou du tire-bouchon.

Pour chaque contour $\Gamma_i$ orienté suivant, exprimer le vecteur normal unitaire $\vec{n_i}$ de la surface qu'il délimite en fonction des vecteurs $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$.

a) $\vec{n_1}$ .....

b) $\vec{n_2}$ .....

c) $\vec{n_3}$ .....

d) $\vec{n_4}$ .....

e) $\vec{n_5}$ .....

f) $\vec{n_6}$ .....

## Entraînement 7.2 — Orientation d'un contour.

On associe à un contour orienté son vecteur normal en utilisant la règle dite de la main droite ou du tire-bouchon. Quelle représentation du contour pourrait correspondre aux vecteurs suivants ?

*La réponse peut être « aucune » !*

a) $-\vec{e_y}$ ..... ☐

b) $-\vec{e_x}$ ..... ☐

c) $\vec{e_z}$ ..... ☐

d) $\vec{e_x}$ ..... ☐

## Entraînement 7.3 — Varie ou ne varie pas ? Telle est la question.

Soit un cadre de vecteur normal $\vec{n}$ et un champ magnétique $\vec{B}$.

Dans les situations suivantes, le flux de $\vec{B}$ à travers le cadre varie-t-il au cours du temps ?

Répondre par « oui » ou « non ».

*On rappelle que le flux est défini par* $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$.

a) $\vec{B}$ est uniforme et initialement $\vec{B} \wedge \vec{n} = \vec{0}$. Le cadre tourne autour d'un de ses cotés ... ☐

b) Le cadre pénètre dans une zone où règne $\vec{B}$ uniforme. $\vec{B}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires ..... ☐

c) Le champ $\vec{B}(t)$ dépend du temps et est perpendiculaire à $\vec{n}$. Le cadre est fixe et indéformable.

..... ☐

d) Le cadre est animé d'un mouvement de translation rectiligne dans $\vec{B}$ uniforme et constant.

..... ☐

e) La surface du cadre diminue. Le champ $\vec{B}$ est uniforme, colinéaire de sens opposé à $\vec{n}$.

..... ☐

f) Le cadre est fixe. Le champ $\vec{B}$ est colinéaire à $\vec{n}$, non uniforme et indépendant du temps.

..... ☐

# Flux du champ magnétique

**Entraînement 7.4 — Flux à travers un circuit mobile (I).**

On considère un circuit carré de côté $\ell$ se déplaçant à la vitesse $\vec{v} = v\vec{e_x}$ et dont le côté droit est repéré par l'abscisse $x_c$.

Un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e_z}$ règne dans la zone comprise entre $x = 0$ et $x = a > \ell$.

On oriente le circuit tel que $\vec{n} = -\vec{e_z}$.

Exprimer le flux du champ magnétique $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS}$ en fonction de $B$, $x_c$, $\ell$ et $a$ si :

a) $x_c < 0$ .....

b) $0 < x_c < \ell$ .....

c) $\ell < x_c < a$ .....

d) $a < x_c < a + \ell$ .....

En déduire la dérivée du flux par rapport au temps en fonction de $B$, $v$ et $\ell$ si :

e) $x_c < 0$ .....

f) $0 < x_c < \ell$ .....

g) $\ell < x_c < a$ .....

h) $a < x_c < a + \ell$ .....

**Entraînement 7.5 — Flux à travers un disque.**

On considère le système de coordonnées cylindriques $(r, \theta, z)$ de base $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$. Soit un champ magnétique uniforme

$$\vec{B} = B_m \cos(\omega t)\vec{e_z} \text{ si } r < a \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{0} \text{ si } r > a.$$

Déterminer le flux $\Phi$ du champ magnétique à travers un disque de rayon $R$ d'axe $z$ et de vecteur normal $\vec{e_z}$ si :

a) $R < a$ .....

b) $R > a$ .....

On considère maintenant un champ magnétique $\vec{B'}$ défini par

$$\vec{B'}(\mathrm{M}) = B_0\left(1 - \frac{r}{a}\right)\vec{e_z} \text{ si } r < a \qquad \text{et} \qquad \vec{B'} = \vec{0} \text{ si } r > a.$$

On désire exprimer son flux $\Phi'$ aussi à travers le disque de rayon $R$ d'axe $z$ et de vecteur normal $\vec{e_z}$.

c) Quelle sera l'expression de l'élément de surface $dS$ du disque à considérer pour calculer le flux de $\vec{B'}$ ?

.....

Déterminer $\Phi'$ si :

d) $R < a$ .....

e) $R > a$ .....

**Entraînement 7.6 — Flux à travers un circuit mobile (II).**

Dans une zone de champ magnétique uniforme

$$\vec{B} = B\vec{e_z},$$

on considère une spire orientée de rayon $R$ en rotation autour d'un axe $\Delta$ perpendiculaire à l'axe $(\mathrm{O}z)$ avec une vitesse angulaire constante $\omega$.

a) Quelle est l'expression du flux de $\vec{B}$ à travers la spire à $t$ quelconque ? .....

Exprimer le flux en fonction de $B$ et $R$ pour les différentes valeurs de $\omega t$ suivantes :

b) $\frac{\pi}{2}$ .... c) $\frac{2\pi}{3}$ ... d) $\frac{11\pi}{6}$ .. e) $2\pi$ ...

**Entraînement 7.7 — Flux propre d'un tore.**

Soit un tore d'axe $(\mathrm{O}z)$, constitué de $N$ spires carrées de coté $a$. Le champ magnétique créé par ce dispositif est tel que

$$\vec{B}(\mathrm{M}) = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}\vec{e_\theta}$$

pour $0 < z < a$ ou $d < r < d + a$, et nul sinon.

On désire, dans un premier temps, calculer le flux de ce champ à travers une seule des spires. Le vecteur normal à la spire est le vecteur $\vec{e_\theta}$.

a) Quelle sera la surface élémentaire $\mathrm{d}S$ à utiliser pour le calcul du flux $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}S\vec{e_\theta}$ ?

(a) $\mathrm{d}S = \mathrm{d}r\,\mathrm{d}z$ (b) $\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$ (c) $\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$ (d) $\mathrm{d}S = \mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$

.....

b) Quelle sera l'expression du flux à travers une spire ?

(a) $\Phi = \int_{r=d}^{a+d}\int_{z=0}^{a} \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}\,\mathrm{d}r \times \mathrm{d}z$

(b) $\Phi = \int_{r=0}^{a}\int_{z=0}^{a} \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}\,\mathrm{d}r \times \mathrm{d}z$

(c) $\Phi = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{a} \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} r\,\mathrm{d}\theta \times \mathrm{d}z$

(d) $\Phi = \int_{r=d}^{a+d}\int_{z=0}^{a} \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} r\,\mathrm{d}\theta \times \mathrm{d}z$

.....

c) En réalisant le calcul intégral, calculer $\Phi$ .....

d) En déduire l'expression du coefficient d'auto-induction $L$ défini par $\Phi_{\text{tore}} = LI$, où $\Phi_{\text{tore}}$ désigne le flux du champ créé par le tore à travers ses $N$ spires (aussi appelé flux propre).

.....

## Lien avec l'équation de Maxwell-Faraday

**Entraînement 7.8**

Soient un champ électrique $\vec{E} = E(r)\vec{e_\theta}$ et un champ magnétique $\vec{B} = B_0\cos(\omega t)\vec{e_z}$. Ils sont reliés par l'équation de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

On rappelle l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e_z}.$$

a) Quelle est l'équation vérifiée par $E(r)$ ?

(a) $\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}(rE(r))}{\mathrm{d}r} = -B_0\sin(\omega t)$

(b) $-\dfrac{\mathrm{d}(E(r))}{\mathrm{d}r} = B_0\omega\sin(\omega t)$

(c) $\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}(rE(r))}{\mathrm{d}r} = B_0\omega\sin(\omega t)$

(d) $\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}E(r)}{\mathrm{d}\theta} = B_0\omega\cos(\omega t)$

.....

b) En déduire $E(r)$.

*On prendra* $E(r=0) = 0$.

.....

## Systèmes d'équations couplées

**Entraînement 7.9**

Après écriture de la loi des mailles et de la relation fondamentale de la dynamique, un étudiant obtient ce système d'équations à résoudre :

$$\begin{cases} Ri + aBv = 0 \\ m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - iBa = mg. \end{cases}$$

a) Quelle est l'équation différentielle vérifiée par $v$ ?

(a) $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - \dfrac{a^2B^2v}{Rm} = g$

(b) $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{a^2B^2v}{R} = g$

(c) $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{a^2B^2v}{Rm} = g$

.....

b) La dimension temps est notée T, la masse par M. Quelle est la dimension du coefficient $\dfrac{a^2B^2}{Rm}$ ?

(a) $\mathrm{T}^{-1}$

(b) 1

(c) T

(d) $\mathrm{T}\cdot\mathrm{M}^{-1}$

.....

**Entraînement 7.10 — Passage en complexe.**

On considère un dispositif dont les équations mécaniques et électriques permettent d'établir le système suivant, où $u$ est une tension :

$$\begin{cases} Ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - \alpha B v = u \\ m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -iB\alpha - kz - hv \\ v = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}. \end{cases}$$

Les grandeurs $i$, $u$ et $v$ sont sinusoïdales donc du type $x(t) = X_\mathrm{m}\cos(\omega t + \varphi)$.

Leur grandeur complexe associée est du type $\underline{x}(t) = X_\mathrm{m}\exp(\mathrm{j}\omega t + \varphi)$ et leur amplitude complexe associée $\underline{X} = X_\mathrm{m}\exp(\mathrm{j}\varphi)$ (où $\mathrm{j}^2 = -1$)

a) Comment s'écrit le système après passage en complexe ?

(a) $\begin{cases} R\underline{I} + \dfrac{L}{\mathrm{j}\omega}\underline{I} - \alpha B\underline{V} = \underline{U} \\ \mathrm{j}m\omega\underline{V} = -B\alpha\underline{I} - \mathrm{j}k\omega\underline{V} - h\underline{V} \\ \underline{V} = \mathrm{j}\omega\underline{Z} \end{cases}$

(b) $\begin{cases} R\underline{I} + \mathrm{j}L\omega\underline{I} - \alpha B\underline{V} = U_\mathrm{m}\cos(\omega t) \\ \dfrac{m}{\mathrm{j}\omega}\underline{V} = -B\alpha\underline{I} - k\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}\underline{V} - h\underline{V} \\ \underline{V} = \mathrm{j}\omega\underline{Z} \end{cases}$

(c) $\begin{cases} R\underline{I} + \mathrm{j}L\omega\underline{I} - \alpha B\underline{V} = \underline{U} \\ \mathrm{j}m\omega\underline{V} = -B\alpha\underline{I} - k\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}\underline{V} - h\underline{V} \\ \underline{V} = \mathrm{j}\omega\underline{Z} \end{cases}$

.....

b) Exprimer l'amplitude complexe $\underline{V}$ en fonction de $\underline{I}$.

.....

c) Quelle est l'impédance complexe $\underline{Z_\mathrm{eq}} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{I}}$ en éliminant $\underline{V}$ dans les deux premières équations du système ?

(a) $\underline{Z_\mathrm{eq}} = R + \dfrac{L}{\mathrm{j}\omega} + \dfrac{\alpha^2 B^2}{h + \mathrm{j}(k\omega - \frac{m}{\omega})}$

(b) $\underline{Z_\mathrm{eq}} = R + \mathrm{j}L\omega + \alpha^2 B^2\left(h + \mathrm{j}\left(m\omega - \dfrac{k}{\omega}\right)\right)$

(c) $\underline{Z_\mathrm{eq}} = R + \mathrm{j}L\omega + \dfrac{\alpha^2 B^2}{h + \mathrm{j}(m\omega - \frac{k}{\omega})}$

(d) $\underline{Z_\mathrm{eq}} = \dfrac{R + \mathrm{j}L\omega + \alpha^2 B^2}{\left(h + \mathrm{j}\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)\right)}$

.....

**Entraînement 7.11 — Bilan de puissance.**

On considère le système d'équations électrique (EE) et mécanique (EM) suivant avec la force électromotrice induite $e = -Bav$, la force de Laplace de valeur $f_\mathrm{L} = Bai$ et $f$ une force exercée par un opérateur extérieur

$$\begin{cases} e = Ri & \text{(EE)} \\ m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = f + f_\mathrm{L} & \text{(EM)} \end{cases}$$

*On rappelle que l'énergie cinétique de la barre est* $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2$ *et que la puissance dissipée par effet Joule est* $\mathcal{P}_J = Ri^2$.

a) Exprimer, en fonction de $R$ et $i$, le terme $Bavi$ à partir de $e$ dans (EE).

.....

b) Exprimer, en fonction de $m, v$ et $f$, le terme $Bavi$ à partir de $f_\mathrm{L}$ dans (EM).

.....

c) Égaliser les expressions obtenues en a) et b) pour exprimer la puissance fournie par l'opérateur $fv$ en fonction de $E_\mathrm{c}$ et $\mathcal{P}_\mathrm{J}$.

*On rappelle que* $\left(f^2(x)\right)' = 2f'(x)f(x)$.

.....

# Force de Laplace

**Entraînement 7.12 — Force de Laplace sur une spire rectangulaire.**

Soit un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme, et un circuit 1 rectangulaire parcouru par un courant $i$.

Quelle est l'expression de la force de Laplace s'exerçant sur chaque portion du circuit 1 en fonction de $B$, $a$, $i$ et des vecteurs unitaires du repère ?

a) PQ .....

b) QR .....

c) RS .....

d) SP .....

e) Quelle est la résultante des forces de Laplace exercées sur le circuit 1 ? ....

**Entraînement 7.13 — Force de Laplace sur une spire triangulaire.**

On considère un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et un circuit 2, triangulaire, parcouru par un courant $i$.

Quelle est l'expression de la force de Laplace s'exerçant sur chaque portion du circuit 2 en fonction de $B$, $a$, $i$ et des vecteurs unitaires du repère ?

a) QR. ... b) RS .... c) SQ ....

**Entraînement 7.14 — Couple des forces de Laplace sur une spire.**

Un circuit mobile $\mathcal{C}$ de surface $S$ dans lequel circule un courant d'intensité $I$ est soumis à différents champs magnétiques uniformes et constants produits par trois bobines tels que :

$\vec{B_1} = B\vec{e_x}$ ; $\vec{B_2} = B\vec{e_y}$ ; $\vec{B_3} = B\vec{e_z}$.

*On rappelle que le moment magnétique d'une spire $\vec{\mathcal{M}}$ est défini par $\vec{\mathcal{M}} = I\vec{S}$ avec $\vec{S}$ son vecteur surface.*

a) Exprimer le vecteur surface $\vec{S}$ en fonction de $S$ et de la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$. .....

Exprimer le couple des forces de Laplace $\vec{\Gamma}_{\mathrm{L}} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$ que subit la spire $\mathcal{C}$ en fonction de $S$, $I$ et $B$ pour :

b) $\vec{B_1}$ ... c) $\vec{B_2}$ ... d) $\vec{B_3}$ ...

Les couples des forces de Laplace mettent la spire en rotation. Parmi les champs produits par les bobines, déterminer à l'aide de la règle de la main droite celui qui provoque les rotations du circuit $\mathcal{C}$ données ci-dessous.

e) La rotation de la spire autour de l'axe (O$x$) dans le sens direct.

(a) $\vec{B_1}$ (b) $\vec{B_2}$ (c) $\vec{B_3}$ (d) aucun

.....

f) La rotation de la spire autour de l'axe (O$y$) dans le sens direct ?

(a) $\vec{B_1}$ (b) $\vec{B_2}$ (c) $\vec{B_3}$ (d) aucun

.....

g) La rotation de la spire autour de l'axe (O$z$) dans le sens direct ?

(a) $\vec{B_1}$ (b) $\vec{B_2}$ (c) $\vec{B_3}$ (d) aucun

.....

# Autour du rail de Laplace

Le rail de Laplace est un circuit constitué de deux rails conducteurs parallèles horizontaux espacés d'une distance $\ell = 10$ cm sur lesquels repose une tige conductrice $\mathcal{T}$ de masse $m = 10$ g.

Celle-ci glisse sans frottement sur les rails tout en leur restant perpendiculaire.

On repère la position $x$ de la tige sur l'axe (O$x$). On suppose que les rails conducteurs et la tige ont une résistance nulle.

L'ensemble est soumis à un champ magnétique uniforme permanent $\vec{B} = B\vec{e_z}$, avec $B = 1$ T. À l'instant initial, la tige est lancée à une vitesse $\vec{v}(t=0) = v_0\vec{e_x}$.

Le composant $D$ est un dipôle dont la nature sera indiquée dans les exercices suivants.

**Entraînement 7.15 — Rail de Laplace (I).**

Dans cet entraînement, le dipôle $D$ est une résistance $R$. On peut établir l'équation électrique (EE) et l'équation mécanique (EM) suivantes :

$$\begin{cases} B\ell v = Ri & \text{(EE)} \\ m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -B\ell i & \text{(EM)} \end{cases}$$

a) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$ .....

b) Quelle est l'expression de la vitesse $v(t)$ ?

(a) $v_0 \exp\left(-\dfrac{mR}{B^2\ell^2}t\right)$

(b) $v_0 \exp\left(-\dfrac{B\ell}{mR}t\right)$

(c) $v_0 \exp\left(-\dfrac{B^2\ell^2}{mR}t\right)$

(d) $v_0 \exp\left(-\dfrac{B^2\ell^2}{R}t\right)$

.....

**Entraînement 7.16 — Rail de Laplace (II).**

Dans cet entraînement, le dipôle $D$ est un générateur de tension non idéal (constitué d'un générateur de tension idéal de force électromotrice $E$ en série avec sa résistance interne $r$). On peut établir l'équation électrique (EE) et l'équation mécanique (EM) suivantes :

$$\begin{cases} B\ell v(t) + E = ri & \text{(EE)} \\ m\dfrac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = -B\ell i & \text{(EM)} \end{cases}$$

a) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$ .....

b) Quelle est l'expression de la vitesse limite $v_{\text{lim}}$ atteinte par la tige ? .....

**Entraînement 7.17 — Rail de Laplace (III).**

Dans cet entraînement, le dipôle $D$ est une bobine d'inductance $L = 0,5$ H et de résistance $r = 1\ \Omega$.

On peut établir l'équation électrique (EE) et l'équation mécanique (EM) suivantes :

$$\begin{cases} B\ell v = L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + ri(t) & \text{(EE)} \\ m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -B\ell i(t) & \text{(EM)} \end{cases}$$

a) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ .....

b) Quelle est l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ ?

(a) $x^2 + \dfrac{r}{L}x + \dfrac{B^2\ell^2}{mL} = 0$

(b) $x^2 + \dfrac{L}{r}x + \dfrac{B^2\ell^2}{mL} = 0$

(c) $x^2 + \dfrac{L}{r}x + \dfrac{B^2\ell^2}{mL}x = 0$

.....

c) Comment peut-on qualifier le discriminant associé à l'équation caractéristique ?

(a) Il est strictement positif.

(b) Il est nul.

(c) Il est strictement négatif.

.....

d) Quelle est l'expression de $i(t)$ ?

*Les nombres $\alpha$ et $\beta$ sont réels.*

(a) $\alpha \mathrm{e}^{\left(-\frac{r}{2L}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r^2}{L^2}-4\frac{B^2\ell^2}{mL}}\right)t} + \beta \mathrm{e}^{\left(-\frac{r}{2L}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r^2}{L^2}-4\frac{B^2\ell^2}{mL}}\right)t}$

(b) $\mathrm{e}^{-\frac{r}{2L}t}\left(\alpha\cos\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{r^2}{L^2}-4\dfrac{B^2\ell^2}{mL}}t\right) + \beta\sin\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{r^2}{L^2}-4\dfrac{B^2\ell^2}{mL}}t\right)\right)$

(c) $(\alpha + \beta t)\mathrm{e}^{-\frac{r}{2L}t}$

(d) $\mathrm{e}^{-\frac{r}{2L}t}\left(\alpha\cos\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{4\dfrac{B^2\ell^2}{mL}-\dfrac{r^2}{L^2}}t\right) + \beta\sin\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{4\dfrac{B^2\ell^2}{mL}-\dfrac{r^2}{L^2}}t\right)\right)$

.....

**Entraînement 7.18 — Équations différentielles.**

On considère un circuit constitué d'un générateur de force électromotrice constante $E$, d'un dipôle et d'une tige mobile $\mathcal{T}$ de résistance $R$ repérée par la coordonnée $x$ sur l'axe $(\mathrm{O}x)$, plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$. On oriente le circuit dans le sens horaire.

On admet que le principe fondamental de la dynamique appliqué à la tige $\mathcal{T}$ selon l'axe $(\mathrm{O}x)$ permet d'écrire la relation $m\ddot{x} = iaB$. De plus, la force électromotrice induite est $e = -Ba\dot{x}$.

On étudie les cas où le dipôle correspond à ces trois montages suivants.

a) Quel sera le montage complet en tenant compte de la force électromotrice induite $e$ ?

.....

b) Exprimer la tension $u$ à partir de la loi des mailles en fonction de $E$, $i$, $R$, $B$, $a$ et $\dot{x}$.

.....

c) Exprimer $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ en fonction de $B$, $a$, $m$, $R$, $i$ et de $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ .....

d) Donner l'équation différentielle vérifiée par $i$ pour le dipôle 1.

.....

e) Donner l'équation différentielle vérifiée par $i$ pour le dipôle 2.

.....

f) Donner l'équation différentielle vérifiée par $i$ pour le dipôle 3.

.....

# Autres entraînements

**Entraînement 7.19 — Vitesse limite.**

L'expression de la vitesse $v(t)$ d'une tige sur des rails de Laplace a pour expression

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{e}{Ba}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

a) La dimension temps est notée T, la longueur par L. Comment s'écrit la dimension du coefficient $\tau$ ?

(a) 1
(b) T
(c) $\mathrm{T}^{-1}$
(d) $\mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-1}$

.....

b) En supposant qu'à $t = 0$, $x(t = 0) = x_0$, déterminer $x(t)$.

.....

**Entraînement 7.20 — Un système couplé.**

Après écriture de la loi des mailles et de la relation fondamentale de la dynamique, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} Ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + aBv = 0 \\ m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - iBa = mg. \end{cases}$$

a) Quelle est l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$ ?

(a) $\dfrac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{aBv}{Lm} = \dfrac{Rg}{L}$

(b) $\dfrac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{a^2B^2v}{Lm} = \dfrac{Rg}{L}$

(c) $\dfrac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - \dfrac{a^2B^2v}{Lm} = \dfrac{Rg}{L}$

.....

b) La dimension temps est notée T, la longueur par L. Quelle est la dimension du coefficient $\dfrac{Rg}{L}$ ?

(a) 1
(b) $\mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-3}$
(c) $\mathrm{L}^{-1} \cdot \mathrm{T}^{3}$
(d) $\mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-2}$

.....

**Entraînement 7.21 — Force de Laplace.**

Soit une bobine de $N$ spires de rayon $R$ d'axe (O$z$) et soumise à un champ magnétique extérieur radial $\overrightarrow{B_{\text{ext}}} = B\overrightarrow{e_r}$ dans le système de coordonnées cylindriques.

a) Donner l'expression d'un élément de longueur d$\ell$ de la bobine.

(a) d$r$ (b) d$z$ (c) d$x$ (d) $R\,\mathrm{d}\theta$

.....

b) Déterminer l'expression de la force de Laplace s'exerçant sur la bobine.

.....

**Entraînement 7.22 — Choix du sens du courant induit.**

Soit un circuit électrique de surface $S = 500\,\mathrm{cm}^2$, composé d'un générateur idéal délivrant une tension $E = 200\,\mathrm{mV}$ et un résistor de résistance $R = 5\,\mathrm{k\Omega}$.

Il est plongé dans un champ magnétique tel que $\vec{B} = B\dfrac{t}{\tau}\overrightarrow{e_z}$ avec $B = 2\,\mathrm{T}$.

On prendra $\tau = 1\,\mathrm{s}$.

On choisit d'orienter le courant induit $i_{\text{ind}}$ dans le sens horaire.

a) Dans quel sens est orientée la flèche de tension de la fém $e$ induite par rapport à $E$ ?

(a) dans le même sens (b) dans le sens opposé

.....

b) À partir de la règle de la main droite, exprimer le vecteur surface du circuit $\vec{S}$ en fonction de $S$ et des vecteur de la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.

.....

c) Exprimer le flux magnétique $\phi$ traversant le circuit en fonction de $B$, $t$, $\tau$ et $S$.

.....

d) Exprimer la fém $e$ apparaissant dans le circuit en fonction de $B$, $\tau$ et $S$ .....

e) Quelle est la valeur de la tension $u$ aux bornes du résistor ? .....

On choisit d'orienter le courant induit $i_{\text{ind}}$ dans le sens anti-horaire.

f) Dans quel sens est orientée la flèche de tension de la fém $e$ induite par rapport à $E$ ?

(a) dans le même sens (b) dans le sens opposé

.....

g) À partir de la règle de la main droite, exprimer le vecteur surface du circuit $\vec{S}$ en fonction de $S$ et des vecteur de la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$.

.....

h) Exprimer le flux magnétique $\phi$ traversant le circuit en fonction de $B$, $t$, $\tau$ et $S$.

.....

i) Exprimer la fém $e$ apparaissant dans le circuit en fonction de $B$, $\tau$ et $S$ .....

j) Calculer la valeur de la tension $u$ aux bornes du résistor .....

**Entraînement 7.23 — Un bilan de puissance.**

On considère le système d'équations électrique (EE) et mécanique (EM) suivant, avec la force électromotrice induite $e = -Bav$, la force de Laplace de valeur $f_{\text{L}} = Bai$, la force de rappel d'un ressort de valeur $-kx$ et une force de frottement fluide de valeur $-\alpha v$ :

$$\begin{cases} E + e = Ri & \text{(EE)} \\ m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = f_{\text{L}} - kx - \alpha v & \text{(EM)} \end{cases}$$

*On rappelle que l'énergie cinétique de la barre est $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2$ ; que la puissance dissipée par effet Joule est $\mathcal{P}_J = Ri^2$ ; que l'énergie potentielle de la barre est $E_p = \dfrac{1}{2}kx^2$ ; enfin, que la puissance dissipée par frottements est $\mathcal{P}_f = \alpha v^2$.*

a) Exprimer, en fonction de $E$, $R$ et $i$, le terme $Bavi$ à partir de $e$ dans (EE).

.....

b) Exprimer, en fonction de $m$, $v$, $k$, $x$ et $\alpha$ le terme $Bavi$ à partir de $f_{\text{L}}$ dans (EM).

.....

c) Égaliser les expressions obtenues en a) et b) pour exprimer la puissance fournie $Ei$ en fonction des grandeurss $E_{\text{c}}$, $\mathcal{P}_{\text{J}}$, $E_{\text{p}}$ et $\mathcal{P}_{\text{f}}$.

*On rappelle que $v = \dot{x}$.*

.....

## Réponses mélangées

(a) $-iaB\vec{e_y}$ $IBS\vec{e_x}$ $\vec{0}$ $mv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - fv$ (b) $-\dfrac{(Ba)^2}{m}i - R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ (a)

(d) $-S\vec{e_z}$ (a) (a) $\vec{e_z}$ oui $\vec{e_y}$ $\vec{e_y}$ (d) $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{B^2\ell^2}{mR}v = 0$

(c) $0$ $-\dfrac{E}{B\ell}$ (b) $x_0 + \dfrac{e}{Ba}\left(t + \tau \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} - \tau\right)$ $E - Ba\dot{x} - Ri$

$\dfrac{\mathrm{d}^2 i(t)}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{r}{L}\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{B^2\ell^2}{mL}i(t) = 0$ (c) $L\dfrac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \left(\dfrac{(Ba)^2}{m} + \dfrac{1}{C}\right)i = 0$

$2\pi B_0\dfrac{a^2}{6}$ $ibB\vec{e_x}$ $\dfrac{BS}{\tau}$ $0$ non $-B\dfrac{t}{\tau}S$ (b) $-Bv\ell$ $\vec{0}$

oui $B\pi R^2$ $-ibB\vec{e_x}$ $-IBS\vec{e_z}$ $\dfrac{BSt}{\tau}$ (d) (b) $-B\ell^2$ $-Ri^2$

$mv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + kxv + \alpha v^2$ oui $-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}aB\vec{e_z}$ $\dfrac{-\alpha B\underline{I}}{h + \mathrm{j}(m\omega - \frac{k}{\omega})}$ $Bv\ell$ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}B\pi R^2$ (b)

$-\dfrac{BS}{\tau}$ $\dfrac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{B^2\ell^2}{mr}v(t) = -\dfrac{B\ell E}{mr}$ $S\vec{e_z}$ $iaB\vec{e_y}$ (c) $\dfrac{\mu_0 N^2 a}{2\pi}\ln\left(\dfrac{d+a}{d}\right)$

$300\,\mathrm{mV}$ $-\dfrac{B\pi R^2}{2}$ $\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$ non $2\pi B_0\left(\dfrac{R^2}{2} - \dfrac{R^3}{3a}\right)$ $B_0\omega\sin(\omega t)\dfrac{r}{2}$

$R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{(Ba)^2}{m}i = 0$ (c) $i\dfrac{\sqrt{3}}{2}aB\vec{e_x}$ (c) (d) $0$ $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e_y} + \vec{e_z})$

$\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}_\mathrm{f} + \mathcal{P}_\mathrm{J}$ (d) (b) (a) (c) $\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}_\mathrm{J}$ $-Bx_\mathrm{c}\ell$

$\dfrac{\mu_0 NIa}{2\pi}\ln\left(\dfrac{d+a}{d}\right)$ $-\vec{e_z}$ non $\pi R^2 B_\mathrm{m}\cos(\omega t)$ $-B(a - (x_\mathrm{c} - \ell))\ell$

aucune (a) $B\pi R^2\cos(\omega t)$ $0$ $300\,\mathrm{mV}$ $\vec{0}$ $R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \left(\dfrac{(Ba)^2}{m} + \dfrac{1}{C}\right)i = 0$

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e_y} + \vec{e_z})$ (c) $\pi a^2 B_\mathrm{m}\cos(\omega t)$ $S\vec{e_y}$ $Ei - Ri^2$ $-iB2\pi RN\vec{e_z}$

▶ Réponses et corrigés page 444

# Ferromagnétisme

**Prérequis**
Théorème du moment cinétique. Formules trigonométriques :

- $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\sin(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)$

**Constantes utiles**
→ Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{T\cdot m\cdot A^{-1}}$

## Moment magnétique

**Entraînement 8.1 — Moment magnétique terrestre.**

Un étudiant à Paris utilise son portable pour mesurer l'intensité du champ magnétique terrestre.

Il mesure $B_T = 5{,}1 \times 10^{-5}\,\mathrm{T}$.

Le noyau ferreux de la Terre peut être modélisé par un dipôle magnétique de moment magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ que l'étudiant cherche à déterminer à partir de sa mesure.

Pour rappel : un dipôle magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}} = \mathcal{M}\overrightarrow{e_z}$ situé au centre O d'un repère, crée un champ magnétique dans le vide dont les composantes en coordonnées sphériques ont pour expression à grande distance du point O :

$$B_r = \frac{2\mu_0\mathcal{M}\cos\theta}{4\pi r^3} \qquad B_\theta = \frac{\mu_0\mathcal{M}\sin\theta}{4\pi r^3} \qquad B_\varphi = 0.$$

Si l'on se place à Paris, on a $\theta_P = 41°$ et $R_T = 6\,370\,\mathrm{km}$.

a) Le moment magnétique terrestre est dirigé du nord géographique vers le sud.

En adoptant la notation $\overrightarrow{\mathcal{M}} = \mathcal{M}\overrightarrow{e_z}$, $\mathcal{M}$ est-il :

(a) positif ? (b) négatif ?

.....

b) Exprimer la norme du champ magnétique à Paris en fonction de $\mathcal{M}$, $\mu_0$, $\theta_P$ et $R_T$.

.....

c) En déduire la valeur de $\mathcal{M}$ d'après la mesure de $B_T$.

.....

d) Prenez votre téléphone et trouvez une application qui permette de mesurer le champ magnétique terrestre à l'endroit exact où vous vous trouvez. On peut considérer que le rayon terrestre est le même chez vous qu'à Paris, et calculez $\mathcal{M}$ à partir de vos valeurs.

.....

### Entraînement 8.2 — Moment magnétique d'un électron.

Considérons un électron de charge $q = -e$ gravitant autour du noyau à la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega\vec{e_z}$. Le rayon de son orbite circulaire est $R$.

Pour une boucle orientée $(\mathcal{C})$, de surface $S$, parcourue par un courant $I$, on rappelle le moment magnétique associé $\vec{\mathcal{M}} = IS\vec{n}$ où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal à la surface, orienté en cohérence avec l'orientation de $(\mathcal{C})$.

a) Exprimer l'intensité $I$ de cette boucle de courant créée par le mouvement de l'électron en fonction des grandeurs $e$ et $\omega$. .....

b) En déduire le moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ associé à cette boucle de courant en fonction des grandeurs $e$, $\omega$, $R$ et du vecteur unitaire $\vec{e_z}$. .....

## Actions d'un champ magnétique sur un moment magnétique

### Entraînement 8.3 — Équilibre d'un moment magnétique (I).

Nous plaçons un aimant de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M}\vec{u}$ $(\mathcal{M} > 0)$ en $O$ sur un plan horizontal dans un espace où règne un champ magnétique extérieur $\vec{B}_{\text{ext}} = B_{\text{ext}}\vec{e_x}$ uniforme et permanent $(B_{\text{ext}} > 0)$

L'action du champ magnétique $\vec{B}_{\text{ext}}$ sur l'aimant est à l'origine de l'énergie potentielle $E_p = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}_{\text{ext}}$. Nous ferons l'hypothèse que le système est conservatif et que l'énergie potentielle de l'aimant se réduit à l'énergie potentielle créée par $\vec{B}_{\text{ext}}$.

L'angle $\alpha = \left(\widehat{\vec{e_x}, \vec{u}}\right)$ est tel que : $\alpha \in ]-\pi, \pi]$.

a) Quelle est l'expression de l'énergie potentielle en fonction de $\mathcal{M}$, $B_{\text{ext}}$ et $\alpha$ ?

.....

b) Déterminer la valeur de $\alpha$ (connaissant son domaine de définition) correspondant à la position d'équilibre stable de l'aimant.

.....

c) Déterminer la valeur de $\alpha$ (connaissant son domaine de définition) correspondant à la position d'équilibre instable de l'aimant.

.....

**Entraînement 8.4 — Stabilité des positions d'équilibre.**

Nous plaçons un aimant de moment magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}} = \mathcal{M}\vec{u}$ ($\mathcal{M} > 0$) et de moment d'inertie $J$ par rapport à l'axe $Oz$ dans un espace où règne un champ magnétique extérieur $\vec{B}_{\text{ext}} = B_{\text{ext}}\vec{e_x}$ uniforme et permanent ($B_{\text{ext}} > 0$).

L'aimant est alors le siège de l'action mécanique définie par :

- la force : $\vec{F} = (\overrightarrow{\mathcal{M}} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{B}_{\text{ext}}$
- le moment : $\vec{\Gamma} = \overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}_{\text{ext}}$

L'angle $\alpha = \left(\widehat{\vec{e_x}, \vec{u}}\right)$ est tel que : $\alpha \in ]-\pi, \pi]$.

Le seul moment non nul agissant sur l'aimant est le moment lié à l'action du champ magnétique $\vec{B}_{\text{ext}}$. Afin de trouver les positions d'équilibre stable et instable, nous appliquerons le théorème du moment cinétique.

a) Déterminer l'équation différentielle à laquelle $\alpha$ obéit ?

(a) $J\ddot{\alpha} = \mathcal{M}B_{\text{ext}}\cos(\alpha)$

(b) $J\ddot{\alpha} = -\mathcal{M}B_{\text{ext}}\cos(\alpha)$

(c) $J\ddot{\alpha} = \mathcal{M}B_{\text{ext}}\sin(\alpha)$

(d) $J\ddot{\alpha} = -\mathcal{M}B_{\text{ext}}\sin(\alpha)$

.....

b) Déterminer les valeurs de $\alpha$ associées aux deux positions d'équilibre possibles.

.....

c) Considérant une petite perturbation modifiant légèrement $\alpha_{\text{eq1}} = 0$, déterminer s'il s'agit d'une :

(a) position d'équilibre stable

(b) position d'équilibre instable

.....

d) Considérant une petite perturbation modifiant légèrement $\alpha_{\text{eq2}} = \pi$, déterminer s'il s'agit d'une :

(a) position d'équilibre stable

(b) position d'équilibre instable

.....

**Entraînement 8.5 — Action d'un champ magnétique non uniforme.**

Nous plaçons un aimant de moment magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}} = \mathcal{M}\overrightarrow{e_x}$ ($\mathcal{M} > 0$) en un point M dans un espace où règne un champ magnétique extérieur $\overrightarrow{B}_{\text{ext}} = B(x)\overrightarrow{e_x}$ permanent ($B_{\text{ext}} > 0$).

L'aimant est alors le siège de l'action mécanique définie par :

- la force : $\overrightarrow{F} = (\overrightarrow{\mathcal{M}} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{B}_{\text{ext}}$
- le moment : $\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \overrightarrow{B}_{\text{ext}}$

a) Écrire l'expression de la force pour $B(x) = ax$.

.....

b) Écrire l'expression de la force pour $B(x) = bx^2$.

.....

c) Écrire l'expression de la force pour $B(x) = c\ln(x)$.

.....

d) Pour un champ magnétique non uniforme, la force tend-elle à déplacer l'aimant de moment magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}} = \mathcal{M}\overrightarrow{e}_x$ vers les zones :

(a) de fort champ magnétique ?

(b) de faible champ magnétique ?

.....

# Milieux Linéaires Homogènes Isotropes (MLHI)

**Entraînement 8.6 — Champs dans un circuit magnétique fermé.**

L'utilisation de matériaux ferromagnétiques permet de réaliser des circuits magnétiques conduisant les lignes de champ magnétique.

On considère un matériau ferromagnétique rectangulaire fermé, représenté ci-dessous, de section $S$ et de perméabilité magnétique $\mu$. Il est entouré en sa partie gauche par un bobinage composé de $N$ spires parcouru par un courant $i > 0$.

a) Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont correctes pour expliquer ce qu'il se passe à l'intérieur du matériau ferromagnétique ?

(a) Les lignes de champ magnétique sont orthogonales aux surfaces extérieures du matériau ferromagnétique.

(b) Les lignes de champ magnétique sont parallèles aux surfaces extérieures du matériau ferromagnétique.

(c) Les lignes de champ magnétique sont canalisées par le matériau ferromagnétique.

(d) Les lignes de champ magnétique fuient le matériau ferromagnétique.

.....

b) Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont correctes pour expliquer la formes des lignes de champ ?

(a) Les lignes de champ magnétique forment des cercles contenus dans le matériau ferromagnétique.

(b) Les lignes de champ magnétique forment des cercles qui sortent du matériau ferromagnétique.

(c) Les lignes de champ magnétique forment des boucles qui sortent du matériau ferromagnétique.

(d) Les lignes de champ magnétique forment des rectangles contenus dans le matériau ferromagnétique.

.....

c) En considérant une ligne de champ moyenne d'un tube de champ à l'intérieur du matériau ferromagnétique, écrire le théorème d'Ampère.

.....

d) Si la longueur $\ell$ du circuit magnétique est très grande devant $\sqrt{S}$, on peut considérer $\vec{B}$ uniforme sur la section $S$ du matériau.

Comment se simplifie alors le théorème d'Ampère pour relier la norme $B$ du champ magnétique et $i$ ?

.....

e) On rappelle que le flux de $\vec{B}$ à travers une section $S$ orientée vaut $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$.

Exprimer le flux de $\vec{B}$ à travers la section du ferromagnétique orientée dans le même sens que les lignes de champ.

.....

f) Exprimer la force magnétomotrice fmm $= Ni$ en fonction de $\Phi$.

.....

g) Exprimer enfin la reluctance $\mathcal{R}$ rapport entre la fmm et le flux de $\vec{B}$.

.....

**Entraînement 8.7 — Susceptibilité magnétique et MLHI.**

Pour un MLHI, l'aimantation est proportionnelle à l'excitation magnétique :

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

avec $\chi_m$ la **susceptibilité magnétique** du matériau (sans dimension).

On rappelle que $\vec{B} = \mu_0(\vec{H}+\vec{M})$ et l'énergie potentielle volumique d'interaction $e_p$ entre le MLHI caractérisé par son aimantation $\vec{M}$ (que l'on peut considérer comme un moment magnétique volumique) et le champ $\vec{B}$ vaut $e_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}$.

a) Quelle est la relation entre $\vec{B}$ et $\vec{H}$ ?

(a) $\vec{H} = \mu_0(1+\chi_m)\vec{B}$

(b) $\vec{B} = \mu_0(1+\chi_m)\vec{H}$

(c) $\vec{B} = \chi_m(1+\mu_0)\vec{H}$

(d) $\vec{B} = \mu_0\chi_m\vec{H}$

.....

b) Exprimer $e_p$ en fonction de $\chi_m$, $\mu_0$ et $B$.

.....

c) Pour un milieu diamagnétique, on a $\chi_m < 0$ et $|\chi_m| \ll 1$.

Un tel matériau est il attiré vers les zones :

(a) de fort champ magnétique ?

(b) de faible champ magnétique ?

.....

**Réponses mélangées**

$\oint_\Gamma \vec{H} \cdot \vec{d\ell} = Ni$ $\quad \frac{c}{x}\mathcal{M}\vec{e_x}$ $\quad 0, \pi$ $\quad \frac{\mu S}{\ell}Ni$ $\quad$ (b) $\quad -\mathcal{M}B_{\text{ext}}\cos(\alpha)$

$\frac{-e\omega}{2\pi}$ $\quad$ (b) et (c) $\quad \mathcal{M}a\vec{e_x}$ $\quad \pi$ $\quad 0$ $\quad \frac{\ell}{\mu S}$ $\quad$ (a) $\quad$ (a) $\quad$ (d)

$2\mathcal{M}bx\vec{e_x}$ $\quad -8{,}0 \times 10^{22}\ \text{A} \cdot \text{m}^2$ $\quad$ (b) $\quad B = \frac{\mu N i}{\ell}$ $\quad -\chi_m \frac{B^2}{\mu_0(1+\chi_m)}$

(b) $\quad$ (d) $\quad$ (b) $\quad \frac{\ell}{\mu S}\Phi$ $\quad \frac{\mu_0|\mathcal{M}|}{4\pi R_T^3}\sqrt{4\cos^2\theta_P + \sin^2\theta_P}$ $\quad -\frac{e\omega}{2}R^2\vec{e_z}$

► Réponses et corrigés page 452

# Ondes électromagnétiques I

**Prérequis**

Pour une onde plane progressive monochromatique : $\lambda = c/f$ et $f = 1/T$.
Équations de Maxwell dans le vide :

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0 \qquad \text{(Maxwell-Gauss)}$$
$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \qquad \text{(Maxwell-Thomson)}$$
$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{(Maxwell-Faraday)}$$
$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \text{(Maxwell-Ampère)}$$

Formules d'analyse vectorielle, en coordonnées cartésiennes :

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$
$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e_z}$$
$$\vec{\Delta}\vec{A} = \Delta A_x\vec{e_x} + \Delta A_y\vec{e_y} + \Delta A_z\vec{e_z}$$
$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

**Constantes utiles**

→ Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3{,}00 \times 10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$
→ Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H\cdot m^{-1}}$
→ Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 9 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\cdot m^{-1}}$

## Calculs numériques

**Entraînement 9.1 — Fréquence, longueur d'onde, vitesse de propagation.**

Calculer, avec un chiffre significatif, les grandeurs suivantes :

a) la vitesse de propagation des ondes electromagnétique dans le vide $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$ ..

b) La fréquence $f$ d'une onde de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 600\,\mathrm{nm}$ .....

c) La longueur d'onde dans le vide d'une onde de fréquence $f = 3\,\mathrm{GHz}$ .....

d) La période d'une onde de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 3\,\mathrm{pm}$ .....

**Entraînement 9.2 — Combat de grandeurs (I).**

On considère un pointeur LASER emmettant une onde représentée par son champ électromagnétique

$$\vec{E}(M,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{e_z} \quad \text{et} \quad \vec{B}(M,t) = -\frac{E_0}{c}\cos(\omega t - kx)\vec{e_y},$$

avec $E_0 = 100\,\mathrm{V \cdot m^{-1}}$ et une ampoule classique à filament de puissance lumineuse égale à 100 W.

Le faisceau LASER est un cylindre de section $S = 1{,}0\,\mathrm{mm}^2$.

a) Expliciter la puissance moyenne surfacique $\langle P \rangle = \left\langle \iint \vec{\Pi} \cdot \vec{\mathrm{d}S} \right\rangle$, avec $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$.

*On rappelle que* $\langle \cos^2(\alpha) \rangle = 1/2$ *si* $\alpha$ *dépend du temps* .....

b) Calculer numériquement la puissance moyenne du LASER .....

c) Qui de l'ampoule classique ou du LASER est le plus puissant en moyenne ? .....

**Entraînement 9.3 — Combat de grandeurs (II).**

On souhaite comparer le champ magnétique terrestre égal à $5 \times 10^{-5}$ T à une onde radiofréquence représentée par son champ magnétique $\vec{B}(M,t) = B_0 \cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$, de puissance moyenne 1 W.

Le faisceau a une section $S = 1\,\mathrm{m}^2$. On rappelle que dans ce cas $B_0 = \dfrac{E_0}{c}$ où $E_0$ est la norme du champ électrique de l'onde plane.

a) Exprimer $B_0$ en fonction de la puissance moyenne rayonnée $\langle P \rangle = \dfrac{E_0^2 S}{2\mu_0 c}$ .....

b) Que dire du champ magnétique de l'onde radiofréquence ?

(a) Il est plus intense que le champ terrestre.

(b) Il est moins intense que le champ terrestre.

(c) Il est du même ordre de grandeur que le champ terrestre.

.....

## Dérivées partielles et opérateurs

**Entraînement 9.4 — Calculs de dérivées partielles (I).**

On considère le champ électrique suivant : $\vec{E}(M,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$. Calculer

a) $\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ .....

b) $\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial x}$ .....

c) $\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial z}$ .....

d) $\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2}$ .....

e) $\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ .....

**Entraînement 9.5 — Calculs de dérivées partielles (II).**

On considère le champ magnétique suivant : $\vec{B}(M,t) = B_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$. Calculer

a) $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ .....

b) $\frac{\partial \vec{B}}{\partial x}$ .....

c) $\frac{\partial \vec{B}}{\partial y}$ .....

d) $\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$ .....

e) $\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2}$ .....

f) $\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial y^2}$ .....

**Entraînement 9.6 — Calculs d'opérateurs vectoriels (I).**

On considère le champ électrique suivant : $\vec{E}(M,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$. Calculer

a) $\operatorname{div} \vec{E}$ .....

b) $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E}$ .....

c) $\vec{\Delta}\vec{E}$ .....

**Entraînement 9.7 — Calculs d'opérateurs vectoriels (I).**

On considère le champ électrique $\vec{E}(M,t)$ dont les composantes sont données par

$$E_x = 0$$
$$E_y = E_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kz)$$
$$E_z = \alpha E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kz).$$

Calculer :

a) $\operatorname{div} \vec{E}$ .....

b) $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E}$ .....

c) $\vec{\Delta}\vec{E}$ .....

**Entraînement 9.8 — Équation de propagation.**

On cherche dans cet entraînement à démontrer l'équation de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide. On rappelle pour cela la formule du double rotationnel d'un vecteur $\vec{A}$ :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\,\vec{A}) - \vec{\Delta}\vec{A}.$$

a) En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday puis celle de Maxwell-Ampère, on montre que

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}) = \alpha\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}.$$

Quelle est l'expression de $\alpha$ ?

(a) $\alpha = \mu_0\varepsilon_0$ (b) $\alpha = \dfrac{1}{\mu_0\varepsilon_0}$ (c) $\alpha = -\mu_0\varepsilon_0$

.....

b) En utilisant l'équation de Maxwell-Gauss et la formule du double rotationnel, établir une seconde expression de $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E})$ .....

c) En égalisant les expressions de $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E})$ obtenues aux questions précédentes, on obtient l'équation de d'Alembert $\vec{\Delta}\vec{E} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$.

Exprimer $c$ en fonction de $\varepsilon_0$ et $\mu_0$ .....

# Solutions de l'équation de propagation

**Entraînement 9.9 — Représentation d'un signal.**

On considère trois signaux :

- signal n° 1 :
$$E(x_0,t) = 2 + \cos\left(2\pi\frac{t}{T_1}\right) \text{ avec } T_1 = 5\,\text{s}$$
- signal n° 2 :
$$E(x_0,t) = 0{,}5\cos\left(2\pi\frac{t}{T_2} + \frac{\pi}{2}\right) \text{ avec } T_2 = 4\,\text{s}$$
- signal n° 3 :
$$E(x_0,t) = 0{,}5\cos\left(2\pi\frac{t}{T_3} + \frac{\pi}{2}\right) \text{ avec } T_3 = 2{,}5\,\text{s}$$

On donne ci-contre leurs représentations graphiques (à $x_0$ fixé, en fonction du temps).

a) À quel signal la courbe en traits pleins est-elle associée ? .....

b) À quel signal la courbe en tirets est-elle associée ? .....

c) À quel signal la courbe en pointillés est-elle associée ? .....

**Entraînement 9.10 — Caractérisation d'une onde.**

Dans chaque cas, dire si l'onde représentée est progressive (c'est-à-dire de la forme $f(x-ct)$ ou $g(x+ct)$) et/ou harmonique (dont la dépendance temporelle sinusoïdale).

a)

.....

b)

.....

c)

.....

**Entraînement 9.11 — Onde représentée par son champ magnétique.**

On étudie une onde électromagnétique dont le champ magnétique s'écrit :

$$\vec{B}(M,t) = B_0 \exp\big(-(t/\tau - x/\delta)^2\big)\vec{u_y}$$

Choisir la représentation qui convient :

.....

**Entraînement 9.12 — Onde électromagnétique dans un guide d'ondes.**

Soit une onde électromagnétique, dont le champ électrique est donné par :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\alpha z)\sin(\omega t - kx)\vec{e_y}$$

où $E_0$ et $\alpha$ sont des constantes. On rappelle l'équation de propagation d'une onde électromagnétique dans le vide, aussi appelée équation de d'Alembert :

$$\vec{\Delta}\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

a) Calculer $\vec{\Delta}\vec{E}$ .....

b) Calculer $\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$, sans utiliser l'équation de d'Alembert .....

c) En utilisant l'équation de d'Alembert, exprimer $k$ en fonction de $\omega$, $\alpha$ et $c$ .....

On rappelle qu'il y a dispersion si la vitesse de phase $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k}$ de l'onde dépend de $\omega$.

d) Y a-t-il dispersion ici ? .....

**Entraînement 9.13 — Onde sphérique progressive.**

On considère le champ électrique sphérique suivant : $\vec{E}(r,t) = \dfrac{a}{r}\cos(\omega t - kr)\,\vec{e_\theta}$.

On rappelle l'expression du rotationnel en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{e_r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{e_\varphi}.$$

a) Calculer le rotationnel du champ $\vec{E}$.

.....

b) En déduire le champ $\vec{B}$ associé à l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday.

.....

c) Indiquer les caractéristiques de la structure de ce champ électromagnétique :

(a) L'onde est transverse.
(b) L'onde est longitudinale.
(c) Les vecteurs $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ forment un trièdre direct.
(d) Les vecteurs $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ forment un trièdre indirect.
(e) Les vecteurs $(\vec{B}, \vec{k}, \vec{E})$ forment un trièdre direct.

.....

*On attend plusieurs réponses.*

**Entraînement 9.14 — Onde dans un guide d'ondes.**

On considère le champ électrique suivant :

$$\vec{E}(x,z,t) = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\vec{e_y}.$$

a) Exprimer les valeurs de $z$ pour lesquelles le champ $\vec{E}$ s'annule.

.....

b) Exprimer les valeurs de $x$ pour lesquelles le champ $\vec{E}$ s'annule.

.....

**Entraînement 9.15 — Onde plane en notation complexe.**

On considère le champ électrique complexe polarisé rectilignement suivant :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{E}_0 \exp\Big(\mathrm{j}(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)\Big)\vec{e_x} \qquad \text{et} \qquad \vec{k} = k_x\vec{e_x} + k_y\vec{e_y} + k_z\vec{e_z}.$$

Calculer :

a) la dérivée temporelle de $\underline{\vec{E}}$ .....

b) la divergence de $\underline{\vec{E}}$ .....

c) le rotationnel de $\underline{\vec{E}}$ .....

d) le laplacien vectoriel de $\underline{\vec{E}}$ .....

Attribuer alors à chaque opération de dérivation ci-dessous l'expression qui lui est associée.

(a) $-\mathrm{j}\vec{k}\cdot\underline{\vec{E}}$ (b) $-k^2\underline{\vec{E}}$ (c) $-\mathrm{j}\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}$ (d) $\mathrm{j}\omega\underline{\vec{E}}$

e) $\dfrac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t}$ .....

f) $\mathrm{div}\,\underline{\vec{E}}$ .....

g) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\underline{\vec{E}}$ .....

h) $\vec{\Delta}\,\underline{\vec{E}}$ .....

**Entraînement 9.16 — Vitesse de phase et vitesse de groupe.**

On considère une onde plane progressive harmonique pour laquelle la pulsation $\omega$ et le vecteur d'onde $k$ vérifient la relation de dispersion $k^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_0^2}{c^2}$ où $\omega_0 < \omega$ une constante positive.

a) Exprimer la vitesse de phase $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k}$ de cette onde.

.....

b) En différentiant l'expression de $k^2$, exprimer la vitesse de groupe $v_\mathrm{g} = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$ de cette onde.

.....

# Puissance et énergie des ondes électromagnétiques

Le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ et l'énergie volumique du champ $w_{\text{em}}$ sont respectivement définis par :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \qquad \text{et} \qquad w_{\text{em}} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

**Entraînement 9.17 — Puissance d'une onde plane progressive.**

On considère le champ électromagnétique plan progressif monochromatique suivant :

$$\vec{E}(y,t) = E_0 \cos(\omega t - ky)\vec{e_z} \qquad \text{et} \qquad \vec{B}(y,t) = \frac{E_0}{c}\cos(\omega t - ky)\vec{e_x}.$$

a) Calculer le vecteur de Poynting .....

b) Calculer l'énergie volumique électromagnétique .....

**Entraînement 9.18 — Puissance d'une onde sphérique progressive.**

On considère le champ électromagnétique sphérique suivant :

$$\vec{E}(r,t) = \frac{a}{r}\cos(\omega t - kr)\vec{e_\theta} \quad \text{et} \quad \vec{B}(r,t) = \frac{a}{cr}\cos(\omega t - kr)\vec{e_\varphi}.$$

a) Calculer le vecteur de Poynting .....

b) Calculer l'énergie volumique électromagnétique .....

c) Calculer la puissance rayonnée $P = \iint \vec{\Pi} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$ à travers une sphère de centre O et de rayon $r$.

.....

**Entraînement 9.19 — Puissance d'une onde dans un guide d'ondes.**

On considère le champ électromagnétique dans le vide suivant : $\vec{E}(x,z,t) = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\vec{e_y}$.

a) Calculer le champ $\vec{B}$ associé à l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday.

.....

b) Calculer le vecteur de Poynting. .....

c) Donner la moyenne temporelle du vecteur de Poynting.

*On rappelle que* $\langle \cos^2(\alpha) \rangle = \frac{1}{2}$ *si* $\alpha$ *dépend du temps.* .....

# Autour de la polarisation

**Entraînement 9.20 — Polarisation rectiligne et circulaire.**

On considère les champs électriques, de période $T$, en représentation réelle ou complexe, suivants :

$$\overrightarrow{E_1} = \begin{cases} E_0 \cos\alpha \cos(\omega t - kz)\overrightarrow{e_x} \\ E_0 \sin\alpha \cos(\omega t - kz)\overrightarrow{e_y} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{E_2} = \begin{cases} E_0 \cos(\omega t + kz + \alpha)\overrightarrow{e_x} \\ E_0 \sin(\omega t + kz + \alpha)\overrightarrow{e_y} \end{cases}$$

$$\underline{\overrightarrow{E_3}} = E_0 \exp[\mathrm{j}(\omega t - kz + \alpha)]\,(\overrightarrow{e_x} - \mathrm{j}\overrightarrow{e_y})$$

$$\overrightarrow{E_4} = \begin{cases} E_0 \cos(\omega t + kz + \alpha)\overrightarrow{e_x} \\ -E_0 \sin(\omega t + kz - \alpha)\overrightarrow{e_y} \end{cases}$$

où $E_0$ est un réel positif.

Ces champs sont tous représentés à $t = 0$ et $z = 0$ par la figure ci-dessus.

Indiquer, pour chaque champ, le type de polarisation et la direction de propagation parmi les cas suivants :

(a) Rectiligne se propageant selon $+z$
(b) Rectiligne se propageant selon $-z$
(c) Circulaire gauche se propageant selon $+z$
(d) Circulaire gauche se propageant selon $-z$
(e) Circulaire droite se propageant selon $+z$
(f) Circulaire droite se propageant selon $-z$

a) Pour $\overrightarrow{E_1}$ .....

b) Pour $\overrightarrow{E_2}$ .....

c) Pour $\underline{\overrightarrow{E_3}}$ .....

d) Pour $\overrightarrow{E_4}$ .....

Parmi les représentations suivantes, en $z = 0$, laquelle représente :

e) le champ $\overrightarrow{E_1}\left(t = \frac{T}{3}, z = 0\right)$ ....

f) le champ $\overrightarrow{E_2}\left(t = \frac{T}{2}, z = 0\right)$ ....

g) le champ $\underline{\overrightarrow{E_3}}\left(t = \frac{T}{4}, z = 0\right)$ ....

h) le champ $\overrightarrow{E_4}\left(t = \frac{T}{4}, z = 0\right)$ ....

## Réponses mélangées

$\dfrac{ak}{\omega r}\cos(\omega t - kr)\overrightarrow{e_\varphi}$ Progressive signal n° 1 $v_g = c\sqrt{1-\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$

$\dfrac{\varepsilon_0 c a^2}{r^2}\cos^2(\omega t - kr)\overrightarrow{e_r}$ signal n° 2 (a) (b) $-\omega^2 E_0 \cos(\omega t - kx)\overrightarrow{e_z}$ $\mathrm{j}\omega\underline{\vec{E}}$

$-k^2 B_0 \sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kx)\overrightarrow{e_z}$ $-k^2\underline{\vec{E}}$ $-\omega B_0 \sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right)\sin(\omega t - kx)\overrightarrow{e_z}$ $5\times 10^{14}$ Hz

$-E_0\cos(\omega t - kz)\left(\left(\dfrac{\pi}{a}\right)^2 + k^2\right)\times \left(\cos\left(\dfrac{\pi y}{a}\right) + \alpha\sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right)\right)\overrightarrow{e_x}$ $1\times 10^{-1}$ m (c) $\dfrac{ak}{r}\sin(\omega t - kr)\overrightarrow{e_\varphi}$

$\varepsilon_0 E_0^2\cos^2(\omega t - ky)$ $1\times 10^{-20}$ s $kE_0\sin(\omega t - kx)\overrightarrow{e_z}$ Progressive et harmonique

$\vec{0}$ $\dfrac{E_0}{\omega}\left[-k\sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\overrightarrow{e_x} - \dfrac{\pi}{a}\cos\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\sin(\omega t - kz)\overrightarrow{e_z}\right]$ Stationnaire, donc non progressive et harmonique (a)

(d) $B_0 = \sqrt{\dfrac{2\mu_0\langle P\rangle}{cS}}$ $E_0\cos\left(\dfrac{\pi y}{a}\right)\left(\dfrac{\pi}{a}\alpha\cos(\omega t - kz) - k\sin(\omega t - kz)\right)\overrightarrow{e_x}$ $\dfrac{\varepsilon_0 a^2}{r^2}\cos^2(\omega t - kr)$

$3\times 10^8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ $1\times 10^{-5}$ W signal n° 3 $-\omega^2\vec{E}$ (b) 0

(c) $-\mathrm{j}k_z\underline{E}_x\overrightarrow{e_y} + \mathrm{j}k_y\underline{E}_x\overrightarrow{e_z}$ $E_0\sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right)\left(-\dfrac{\pi}{a}\cos(\omega t - kz) + k\alpha\sin(\omega t - kz)\right)$ $x = qa$

$-k^2 E_0\cos(\omega t - kx)\overrightarrow{e_z}$ (b) $kB_0\sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right)\sin(\omega t - kx)\overrightarrow{e_z}$ $\dfrac{E_0^2 S}{2\mu_0 c}$ (d)

$k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2$ (c) $-(\alpha^2 + k^2)\vec{E}$ $-\left(\dfrac{\pi}{a}\right)^2 B_0\sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kx)\overrightarrow{e_z}$

$z = ct - (2p+1)\dfrac{\lambda}{4}$ $-\mathrm{j}k_x\underline{E}_x$ $-kE_0\sin(\omega t - kx)\overrightarrow{e_y}$ $4\pi\varepsilon_0 c a^2\cos^2(\omega t - kr)$

(c) $-\omega^2 B_0\sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kx)\overrightarrow{e_z}$ $-\vec{\Delta}\vec{E}$ $-\omega E_0\sin(\omega t - kx)\overrightarrow{e_z}$ (f)

$c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$ (a) $v_\varphi = \dfrac{c}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$ $\dfrac{\pi}{a}B_0\cos\left(\dfrac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kx)\overrightarrow{e_z}$ (a)

$\varepsilon_0 c E_0^2\cos^2(\omega t - ky)\overrightarrow{e_y}$ Ampoule classique $\dfrac{E_0^2}{\mu_0}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\left[\dfrac{1}{c}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos^2(\omega t - kz)\overrightarrow{e_z} - \dfrac{\pi}{a\omega}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\sin(\omega t - kz)\overrightarrow{e_x}\right]$

(d) $\dfrac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2}\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\overrightarrow{e_z}$ $k^2 E_0\cos(\omega t - kx)\overrightarrow{e_z}$ (a), (c) et (e) Oui

► Réponses et corrigés page 455

# Ondes électromagnétiques II

**Prérequis**

| | |
|---|---|
| Maxwell-Gauss (M-G) $\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ | Maxwell-Thomson (M-T) $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ |
| Maxwell-Faraday (M-F) $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ | Maxwell-Ampère (M-A) $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} + \varepsilon_0\,\mu_0\,\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ |
| Relation entre $c$, $\mu_0$ et $\varepsilon_0$ $\varepsilon_0\,\mu_0 c^2 = 1$ | Loi d'Ohm locale $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ |

## Pour bien commencer

### Entraînement 10.1 — Vecteurs orthogonaux ou colinéaires.

Dans chaque cas, déterminer si les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont cohérents avec les équations fournies.

*Répondre simplement par « oui » ou « non ».*

a) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ et $\vec{a}\cdot\vec{c} = 0$

.....

b) $\vec{a}\wedge\vec{b} = \vec{c}$

.....

c) $\vec{a}\wedge\vec{b} = \vec{0}$ et $\vec{a}\cdot\vec{c} = 0$

.....

### Entraînement 10.2 — Dériver des exponentielles complexes.

Établir une relation de dispersion liant $\underline{k}$ à $\omega$ pour chaque équation différentielle.

On s'appuiera sur un champ électrique de la forme :

$$\underline{\vec{E}}(z,t) = E_0 \exp[\mathrm{i}(\omega t - \underline{k}z)]\vec{e_x}.$$

a) $\dfrac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t} + \alpha\dfrac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial z^2} = \vec{0}$ .....

b) $\dfrac{\partial^3\underline{\vec{E}}}{\partial t^3} + \alpha\dfrac{\partial^3\underline{\vec{E}}}{\partial z^3} + \beta\dfrac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t} = \vec{0}$ .....

c) $\dfrac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial t^2} + \alpha\dfrac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial z} + \beta\underline{\vec{E}} = \vec{0}$ .....

**Entraînement 10.3 — Conservation de la charge.**

On considère dans un plasma « dilué » une onde électromagnétique de fréquence suffisamment élevée, ce qui simplifie l'écriture de la densité volumique de courant en notation complexe $\underline{\vec{j}} = \underline{\alpha}(\omega)\,\underline{\vec{E}}$.

En régime sinusoïdal forcé, l'équation de conservation de la charge s'écrit $\mathrm{i}\omega\underline{\rho} + \mathrm{div}\,\underline{\vec{j}} = 0$.

a) Établir une relation entre $\underline{\rho}$, $\underline{\alpha}$ et $\omega$ .....

b) En tenant compte de l'expression de la conductivité complexe $\underline{\alpha} = \dfrac{N\,e^2}{\mathrm{i}\,m\,\omega}$ et en introduisant la pulsation plasma $\omega_p = \sqrt{\dfrac{N\,e^2}{m\,\varepsilon_0}}$, établir une relation liant $\omega$, $\omega_p$ et $\underline{\rho}$ .....

**Entraînement 10.4 — Expression du vecteur d'onde.**

On considère une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement et caractérisée par le champ électrique complexe : $\underline{\vec{E}} = E_0\,\exp[\mathrm{i}\,(\omega\,t - \underline{k}\,z)]\,\vec{e_x}$. On pose $\alpha_0 = \omega_p^2\tau\varepsilon_0 = \dfrac{\omega_p^2\,\tau}{\mu_0\,c^2}$.

Cette onde se propage dans un métal réel de conductivité $\alpha$. On admet que la relation de dispersion est

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 + \mathrm{i}\frac{\omega_p^2\,\tau^2}{\omega\,\tau\,(1 - \mathrm{i}\,\omega\,\tau)}\right].$$

Dans les différents cas, déterminer l'expression de $\underline{k}$.

a) $\omega \ll \dfrac{1}{\tau} \ll \omega_p$ .....

b) $\dfrac{1}{\tau} \ll \omega < \omega_p$ .....

c) $\dfrac{1}{\tau} \ll \omega_p < \omega$ .....

d) $\dfrac{1}{\tau} \ll \omega_p \ll \omega$ .....

**Entraînement 10.5 — Vitesse de phase.**

Dans un milieu de propagation, les vitesses de phase $v_\varphi$ et de groupe $v_g$ d'une onde sont définies par

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'} \quad \text{et} \quad v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k'},$$

où $k'$ est la partie réelle du vecteur d'onde $\underline{\vec{k}}$. Dans un plasma, la relation de dispersion s'écrit

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2},$$

où $\omega_p$ est une constante.

a) Exprimer la vitesse de phase $v_\varphi$ lorsque $\omega > \omega_p$ .....

b) Exprimer la vitesse de groupe $v_g$ lorsque $\omega > \omega_p$ .....

# Énergie et puissance

**Entraînement 10.6 — Vecteur de Poynting et énergie du champ.**

On considère un champ électromagnétique dans un milieu d'indice réel $n$ défini par

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz)\vec{e_x}$$
$$\text{et} \quad \vec{B} = \frac{n}{c} E_0 \cos(\omega t - kz)\vec{e_y}.$$

Le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ et l'énergie volumique du champ $w_{em}$ sont définis par

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \quad \text{et} \quad w_{em} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

a) Exprimer le vecteur de Poynting .....

b) Exprimer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting .....

c) Déterminer l'énergie volumique associée à l'onde .....

d) Exprimer la moyenne temporelle de l'énergie .....

**Entraînement 10.7 — Puissance dans un conducteur.**

On considère une onde dans un conducteur d'épaisseur de peau $\delta$, de conductivité réelle $\gamma$, vérifiant

$$\vec{E} = E_0 \mathrm{e}^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\vec{e_y}$$
$$\text{et} \quad \vec{B} = \frac{E_0}{\omega\delta} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\left[\sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) + \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right]\vec{e_z}.$$

Le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ et la puissance volumique perdue par effet Joule $p_J$ sont définis par

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \quad \text{et} \quad p_J = \vec{j} \cdot \vec{E}.$$

a) Exprimer la moyenne du vecteur de Poynting.

.....

b) Exprimer la puissance moyenne perdue par effet Joule.

.....

**Entraînement 10.8 — Vecteur de Poynting en notation complexe.**

En notation complexe, la moyenne temporelle du vecteur de Poynting pour des ondes planes progressives monochromatiques est donnée par

$$\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \frac{\mathrm{Re}(\underline{\vec{E}}^* \wedge \underline{\vec{B}})}{2\mu_0},$$

où le symbole $^*$ désigne la conjugaison complexe. On considère un champ électromagnétique dans un milieu d'indice complexe $\underline{n}$ défini par

$$\underline{\vec{E}} = \underline{E}_0 \exp[\mathrm{i}(\omega t - kz)]\vec{e_x} \text{ et } \underline{\vec{B}} = \frac{n\,\underline{E}_0}{c} \exp[\mathrm{i}(\omega t - kz)]\vec{e_y}.$$

Déterminer la moyenne du vecteur de Poynting .....

# Manipuler les équations de Maxwell

**Entraînement 10.9 — Relation de dispersion.**

On considère l'équation de propagation complexe dans un plasma

$$\Delta\underline{\vec{E}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \underline{\vec{j}}}{\partial t}.$$

Le champ électrique qui se propage dans le plasma vaut : $\underline{\vec{E}} = E_0 \exp[\mathrm{i}\,(\omega\, t - \underline{k}\, z)]\,\vec{e_x}$ avec $\underline{\vec{k}} = \underline{k}\,\vec{e_z}$.

En tenant compte de l'expression du vecteur densité de courant $\underline{\vec{j}} = \underline{\alpha}\,\underline{\vec{E}} = \dfrac{n\,e^2}{\mathrm{i}\,\omega\, m}\,\underline{\vec{E}}$, établir l'équation de dispersion, liant $k$, $\omega$, $c$ et $\omega_p^2 = \dfrac{n\,e^2}{m\varepsilon_0}$.

.....

**Entraînement 10.10 — Établir une équation d'onde.**

On considère un milieu ohmique localement neutre tel que : $\rho = 0$ et $\vec{j} = \gamma\vec{E}$. On pourra utiliser la relation

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{E}) - \Delta\vec{E}.$$

a) Exprimer l'équation de Maxwell-Gauss modifiée.

.....

b) Exprimer l'équation de Maxwell-Faraday modifiée.

.....

c) Déterminer l'équation différentielle à laquelle $\vec{E}$ obéit.

.....

**Entraînement 10.11 — Vérification des équations de Maxwell (I).**

Nous nous plaçons dans le vide ($\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$) et nous supposons que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ s'écrivent

$$\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(\omega t - kz)\vec{e_z}$$

$$\text{et} \quad \vec{B}(z,t) = \frac{kE_0}{\omega} \cos(\omega t - kz)\vec{e_x} \quad \text{avec} \quad k = \omega/c.$$

a) Le champ électrique vérifie-t-il l'équation de Maxwell-Gauss ? .....

b) Les champs électrique et magnétique vérifient-ils l'équation de Maxwell-Faraday ? .....

c) Les champs électrique et magnétique vérifient-ils l'équation de Maxwell-Ampère ? .....

d) Le champ magnétique vérifie-t-il l'équation de Maxwell-Thomson ? .....

**Entraînement 10.12 — Vérification des équations de Maxwell (II).**

Nous nous plaçons dans un plasma avec

$$\underline{\vec{j}}(z,t) = -\mathrm{i}\frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega}\underline{\vec{E}}(z,t), \qquad \underline{\rho}(z,t) = \underline{0} \qquad \text{et} \qquad \vec{k} = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}\vec{e_z}$$

avec $\omega > \omega_p$ et nous supposons que

$$\underline{\vec{E}}(z,t) = E_0 \exp[\mathrm{i}(\omega t - kz)]\vec{e_x}$$

$$\text{et} \quad \underline{\vec{B}}(z,t) = \frac{kE_0}{\omega} \exp[\mathrm{i}(\omega t - kz)]\vec{e_y} \quad \text{avec} \quad k = \omega/c.$$

a) Le champ électrique vérifie-t-il l'équation de Maxwell-Gauss ? .....

b) Les champs électrique et magnétique vérifient-ils l'équation de Maxwell-Faraday ? .....

c) Les champs électrique et magnétique vérifient-ils l'équation de Maxwell-Ampère ? .....

d) Le champ magnétique vérifie-t-il l'équation de Maxwell-Thomson ? .....

# Différentes familles d'ondes

**Entraînement 10.13 — Onde progressive ou onde évanescente.**

Nous nous intéressons à un champ électrique de la forme

$$\underline{\vec{E}}(x,t) = E_0 \exp[\mathrm{i}(\omega t - \underline{k}x)]\vec{e_z} \quad \text{avec} \quad \underline{k} = k' + \mathrm{i}k"$$

où $k" \leqslant 0$.

Pour chaque relation de dispersion, déterminer si le champ électrique se présente sous la forme d'une onde

(a) progressive $\underline{\vec{E}}(x,t) = E_0 \exp[\mathrm{i}(\omega t - k'x)]\vec{e_z}$

(b) évanescente $\underline{\vec{E}}(x,t) = E_0 \exp(k"x) \exp(\mathrm{i}\omega t)\vec{e_z}$

(c) progressive atténuée $\underline{\vec{E}}(x,t) = E_0 \exp(k"x) \exp[\mathrm{i}(\omega t - k'x)]\vec{e_z}$

a) $\underline{k}^2 = -i\dfrac{\omega}{c}$ .....

b) $\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ avec $\omega > \omega_p$ .....

c) $\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ avec $\omega < \omega_p$ .....

**Entraînement 10.14 — Courbes et expressions.**

Dans chaque cas, relier à l'expression de $\vec{E}$ fournie, la ou les courbes qui lui correspondent.

a) $\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$ .....

b) $\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega t) \exp(-kx)\vec{e_z}$ avec $k > 0$ .....

c) $\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega t - k'x) \exp(-k"x)\vec{e_z}$ avec $k" > 0$ .....

# Réflexion et transmission

**Entraînement 10.15 — Coefficients de réflexion et transmission en amplitude.**

On considère les champs $\{\vec{E}_i, \vec{B}_i\}$ dans le milieu d'indice $n_1$ en incidence normale sur un dioptre $x = 0$ produisant les champs réfléchis $\{\vec{E}_r, \vec{B}_r\}$ dans le milieu d'indice $n_1$ et transmis $\{\vec{E}_t, \vec{B}_t\}$ dans le milieu d'indice $n_2$ tels que :

$$\begin{cases} \vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - k_1 x)\vec{e_y} \\ \vec{B}_i = \dfrac{n_1 E_0}{c} \cos(\omega t - k_1 x)\vec{e_z} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{E}_r = r E_0 \cos(\omega t + k_1 x)\vec{e_y} \\ \vec{B}_r = -\dfrac{n_1 r E_0}{c} \cos(\omega t + k_1 x)\vec{e_z} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{E}_t = t E_0 \cos(\omega t - k_2 x)\vec{e_y} \\ \vec{B}_t = \dfrac{n_2 t E_0}{c} \cos(\omega t - k_2 x)\vec{e_z} \end{cases}$$

a) Les relations de continuité des champs entre les milieux 1 et 2 imposent $\vec{E}_1 = \vec{E}_2$ et $\vec{B}_1 = \vec{B_2}$.

En déduire deux relations entre $r$, $t$, $n_1$ et $n_2$ .....

b) En déduire l'expression des coefficients $r$ et $t$ .....

**Entraînement 10.16 — Coefficients de réflexion et transmission.**

Un dioptre en $x = 0$ sépare du vide d'indice $n_1 = 1$ pour $x < 0$ d'un plasma d'indice réel $n_2$ pour $x > 0$. On rappelle les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude $(r, t)$

$$\begin{cases} r = \dfrac{E_r(x=0)}{E_i(x=0)} = \dfrac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \\ t = \dfrac{E_t(x=0)}{E_i(x=0)} = \dfrac{2n_1}{n_1 + n_2}, \end{cases}$$

et en puissance $(R, T)$

$$R = |r|^2 \quad \text{et} \quad T = |t|^2 \frac{n_2}{n_1}.$$

a) Donner la longueur d'onde dans chaque domaine .....

b) À l'aide du graphique, évaluer $r$ et $t$ .....

c) En déduire l'indice $n_2$ du plasma .....

d) Calculer les coefficients $R$ et $T$ .....

**Entraînement 10.17 — Coefficients de réflexion et transmission en puissance.**

En notation complexe, pour des ondes planes progressives monochromatiques de vecteur d'onde $\underline{\vec{k}}_1$ perpendiculaire au champ électrique $\underline{\vec{E}}$, le champ magnétique $\underline{\vec{B}}$ associé est

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\underline{\vec{k}}_1 \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega},$$

et la moyenne temporelle du vecteur de Poynting est donnée par $\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \dfrac{\mathrm{Re}(\underline{\vec{E}}^* \wedge \underline{\vec{B}})}{2\mu_0}$.

On rappelle la relation d'analyse vectorielle $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$.

a) Calculer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting .....

Ce champ, en incidence normale sur un dioptre, donne lieu à un champ réfléchi de coefficient d'amplitude $\underline{r}$ de vecteur d'onde $-\underline{\vec{k}}_1$ ainsi qu'à un champ transmis de coefficient d'amplitude $\underline{t}$ de vecteur d'onde $\underline{\vec{k}}_2$.

b) Exprimer les puissances réfléchie et transmise.

.....

c) En déduire l'expression de $R = -\dfrac{\langle \Pi_r \rangle}{\langle \Pi \rangle}$ et $T = \dfrac{\langle \Pi_t \rangle}{\langle \Pi \rangle}$ .....

**Réponses mélangées**

(a) $\pm\dfrac{1+\mathrm{i}}{\delta}$ avec $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0\,\alpha\,\omega}}$ oui oui oui non $|\underline{r}|^2$ et $|\underline{t}|^2\,\mathrm{Re}\left(\dfrac{\underline{k}_2}{\underline{k}_1}\right)$

$\underline{k} = \dfrac{\beta - \omega^2}{\mathrm{i}\alpha}$ $\dfrac{1}{2}$ $\dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}(1+n^2)$ oui non non $k^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ (b)

$\pm\mathrm{i}\dfrac{\omega}{c}\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}$ $\dfrac{1}{9}$ et $\dfrac{8}{9}$ (c) $\pm\dfrac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$ $\dfrac{|\underline{E}|^2}{2\mu_0\omega}\,\mathrm{Re}\left(\underline{\vec{k}}_1\right)$ $\dfrac{\gamma E_0^2}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2x}{\delta}}$

$\dfrac{|\underline{E}_0|^2}{2\mu_0 c}\,\mathrm{Re}(\underline{n})\vec{e_z}$ $\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{4}{3}$ $\dfrac{nE_0^2}{2\mu_0 c}\vec{e_z}$ $-\dfrac{|\underline{E}|^2|\underline{r}|^2}{2\mu_0\omega}\,\mathrm{Re}\left(\underline{\vec{k}}_1\right)$ $\dfrac{|\underline{E}|^2|\underline{t}|^2}{2\mu_0\omega}\,\mathrm{Re}\left(\underline{\vec{k}}_2\right)$ $\underline{\rho}\left(\dfrac{\underline{\alpha}}{\varepsilon_0} + \mathrm{i}\,\omega\right)$ non

1 et 3 $v_g = c\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega_p}}$ 1 et 4 $\underline{k}^2 = \dfrac{\mathrm{i}\omega}{\alpha}$ $\begin{cases} r = \dfrac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \\ t = \dfrac{2n_1}{n_1 + n_2} \end{cases}$ $\dfrac{E_0^2}{2\mu_0\omega\delta}\mathrm{e}^{-\frac{2x}{\delta}}\vec{e_x}$

$v_\varphi = \dfrac{c}{\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$ $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$ $\dfrac{nE_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kz)\vec{e_z}$ $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\gamma\vec{E} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ oui

$\underline{k}^3 = \dfrac{\omega^3}{\alpha} - \dfrac{\beta}{\alpha}\omega$ $\pm\dfrac{\omega}{c}$ $\Delta\vec{E} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\gamma\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ oui $\begin{cases} r + 1 = t \\ n_1 - rn_1 = tn_2 \end{cases}$ 1 et 2

2 m et 4 m $\mathrm{i}\,\omega\,\underline{\rho}\left(1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) = 0$ $\dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}(1+n^2)\cos^2(\omega t - kz)$ oui oui

► Réponses et corrigés page 462

# Modèle scalaire de la lumière

**Prérequis**
Optique géométrique (rayons, indice optique, lentilles, lois de Snell-Descartes). Trigonométrie. Longueurs d'onde dans le vide et dans un milieu, période, fréquence et pulsation.

**Constantes utiles**
→ Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3{,}00 \times 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

## Exprimer un chemin optique

Dans un milieu homogène, le chemin optique entre deux points A et B est défini comme le produit de l'indice optique $n$ du milieu par la distance géométrique AB parcourue par un rayon lumineux : $(\mathrm{AB}) = n \times \mathrm{AB}$.

### Entraînement 11.1 — De l'eau dans un verre.

Un rayon issu d'une source ponctuelle arrive sous incidence normale à la surface de l'eau contenue dans un verre. Les indices optiques de l'air et de l'eau sont respectivement notés $n_{\mathrm{air}}$ et $n_{\mathrm{eau}}$.

a) Exprimer le chemin optique (SI) en fonction de $n_{\mathrm{air}}$ et $h$ .....

b) Exprimer le chemin optique (IF) en fonction de $n_{\mathrm{eau}}$ et $H$ .....

c) En déduire l'expression du chemin optique (SF) .....

d) Comment se réexprime cette expression si l'air est assimilé au vide ? .....

### Entraînement 11.2 — Points conjugués par une lentille.

Deux points A et A′ sont conjugués par une lentille convergente : tous les rayons issus de A et arrivant en A′ ont des chemins optiques identiques. Pour simplifier, ces points sont choisis sur l'axe optique de la lentille. L'air est assimilé au vide.

On note $e$ l'épaisseur maximale de la lentille et $n$ l'indice optique du verre.

En travaillant avec le rayon confondu avec l'axe optique, exprimer :

a) le chemin optique dans le verre (BC), en fonction de $e$ et $n$ .....

b) le chemin optique dans l'air $(\mathrm{AB}) + (\mathrm{CA'})$ en fonction de la distance AA′ et $e$ ...

c) en déduire l'expression générale du chemin optique (AA′) .....

**Entraînement 11.3 — Lentille éclairée avec un angle d'incidence non nul.**

Des rayons, provenant d'une source S à l'infini, éclairent une lentille sous un angle d'incidence $\alpha$. Ils convergent en un point S′ du plan focal image de la lentille. Les points A et B sont situés à gauche, juste avant la lentille. L'indice optique du verre est $n$. L'air est assimilé au vide.

a) En sachant que le plan passant par H et B est une surface d'onde pour la source S, exprimer la différence de chemin optique (SA) − (SB) en fonction de la distance AB et de l'angle $\alpha$.

.....

b) Les points S et S′ sont conjugués donc les chemins optiques (SAS′) et (SBS′) sont égaux.

En déduire la différence de chemin optique (AS′) − (BS′) en fonction de la distance AB et de l'angle $\alpha$.

.....

## Surfaces d'onde et théorème de Malus

D'après le théorème de Malus, les rayons lumineux issus d'un point source S sont perpendiculaires aux surfaces d'onde relatives à cette source. La surface d'onde étant le lieu des points d'égal chemin optique par rapport à la source.

**Entraînement 11.4 — Action d'une lentille inconnue sur des surfaces d'onde.**

On considère ici des surfaces d'onde issues d'un point objet (en tirets) et celles de son image (en pointillés) par une lentille inconnue. Pour chaque situation, déterminer si la lentille est « convergente » ou « divergente ».

a)

.....

c)

.....

b)

.....

d)

.....

**Entraînement 11.5 — Action d'une lentille divergente sur des surfaces d'onde.**

On construit l'image par une lentille divergente $\mathcal{L}$ d'une source lumineuse placée à l'infini sur l'axe optique.

*Une ou plusieurs réponses sont possibles.*

a) En amont de la lentille, les surfaces d'onde sont :

(a) perpendiculaires à l'axe optique

(b) des cercles concentriques centrés sur $F$

(c) des plans parallèles entre eux

.....

b) En aval de la lentille, les surfaces d'onde sont :

(a) des cercles concentriques centrés sur $F$

(b) des plans perpendiculaires à l'axe optique

(c) des cercles concentriques centrés sur $F'$

.....

**Entraînement 11.6 — Une loi bien connue...**

Une onde plane arrive sur un dioptre plan séparant deux milieux d'indice $n_1$ et $n_2$. On note $H_1$ le projeté orthogonal de $I_2$ sur le rayon (2). De même, $H_2$ est le projeté orthogonal de $I_1$ sur le rayon (1). On note $I_1I_2 = a$.

a) Quels couples de points appartiennent à la même surface d'onde ?

(a) $I_2$ et $I_1$ (b) $I_2$ et $H_1$ (c) $I_1$ et $H_2$

.....

b) Que vaut l'angle $\alpha$ ?

(a) $\frac{\pi}{2} - i_1$ (b) $i_1$ (c) $\frac{\pi}{2} + i_1$

.....

c) Exprimer le chemin optique $(H_1I_1)$ en fonction de $n_1$, $a$ et $\alpha$.

.....

d) Que vaut l'angle $\beta$ ?

(a) $i_2$ (b) $\frac{\pi}{2} - i_2$ (c) $\frac{\pi}{2} + i_1$

.....

e) Exprimer le chemin optique $(I_2H_2)$ en fonction de $n_2$, $a$ et $\beta$ .....

f) À partir des questions c) et e), déduire une relation entre $n_1$, $\sin(i_1)$, $n_2$ et $\sin(i_2)$.

.....

# Retard de phase

*Le retard de phase*, ou *phase*, d'un rayonnement en un point M par rapport à sa source au point S est défini par $\phi(\mathrm{M}) = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}(\mathrm{SM})$, où (SM) le chemin optique entre les deux points.

**Entraînement 11.7 — Surface d'onde et déphasage.**

Un point source $S$ émettant un rayonnement monochromatique de longueur d'onde $\lambda_0$ est placé au foyer objet d'une lentille mince convergente. Une lame d'indice $n$ et d'épaisseur $e$ est placée à une distance $d$ de la lentille et recouvre une partie du faisceau. On considère que les points A et A′, à équidistance de S se situent juste après la lentille. On prendra l'indice de l'air égal à 1.

a) Quels couples de points appartiennent à la même surface d'onde ?

(a) A et A′ (b) B et B′ (c) C et C′

b) Exprimer la phase $\phi(\mathrm{C}')$ en fonction de $\lambda_0$, $(\mathrm{SA}')$, $d$ et $e$.

c) Exprimer la phase $\phi(\mathrm{C})$ en fonction de $\lambda_0$, (SA), $d$, $n$ et $e$.

d) En déduire le déphasage $\Delta\phi = \phi(\mathrm{C}) - \phi(\mathrm{C}')$ en fonction de $\lambda_0$, $n$ et $e$.

**Entraînement 11.8 — Phases et déphasage.**

Un signal lumineux de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0$ est émis depuis une source en S. On considère que le point d'incidence A se situe juste avant le miroir, et on rappelle qu'une réflexion sur un miroir métallique produit un retard de phase de $\pi$.

Exprimer la phase $\phi_1$ du rayon 1 réfléchi par le miroir de gauche en fonction de $h$ et $\theta_1$ aux points de l'espace suivant.

a) $\phi_1(\mathrm{A})$ .....

b) $\phi_1(\mathrm{M})$ .....

c) Exprimer la distance BD en fonction de $e$ et $\theta_2$ .....

d) Exprimer la distance EB en fonction de $e$, $h$ et $\theta_2$ .....

e) Quelle est l' expression correcte de $\phi_2(\mathrm{B})$, la phase du rayon de droite au point B ?

(a) $\dfrac{2\pi}{\lambda_0}\left(\dfrac{h}{2n\sin\theta_1} - \dfrac{e}{\cos\theta_2}\right)$ (b) $\dfrac{2\pi}{\lambda_0}\left(\dfrac{h}{2\sin\theta_1} - \dfrac{e}{n\cos\theta_2}\right)$ (c) $\dfrac{2\pi}{\lambda_0}\left(\dfrac{e}{\cos\theta_2} - \dfrac{h}{2n\sin\theta_1}\right)$

f) Exprimer la phase de ce rayon en M, $\phi_2(\mathrm{M})$, en fonction de $h$, $e$, $n$, $\theta_1$ et $\cos\theta_2$.

.....

g) Exprimer le déphasage $\Delta\phi = \phi_2(\mathrm{M}) - \phi_1(\mathrm{M})$ en fonction de $e$, $n$ et $\cos\theta_2$.

.....

h) Quelle est l'expression correcte de $\Delta\phi$ ? *On rappelle que* $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$.

(a) $\dfrac{4\pi}{\lambda_0}\dfrac{e(n^2-1)}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta_1}} - \pi$ (b) $\dfrac{4\pi}{\lambda_0}\dfrac{e(n^2-1)}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta_1}} + \pi$ (c) $\dfrac{2\pi}{\lambda_0}\dfrac{e(n^2-1)}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta_1}} + \pi$

.....

**Entraînement 11.9 — Déphasage dû à une lame.**

On souhaite exprimer les différences de phases $\Delta\phi = \phi(\mathrm{N}) - \phi(\mathrm{M})$ entre le rayon passant par N et le rayon passant par M issus de la même source à l'infini S de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0$.

L'indice de l'air est pris égal à 1.

a) Pour le cas 1, exprimer le déphasage $\Delta\phi = \phi(\mathrm{N}) - \phi(\mathrm{M})$ selon $e$, $\lambda_0$ et $n$.

.....

On considère maintenant le cas 2.

b) Exprimer la distance $\mathrm{I_1I_2}$ en fonction de $e$ et $\theta_2$ .....

c) Exprimer la distance $\mathrm{H_1H_2}$ en fonction de $\mathrm{I_1I_2}$ et $\theta_1 - \theta_2$ .....

d) Exprimer le déphasage $\Delta\phi = \phi(\mathrm{N}) - \phi(\mathrm{M})$ en fonction de $e$, $\lambda_0$, $n$, $\theta_2$ et $\theta_1 - \theta_2$.

.....

e) Quelle est l'expression correcte de $\cos(\theta_1 - \theta_2)$ ?

*On rappelle que* $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ *et que* $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$.

(a) $\cos\theta_1\cos\theta_2 - n + n\sin^2\theta_2$ (c) $\cos\theta_1\cos\theta_2 + n - n\cos^2\theta_2$

(b) $\sin\theta_1\sin\theta_2 + n - n\sin^2\theta_2$

.....

f) En déduire une expression de $\Delta\phi$ fonction de $e$, $\lambda_0$, $n$, $\cos\theta_2$ et $\cos\theta_1$.

.....

**Entraînement 11.10 — Lame séparatrice.**

Cas 3

Un signal lumineux de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0$ est émis depuis une source en S. Il est séparé en deux rayons par une lame semi-réfléchissante inclinée d'un angle $\theta_1 = 45°$. On cherche à déterminer le déphasage $\Delta\phi$ entre les deux rayons en sortie de la lame après réflexion sur les deux miroirs en M$_1$ et M$_2$. On rappelle qu'un rayon subit un déphasage de $\pi$ après réflexion sur un miroir métallique, ou sur un dioptre si le rayon incident se propage dans le milieu le moins réfringent : d'indice de réfraction le plus faible.

a) Déterminer le déphasage du rayon réfléchi par M$_1$ dû à la réflexion .....

b) Déterminer le déphasage du rayon réfléchi par M$_2$ dû à la réflexion .....

c) Exprimer la distance I$_1$I$_2$ en fonction de $e$ et $\theta_2$ .....

d) Exprimer la différence de phase $\Delta\phi$ entre le rayon réfléchi par M$_2$ et le rayon réfléchi par M$_1$ au point $I_3$ en fonction $e$, $\lambda_0$, $n$ et $\theta_2$ .....

# Largeur spectrale et cohérence temporelle

**Entraînement 11.11 — Différentes sources.**

Une onde lumineuse est émise par des trains d'onde successifs de durée individuelle moyenne $\tau_c$ (temps de cohérence) et de longueur individuelle moyenne $\ell_c = c \times \tau_c$ (longueur de cohérence) dans le vide. D'après l'analyse de Fourier, à cette onde de durée finie correspond un spectre de largeur $\Delta f \simeq \dfrac{1}{\tau_c}$ (en fréquence).

On considère trois sources :

- une lampe spectrale basse pression à vapeur de mercure telle que $\tau_c \simeq 10\,\text{ps}$ (source 1),
- un laser de TP tel que $\tau_c \simeq 0{,}1\,\mu\text{s}$ (source 2)
- et une source de lumière blanche munie d'un filtre ayant une bande passante $\Delta\lambda = 50\,\text{nm}$ autour de la longueur d'onde $\lambda = 820\,\text{nm}$ (source 3).

On rappelle que la cohérence temporelle d'une source est d'autant meilleure que son temps de cohérence est important.

a) Estimer $\Delta f$ en hertz pour la source 1 .....

b) Estimer $\Delta f$ en hertz pour la source 2 .....

c) En utilisant la relation $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda} = \dfrac{\Delta f}{f}$, estimer $\tau_c$ en picoseconde pour la source 3 .....

d) Classer les sources, de celle possédant la meilleure cohérence temporelle à la moins bonne.

.....

# Photométrie

**Entraînement 11.12 — Intensité lumineuse.**

Un signal $s(t) = S_0 \cos(\omega t)$ de période $T$ est détecté par deux capteurs de temps de réponse $\tau = 1\,\text{ns}$.

Les capteurs A et B délivrent des signaux de tension $u_1$ et $u_2$ respectivement proportionnels à la moyenne de $s$ et au carré de la moyenne de $s^2$ : on a

$$u_1 = K_1 \langle s(t) \rangle \qquad \text{et} \qquad u_2 = K_2 \langle s^2(t) \rangle,$$

où $K_1$ et $K_2$ sont des constantes.

On considère que les signaux $u_1$ et $u_2$ émergent du bruit de mesure lorsque leur valeur absolue est respectivement supérieure à $\dfrac{K_1 S_0}{2\pi \times 100}$ et $\dfrac{K_2 S_0^2}{2}$.

On indique que la moyenne temporelle d'un signal $f(t)$ mesuré pendant une durée $\tau$ est

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t)\,\mathrm{d}t.$$

a) Exprimer $u_1$ en fonction de $K_1$, $S_0$, $\tau$ et $T$.

.....

b) Quelle est la valeur maximale de $u_1$ fonction de $\dfrac{\tau}{T}$ ?

(a) $2\pi K_1 S_0 \dfrac{T}{\tau}$

(b) $2\pi K_1 S_0 \dfrac{\tau}{T}$

(c) $K_1 S_0 \dfrac{\tau}{2\pi T}$

(d) $K_1 S_0 \dfrac{T}{2\pi\tau}$

.....

c) En déduire la fréquence maximale du signal exploitable par le capteur A.

.....

d) Exprimer $u_2$ en fonction de $K_2$, $S_0$, $\tau$ et $T$.

*On rappelle que* $\cos^2 a = \dfrac{1 + \cos(2a)}{2}$.

.....

e) Quelle est la valeur maximale de $u_2$ fonction de $\dfrac{\tau}{T}$ ?

(a) $\dfrac{K_2 S_0^2}{2\tau}\left(T + \dfrac{\tau}{4\pi}\right)$

(b) $\dfrac{K_2 S_0^2}{2\tau}\left(\tau + \dfrac{T}{4\pi}\right)$

(c) $\dfrac{K_2 S_0^2}{\tau}\left(\tau + \dfrac{T}{4\pi}\right)$

.....

f) Existe-t-il une fréquence maximale du signal exploitable par le capteur B ?

.....

## Entraînement 11.13 — Choix d'une photodiode.

La sensibilité d'une photodiode $s$ est, au cours d'une mesure de durée $\tau$, le rapport de proportionnalité entre l'intensité du courant électrique produit $I_{\text{mes}}$ et la puissance lumineuse mesurée $\mathcal{P}_{\text{mes}}$ : on a

$$s = I_{\text{mes}}/\mathcal{P}_{\text{mes}}.$$

De plus, l'intensité du courant d'obscurité $I_{\text{obs}}$ d'une photodiode correspond à l'intensité électrique minimale que doit dépasser le courant produit au cours d'une mesure.

On dispose de trois photodiodes détectant respectivement trois radiations de longueurs d'onde dans le vide différentes. Les caractéristiques des photodiodes et des radiations sont données ci-dessous.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| photodiode 1 | $\lambda_1 = 470\,\text{nm}$ | $s_1 = 0{,}300\,\text{A}\cdot\text{W}^{-1}$ | $I_{\text{obs }1} = 3{,}00\times10^{-5}\,\mu\text{A}$ | $\tau_1 = 2{,}00\times10^{-4}\,\text{ms}$ |
| photodiode 2 | $\lambda_2 = 550\times10^{3}\,\text{pm}$ | $s_2 = 200\,\text{mA}\cdot\text{W}^{-1}$ | $I_{\text{obs }2} = 150\,\text{pA}$ | $\tau_2 = 0{,}450\,\mu\text{s}$ |
| photodiode 3 | $\lambda_3 = 0{,}660\,\mu\text{m}$ | $s_3 = 300\,\text{A}\cdot\text{kW}^{-1}$ | $I_{\text{obs }3} = 2{,}00\,\text{nA}$ | $\tau_3 = 50{,}0\,\text{ns}$ |

Calculer en watt les puissances lumineuses minimales détectables par les photodiodes.

a) $\mathcal{P}_{\text{min }1}$ .... b) $\mathcal{P}_{\text{min }2}$ .... c) $\mathcal{P}_{\text{min }3}$ ....

Calculer en joule les énergies minimales détectables au cours d'une durée $\tau$ par les photodiodes.

d) $E_{\text{min }1}$ .... e) $E_{\text{min }2}$ .... f) $E_{\text{min }3}$ ....

g) Sachant que l'énergie d'un photon est donnée par $E = h\nu$, où $h = 6{,}63\times10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}$ est la constante de Planck, quelle photodiode permet de mesurer le plus petit nombre de photons ?

(a) Photodiode 1 (b) Photodiode 2 (c) Photodiode 3

.....

**Réponses mélangées**

$\dfrac{e}{\cos\theta_2}$ (a) et (b) $6{,}67\times10^{-9}\,\text{W}$ $\Delta f = 1{,}0\times10^{11}\,\text{Hz}$ (d) $100\,\text{GHz}$

$2e\tan\theta_2$ $\dfrac{K_2S_0^2}{2\tau}\left(\tau+\dfrac{T}{4\pi}\sin\left(4\pi\dfrac{\tau}{T}\right)\right)$ $\Delta f = 1{,}0\times10^{7}\,\text{Hz}$ $n_2 a\sin\beta$

$\dfrac{2\pi}{\lambda_0}\dfrac{h}{\sin\theta_1}+\pi$ (a) (2), (1) puis (3) $n\times e$ $\dfrac{4\pi}{\lambda_0}\dfrac{ne}{\cos\theta_2}-\pi$ $n_1 a\sin\alpha$

$\pi$ (a) $1\times(\text{AA}'-e)$ $2\times10^{-17}\,\text{J}$ $1\times h+n_{\text{eau}}\times H$ $\text{I}_1\text{I}_2\cos(\theta_1-\theta_2)$

$\dfrac{h}{2}-e\tan\theta_2$ $\dfrac{2\pi}{\lambda_0}(n-1)e$ (a) non $n_1\sin i_1 = n_2\sin i_2$ $3{,}33\times10^{-16}\,\text{J}$

$\dfrac{e}{\cos\theta_2}$ Convergente Convergente $\dfrac{\pi}{\lambda_0}\dfrac{h}{\sin\theta_1}$ $K_1S_0\dfrac{T}{2\pi\tau}\sin\left(2\pi\dfrac{\tau}{T}\right)$ (c)

$\dfrac{4\pi}{\lambda_0}\dfrac{e}{\cos\theta_2}\left(n-\dfrac{1}{n}\right)-\pi$ $\text{AA}'+(n-1)e$ (b) Divergente $\text{AB}\sin(\alpha)$

$\dfrac{2\pi}{\lambda_0}((\text{SA})+d+ne)$ $n_{\text{eau}}\times H$ (b) $\tau_{\text{c}} = 45\times10^{3}\,\text{ps}$ $\dfrac{2\pi}{\lambda_0}e(n-1)$

$n_{\text{air}}\times h+n_{\text{eau}}\times H$ $n_{\text{air}}\times h$ $-\text{AB}\sin(\alpha)$ $\dfrac{2\pi}{\lambda_0}\dfrac{e}{\cos\theta_2}(n-\cos(\theta_1-\theta_2))$ (a) et (c)

$\dfrac{4\pi}{\lambda_0}\left(\dfrac{h}{2\sin\theta_1}+\left(n-\dfrac{1}{n}\right)\dfrac{e}{\cos\theta_2}\right)$ $1{,}00\times10^{-10}\,\text{W}$ $3{,}38\times10^{-16}\,\text{J}$ $\dfrac{2\pi}{\lambda_0}e(n\cos\theta_2-\cos\theta_1)$

(b) $\dfrac{2\pi}{\lambda_0}((\text{SA}')+d+e)$ Convergente $7{,}50\times10^{-10}\,\text{W}$ (b) et (c) $2\pi$ (c)

► Réponses et corrigés page 468

# Interférences à deux ondes

**Prérequis**
Fonctions trigonométriques. Signaux (fréquence, période, pulsations temporelle et spatiale, nombre d'onde, longueur d'onde, phase).

**Constantes utiles**
→ Célérité de la lumière $c = 3{,}00 \times 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

## Pour commencer

### Entraînement 12.1 — Des relations trigonométriques.

On donne les relations trigonométriques suivantes :

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \quad (1) \qquad \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad (2) \quad (3)$$
$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) \quad (4) \qquad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \quad (5) \quad (6)$$

a) Sommer les relations (1) et (2) et isoler $\cos(a)\cos(b)$ ....

b) Réécrire la relation précédente pour $a = b$ .....

c) Soustraire les relations (1) et (2), isoler $\sin(a)\sin(b)$ puis réécrire la relation obtenue pour $a = b$.

.....

d) Sommer les relations (3) et (4), isoler $\sin(a)\cos(b)$ puis réécrire la relation obtenue pour $a = b$.

.....

### Entraînement 12.2 — Somme de signaux périodiques.

On définit deux signaux lumineux : $s_1(x,t) = S_0\cos(\omega t - kx)$ et $s_2(x,t) = S_0\cos(\omega t - kx + \varphi)$ avec $\omega$ leur pulsation temporelle, $k$ leur pulsation spatiale et $\varphi$ une phase à l'origine. La superposition $s(x,t)$ de ces deux vibrations peut se mettre sous la forme :

$$s(x,t) = s_1(x,t) + s_2(x,t) = S_0\Big(f(x,t)\ (1+\cos(\varphi)) + g(x,t)\ \sin(\varphi)\Big).$$

*On utilisera la relation trigonométrique :* $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.

Exprimer les fonctions suivantes :

a) $f(x,t)$ .....

b) $g(x,t)$ .....

c) Pour quelle valeur de phase $\varphi$ le signal $s(x,t)$ s'annule-t-il ?

(a) $\varphi = 0$ (b) $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ (c) $\varphi = \pi$

.....

**Entraînement 12.3 — Valeurs moyennes (I).**

Un détecteur mesure la moyenne temporelle d'un signal périodique $s(t)$ de période $T$.

Cette moyenne, notée $\langle s(t) \rangle$, est définie par

$$\langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T s(t)\,\mathrm{d}t.$$

On donne les relations trigonométriques suivantes :

- $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}$
- $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{\sin(a-b)-\sin(a+b)}{2}$.
- $\sin(a)\sin(b) = \dfrac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$

On étudie les signaux suivants :

$$s_1(t) = S_1 \cos(\omega_1 t - k_1 x) \quad \text{et} \quad s_2(t) = S_2 \sin(\omega_2 t - k_2 x + \varphi_2).$$

a) Exprimer la période $T_1$ de $s_1(t)$ en fonction de $\omega_1$.

.....

b) À partir de la définition fournie, calculer $\langle s_1(t) \rangle$ sur $T_1$.

.....

c) Exprimer la période $T_2$ de $s_2(t)$ en fonction de $\omega_2$.

.....

d) À partir de la définition fournie, calculer $\langle s_2(t) \rangle$ sur $T_2$.

.....

e) Exprimer la période $T_3$ de $f_1(t) = s_1^2(t)$ en fonction de $\omega_1$.

.....

f) À partir de la définition fournie, calculer $\langle f_1(t) \rangle$ sur $T_3$.

.....

g) Exprimer la période $T_4$ de $f_2(t) = s_2^2(t)$ en fonction de $\omega_2$.

.....

h) À partir de la définition fournie, calculer $\langle f_2(t) \rangle$ sur $T_4$.

.....

### Entraînement 12.4 — Valeurs moyennes (II).

Les moyennes temporelles des fonctions cosinus et sinus pour un nombre entier de périodes vérifient

$$\langle A\cos(a\omega t+b)\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle A\sin(a\omega t+b)\rangle = 0$$

avec $A$, $a$, $\omega$ et $b$ des constantes.

On donne les relations trigonométriques suivantes :

- $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}$
- $\sin(a)\sin(b) = \dfrac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$
- $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{\sin(a-b)-\sin(a+b)}{2}$.

Calculer la moyenne temporelle sur un nombre entier de périodes des fonctions ci-dessous.

a) $\left\langle [\cos(\omega_0 t+\varphi_1)+\cos(\omega_0 t+\varphi_2)]^2 \right\rangle$

.....

b) $\left\langle [A\cos(3\omega_0 t+\varphi_1)+A\cos(\omega_0 t+\varphi_2)]^2 \right\rangle$

.....

c) $\left\langle [A\cos(42\omega_0 t+\varphi_1)+B\sin(43\omega_0 t+\varphi_2)]^2 \right\rangle$

.....

d) $\left\langle \left[\dfrac{A}{4}\sin\left(\dfrac{\omega_0}{2}t+\varphi_0\right)+\dfrac{A}{2}\sin\left(\dfrac{\omega_0}{2}t+2\varphi_0\right)\right]^2 \right\rangle$

.....

### Entraînement 12.5 — Bataille de contrastes.

On mesure les maxima et les minima d'éclairements de différentes figures d'interférences.

Quelle est celle qui présente le plus fort contraste $C = \dfrac{I_{\max}-I_{\min}}{I_{\max}+I_{\min}}$ ?

*On rappelle que* $1\,\mathrm{pW} = 1\times10^{-12}\,\mathrm{W}$.

(a) $I_{\max} = 10{,}0\times10^{6}\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$ et $I_{\min} = 1{,}00\,\mathrm{MW\cdot m^{-2}}$

(b) $I_{\max} = 660\,\mathrm{mW\cdot mm^{-2}}$ et $I_{\min} = 0{,}220\,\mathrm{kW\cdot dm^{-2}}$

(c) $I_{\max} = 5{,}00\,\mathrm{mW\cdot mm^{-2}}$ et $I_{\min} = 2{,}00\,\mathrm{mW\cdot cm^{-2}}$

(d) $I_{\max} = 72{,}0\,\mathrm{pW\cdot \mu m^{-2}}$ et $I_{\min} = 3{,}00\,\mathrm{MW\cdot km^{-2}}$

.....

**Entraînement 12.6 — Signaux isophases.**

Une source émet deux vibrations lumineuses $s(x,t) = S_0 \cos(\omega t - kx)$ et $s'(x,t) = S_0 \cos(\omega t' - kx')$ de période temporelle $T$ (associée à la pulsation $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ et la fréquence $f = \dfrac{1}{T}$) et de longueur d'onde $\lambda$ (associée à la pulsation spatiale $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$). On note $n \in \mathbb{Z}$.

a) Exprimer $\Delta\varphi$ le retard de phase entre $s$ et $s'$ pour $t = t' = t_0$ .....

b) Pour $t = t' = t_0$, comment s'expriment les écarts de positions $\Delta x_n$ lorsque $s$ et $s'$ ont la même excitation lumineuse ?

(a) $\Delta x_n = n\lambda$ (b) $\Delta x_n = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\lambda$ (c) $\Delta x_n = n\dfrac{\lambda}{2}$

.....

c) Exprimer $\Delta\varphi$ le retard de phase entre $s$ et $s'$ pour $x = x' = x_0$ .....

d) Pour $x = x' = x_0$, comment s'expriment les écarts d'instants $\Delta t_n$ lorsque $s$ et $s'$ ont la même excitation lumineuse ?

(a) $\Delta t_n = nT$ (b) $\Delta t_n = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)T$ (c) $\Delta t_n = n\dfrac{T}{2}$

.....

# Études d'éclairements

**Entraînement 12.7 — Fentes de Young.**

L'éclairement $I(x)$ obtenu en un point M d'un écran à une distance $D$ des fentes de Young est représenté sur la figure ci-contre. Il vérifie

$$I(x) = f(x)\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi nax}{\lambda D}\right)\right]$$

où $f(x)$ est une fonction dont nous ne tiendrons pas compte, où $a$ est la distance entre les deux fentes et où $n$ est l'indice du milieu et $\lambda$ la longueur d'onde du signal.

a) Identifier, grâce à la formule fournie, l'interfrange $i$ (c'est-à-dire la distance entre deux maxima d'éclairement consécutifs).

(a) $i = \dfrac{na}{\lambda D}$ (b) $i = \dfrac{2\pi na}{\lambda D}$ (c) $i = \dfrac{\lambda D}{na}$ (d) $i = \dfrac{\lambda D}{2\pi na}$

.....

b) Mesurer, à partir de la figure, l'interfrange $i$ .....

c) En déduire $a$, sachant que $n = 1{,}0$ que $D = 1{,}0\,\text{m}$ et que $\lambda = 630\,\text{nm}$ .....

**Entraînement 12.8 — Doublet spectral.**

On éclaire des fentes de Young verticales espacées d'une distance $a$, avec un doublet spectral de longueurs d'onde $\lambda_1$ et $\lambda_2$ (on pose $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ et $\lambda_{\text{moy}} = \dfrac{\lambda_2 + \lambda_1}{2}$). L'éclairement $I(x)$, obtenu en un point M d'un écran à une distance $D$ des fentes, est représenté sur la figure ci-dessous. Il vérifie :

$$I(x) = I_{\text{moy}}\left[1 + C(x)\cos\left(\frac{2\pi n a x}{\lambda_{\text{moy}} D}\right)\right]$$

avec $C(x) = \cos\left(\dfrac{\pi n a x \Delta\lambda}{\lambda_{\text{moy}}^2 D}\right)$, qu'on appelle le terme de contraste.

a) Identifier, grâce à la formule fournie, la période $X$ du terme de contraste.

(a) $X = \dfrac{\lambda_{\text{moy}}^2 D}{n a \Delta\lambda}$

(b) $X = \dfrac{2\lambda_{\text{moy}}^2 D}{n a \Delta\lambda}$

(c) $X = \dfrac{\lambda_{\text{moy}}^2 D}{2 n a \Delta\lambda}$

(d) $X = \dfrac{\lambda_{\text{moy}}^2 D}{2\pi n a \Delta\lambda}$

.....

b) On rappelle que $i = \dfrac{\lambda_{\text{moy}} D}{n a}$. Déterminer graphiquement l'interfrange $i$.

.....

c) En déduire $\lambda_{\text{moy}}$, sachant que $n = 1{,}0$, que $D = 1{,}5\,\text{m}$ et $a = 0{,}20\,\text{mm}$.

.....

d) Déterminer graphiquement la période $X$ du terme de contraste.

.....

e) En déduire l'écart spectral $\Delta\lambda$ du doublet.

.....

# Interférométrie

Dans cette section nous exploiterons les trois figures d'interférences suivantes.

**Entraînement 12.9 — Fentes « deux » Young.**

On éclaire des fentes de Young en faisceau parallèle conformément au schéma ci-dessou. La différence de marche entre les deux rayons 1 et 2 est : $\delta_{\mathrm{SM}} = \mathcal{L}_{\mathrm{SM},2} - \mathcal{L}_{\mathrm{SM},1} = \mathcal{L}_{\mathrm{S_2H}}$.

On donne le développement limité suivant : $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^4)$ quand $x \to 0$.

a) En étudiant le triangle $S_1S_2H$, exprimer la longueur $S_2H$ en fonction de $\theta_1$ et $a$.

.....

b) En étudiant un autre triangle, exprimer l'angle $\theta_1$ en fonction de $y$ et $f_2'$.

.....

c) Exprimer $\delta_{\mathrm{SM}}$ en fonction de $a$, $y$ et $f_2'$ lorsque $\theta_1 \ll 1\,\mathrm{rad}$ .....

d) Exprimer l'interfrange $i$ de la figure d'interférence au niveau de l'écran, sachant que l'éclairement y est tel que $I = 2I_0\left[1 + \cos\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}\delta_{\mathrm{SM}}\right)\right] = 2I_0\left[1 + \cos\left(2\pi\dfrac{y}{i}\right)\right]$.

.....

e) Quelle est la figure d'interférence observée sur l'écran ?

(a) Figure 1 (b) Figure 2 (c) Figure 3

.....

**Entraînement 12.10 — Interféromètre de Mach-Zehnder.**

On a positionné une lame d'épaisseur $e$ et une lame prismatique d'épaisseur $e' = e - \alpha y$, toutes deux d'indice $n$, au niveau des bras d'un interféromètre de Mach-Zehnder (on ne tiendra pas compte de la réfraction en sortie de la lame prismatique).

Les lames séparatrices LS atténuent l'éclairement $I_0$ des rayons d'un facteur 2. On rappelle que l'amplitude $S_0$ d'un rayon est liée à son éclairement de telle manière que $I_0 \propto S_0^2$. La différence de marche entre les deux rayons 1 et 2 est :

$$\delta_{\mathrm{SM}} = \mathcal{L}_{\mathrm{SM},1} - \mathcal{L}_{\mathrm{SM},2} = \mathcal{L}_{\mathrm{LS}_1\mathcal{M}_1} - \mathcal{L}_{\mathcal{M}_2\mathrm{LS}_2}.$$

a) De combien est atténuée l'amplitude d'un seul rayon après la deuxième séparatrice ?

(a) 1/2 (b) 1/4 (c) 1/8

b) Exprimer la différence de marche $\delta_{\mathrm{SM}}$ entre les deux bras en fonction de $n$, $\alpha$ et $y$ ..

c) Exprimer l'interfrange $i$ de la figure d'interférence au niveau de l'écran, sachant que l'éclairement y est tel que $I = I'[1 + \cos(\Delta\varphi)] = I'\left[1 + \cos\left(2\pi\frac{y}{i}\right)\right]$ .....

d) Quelle est la figure d'interférence observée sur l'écran ?

(a) Figure 1 (b) Figure 2 (c) Figure 3

**Entraînement 12.11 — Interféromètre de Michelson en lame d'air.**

Un interféromètre de Michelson en configuration lame d'air repose sur l'association de deux miroirs $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ dont le schéma optique équivalent est présenté ci-contre. Les rayons se propagent dans l'air, assimilé à un milieu d'indice optique $n$.

Dans ce cas, la différence de marche entre les deux rayons 1 et 2 est : $\delta_{\mathrm{SM}} = \mathcal{L}_{\mathrm{SM},2} - \mathcal{L}_{\mathrm{SM},1} = \mathcal{L}_{\mathrm{IJ}} + \mathcal{L}_{\mathrm{JK}} - \mathcal{L}_{\mathrm{IH}}$.

a) Exprimer les longueurs IJ et JK en fonction de $\theta$ et $e$ .....

b) Exprimer la longueur IK en fonction de $\theta$ et $e$ .....

c) Exprimer la longueur IH en fonction de $\theta$ et IK .....

On rappelle l'identité trigonométrique : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

d) Exprimer alors la longueur IH en fonction de $\cos(\theta)$ et $e$ .....

e) En déduire l'expression de la différence de marche $\delta_{\mathrm{SM}}$ en fonction de $\cos(\theta)$, $n$ et $e$ .

f) Quelle est la figure d'interférence observée sur l'écran ?

(a) Figure 1 (b) Figure 2 (c) Figure 3

**Entraînement 12.12 — Interféromètre de Fabry-Perot.**

Un interféromètre de Fabry-Perot est constitué de deux miroirs séparés d'une distance $e$ par un milieu d'indice $n$. On s'intéresse aux deux rayons ci-dessous. En sortie de l'interféromètre, une lentille permet de les focaliser afin qu'ils interfèrent en un point M d'un écran. Au niveau de chaque miroir, l'amplitude d'un rayon est multipliée par un coefficient $r$ qu'on approxime à $1/\sqrt{2}$ ou un coefficient $t = 1 + r$ selon qu'il soit réfléchi ou transmis. On considérera que l'air et le milieu entre les miroirs sont d'indice $n = 1$, et on notera $i$ l'angle de réflexion tels que $\widehat{\mathrm{ABD}} = 2i$ et $\widehat{\mathrm{BEH}} = i$.

On rappelle que l'éclairement est proportionnel au carré de l'amplitude.

a) Quel est le rapport des éclairements entre le rayons du bas et celui du haut ?

(a) 1/2 (b) 1/4 (c) 1/8

b) Exprimer la longueur BH en fonction de $e$ et $i$

c) Exprimer la longueur BD en fonction de $e$ et $i$

d) Exprimer la différence de marche $\delta_{\mathrm{SM}} = \mathcal{L}_{\mathrm{SABDFM}} - \mathcal{L}_{\mathrm{SABHCM}}$

e) Quelles formes auront les franges d'interférences sachant que $I(\mathrm{M}) = 2I_0\left[1 + \cos\left(\frac{\delta_{\mathrm{SM}}}{2\pi}\right)\right]$ ?

(a) bandes rectilignes (b) carrés évidés (c) anneaux

# Autres entraînements

**Entraînement 12.13 — Grandeurs caractéristiques d'un signal.**

La valeur d'un signal lumineux sinusoïdal en un point $x$ (en m) à un instant $t$ (en s) est donnée par :

$$s(x,t) = S_0 \cos\left(2\pi\left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi\right) = S_0 \cos(2\pi(\nu t \pm \sigma x) + \varphi) = S_0 \cos(\omega t \pm kx + \varphi)$$

avec $S_0$ son amplitude, $T$ sa période, $\lambda$ sa longueur d'onde, $\nu$ sa fréquence, $\sigma$ son nombre d'onde, $\omega$ sa pulsation temporelle, $k$ sa pulsation spatiale et $c$ sa célérité.

Calculer la valeur des différentes grandeurs caractéristiques des signaux suivants

$$s_1 = S_0 \cos(60t - 28x) \quad ; \quad s_2 = S_0 \cos\left(\frac{t}{21} - \frac{t}{32} - \frac{x}{7} + \frac{x}{12}\right) \quad ; \quad s_3 = S_0 \cos\left(\frac{3\pi}{5}t + \frac{t}{23} - \frac{2\pi\nu_3}{5c}x + \frac{\pi}{2}\right).$$

a) $T_1$ (s)

b) $\lambda_1$ (m)

c) $\nu_2$ ($\mathrm{s}^{-1}$)

d) $\sigma_2$ ($\mathrm{m}^{-1}$)

e) $\omega_3$ ($\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$)

f) $k_3$ ($\mathrm{rad \cdot m^{-1}}$)

**Entraînement 12.14 — Brouillage.**

On éclaire un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air avec une source ponctuelle émettant deux signaux lumineux de fréquences $\nu_1$ et $\nu_2$, et de longueurs d'onde $\lambda_1$ et $\lambda_2$. En sortie de l'interféromètre l'éclairement au niveau de l'axe optique est tel que

$$I(x) = I_0\left[1 + \cos\left(2\pi\frac{\nu_1 - \nu_2}{c}x\right)\cos\left(2\pi\frac{\nu_1 + \nu_2}{c}x\right)\right]$$

avec $x$ l'écart d'un des deux miroirs de l'interféromètre par rapport à l'autre, comme illustré par l'interférogramme ci-dessous (pour lequel l'échelle est non respectée).

a) Exprimer la période spatiale $\lambda$ de $\cos\left(2\pi\frac{\nu_1 - \nu_2}{c}x\right)$.

.....

b) À l'aide de l'interférogramme donner la valeur de $\Delta\nu = \nu_1 - \nu_2$.

.....

c) Exprimer la période spatiale $\lambda'$ de $\cos\left(2\pi\frac{\nu_1 + \nu_2}{c}x\right)$.

.....

d) À l'aide de l'interférogramme donner la valeur de $\nu_0 = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}$.

.....

e) Déterminer la valeur de $\lambda_1$ en sommant de $2\nu_0$ et $\Delta\nu$.

.....

f) Déterminer la valeur de $\lambda_2$ soustrayant $\Delta\nu$ à $2\nu_0$.

.....

**Entraînement 12.15 — La bonne formule.**

On considère les figures d'interférence suivantes, pour lesquelles le repère cartésien associé est donné.

a) À quelle quantité est proportionnelle l'intensité lumineuse de la figure d'interférence n°1 ?

(a) $1+\cos\left(\dfrac{2\pi a x}{\lambda D}\right)$

(b) $1+\cos\left(\dfrac{2\pi a y}{\lambda D}\right)$

(c) $1+\cos\left(\dfrac{2\pi a z}{\lambda D}\right)$

b) À quelle quantité est proportionnelle l'intensité lumineuse de la figure d'interférence n°2 ?

(a) $1+\cos\left(\dfrac{2\pi a x}{\lambda D}\right)$

(b) $1+\cos\left(\dfrac{2\pi a y}{\lambda D}\right)$

(c) $1+\cos\left(\dfrac{2\pi a z}{\lambda D}\right)$

c) À quelle quantité est proportionnelle l'intensité lumineuse de la figure d'interférence n°3 ?

(a) $1+\cos\left(\dfrac{4\pi n e}{\lambda}\dfrac{y_{\mathrm{O}}}{\sqrt{x^2+y^2+z_{\mathrm{O}}^2}}\right)$

(b) $1+\cos\left(\dfrac{4\pi n e}{\lambda}\dfrac{z_{\mathrm{O}}}{\sqrt{x^2+y^2+z_{\mathrm{O}}^2}}\right)$

(c) $1+\cos\left(\dfrac{4\pi n e}{\lambda}\dfrac{x_{\mathrm{O}}}{\sqrt{x_{\mathrm{O}}^2+y^2+z^2}}\right)$

(d) $1+\cos\left(\dfrac{4\pi n e}{\lambda}\dfrac{y+z}{\sqrt{x_{\mathrm{O}}^2+y_{\mathrm{O}}^2+z_{\mathrm{O}}^2}}\right)$

## Entraînement 12.16 — Anneaux du Michelson en lame d'air.

Les franges d'interférences d'un interféromètre de Michelson en configuration lame d'air sont des anneaux sombres et brillants (voir figure ci-dessous).

On peut schématiser les rayons lumineux en sortie de l'interféromètre avec le schéma optique ci-dessous où $r$ est le rayon d'un anneau brilant, où $\theta$ est l'angle d'incidence des rayons lumineux et où $f'$ est la distance focale de la lentille.

a) Exprimer le rayon d'un anneau $r$ en fonction de $\theta$ et de $f'$ .....

b) On rappelle que l'ordre d'interférences pour le Michelson en configuration lame d'air est : $p = \dfrac{2ne\cos(\theta)}{\lambda}$ avec $n = 1{,}00$ l'indice optique de l'air ; $e = 500\,\mu\text{m}$ et $\lambda = 643\,\text{nm}$.

Calculer l'ordre d'interférence $p_0$ dans le cas où l'angle d'incidence est nulle .....

c) Si on fait varier $\theta$ entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$, $\cos(\theta)$ :

(a) augmente (b) diminue (c) reste constant

.....

d) On rappelle que l'ordre d'interférences d'une frange brillante est un nombre entier.

Quel est l'ordre d'interférences $p_1$ du premier anneau brillant visible sur l'écran (sachant que $\theta = 0$ correspond au centre de l'écran) ?

(a) 1 555 (b) 1 555,5 (c) 1 556

.....

e) En déduire le rayon $r_1$ du premier anneau brillant en mm sachant que $f' = 50{,}0\,\text{cm}$.

.....

f) Quel est l'ordre d'interférences $p_2$ du deuxième anneau brillant visible sur l'écran ?

(a) 1 554 (b) 1 555 (c) 1 556 (d) 1 557

.....

g) En déduire le rayon $r_2$ du deuxième anneau brillant en mm .....

h) Calculer le rayon $r_{10}$ du dixième anneau brillant en cm .....

## Réponses mélangées

(b) $\frac{f_2'\lambda}{na}$ $2e\frac{1-\cos^2(\theta)}{\cos(\theta)}$ $9{,}5\times10^{-3}\,\mathrm{m}^{-1}$ $1\,555{,}2$ (a) (a)

$\frac{A^2}{8}\left(\frac{5}{4}+\cos(\varphi_0)\right)$ $\frac{S_1^2}{2}$ $6{,}4\,\mathrm{cm}$ $\frac{\lambda_0}{(n-1)\alpha}$ (a) $6{,}00\times10^{11}\,\mathrm{Hz}$

$\cos(a)\cos(b)=\frac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}$ $0{,}76\,\mu\mathrm{m}$ $\frac{\pi}{\omega_1}$ $k(x'-x)$ (c)

$\sin^2 a=\frac{1-\cos(2a)}{2}$ $\frac{e}{\cos(\theta)}$ $\frac{c}{\nu_1+\nu_2}$ $1{,}9\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ $2ne\cos(\theta)$ (c)

$1{,}3\,\mathrm{cm}$ $0{,}57\,\mathrm{cm}$ (b) (c) (c) $-\sin(\omega t-kx)$ $6{,}00\times10^{12}\,\mathrm{Hz}$

(a) $\frac{\pi}{\omega_2}$ $1{,}3\times10^{-9}\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ $f'\tan(\theta)$ (a) $\frac{A^2+B^2}{2}$ $1{,}0\times10^{-1}\,\mathrm{s}$

$\arctan\left(\frac{y}{f_2'}\right)$ $0$ $\frac{nay}{f_2'}$ $\frac{e}{\cos(i)}$ $600{,}2\,\mathrm{nm}$ (c) $\frac{S_2^2}{2}$ (c) $\omega(t-t')$

(a) $5{,}47\,\mathrm{cm}$ (b) $A^2$ $\frac{2e\sin^2 i}{\cos(i)}$ $2{,}2\times10^{-1}\,\mathrm{m}$ $2{,}6\times10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}$

$\cos(\omega t-kx)$ $\mathrm{IK}\sin(\theta)$ $\cos^2 a=\frac{1+\cos(2a)}{2}$ $48\,\mu\mathrm{m}$ $8{,}22\,\mathrm{mm}$ (b) $\frac{c}{\nu_1-\nu_2}$

$(n-1)\alpha y$ $2e\tan(\theta)$ $\sin(a)\cos(a)=\frac{\sin(2a)}{2}$ (b) (b) $\frac{2\pi}{\omega_2}$ $2ne\cos(i)$

$599{,}8\,\mathrm{nm}$ $1+\cos(\pm\varphi_1\mp\varphi_2)$ $\frac{2\pi}{\omega_1}$ $19{,}7\,\mathrm{mm}$ $0{,}14\,\mu\mathrm{m}$ $a\sin(\theta_1)$ $0$

► Réponses et corrigés page 475

# Interférences à N ondes

**Prérequis**
Nombres complexes et formules trigonométriques.

## Avant toute chose

### Entraînement 13.1 — Complexes et conjugués.

On considère le nombre complexe suivant :

$$\underline{Z}_1 = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}.$$

a) Quelle est l'expression de $\underline{Z}_1^*$, le conjugué de $\underline{Z}_1$ ?

(a) $\underline{Z}_1^* = -1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$ (b) $\underline{Z}_1^* = 1 - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$ (c) $\underline{Z}_1^* = 1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}$ (d) $\underline{Z}_1^* = 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}$

.....

b) En déduire $\underline{Z}_1\underline{Z}_1^*$ et le mettre sous la forme d'une fonction de $\cos(\theta)$ .....

Reprenons l'étude avec le nombre complexe suivant :

$$\underline{Z}_2 = 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}.$$

c) Quelle est l'expression de $\underline{Z}_2^*$, le conjugué de $\underline{Z}_2$ ?

(a) $\underline{Z}_2^* = 1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}$ (b) $\underline{Z}_2^* = 1 - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$ (c) $\underline{Z}_2^* = -1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}$ (d) $\underline{Z}_2^* = 1 + \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\theta}$

.....

d) En déduire $\underline{Z}_2\underline{Z}_2^*$ et le mettre sous la forme d'une fonction de $\cos(\theta)$ .....

### Entraînement 13.2 — Des expressions complexes aux fonctions sinusoïdales (I).

On considère le nombre complexe suivant :

$$\underline{Z}_1 = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}.$$

a) Écrire $\underline{Z}_1$ sous la forme suivante :

$$\underline{Z}_1 = \underline{f}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Donner l'expression de $\underline{f}\left(\frac{\theta}{2}\right)$ .....

b) En déduire $\underline{Z}_1\underline{Z}_1^*$ et le mettre sous la forme d'une fonction de $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ ....

**Entraînement 13.3 — Des expressions complexes aux fonctions sinusoïdales (II).**

Reprenons l'étude avec le nombre complexe suivant :

$$\underline{Z}_2 = 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}.$$

a) Écrire $\underline{Z}_2$ sous la forme suivante :

$$\underline{Z}_2 = \underline{g}\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Donner l'expression de $\underline{g}\left(\frac{\theta}{2}\right)$ .....

b) En déduire $\underline{Z}_2\underline{Z}_2^*$ et le mettre sous la forme d'une fonction de $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ ....

**Entraînement 13.4**

Soit $R \in \mathbb{R}$. On considère le nombre complexe suivant :

$$\underline{s} = \frac{1}{1 - R\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}}.$$

On admet que $\underline{ss}^*$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$\underline{ss}^* = \frac{a}{1 + m\sin^2(\varphi/2)}.$$

a) Donner l'expression de $a$ en fonction de $R$ .....

b) Donner l'expression de $m$ en fonction de $R$ .....

**Entraînement 13.5 — Résolution d'une équation trigonométrique (I).**

Soit $\theta \in [-90°, 0°[$.
Nous cherchons l'ensemble des angles $\theta'$ avec $\theta' \in [-90°, 90°]$ vérifiant l'équation suivante :

$$\cos(\theta') = \cos(\theta).$$

L'ensemble des solutions s'écrit : $\theta' = \{a, b, c, d, ...\}$.

a) De combien d'éléments est composé l'ensemble des solutions ? .....

b) Donner le plus petit élément de l'ensemble des solutions .....

c) Donner le plus grand élément de l'ensemble des solutions .....

**Entraînement 13.6 — Résolution d'une équation trigonométrique (II).**

Soit $\theta \in [-90°, 0°]$.
Nous cherchons l'ensemble des angles $\theta'$ avec $\theta' \in [-90°, 90°]$ vérifiant l'équation suivante :

$$\sin(\theta') = \sin(\theta)$$

L'ensemble des solutions s'écrit : $\theta' = \{a, b, c, d, ...\}$.

De combien d'éléments est composé l'ensemble des solutions ? .....

## Pour continuer...

**Entraînement 13.7 — Suite géométrique.**

On rappelle que la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique $u_k$ de raison $q \neq 1$ vérifie :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \cdots + u_n = u_0(1 + q + \cdots + q^n) = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Soit $\varphi \in \mathbb{R}$ ; on suppose que $\varphi$ n'est pas un multiple de $2\pi$.
Nous souhaitons écrire les sommes $\underline{s}(\varphi)$ sous la forme suivante :

$$\underline{s}(\varphi) = \underline{f}(\varphi) \frac{\sin\left(a\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}.$$

Déterminer $a$ et $\underline{f}(\varphi)$ pour $\underline{s}(\varphi) = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} + \mathrm{e}^{2\mathrm{j}\varphi}$.

a) $a$ .....

b) $\underline{f}(\varphi)$ .....

Déterminer $a$ et $\underline{f}(\varphi)$ pour $\underline{s}(\varphi) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} + \mathrm{e}^{2\mathrm{j}\varphi} + \mathrm{e}^{3\mathrm{j}\varphi} + \mathrm{e}^{4\mathrm{j}\varphi} + \mathrm{e}^{5\mathrm{j}\varphi}$.

c) $a$ .....

d) $\underline{f}(\varphi)$ .....

# Autour du réseau à N fentes

**Entraînement 13.8 — Pas du réseau.**

Nous disposons d'un réseau présentant 600 traits par millimètre (600 traits/mm).
Le pas du réseau $a$ est la distance entre deux fentes successives (distance centre à centre).

Déterminer $a$ en µm .....

**Entraînement 13.9 — Calcul de linéature en lpi.**

La linéature d'un réseau est affichée en unités anglosaxonnes en lpi (line per inch). On rappelle qu'un pied (foot) correspond à un tiers de verge anglaise (yard), et qu'il est divisé en douze pouces (inches). Un yard vaut 91,44 cm.

a) Donner la valeur du pouce (1 inch) en mm.

(a) 7,62 mm (b) 25,4 mm (c) 39,3 mm (d) 43,7 mm

.....

b) Calculer en traits par millimètre (résultat arrondi à la centaine la plus proche), la linéature d'un réseau comportant $n = 30\,000$ lpi .....

**Entraînement 13.10 — À propos de la relation fondamentale des réseaux.**

Un réseau de fentes de linéature $n = 600$ traits/mm est éclairé par une onde plane issue d'une source monochromatique de longueur d'onde dans l'air $\lambda = 546{,}1$ nm et on observe l'ordre 1 de diffraction par ce réseau en émergence normale.

On rappelle la relation fondamentale des réseaux par transmission entre l'angle d'incidence $\theta_0$ et l'angle de diffraction $\theta$ par le réseau dans l'ordre $p$ :

$$\sin(\theta) - \sin(\theta_0) = pn\lambda.$$

Que vaut l'angle d'incidence $\theta_0$ (en degrés) de l'onde éclairant ce réseau ?

.....

## Entraînement 13.11 — Brouillage des ordres.

Un réseau de fentes de linéature $n = 600$ traits par mm est éclairé sous incidence normale par une lampe à vapeur de mercure émettant les raies de longueur d'onde dans l'air :

| $\lambda$ (en nm) | 404,7 | 407,8 | 435,8 | 491,6 | 546,1 | 577,0 | 579,1 | 623,4 | 690,7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

On rappelle la condition d'interférences constructives entre les ondes planes diffractées dans l'ordre $p$ par un réseau suivant la direction $\theta$ (angle mesuré par rapport à la normale au plan du réseau), éclairé par une onde plane incidente de longueur d'onde $\lambda$ sous incidence normale : $\sin(\theta) = pn\lambda$

a) En exploitant le tableau, donner en degré l'intervalle $[\theta^{\min}, \theta^{\max}]$ des angles du spectre d'ordre 1 de la lampe à vapeur de mercure diffracté par ce réseau .....

b) Même question pour le spectre d'ordre 2 .....

c) Même question pour le spectre d'ordre 3 .....

d) On parle de chevauchement d'ordre quand au moins une raie d'un ordre donné s'intercale dans le spectre d'un ordre inférieur. Choisir la bonne réponse parmi les quatre propositions ci-dessous :

(a) Tout le spectre d'ordre $p = 3$ est mélangé à celui d'ordre $p = 2$.

(b) Seules les trois dernières raies du mercure dans l'ordre $p = 3$ ne chevauchent pas les raies du spectre d'ordre $p = 2$.

(c) Seules les trois premières raies du mercure dans l'ordre $p = 3$ chevauchent les raies du spectre d'ordre $p = 2$.

.....

## Entraînement 13.12 — Cas où $N = 2$.

On rappelle que l'expression de l'intensité diffractée par un réseau composé de $N$ fentes vaut :

$$I = I_0 \frac{\sin^2\left(N\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}.$$

où $\varphi$ est le déphasage entre deux rayons traversant deux fentes consécutives.
Dans cette application, nous allons prendre $N = 2$.

a) Écrire le numérateur en fonction de $\cos(\varphi)$ .....

b) Écrire le dénominateur en fonction de $\cos(\varphi)$ .....

c) Exprimer $I$ en fonction de $I_0$ et $\cos(\varphi)$ .....

**Entraînement 13.13 — Différences de marche.**

On dispose d'une réseau plan constitué de $n$ traits transparents par millimètre. Il est positionné sur un goniomètre préalablement réglé à l'infini. Ainsi, il est éclairé par une onde plane et on observe les interférences ayant lieu à l'infini. Le dispositif est plongé dans le vide (indice 1).
Nous souhaitons déterminer la différence de marche $\delta$ du rayon (2) par rapport au rayon (1) dans les différents cas représentés :

Quatre différences de marche sont proposées :

(a) $\delta = a\Big(\sin(\theta) + \sin(\theta')\Big)$

(b) $\delta = a\Big(\sin(\theta) - \sin(\theta')\Big)$

(c) $\delta = a\Big(\sin(\theta') + \sin(\theta)\Big)$

(d) $\delta = a\Big(\sin(\theta') - \sin(\theta)\Big)$

a) Dans le cas A, quelle est l'expression correcte de $\delta_A$ ? .....

b) Dans le cas B, quelle est l'expression correcte de $\delta_B$ ? .....

c) Dans le cas C, quelle est l'expression correcte de $\delta_C$ ? .....

d) Dans le cas D, quelle est l'expression correcte de $\delta_D$ ? .....

**Entraînement 13.14 — Différence de marche pour un réseau par réflexion.**

On considère un réseau par réflexion sur les points $O_1$, et $O_2$, de pas $a = O_1O_2$, éclairé par une onde plane sous l'angle d'incidence $\theta_0$ et on s'intéresse à l'onde plane diffractée sous l'angle d'émergence $\theta$.

On prendra l'indice de réfraction de l'air égal à l'unité.

La différence de marche $\delta_{2/1}$ du rayon 2 par rapport au rayon 1 vaut :

(a) $\delta_{2/1} = a\Big(\sin(\theta) - \sin(\theta_0)\Big)$

(b) $\delta_{2/1} = a\Big(\sin(\theta_0) - \sin(\theta)\Big)$

(c) $\delta_{2/1} = a\Big(\sin(\theta_0) + \sin(\theta)\Big)$

(d) $\delta_{2/1} = a\Big(\tan(\theta_0) + \tan(\theta)\Big)$

.....

**Entraînement 13.15 — Périodicité de la fonction réseau.**

On appelle fonction réseau notée $\mathcal{R}_N$ la fonction de la variable $\phi$ :

$$\mathcal{R}_N(\phi) = \left(\frac{\sin\left(\dfrac{N\phi}{2}\right)}{N\sin\left(\dfrac{\phi}{2}\right)}\right)^2.$$

a) Donner la période pour la variable $x$ de la fonction $\sin^2(x)$ .....

b) En déduire la période, pour la variable $\phi$, de la fonction $\sin^2\left(\dfrac{\phi}{2}\right)$ .....

c) Quelle est la période, pour la variable $\phi$, de la fonction $\sin^2\left(\dfrac{N\phi}{2}\right)$ ? .....

d) En déduire la période de la fonction réseau pour la variable $\phi$.

(a) $2\pi$

(b) $4\pi$

(c) $\dfrac{2\pi}{N}$

(d) $2\pi N$

.....

**Entraînement 13.16 — Propriétés de la fonction réseau.**

Soit la fonction réseau notée $\mathcal{R}_N$ de la variable $\phi$ définie par $\mathcal{R}_N(\phi) = \left(\dfrac{\sin\left(\dfrac{N\phi}{2}\right)}{N\sin\left(\dfrac{\phi}{2}\right)}\right)^2$.

a) Évaluer $\mathcal{R}_N(0)$. On rappelle que $\sin(x) \sim x$ quand $x \to 0$ .....

b) Exprimer en fonction de $N$ le nombre de zéros de la fonction réseau pour $\phi \in [0, 2\pi]$.

.....

c) On considère le graphe de la fonction réseau sur la figure ci-dessous :

Déduire du graphe la valeur de $N$ utilisée pour le tracé .....

**Entraînement 13.17 — Largeur d'un pic principal.**

On rappelle l'expression de la fonction réseau : $\mathcal{R}_N$ de la variable $\phi$ : $\mathcal{R}_N(\phi) = \left(\dfrac{\sin\left(\dfrac{N\phi}{2}\right)}{N\sin\left(\dfrac{\phi}{2}\right)}\right)^2$.

Cette fonction admet des pics appelés pics principaux pour toute valeur de $\phi$ multiple entier de $2\pi$. La figure suivante montre l'évolution de $\mathcal{R}_N$ autour de $\phi = 0$.

a) Le premier zéro de la fonction réseau, juste après le pic principal situé en $\phi = 0$ est obtenu pour l'angle :

(a) $\phi = \dfrac{\pi}{2N}$ (b) $\phi = \dfrac{\pi}{N}$ (c) $\phi = \dfrac{2\pi}{N}$ (d) $\phi = \dfrac{4\pi}{N}$

.....

b) En déduire en fonction de $N$ la largeur $\delta\phi$ d'un pic principal défini comme la variation de $\phi$ entre les deux annulations de $\mathcal{R}_N(\phi)$ de part et d'autre du pic principal .....

**Entraînement 13.18 — Mesure de longueur d'onde au goniomètre.**

Un réseau de pas $a_0 = 1{,}67\,\mu\text{m}$ placé sur un goniomètre, est éclairé par une onde plane en incidence normale issue d'une lampe à vapeur de thallium. Le spectre ne comporte qu'une seule raie de couleur verte dont on souhaite mesurer la longueur d'onde $\lambda$.
On relève $\theta'$ dans les différents ordres d'interférences observés vérifiant la formule du réseau :

$$p\lambda = a_0 \sin(\theta').$$

| Ordre $p$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\theta'$ en (rad) | $-1{,}30$ | $-0{,}70$ | $-0{,}33$ | 0 | 0,32 | 0,70 | 1,27 |

Afin de déterminer la longueur d'onde $\lambda$, nous allons tracer $a_0 \sin(\theta')$ en fonction de $p$ et réaliser une régression linéaire.
L'équation proposée pour la régression linéaire que vous ferez à l'aide de votre calculatrice se met sous la forme :

$$y = ax + b.$$

a) Identifier les grandeurs $x$ et $y$ .....

b) Après avoir effectué une régression linéaire à l'aide d'un tableur (à la calculatrice ou à l'ordinateur), déterminer la valeur de $a$ en µm .....

c) En déduire la longueur d'onde $\lambda$ en nm .....

# Déviation angulaire induite par un réseau

**Entraînement 13.19 — Définition de la déviation.**

Un réseau plan est éclairé par une onde plane et des interférences sont observées à l'infini. L'angle de déviation $D$ que le réseau fait subir au faisceau incident est défini sur chacun des schémas ci-dessous.

Trois expressions de $D$ sont proposées :

(a) $D = \theta + \theta'$ (b) $D = \theta - \theta'$ (c) $D = \theta' - \theta$

a) À quelle expression de $D$ correspond la déviation $D_A$ pour la figure A ? .....

b) À quelle expression de $D$ correspond la déviation $D_B$ pour la figure B ? .....

c) À quelle expression de $D$ correspond la déviation $D_C$ pour la figure C ? .....

d) À quelle expression de $D$ correspond la déviation $D_D$ pour la figure D ? .....

# Autres entraînements

**Entraînement 13.20 — Suite géométrique.**

On rappelle que La somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique $u_k$ de raison $q \neq 1$ vérifie :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \cdots + u_n = u_0(1 + q + \cdots + q^n) = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Considérons la somme $\underline{s}(\theta)$ suivante :

$$\underline{s}(\theta) = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda} a \sin(\theta)} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{4\pi}{\lambda} a \sin(\theta)} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{6\pi}{\lambda} a \sin(\theta)} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{8\pi}{\lambda} a \sin(\theta)} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{10\pi}{\lambda} a \sin(\theta)}.$$

Nous souhaitons écrire $\underline{s}(\theta)$ sous la forme suivante :

$$\underline{s}(\theta) = \underline{g}(\theta) \frac{\sin(\alpha \sin \theta)}{\sin(\beta \sin \theta)}.$$

a) Déterminer $\alpha$ en fonction de $a$ et $\lambda$ .....

b) Déterminer $\beta$ en fonction de $a$ et $\lambda$ .....

c) Déterminer $\underline{g}(\theta)$ .....

**Entraînement 13.21 — Largeur à mi-hauteur d'un pic principal.**

On rappelle l'expression de la fonction réseau $\mathcal{R}_N$ de la variable $\phi$ : $\mathcal{R}_N(\phi) = \left( \dfrac{\sin\left(\dfrac{N\phi}{2}\right)}{N \sin\left(\dfrac{\phi}{2}\right)} \right)^2$.

Cette fonction admet des pics appelés pics principaux pour toute valeur de $\phi$ multiple entier de $2\pi$. Sur le graphique suivant, nous avons fait le choix de montrer l'évolution de $\mathcal{R}_N$ autour de $\phi = 0$.

On écrit la largeur à mi-hauteur $\Delta\phi_{1/2}$ d'un pic principal sous la forme $\Delta\phi_{1/2} = \alpha \dfrac{\pi}{N}$. En considérant que $N \gg 1$, calculer la valeur de $\alpha$ avec deux chiffres significatifs.

On rappelle le développement limité à l'ordre 3 de $\sin(x)$ au voisinage de 0 : $\sin(x) \sim x - \dfrac{x^3}{6}$

.....

**Entraînement 13.22 — Hauteur du premier pic secondaire.**

On considère la fonction réseau $\mathcal{R}_N$ de la variable $\phi$ : $\mathcal{R}_N(\phi) = \left(\dfrac{\sin\left(\dfrac{N\phi}{2}\right)}{N\sin\left(\dfrac{\phi}{2}\right)}\right)^2$.

On donne le tracé de cette fonction sur la figure ci-dessous :

a) Estimer à partir du graphe la valeur de $\phi$ correspondant au premier maximum secondaire de la fonction réseau .....

b) Estimer la valeur de la fonction réseau au premier maximum secondaire ...

**Réponses mélangées**

$a = 5$ $\quad 2e^{j\frac{\theta}{2}}$ $\quad e^{j\frac{5\pi}{\lambda}a\sin\theta}$ $\quad$ (b) $\quad 2$ $\quad 4\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ $\quad$ (b) $\quad$ (b) $\quad$ (c)

$\dfrac{4R}{(1-R)^2}$ $\quad 10$ $\quad \dfrac{\pi}{\lambda}a$ $\quad 1$ $\quad x = p$ et $y = a_0\sin(\theta')$ $\quad N-1$ $\quad \dfrac{3\pi}{N}$ $\quad \dfrac{2\pi}{N}$

1 200 traits/mm $\quad$ 0,534 µm $\quad$ (d) $\quad$ (b) $\quad$ (c) $\quad 2j\ e^{-j\frac{\theta}{2}}$ $\quad a = 3$ $\quad -\theta$

1,69 $\quad \dfrac{6\pi}{\lambda}a$ $\quad 2I_0(1+\cos(\varphi))$ $\quad$ (c) $\quad$ (c) $\quad$ (c) $\quad 4\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ $\quad [46{,}8°; 79{,}4°]$

(c) $\quad$ (d) $\quad$ (c) $\quad 1$ $\quad \dfrac{4\pi}{N}$ $\quad$ 534 nm $\quad$ 0,05 $\quad$ 1,67 µm $\quad \theta$ $\quad 2\pi$

$[29{,}1°, 56{,}0°]$ $\quad \underline{f}(\varphi) = e^{j\varphi}$ $\quad \dfrac{1}{(1-R)^2}$ $\quad \underline{f}(\varphi) = e^{j3\varphi}$ $\quad$ (a) $\quad 2(1+\cos\theta)$ $\quad \pi$

$\dfrac{1}{2}(1-\cos(\varphi))$ $\quad [14{,}1°; 24{,}5°]$ $\quad 2(1-\cos\theta)$ $\quad$ (c) $\quad -19{,}1°$ $\quad 1-\cos^2(\varphi)$

► Réponses et corrigés page 484

# Outils mathématiques pour la diffusion

**Prérequis**
Expression des surfaces usuelles (disque, sphère,... )
Expression des volumes usuels (parallélépipède, cylindre, sphère,... )

## Pour bien commencer

### Entraînement 14.1 — Calculs de volumes.

Dans chacun des cas suivants, exprimer le volume du solide en fonction des données.

Volume a)

Volume b)

Volume c)

Volume d)

a) b) c) d)

## Entraînement 14.2 — Signe des dérivées partielles.

On considère la fonction de deux variables $f(x, y)$ représentée ci-contre. On étudie le signe des dérivées partielles au niveau des points A et B.

a) Quel est le signe de la dérivée partielle d'ordre 1 de $f$ par rapport à $x$ au point A, notée $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{A})$ ? .....

b) Quel est le signe de la dérivée partielle d'ordre 1 de $f$ par rapport à $y$ au point A, notée $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{A})$ ? .....

On s'intéresse maintenant au comportement de $f$ au voisinage du point B. Pour chacune des questions suivantes, choisir la bonne réponse.

c)

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{B}) > 0$ (c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{B}) < 0$

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{B}) = 0$

.....

d)

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{B}) > 0$ (c) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{B}) < 0$

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{B}) = 0$

.....

e)

(a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathrm{B}) > 0$ (c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathrm{B}) < 0$

(b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathrm{B}) = 0$

.....

f)

(a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathrm{B}) > 0$ (c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathrm{B}) < 0$

(b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathrm{B}) = 0$

.....

## Entraînement 14.3 — Volume d'un cône.

Le volume d'un cône de hauteur $h$ et dont le rayon de la base est $r$ vaut $V(r, h) = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$.

a) Quelle est l'expression de $\dfrac{\partial V}{\partial r}(r, h)$ ? .....

b) Quelle est l'expression de $\dfrac{\partial V}{\partial h}(r, h)$ ? .....

On souhaite comparer l'influence d'une même variation $\mathrm{d}\ell$ de $h$ ou de $r$ sur la valeur du volume $V$.

c) À quelle condition sur $h$ et $r$ a-t-on $\dfrac{\partial V}{\partial h}(r, h) > \dfrac{\partial V}{\partial r}(r, h)$ ?

(a) $h/3 < r$ (b) $h < r$ (c) $2h < r$ (d) $3h < r$

.....

**Entraînement 14.4 — Fabrication d'une casserole.**

*Les questions de cet entraînement ne concernent pas le manche de la casserole et ne concernent donc que la partie principale de la casserole. L'épaisseur de la tôle utilisée pourra être négligée.*

Un industriel souhaite fabriquer une casserole à partir de plaques de métal d'épaisseur constante.

a) Pour cela, quelle surface de tôle $S(R, H)$ doit-il utiliser ?

(a) $S(R, H) = 2\pi R^2 + \pi RH$

(b) $S(R, H) = \pi H^2 + 2\pi RH$

(c) $S(R, H) = \pi R^2 + 2\pi RH$

(d) $S(R, H) = 2\pi H^2 + \pi RH$

.....

b) Que vaut le volume utile $V(R, H)$ ?

(a) $V(R, H) = 2\pi R^2 H$

(b) $V(R, H) = \pi R^2 H$

.....

c) Exprimer $S(R, V)$ la surface de tôle que l'on doit utiliser pour fabriquer la casserole en fonction du rayon $R$ et du volume $V$.

.....

Le fabricant souhaite fabriquer une casserole de volume $V = V_0$ donné, tout en minimisant la quantité de tôle utilisée.

d) Il cherche donc une géométrie qui vérifie :

(a) $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}R}(R, V_0) = 0$

(b) $\dfrac{\partial S}{\partial R}(R, V_0) = 0$

.....

e) Déterminer l'expression de $V_0$ en fonction de $R$, puis celle de $H$ en fonction de $R$ permettant de minimiser la surface de tôle utilisée.

(a) $V_0 = \pi R^3$ (b) $V_0 = 2\pi R^3$ (c) $H = R$ (d) $H = 2R$

.....

### Entraînement 14.5 — Quelques équations différentielles (I).

Résoudre les équations différentielles suivantes en tenant compte des conditions aux limites.

Les quantités $n_0$, $n_1$, $j_0$ et $p$ sont des constantes.

a) $\dfrac{\partial^2 n}{\partial x^2}(x,t) = 0$ avec $\begin{cases} n(0,t) & = n_0 \\ \dfrac{\partial n}{\partial x}(0,t) & = j_0 \end{cases}$ .....

b) $\dfrac{\partial^2 n}{\partial x^2}(x,t) = 0$ avec $\begin{cases} n(0,t) & = n_0 \\ n(L,t) & = n_1 \end{cases}$ .....

c) $\dfrac{\partial^2 n}{\partial x^2}(x,t) = p$ avec $\begin{cases} n(0,t) & = n_0 \\ n(L,t) & = n_0 \end{cases}$ .....

### Entraînement 14.6 — Quelques équations différentielles (II).

Résoudre les équations différentielles suivantes en tenant compte des conditions initiales ($\tau$, $n_0$, $n_c$, $p$ et $L$ sont des constantes) :

a) $\dfrac{\partial n}{\partial t}(x,t) = \dfrac{n}{\tau}$ avec $n(x,0) = n_0$ .....

b) $\dfrac{\partial n}{\partial t}(x,t) = -\dfrac{n^2}{n_c \tau}$ avec $n(x,0) = n_0$ .....

c) $\dfrac{\partial n}{\partial t}(x,t) = -\dfrac{n}{\tau} + p$ avec $n(x,0) = n_0\left(1 - \dfrac{x}{L}\right)$ .....

**Réponses mélangées**

$\pi r^2 h$ $\quad \dfrac{2\pi r h}{3}$ $\quad$ positif $\quad abc$ $\quad \pi r^2 h \cos(\alpha)$ $\quad n(x,t) = j_0 x + n_0$

$n(x,t) = n_0 \exp\left(\dfrac{t}{\tau}\right)$ $\quad$ negatif $\quad$ b $\quad$ b $\quad n(t) = \dfrac{n_0}{1 + \dfrac{n_0 t}{n_c \tau}}$ $\quad \pi R^2 + 2\dfrac{V}{R}$

b $\quad$ c $\quad abc \sin(\alpha)$ $\quad n(x,t) = \dfrac{n_1 - n_0}{L} x + n_0$ $\quad$ c $\quad \dfrac{p}{2} x(x-L) + n_0$

$\dfrac{\pi r^2}{3}$ $\quad$ a et c $\quad$ c $\quad n_0\left(1 - \dfrac{x}{L}\right)\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) + p\tau\left(1 - \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right)$ $\quad$ b $\quad$ a

► Réponses et corrigés page 492

# Diffusion particulaire

**Prérequis**
Équation d'état des gaz parfaits ($PV = nRT$).
Expression des surfaces usuelles (disque, sphère,... )
Expression des volumes usuels (parallélépipède, cylindre, sphère,... )

**Constantes utiles**
→ Nombre d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6{,}02 \times 10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}$

Dans toute cette fiche, les caractéristiques du matériau homogène et isotrope étudié seront notées :

- $D$ : le coefficient de diffusivité $\left(\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}\right)$,
- $n$ : le nombre de particules par unité de volume $\left(\text{nombre de particules} \cdot \mathrm{m}^{-3}\right)$.

Pour évaluer les ordres de grandeur caractéristiques du phénomène, on notera :

- $\tau$ : la durée caractéristique (s),
- $L$ : la longueur caractéristique (m).

## Flux de particules

**Entraînement 15.1 — Flux de particules à travers une surface élémentaire.**

On considère des particules de vitesse $\vec{v}$ traversant un élément de surface $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ faisant un angle $\theta$ avec $\vec{v}$.

Le nombre de particules par unité de volume est noté $n(\mathrm{M}, t)$. On souhaite évaluer le nombre (algébrique) de particules traversant la surface $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ orientée.

a) Exprimer le volume élémentaire $\mathrm{d}\tau$, où se situaient initialement les particules traversant la surface considérée, entre $t$ et $t + \mathrm{d}t$ en fonction de $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$, $\vec{v}$ et $\mathrm{d}t$.

.....

b) En déduire le nombre $\mathrm{d}^2N$ de particules traversant la surface considérée entre $t$ et $t + \mathrm{d}t$ en fonction de $n$, $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$, $\vec{v}$ et $\mathrm{d}t$.

.....

Le flux de particules à travers une surface orientée donnée est le nombre algébrique de particules traversant cette surface par unité de temps.

c) En déduire le flux élémentaire $\mathrm{d}\Phi$ de particules à travers $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ .....

Le vecteur densité volumique de courant de particules $\vec{j}$ est défini par $\mathrm{d}\Phi = \vec{j} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$.

d) Déduire des questions précédentes l'expression de $\vec{j}$ .....

e) Quelle est l'unité de la norme de $\vec{j}$ ? .....

**Entraînement 15.2 — Flux de particules à travers des surfaces mésoscopiques.**

On note $n(\mathrm{M},t)$ le nombre de particules par unité de volume en M à l'instant $t$ et $\vec{j}(\mathrm{M},t)$ le vecteur densité volumique de flux de particules en $M$ à l'instant $t$.

On se place dans le cas d'une diffusion unidimensionnelle le long de l'axe cartésien $(\mathrm{O}x)$, pour laquelle on a $n = n(x,t)$. La loi de Fick s'écrit donc

$$\vec{j}(x,t) = -D\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}(n) = -D\,\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}\vec{e_x} = j(x,t)\vec{e_x}.$$

On souhaite évaluer les transferts de particules entre la tranche de section $S$ comprise entre $x$ et $x+\mathrm{d}x$ et l'extérieur :

a) Exprimer le transfert de particules algébriquement reçu par la tranche en $x$ entre $t$ et $t+\mathrm{d}t$.

(a) $j(x,t)S\,\mathrm{d}t$
(b) $-j(x,t)S\,\mathrm{d}t$
(c) $0$

.....

b) Exprimer le transfert de particules algébriquement reçu par la tranche en $x+\mathrm{d}x$ entre $t$ et $t+\mathrm{d}t$.

(a) $j(x+\mathrm{d}x,t)S\,\mathrm{d}t$
(b) $-j(x+\mathrm{d}x,t)S\,\mathrm{d}t$
(c) $0$

.....

c) Exprimer le transfert de particules algébriquement reçu par la tranche au niveau de la paroi latérale entre $t$ et $t+\mathrm{d}t$. On notera $\ell$ le périmètre de la section.

(a) $j(x)\ell\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$
(b) $-j(x)\ell\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$
(c) $0$
(d) $j(x+\mathrm{d}x)\ell\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$
(e) $-j(x+\mathrm{d}x)\ell\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

.....

d) En déduire le transfert de particules total algébriquement reçu par la tranche.

.....

**Entraînement 15.3 — Flux de particules à travers une surface macroscopique.**

On considère un volume $V$ délimité par une surface fermée $S$ orientée localement au voisinage d'un point P suivant la normale sortante. On étudie le transfert de particules entre ce volume et l'extérieur.

a) Le nombre de particules quittant le volume $V$ entre $t$ et $t + \mathrm{d}t$ s'écrit :

(a) $j(\mathrm{P}, t)S \times \mathrm{d}t$

(b) $\oiint_S \vec{j}(\mathrm{P}, t) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$

(c) $\oiint_S \vec{j}(\mathrm{P}, t) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} \times \mathrm{d}t$

(d) $\vec{j}(\mathrm{P}, t) \cdot \oiint_S \overrightarrow{\mathrm{d}S} \times \mathrm{d}t$

.....

b) Combien vaut la variation du nombre de particules situées dans $V$ pendant $\mathrm{d}t$ due aux échanges avec l'extérieur ?

.....

# Équation de diffusion : cas unidimensionnel

**Entraînement 15.4 — Dopage d'un semi-conducteur.**

Pour doper un semi-conducteur on dépose, à $t = 0$ en $x = 0$, $N$ atomes de dopage. En se plaçant dans le cas d'une diffusion unidimensionnelle suivant l'axe $(\mathrm{O}x)$, on peut montrer que la densité particulaire $n(x, t)$ d'atomes de dopage s'écrit à l'instant $t$ et à l'abscisse $x$ : $n(x, t) = \dfrac{K}{\sqrt{t}} \exp\left(-\dfrac{ax^2}{t}\right)$.

À tout instant, le nombre total $N$ d'atomes de dopage vérifie l'égalité :

$$N = \int_0^{+\infty} n(x, t)\,\mathrm{d}x = \alpha\,\mathrm{erf}(+\infty) \quad \text{où, par définition, } \mathrm{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \exp\left(-x^2\right) \mathrm{d}x.$$

a) Pour le changement de variable $u = x\sqrt{\dfrac{a}{t}}$, exprimer $\mathrm{d}x$ en fonction de $\mathrm{d}u$ ....

b) En déduire l'expression de $N$ en fonction de $K$, $a$ et $\mathrm{erf}(+\infty)$ .....

c) En déduire l'expression de $\alpha$ en fonction de $K$ et $a$ .....

**Entraînement 15.5 — Évolution temporelle d'une population.**

Dans un milieu homogène, la densité volumique de bactéries $n(t)$ peut être modélisée par l'équation différentielle : $\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = \dfrac{n}{T} - \dfrac{n^2}{n_c T}$ où $(n_c, T) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Initialement, on a $n(t=0) = n_0$ avec $0 < n_0 < n_c$.

Dans ces conditions, à tout instant et en tout point, on a $n(x,t) < n_c$. Par ailleurs, la séparation des variables permet d'écrire :

$$\int_0^t \frac{\mathrm{d}t}{T} = \frac{t}{T} = \int_{n_0}^{n(t)} \frac{n_c\,\mathrm{d}n}{n(n_c - n)}.$$

a) Déterminer le couple $(A, B)$ assurant l'égalité $\dfrac{n_c}{n(n_c-n)} = \dfrac{A}{n} + \dfrac{B}{n_c - n}$ .....

b) En déduire l'expression de $n(t)$ .....

**Entraînement 15.6 — Solutions de l'équation de diffusion ?**

Dans chacun des cas suivante, on cherche à savoir à quelle condition l'expression donnée est solution de l'équation de diffusion à une dimension

$$\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}(x,t) - \frac{1}{D}\frac{\partial n}{\partial t}(x,t) = 0.$$

Pour chaque cas ci-dessous, on injectera les propositions dans l'équation de diffusion.

a) $n(x,t) = n_0 \exp(\alpha x + \beta t)$ .....

b) $n(x,t) = n_0 \exp\left(-\dfrac{x}{\delta}\right)\cos\left(\omega t - \dfrac{x}{\delta}\right)$ .....

c) $n(x,t) = \dfrac{K}{\sqrt{t}}\exp\left(-\dfrac{ax^2}{t}\right)$ .....

# La diffusion particulaire : un phénomène lent

**Entraînement 15.7 — Grandeurs caractéristiques.**

On montre que dans le cas d'une diffusion à une dimension suivant l'axe $(\mathrm{O}x)$, l'équation de la diffusion s'écrit sous la forme $\dfrac{\partial n}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 n}{\partial x^2}$.

a) Quelle est l'expression de la longueur caractéristique $L$ en fonction de son temps caractéristique $\tau$ ?

(a) $L = \sqrt{\dfrac{D}{\tau}}$ (b) $L = \dfrac{\sqrt{D}}{\tau}$ (c) $L = D\tau^2$ (d) $L = \sqrt{D\tau}$

.....

b) Réciproquement, quelle est l'expression du temps caractéristique $\tau$ du phénomène en fonction de sa longueur caractéristique $L$ ?

(a) $\tau = \dfrac{L^2}{D}$ (b) $\tau = L^2 D$ (c) $\tau = \dfrac{L}{\sqrt{D}}$ (d) $\tau = L\sqrt{D}$

.....

**Entraînement 15.8 — Un café sucré.**

L'équation de diffusion caractérise l'évolution temporelle de la densité particulaire due au phénomène de diffusion. En raisonnant en ordres de grandeur, cette équation fait le lien entre un temps caractéristique $\tau$ et une longueur caractéristique de diffusion $L$ : on a $L = \sqrt{D\tau}$.

a) Le coefficient de diffusion du sucre dans le café vaut $D = 4 \times 10^{-10}\,\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$.

Déterminer le temps caractéristique de diffusion du sucre dans la tasse de café ci-contre.

.....

b) Un farceur a remplacé la sucrière par une salière. Sachant que le coefficient de diffusion du sel dans le café vaut $D_{\mathrm{sel}} = 20 \times 10^{-10}\,\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$, comparer le temps caractéristique de diffusion du sel à celui du sucre dans une tasse de café identique.

.....

**Entraînement 15.9 — Quelle est la diffusion la plus rapide ?**

La composition de nombreux parfums respecte une structure de « pyramide olfactive » : notes de « tête », puis notes de « cœur » et enfin notes de « fond ». Ainsi, les produits le plus volatils s'évaporent le plus vite et diffusent le plus ; ce sont les notes de « tête ». Les produits un peu moins volatils viennent après ; ce sont les notes de « cœur ». Ceux qui ont peu de volatilité viennent en dernier ; ce sont les notes de fond, qui persisteront le plus longtemps sur la peau.

Le tableau ci-dessous regroupe les caractéristiques des molécules olfactives constituant un parfum.

| Composé | Coefficient de diffusion | Ressenti |
|---|---|---|
| Géraniol | $7{,}5 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$ | Odeur florale (rose), fruitée |
| Limonène | $2{,}1 \times 10^{2}\,\mathrm{cm^2 \cdot h^{-1}}$ | Odeur douce, citronnée |
| Vanilline | $4{,}1 \times 10^{-2}\,\mathrm{m^2 \cdot h^{-1}}$ | Odeur de gousses de vanille |

Parmi les composés du tableau, lequel correspond

a) à la tête .. b) au cœur ... c) au fond ...

## Entraînement 15.10 — Quelle diffusion va le plus loin ?

En raisonnant en ordres de grandeur, l'équation de diffusion fait le lien entre un temps caractéristique $\tau$ et une longueur caractéristique de diffusion $L$ : on a $L = \sqrt{D\tau}$.

L'acier est un alliage d'insertion constitué principalement de fer et de carbone à hauteur de 0,02 % à 2 % en masse. Il est important de contrôler précisément le taux de carbone car c'est essentiellement la teneur en carbone qui confère à l'acier ses propriétés remarquables.

On donne les coefficients de diffusion du carbone dans le fer à différentes températures.

| $\Theta$ (°C) | 25 | 500 | 800 |
|---|---|---|---|
| $D$ ($\mathrm{cm^2 \cdot s^{-1}}$) | $4 \times 10^{-17}$ | $3 \times 10^{-8}$ | $1{,}6 \times 10^{-6}$ |

a) Reporter les valeurs expérimentales sur le graphique suivant, représentant le coefficient de diffusion en fonction de $\dfrac{1000}{T}$, où $T$ est la température exprimée en kelvin.

b) Quel modèle vous semble le plus approprié ($A$ et $B$ sont des constantes positives) ?

(a) $A\,\mathrm{e}^D = -\dfrac{B}{T}$ (b) $\ln(D) = A - \dfrac{B}{T}$ (c) $A\,\mathrm{e}^D = +\dfrac{B}{T}$ (d) $\ln(D) = A + \dfrac{B}{T}$

.....

c) Évaluer numériquement l'ordre de grandeur $B$ si $D$ est exprimé en $\mathrm{cm^2 \cdot s^{-1}}$ et $T$ en kelvin.

.....

Lorsque l'on fabrique une pièce d'acier on observe localement des modifications de la structure cristallographique du fer. On obtient une structure granulaire, les grains se distinguant par des teneurs différentes en carbone.

Les paramètres de mailles ont pour dimension caractéristique $a \approx 1 \times 10^{-10}$ m et les grains $d \approx 10\,\mu$m.

Lors de ces transitions de phase les atomes de carbone migrent par diffusion de façon à occuper les nouveaux interstices disponibles.

Évaluer la distance caractéristique (en mètres) sur laquelle est sensible le processus de diffusion au bout d'une heure :

d) à 25 °C .....

e) à 500 °C .....

f) à 800 °C .....

## En régime permanent

**Entraînement 15.11 — Vie et mort de bactéries.**

La population de bactéries dans une culture atteint un équilibre résultant de la compétition de deux phénomènes opposés :

- la division cellulaire (elles se divisent en deux) de temps caractéristique $T_1$ qui accroît la population ;
- la mort des bactéries qui diminue cette population de temps caractéristique $T_2$.

Dans un milieu homogène où la densité de bactéries est indépendante de la position, la densité de celles-ci peut se modéliser pour une équation de la forme

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = \frac{n}{T_1} - \frac{n^2}{n_c T_2},$$

où $n_c$ est une constante.

Quelle est la densité de bactéries en régime permanent ? .....

**Entraînement 15.12 — Évaporation.**

On étudie la diffusion de la vapeur d'eau dans l'air dans une colonne d'air située au dessus d'un verre. La surface libre est à l'altitude $z = 0$, l'axe vertical étant orienté vers le zénith.
On considère qu'à une altitude $z = L$, l'influence du verre n'est plus sensible et que la densité de molécules d'eau est nulle. On note $n_0$ sa valeur en $z = 0$.
Les gaz sont modélisés par des gaz parfaits.

a) Au niveau de la surface libre, la densité en molécule d'eau se note de la façon suivante (avec $P_{\text{sat}}$, la pression de vapeur saturante) :

(a) $n_0 = \dfrac{P_{\text{sat}}\mathcal{N}_A}{RT}$

(b) $n_0 = \dfrac{RT}{P_{\text{sat}}\mathcal{N}_A}$

(c) $n_0 = \dfrac{P_{\text{sat}}R}{\mathcal{N}_A T}$

(d) $n_0 = \dfrac{P_{\text{sat}}RT}{\mathcal{N}_A}$

.....

b) En régime permanent, on peut montrer que $\dfrac{\mathrm{d}^2 n}{\mathrm{d}z^2} = 0$. Exprimer $n(z)$ :

(a) $n(z) = n_0\left(1 + \dfrac{z}{L}\right)$

(b) $n(z) = n_0\left(1 - \dfrac{z}{L}\right)$

(c) $n(z) = n_0\left(1 - \dfrac{L}{z}\right)$

(d) $n(z) = n_0\left(1 + \dfrac{L}{z}\right)$

.....

c) L'expression du flux $\Phi$ à travers une surface orientée $S(z)\vec{e_z}$ située à l'altitude $z$ :

(a) $\Phi = DS\dfrac{n_0}{z}$

(b) $\Phi = -DS\dfrac{n_0}{z}$

(c) $\Phi = -DS\dfrac{n_0}{L}$

(d) $\Phi = DS\dfrac{n_0}{L}$

.....

# Autres entraînements

**Entraînement 15.13 — Diffusion en l'absence de source.**

On note $n$ le nombre de particules par unité de volume et $\vec{j}$ le vecteur densité de flux de particules.

On se place dans le cas d'une diffusion unidimensionnelle telle que

$$n = n(x,t) \quad \text{et} \quad \vec{j}(x,t) = j(x,t)\vec{e_x}.$$

On étudie un élément de volume de section $S$, et compris entre $x$ et $x + \mathrm{d}x$ :

a) Exprimer le nombre $N(t)$ de particules diffusantes présentes dans la tranche, à l'instant $t$, en fonction de $n(x,t)$, $S$ et $\mathrm{d}x$.

.....

b) En déduire la variation du nombre de particules diffusantes dans la tranche à l'instant entre $t$ et $t + \mathrm{d}t$.

.....

On souhaite maintenant évaluer les transferts de particules entre la tranche et l'extérieur.

c) En $x$ le transfert de particules algébriquement reçu par la tranche entre $t$ et $t + \mathrm{d}t$ s'écrit :

(a) $j(x,t)S\,\mathrm{d}t$ (b) $-j(x,t)S\,\mathrm{d}t$ (c) $0$

.....

d) En $x + \mathrm{d}x$ le transfert de particules algébriquement reçu par la tranche entre $t$ et $t + \mathrm{d}t$ s'écrit :

(a) $j(x+\mathrm{d}x,t)S\,\mathrm{d}t$ (b) $-j(x+\mathrm{d}x,t)S\,\mathrm{d}t$ (c) $0$

.....

e) Au niveau de la paroi latérale le transfert de particules algébriquement reçu par la tranche entre $t$ et $t + \mathrm{d}t$ s'écrit en notant $\ell$ le périmètre de la section :

(a) $j(x,t)\ell\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ (c) $0$ (e) $-j(x+\mathrm{d}x,t)\ell\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

(b) $-j(x,t)\ell\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ (d) $j(x+\mathrm{d}x,t)\ell\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

.....

f) En déduire le transfert de particules total algébriquement reçu par la tranche.

.....

g) Faire un bilan de particules diffusantes dans la tranche entre $t$ et $t + \mathrm{d}t$.

.....

h) En utilisant la loi de Fick, qui affirme que $\vec{j} = -D\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}(n)$, en déduire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $n(x,t)$.

.....

**Entraînement 15.14 — Diffusion en présence de source.**

On note $n$ le nombre de particules par unité de volume et $\vec{j}$ le vecteur densité de flux de particules. On se place dans le cas d'une diffusion unidimensionnelle telle que $n = n(x,t)$ et $\vec{j}(x,t) = j(x,t)\vec{e_x}$. On étudie un élément de volume de section $S$ compris entre $x$ et $x + \mathrm{d}x$ :

Dans le cas étudié, outre le phénomène de diffusion, un phénomène physique supplémentaire créé (algébriquement) $\sigma(x,t)$ particules par unité de volume et par unité de temps.

a) Exprimer la variation du nombre de particules diffusantes dans la tranche à l'instant entre $t$ et $t + \mathrm{d}t$ en fonction de $n$.

.....

On souhaite maintenant évaluer les transferts de particules entre la tranche et l'extérieur.

b) En $x$ le transfert de particules algébriquement reçu par la tranche entre $t$ et $t + \mathrm{d}t$ s'écrit :

(a) $j(x,t)S\,\mathrm{d}t$ (b) $-j(x,t)S\,\mathrm{d}t$ (c) $0$

.....

c) En $x + \mathrm{d}x$ le transfert de particules algébriquement reçu par la tranche entre $t$ et $t + \mathrm{d}t$ s'écrit :

(a) $j(x + \mathrm{d}x, t)S\,\mathrm{d}t$ (b) $-j(x + \mathrm{d}x, t)S\,\mathrm{d}t$ (c) $0$

.....

d) Au niveau de la paroi latérale le transfert de particules algébriquement reçu par la tranche entre $t$ et $t + \mathrm{d}t$ s'écrit en notant $\ell$ le périmètre de la section :

(a) $j(x)\ell\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ (c) $0$ (e) $-j(x + \mathrm{d}x)\ell\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

(b) $-j(x)\ell\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ (d) $j(x + \mathrm{d}x)\ell\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

.....

e) En prenant en compte le phénomène de diffusion et la création de particules au sein de la tranche, en déduire l'évolution totale de particules algébriquement reçues par la tranche.

.....

f) Faire un bilan de particules diffusantes dans la tranche entre $t$ et $t + \mathrm{d}t$.

.....

g) En utilisant la loi de Fick, en déduire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $n(x, t)$.

.....

## Équation de diffusion : cas général

**Entraînement 15.15 — Cas général.**

On considère un volume $V$ et la surface fermée $S$ qui l'entoure, orientée localement selon la normale sortante.

a) Exprimer le nombre de particules dans le volume $V$ à l'instant $t$ sous la forme d'une intégrale volumique.

.....

b) En déduire la variation $\mathrm{d}N$ du nombre de particules présentent dans le volume $V$ entre $t$ et $t + \mathrm{d}t$.

.....

c) Exprimer le nombre de particules quittant le volume $V$ entre $t$ et $t + \mathrm{d}t$ :

(a) $j(P, t)S \times \mathrm{d}t$

(b) $\oiint_S \vec{j}(P, t) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$

(c) $\oiint_S \vec{j}(P, t) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} \times \mathrm{d}t$

(d) $\vec{j}(P, t) \cdot \oiint_S \overrightarrow{\mathrm{d}S} \times \mathrm{d}t$

.....

On note $n_{\text{prod}}(\mathrm{M}, t)$ le nombre de particules produites par unité de temps et par unité de volume.

d) Exprimer le nombre de particules créées dans le volume $V$ entre $t$ et $t + \mathrm{d}t$ :

(a) $\iiint_V n_{\text{prod}}(\mathrm{M}, t) \cdot \mathrm{d}\tau$

(b) $n_{\text{prod}}(\mathrm{M}, t)V$

(c) $n_{\text{prod}}(\mathrm{M}, t)V\,\mathrm{d}t$

(d) $\left(\iiint_V n_{\text{prod}}(\mathrm{M}, t) \cdot \mathrm{d}\tau\right) \times \mathrm{d}t$

.....

e) Exprimer le bilan du nombre de particules présentes dans $V$ entre $t$ et $t + \mathrm{d}t$ :

(a) $\displaystyle\iiint_V \frac{\partial n}{\partial t} d\tau = -\oiint_S \vec{j}(\mathrm{M}, t) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} + \iiint_V n_{\text{prod}}(\mathrm{M}, t) \cdot \mathrm{d}\tau$

(b) $\displaystyle\iiint_V \frac{\partial n}{\partial t} d\tau = +\oiint_S \vec{j}(\mathrm{M}, t) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} + \iiint_V n_{\text{prod}}(\mathrm{M}, t) \cdot \mathrm{d}\tau$

.....

On rappelle que $\displaystyle\oiint_S \vec{j}(P, t)\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iiint_V \mathrm{div}\left(\vec{j}(\mathrm{M}, t)\right) \mathrm{d}\tau$ et que $\vec{j}(\mathrm{M}, t) = -D\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}(n)(\mathrm{M}, t)$.

f) L'équation de diffusion s'écrit donc :

(a) $\displaystyle\frac{\partial n}{\partial t} = -D\Delta(n) + n_{\text{prod}}(\mathrm{M}, t)$

(b) $\displaystyle\frac{\partial n}{\partial t} = D\Delta(n) + n_{\text{prod}}(\mathrm{M}, t)$

.....

**Réponses mélangées**

$\mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ (b) (a) $\displaystyle\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x} + \sigma$ (a) $\displaystyle\delta N = -\frac{\partial j}{\partial x} S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \sigma(x, t) S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

(d) $\displaystyle n = \frac{n_c}{1 + \left(\frac{n_c}{n_0} - 1\right)\exp\left(-\frac{t}{T}\right)}$ (b) (b) (b) $\displaystyle N(t) = \iiint_V n(\mathrm{M}, t)\,\mathrm{d}\tau$

$\displaystyle\mathrm{d}N = -\frac{\partial j}{\partial x} S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ $B \approx 1 \times 10^4$ $\displaystyle\alpha = \frac{K}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ $\displaystyle\mathrm{d}N = \frac{\partial n}{\partial t} S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ (d)

(b) $L \approx 8 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}$ $\displaystyle\mathrm{d}^2N = \left(n\vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{d}S}\right)\mathrm{d}t$ (c) $\displaystyle N = \frac{K}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{erf}(+\infty)$

$\displaystyle\mathrm{d}x = \mathrm{d}u\sqrt{\frac{t}{a}}$ $(A, B) = (1, 1)$ (d) $\displaystyle-\frac{2D}{\delta^2} + \omega = 0$ $\displaystyle\mathrm{d}N = \left(\iiint_V \frac{\partial n}{\partial t}\,\mathrm{d}\tau\right) \times \mathrm{d}t$

$\displaystyle\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x}$ (a) $\displaystyle\mathrm{d}N = \frac{\partial n}{\partial t} S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ (a) (b) $\displaystyle\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$

(c) Vanilline (c) $L \approx 4 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}$ (a) (c) $\mathrm{d}\Phi = n\vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{d}S}$

$\displaystyle\delta N = -\frac{\partial j}{\partial x} S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ $\displaystyle n_c\frac{T_2}{T_1}$ $L \approx 1 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}$ (a) $\displaystyle-\oiint_S \vec{j}(P, t) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} \times \mathrm{d}t$

(c) $\vec{j}(M, t) = n(M, t)\vec{v}(M, t)$ $\displaystyle D = \frac{1}{4a}$ 46 jours $\alpha^2 D - \beta = 0$ Limonène

Géraniol $\displaystyle\frac{\tau_{\text{sel}}}{\tau} \approx 5$ $N(t) = n(x, t) S\,\mathrm{d}x$ $\displaystyle\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \sigma$ $\mathrm{d}\tau = \vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{d}S}\,\mathrm{d}t$

► Réponses et corrigés page 494

# Diffusion thermique

**Prérequis**
Premier principe et deuxième principe de la thermodynamique
Loi de Fourier : $\overrightarrow{j} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}\, T$

Dans toute la fiche, les caractéristiques du matériau homogène et isotrope étudié seront notées :

- $D$, le coefficient de diffusivité thermique ($\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$),
- $\mu$, la masse volumique ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$),
- $c$, la capacité thermique massique du matériau ($\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$),
- $\lambda$, la conductivité thermique du matériau ($\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$).

Pour évaluer les ordres de grandeur caractéristiques du phénomène, on notera :

- $\tau$, la durée caractéristique (s),
- $L$, la longueur caractéristique (m).

## Étude de flux thermique

**Entraînement 16.1 — Bilan thermique en géométrie cartésienne.**

On se place dans le cas d'une diffusion unidimensionnelle telle que les isothermes sont des plans $x = \text{cste}$.

On note $S$ la section du conducteur et $\ell$ le périmètre de la section.

a) Le vecteur densité volumique de flux thermique $\overrightarrow{j_Q} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T)$ a pour unité possible :

(a) $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ (b) $\text{J} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$ (c) $\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$ (d) $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$

.....

b) Dans le cadre de cet entraînement, le vecteur densité de flux thermique $\overrightarrow{j_Q} = j_Q \overrightarrow{e_x}$ peut s'écrire :

(a) $\overrightarrow{j_Q} = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial t} \overrightarrow{e_x}$ (b) $\overrightarrow{j_Q} = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x} \overrightarrow{e_x}$

.....

On étudie un élément de volume du conducteur thermique de section $S$, et compris entre $x$ et $x + \mathrm{d}x$.

c) L'énergie interne $U(t)$ de la tranche considérée à l'instant $t$ est :

(a) $cS\,\mathrm{d}xT(x,t) + \mathrm{C}$ (c) $\mu cS\,\mathrm{d}xT(x,t) + \mathrm{C}$

(b) $cS\,\mathrm{d}tT(x,t) + \mathrm{C}$ (d) $\mu cS\,\mathrm{d}tT(x,t) + \mathrm{C}$

où C est une constante .....

d) En déduire la variation d'énergie interne $\mathrm{d}U$ entre $t$ et $t + \mathrm{d}t$.

.....

On souhaite maintenant évaluer les transferts thermiques entre la tranche et l'extérieur.

e) En $x$, le transfert thermique algébriquement reçu par la tranche entre $t$ et $t + \mathrm{d}t$ s'écrit :

(a) $-j_Q(x,t)S\,\mathrm{d}t$ (b) $j_Q(x,t)S\,\mathrm{d}t$ (c) $0$

.....

f) En $x + \mathrm{d}x$, le transfert thermique algébriquement reçu par la tranche entre $t$ et $t + \mathrm{d}t$ s'écrit :

(a) $-j_Q(x+\mathrm{d}x,t)S\,\mathrm{d}t$ (b) $j_Q(x+\mathrm{d}x,t)S\,\mathrm{d}t$ (c) $0$

.....

g) Au niveau de la paroi latérale, le transfert thermique algébriquement reçu par la tranche entre $t$ et $t + \mathrm{d}t$ s'écrit en notant $\ell$ le périmètre de la section :

(a) $j_Q(x,t)\ell\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ (c) $0$ (e) $-j_Q(x+\mathrm{d}x,t)\ell\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

(b) $-j_Q(x,t)\ell\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ (d) $j_Q(x+\mathrm{d}x,t)\ell\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

.....

h) En déduire le transfert thermique total $\delta Q$ algébriquement reçu par la tranche.

.....

### Entraînement 16.2 — Équation de la chaleur.

On étudie une barre homogène de section $S$, de longueur $L$, dont la surface latérale est calorifugée et dont les extrémités gauche et droite sont mises en contact thermique parfait avec des thermostats de températures respectives $T_1$ et $T_2$. On se place en coordonnées cartésiennes.

Initialement, l'ensemble de la barre est à la température $T_0$.

a) Le champ de température est de la forme :

(a) $T = T(x,t)$ (c) $T = T(x)$ (e) $T = T(y,t)$
(b) $T = T(x,y,t)$ (d) $T = T(x,y)$ (f) $T = T(x,y,z,t)$

.....

b) Le vecteur de densité volumique de courant thermique $\overrightarrow{j_Q}$ est de la forme :

(a) $\overrightarrow{j_Q} = j_Q(x,t)\overrightarrow{e_x}$ (d) $\overrightarrow{j_Q} = j_Q(x)\overrightarrow{e_x}$
(b) $\overrightarrow{j_Q} = j_Q(x,y,t)\overrightarrow{e_x}$ (e) $\overrightarrow{j_Q} = j_Q(y,t)\overrightarrow{e_y}$
(c) $\overrightarrow{j_Q} = j_{Qx}(x,y)\overrightarrow{e_x} + j_{Qy}(x,y)\overrightarrow{e_y}$ (f) $\overrightarrow{j_Q} = j_Q(x,y,z,t)\overrightarrow{e_x}$

.....

c) L'équation de la chaleur $\dfrac{\partial T}{\partial t} = D\Delta T$ s'écrit ici :

(a) $\dfrac{\partial T}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ (c) $\dfrac{\partial T}{\partial t} = D\left[\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right]$
(b) $\dfrac{\partial T}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ (d) $0 = D\dfrac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2}$

.....

## La diffusion : un processus lent

**Entraînement 16.3 — Étude qualitative.**

L'équation de diffusion caractérise l'évolution temporelle du profil de température dans un matériau. En raisonnant en ordre de grandeur, cette équation fait le lien entre un temps caractéristique $\tau$ et une longueur caractéristique de diffusion $L$ : $L = \sqrt{D\tau}$ où $D = \dfrac{\lambda}{\mu c}$ est le coefficient de diffusion thermique.

Par combien est multipliée la longueur caractéristique de diffusion lorsque l'on double :

a) la conductivité du matériau ? .....

b) la capacité thermique du matériau ? .....

Par combien est multiplié le temps caractéristique de diffusion si on double :

c) la longueur du matériau $L$ ? .....

d) la masse volumique $\mu$ ? .....

**Entraînement 16.4 — Nombre de Fourier : transformation adiabatique ?**

Le nombre de Fourier $\mathrm{Fo} = \dfrac{D\Delta t}{L^2}$ est un nombre sans dimension utilisé couramment en transfert thermique, avec $D = \dfrac{\lambda}{\mu c}$ ($\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$) le coefficient de diffusion thermique, $\Delta t$ (s) la durée étudiée et $L$ (m) la longueur caractéristique d'étude.

Il se définit également comme le rapport entre la durée $\Delta t$ d'un processus sur un temps caractéristique de diffusion, c'est-à-dire au temps nécessaire au transfert thermique pour diffuser sur une distance $L$.

a) Un processus peut être considéré comme adiabatique dans quel cas ?

(a) $\mathrm{Fo} \ll 1$ (b) $\mathrm{Fo} \gg 1$

.....

On considère la compression du mélange {air + carburant} dans un cylindre d'un moteur 4 temps en acier. Avec un régime moteur d'environ $2\,000\,\mathrm{tr \cdot min^{-1}}$, la durée de la compression est de $1{,}5 \times 10^{-2}$ s. On considère que l'épaisseur du cylindre est de 5 mm.

On donne $\lambda_{\text{acier}} = 13\,\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$, $\mu_{\text{acier}} = 7\,800\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ et $c_{\text{acier}} = 480\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$.

b) Exploitant les données ci-dessous, calculer la valeur du nombre de Fourier .....

c) L'hypothèse d'une compression adiabatique habituellement utilisée est-elle valide ? ..

# En régime permanent : utilisation des résistances thermiques

**Entraînement 16.5 — Champ de température en géométrie cartésienne.**

On étudie une barre homogène de section $S$, de longueur $L$, dont la surface latérale est calorifugée et dont les extrémités gauche et droite sont mises en contact thermique parfait avec des thermostats de températures respectives $T_1$ et $T_2$.

On se place en coordonnées cartésiennes et on étudie le régime permanent.

a) Le champ de température vérifie $\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} = 0$. Exprimer $T(x)$.

.....

b) Quelle(s) hypothèse(s) de l'énoncé assure(nt) que le flux thermique $\Phi(x) = \iint_S \overrightarrow{j_Q} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$ soit uniforme, c'est-à-dire ne dépendant pas de $x$ ?

(a) barre homogène

(b) régime permanent

(c) parois latérales calorifugées

.....

c) En déduire le flux thermique $\Phi(x)$ traversant une section $S$ de barre située à l'abscisse $x$.

(a) $\dfrac{\lambda S}{L}(T_1 - T_2)$

(b) $\dfrac{\lambda S}{L}(T_2 - T_1)$

(c) $\dfrac{\lambda L}{S}(T_1 - T_2)$

(d) $\dfrac{\lambda L}{S}(T_2 - T_1)$

.....

**Entraînement 16.6 — Analogie thermique – électrique.**

Une inhomogénéité spatiale de température $T_1 - T_2$ se traduit par un transport d'énergie caractérisé par le flux $\Phi$. Ceci est analogue au transport de charges caractérisé par une intensité $I$ causé par une inhomogénéité de potentiel électrique $V_1 - V_2$. Ainsi un conducteur électrique élémentaire de section $S$, de longueur $\ell$ et de conductivité électrique $\gamma$ est caractérisé par une résistance $R = \dfrac{\ell}{\gamma S}$ permettant grâce à la loi d'Ohm $V_1 - V_2 = RI$ de déterminer $I$ à partir de $V_1 - V_2$.

Le flux thermique $\Phi$ est proportionnel à $T_1 - T_2$ en régime permanent. En utilisant l'analogie électrique, on peut définir une « résistance thermique ».

a) La contrainte imposée au conducteur thermique $T_1 - T_2$ est l'analogue de celle imposée à un conducteur électrique :

(a) $\gamma$ (b) $V_1 - V_2$ (c) $I$ (d) $R$

.....

b) Quelle grandeur, parmi la liste suivante, est l'analogue électrique du flux thermique $\Phi$ ?

(a) $\gamma$ (b) $V_1 - V_2$ (c) $I$ (d) $R$

.....

c) Pour caractériser le conducteur thermique on introduit une « résistance thermique » analogue de :

(a) $\gamma$ (b) $V_1 - V_2$ (c) $I$ (d) $R$

.....

d) Quelle grandeur, parmi la liste suivante, est l'analogue électrique de $\lambda$ ?

(a) $\gamma$ (b) $V_1 - V_2$ (c) $I$ (d) $R$

.....

## Entraînement 16.7 — Conducto-convectif en une dimension (I).

Soit une vitre (surface $S = 1\,\mathrm{m}^2$, épaisseur $L = 5\,\mathrm{mm}$) fabriquée en verre, de conductivité thermique $\lambda = 1\,\mathrm{W \cdot K^{-1} \cdot m^{-1}}$. Celle-ci sépare l'extérieur (à la température $T_1 = 9\,°\mathrm{C}$) de l'intérieur (à la température $T_2 = 19\,°\mathrm{C}$) d'une maison.

La situation est étudiée en régime permanent. La conduction thermique envisagée est telle que la résistance thermique de la vitre est $R_{\mathrm{th,v}} = \dfrac{L}{\lambda S}$.

a) La résistance thermique de la vitre vaut :

(a) $5 \times 10^{-3}\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}$ (b) $5 \times 10^{-3}\,\mathrm{W \cdot K^{-1}}$ (c) $2 \times 10^{3}\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}$ (d) $2 \times 10^{3}\,\mathrm{W \cdot K^{-1}}$

.....

On rappelle que le flux thermique est relié à l'inhomogénéité de température par la relation $\Delta T = R_{\mathrm{th}}\Phi$.

b) Le flux thermique $\Phi$ à travers la vitre vaut :

(a) $5 \times 10^{-3}\,\mathrm{W}$ (b) $5 \times 10^{-3}\,\mathrm{W}$ (c) $2 \times 10^{3}\,\mathrm{W}$ (d) $2 \times 10^{3}\,\mathrm{W}$

.....

c) En réalité la température n'est pas totalement uniforme dans l'air à proximité des surfaces de contact avec la vitre. Les transferts thermiques à l'interface avec les thermostats sont régis alors par la relation de Newton : $\Phi = h_1 S(T_1 - T(0))$ et $\Phi = h_2 S(T(L) - T_2)$ où $h_1$ et $h_2$ sont les coefficients de transfert conducto-convectifs danes les deux couches limites.

Les résistances thermiques $R_{\mathrm{th},i}$ correspondantes sont de la forme :

(a) $R_{\mathrm{th},i} = \dfrac{h}{S}$ (b) $R_{\mathrm{th},i} = \dfrac{S}{h}$ (c) $R_{\mathrm{th},i} = \dfrac{1}{hS}$ (d) $R_{\mathrm{th},i} = hS$

.....

d) Les résistances $R_{\mathrm{th,v}}$, $R_{\mathrm{th},1}$ et $R_{\mathrm{th},2}$ sont-elles en série ou en parallèle ? .

e) Évaluer le flux thermique $\Phi'$ à travers la vitre en tenant compte des pertes conducto-convectives si $h_1 = h_2 = 5 \times 10^{2}\,\mathrm{W \cdot K^{-1} \cdot m^{-2}}$ .....

## Entraînement 16.8 — Conducto-convectif en une dimension (II).

On considère une vitre de section $S$ et de résistance thermique $R_{\mathrm{th}}$ séparant l'extérieur de température $T_1$ et l'intérieur d'une maison (température $T_2$).

Les échanges thermiques aux interfaces en $x = 0$ et $x = L$ sont régis par la relation de Newton. Avec une convection plus importante à l'extérieur due au vent, on peut considérer que $T(0) = T_1$.

Les températures et le flux thermique vérifient alors le système :

$$\begin{cases} \phi = h_2 S(T(L) - T_2) \\ T_1 - T(L) = R_{\mathrm{th}}\phi \end{cases}$$

Quelle est l'expression de $T(L)$ ? .....

**Entraînement 16.9 — Isolation thermique d'un mur.**

Vue en coupe Vue de face

Un pan de mur de surface totale $S_{tot} = 7{,}5\,m^2$ est composé d'un mur de brique d'épaisseur $e_b = 20\,cm$, de conductivité thermique $\lambda_b = 0{,}70\,W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ et d'un isolant en fibre de bois d'épaisseur $e_i = 12\,cm$, de conductivité thermique $\lambda_i = 0{,}036\,W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$.

Une fenêtre de surface $S_f = 1{,}2\,m^2$ de résistance thermique $R_f = 0{,}70\,K \cdot W^{-1}$ est percée dans le mur.

La température intérieure est $T_{int} = 20\,°C$, la température extérieure vaut $T_{ext} = 5\,°C$.

La résistance thermique d'une surface $S$ plane d'épaisseur $e$ est $R_{th,\ plan} = \dfrac{e}{\lambda S}$.

Quelle est la valeur de la résistance thermique :

a) $R_b$ de la brique ? .....

b) $R_i$ de l'isolant ? .....

c) Parmi les montages suivants, lequel correspond à la situation étudiée ?

.....

d) Quelle est la résistance thermique globale $R_{th,tot}$ du mur ? .....

e) En considérant que les échanges thermiques ne peuvent se faire qu'à travers cette paroi, quelle puissance thermique $\phi$ doit développer le système de chauffage pour maintenir cet écart de température ?

(a) 47,5 W (b) 475 W (c) 4,75 kW

.....

## Entraînement 16.10 — Igloo de survie.

Un alpiniste, surpris par le mauvais temps, décide de construire un igloo de survie d'un volume intérieur de $1\,\mathrm{m}^3$ avec des blocs de neige d'épaisseur $e = 10\,\mathrm{cm}$ et de conductivité thermique $\lambda_{\text{neige}} = 0{,}2\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$.

Il hésite entre 3 formes d'igloos : un igloo cubique, cylindrique dont la hauteur est égale à son rayon et un igloo hémisphérique.

Igloo cubique — Igloo cylindrique — Igloo hémisphérique

Pour les calculs numériques, on prendra : $\dfrac{1}{\sqrt[3]{\pi}} \approx 0{,}7$ et $\sqrt[3]{\dfrac{3}{2\pi}} \approx 0{,}8$.

Pour que le volume intérieur des igloos soit de $1\,\mathrm{m}^3$,

a) quel doit être le rayon de l'igloo cylindrique ?

.....

b) quel doit être le rayon de l'igloo hémisphérique ?

.....

c) On souhaite déterminer la résistance thermique de chaque igloo. Associer à chaque igloo son intégrale parmi les intégrales suivantes.

$$I_{\text{a}} = \int_{0{,}7}^{0{,}8} \frac{\mathrm{d}r}{3\pi\lambda r^2} \qquad I_{\text{b}} = \int_{0{,}8}^{0{,}9} \frac{\mathrm{d}r}{2\pi\lambda r^2} \qquad I_{\text{c}} = \int_{1}^{1{,}1} \frac{\mathrm{d}r}{5\lambda r^2}$$

.....

d) Après avoir calculé chacune des intégrales précédentes, quel igloo présente une résistance thermique approximative de $\dfrac{1}{8{,}9}\mathrm{K}\cdot\mathrm{W}^{-1}$ ?

.....

e) L'alpiniste dégage une puissance thermique de $\phi = 100\,\mathrm{W}$.

En déduire la différence de température entre l'intérieur de l'igloo hémisphérique et l'extérieur en régime permanent.

.....

**Entraînement 16.11 — Analogie électrique d'une habitation (I).**

L'objectif de cet entraînement est d'approfondir l'analogie entre les phénomènes de conduction thermique et d'électricité en étudiant une habitation dans sa globalité.

On constate que :

- le flux thermique $\phi$ est l'analogue de l'intensité du courant électrique (flux de charge électrique) ;
- la température $\theta$ est l'équivalent du potentiel électrique ;
- un matériau ayant une capacité thermique $C_{\text{th}}$ peut être modélisé par un condensateur électrique ;
- tout comme la résistance électrique traduit une relation de proportionnalité entre la différence de potentiel et le courant électrique, la résistance thermique traduit la relation de proportionnalité entre la différence de température et le flux thermique : $\Delta\theta = R_{\text{th}}\phi$.

Une habitation est isolée de l'extérieur où règne une température $\theta_{\text{e}}(t)$ par une enveloppe isolante de résistance thermique $R_{\text{th}}$. À l'intérieur de l'habitation, un système de chauffage apporte un flux thermique $\phi_{\text{i}}$ permettant d'atteindre une température intérieure $\theta_{\text{i}}(t)$. L'intérieur de la maison possède une capacité thermique $C_{\text{th}}$.

Parmi les circuits ci-dessous, lequel correspond à la situation étudiée ? .....

Circuit (a) Circuit (b) Circuit (c)

**Entraînement 16.12 — Analogie électrique d'une habitation (II).**

a) Établir l'équation différentielle sur $\theta_i$ dans le cas du circuit (c) de l'entraînement précédent.

.....

Du fait de l'alternance jour–nuit, la température extérieure $\theta_{\text{e}}$ peut s'écrire

$$\theta_{\text{e}}(t) = \theta_{\text{e0}} + \theta_{\text{e1}}\cos(\omega t).$$

b) Quelle doit être l'expression du flux $\phi_{\text{i}}$ fourni par le système de chauffage pour maintenir une température intérieure constante égale à $\theta_{\text{i0}}$ ?

.....

## Entraînement 16.13 — Une résistance thermique en géométrie cylindrique.

Vue en coupe

Un mince tuyau métallique d'une longueur $L$ et de rayon 1 cm transporte de la vapeur à 100 °C. Celui-ci est couvert par deux couches d'isolants :

- une couche (a) intérieure d'une épaisseur de 4 cm et de conductivité thermique $0{,}1\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$,
- une couche (b) extérieure d'une épaisseur de 2 cm et de conductivité thermique $0{,}3\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$.

La température extérieure est de 20 °C.

La résistance thermique dans le cas d'un flux radial est de la forme $R_{\mathrm{th}} = \dfrac{1}{2\pi\lambda L}\ln(r_2/r_1)$.

a) Parmi les deux montages électriques ci-dessous, lequel correspond au système étudié ?

.....

Montage (a)

Montage (b)

b) Quelle est la température à l'interface entre les deux isolants ?

(a) 25,2 °C (b) 30,2 °C (c) 30,2 °C (d) 35,2 °C (e) 40,2 °C

*On prendra* $\dfrac{\ln(7)}{\ln(5)} \approx 1{,}21$ .....

# Plus de diffusion thermique

**Entraînement 16.14 — Choix d'un isolant.**

La résistance thermique surfacique $r$ d'un matériau traduit sa capacité à résister à un flux thermique. Elle dépend de l'épaisseur du matériau $e$ et de sa conductivité thermique $\lambda$, selon la relation

$$r = e/\lambda.$$

Le déphasage thermique $\Delta\tau$ définit le temps que met un front de chaleur pour traverser une épaisseur donnée de matériau. Cette grandeur dépend de la masse volumique et de la capacité thermique massique du matériau, selon la relation

$$\Delta\tau = e\sqrt{\frac{\mu c}{2\omega\lambda}},$$

où $\omega$ est la pulsation excitatrice associée au front de chaleur.

La prise en compte du déphasage thermique est notamment utile pour le confort l'été, en décalant au cœur de la nuit plus fraîche l'arrivée de la chaleur reçue par les parois extérieures durant la journée. Dans le cas de l'alternance jour–nuit $\omega = 7{,}3 \times 10^{-5}\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$.

La consommation totale d'énergie primaire non renouvelable, communément appelée « énergie grise », permet de quantifier assez bien l'impact environnemental global d'un produit. L'énergie grise surfacique $\mathcal{E}_\mathrm{S}$ d'un isolant peut se calculer par la relation $\mathcal{E}_\mathrm{S} = \mu e \mathcal{E}$ où $\mathcal{E}$ est l'énergie grise massique.

| Isolants | Conductivité thermique $\lambda$ ($\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$) | Masse volumique $\mu$ ($\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$) | Capacité thermique $c$ ($\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$) | Énergie grise massique $\mathcal{E}$ ($\mathrm{kWh \cdot kg^{-1}}$) |
|---|---|---|---|---|
| Fibres de bois | 0,037 | 150 | 2 000 | 2 |
| Bottes de paille | 0,052 | 100 | 1 550 | 0,1 |
| Laines minérales | 0,030 | 30 | 900 | 8 |
| Vermiculite | 0,050 | 300 | 950 | 0,8 |
| Polystyrène expansé | 0,032 | 20 | 1 300 | 32 |
| Polyuréthane | 0,022 | 35 | 1 000 | 30 |

Un maître d'œuvre doit choisir un isolant pour fabriquer un mur avec comme contrainte d'avoir

$$r \geqslant 7{,}0\,\mathrm{m^2 \cdot W^{-1}}$$

et un déphasage

$$\Delta\tau \geqslant 8\,\mathrm{h}.$$

Après avoir calculé l'épaisseur nécessaire pour vérifier la contrainte sur $r$ et le déphasage correspondant, le maître d'œuvre choisira l'isolant ayant l'énergie grise surfacique la plus faible parmi ceux qui vérifient les contraintes ci-dessus.

Quel isolant choisira-t-il ? .....

**Entraînement 16.15 — En présence de source.**

On se place dans le cas d'une diffusion unidimensionnelle telle que les isothermes sont des plans $x = \text{cste}$. On a alors

$$\overrightarrow{j_Q} = -\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} \overrightarrow{e_x}.$$

On étudie un élément de volume du conducteur thermique de section $S$, et compris entre $x$ et $x + \mathrm{d}x$ :

Le conducteur thermique est le siège d'une production algébrique volumique d'énergie de puissance $p_{\text{prod}}$ (effet Joule, réaction chimique, etc.).

a) Donner l'expression de la variation d'énergie interne $\mathrm{d}U$ de la tranche $\mathrm{d}x$ du conducteur entre les instants $t$ et $t + \mathrm{d}t$.

.....

b) Exprimer le transfert thermique algébriquement reçu par la tranche $\delta Q$ aux transferts conductifs.

.....

c) Donner l'expression de l'énergie produite dans la tranche entre $t$ et $t + \mathrm{d}t$.

.....

d) En déduire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $T$.

.....

**Entraînement 16.16 — Transfert conducto-convectif latéral.**

On se place dans le cas d'une diffusion unidimensionnelle telle que les isothermes sont des plans $x = \text{cste}$. On a alors $\overrightarrow{j_Q} = -\lambda \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} \overrightarrow{e_x}$. On étudie un élément de volume du conducteur thermique de section $S$, et compris entre $x$ et $x + \mathrm{d}x$.

La paroi latérale du volume de section $S$ est en contact avec un thermostat à la température $T_{\text{ext}}$. Le flux thermique surfacique au niveau de la surface latérale vérifie la loi de Newton, *i.e.* est proportionnel à $T(x,t) - T_{\text{ext}}$ (facteur de proportionnalité noté $h$). On note $p$ le périmètre de la tranche de section $S$.

a) Donner l'expression de $\mathrm{d}U$ en fonction de la variation de température .....

b) Exprimer le transfert thermique algébriquement reçu par la tranche dus aux transferts conductifs.

.....

c) Quelle est l'expression de l'énergie algébriquement reçue au niveau de la paroi latérale dans la tranche entre $t$ et $t + \mathrm{d}t$ ?

(a) $h(T(x,t) - T_{\text{ext}})p\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$
(b) $h(T(x,t) - T_{\text{ext}})S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$
(c) $-h(T(x,t) - T_{\text{ext}})p\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$
(d) $h(T(x,t) - T_{\text{ext}})S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$
(e) $0$
(f) $-h(T(x,t) - T_{\text{ext}})p$

.....

d) En déduire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $T$ .....

**Entraînement 16.17 — Conducto-convectif à 1D (3).**

On considère une vitre de section $S$ et de résistance thermique $R_{\text{th}}$ séparant l'extérieur de température $T_1$ et l'intérieur d'une maison (température $T_2$).

Les échanges thermiques aux interfaces en $x = 0$ et $x = L$ sont régis par la relation de Newton. Si l'on prend en compte les effets conducto-convectifs aux deux interfaces, on obtient le système :

$$\begin{cases} \phi = h_1 S(T_1 - T(0)) \\ T(0) - T(L) = R_{\text{th}}\phi \\ \phi = h_2 S(T(L) - T_2). \end{cases}$$

a) Le profil de température est de la forme :

(a)

(b)

.....

Quelle est l'expression de :

b) $T(0)$ ? .....

c) $T(L)$ ? .....

# En coordonnées cylindriques et sphériques

**Entraînement 16.18 — Régime permanent en géométrie cylindrique (I).**

On considère le cas d'isothermes cylindriques d'axe $(O, \vec{e_z})$. Pour obtenir le champ de température et le flux thermique il faut adapter le volume élémentaire étudié aux symétries du problème. Pour cela on raisonnera sur un cylindre évidé de rayon $r$, d'épaisseur $\mathrm{d}r$ et de longueur $h$.

a) Que vaut la variation d'énergie interne du système en régime permanent ?

.....

b) Qu'en déduire concernant le transfert thermique $\delta Q$ entre $t$ et $t + \mathrm{d}t$ ?

.....

c) Que peut-on déduire concernant le flux $\Phi(r) = 2\pi r h j_Q(r)$ de $\overrightarrow{j_Q}$ à travers un cylindre de rayon $r$ et de hauteur $h$ ?

(a) Le flux $\Phi(r)$ décroît avec le rayon.

(b) Le flux $\Phi(r)$ est indépendant de $r$.

(c) Le flux $\Phi(r)$ augmente avec le rayon.

.....

On dit alors que $\overrightarrow{j_Q}$ est à « flux conservatif ». Cela permet notamment de le calculer pour tout cylindre de rayon $r$ connaissant les conditions limites.

d) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $T$ .....

**Entraînement 16.19 — Régime permanent en géométrie cylindrique (II).**

On considère un cylindre évidé de longueur $h$, de rayon intérieur $r_1$ et de rayon extérieur $r_2$. En régime permanent, dans le cas d'isothermes cylindriques, la température est régie par l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\dfrac{\Phi_0}{2\pi\lambda}\dfrac{1}{r}$ où $\Phi_0$ est le flux thermique radial.

a) Les conditions aux limites imposent $\Phi_0$ et $T(r_1) = T_1$.

Déterminer $T(r)$ en fonction notamment de $T_1$ et $\Phi_0$.

.....

b) Les conditions aux limites imposent $T(r_1) = T_1$ et $T(r_2) = T_2$.

Déterminer $T(r)$ en fonction notamment de $T_1$ et $T_2$.

.....

**Entraînement 16.20 — Résistance thermique d'une canalisation.**

Soit une canalisation, de longueur $L$, comprise entre les cylindres de rayons $r_1$ et $r_2 > r_1$, de même axe $(Oz)$. Elle contient de l'eau à la température $T_e$ et est entourée d'air à la température $T_a$.

On se place en coordonnées cylindriques et on considère la canalisation assez longue pour négliger les effets de bord.

a) Quelles sont les dépendances spatiales du champ de température ?

(a) $T(r,\theta)$ (b) $T(z)$ (c) $T(r)$ (d) $T(z,\theta)$

b) En déduire la forme du vecteur densité volumique de courant $\vec{j_Q}$.

(a) $j_Q(z)\vec{e_r}$ (b) $j_Q(r)\vec{e_r}$ (c) $j_Q(r)\vec{e_z}$ (d) $j_Q(z)\vec{e_z}$

On considère un élément de volume de côtés $\mathrm{d}r$, $r\,\mathrm{d}\theta$ et $\mathrm{d}z$.

Cet élément de volume est une portion de tube de champ de $\vec{j_Q}$ entre deux portions d'équithermes de surface

$$\delta^2 S = r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z,$$

distantes de $\delta L = \mathrm{d}r$.

c) En déduire sa conductance thermique, c'est-dire la capacité du matériau à transmettre un flux thermique. Elle est définie comme l'inverse de la résistance thermique.

On associe les éléments de volume précédents (représentés ci-dessus) de façon à obtenir une couronne en faisant varier $\theta$ de 0 à $2\pi$.

d) Il s'agit d'une :

(a) association série (b) association parallèle

e) En calculant la bonne intégrale parmi celles proposées ci-dessous, déduire l'expression de la conductance de cette couronne. La conductance est définie comme l'inverse de la résistance thermique.

(a) $\delta^2 G_{\text{th}} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\lambda\,\mathrm{d}z r\,\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}$ (b) $\delta^2 G_{\text{th}} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}r}{\lambda\,\mathrm{d}z r\,\mathrm{d}\theta}$

On associe les couronnes précédentes de façon à obtenir un cylindre évidé en faisant varier $z$ de 0 à $L$.

f) Cette association de résistance thermique est :

(a) une association série (b) une association parallèle

.....

g) En déduire la conductance de ce cylindre évidé .....

On associe les cylindres précédents de façon à obtenir la canalisation étudiée en faisant varier $r$ de $r_1$ à $r_2$.

h) Il s'agit d'une :

(a) association série (b) association parallèle

.....

i) En déduire la conductance de ce cylindre évidé .....

j) En déduire l'expression du flux thermique sortant $\Phi_0$ en fonction de $T_a$ et $T_e$.

.....

**Entraînement 16.21 — Régime permanent en géométrie sphérique (I).**

On considère le cas d'isothermes $T(r)$ correspondant à des sphères concentriques de centre O. Pour obtenir le champ de température et le flux thermique, il faut adapter le volume élémentaire étudié aux symétries du problème.

Pour cela on raisonnera sur une « coquille sphérique » : boule évidée de rayon $r$ et d'épaisseur d$r$, comme représenté ci-contre.

a) Que vaut la variation d'énergie interne du système en régime permanent ?

.....

b) Que peut-on en déduire concernant le transfert thermique $\delta Q$ entre $t$ et $t + \mathrm{d}t$ ?

.....

c) Que peut-on déduire concernant le flux $\Phi(r) = 4\pi r^2 j_Q(r)$ de $\overrightarrow{j_Q}$ à travers une sphère de rayon $r$ ?

(a) Le flux $\Phi(r)$ décroît avec le rayon. (c) Le flux $\Phi(r)$ augmente avec le rayon.

(b) Le flux $\Phi(r)$ est indépendant de $r$.

.....

On dit que $\overrightarrow{j_Q}$ est à flux conservatif. Cela permet notamment de le calculer pour toute sphère de rayon $r$ connaissant les conditions limites.

d) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $T$.

.....

**Entraînement 16.22 — Régime permanent en géométrie sphérique (II).**

On considère une sphère évidée de rayon intérieur $r_1$ et de rayon extérieur $r_2$. En régime permanent, dans le cas d'isothermes sphériques, le température est régie par l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\dfrac{\Phi_0}{4\pi\lambda}\dfrac{1}{r^2}$ où $\Phi_0$ est le flux thermique radial sortant.

a) Les conditions aux limites imposent $\Phi_0$ et $T(r_1) = T_1$. Déterminer $T(r)$ en fonction notamment de $T_1$ et $\Phi_0$.

.....

b) Les conditions aux limites imposent $T(r_1) = T_1$ et $T(r_2) = T_2$. Déterminer $T(r)$ en fonction notamment de $T_1$ et $T_2$.

.....

**Réponses mélangées**

(a) (a) (b) $\dfrac{\lambda\,\mathrm{d}z r\,\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}$ (a) 0,8 m en série (a) (b)

$3{,}2\times10^{-1}\,\mathrm{K\cdot W^{-1}}$ (c) 4 $\mathrm{d}U = \mu c\dfrac{\partial T}{\partial t}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\dfrac{\Phi_0}{2\pi\lambda}\dfrac{1}{r}$ 47,5 W

$1/\sqrt{2}$ $\dfrac{1}{R_{\mathrm{th}}}(\theta_{\mathrm{i}0} - \theta_{\mathrm{e}0} - \theta_{\mathrm{e}1}\cos(\omega t))$ (a) $\lambda\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ $2\times10^{-3}$ 2 0,7 m

$\mu c\dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + p_{\mathrm{prod}}$ (b) (b) (c) $\dfrac{2\pi\lambda L}{\ln(r_2/r_1)}(T_{\mathrm{a}} - T_{\mathrm{e}})$ $p_{\mathrm{prod}}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

0,5 kW (c) $\delta Q = 0$ (cub., (c)) (cyl., (a)) (sph., (b)) 11 °C (b) $\dfrac{2\pi\lambda L r}{\mathrm{d}r}$

$T(x) = \dfrac{T_2 - T_1}{L}x + T_1$ $T(r) = T_1 + (T_2 - T_1)\dfrac{\ln\left(\frac{r_1}{r}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}$ 0 (a) $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\dfrac{\Phi_0}{4\pi\lambda}\dfrac{1}{r^2}$

(c) $\dfrac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi\lambda L}$ $T(r) = T_1 + (T_2 - T_1)\dfrac{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}}$ $\dfrac{R_{\mathrm{th}}h_1S + \frac{h_1}{h_2}}{1 + \frac{h_1}{h_2} + R_{\mathrm{th}}h_1S}T_1 + \dfrac{1}{1 + \frac{h_1}{h_2} + R_{\mathrm{th}}h_1S}T_2$ 0

Sphérique $\dfrac{2\pi\lambda r\,\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}$ (b) $T(r) = T_1 + \dfrac{\Phi_0}{2\pi\lambda}\ln\left(\dfrac{r_1}{r}\right)$ (b) $\sqrt{2}$ (c) (c)

(c) $T_1 + \dfrac{\Phi_0}{4\pi\lambda}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_1}\right)$ $\mathrm{d}U = \mu c\dfrac{\partial T}{\partial t}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ $\dfrac{1}{1 + \frac{h_2}{h_1} + R_{\mathrm{th}}h_2S}T_1 + \dfrac{\frac{h_2}{h_1} + R_{\mathrm{th}}h_2S}{1 + \frac{h_2}{h_1} + R_{\mathrm{th}}h_2S}T_2$

$\lambda\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ (c) (b) (b) $4{,}5\times10^{-2}\,\mathrm{K\cdot W^{-1}}$ (d)

$\mu c\dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} - h\dfrac{p}{S}(T(x,t) - T_{\mathrm{ext}})$ $-\dfrac{\partial j_Q}{\partial x}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ $\dfrac{\mathrm{d}\theta_{\mathrm{i}}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\theta_i}{R_{\mathrm{th}}C_{\mathrm{th}}} = \dfrac{1}{R_{\mathrm{th}}C_{\mathrm{th}}}(R_{\mathrm{th}}\phi_{\mathrm{i}} + \theta_{\mathrm{e}})$

(a) $\mathrm{d}U = \mu c\dfrac{\partial T}{\partial t}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ (d) Les bottes de paille (b) et (c) Oui

$0{,}53\,\mathrm{K\cdot W^{-1}}$ $\mathrm{d}U = 0$ (a) (c) $\dfrac{T_1 + R_{\mathrm{th}}h_2ST_2}{1 + R_{\mathrm{th}}h_2S}$ (b) (a) (a)

► Réponses et corrigés page 500

# Transferts thermiques

**Prérequis**
Loi de Fourier : $\vec{\jmath}_{\text{th}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}\, T$.
**Constantes utiles**
→ Constante de Stefan : $\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-4}$

## Vecteur densité de courant thermique

**Entraînement 17.1 — Dans un calorimètre.**

Un système $S_1$ est constitué d'un vase parfaitement calorifugé contenant initialement une masse $m_1$ d'eau à la température $T_1 = 20\,°\text{C}$. On y ajoute ensuite une masse $m_2$ d'eau à la température $T_2 = 80\,°\text{C}$ (système $S_2$). On attend que l'équilibre thermique soit réalisé.

a) Quel est le signe du transfert thermique reçu par le système $S_1$ ? .....

b) Quel est le signe du transfert thermique reçu par le système $S_2$ ? .....

c) Quel est le signe du transfert thermique reçu par le système $S_1 \cup S_2$ ? .....

**Entraînement 17.2 — Une dalle en béton.**

On considère une dalle en béton d'épaisseur $e = 20\,\text{cm}$ et de conductivité thermique $\lambda = 1{,}2\,\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ séparant deux pièces d'une habitation.

La température de la face inférieure contenant A est $T_\text{A} = 8\,°\text{C}$ et celle de la face supérieure contenant C est $T_\text{C} = 18\,°\text{C}$. La température en un point $\text{M}(x, y, z)$ du béton ne dépend que de $x$ en régime stationnaire.

Le vecteur densité de courant en M est $\vec{\jmath}_{\text{th}}(\text{M}) = -\lambda \dfrac{\text{d}T}{\text{d}x}\vec{e_x}$.

a) Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies ?

(a) $\vec{\jmath}_{\text{th}}(\text{A})\cdot\vec{e_x} > 0$ (c) $\vec{\jmath}_{\text{th}}(\text{C})\cdot\vec{e_x} = 0$ (e) $\vec{\jmath}_{\text{th}}(\text{B})\cdot\vec{e_y} = 0$
(b) $\vec{\jmath}_{\text{th}}(\text{B})\cdot\vec{e_x} < 0$ (d) $\vec{\jmath}_{\text{th}}(\text{A})\cdot\vec{e_y} > 0$ (f) $\vec{\jmath}_{\text{th}}(\text{C})\cdot\vec{e_y} < 0$

.....

b) Calculer $\|\vec{\jmath}_{\text{th}}(\text{B})\|$ .....

**Entraînement 17.3 — Tuyau en cuivre.**

On considère un tuyau cylindrique en cuivre d'axe (O$z$) et de conductivité thermique $\lambda = 400\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$ séparant deux fluides de températures différentes.

En régime stationnaire, la température de la face interne contenant A est $T_\mathrm{A} = 20\,°\mathrm{C}$ et celle de la face externe contenant C est $T_\mathrm{C} = 10\,°\mathrm{C}$. Le profil de température est alors, en coordonnées cylindriques,

$$T(r) = T_\mathrm{A} + \frac{T_\mathrm{C} - T_\mathrm{A}}{\ln\left(\frac{c}{a}\right)} \ln\left(\frac{r}{a}\right).$$

Les distances à l'axe sont $a = 2$ cm et $c = 4$ cm.
Le vecteur densité de courant thermique en un point M est noté $\vec{\jmath}_\mathrm{th}(\mathrm{M})$.

On donne $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(r,\theta,z) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z}$ en coordonnées cylindriques.

a) La direction de $\vec{\jmath}_\mathrm{th}(\mathrm{A})$ est

(a) $\vec{e_z}$ (b) $\vec{e_r}$ (c) $\vec{e_\theta}$

.....

b) La direction de $\vec{\jmath}_\mathrm{th}(\mathrm{C})$ est

(a) $\vec{e_z}$ (b) $\vec{e_r}$ (c) $\vec{e_\theta}$

.....

c) Donner le sens de $\vec{\jmath}_\mathrm{th}(\mathrm{A})$.

.....

d) Donner le sens de $\vec{\jmath}_\mathrm{th}(\mathrm{C})$.

.....

e) Calculer $\|\vec{\jmath}_\mathrm{th}(\mathrm{A})\|$ .....

f) Calculer $\|\vec{\jmath}_\mathrm{th}(\mathrm{C})\|$ .....

## Transferts thermiques conducto-convectifs

On considère une paroi solide fixe de température $T_p$ en contact avec un fluide en mouvement de température différente $T_f$.

Les transferts thermiques de la paroi vers le fluide peuvent être modélisés par la loi de Newton donnant le vecteur densité de courant thermique conducto-convectif

$$\vec{\jmath}_\mathrm{cc} = h(T_p - T_f)\vec{n}_{p\to f}$$

où $h$ est nommé coefficient de transfert conducto-convectif.

La puissance transférée par la paroi $\Sigma$ au fluide est $P_{p\to f} = \iint_\Sigma \vec{\jmath}_\mathrm{cc}\cdot \mathrm{d}S\vec{n}_{p\to f}$.

On rappelle que la résistance thermique $R_\mathrm{th}$ est le rapport entre la différence de température $T_1 - T_2$ entre deux isothermes et la puissance thermique $P_{1\to 2}$ transférée. Elle vérifie :

$$R_\mathrm{th} = \frac{T_1 - T_2}{P_{1\to 2}}.$$

**Entraînement 17.4 — Unité ?**

En quelle unité s'exprime $h$ ? .....

**Entraînement 17.5 — Puissance échangée par conducto-convection.**

a) La résistance thermique conducto-convective associée à une interface de surface $S$ est

(a) $hS$
(b) $\dfrac{1}{hS}$
(c) $\sqrt{hS}$
(d) $\sqrt{\dfrac{1}{hS}}$

.....

b) Un toit plat d'immeuble a une surface de $50\,\mathrm{m}^2$. La température de l'air extérieur est de $25\,°\mathrm{C}$ et le coefficient de transfert conducto-convectif est $h = 20$ USI.

La puissance cédée par conducto-convection par le toit à l'air extérieur vaut $40\,\mathrm{kW}$.

Calculer la température de la face du toit en contact avec l'air extérieur.

.....

**Entraînement 17.6 — Ailette de refroidissement.**

Une tige conductrice cylindrique de rayon $a$, de section $S = \pi a^2$, de longueur $L \gg a$, de conductivité thermique $\lambda$ est en contact en $x = 0$ avec un corps solide de température $T_0$ stationnaire. Cette tige est en contact avec l'air de température $T_a$ stationnaire.

a) L'élément de volume $S\,\mathrm{d}x$ de la tige situé entre $x$ et $x + \mathrm{d}x$ reçoit une puissance de la part de l'air égale à

(a) $h(T_a - T(x))S$
(b) $h(T(x) - T_a)S$
(c) $h(T_a - T(x))2\pi a\,\mathrm{d}x$
(d) $h(T(x) - T_a)2\pi a\,\mathrm{d}x$

.....

b) En posant $b = \sqrt{\dfrac{\lambda a}{2h}}$, on montre que $T(x) = T_a + (T_0 - T_a)\mathrm{e}^{-x/b}$.

Exprimer la puissance thermique $P_0$ reçue par la tige en $x = 0^+$ en fonction de $\lambda$, $a$, $b$, $T_0$ et $T_a$.

.....

# Rayonnement thermique

*Un corps noir de température $T$ émet un rayonnement de puissance surfacique $\varphi$ donné par la loi de Stefan $\varphi = \sigma T^4$ où $\sigma$ est la constante de Stefan donnée dans les prérequis de la fiche.*

**Entraînement 17.7 — Le Soleil rayonne.**

Le Soleil de rayon $R_\odot = 696 \times 10^3$ km, rayonne comme un corps noir de température $T_S = 5\,772$ K.

a) Calculer la puissance surfacique $\varphi_\odot$ à la surface du Soleil .....

b) Calculer la puissance $P_\odot$ émise par le Soleil .....

c) La puissance radiative traversant une sphère de centre $S$ (centre du Soleil) et de rayon $r > R_\odot$ ne dépendant pas de $r$, la puissance surfacique radiative $\varphi(r)$ est

(a) $\varphi_\odot$ (b) $\varphi_\odot \dfrac{R_\odot}{r}$ (c) $\varphi_\odot \left(\dfrac{R_\odot}{r}\right)^2$ (d) $\varphi_\odot \left(\dfrac{r}{R_\odot}\right)^2$

.....

d) La distance Soleil-Terre est $D_{\mathrm{ST}} = 150 \times 10^6$ km. La puissance surfacique du rayonnement solaire reçu par la Terre est (en $\mathrm{W \cdot m^{-2}}$)

(a) $1{,}4 \times 10^1$ (b) $1{,}4 \times 10^2$ (c) $1{,}4 \times 10^3$ (d) $1{,}4 \times 10^4$

.....

**Entraînement 17.8 — Radiateur convecto-radiatif.**

On étudie un radiateur de chauffage central dont la température de surface est $T_s = 60\,°\mathrm{C}$ en contact avec l'air ambiant de température $T_a = 20\,°\mathrm{C}$. On note $S$ l'aire de l'interface radiateur-air.

Le radiateur et l'air rayonnent comme des corps noirs de températures respectives $T_s$ et $T_a$. Seuls les échanges thermiques entre le radiateur et l'air sont pris en compte.

a) La puissance cédée par le radiateur à l'air par rayonnement est

(a) $\sigma\left(T_a^4 - T_s^4\right)S$ (c) $\sigma\left(T_a^4 + T_s^4\right)S$

(b) $\sigma\left(T_s^4 - T_a^4\right)S$ (d) nulle

.....

b) En notant $h = 10\,\mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$ le coefficient de transfert conducto-convectif entre le radiateur et l'air, la puissance cédée par le radiateur à l'air par conducto-convection est

(a) $h(T_a - T_s)S$ (c) $h(T_a + T_s)S$

(b) $h(T_s - T_a)S$ (d) nulle

.....

c) Calculer la surface $S$ d'un radiateur fournissant une puissance totale de 1,0 kW à l'air.

.....

# Équation de la diffusion thermique

**Entraînement 17.9 — Dimension du coefficient de diffusivité thermique.**

Dans un matériau solide de diffusivité $D$, le champ de température $T(\mathrm{M}, t)$ en un point M à un instant $t$ vérifie l'équation de la diffusion thermique $\dfrac{\partial T}{\partial t} = D\,\Delta T$.

Quelle est la dimension physique de $D$ ? .....

**Entraînement 17.10 — Échelles de longueur et de temps associées.**

Les variations du champ de température $T(\mathrm{M}, t)$ au sein d'un matériau homogène de diffusivité $D$ sont caractérisées par une longueur caractéristique $L$ et une durée caractéristique $\tau$.

a) Quelle proposition est correcte ?

(a) $\tau = \dfrac{L}{D}$ (b) $\tau = \dfrac{L}{D^2}$ (c) $\tau = \dfrac{L^2}{D}$ (d) $\tau = \dfrac{D}{L^2}$

.....

Un œuf de poule a une longueur comprise entre 5 et 6 cm et une masse entre 60 et 70 g alors qu'un œuf d'autruche a une longueur entre 15 et 20 cm et pèse environ 1,6 kg.

b) Sachant que la cuisson à la coque d'un œuf de poule dure 4 minutes, cuire un œuf d'autruche à la coque nécessite environ

(a) 12 min (b) 36 min (c) 72 min (d) 400 min

.....

**Entraînement 17.11 — Prise en masse d'un mur de béton.**

Un mur de béton est coulé entre une paroi rocheuse de température stationnaire $T_0 = 20\,°\mathrm{C}$ et un coffrage métallique maintenu à la température $T_1 = 10\,°\mathrm{C}$.

Le mur de béton est d'épaisseur $L = 1{,}0\,\mathrm{m}$ et de conductivité thermique $\lambda = 1{,}2\,\mathrm{W \cdot K^{-1} \cdot m^{-1}}$. La prise en masse du béton est le siège d'une réaction chimique exothermique dégageant une puissance volumique $p_v$.

En régime stationnaire, la température $T(x)$ à l'abscisse $x$ vérifie l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} = -\dfrac{p_v}{\lambda}$.

a) Exprimer le profil de température $T(x)$ dans le béton.

b) La température est maximale à l'abscisse $x_1 = 3L/10$. L'expression de $p_v$ est

(a) $3\lambda L(T_0 - T_1)$ (c) $5\lambda L(T_0 - T_1)$

(b) $\dfrac{3\lambda}{L^2}(T_0 - T_1)$ (d) $\dfrac{5\lambda}{L^2}(T_0 - T_1)$

.....

c) Calculer $p_v$ .....

**Entraînement 17.12 — Fusible en régime stationnaire.**

Un câble métallique cylindrique d'axe (O$x$), de rayon $a$, de section $S = \pi a^2$, de longueur $L$, de conductivité thermique $\lambda$ et de conductivité électrique $\gamma$, est parcouru par un courant électrique d'intensité $I$ stationnaire. Les deux extrémités en $x = \pm\dfrac{L}{2}$ sont maintenues à la même température $T_0$.

Lorsque ce câble est latéralement calorifugé, la température $T(x)$ à l'abscisse $x$ vérifie, en régime stationnaire, l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{I^2}{\lambda\gamma S^2}.$$

a) Exprimer le profil de température $T(x)$ dans le câble.

.....

b) Quelle est l'abscisse du lieu où la température est extrémale ?

.....

c) Donner l'expression de cette température extrémale.

.....

On note $\vec{\jmath}_{\mathrm{th}}(x)$ le vecteur densité de courant thermique de conduction à l'abscisse $x$.

d) Quelles propositions sont vraies ?

(a) $\vec{\jmath}_{\mathrm{th}}\left(-\dfrac{L}{2}\right)\cdot\vec{e_x} > 0$

(b) $\vec{\jmath}_{\mathrm{th}}\left(-\dfrac{L}{2}\right)\cdot\vec{e_x} < 0$

(c) $\vec{\jmath}_{\mathrm{th}}\left(\dfrac{L}{2}\right)\cdot\vec{e_x} > 0$

(d) $\vec{\jmath}_{\mathrm{th}}\left(\dfrac{L}{2}\right)\cdot\vec{e_x} < 0$

.....

## Associations de résistances thermiques

Deux conducteurs thermiques (1) et (2) sont en *association série* lorsque la puissance thermique traverse le conducteur (1) puis le conducteur (2) avec une surface de jonction isotherme. La résistance thermique équivalente $R_{\mathrm{th}}$ est alors la somme des résistances thermiques de chaque conducteur.

$$R_{\mathrm{th}} = R_{\mathrm{th},1} + R_{\mathrm{th},2}$$

Deux conducteurs thermiques (1) et (2) en *association parallèle* ont des faces communes à la même température : ils sont donc soumis à la même différence de température. La conductance thermique $G_{\mathrm{th}}$ équivalente est alors la somme des conductances thermiques de chaque conducteur.

$$G_{\mathrm{th}} = \frac{1}{R_{\mathrm{th}}} = G_{\mathrm{th},1} + G_{\mathrm{th},2}$$

**Entraînement 17.13 — Mur de béton.**

On considère un mur en béton d'épaisseur $e = 30$ cm, de hauteur $h = 2{,}5\,\mathrm{m}$ et de longueur $L = 10$ m.

Les deux faces verticales isothermes de ce mur sont en contact avec l'air et sont à des températures différentes $T_1$ et $T_2$.

Lorsque $|T_1 - T_2| = 10$ K, la puissance thermique traversant le béton est $P = 1{,}0\,\mathrm{kW}$.

On rappelle que la résistance thermique d'un matériau de même géométrie que ce mur est

$$R_{\mathrm{th}} = \frac{e}{\lambda S}$$

où $e$ est l'épaisseur, $S$ l'aire des sections isothermes et $\lambda$ la conductivité thermique du matériau.

La résistance thermique $R_{\mathrm{th}}$ est le rapport entre la différence de température $T_1 - T_2$ entre deux isothermes et la puissance thermique $P_{1\to 2}$ transférée

$$R_{\mathrm{th}} = \frac{T_1 - T_2}{P_{1\to 2}}.$$

a) Calculer la résistance thermique de conduction du mur .....

b) Calculer la conductivité thermique $\lambda_1$ du béton .....

On isole ce mur avec une plaque de polystyrène de conductivité $\lambda_2 = 4{,}0 \times 10^{-2}\,\mathrm{W \cdot K^{-1} \cdot m^{-1}}$ afin que la puissance thermique traversant le mur isolé soit divisée par 5 pour le même écart de température $|T_1 - T_2|$.

c) Calculer l'épaisseur d'isolant nécessaire. .....

**Entraînement 17.14 — Ouverture dans un mur.**

On considère un mur de surface $S_m$ et de conductance thermique $G_m$. On souhaite percer ce mur afin d'installer une fenêtre de surface $S_f$ et de conductance thermique $G_f$. On rappelle que la conductance thermique est l'inverse de la résistance thermique : $G = \lambda S/e$ pour un matériau de conductivité thermique $\lambda$, d'épaisseur $e$ et de section $S$.

a) La conductance thermique $G'_m$ du mur percé (mur seul après installation de la fenêtre) est

(a) $\dfrac{S_m - S_f}{S_m} G_m$ (b) $\dfrac{S_f}{S_m} G_m$ (c) $G_m - G_f$ (d) $G_m$

.....

b) La conductance thermique $G$ du dispositif (mur et fenêtre) après installation de la fenêtre est

(a) $G_m + G_f$

(b) $\dfrac{G_m G_f}{G_m + G_f}$

(c) $G_m \left(1 - \dfrac{S_f}{S_m}\right) + G_f$

(d) $\dfrac{G_m S_m + G_f S_f}{S_m + S_f}$

.....

# Encore un peu de rayonnement thermique

*Un corps noir de température $T$ émet un rayonnement de puissance surfacique $\varphi$ donné par la loi de Stefan $\varphi = \sigma T^4$ où $\sigma$ est la constante de Stefan donnée dans les prérequis de la fiche.*

**Entraînement 17.15 — Loi de Wien.**

Le Soleil émet un rayonnement à large spectre. La figure ci-contre donne le graphe du flux surfacique spectral normalisé en fonction de la longueur d'onde.

On considère le Soleil comme un corps noir.

a) Mesurer la longueur d'onde $\lambda_m$ correspondant au flux surfacique spectral maximal .....

b) D'après la loi de Wien, on a $\lambda_m T = 2\,898\,\mu\text{m} \cdot \text{K}$.

Calculer la température de surface du Soleil. .....

c) Le corps humain a une température de 310 K. En le considérant comme un corps noir, quelle est la longueur d'onde $\lambda'_m$ de son rayonnement maximal ? .....

**Entraînement 17.16 — Température de l'atmosphère terrestre.**

L'atmosphère est modélisée par un corps noir rayonnant une puissance surfacique $\varphi_a$. Le rayonnement solaire à l'entrée de l'atmosphère terrestre a une puissance surfacique moyenne $\varphi_\odot = 342\,\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$. L'atmosphère en absorbe la partie $\varphi_S$. L'atmosphère absorbe aussi la puissance surfacique $\varphi_T$ provenant de la Terre.

On donne $\varphi_S = 70\,\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ et $\varphi_T = 450\,\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$.

a) À partir du bilan énergétique de l'atmosphère en régime stationnaire, la puissance surfacique $\varphi_a$ est

(a) $\varphi_T + \varphi_S$

(b) $2(\varphi_T + \varphi_S)$

(c) $\dfrac{\varphi_T + \varphi_S}{2}$

(d) $\dfrac{\varphi_T - \varphi_S}{2}$

.....

b) Calculer la température de l'atmosphère $T_a$ .....

**Réponses mélangées**

(b) $T_0 + \frac{I^2}{2\gamma\lambda S^2}\left(\left(\frac{L}{2}\right)^2 - x^2\right)$ (c) (a) $60\,\mathrm{W\cdot m^{-3}}$ $4{,}0\,\mathrm{cm}$

$\mathrm{W\cdot K^{-1}\cdot m^{-2}}$ nul Même sens que $\vec{e_r}$ $\mathrm{L^2\cdot T^{-1}}$ (b) $T_0 + \frac{I^2}{\lambda\gamma S^2}\frac{L^2}{8}$

(c) $3{,}8\times10^{26}\,\mathrm{W}$ (c) (c) $1{,}0\times10^{-2}\,\mathrm{K\cdot W^{-1}}$ (b) et (c)

$62{,}9\,\mathrm{MW\cdot m^{-2}}$ $1{,}2\,\mathrm{W\cdot K^{-1}\cdot m^{-1}}$ $\frac{p_v}{2\lambda}x(L-x) + (T_1 - T_0)\frac{x}{L} + T_0$ $65\,°\mathrm{C}$

$2{,}9\times10^5\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$ $1{,}5\,\mathrm{m^2}$ $260\,\mathrm{K}$ (b) $\lambda\frac{\pi a^2}{b}(T_0 - T_a)$ $5{,}8\times10^3\,\mathrm{K}$

Même sens que $\vec{e_r}$ positif (b) négatif (c) (b) et (e) (b) 0

(d) $1{,}4\times10^5\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$ $9{,}35\,\mu\mathrm{m}$ $60\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$ (b) $0{,}50\,\mu\mathrm{m}$ (c)

▶ Réponses et corrigés page 509

# Tables et diagrammes thermodynamiques

**Prérequis**
Notions d'additivité et d'extensivité de fonctions d'état. Transition de phase.

## Tables thermodynamiques

**Entraînement 18.1 — Table à double entrée – Table de vapeur sèche.**

La table ci-dessous liste les propriétés de la vapeur d'eau sèche.

Le volume massique $v$ est exprimé en $\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1}$, l'enthalpie massique $h$ en $\mathrm{kJ} \cdot \mathrm{kg}^{-1}$ et l'entropie massique $s$ en $\mathrm{kJ} \cdot \mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{kg}^{-1}$.

| **$p$ en kPa** ($T_{\mathrm{sat}}$ en °C) | | $T$ en °C | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 100 | 150 | 200 | 250 | 300 |
| **100** (99,606) | $v$ | 1,696 0 | 1,936 7 | 2,172 5 | 2,406 2 | 2,638 9 |
| | $h$ | 2 675,77 | 2 776,59 | 2 875,48 | 2 974,54 | 3 074,54 |
| | $s$ | 7,361 0 | 7,614 7 | 7,835 6 | 8,034 6 | 8,217 1 |
| **200** (120,21) | $v$ | | 0,969 89 | 1,080 5 | 1,198 9 | 1,316 2 |
| | $h$ | | 2 769,09 | 2 870,78 | 2 971,26 | 3 072,08 |
| | $s$ | | 7,280 9 | 7,508 1 | 7,710 0 | 7,894 0 |
| **500** (151,84) | $v$ | | | 0,425 03 | 0,474 43 | 0,522 60 |
| | $h$ | | | 2 855,90 | 2 961,13 | 3 064,60 |
| | $s$ | | | 7,061 1 | 7,272 6 | 7,461 4 |

a) En arrondissant le volume massique $v$ à deux chiffres significatifs, calculer la masse volumique $\rho$ en $\mathrm{g} \cdot \mathrm{mL}^{-1}$ de la vapeur d'eau soumise à une pression de 200 kPa et à une température de 200 °C.

.....

b) Que vaut la température de saturation $T_{\mathrm{sat}}$ pour une pression de 200 kPa ?

(a) 200 °C
(b) 120,21 °C
(c) 99,606 °C
(d) 151,84 °C

.....

c) Quel est l'état d'équilibre du système à une température de 100 °C et soumis à une pression de 200 kPa ?

(a) état liquide
(b) état vapeur
(c) état diphasé

.....

**Entraînement 18.2 — Table à unique entrée – Table de vapeur saturante.**

Les propriétés de l'eau sous forme diphasée sont données dans la table de vapeur saturante ci-dessous :

| $T$ (°C) | $p_{\text{sat}}$ (MPa) | Liquide saturant ① | Liquide saturant ② | Liquide saturant ③ | Vapeur saturante ① | Vapeur saturante ② | Vapeur saturante ③ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 0,002 339 | 83,9 | 0,296 5 | 0,001 002 | 2 537,4 | 8,666 0 | 57,757 |
| 40 | 0,007 385 | 167,5 | 0,572 4 | 0,001 008 | 2 573,5 | 8,255 5 | 19,515 |
| 60 | 0,019 946 | 251,2 | 0,831 3 | 0,001 017 | 2 608,8 | 7,908 1 | 7,667 2 |
| 80 | 0,047 414 | 335,0 | 1,075 6 | 0,001 029 | 2 643,0 | 7,611 1 | 3,405 2 |
| 100 | 0,101 420 | 419,2 | 1,307 2 | 0,001 043 | 2 675,6 | 7,354 1 | 1,671 8 |

Les colonnes ①, ②, ③ sont respectivement exprimées en $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$, $\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$.

À l'aide d'une analyse des unités, attribuer chaque colonne à une de ces trois grandeurs : volume massique $v$, enthalpie massique $h$ et entropie massique $s$.

a) $h$ ..... b) $v$ ..... c) $s$ .....

d) Exprimer la valeur de la pression de saturation $p_{\text{sat}}$ à 100 °C en millimètres de mercure (mmHg) en sachant que 1 mmHg = 133,3 Pa .....

e) Le volume massique de l'eau contenue dans un ballon d'eau chaude à 60 °C est de $v = 1{,}03\,\text{cm}^3/\text{g}$. Quel est l'état du système : liquide, diphasé ou vapeur ? .....

Déterminer, par une lecture de la table à 60 °C, la valeur du volume massique de liquide saturant $v_{\text{l}}$ et celle du volume massique de vapeur saturante $v_{\text{g}}$.

f) $v_{\text{l}}$ ..... g) $v_{\text{g}}$ .....

h) Le théorème des moments donne la fraction massique de vapeur d'un mélange diphasé : $x_{\text{g}} = \dfrac{v - v_{\text{l}}}{v_{\text{g}} - v_{\text{l}}}$.

En raisonnant en terme d'ordres de grandeur, laquelle des propositions ci-dessous correspond à une approximation raisonnable de l'expression de $x_{\text{g}}$ si $v = 1{,}03\,\text{cm}^3/\text{g}$ à 60 °C ?

(a) $v/v_{\text{l}}$ (b) $v_{\text{l}}/v_{\text{g}}$ (c) $v/v_{\text{g}}$

.....

# Diagramme de Clapeyron *P-v* et diagramme de Watt *P-V*

**Entraînement 18.3 — Schéma synoptique d'un cycle thermodynamique.**

Soit $n$ moles de gaz parfait qui décrivent le cycle ci-contre.

Attribuer aux transformations trois des quatre adjectifs suivants : isobare, adiabatique, isochore, isotherme.

a) Transformation (A) .....

b) Transformation (B) .....

c) Transformation (C) .....

d) À l'aide de la relation $PV = nRT$, exprimer $V_2$ en fonction de $V_1$ .....

**Entraînement 18.4 — Un cycle dans le diagramme $P$-$V$.**

*Les données nécessaires aux questions suivantes sont disponibles dans l'entraînement* **18.3**.

Pour rappel, un gaz parfait subissant une transformation isentropique vérifie la loi de Laplace : $PV^\gamma = \text{cste}$.

a) Laquelle de ces relations est valable pour la transformation (B) ?

(a) $\dfrac{P}{V} = \text{cste}$ (b) $PV = \text{cste}$ (c) $P^\gamma V^\gamma = \text{cste}$ (d) $T^{1-\gamma}V^\gamma = \text{cste}$

.....

b) Les échelles étant linéaires, déterminer lequel de ces tracés représente le cycle.

.....

c) Sachant que le travail des actions de pression reçu au cours du cycle est $W = \oint_{\text{cycle}} -P\,\mathrm{d}V$, déterminer laquelle de ces affirmations est correcte.

(a) $W > 0$ donc le cycle est récepteur.
(b) $W < 0$ donc le cycle est récepteur.
(c) $W = 0$ car la transformation est un cycle.
(d) $W < 0$ donc le cycle est moteur.

.....

**Entraînement 18.5 — Courbes iso d'un GP dans le diagramme $p$-$v$.**

Une courbe isochore, une courbe isotherme, une courbe adiabatique réversible (donc isentrope) et une courbe isobare ont été représentées ci-contre dans le diagramme $(p, v)$ d'un gaz parfait.

Toutes ces courbes passent par le même état décrit par le point $M_0$ ayant pour coordonnées la pression $p_0$ et le volume massique $v_0$.

Pour un gaz parfait,

- l'équation d'état massique est : $pv = rT$ avec $r = R/M$ la constante massique des gaz parfaits ;
- une des lois de Laplace dans le cas d'une transformation adiabatique réversible est $pv^\gamma = \text{cste}$ avec $\gamma > 1$ le coefficient adiabatique.

Exprimer la pente $\dfrac{\partial p}{\partial v}$ au point $M_0$ pour chaque courbe iso en fonction de $p_0$, $v_0$ et $\gamma$ :

a) iso-$p$ .....

b) iso-$T$ .....

c) iso-$v$ .....

d) iso-$s$ .....

À l'aide d'une comparaison des pentes des courbes au point $M_0$, déterminer l'adjectif adapté à chaque courbe parmi la liste suivante : isobare, isotherme, isochore, isentrope.

e) ① .....

f) ② .....

g) ③ .....

h) ④ .....

# Diagramme entropique $T$-$s$

**Entraînement 18.6 — Courbes isobares d'un diagramme $T - s$.**

La 2ème identité thermodynamique est : $\mathrm{d}h = T\,\mathrm{d}s + v\,\mathrm{d}p$. La seconde loi de Joule énonce que $\mathrm{d}h = c_P\,\mathrm{d}T$.

a) Établir l'équation différentielle vérifiée par $T(s)$ le long d'une courbe isobare.

.....

b) En déduire l'expression de $T(s)$ vérifiée le long d'une courbe isobare parmi les relations suivantes :

(a) $T_0 \cos(\omega s + \varphi)$ (b) $T_0 \exp\left(\dfrac{s - s_0}{c_p}\right)$ (c) $T_0 \exp\left(\dfrac{s_0 - s}{c_p}\right)$ (d) $T_0 \cos(s/c_p)$

.....

La suite vise à déterminer la position relative de deux courbes isobares. Pour cela, la compression isentropique d'un gaz parfait, passant d'un état (1) à un état (2), est représentée par un trait plein dans le diagramme $T - s$ ci-contre. Les courbes en pointillés représentent deux courbes isobares $p_1$ et $p_2$.

c) La transformation vérifie une des lois de Laplace : $p^{1-\gamma}T^{\gamma} = \text{cste}$. En déduire laquelle des relations suivantes est une expression de $p_2$ valide ?

(a) $p_1^{1-\gamma}\left(\dfrac{T_1}{T_2}\right)^{\gamma}$ (b) $p_1\left(\dfrac{T_1}{T_2}\right)^{\gamma/(1-\gamma)}$ (c) $p_1\left(\dfrac{T_1}{T_2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$

.....

d) Sachant que $\gamma > 1$, que dire de la position relative d'une courbe isobare haute pression (HP) relativement à une courbe isobare basse pression (BP) ?

(a) Les HP sont au-dessus des BP. (b) Les HP sont en-dessous des BP.

.....

**Entraînement 18.7 — Estimation d'un transfert thermique.**

Les transformations étudiées ici sont réversibles si bien qu'un transfert thermique reçu entre un état I et un état F est $Q_{\mathrm{IF}} = \displaystyle\int_{\mathrm{I}}^{\mathrm{F}} T\,\mathrm{d}S$.

Estimer le transfert thermique reçu lors du cycle donné ci-contre.

(a) $Q_{\mathrm{ABCDA}} = 1{,}5 \times 10^5$ J
(b) $Q_{\mathrm{ABCDA}} = -1{,}5 \times 10^5$ J
(c) $Q_{\mathrm{ABCDA}} = -1{,}5 \times 10^2$ J
(d) $Q_{\mathrm{ABCDA}} = 2{,}25 \times 10^2$ J
(e) $Q_{\mathrm{ABCDA}} = 2{,}25 \times 10^5$ J
(f) $Q_{\mathrm{ABCDA}} = -2{,}25 \times 10^2$ J

.....

## Entraînement 18.8 — Diagramme entropique de l'eau.

Pour rappel, un gaz parfait vérifie la seconde loi de Joule : $\mathrm{d}h = c_p\,\mathrm{d}T$. Pour un liquide, cette loi s'écrit sous la forme $\mathrm{d}h = c\,\mathrm{d}T$.

a) Quelles sont les propositions vraies au point A ?

(a) La pression est de 0,05 bar.

(b) L'enthalpie massique est de 2 800 J.

(c) Le corps pur est sous forme gazeuse et le modèle du gaz parfait est valable.

(d) Le corps pur est sous forme liquide.

.....

b) Quelles sont les propositions vraies au point B ?

(a) Le corps pur est sous forme liquide.

(b) Le corps pur est un mélange de liquide et de vapeur.

(c) La température est de 450 °C.

(d) L'entropie massique vaut $600\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$.

.....

c) Quelles sont les propositions vraies au point E ?

(a) Le titre massique en liquide est de 0,7.

(b) Le titre massique en vapeur est de 0,7.

(c) Le titre massique en liquide est de 0,3.

(d) L'enthalpie massique est de $1{,}9\times10^3\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}}$.

.....

d) Quels termes est-il possible d'associer à la transformation d'un système passant de l'état E à l'état F ?

(a) vaporisation (b) fusion (c) liquéfaction (d) isobare

.....

e) Quelle est la valeur de l'entropie massique au point F ? .....

f) Déterminer à l'aide d'une lecture graphique la valeur de la variation d'entropie massique d'un système passant de l'état E à l'état F.

.....

g) Déterminer à l'aide d'une lecture graphique la valeur de la variation d'enthalpie massique d'un système passant de l'état E à l'état F ?

.....

## Diagramme des frigoristes *P-h*

**Entraînement 18.9 — Réseaux de courbes.**

Différents réseaux de courbes sont tracés dans les diagrammes *P-h* ci-dessous.

La 1ère et la 2ème identités thermodynamiques sont respectivement $\mathrm{d}u = T\,\mathrm{d}s - p\,\mathrm{d}v$ et $\mathrm{d}h = T\,\mathrm{d}s + v\,\mathrm{d}p$. Les phases condensées incompressibles et indilatables, dont l'équation d'état est $v = \text{cste}$, et les gaz parfaits vérifient les lois de Joule qui, écrites en relations différentielles, donnent $\mathrm{d}u = c_V\,\mathrm{d}T$ et $\mathrm{d}h = c_p\,\mathrm{d}T$.

Pour chacun des trois diagrammes, choisir quel adjectif parmi la liste suivante correspond au réseau de courbes tracé :

(a) isobare (c) isotitre (e) isenthalpe

(b) isotherme (d) isentrope

a) Diagramme ① .....

b) Diagramme ② .....

c) Diagramme ③ .....

## Entraînement 18.10 — Diagramme des frigoristes de l'eau.

a) Au point A, quelles sont les propositions vraies ?

(a) La pression est de $1{,}00 \times 10^7$ Pa.

(b) La température est de 275 K.

(c) Le corps pur est sous forme gazeuse.

(d) Le corps pur est sous forme liquide.

.....

b) Au point B, quelles sont les propositions vraies ?

(a) La pression est de 1 Pa.

(b) La température est de 100 °C.

(c) Le corps pur est sous forme de mélange diphasé contenant du liquide et de la vapeur.

(d) Le titre massique en liquide est de 0,6.

.....

c) Pour rappel, un gaz parfait vérifie la seconde loi de Joule : $\mathrm{d}h = c_p\,\mathrm{d}T$. En déduire quelles sont les propositions valides en phase vapeur si le fluide est assimilé à un gaz parfait :

(a) Les courbes isothermes sont des segments horizontaux.

(b) Les courbes isothermes sont des demi-droites verticales.

(c) Les courbes isothermes sont confondues avec les courbes isenthalpes.

(d) Les courbes isothermes sont confondues avec les courbes isobares.

.....

d) En déduire dans quelle(s) zone(s) (a), (b), (c) ou (d) représentée(s) sur l'abaque le gaz peut-il être considéré comme un gaz parfait.

.....

**Entraînement 18.11 — Courbes iso d'un GP dans le diagramme** $(\log(p), h)$**.**

Quatre courbes iso ont été tracées dans le diagramme $(\log(p), h)$ ci-contre. Le fluide étudié est assimilé à un gaz parfait qui vérifie l'équation d'état $pvM = RT$ et la 2$^{\text{nde}}$ loi de Joule $\mathrm{d}h = c_p\,\mathrm{d}T$.

a) Le long d'une courbe isochore, la pente est $\dfrac{\mathrm{d}\log(p)}{\mathrm{d}h} = \dfrac{A}{p}$ avec $A$ une constante. Exprimer $A$ en fonction de $R$, $M$, $c_p$ et $v$.

.....

Par une étude qualitative des pentes des courbes, déterminer l'adjectif adapté à chaque courbe parmi la liste suivante : isobare, isotherme, isochore, isentrope.

b) ① ..... c) ② ..... d) ③ ..... e) ④ .....

**Entraînement 18.12 — Vaporisation de l'eau.**

*Le diagramme des frigoristes de l'eau est donné ci-dessus, dans l'entraînement* **18.10**.

a) À l'aide d'une analyse visuelle, c'est-à-dire sans lecture de valeurs ni calculs, utiliser la position du point B sous la courbe de saturation pour déterminer laquelle de ces propositions est valide.

*On rappelle que l'échelle des abscisses est linéaire.*

(a) Il y a davantage de liquide que de vapeur.
(b) Il y a davantage de vapeur que de liquide.
(c) Il y a autant de vapeur que de liquide.
(d) Il n'y a que du liquide.

.....

À l'aide de lectures graphiques, attribuer les valeurs de 2 650, 1 320, 420 et 1 000 kJ · kg$^{-1}$ aux enthalpies massiques caractérisant l'état du fluide au point B.

b) Enthalpie massique (moyenne) $h_{\mathrm{B}}$ du fluide diphasé : .....

c) Enthalpie massique $h_{\mathrm{v,B}}$ de la vapeur saturante : .....

d) Enthalpie massique $h_{\mathrm{l,B}}$ du liquide saturant : .....

e) Quelle est l'écriture correcte du théorème des moments donnant le titre en vapeur $x_{\mathrm{B}}$ désigne le titre vapeur à l'état B ?

(a) $x_{\mathrm{B}} = \dfrac{h_{\mathrm{v,B}} - h_{\mathrm{B}}}{h_{\mathrm{v,B}} - h_{\mathrm{l,B}}}$ (b) $x_{\mathrm{B}} = \dfrac{h_{\mathrm{B}} - h_{\mathrm{l,B}}}{h_{\mathrm{v,B}} - h_{\mathrm{l,B}}}$ (c) $x_{\mathrm{B}} = \dfrac{h_{\mathrm{v,B}} - h_{\mathrm{B}}}{h_{\mathrm{l,B}} - h_{\mathrm{v,B}}}$ (d) $x_{\mathrm{B}} = \dfrac{h_{\mathrm{l,B}} - h_{\mathrm{B}}}{h_{\mathrm{B}} - h_{\mathrm{v,B}}}$

.....

f) En déduire la valeur du titre vapeur au point B en prenant $2230 \approx 2250$ .....

g) Par analyse de la forme de la courbe de saturation, comment évolue l'enthalpie de vaporisation $\Delta_{\mathrm{vap}}h = h_{\mathrm{v}} - h_{\mathrm{l}}$ lorsque la pression augmente ?

(a) elle reste constante (b) elle diminue (c) elle augmente

.....

# Encore plus de tables thermodynamiques

**Entraînement 18.13 — Volume massique d'une vapeur sèche.**

*Les données nécessaires aux questions suivantes sont disponibles dans la table de vapeur sèche de l'entraînement* **18.1**.

a) Si $R$ est la constante des gaz parfaits exprimée en $\mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$ et $M$ la masse molaire, quelle est l'unité usuelle de $r = R/M$ ?

(a) $\mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot g^{-1}}$ (b) $\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$ (c) $\mathrm{kg \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$

b) Laquelle des expressions suivantes est l'équation d'état des gaz parfaits « massique » si $v$ est le volume massique, $p$ la pression, $T$ la température et $r$ la constante massique des gaz parfaits ?

(a) $pvr = T$ (b) $pv = T/r$ (c) $pv = r/T$ (d) $pv = rT$

c) À l'aide de l'équation d'état massique des gaz parfaits où $r = R/M = 0{,}46\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$ pour l'eau, estimer la valeur du volume massique de la vapeur sèche à 260 °C sous 100 kPa.

L'objectif de ce qui suit est d'évaluer le volume massique d'une vapeur sèche à 260 °C à partir des valeurs connues du volume massique à 250 °C et 300 °C. Pour cela, il est supposé que la représentation graphique du volume massique en fonction de la température est une droite passant par les points 250 °C et 300 °C.

d) Quelle expression permet d'estimer la valeur du volume massique de la vapeur sèche à 260 °C sous 100 kPa ?

(a) $v(260) = v(250) + \dfrac{v(300) - v(250)}{300 - 250} \times (300 - 250)$

(b) $v(260) = \dfrac{v(300) - v(260)}{300 - 250} \times (260 - 250)$

(c) $v(260) = v(250) + \dfrac{v(300) - v(260)}{300 - 260} \times (250 - 260)$

(d) $v(260) = v(250) + \dfrac{v(300) - v(250)}{300 - 250} \times (260 - 250)$

e) En déduire une estimation numérique de la valeur de $v(T = 260\,°\mathrm{C}, p = 100\,\mathrm{kPa})$.

**Entraînement 18.14 — Transfert thermique avec changement d'état.**

*Les données nécessaires aux questions suivantes sont disponibles dans la table de vapeur saturante de l'entraînement* **18.2**.

a) Quelle est l'enthalpie $h_g$ de la vapeur saturante soumise à une pression 1,0142 bar ?

.....

b) Quelle est l'enthalpie $h_\ell$ du liquide saturant à une température de 100 °C ? .....

De l'eau, contenant initialement 90% de vapeur, subit une liquéfaction totale sous une pression de 1,0142 bar au sein d'un condenseur sans parties mobiles.

c) Quelle relation permet de calculer l'enthalpie initiale $h_i$ du mélange diphasé ?

(a) $h_i = 10\,h_\ell + 90\,h_g$

(b) $h_i = 0,10\,h_\ell - 0,90\,h_g$

(c) $h_i = 0,10\,h_\ell + 0,90\,h_g$

(d) $h_i = 0,90\,h_\ell + 0,10\,h_g$

.....

d) Calculer le transfert thermique massique $q$ reçu par le fluide en utilisant le 1er principe industriel qui établit que $q = h_f - h_i$ avec $h_f$ l'enthalpie massique du fluide après liquéfaction totale.

.....

# Et encore plus de diagrammes thermodynamiques

**Entraînement 18.15 — Un cycle dans le diagramme $(V, T)$.**

*Les données nécessaires aux questions suivantes sont disponibles dans l'entraînement* **18.3**.

Pour rappel, un gaz parfait subissant une transformation isentropique vérifie la loi de Laplace : $PV^\gamma = \text{cste}$.

a) Laquelle des relations suivantes est valable pour la transformation (D) ?

(a) $\dfrac{T}{V} = \text{cste}$

(b) $TV = \text{cste}$

(c) $TV^{\gamma-1} = \text{cste}$

(d) $T^{1-\gamma}V^\gamma = \text{cste}$

.....

b) Les échelles étant linéaires, déterminer lequel de ces tracés représente le cycle.

.....

**Entraînement 18.16 — Courbes iso d'un GP dans le diagramme $(p, T)$.**

Une courbe isochore, une courbe isotherme, une courbe adiabatique réversible (donc isentrope) et une courbe isobare ont été représentées ci-contre dans le diagramme $(p, T)$ d'un gaz parfait.

Toutes ces courbes passent par le même état décrit par le point $M_0$.

Pour un gaz parfait,

- l'équation d'état est : $pv = rT$ ;
- une des lois de Laplace dans le cas d'une transformation isentropique : $T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{cste}$ avec $\gamma > 1$ le coefficient adiabatique.

a) Que dire de la pente $\dfrac{\partial p}{\partial T}$ de la courbe isochore $v = v_0$ passant par le point $M_0$ ?

(a) Elle est décroît avec $T$. (b) Elle est constante avec $T$. (c) Elle est croît avec $T$.

À l'aide d'une comparaison des pentes des courbes, déterminer l'adjectif adapté à chaque courbe parmi la liste suivante : isobare, isotherme, isochore, isentrope.

b) ① . c) ② . d) ③ . e) ④ .

**Entraînement 18.17 — Courbes iso d'un GP dans le diagramme $(T, s)$.**

Une courbe isochore, une courbe isotherme, une courbe adiabatique réversible (donc isentrope) et une courbe isobare ont été représentées ci-dessous dans le diagramme $(T, s)$ d'un gaz parfait.

Toutes ces courbes passent par le même état décrit par le point $M_0$ ayant pour coordonnées la température $T_0$ et l'entropie massique $s_0$.

Pour rappel, le coefficient adiabatique est défini comme le rapport de la capacité thermique (massique) par la capacité thermique à volume constant : $\gamma = \dfrac{c_p}{c_v}$ avec $\gamma > 1$.

De plus, pour un gaz parfait, les points de la courbe isobare vérifient la relation $T(s) = T_a e^{s/c_p}$ quand ceux de la courbe isochore vérifient la relation $T(s) = T_b e^{s/c_v}$ avec $T_a$ et $T_b$ des constantes.

Exprimer la pente $\dfrac{\partial T}{\partial s}$ au point $M_0$ pour chaque courbe iso en fonction de $T_0$, $c_v$ et $c_p$ :

a) iso-$p$ ..... c) iso-$v$ .....

b) iso-$T$ ..... d) iso-$s$ .....

À l'aide d'une comparaison des pentes des courbes au point $M_0$, déterminer l'adjectif adapté à chaque courbe parmi la liste suivante : isobare, isotherme, isochore, isentrope.

e) ① . f) ② . g) ③ . h) ④ .

**Entraînement 18.18 — Un cycle dans le diagramme $(P, T)$.**

*Les données nécessaires aux questions suivantes sont disponibles dans l'entraînement* **18.3**.

Pour rappel, un gaz parfait subissant une transformation isentropique vérifie la loi de Laplace : $PV^\gamma = \text{cste}$.

a) Laquelle des relations suivantes est valable pour la transformation (D) ?

(a) $PT = \text{cste}$ (b) $P^\gamma T^{\gamma-1} = \text{cste}$ (c) $P^{1-\gamma}T^\gamma = \text{cste}$ (d) $\dfrac{P}{T} = \text{cste}$

.....

b) Les échelles étant linéaires, déterminer lequel de ces tracés représente le cycle.

.....

**Entraînement 18.19 — Compression : irréversibilités et élévation de température.**

Du fluide R718 se trouve à l'entrée d'un compresseur sous une pression de 250 mbar à 100 °C (état I).

a) En plaçant le point I dans le diagramme des frigoristes de l'entraînement **18.10**, déterminer la valeur de l'enthalpie massique initiale $h_\mathrm{I}$ .....

b) Dans quel état se trouve le fluide à l'état I ?

(a) liquide saturant (b) vapeur saturante (c) vapeur sèche (d) mélange diphasé

.....

c) Quelle est la valeur de l'entropie $s_\mathrm{I}$ du fluide à l'état I ? .....

d) Le fluide est comprimé de manière adiabatique et réversible ($s_\mathrm{I} = s_\mathrm{F}$) jusqu'à la pression $p_\mathrm{F} = 1\,\mathrm{bar}$ par le compresseur qui fournit le travail $w = h_\mathrm{F} - h_\mathrm{I}$. Calculer $w$ en $\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$ .....

e) Quelle est la température finale $T_\mathrm{F}$ du fluide après compression réversible ? .....

f) Le fluide est désormais comprimé à $p_\mathrm{F} = 1\,\mathrm{bar}$ de manière irréversible si bien que son entropie a augmenté de 6%. En plaçant le point F′ entre deux courbes isentropes, déterminer la valeur de la température finale $T_{\mathrm{F}'}$ .....

g) L'augmentation de la température du fluide est due à sa compression, mais aussi aux irréversibilités qui ont lieu lors de celle-ci. Laquelle de ces relations permet d'évaluer la proportion de l'élévation de température strictement due aux irréversibilités par rapport à l'élévation totale de température $T_{\mathrm{F}'} - T_\mathrm{I}$ ?

*On rappelle que, pour une quantité $X_{tot} = X_1 + X_2$, la proportion* ***relative*** *de $X_1$ au sein de $X_{tot}$ s'exprime comme $X_1/X_{tot}$.*

(a) $\dfrac{T_{\mathrm{F}'} - T_\mathrm{F}}{T_{\mathrm{F}'} - T_\mathrm{I}}$ (b) $\dfrac{T_{\mathrm{F}'} - T_\mathrm{F}}{T_\mathrm{I}}$ (c) $\dfrac{T_{\mathrm{F}'} - T_\mathrm{I}}{T_{\mathrm{F}'}}$ (d) $\dfrac{T_{\mathrm{F}'} - T_\mathrm{I}}{T_\mathrm{F} - T_\mathrm{I}}$

.....

**Réponses mélangées**

isochore $\infty$ $\frac{T_0}{c_p}$ a ① $1{,}017 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^3/kg}$ isotherme isentrope

$2\,650\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$ isobare $7{,}6672\,\mathrm{m^3/kg}$ isotherme b, c, d isochore

a ② 760,8 mmHg d a c $-2\,031\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$ isentrope

isochore isobare isotherme $2\,675{,}6\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$ $\frac{T_0}{c_v}$ 0 c a, d

$419{,}2\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$ 250 °C b a, d d b 400 °C isotherme

c $-\gamma\frac{p_0}{v_0}$ $1\,320\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$ c, d $-5\,000\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$ $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} - \frac{T}{c_p} = 0$

b b $2{,}45\,\mathrm{m^3/kg}$ (a) a $2V_1$ isentrope c a, c

$300\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$ $2\,680\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$ c a diphasé $-\frac{p_0}{v_0}$ $800\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$

b b $\infty$ d isobare isentrope b et c a isobare

$420\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$ 0 ③ b, d b c isobare isochore

isochore isotherme b $2{,}45\,\mathrm{m^3/kg}$ d b $9{,}1 \times 10^{-4}\,\mathrm{g \cdot mL^{-1}}$

b $8\,\mathrm{kJ \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$ $-1\,650\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$ b $\frac{R}{\ln(10) M v c_p}$ $x_\mathrm{B} = 40\%$

▶ Réponses et corrigés page 513

# Thermodynamique industrielle

**Fiche du « Cahier d'entraînement 1re année » pour se préparer**
⟶ *Thermodynamique*

**Prérequis**
Lois de Laplace. Principes sous forme industrielle. Diagramme $(P, h)$.

Dans l'ensemble de la fiche, on se place en régime permanent.

## Principes industriels

### Entraînement 19.1 — Composants des machines thermiques.

En négligeant les variations d'énergie mécanique, les premier et second principes industriels par unité de masse s'écrivent

$$\Delta h = q + w_\mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad \Delta s = s_\mathrm{e} + s_\mathrm{c}\,, \tag{7}$$

où $q$ est le transfert thermique massique, $w_\mathrm{i}$ est le travail indiqué massique, $s_\mathrm{e}$ est l'entropie massique échangée et $s_\mathrm{c}$ est l'entropie massique créée. Rappelons que l'entropie massique échangée avec un thermostat de température $T_0$ constante est égale à $s_\mathrm{e} = q/T_0$.

Pour chacun des composants suivants, on souhaite savoir comment ces deux principes se réécrivent.

*Choisissez la bonne réponse à chaque fois.*

a) Un compresseur fonctionnant de manière adiabatique réversible avec des pièces mobiles.

(a) $\Delta h = w_\mathrm{i}$ ; $\Delta s = 0$
(b) $\Delta h = w_\mathrm{i}$ ; $\Delta s = s_\mathrm{e}$
(c) $\Delta h = 0$ ; $\Delta s = s_\mathrm{c}$
(d) $\Delta h = q$ ; $\Delta s = s_\mathrm{e} + s_\mathrm{c}$

b) Un échangeur thermique dans lequel le fluide se liquéfie (condenseur).

(a) $\Delta h = w_\mathrm{i}$ ; $\Delta s = 0$
(b) $\Delta h = w_\mathrm{i}$ ; $\Delta s = s_\mathrm{e}$
(c) $\Delta h = 0$ ; $\Delta s = s_\mathrm{c}$
(d) $\Delta h = q$ ; $\Delta s = s_\mathrm{e} + s_\mathrm{c}$

c) Un détendeur idéal calorifugé et sans pièce mobile.

(a) $\Delta h = w_\mathrm{i}$ ; $\Delta s = 0$
(b) $\Delta h = w_\mathrm{i}$ ; $\Delta s = s_\mathrm{e}$
(c) $\Delta h = 0$ ; $\Delta s = s_\mathrm{c}$
(d) $\Delta h = q$ ; $\Delta s = s_\mathrm{e} + s_\mathrm{c}$

d) Une turbine idéale réalisant une détente adiabatique réversible au travers de parties mobiles.

(a) $\Delta h = w_\mathrm{i}$ ; $\Delta s = 0$
(b) $\Delta h = w_\mathrm{i}$ ; $\Delta s = s_\mathrm{e}$
(c) $\Delta h = 0$ ; $\Delta s = s_\mathrm{c}$
(d) $\Delta h = q$ ; $\Delta s = s_\mathrm{e} + s_\mathrm{c}$

**Entraînement 19.2 — Comparaison des formes énergies d'un système.**

Un gaz de capacité thermique massique à pression constante $c_p = 1\,\mathrm{kJ \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$, allant à la vitesse $v = 10\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, traverse une turbine. La température du gaz diminue de 10 °C entre l'entrée et la sortie, où la différence d'altitude est de l'ordre du mètre. Toutes les énergies considérées sont massiques, c'est-à-dire exprimées par kg d'air.

a) Estimer la variation d'enthalpie du système constitué des gaz à l'intérieur de la turbine.

(a) $10\,\mathrm{J \cdot kg^{-1}}$ (b) $50\,\mathrm{J \cdot kg^{-1}}$ (c) $10\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$ (d) $50\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$

b) Même question pour son énergie cinétique dans le cas extrême où la vitesse de sortie est nulle.

(a) $10\,\mathrm{J \cdot kg^{-1}}$ (b) $10\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$ (c) $50\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$ (d) $50\,\mathrm{J \cdot kg^{-1}}$

c) Même question pour son énergie potentielle en prenant le champ de pesanteur terrestre $g = 10\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

(a) $10\,\mathrm{J \cdot kg^{-1}}$ (b) $50\,\mathrm{J \cdot kg^{-1}}$ (c) $10\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$ (d) $50\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$

d) Comparer les termes et indiquer celui qui prédomine.

(a) la variation d'enthalpie $\Delta h$
(b) la variation d'énergie cinétique $\Delta e_c$
(c) la variation d'énergie potentielle $\Delta e_p$
(d) les trois sont comparables

**Entraînement 19.3 — Étude d'une tuyère.**

L'air d'un réservoir $\mathcal{R}$ se détend dans une tuyère horizontale, isolée thermiquement du milieu extérieur, et ne contenant aucune pièce mobile. L'air est assimilable à un gaz parfait de masse molaire $M = 29\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$, d'indice adiabatique $\gamma = 1{,}4$ et de capacité thermique massique $c_p = \dfrac{1}{M}\dfrac{\gamma R}{\gamma - 1}$.

L'air entre dans la tuyère avec une vitesse $c_1$ supposée négligeable, sous la pression $p_1$ à la température $T_1 = 273\,\mathrm{K}$. Il en sort animé d'une vitesse $c_2$ sous la pression $p_2$ à la température $T_2 = 200\,\mathrm{K}$.

a) Quelle est la forme du premier principe par unité de masse pour le système étudié ?

(a) $\Delta h + \Delta e_c = w_i$
(b) $\Delta h + \Delta e_c = q$
(c) $\Delta h + \Delta e_c = 0$
(d) $\Delta h = w_i$
(e) $\Delta h = q$
(f) $\Delta h = w_i + q$

b) En utilisant la deuxième loi de Joule, déterminer l'expression de la variation d'enthalpie massique $\Delta h$ de l'air à la sortie de la tuyère en fonction des températures $T_1$, $T_2$, de la masse molaire $M$ de l'air, de $\gamma$ et de la constante $R$ des gaz parfaits.

c) En déduire l'expression de la vitesse $c_2$ d'éjection de l'air à la sortie de la tuyère en fonction des températures $T_1$, $T_2$, de la masse molaire $M$ de l'air, de $\gamma$ et de la constante $R$ des gaz parfaits.

d) Calculer numériquement la vitesse $c_2$ d'éjection de l'air à la sortie de la tuyère en utilisant les données.

# Modèle du gaz parfait : exemple d'un turbopropulseur

On considère un gaz parfait décrivant le cycle de Joule ci-dessous dans lequel la première et la troisième phases sont isentropiques.

La deuxième phase (combustion) et la quatrième phase (refroidissement) se font sans travail indiqué.

On néglige les variations d'énergies cinétique $\Delta e_c$ et potentielle $\Delta e_p$.

**Entraînement 19.4 — Températures.**

a) En utilisant la loi de Laplace sous la forme $T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{cte}$, exprimer le température $T_2$.

(a) $T_2 = T_1 \left(\dfrac{p_1}{p_2}\right)^{1-2\gamma}$

(b) $T_2 = T_1 \left(\dfrac{p_1}{p_2}\right)^{(1-\gamma)/\gamma}$

(c) $T_2 = T_1^\gamma \left(\dfrac{p_1}{p_2}\right)^{(1-\gamma)\gamma}$

(d) $T_2 = \left(\dfrac{T_1 p_1}{p_2}\right)^{(1-\gamma)/\gamma}$

.....

b) En utilisant maintenant la forme $TV^{\gamma-1} = \text{cte}$, exprimer $T_4$.

(a) $T_4 = T_3 \left(\dfrac{V_3}{V_4}\right)^{\gamma-1}$

(b) $T_4 = T_3^{1-\gamma} \dfrac{V_3}{V_4}$

(c) $T_4 = T_3 \left(\dfrac{V_3}{V_4}\right)^{1-\gamma}$

(d) $T_4 = T_3 \left(\dfrac{V_3}{V_4}\right)^{1/(\gamma-1)}$

.....

**Entraînement 19.5 — Rendement.**

Le cycle précédent est utilisé dans une machine, fonctionnant sans travail indiqué pendant la deuxième et la quatrième phase. La première phase est une compression, la troisième phase une détente. On les suppose isentropiques, donc adiabatiques réversibles. Les travaux sont algébriques, de signe positif lorsqu'ils sont réellement reçus par le fluide.

a) Indiquer si le cycle est moteur ou récepteur.

(a) moteur (b) récepteur

b) Quelle est l'expression du travail indiqué total reçu lors de ce cycle ?

(a) $w_1 + w_3$ (d) $-w_1 - w_3$ (g) $w_2 - w_4$
(b) $-w_1 + w_3$ (e) $w_2 + w_4$ (h) $-w_2 - w_4$
(c) $w_1 - w_3$ (f) $-w_2 + w_4$

c) Quelle est l'expression du transfert thermique reçu de la part de la source chaude ?

(a) $c_\mathrm{p}(T_2 - T_1)$ (c) $c_\mathrm{p}(T_4 - T_3)$
(b) $c_\mathrm{p}(T_3 - T_2)$ (d) $c_\mathrm{p}(T_1 - T_4)$

d) Quelle est l'expression du transfert thermique reçu de la part de la source froide ?

(a) $c_\mathrm{p}(T_2 - T_1)$ (c) $c_\mathrm{p}(T_4 - T_3)$
(b) $c_\mathrm{p}(T_3 - T_2)$ (d) $c_\mathrm{p}(T_1 - T_4)$

e) Quelle est l'expression du travail indiqué $w_1$ reçu dans la première phase ?

(a) $c_\mathrm{p}(T_2 - T_1)$ (c) $c_\mathrm{p}(T_4 - T_3)$
(b) $c_\mathrm{p}(T_3 - T_2)$ (d) $c_\mathrm{p}(T_1 - T_4)$

f) Quelle est l'expression du travail indiqué $w_3$ reçu dans la troisième phase ?

(a) $c_\mathrm{p}(T_2 - T_1)$ (c) $c_\mathrm{p}(T_4 - T_3)$
(b) $c_\mathrm{p}(T_3 - T_2)$ (d) $c_\mathrm{p}(T_1 - T_4)$

g) Exprimer le rendement de ce cycle moteur en fonction de $w_1$, $w_3$ et $q_2$.

h) Exprimer le rendement en fonction des températures $T_1$, $T_2$, $T_3$ et $T_4$.

# Exploitation de diagrammes enthalpiques

## Entraînement 19.6 — Efficacité d'une pompe à chaleur.

Considérons une pompe à chaleur dont le cycle est représenté ci-dessous.

a) Le fluide reçoit du travail dans le compresseur, ce qui a pour effet d'augmenter la pression ainsi que la température à une température supérieure à celle de la source chaude.

Quelle transformation du cycle correspond au compresseur ? .....

b) Calculer numériquement le travail massique algébrique $w_{\text{compr}}$ reçu par le fluide dans le compresseur.

.....

c) L'échange avec la source chaude a lieu dans le condenseur, où le fluide se liquéfie totalement.

Quelle transformation du cycle correspond au condenseur ? .....

d) Calculer numériquement le transfert thermique algébrique $q_{\text{cond}}$ reçu par le fluide dans le condenseur.

.....

e) Calculer l'efficacité de la machine $e = -\dfrac{q_{\text{cond}}}{w_{\text{compr}}}$ .....

## Entraînement 19.7 — Rendement isentropique d'un compresseur.

Dans cet entraînement, on considère un compresseur adiabatique destiné à augmenter la pression d'une vapeur de propane de 1 à 10 bar.

Le fluide est dans l'état initial E indiqué sur le diagramme des frigoristes ci-dessous en entrée du compresseur, on note S son état de sortie. Les valeurs lues sur le diagramme seront données avec deux chiffres significatifs ; les entropies sont données en $\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$.

a) On suppose la compression réversible. Donner la valeur de $s_{\mathrm{S,rév}}$ en sortie ....

b) Déterminer graphiquement la température du fluide $T_{\mathrm{S,rév}}$ en sortie .....

c) Calculer le travail massique $w_{\mathrm{rév}}$ fourni à la vapeur .....

d) En réalité, la compression est irréversible, et la valeur de la température réelle en sortie du compresseur est $T_{\mathrm{S}} = 65\,°\mathrm{C}$. Déterminer le travail massique $w$ réellement fourni lors du processus.

.....

e) Calculer le rendement isentropique du compresseur $\eta = \dfrac{w_{\mathrm{rév}}}{w}$ .....

f) Calculer l'entropie massique créée lors de la compression .....

# Autres entraînements

**Entraînement 19.8 — Machines thermiques.**

On donne ci-dessous le schéma conventionnel d'une machine ditherme, les énergies reçues par le fluide étant algébriques.

a) S'il s'agit d'un moteur, indiquer le signe de chaque transfert énergétique $W$, $Q_f$ et $Q_c$.

(a) $W > 0$ ; $Q_f > 0$ ; $Q_c < 0$
(b) $W > 0$ ; $Q_f < 0$ ; $Q_c > 0$
(c) $W > 0$ ; $Q_f < 0$ ; $Q_c < 0$
(d) $W < 0$ ; $Q_f > 0$ ; $Q_c > 0$
(e) $W < 0$ ; $Q_f > 0$ ; $Q_c < 0$
(f) $W < 0$ ; $Q_f < 0$ ; $Q_c > 0$

b) Comment le rendement est-il alors défini ?

(a) $-W/Q_c$
(b) $+Q_f/W$
(c) $-Q_c/W$
(d) $+W/Q_f$
(e) $-Q_f/W$
(f) $+W/Q_c$

c) Même question pour un réfrigérateur.

(a) $W > 0$ ; $Q_f > 0$ ; $Q_c < 0$
(b) $W > 0$ ; $Q_f < 0$ ; $Q_c > 0$
(c) $W > 0$ ; $Q_f < 0$ ; $Q_c < 0$
(d) $W < 0$ ; $Q_f > 0$ ; $Q_c > 0$
(e) $W < 0$ ; $Q_f > 0$ ; $Q_c < 0$
(f) $W < 0$ ; $Q_f < 0$ ; $Q_c > 0$

d) Comment l'efficacité est-elle alors définie ?

(a) $-W/Q_c$
(b) $+Q_f/W$
(c) $-Q_c/W$
(d) $+W/Q_f$
(e) $-Q_f/W$
(f) $+W/Q_c$

e) Même question pour une pompe à chaleur.

(a) $W > 0$ ; $Q_f > 0$ ; $Q_c < 0$
(b) $W > 0$ ; $Q_f < 0$ ; $Q_c > 0$
(c) $W > 0$ ; $Q_f < 0$ ; $Q_c < 0$
(d) $W < 0$ ; $Q_f > 0$ ; $Q_c > 0$
(e) $W < 0$ ; $Q_f > 0$ ; $Q_c < 0$
(f) $W < 0$ ; $Q_f < 0$ ; $Q_c > 0$

.....

f) Comment l'efficacité est-elle alors définie ?

(a) $-W/Q_c$
(b) $+Q_f/W$
(c) $-Q_c/W$
(d) $+W/Q_f$
(e) $-Q_f/W$
(f) $+W/Q_c$

.....

g) Même question pour un climatiseur.

(a) $W > 0$ ; $Q_f > 0$ ; $Q_c < 0$
(b) $W > 0$ ; $Q_f < 0$ ; $Q_c > 0$
(c) $W > 0$ ; $Q_f < 0$ ; $Q_c < 0$
(d) $W < 0$ ; $Q_f > 0$ ; $Q_c > 0$
(e) $W < 0$ ; $Q_f > 0$ ; $Q_c < 0$
(f) $W < 0$ ; $Q_f < 0$ ; $Q_c > 0$

.....

h) Comment l'efficacité est-elle alors définie ?

(a) $-W/Q_c$
(b) $+Q_f/W$
(c) $-Q_c/W$
(d) $+W/Q_f$
(e) $-Q_f/W$
(f) $+W/Q_c$

.....

**Entraînement 19.9 — Échangeurs thermiques.**

Les machines dithermes possèdent deux échangeurs thermiques : un condenseur, dans lequel le fluide se liquéfie, et un évaporateur, où il se vaporise.

a) Le fluide caloporteur d'une centrale thermique doit céder de l'énergie à l'environnement extérieur avant de retourner vers la chaudière. L'échangeur est-il un évaporateur ou un condenseur ?

.....

b) Le fluide caloporteur d'un réfrigérateur doit recevoir de l'énergie de la part du compartiment réfrigéré. S'agit-il d'un évaporateur ou d'un condenseur ?

.....

c) Le fluide caloporteur d'une pompe à chaleur doit céder de l'énergie dans une maison.

S'agit-il d'un évaporateur ou d'un condenseur ?

.....

**Entraînement 19.10 — Mélangeur.**

Un mélangeur calorifugé à deux entrées et une sortie fonctionne avec deux liquides identiques, de l'eau par exemple, de capacité thermique massique à pression constante $c_\mathrm{p}$ constante. Le premier fluide a un débit massique $D_\mathrm{m1}$ et une température $T_1$ tandis que le second a un débit massique $D_\mathrm{m2}$ et une température $T_2 < T_1$. En sortie, le débit massique du mélange est $D_\mathrm{m}$ et sa température $T$.

a) Exprimer la conservation du débit massique avec les données de l'exercice.

.....

b) En ne considérant que le sous-système « fluide 1 » qui reçoit de la part du fluide 2 le transfert thermique $q_{2\to1}$, déduire du premier principe industriel la relation entre $q_{2\to1}$, $c_\mathrm{p}$, $T_1$ et $T$.

.....

c) Même question pour le sous-système « fluide 2 », en fonction de $q_{1\to2}$, $c_\mathrm{p}$, $T_2$ et $T$.

.....

d) L'échange thermique est supposé parfait entre les deux liquides : $D_\mathrm{m1}\, q_{2\to1} + D_\mathrm{m2}\, q_{1\to2} = 0$. En déduire l'équation reliant les différents débits et températures.

.....

e) Exprimer la température $T$ en sortie .....

f) Faire l'application numérique avec $T_1 = 80\,°\mathrm{C}$, $T_2 = 20\,°\mathrm{C}$, $D_\mathrm{m1} = 3{,}0\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$ et $D_\mathrm{m2} = 7{,}0\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$ et exprimer la température en degré celsius.

.....

**Entraînement 19.11 — Étude d'une turbine.**

À l'entrée d'une turbine horizontale, isolée thermiquement, de l'air possède une pression $p_1$, une température $T_1$, et une vitesse $c_1$. À la sortie, il a mêmes pression et température, sa vitesse est négligeable.

a) Simplifier le premier principe par unité de masse pour les écoulements en régime permanent.

(a) $\Delta e_\mathrm{c} = w_\mathrm{i}$ (c) $\Delta h + \Delta e_\mathrm{c} = 0$ (e) $\Delta h = q_\mathrm{e}$

(b) $\Delta h + \Delta e_\mathrm{c} = w_\mathrm{i}$ (d) $\Delta h = w_\mathrm{i}$ (f) $\Delta h = w_\mathrm{i} + q_\mathrm{e}$

.....

b) Exprimer le travail $W_\mathrm{f}$ récupéré sur l'arbre de la turbine pour le passage d'une masse $m$ d'air.

(a) $W_\mathrm{f} = \dfrac{1}{2}c_1^2$ (b) $W_\mathrm{f} = -\dfrac{1}{2}c_1^2$ (c) $W_\mathrm{f} = -\dfrac{1}{2}mc_1^2$ (d) $W_\mathrm{f} = \dfrac{1}{2}mc_1^2$

.....

c) Déterminer la valeur numérique du travail échangé pendant 1 heure avec un débit de $0{,}5\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$ en prenant $c_1 = 100\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

.....

**Entraînement 19.12 — Étude d'une pompe.**

De l'eau liquide est refoulée à l'aide d'une pompe d'un point $A$ vers un point $B$. Les vitesses à l'entrée et à la sortie sont négligeables de même que la variation d'altitude. En amont, l'eau est à pression $p_1 = 0{,}10\,\text{bar}$ et en aval à $p_2 = 20\,\text{bar}$. On suppose l'écoulement isentropique.

a) Indiquer les hypothèses à prendre en compte dans l'expression du bilan enthalpique.

(a) $q_\text{e} = 0$, $e_\text{c} = \text{cte}$, $e_\text{p} = \text{cte}$
(b) $w_\text{i} = 0$, $e_\text{c} = \text{cte}$, $e_\text{p} = \text{cte}$
(c) $\Delta h = 0$, $e_\text{c} = \text{cte}$, $e_\text{p} = \text{cte}$
(d) $q_\text{e} = 0$, $w_\text{i} = 0$, $e_\text{c} = \text{cte}$, $e_\text{p} = \text{cte}$

.....

b) Pour les écoulements en régime permanent appliqué à la pompe étudiée, comment s'écrit le premier principe, pour l'unité de masse de fluide ?

(a) $\Delta h + \Delta e_\text{c} = w_\text{i}$
(b) $\Delta h + \Delta e_\text{c} = q$
(c) $\Delta h + \Delta e_\text{c} = 0$
(d) $\Delta h = w_\text{i}$
(e) $\Delta h = q$
(f) $\Delta h = w_\text{i} + q$

.....

c) En utilisant la deuxième identité thermodynamique $\mathrm{d}h = T\,\mathrm{d}s + v\,\mathrm{d}p$ , exprimer la variation d'enthalpie $\Delta h$ de l'eau en fonction des pressions $p_1$, $p_2$ et du volume massique $v$ de l'eau.

.....

d) En déduire l'expression du travail indiqué massique $w_\text{i}$, en fonction du volume massique $v$ et des pressions $p_1$ et $p_2$.

.....

e) Déterminer numériquement ce travail, en $\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ .....

**Réponses mélangées**

$D_{\text{m}1}(T - T_1) + D_{\text{m}2}(T - T_2) = 0$ (a) (a) $9 \times 10^6\,\text{J}$ (f)

(c) $c_\text{p}(T - T_1) = q_{2\to1}$ (a) $50\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ (d) $-200\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$

$\dfrac{1}{M}\dfrac{\gamma R}{\gamma - 1}(T_2 - T_1)$ $1 \to 2$ condenseur (c) (a) (b) 4

$383\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ $1 - \dfrac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$ (d) $140\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ $-\dfrac{w_1 + w_3}{q_2}$ $50\,°\text{C}$

(d) (a) $38\,°\text{C}$ $D_{\text{m}1} + D_{\text{m}2} = D_\text{m}$ évaporateur $1{,}99\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$

(d) (a) $c_2 = \sqrt{\dfrac{2}{M}\dfrac{\gamma R}{\gamma - 1}(T_1 - T_2)}$ $\Delta h = v(p_2 - p_1)$ $110\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$

(a) $2{,}50\,\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$ (b) (b) (a) (a) $T = \dfrac{D_{\text{m}1}T_1 + D_{\text{m}2}T_2}{D_m}$

(a) $c_\text{p}(T - T_2) = q_{1\to2}$ $v(p_2 - p_1)$ condenseur (a) (a)

$100\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$ (c) (d) 0,78 (a) $2 \to 3$ (c) (c) (a) (b)

► Réponses et corrigés page 520

# Signaux

**Prérequis**
Continuités imposées par les bobines et condensateurs.
Comportement des bobines et condensateur à HF et BF.

## Pour bien commencer

### Entraînement 20.1 — Un peu de calcul intégral.

Calculer les intégrales suivantes si $T = 2\pi/\omega$ est une constante homogène à un temps.

a) $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \cos(\omega t)\,\mathrm{d}t$ .....

b) $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \cos^2(\omega t)\,\mathrm{d}t$ .....

c) $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T t\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t$ .....

## Régimes transitoires

### Entraînement 20.2 — Premier/second ordre.

Soit les deux courbes $s_1(t)$ et $s_2(t)$ respectivement à gauche et à droite sur la figure ci-dessous.

Parmi les propositions suivantes,

(a) $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} - \dfrac{s}{\tau} = \dfrac{E}{\tau}$

(b) $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \dfrac{s}{\tau} = 0$

(c) $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \dfrac{s}{\tau} = \dfrac{E}{\tau}$

(d) $\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 E$

(e) $\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 E$

(f) $\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} - \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 E$

où $(\tau, \omega_0, Q, E) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^4$, laquelle correspond à

a) $s_1(t)$ ? .....

b) $s_2(t)$ ? .....

**Entraînement 20.3 — Stabilité d'un système linéaire continu invariant.**

Qualifier de « stable » ou d' « instable » les systèmes décrits par les équations différentielles suivantes. Les signaux $s$, $r$ et $v$ sont les signaux de sortie des systèmes étudiés tandis que le signal $e$ est un signal d'entrée. Toute autre notation renvoie à des constantes strictement positives.

a) $\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = \omega_0^2 s$ .....

b) $\tau \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s = -e$ .....

$\dfrac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - \omega_0^2 r = -g\cos\theta$ si $\theta > \pi/2$ .....

$\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}(1 - H_0 A)\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 e$ si $H_0 A \leqslant 1$ .....

$\dfrac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{1}{LC}\left(RC - \dfrac{L}{r}\right)\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{LC}\left(1 - \dfrac{R}{r}\right)v = 0$ si $R > r$ et $R < \dfrac{L}{rC}$ .....

**Entraînement 20.4 — Continuité (I).**

On considère le circuit ci-contre. L'interrupteur $K$ est ouvert depuis très longtemps. On le ferme à l'instant $t = 0$.

Trois étudiants comparent leurs analyses de ce circuit à l'instant $t = 0^-$, l'instant $t = 0^+$ et lorsque $t \to +\infty$.

a) À $t = 0^-$, parmi les trois propositions ci-dessous, laquelle est correcte ? .....

| Étudiant ⓐ : | Étudiant ⓑ : | Étudiant ⓒ : |
|---|---|---|
| $i(0^-) = 0$ | $i(0^-) = E/R$ | $i(0^-) = 0$ |
| $i_R(0^-) = 0$ | $i_R(0^-) = 0$ | $i_R(0^-) = 0$ |
| $i_C(0^-) = 0$ | $i_C(0^-) = E/R$ | $i_C(0^-) = 0$ |
| $u_C(0^-) = 0$ | $u_C(0^-) = 0$ | $u_C(0^-) = E$ |

b) À $t = 0^+$, parmi les trois propositions ci-dessous, laquelle est correcte ? .....

| Étudiant ⓐ : | Étudiant ⓑ : | Étudiant ⓒ : |
|---|---|---|
| $i(0^+) = 0$ | $i(0^+) = E/R$ | $i(0^+) = 0$ |
| $i_R(0^+) = E/R$ | $i_R(0^+) = 0$ | $i_R(0^+) = E/R$ |
| $i_C(0^+) = -E/R$ | $i_C(0^+) = E/R$ | $i_C(0^+) = 0$ |
| $u_C(0^+) = E$ | $u_C(0^+) = 0$ | $u_C(0^+) = E$ |

c) À $t = +\infty$, parmi les trois propositions ci-dessous, laquelle est correcte ? .....

| Étudiant ⓐ : | Étudiant ⓑ : | Étudiant ⓒ : |
|---|---|---|
| $i(\infty) = E/(R+r)$ | $i(\infty) = E/R$ | $i(\infty) = E/r$ |
| $i_R(\infty) = E/(R+r)$ | $i_R(\infty) = E/R$ | $i_R(\infty) = E/R$ |
| $i_C(\infty) = 0$ | $i_C(\infty) = 0$ | $i_C(\infty) = E/r - E/R$ |
| $u_C(\infty) = \dfrac{R}{R+r}E$ | $u_C(\infty) = 0$ | $u_C(\infty) = E$ |

**Entraînement 20.5 — Continuité (II).**

On considère le circuit ci-dessous.

L'interrupteur $K$ est ouvert depuis très longtemps. On le ferme à l'instant $t = 0$.

Trois étudiants comparent leurs analyses de ce circuit :

- à l'instant $t = 0^-$,
- à l'instant $t = 0^+$
- et lorsque $t \to +\infty$.

a) À $t = 0^-$, parmi les trois propositions ci-dessous, laquelle est correcte ? .....

| Étudiant ⓐ : | Étudiant ⓑ : | Étudiant ⓒ : |
|---|---|---|
| $i(0^-) = E_1/2R$<br>$i_1(0^-) = E_1/2R$<br>$i_2(0^-) = 0$ | $i(0^-) = E_1/R$<br>$i_1(0^-) = E_1/R$<br>$i_2(0^-) = E/R$ | $i(0^-) = E_1/2R$<br>$i_1(0^-) = 0$<br>$i_2(0^-) = 0$ |

b) À $t = 0^+$, parmi les trois propositions ci-dessous, laquelle est correcte ? .....

| Étudiant ⓐ : | Étudiant ⓑ : | Étudiant ⓒ : |
|---|---|---|
| $i(0^+) = E_1/R$<br>$i_1(0^+) = \dfrac{4E_1 - 2E_2}{3R}$<br>$i_2(0^+) = \dfrac{2E_2 - E_1}{3R}$ | $i(0^+) = E_1/2R$<br>$i_1(0^+) = E_1/4R$<br>$i_2(0^+) = E_1/4R$ | $i(0^+) = E_1/2R$<br>$i_1(0^+) = \dfrac{3E_1 - 2E_2}{4R}$<br>$i_2(0^+) = \dfrac{2E_2 - E_1}{4R}$ |

c) À $t = +\infty$, parmi les trois propositions ci-dessous, laquelle est correcte ? .....

| Étudiant ⓐ : | Étudiant ⓑ : | Étudiant ⓒ : |
|---|---|---|
| $i(\infty) = \dfrac{E_1 + E_2}{3R}$<br>$i_1(\infty) = E_1/3R$<br>$i_2(\infty) = E_2/3R$ | $i(\infty) = \dfrac{E_1 + E_2}{2R}$<br>$i_1(\infty) = E_1/2R$<br>$i_2(\infty) = E_2/2R$ | $i(\infty) = \dfrac{E_1 + E_2}{3R}$<br>$i_1(\infty) = \dfrac{2E_1 - E_2}{3R}$<br>$i_2(\infty) = \dfrac{2E_2 - E_1}{3R}$ |

# Régimes oscillants forcés

**Entraînement 20.6 — Qui est-ce (I) ?**

Un étudiant a mesuré la tension et l'intensité électrique traversant un dipôle dont les mesures sont représentées ci-dessous.

Un peu étourdi, il a oublié si ces courbes correspondent à celles mesurées aux bornes d'un condensateur ou d'une bobine.

Aidez-le à le retrouver !

a) Quelle est l'amplitude de l'intensité ? .....

b) Quelle est l'amplitude de la tension ? .....

c) Quelle est la fréquence des signaux ? .....

d) Comment est la tension par rapport à l'intensité électrique ?

(a) en avance (b) en retard

.....

e) Le déphasage de la tension par rapport à l'intensité vaut :

(a) $-\dfrac{\pi}{2}$ (b) $+\dfrac{\pi}{2}$ (c) $-\pi$ (d) $+\pi$

.....

f) Le dipôle étudié est alors :

(a) une bobine d'impédance $\mathrm{j}L\omega$

(b) un condensateur d'admittance $\mathrm{j}C\omega$

.....

g) Le cas échéant déterminer la valeur de la capacité ou de l'inductance de ce dipôle.

*On prendra* $\dfrac{1}{\pi} \simeq 0{,}32$.

.....

## Entraînement 20.7 — Qui est-ce (II) ?

Un étudiant a mesuré la tension et l'intensité électrique traversant un dipôle dont les mesures sont représentées ci-contre.

Un peu étourdi, il a oublié si ces courbes correspondent à celles mesurées aux bornes d'un condensateur ou d'une bobine.

Aidez-le à le retrouver !

a) Comment est la tension par rapport à l'intensité électrique ?

(a) en avance (b) en retard

b) Le déphasage de la tension par rapport à l'intensité électrique vaut :

(a) $-\dfrac{\pi}{2}$ (b) $+\dfrac{\pi}{2}$ (c) $-\pi$ (d) $+\pi$

c) Le dipôle étudié est donc :

(a) une bobine d'impédance $\mathrm{j}L\omega$ (b) un condensateur d'admittance $\mathrm{j}C\omega$

d) Le cas échéant déterminer la valeur de la capacité ou de l'inductance de ce dipôle.

*On prendra* $\dfrac{1}{2\pi} \simeq 16$.

## Entraînement 20.8 — Caractéristiques d'un montage RL (I).

On considère l'association de dipôles ci-contre.

a) L'impédance de cette association est de la forme :

(a) $\underline{Z} = \dfrac{R + \mathrm{j}L\omega}{\mathrm{j}LR\omega}$ (b) $\underline{Z} = R + \mathrm{j}L\omega$ (c) $\underline{Z} = R + \dfrac{1}{\mathrm{j}L\omega}$

On note $U_0$ et $I_0$ les amplitudes respectives de la tension $u(t)$ et de l'intensité électrique $i(t)$. On note $\varphi$ le déphasage de la tension par rapport à l'intensité électrique (c'est l'argument de $\underline{Z}$).

b) Les grandeurs $L$ et $R$ vérifient le système :

(a) $\begin{cases} \dfrac{R^2 + (L\omega)^2}{(LR\omega)^2} = \left(\dfrac{U_0}{I_0}\right)^2 \\ \dfrac{L\omega}{R} = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} + \varphi\right) \end{cases}$ (b) $\begin{cases} R^2 + \dfrac{1}{(L\omega)^2} = \left(\dfrac{U_0}{I_0}\right)^2 \\ \dfrac{1}{RL\omega} = \tan(\varphi) \end{cases}$ (c) $\begin{cases} R^2 + (L\omega)^2 = \left(\dfrac{U_0}{I_0}\right)^2 \\ \dfrac{L\omega}{R} = \tan(\varphi) \end{cases}$

## Entraînement 20.9 — Caractéristiques d'un montage RL (II).

La tension $u(t)$ et l'intensité électrique $i(t)$ de l'association série d'une bobine et d'un conducteur ohmique sont mesurées expérimentalement (courbes ci-contre). L'impédance de ce montage est

$$\underline{Z} = R + \mathrm{j}L\omega.$$

On peut montrer que $R$, $L$ et $\omega$ vérifient le système :

$$\begin{cases} R^2 + (L\omega)^2 = \left(\dfrac{U_0}{I_0}\right)^2 \\ \dfrac{L\omega}{R} = \tan(\varphi), \end{cases}$$

où $U_0$ et $I_0$ sont respectivement les amplitudes de la tension $u(t)$ et de l'intensité électrique $i(t)$ tandis que $\varphi$ est le déphasage de la tension par rapport à l'intensité électrique.

a) La pulsation des signaux est :

(a) $8{,}98 \times 10^2\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ (b) $8{,}98 \times 10^3\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ (c) $8{,}98 \times 10^4\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$

.....

b) Quelle est la valeur du décalage temporel $\delta t$ entre l'extinction de la tension et celle de l'intensité électrique ?

(a) $-0{,}1\,\mathrm{ms}$ (b) $-0{,}2\,\mathrm{ms}$ (c) $0{,}1\,\mathrm{ms}$ (d) $0{,}2\,\mathrm{ms}$

.....

c) Le déphasage $\varphi$ de la tension par rapport à l'intensité électrique vaut :

(a) $\dfrac{\pi}{3}$ rad (b) $-\dfrac{\pi}{3}$ rad (c) $\dfrac{2}{7}\pi$ rad (d) $-\dfrac{2}{7}\pi$ rad

.....

En résolvant le système, déterminer :

d) la valeur de la résistance $R$ .....

e) la valeur de l'inductance $L$ .....

## Entraînement 20.10 — Équivalents.

On considère les trois fonctions de transfert suivantes :

$$\underline{H_1}(\mathrm{j}x) = \frac{4}{1 - x^2 + 3\mathrm{j}x}, \quad \underline{H_2}(\mathrm{j}x) = \frac{1 + 2\mathrm{j}x}{1 - 3\mathrm{j}x} \quad \text{et} \quad \underline{H_3}(\mathrm{j}x) = \frac{2 + 3\mathrm{j}x}{1 + 5\mathrm{j}\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}.$$

Pour chacune des fonctions de transfert, trouver un équivalent de la forme $Ax^n$ au module des fonctions de transfert, où $A \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$ sont deux constantes à déterminer.

a) $\left|\underline{H_1}(\mathrm{j}x)\right|$ pour $x \to 0$ .....

b) $\left|\underline{H_1}(\mathrm{j}x)\right|$ pour $x \to \infty$ ....

c) $\left|\underline{H_2}(\mathrm{j}x)\right|$ pour $x \to 0$ .....

d) $\left|\underline{H_2}(\mathrm{j}x)\right|$ pour $x \to \infty$ ....

e) $\left|\underline{H_3}(\mathrm{j}x)\right|$ pour $x \to 0$ .....

f) $\left|\underline{H_3}(\mathrm{j}x)\right|$ pour $x \to \infty$ ....

# Analyse spectrale

**Entraînement 20.11 — DSF d'un signal triangulaire.**

L'oscillogramme d'un signal triangulaire $u(t)$, d'amplitude $U$ et de période $T$, est représenté ci-dessous.

Par lecture graphique, déterminer les propriétés du signal :

a) $T$ .....

b) $U$ .....

c) Quelle est la valeur de la fréquence fondamentale $f$ du signal ? .....

d) Laquelle des propositions ci-dessous décrit le signal triangulaire sur l'intervalle $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ ?

(a) $u(t) = \begin{cases} U(1+4t/T) & \text{si } t \in [0, T/2] \\ U(1-4t/T) & \text{si } t \in [-T/2, 0] \end{cases}$

(b) $u(t) = \begin{cases} U(1-4t/T) & \text{si } t \in [0, T/2] \\ U(1+4t/T) & \text{si } t \in [-T/2, 0] \end{cases}$

(c) $u(t) = \begin{cases} U(1-2t/T) & \text{si } t \in [0, T/2] \\ U(1+2t/T) & \text{si } t \in [-T/2, 0] \end{cases}$

(d) $u(t) = \begin{cases} U(1+2t) & \text{si } t \in [0, T/2] \\ U(1-2t) & \text{si } t \in [-T/2, 0] \end{cases}$

.....

Le signal triangulaire peut se décomposer en série de Fourier :

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n f\, t) + b_n \sin(2\pi n f\, t),$$

avec $a_0$ la moyenne de $u(t)$, $a_n$ et $b_n$ les coefficients des harmoniques définis par :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\cos(n\, 2\pi f\, t)\ \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\sin(n\, 2\pi f\, t)\ \mathrm{d}t.$$

e) Que vaut $a_0$ ? .....

Ici, il est admis que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 0$ et

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} u(t)\cos(2\pi f n\, t)\ \mathrm{d}t.$$

f) À l'aide d'une intégration par parties, déterminer lesquelles des propositions suivantes sont correctes :

(a) $a_n = 0$ si $n$ pair

(b) $a_n = \frac{8U}{\pi^2}\frac{1}{n^2}$ si $n$ pair

(c) $a_n = 0$ si $n$ impair

(d) $a_n = \frac{8U}{\pi^2}\frac{1}{n^2}$ si $n$ impair

.....

g) Lequel des spectres ci-dessous correspond au spectre en amplitude du signal triangulaire ?

.....

**Entraînement 20.12 — Spectre d'un signal carré.**

L'oscillogramme d'un signal carré $s(t)$, de moyenne $s_0$, d'amplitude $S_\mathrm{m}$ et de période $T$, est représenté ci-contre.

Par lecture graphique, déterminer les propriétés du signal :

a) $T$ .....

b) $s_0$ .....

c) $S_\mathrm{m}$ .....

d) Quelle est la valeur de la fréquence fondamentale $\nu$ du signal ? .....

Le signal carré peut se décomposer en série de Fourier :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{c_n}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\,2\pi\nu\,t}\,,$$

avec $\underline{c_n}$ les coefficients complexes des harmoniques définis par :

$$\underline{c_n} = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\,2\pi\nu\,t}\,\mathrm{d}t \quad \text{pour } n \in \mathbb{Z}.$$

e) À l'aide de la définition de la valeur moyenne, déterminer la valeur de $\underline{c_0}$ .....

f) En remarquant que $s(t \in [T/2, T]) = 0$, déterminer lesquelles des propositions suivantes sont correctes pour $n \neq 0$ :

(a) $\underline{c_n} = 0$ si $n$ impair

(b) $\underline{c_n} = \dfrac{2S_\mathrm{m}}{\mathrm{i}\pi}\dfrac{1}{n}$ si $n$ impair

(c) $\underline{c_n} = 0$ si $n$ pair

(d) $\underline{c_n} = \dfrac{2S_\mathrm{m}}{\mathrm{i}\pi}\dfrac{1}{n}$ si $n$ pair

.....

g) Lequel des spectres ci-dessous correspond au spectre en amplitude du signal carré ? ....

## Entraînement 20.13 — Fréquence d'échantillonnage.

L'acquisition du signal $s(t)$ ci-dessous est effectuée en l'échantillonnant en $N$ points équidistants répartis sur un intervalle $[0, t_{\max}]$.

a) Quelle est la fréquence $f$ du signal ? .....

On effectue cette acquisition sur trois durées $t_{\max}$ différentes.

Les spectres ainsi obtenus, similaires mais pas parfaitement identiques, sont représentés ci-dessous.

(a) $N = 500$ ; $T_{\max} = 30{,}0\,\text{s}$ (b) $N = 500$ ; $T_{\max} = 40{,}0\,\text{s}$ (c) $N = 500$ ; $T_{\max} = 52{,}0\,\text{s}$

Quelle est la fréquence d'échantillonnage $f_e = \dfrac{N}{T_{\max}}$ dans les conditions expérimentales du spectre :

b) (a) ..... c) (b) ..... d) (c) .....

D'après l'analyse de Fourier, un signal périodique se décompose en une somme de signaux sinusoïdaux dont les fréquences sont des multiples de la fréquence du fondamental, fréquence du signal.

e) Lequel des spectres (a, b ou c) vérifie cette propriété ? .....

f) Comment s'appelle l'effet responsable des différences entre ces spectres ? .....

g) Quelle condition doit être remplie pour ne pas observer ce phénomène ?

a) $f_e \geqslant f$

b) $f_e \geqslant 2f$

c) $f_e \geqslant nf$ avec $n$ l'harmonique qu'on souhaite observer.

d) $f_e \geqslant 2nf$ avec $n$ l'harmonique qu'on souhaite observer.

.....

**Entraînement 20.14 — Filtrage numérique.**

Un filtre, d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$, possède une fonction de transfert est $\underline{H} = \dfrac{H_0}{1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}}$ avec $H_0 > 0$ un terme identifié au gain statique et $\omega_0$ la pulsation caractéristique du filtre.

a) À l'aide d'une analyse qualitative de la fonction de transfert, déterminer la nature et l'ordre du filtre :

a) passe-bas d'ordre 1

b) passe-bas d'ordre 2

c) passe-haut d'ordre 1

d) passe-haut d'ordre 2

e) passe-bande d'ordre 2

f) coupe-bande d'ordre 2

.....

b) Utiliser la fonction de transfert pour déterminer l'équation différentielle liant $e$ et $s$.

.....

Une chaîne d'acquisition permet de numériser respectivement les signaux analogiques $e$ et $s$ en des signaux numériques $e_n$ et $s_n$ définis par

$$e_n = e(t = t_n) \quad \text{et} \quad s_n = s(t = t_n) \quad \text{où} \quad t_n = nT_\mathrm{e}$$

avec $T_\mathrm{e}$ la période d'échantillonnage et $n$ le numéro d'un échantillon.

c) En approximant la dérivée par un taux de variation entre $t_{n+1}$ et $t_n$ (schéma d'Euler explicite), laquelle des relations de récurrence proposées ci-dessous permet de calculer la suite $s_n$ pour tout $n$ si $s_0$ est connue ?

a) $s_n = (1 - T_\mathrm{e}\omega_0)s_{n+1} + T_\mathrm{e}\omega_0 H_0 e_{n+1}$

b) $s_{n+1} = (1 - T_\mathrm{e}\omega_0)s_n + T_\mathrm{e}\omega_0 H_0 e_n$

c) $s_{n+1} = s_n + T_\mathrm{e}\omega_0 H_0 e_{n+1}$

d) $s_{n+1} = s_n + T_\mathrm{e}\omega_0 H_0 e_n$

.....

## Entraînement 20.15 — Démodulation d'amplitude.

Le signal $u(t)$ modulé en amplitude est émis sous forme d'onde radio contenant les fréquences $f_\mathrm{p}$, $f_\mathrm{p}+f_\mathrm{m}$ et $f_\mathrm{p}-f_\mathrm{m}$. Une antenne capte ce signal, mais également du bruit contenant les fréquences $f_\mathrm{a}$, $f_\mathrm{b}$, $f_\mathrm{c}$, $f_\mathrm{d}$ et $f_\mathrm{e}$. Le spectre du signal $u_1(t)$ généré par l'antenne est tracé ci-dessous.

Le signal $u_1(t)$ capté est envoyé successivement au travers de :

- un pré-amplificateur de gain $A = 10$,
- un filtre passe-bande idéal de bande-passante $[175\,\mathrm{kHz}, 225\,\mathrm{kHz}]$,
- un mélangeur produisant un signal $u_4(t) = ku_3(t) \times u_3'(t)$ avec $k = 0{,}1\,\mathrm{V}^{-1}$ et $u_3'(t) = U_\mathrm{p}\cos(2\pi f_\mathrm{p} t)$,
- un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $f_\mathrm{c} = 60\,\mathrm{kHz}$.

Les spectres des signaux $u_2(t)$, $u_3(t)$, $u_3'(t)$, $u_4(t)$ et $u_5(t)$ sont représentés ci-dessous. Les titres des axes ont été retirés pour plus de clarté.

Attribuer un des spectres proposés ci-dessus à chaque signal :

a) $u_2(t)$ ..... ☐ c) $u_3'(t)$ ..... ☐ e) $u_5(t)$ ..... ☐

b) $u_3(t)$ ..... ☐ d) $u_4(t)$ ..... ☐

## Entraînement 20.16 — Figure de battements, modulation d'amplitude.

Une station de radio émet un signal modulé en amplitude :

$$u(t) = U_\mathrm{p}\cos(2\pi f_\mathrm{p} t) \times \big(1 + m\cos(2\pi f_\mathrm{m} t)\big)$$

avec $f_\mathrm{m}$ la fréquence du message sonore transporté par la porteuse, de fréquence $f_\mathrm{p}$ et d'amplitude $U_\mathrm{p}$, avec un taux de modulation $0 < m < 1$.

Numériquement, $f_\mathrm{p}$ est très grande devant $f_\mathrm{m}$ ; ainsi, $u(t)$ peut être vu comme un signal oscillant « rapidement » à la période $T_\mathrm{p}$ entre les enveloppes

$$u_+(t) = +U_\mathrm{p}[1 + m\cos(2\pi f_\mathrm{m} t)] \qquad \text{et} \qquad u_-(t) = -U_\mathrm{p}[1 + m\cos(2\pi f_\mathrm{m} t)],$$

des fonctions oscillant « lentement » à la période $T_\mathrm{m}$.

À l'aide d'une lecture graphique de l'oscillogramme, déterminer la valeur des grandeurs suivantes :

a) $T_\mathrm{m}$ ☐ b) $T_\mathrm{p}$ . ☐ c) $U_\mathrm{p}$ . ☐ d) $m$ . ☐

En déduire les fréquences caractéristiques du signal $u(t)$ modulé en amplitude :

e) $f_\mathrm{p}$ ..... ☐ f) $f_\mathrm{m}$ ..... ☐

**Réponses mélangées**

instable (b) (a) (b) 9,61 Hz $\frac{2}{3}x^0$ (c) 1 ms 333 Hz

10 kHz (a) B 0 2,56 mH $4x^{-2}$ 4 V (c) $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0 s = H_0\omega_0 e$

0,75 A 0,005 ms 0,6 (a) et (d) 10 V $1x^0$ (b) stable (d)

(b) et (c) $\frac{1}{2}$ (b) (c) (a) Repliement de spectre A 0,1 V

(a) (a) 0,1 V (c) (a) (b) 200 kHz D (a) $\frac{2}{5}x^1$

instable 1 Hz 0,1 V 20 ms (d) 12,5 Hz (a) (a) (a) $\frac{3}{5}x^0$

C stable 16,7 Hz 7 mH (a) 0 1 kHz 0 1,6 $\mu$F (b)

E 50 Ω 0,1 ms 50 Hz (c) instable $4x^0$ (c) 2 V (b)

▶ Réponses et corrigés page 525

# ALI

**Prérequis**
Modèle de l'ALI idéal de gain infini. Impédances complexes.
Impédance d'entrée d'un quadripôle : $\underline{Z}_e = \dfrac{\underline{v}_e}{\underline{i}_e}$.

## Régime de fonctionnement

### Entraînement 21.1 — Circuit en régime linéaire.

Pour chacun des circuits ci-dessous, choisir la phrase qui convient.

(a) L'ALI fonctionne vraisemblablement en régime linéaire.
(b) L'ALI fonctionne vraisemblablement en régime saturé.
(c) On ne peut pas répondre.

a)

.....

b)

.....

c)

.....

d)

.....

# Loi des nœuds et pont diviseur de tension

**Entraînement 21.2 — Intensités sens dessus dessous.**

L'amplificateur linéaire intégré suivant est idéal et fonctionne en régime linéaire.

a) Exprimer la loi des nœuds au point D en fonction des intensités $i_1$, $i_2$ et $i_1'$.

.....

b) Exprimer la loi des nœuds au point D en fonction des tensions $u_1$, $u_2$, $u_1'$, des résistances $R_1$, $R_2$ et de la capacité $C_1$ du condensateur supérieur.

.....

c) Indiquer la relation entre les intensités $i_1$ et $i_2'$.

.....

d) En déduire l'expression de l'intensité $i_2'$ en fonction de $V_A$, $V_D$ et $R_1$ ainsi que de $C_2$ et $V_A$.

.....

**Entraînement 21.3 — Montage à plusieurs ALI.**

On considère le montage amplificateur d'instrumentation suivant, dans lequel tous les ALI sont considérés comme idéaux :

a) Pourquoi n'est-il pas intéressant d'écrire la loi des nœuds en B ?

(a) L'intensité de sortie de l'ALI est nulle.

(b) L'intensité de sortie de l'ALI est inconnue.

(c) La sortie de l'ALI est reliée à la masse.

.....

b) Exprimer la loi des nœuds en termes d'intensité au point A en fonction des courants donnés sur le schéma.

.....

c) En appliquant la loi d'Ohm, quelle égalité obtient-on ?

(a) $\dfrac{V_B - V_A}{R} + \dfrac{V_A}{R'} = 0$

(b) $\dfrac{V_A - V_B}{R} + \dfrac{V_A}{R'} = 0$

(c) $\dfrac{v_1 - v_s}{R} + \dfrac{V_C - V_A}{R'} = 0$

(d) $\dfrac{V_A - V_B}{R'} + \dfrac{V_A}{R} = 0$

.....

d) Exprimer la loi des nœuds en termes d'intensité au point C en fonction des courants donnés sur le schéma.

.....

e) En utilisant la loi d'Ohm, quelle égalité obtient-on ?

(a) $\dfrac{V_C - V_S}{R} + \dfrac{V_B - V_C}{R} = 0$

(b) $\dfrac{V_C - V_A}{2R} + \dfrac{V_C - V_S}{R} = 0$

(c) $2V_C = V_B + V_S$

(d) $\dfrac{V_C - V_S}{R} + \dfrac{V_C - V_B}{R} + \dfrac{V_C - V_A}{R} = 0$

.....

## Entraînement 21.4 — Oscillateur de Wien.

L'amplificateur linéaire intégré suivant est idéal et fonctionne en régime linéaire.

a) Le pont diviseur de tension du cadre de gauche permet d'écrire une relation entre $u_1$ et $u_s$. Écrire cette relation.

.....

b) Écrire la loi des nœuds en A.

.....

c) Exprimer $i_2$ en fonction de $u_e$ et $R$.

.....

d) Exprimer l'intensité $i_3$ en fonction de $u_e$ et $C$ .....

e) Écrire la loi des mailles vérifiée par la partie du droite du montage encadrée en pointillés.

.....

f) Dériver cette relations et donner la relation liant $\dfrac{du_e}{dt}$, $\dfrac{du_s}{dt}$, $i_1$, $\dfrac{di_1}{dt}$, $R$ et $C$.

.....

g) En déduire une équation différentielle liant $R$, $C$, $\dfrac{du_s}{dt}$, $\dfrac{d^2u_e}{dt^2}$, $\dfrac{du_e}{dt}$ et $u_e$.

.....

## Entraînement 21.5 — Montage sommateur inverseur.

L'amplificateur linéaire intégré suivant est idéal et fonctionne en régime linéaire.

a) Exprimer la loi des nœuds au point A en fonction des intensités $i_1$, $i_2$ et $i_3$.

.....

b) À l'aide de l'expression précédente, déterminer une relation liant les tensions $u_1$, $u_2$ et $u_s$ ainsi que les résistances $R_1$, $R_2$ et $R_3$.

.....

## Entraînement 21.6 — Montage soustracteur.

L'amplificateur linéaire intégré suivant est idéal et fonctionne en régime linéaire.

a) Donner la relation entre les intensités $i_1$ et $i_3$ .....

b) Donner la relation entre les intensités $i_2$ et $i_4$ .....

c) Exprimer le potentiel $V_+$ en fonction de $R_2$, $R_4$ et $u_2$, à l'aide d'un pont diviseur de tension.

.....

d) Exprimer le potentiel $V_-$ en fonction de $R_1$, $R_3$, $u_1$ et $u_s$, à l'aide d'un autre pont diviseur de tension.

.....

**Entraînement 21.7 — Impédance d'un dipôle.**

On considère le montage suivant dans lequel l'ALI est idéal et fonctionne en régime linéaire.

On se place en régime sinusoïdal forcé de pulsation $\omega$.

a) Exprimer la loi des nœuds au point A en fonction des courants donnés sur le schéma.

.....

b) Exprimer la loi des nœuds au point C en fonction des courants donnés sur le schéma.

.....

c) En écrivant la loi d'Ohm en complexes sur $R_2$ et $C_1$, en déduire une relation entre $v_e$, $V_B$, $V_C$, $i_e$, $C_1$, $R_2$ et $\omega$.

.....

On cherche désormais à établir l'expression de l'impédance d'entrée du montage. Pour cela, il faut simplifier l'équation obtenue.

d) Quelle(s) relation(s) supplémentaire(s) est-il alors intéressant d'utiliser ?

(a) La loi des nœuds en B

(b) La loi des nœuds en C

(c) $V_B = v_s$

(d) $V_B = V_C$

.....

e) Pourquoi n'est-il pas intéressant d'écrire la loi des nœuds en B ?

(a) Le point B est relié à la borne $\ominus$.

(b) Le courant $i_3$ est nul.

(c) Le courant $i_3$ est inconnu.

.....

# Filtrage

**Entraînement 21.8 — Étude d'un montage intégrateur.**

On considère le montage intégrateur ci-dessous. L'ALI est idéal et fonctionne en régime linéaire.

a) À l'aide d'une des propriétés de l'ALI idéal en régime linéaire, exprimer le potentiel $V_-$.

.....

b) Exprimer une relation entre $\underline{u_e}$ et $\underline{u_s}$ à l'aide d'une loi des nœuds en complexes au point A.

.....

c) En déduire l'expression de la fonction de transfert du montage $\underline{H} = \dfrac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}}$.

.....

d) Donner l'équation différentielle qui relie $u_e(t)$ et $u_s(t)$ .....

e) On envoie un signal créneau (en pointillés) en entrée du montage intégrateur.

Parmi les courbes de sortie (en traits pleins) suivantes, laquelle est compatible avec ce montage ?

.....

f) Exprimer l'impédance d'entrée $\underline{Z_e} = \dfrac{\underline{u_e}}{\underline{i_e}}$ du montage .....

## Entraînement 21.9 — Étude d'un montage dérivateur.

On considère le montage dérivateur ci-dessous. L'ALI est idéal et fonctionne en régime linéaire.

a) À l'aide d'une des propriétés de l'ALI idéal en régime linéaire, exprimer le potentiel $V_-$.

.....

b) Exprimer une relation entre $\underline{u_e}$ et $\underline{u_s}$ à l'aide d'une loi des nœuds en complexes au point A.

.....

c) En déduire l'expression de la fonction de transfert du montage $\underline{H} = \dfrac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}}$.

.....

d) Exprimer l'équation différentielle qui relie $u_e(t)$ et $u_s(t)$ .....

e) On envoie un signal triangulaire (en pointillés) en entrée du montage dérivateur.

Parmi les courbes de sortie (en traits pleins) suivantes, laquelle est compatible avec ce montage ?

.....

f) Exprimer l'impédance d'entrée $\underline{Z_e} = \dfrac{\underline{u_e}}{\underline{i_e}}$ du montage .....

**Entraînement 21.10 — Étude qualitative à hautes et basses fréquences (I).**

On considère le même montage que dans l'entraînement **21.7**, où l'ALI est considéré idéal et fonctionne en régime linéaire.

a) En modélisant le condensateur par un interrupteur ouvert ou fermé, à quel dipôle le montage est-il équivalent à basses fréquences ?

(a) $R_1$ (c) $C_1$
(b) $R_2$

.....

b) En modélisant le condensateur par un interrupteur ouvert ou fermé, à quel dipôle le montage est-il équivalent à hautes fréquences ?

(a) $R_1$ (c) $C_1$
(b) $R_2$

.....

**Entraînement 21.11 — Étude qualitative à hautes et basses fréquences (II).**

On considère maintenant le montage déphaseur suivant où l'ALI est toujours considéré idéal et fonctionne en régime linéaire.

a) En modélisant le condensateur par un interrupteur ouvert ou fermé, quelle relation lie $v_s$ et $v_e$ à basses-fréquences ?

.....

b) En modélisant le condensateur par un interrupteur ouvert ou fermé, quelle relation lie $v_s$ et $v_e$ à hautes fréquences ?

.....

**Entraînement 21.12 — Montage déphaseur.**

On considère un filtre déphaseur, contenant un ALI, pour lequel on donne l'expression de la fonction de transfert :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = \frac{1 - \mathrm{j}RC\omega}{1 + \mathrm{j}RC\omega}.$$

a) Quelle est la fonction de transfert équivalente à basses fréquences ? .....

b) Quelle est la fonction de transfert équivalente à hautes fréquences ? .....

c) Exprimer le gain du montage .....

d) Exprimer le déphasage du montage en fonction de $R$, $C$ et $\omega$ .....

On donne $R = 800\,\Omega$ et $C = 100\,\mathrm{nF}$.

e) On envoie une tension de la forme $v_e(t) = E\cos(\omega t)$ de fréquence $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = 2{,}0\,\mathrm{kHz}$ et $E = 1{,}0\,\mathrm{V}$. Donner l'expression de la tension de sortie $v_s$.

.....

# Autres entraînements

**Entraînement 21.13 — Impédance d'un dipôle.**

On revient à nouveau sur le montage ci-dessous où l'ALI est idéal et fonctionne en régime linéaire.

On donne l'expression de l'impédance d'entrée du dipôle :

$$\underline{Z}(\omega) = R_2 \frac{1 + \mathrm{j}R_1C_1\omega}{1 + \mathrm{j}R_2C_1\omega}.$$

a) À quel dipôle le montage est-il équivalent à basses fréquences ?

.....

b) À quel dipôle le montage est-il équivalent à hautes fréquences ?

.....

c) On peut mettre en évidence deux pulsations caractéristiques $\omega_1$ et $\omega_2$ dans cette impédance. Donner leurs expressions en fonction de $R_1$, $R_2$ et $C_1$.

.....

On considère que $R_1$ et $R_2$ sont telles que $\omega_1 \ll \omega_2$.

d) À quel dipôle le montage est-il équivalent à pulsations intermédiaires ($\omega_1 < \omega \ll \omega_2$) ?

(a) une résistance et une bobine en série
(b) une résistance et un condensateur en parallèle
(c) une résistance et un condensateur en série
(d) une résistance

.....

**Réponses mélangées**

(a) (b) $i_1 = i_2 + i_1'$ $V_- = \frac{R_3}{R_1+R_3}u_1 + \frac{R_1}{R_1+R_3}u_s$ $\frac{u_1}{R_1} = \frac{u_2}{R_2} + C_1\frac{\mathrm{d}u_1'}{\mathrm{d}t}$

$i_1 = i_2 + i_3$ $R_2$ (b) $\frac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{i_1}{C} + \frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}t}$ (c) $1$ $R$ (c)

$u_e(t) + RC\frac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}t}(t) = 0$ (b) $i_1 + i_2 = i_3$ (b) et (d) $\omega_1 = \frac{1}{R_1C_1}$ et $\omega_2 = \frac{1}{R_2C_1}$

$\frac{u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2} = -\frac{u_s}{R_3}$ $1$ $V_+ = \frac{R_4}{R_2+R_4}u_2$ $i_5 + i_6 = 0$ $0$ $v_s = v_e$

(a) $i_3 = C\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}t}$ $i_2 + i_4 = 0$ $LC\omega^2$ $\frac{\underline{u_e}}{R} + \mathrm{j}C\omega\underline{u_s} = 0$ (c) $\frac{1}{\mathrm{j}C\omega}$

$-1$ $i_C + i_1 = 0$ $\mathrm{j}C\omega\underline{u_e} + \frac{\underline{u_s}}{\mathrm{j}L\omega} = 0$ $i_2 = i_4$ $E\sin(\omega t)$ (c)

$0$ $-\frac{1}{\mathrm{j}RC\omega}$ $i_1 = -i_2'$ (a) $R_1$ $\frac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}t} = RC\frac{\mathrm{d}^2u_e}{\mathrm{d}t^2} + 3\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}t}\frac{1}{RC}u_e$

$u_s = u_R + u_C + u_e = Ri_1 + u_C + u_e$ $\frac{u_1}{R_1} = \frac{u_s}{R_1+R_2}$ (b) $i_2 = \frac{u_e}{R}$ (b)

$i_1 = i_3$ $-2\arctan(RC\omega)$ $v_s = -v_e$ $-i_e + \frac{v_e - V_B}{R_2} + \mathrm{j}\omega C_1(v_e - V_C) = 0$

(a) $u_s(t) = -LC\frac{\mathrm{d}^2u_e}{\mathrm{d}t^2}$ $i_e + i_C + i_2 = 0$ $\frac{V_D - V_A}{R_1} = i_2' = C_2\frac{\mathrm{d}V_A}{\mathrm{d}t}$

► Réponses et corrigés page 530

# ALI saturé

**Prérequis**
Modèle de l'ALI idéal de gain infini : courants de polarisation nuls, tension différentielle nulle en régime linéaire. Stabilité des systèmes linéaires (équation différentielle du deuxième ordre). Conditions suffisantes de saturation de l'ALI : absence de rétroaction ou rétroaction positive.

**Constantes utiles**

→ Gain de l'ALI : $\mu_0 \approx 10^5$

→ Tension de saturation de l'ALI : $V_{\text{sat}} = 15\,\text{V}$

→ Vitesse limite de balayage : $\left.\dfrac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t}\right|_{\text{lim}} \approx 10\,\text{V}/\mu\text{s}$

## Avant toute chose

**Entraînement 22.1 — ALI en régime saturé.**

Parmi les montages suivants, indiquer si l'ALI utilisé est en régime saturé de manière certaine.

a)

.....

b)

.....

c)

.....

# Utilisation du modèle du premier ordre

**Entraînement 22.2 — Modèle du premier ordre.**

Pour étudier la stabilité d'un montage à ALI, il faut passer par son modèle du premier ordre. On donne l'équation différentielle reliant le potentiel de sortie $s$ et ceux des deux entrées $v_+$ et $v_-$ :

$$\tau\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s = \mu_0(v_+ - v_-)$$

a) Écrire la fonction de transfert définie en régime harmonique par $\underline{\mu} = \dfrac{\underline{s}}{\underline{v_+} - \underline{v_-}}$.

.....

b) Identifier le type de filtre associé ; c'est un filtre...

(a) passe-bas
(b) passe-haut
(c) passe-bande
(d) coupe-bande

.....

c) Quelle est l'expression de la pulsation de coupure de ce filtre $\omega_c$ ? .....

d) Quelle est l'expression du gain statique de ce filtre $H_0$ ? .....

e) Quelle est la fonction de transfert équivalente du filtre à basses fréquences ?

.....

f) Quelle est la fonction de transfert équivalente du filtre à hautes fréquences ?

.....

g) Parmi les diagrammes de Bode suivants, lequel correspond à celui de $\underline{\mu}$ ?

*On a noté $x = \dfrac{\omega}{\omega_c}$ ; l'abréviation « Asy » correspond au diagramme asymptotique.*

(1)

(2)

(3)

.....

**Entraînement 22.3 — Stabilité de l'ALI d'un comparateur simple.**

On rappelle, pour les besoins de l'exercice, la fonction de transfert entre le potentiel de sortie $\underline{s}$ et l'entrée différentielle $\underline{v_+} - \underline{v_-}$ de l'ALI :

$$\underline{\mu} = \frac{\underline{s}}{\underline{v_+} - \underline{v_-}} = \frac{\mu_0}{1 + \mathrm{j}\omega\tau}.$$

a) Établir l'équation différentielle reliant $s$ à $e$ en régime linéaire.

.....

On considère une entrée nulle avant $t = 0$ et constante de valeur $E_0$ pour $t > 0$.

b) Quelle est l'expression de $s$ en régime permanent ?

(a) $\tau\mu_0 E_0$ (b) $0$ (c) $\mu_0 E_0$

.....

c) Cet ALI peut-il fonctionner en régime linéaire ? .....

**Entraînement 22.4 — Stabilité de l'ALI d'un comparateur à hystérésis.**

On rappelle, pour les besoins de l'exercice, la fonction de transfert entre le potentiel de sortie $\underline{s}$ et l'entrée différentielle $\underline{v_+} - \underline{v_-}$ de l'ALI :

$$\underline{\mu} = \frac{\underline{s}}{\underline{v_+} - \underline{v_-}} = \frac{\mu_0}{1 + \mathrm{j}\omega\tau}.$$

a) À l'aide d'une loi des nœuds appliquée à l'entrée non-inverseuse, déterminer laquelle de ces relations est valide.

(a) $\dfrac{v_+ - e}{R} + \dfrac{v_+ - s}{R'} = 0$ (c) $\dfrac{e}{R} + \dfrac{s}{R'} = 0$

(b) $e = s$

.....

b) Exprimer la tension différentielle $\varepsilon = v_+ - v_-$ .....

c) Établir l'équation différentielle reliant $s$ à $e$ en régime linéaire.

.....

d) Cet ALI peut-il fonctionner en régime linéaire ? .....

**Entraînement 22.5 — Stabilité de l'ALI du montage « résistance négative ».**

On rappelle, pour les besoins de l'exercice, la fonction de transfert entre le potentiel de sortie $\underline{s}$ et l'entrée différentielle $\underline{v_+} - \underline{v_-}$ de l'ALI :

$$\underline{\mu} = \frac{\underline{s}}{\underline{v_+} - \underline{v_-}} = \frac{\mu_0}{1 + \mathrm{j}\omega\tau}.$$

On considère le montage suivant :

a) À l'aide d'une loi des nœuds appliquée à l'entrée inverseuse, déterminer laquelle parmi les relations suivantes est valide.

(a) $v_- = e + s$

(b) $v_- = \dfrac{e+s}{R}$

(c) $v_- = \dfrac{e+s}{2}$

.....

b) À l'aide d'une loi des nœuds appliquée à l'entrée non-inverseuse, déterminer laquelle de ces relations est valide.

(a) $3v_+ = s$

(b) $\dfrac{v_+ - s}{R} + 2\dfrac{v_+ - e}{R} = 0$

(c) $3v_+ = e + s$

.....

c) Exprimer la tension différentielle $\varepsilon = v_+ - v_-$ .....

d) Établir l'équation différentielle reliant $s$ à $e$ en régime linéaire.

.....

e) Cet ALI peut-il fonctionner en régime linéaire ? .....

# Exploitation de caractéristiques

**Entraînement 22.6 — Condition de basculement (I).**

On considère le montage comparateur simple.

On rappelle que la saturation haute d'un ALI est caractérisée par un potentiel de sortie $s = V_{\text{sat}}$ et une tension différentielle $\varepsilon = v_+ - v_-$ positive. De même, la saturation basse d'un ALI est caractérisée par un potentiel de sortie $s = -V_{\text{sat}}$ et une tension différentielle $\varepsilon$ négative.

a) Exprimer $v_+$ en fonction de $e$ .....

b) En saturation haute, quelle condition sur $e$ assure de rester dans cet état de saturation ?

.....

c) En saturation basse, quelle condition sur $e$ assure de rester dans cet état de saturation ?

.....

d) Laquelle des deux caractéristiques suivantes correspond à celle du montage comparateur simple ?

.....

**Entraînement 22.7 — Condition de basculement (II).**

On considère le montage comparateur à hystérésis à double seuil. On rappelle que la saturation haute d'un ALI est caractérisée par un potentiel de sortie $s = V_{\text{sat}}$ et une tension différentielle $\varepsilon = v_+ - v_- > 0$. De même, la saturation basse d'un ALI est caractérisée par un potentiel de sortie $s = -V_{\text{sat}}$ et une tension différentielle $\varepsilon = v_+ - v_- < 0$.

a) Exprimer $v_+$ en fonction de $R$, $R'$, $s$ et $e$ .....

b) En saturation haute, quelle condition relie les paramètres $R$, $R'$, $e$, $V_{\text{sat}}$ et $v_{\text{réf}}$ ?

.....

c) En saturation basse, quelle condition relie les paramètres $R$, $R'$, $e$, $V_{\text{sat}}$ et $v_{\text{réf}}$ ?

.....

d) Laquelle des deux caractéristiques suivantes correspond à celle du montage comparateur à hystérésis à double-seuil ?

.....

**Entraînement 22.8 — Association caractéristiques/chronogrammes.**

On considère des montages à ALI fonctionnant en régime saturé. Les relations entre leurs tensions d'entrée $e$ et de sortie $s$ sont représentées sur les caractéristiques suivantes :

Associer un chronogramme à chacune des caractéristiques données ci-dessus.

a) .....

b) .....

c) .....

d) .....

e) .....

f) .....

# Approche expérimentale

**Entraînement 22.9 — Étude expérimentale du comparateur à hystérésis.**

On considère un montage comparateur à hystérésis dont le circuit est donné ci-contre. On rappelle que l'ALI bascule d'une saturation à l'autre lorsque la tension d'entrée atteint une valeur limite $\pm V_{\text{lim}}$ telle que :

$$V_{\text{lim}} = \frac{R}{R'} V_{\text{sat}},$$

où $V_{\text{sat}}$ est la tension de saturation positive de l'ALI.

On connaît $R = 100\,\Omega$ et on cherche à mesurer la valeur de $R'$.

Une première acquisition donne le chronogramme suivant :

- Échelle verticale :
  - ▷ pour $e(t)$ 1 carreau $\leftrightarrow$ 5 V
  - ▷ pour $s(t)$ 1 carreau $\leftrightarrow$ 15 V
- Échelle horizontale : 1 carreau $\leftrightarrow$ 10 µs.

a) Quelle est la valeur de la tension de saturation de l'ALI ? .....

b) Pour quelle valeur de la tension d'entrée l'état de saturation bascule-t-il ? .....

c) En déduire la valeur de $R'$ .....

Une deuxième acquisition donne le chronogramme suivant :

- Échelle verticale :
  - ▷ pour $e(t)$ 1 carreau $\leftrightarrow$ 1 V
  - ▷ pour $s(t)$ 1 carreau $\leftrightarrow$ 15 V
- Échelle horizontale : 1 carreau $\leftrightarrow$ 10 µs.

d) Pourquoi l'ALI reste-t-il bloqué en saturation haute ?

(a) La tension d'entrée n'atteint jamais la valeur $\pm V_{\text{sat}}$.

(b) La tension d'entrée n'est pas suffisante pour saturer en courant de sortie.

(c) La tension d'entrée n'atteint jamais la valeur $\pm V_{\text{lim}}$.

.....

## Entraînement 22.10 — Chronogrammes.

On considère le montage amplificateur inverseur ci-contre pour lequel les résistances valent $R_1 = 1{,}0\,\mathrm{k\Omega}$ et $R_2 = 10\,\mathrm{k\Omega}$ :

La loi entrée-sortie du montage est donnée par :

$$\frac{s}{e} = -\frac{R_2}{R_1}.$$

Ce montage est alimenté par une tension $e$ sinusoïdale d'amplitude $U$ et de fréquence $f$.

On considère les chronogrammes suivants :

(1)

(2)

(3)

a) Lequel de ces signaux ne présente pas de saturation ?

.....

Associer les chronogrammes précédents aux paramètres d'alimentation donnés ci-après.

b) $U = 1{,}0\,\mathrm{V}$ et $f = 1{,}0\,\mathrm{kHz}$

.....

c) $U = 2{,}0\,\mathrm{V}$ et $f = 1{,}0\,\mathrm{kHz}$

.....

d) $U = 1{,}0\,\mathrm{V}$ et $f = 10\,\mathrm{MHz}$

.....

On rappelle que plus un signal présente de discontinuités de tensions, plus son spectre est riche en hautes fréquences.

Associer les spectres suivants aux chronogrammes donnés précédemment.

e)

.....

f)

.....

g)

.....

**Réponses mélangées**

non (a) $\mu_0$ $v_+ = e$ (a) (2) $\frac{1}{\tau}$ (6) $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\mu_0}{6} + 1\right)\frac{s}{\tau} = \mu_0 \frac{e}{2\tau}$

15 V (c) (5) $\frac{eR' + sR}{R + R'}$ $\mu_0$ (a) (c) (3) 900 Ω

$\varepsilon = \frac{3e - s}{6}$ 2 V (3) non oui oui $e < v_{\text{réf}} \frac{R + R'}{R'} + V_{\text{sat}} \frac{R}{R'}$

$e > 0$ (3) (1) $-\mathrm{j}\mu_0 \frac{\omega_c}{\omega}$ (b) (a) $e > v_{\text{réf}} \frac{R + R'}{R'} - V_{\text{sat}} \frac{R}{R'}$ (4)

$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{R + R' - \mu_0 R}{R + R'} \frac{s}{\tau} = \mu_0 \frac{R'}{R + R'} \frac{e}{\tau}$ (1) (1) (c) (1) non (2)

$v_+ = \frac{R'e + Rs}{R + R'}$ oui $e < 0$ (2) (2) $\frac{\mu_0}{1 + \mathrm{j}\omega\tau}$ $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{\tau} = \frac{\mu_0 e}{\tau}$

► Réponses et corrigés page 535

# Oscillateurs électroniques

**Prérequis**
Propriétés de l'Amplificateur Linéaire Intégré (ALI) idéal en régime linéaire.

## Équations différentielles et complexes

La pulsation d'un signal sinusoïdal est notée $\omega$. Les grandeurs $\omega_0$, $\tau$, $R$, $L$, $C$ et $A$ sont des constantes.

**Entraînement 23.1 — Des équations complexes aux équations différentielles.**

Pour chacune des équations complexes suivantes, exprimer l'équation différentielle associée.

a) $\mathrm{j}\omega\underline{u} + \dfrac{\underline{u}}{\tau} = 0$

.....

b) $\dfrac{\mathrm{j}\omega}{\tau}\underline{u} + \omega_0^2\underline{u} + (\mathrm{j}\omega)^2\underline{u} = 0$

.....

c) $\mathrm{j}RC\omega\underline{u} + \omega_0^2\underline{u} + \omega^2\underline{u} = A$

.....

d) $\dfrac{1}{\omega_0\tau}\underline{u} - \mathrm{j}\dfrac{\omega_0}{\omega}\underline{u} + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}\underline{u} = A$

.....

**Entraînement 23.2 — Des équations différentielles aux équations complexes.**

Pour chacune des équations différentielles suivantes, exprimer l'équation complexe associée.

a) $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{i}{RC}$

.....

b) $\dfrac{1}{\tau}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L^2C^2i - \dfrac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} = A$

.....

## Conditions d'oscillations

**Entraînement 23.3 — Type de filtre.**

a) Pour réaliser un oscillateur quasi-sinusoïdal, quel filtre faut-il utiliser préférentiellement ?

(a) passe-haut (c) passe-bande (e) peu importe
(b) passe-bas (d) coupe-bande (f) aucun ne convient

.....

b) Avec l'aide de quel autre montage ce filtre doit-il être bouclé ?

(a) comparateur à Hystérésis (c) passe-bande (e) amplificateur
(b) passe-bas (d) filtre passe-haut (f) aucun ne convient

.....

**Entraînement 23.4 — Stabilité.**

On considère des systèmes décrits par les équations différentielles suivantes. Les constantes $\omega_0$, $\tau$ et $Q$ sont réelles positives. Indiquer dans chaque cas si l'équation décrit un système stable ou instable.

a) $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u}{\tau} = 0$

(a) stable
(b) instable

b) $-\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u}{\tau} = 0$

(a) stable
(b) instable

c) $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = 0$

(a) stable
(b) instable

d) $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} - \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = 0$

(a) stable
(b) instable

**Entraînement 23.5 — Critère d'oscillations sinusoïdales (critère de Barkhausen).**

On considère un oscillateur constitué d'un filtre passe-bande et d'un amplificateur bouclés l'un sur l'autre.

La fonction de transfert de l'amplificateur est $\underline{H_\mathrm{a}} = A$ et celle du filtre est $\underline{H_\mathrm{f}} = \dfrac{H_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$.

L'équation différentielle associée s'écrit alors : $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}(1 - H_0A)\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = 0$.

a) Pour que des oscillations apparaissent, indiquer l'état que doit avoir le montage bouclé.

(a) stable (b) instable

b) Indiquer la condition pratique de démarrage des oscillations.

(a) $H_0A > 1$ (b) $H_0A = 1$ (c) $H_0A < 1$

c) Que vaut alors la pulsation des oscillations si celles-ci sont quasi-sinusoïdales ?

(a) $\omega_0(1 - H_0A)$ (b) $\dfrac{\omega_0(1 - H_0A)}{Q}$ (c) $\omega_0$

d) Quelles sont les conditions pour que le système soit le siège d'oscillations **parfaitement** sinusoïdales ?

(a) $H_0A > 1$ et $\omega = \omega_0$
(b) $H_0A = 1$ et $\omega = \omega_0$
(c) $H_0A < 1$ et $\omega = \omega_0$
(d) $H_0A > 1$ et $\omega \neq \omega_0$
(e) $H_0A = 1$ et $\omega \neq \omega_0$
(f) $H_0A < 1$ et $\omega \neq \omega_0$

**Entraînement 23.6 — Chaîne de rétroaction.**

On considère le montage ci-contre.

Pour chaque affirmation, répondre par « vrai » ou « faux ».

a) $\underline{u}_s = \underline{A}\,\underline{u}_e$ et $\underline{u}_e = \underline{B}\,\underline{u}_s$ .....

b) $\underline{u}_e = \underline{A}\,\underline{u}_s$ et $\underline{u}_s = \underline{B}\,\underline{u}_e$ .....

Le critère de Barkhausen correspond à la limite de la convergence et de la divergence des oscillations.

On en déduit un gain de boucle $\underline{AB}$ qui doit alors être égal à l'unité.

c) Parmi les propositions suivantes, indiquer celle qui est correcte.

(a) $|\underline{A}||\underline{B}| = 0$ et $\arg(\underline{A}) + \arg(\underline{B}) \equiv 0\ [2\pi]$

(b) $|\underline{A}||\underline{B}| = 1$ et $\arg(\underline{A}) + \arg(\underline{B}) \equiv 0\ [2\pi]$

(c) $|\underline{A}||\underline{B}| = 1$ et $\arg(\underline{A}) \times \arg(\underline{B}) \equiv 0\ [2\pi]$

(d) $|\underline{A}||\underline{B}| = 0$ et $\arg(\underline{A}) \times \arg(\underline{B}) \equiv 0\ [2\pi]$

.....

# Oscillateur à pont de Wien

**Entraînement 23.7 — Oscillateur à pont de Wien.**

a) Pour observer des oscillations avec ce circuit, comment l'ALI doit-il fonctionner ?

(a) en régime linéaire

(b) en régime saturé

(c) alternativement en régime linéaire et saturé

.....

b) Le pont diviseur de tension du cadre de gauche permet d'écrire une relation entre $u_1$ et $u_s$.

Écrire cette relation en posant $A = \dfrac{R_1 + R_2}{R_1}$ .....

c) Quelle est l'impédance équivalente $\underline{Z_1}$ du système $\{R - C\}$ série situé entre S et A ?

(a) $R + \underline{Z_C}$ (b) $\dfrac{R\underline{Z_C}}{R + \underline{Z_C}}$ (c) $\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{\underline{Z_C}}$ (d) $\dfrac{1}{R + \underline{Z_C}}$

.....

d) Quelle est l'impédance équivalente $\underline{Z_2}$ du système $\{R-C\}$ série parallèle situé entre AE et la masse ?

ⓐ $R+\underline{Z_C}$ ⓑ $\dfrac{R\underline{Z_C}}{R+\underline{Z_C}}$ ⓒ $\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{\underline{Z_C}}$ ⓓ $\dfrac{1}{R+\underline{Z_C}}$

.....

e) En utilisant des impédances équivalentes $\underline{Z_1}$ et $\underline{Z_2}$, déterminer le rapport $\dfrac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}}$ en fonction de $\underline{Z_C}$ et $R$.

.....

f) Parmi les équations suivantes, déterminer celle qui est vérifiée par $u_s$.

ⓐ $\left[(\mathrm{j}\omega)^2-\dfrac{1}{R^2C^2}+\dfrac{\mathrm{j}\omega}{RC}(3-A)\right]\underline{u_s}=0$

ⓑ $\left[(\mathrm{j}\omega)^2+\dfrac{1}{R^2C^2}-\dfrac{\mathrm{j}\omega}{RC}(3-A)\right]\underline{u_s}=0$

ⓒ $\left[(\mathrm{j}\omega)^2-\dfrac{1}{R^2C^2}-\dfrac{\mathrm{j}\omega}{RC}(3-A)\right]\underline{u_s}=0$

ⓓ $\left[(\mathrm{j}\omega)^2+\dfrac{1}{R^2C^2}+\dfrac{\mathrm{j}\omega}{RC}(3-A)\right]\underline{u_s}=0$

.....

g) Transposer l'équation complexe précédente et en déduire une équation différentielle portant sur $u_s(t)$.

.....

**Entraînement 23.8 — Conditions d'oscillations.**

Pour l'oscillateur à pont de Wien précédent, on donne l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2u_s}{\mathrm{d}t^2}+\frac{3-A}{RC}\frac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{R^2C^2}u_s=0.$$

a) Indiquer la condition théorique pour obtenir des oscillations sinusoïdales.

ⓐ $A=3$ ⓑ $A<3$ ⓒ $A>3$

.....

b) Dans ce cas, indiquer la fréquence de ces oscillations sinusoïdales.

ⓐ $\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{(3-A)}{RC}}$ ⓒ $\dfrac{RC}{2\pi(3-A)}$ ⓔ $\dfrac{1}{2\pi RC}$

ⓑ $\dfrac{(3-A)}{2\pi RC}$ ⓓ $\dfrac{2\pi(3-A)}{RC}$ ⓕ $\dfrac{1}{2\pi\sqrt{RC}}$

.....

c) Si $A<3$, indiquer le comportement ultérieur.

ⓐ oscillations amorties

ⓑ saturation

ⓒ oscillations sinusoïdales

.....

d) Si $A>3$, indiquer le comportement ultérieur.

ⓐ oscillations amorties

ⓑ saturation

ⓒ oscillations sinusoïdales

.....

# Oscillateurs à relaxation

**Entraînement 23.9 — Multivibrateur astable.**

Dans le circuit ci-contre, l'amplificateur linéaire intégré (ALI) est supposé idéal.

a) *A priori*, quel est le régime de fonctionnement de l'ALI ?

(a) régime linéaire
(b) régime saturé
(c) impossible de répondre

.....

Supposons que l'ALI fonctionne en régime saturé, avec à l'instant initial $t = 0$, $u_s = V_{sat}$.

b) Exprimer la tension $u_1$ en fonction des résistances $R_1$, $R_2$ et de la tension de saturation $V_{sat}$ .....

c) Écrire la relation entre l'intensité $i$ et la tension $u_C$ .....

d) Écrire la relation entre l'intensité $i$, les tensions $u_C$ et $V_{sat}$ et la résistance $R$.

.....

e) Déduire des deux relations précédentes, l'équation différentielle liant $R$, $C$, $u_C$ et $V_{sat}$.

(a) $\dfrac{du_C}{dt} - \dfrac{u_C}{RC} = \dfrac{V_{sat}}{RC}$
(b) $\dfrac{du_C}{dt} - \dfrac{u_C}{RC} = -\dfrac{V_{sat}}{RC}$
(c) $\dfrac{du_C}{dt} + \dfrac{u_C}{RC} = -\dfrac{V_{sat}}{RC}$
(d) $\dfrac{du_C}{dt} + \dfrac{u_C}{RC} = \dfrac{V_{sat}}{RC}$

.....

f) Quelle est la solution de l'équation homogène (sans second membre), avec $A$ constante ?

(a) $u_C = A\exp(-RCt)$
(b) $u_C = A\exp(RCt)$
(c) $u_C = A\exp\left(-\dfrac{t}{RC}\right)$
(d) $u_C = A\exp\left(\dfrac{t}{RC}\right)$

.....

g) Que dire de la solution particulière de l'équation ?

(a) Elle est nulle.
(b) C'est une constante.
(c) C'est une variable.
(d) On ne peut pas savoir.

.....

h) Supposons qu'à l'instant initial $t = 0$, le condensateur soit déchargé. Indiquer son comportement.

(a) Il se charge.
(b) Il se décharge.
(c) Rien ne se passe.

.....

i) Comment évolue la tension différentielle d'entrée $\varepsilon = V_+ - V_-$ si le condensateur se charge ?

(a) Elle n'évolue pas. (b) Elle augmente. (c) Elle diminue.

.....

j) Que va-t-il se passer pour l'amplificateur linéaire intégré au bout d'un certain temps ?

(a) Il va claquer. (b) Il va basculer en saturation négative. (c) Il va passer en fonctionnement linéaire.

.....

## Oscillateur à résistance négative

**Entraînement 23.10 — Résistance négative.**

On utilise le dipôle suivant dans lequel l'amplificateur linéaire intégré est idéal.

a) En supposant le régime linéaire, déterminer le rapport $\dfrac{u_e}{u_s}$ en fonction des résistances $R_0$ et $R_2$.

.....

b) Donner la relation entre $u_e$, $u_s$ et $i_e$.

.....

c) En supposant le régime linéaire, en déduire l'expression de $u_e$ en fonction de $i_e$, ainsi que des résistances $R_0$, $R_1$ et $R_2$.

.....

d) À quelle condition le régime reste-t-il linéaire ?

(a) $|u_s| < V_{sat}$

(b) $|u_s| > V_{sat}$

(c) $|u_e| < V_{sat}$

(d) $|u_e| > V_{sat}$

.....

e) Supposons que le régime est linéaire tant que $|u_s| < V_{sat}$. Que peut-on en déduire ?

(a) $|u_e| > \dfrac{R_0}{R_0 + R_2} V_{sat}$

(b) $|u_e| < \dfrac{R_0}{R_0 + R_2} V_{sat}$

.....

f) En supposant le régime en saturation haute, déterminer $u_e$ en fonction de $i_e$, $R_1$ et $V_{sat}$.

.....

On donne les caractéristiques suivantes :

Caractéristique (1)

Caractéristique (2)

Caractéristique (3)

g) Sachant que même en régime de saturation, $|u_e| < \dfrac{R_0}{R_0+R_2}V_{sat}$, indiquer celle qui correspond au dipôle précédent. .....

On donne les caractéristiques $i_e = g(u_e)$ suivantes.

Caractéristique (1)

Caractéristique (2)

Caractéristique (3)

h) Indiquer celle qui correspond au dipôle précédent .....

i) Dans quel intervalle de tension ce dipôle se comporte-t-il comme une résistance négative ?

(a) $u_e < -\dfrac{R_0}{R_0+R_2}V_{sat}$

(b) $u_e > \dfrac{R_0}{R_0+R_2}V_{sat}$

(c) $|u_e| < \dfrac{R_0}{R_0+R_2}V_{sat}$

(d) $|u_e| > \dfrac{R_0}{R_0+R_2}V_{sat}$

.....

**Réponses mélangées**

Caractéristique (3) (d) (a) (d) (c) (a) $\dfrac{u_e}{u_s} = \dfrac{R_0}{R_0+R_2}$ (b)

Faux (c) $i = C\dfrac{du_C}{dt}$ (a) (c) $u_e = -R_0\dfrac{R_1}{R_2}i_e$ Vrai (e)

$u_e - u_s = R_1 i_e$ $\dfrac{(R+\underline{Z_C})^2 + R\underline{Z_C}}{R\underline{Z_C}}$ (c) $\dfrac{j\omega}{\tau}\underline{i} + L^2C^2\underline{i} - (j\omega)^2\underline{i} = A$ (b)

$\dfrac{1}{\tau}\dfrac{du}{dt} + \omega_0^2 u + \dfrac{d^2u}{dt^2} = 0$ $j\omega\underline{i} = -\dfrac{\underline{i}}{RC}$ (a) (c) (a) (b) $\dfrac{du}{dt} + \dfrac{u}{\tau} = 0$ (e)

(b) $\dfrac{R_1}{R_1+R_2}V_{sat}$ $\dfrac{d^2u_s}{dt^2} + \dfrac{3-A}{RC}\dfrac{du_s}{dt} + \dfrac{1}{R^2C^2}u_s = 0$ $i = \dfrac{V_{sat} - u_C}{R}$ (a) (c)

$\dfrac{1}{\tau}\dfrac{du}{dt} + \omega_0^2 u + \dfrac{d^2u}{dt^2} = 0$ (b) (a) (b) $u_1 = \dfrac{u_s}{A}$ (c) $u_e = R_1 i_e + V_{sat}$

(b) Caractéristique (1) (b) $RC\dfrac{du}{dt} + \omega_0^2 u - \dfrac{d^2u}{dt^2} = A$ (b) (b) (a)

▶ Réponses et corrigés page 540

# Circuits logiques

## Pour bien commencer

### Entraînement 24.1 — Bataille de mémoires.

On quantifie l'espace mémoire d'un support de stockage d'information en nombre d'octets, mais il existe deux systèmes d'unités différents en fonction du multiple choisi.

On distingue :

- les *kilooctets*, *mégaoctets* ou *gigaoctets*, qui sont basés sur des multiples de 10 :
  - ▷ $1\,\text{ko} = 1 \times 10^3\,\text{o}$
  - ▷ $1\,\text{Mo} = 1 \times 10^6\,\text{o}$
  - ▷ $1\,\text{Go} = 1 \times 10^9\,\text{o}$
- les *kibioctets*, *mébioctets* ou g*ébioctets*, qui sont basés sur des multiples de 2 :
  - ▷ $1\,\text{Kio} = 2^{10}\text{o}$
  - ▷ $1\,\text{Mio} = 2^{20}\text{o}$
  - ▷ $1\,\text{Gio} = 2^{30}\text{o}$

a) Déterminer quel fichier MP3 est le plus volumineux.

(a) 3 746 ko
(b) 3 221 Kio
(c) 3,746 Mio

b) Déterminer quel jeu est le moins volumineux.

(a) 4,588 Gio
(b) $2^{10} \times 4{,}482\,\text{Mio}$
(c) $2^{10} \times 4{,}653\,\text{Mo}$

c) Déterminer quel ordinateur a la mémoire la plus importante.

(a) $2^{32} \times 2{,}845\,\text{ko}$
(b) $2^{10} \times 1{,}368\,\text{Gio}$
(c) $2^{3} \times 0{,}158\,\text{To}$

# Écriture d'un nombre

**Entraînement 24.2 — Encodage : du décimal au binaire.**

Afin d'encoder un entier de la base décimale, par exemple 78, vers la base binaire on utilise le principe suivant : on effectue la division euclidienne par deux du nombre à encoder et on réitère l'opération avec le quotient obtenu jusqu'à obtenir 0. Par exemple :

$$78/2 \xrightarrow{\text{reste } 0} 39/2 \xrightarrow{\text{reste } 1} 19/2 \xrightarrow{\text{reste } 1} 9/2 \xrightarrow{\text{reste } 1} 4/2 \xrightarrow{\text{reste } 0} 2/2 \xrightarrow{\text{reste } 0} 1/2 \xrightarrow{\text{reste } 1} 0.$$

La lecture de droite à gauche des restes obtenus permet d'écrire le nombre binaire correspondant : 1001110.

Déterminer l'encodage dans la base binaire des entiers suivants :

a) 12

(a) 1000 (b) 1100 (c) 1101

.....

b) 35

(a) 100101 (b) 100011 (c) 100111

.....

c) 123

(a) 1111011 (b) 1111010 (c) 1110001

.....

d) 255

(a) 01111111 (b) 11111110 (c) 11111111

.....

e) Combien de valeurs peut prendre un octet (nombre binaire composé de 8 chiffres) ? ....

**Entraînement 24.3 — Décodage : du binaire au décimal.**

Pour décrypter un nombre binaire, par exemple 1101, et l'exprimer dans la base décimale, on utilise le principe suivant : chaque chiffre du nombre binaire correspond à un coefficient associé à une puissance de 2. Cette puissance dépend de la place du chiffre dans le nombre : le chiffre le plus à droite est à la position 0 et est le coefficient associé à $2^0$ ; le chiffre le plus à gauche est à la dernière position $p$ et est le coefficient associé à $2^p$. Par exemple :

$$1101 \to 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 13.$$

La somme des puissances 2 pondérées par les coefficients 1 ou 0 de 1101 donne 13.

Déterminer les nombres décimaux correspondant aux nombres binaires suivants.

a) 1111

(a) 13 (b) 15 (c) 17

.....

b) 10101

(a) 17 (b) 19 (c) 21

.....

c) 101010

(a) 42 (b) 54 (c) 68

.....

d) 10111101

(a) 181 (b) 189 (c) 193

.....

e) Que vaut en binaire le résultat du calcul $\dfrac{101010}{1111 - 1101}$ ?

.....

**Entraînement 24.4 — Mystérieux 121...**

L'écriture d'un nombre repose sur une décomposition en puissances successives d'un nombre appelé *base*.

Par exemple, le nombre 1908 en base 10 s'écrit $1908|_{10} = 1 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 8 \times 10^0$.
Autre exemple : on a l'égalité $1642|_7 = 1 \times 7^3 + 6 \times 7^2 + 4 \times 7^1 + 2 \times 7^0$.

Donner la décomposition des nombres suivants :

a) $121|_{10}$ .....

b) $121|_3$ .....

c) Quelles sont les relations correctes ?

(a) $121|_{10} \neq 121|_3$

(b) $3|_{121} = 10|_{121}$

(c) $121|_3 = 16|_{10}$

(d) $121|_b = 121|_3$

.....

d) Donner la décomposition du nombre $121|_b$ une base $b > 2$ .....

e) Quel nombre $x$ vérifie $x^2 = 121|_b$ pour $b > 2$ ?

(a) $b$ (b) $b^2$ (c) $b - 1$ (d) $b + 1$

.....

# Logique et tables de vérité

| Les fonctions logiques | | | |
|---|---|---|---|
| Nom de le fonction | NON A | A ET B | A OU B |
| Symbole logique | $\overline{A}$ | $A \cap B$ | $A \cup B$ |
| Formule logique | $1 - A$ | $A \times B$ | $A + B - A \times B$ |

**Entraînement 24.5 — Calculs logiques et lois de Morgan.**

Établir les formules logiques des écritures symboliques suivantes :

a) $\overline{A} \cup \overline{B}$ .....

b) $\overline{A} \cap \overline{B}$ .....

Établir les écritures symboliques des formules logiques suivantes :

c) $1 - A \times B$ .....

d) $1 - (A + B) - A \times B$ .....

e) Quelles sont les relations correctes ?

(a) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

(b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(c) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(d) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

*Plusieurs réponses sont possibles.*

.....

**Entraînement 24.6 — Des tables de vérité.**

On considère les quatre tables de vérité de portes logiques suivantes.

Porte OR

| $A$ | $B$ | $S_1$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

Porte AND

| $A$ | $B$ | $S_2$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Porte NOR

| $A$ | $B$ | $S_3$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |

Porte NAND

| $A$ | $B$ | $S_4$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

On considère aussi quatre formules à leur attribuer :

1. $S = 1 - A \times B$
2. $S = A + B - A \times B$
3. $S = 1 - A - B + A \times B$
4. $S = A \times B$

Attribuer à chaque porte logique la formule correspondante.

a) Porte OR ..... ☐

b) Porte AND ..... ☐

c) Porte NOR ..... ☐

d) Porte NAND ..... ☐

e) On applique la formule $S = 1 - A - B + A \times B$, en remplaçant $A$ par $S_2$ et $B$ par $S_3$.

Quelle table de vérité obtient-on ?

a

| $A$ | $B$ | $S_2$ | $S_3$ | $S$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

b

| $A$ | $B$ | $S_2$ | $S_3$ | $S$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |

c

| $A$ | $B$ | $S_2$ | $S_3$ | $S$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

d

| $A$ | $B$ | $S_2$ | $S_3$ | $S$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |

..... ☐

# Circuits de logique combinatoire

On rappelle les tables de vérité des fonctions logiques OR, AND, NOR, NAND, XOR et XNOR :

Porte OR

| $A$ | $B$ | $S_1$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

Porte AND

| $A$ | $B$ | $S_2$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Porte NOR

| $A$ | $B$ | $S_3$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |

Porte NAND

| $A$ | $B$ | $S_4$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

Porte XOR

| $A$ | $B$ | $S_5$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

Porte XNOR

| $A$ | $B$ | $S_6$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

**Entraînement 24.7 — Un circuit logique.**

On considère le circuit électrique ci-contre.

Il est composé de deux types de transistors qui fonctionnent comme des interrupteurs commandés en tension.

Le type 1 est considéré comme un interrupteur ouvert ou un interrupteur fermé si sa tension d'entrée est respectivement nulle ou non nulle. Le type 2 est considéré comme un interrupteur fermé ou un interrupteur ouvert si sa tension d'entrée est respectivement nulle ou non nulle.

Déterminer la valeur de la tension de sortie $V_S$ en volts dans le cas où les tensions d'entrée sont telles que :

a) $V_A = 0$ V et $V_B = 0$ V .....

b) $V_A = 1$ V et $V_B = 0$ V .....

c) $V_A = 0$ V et $V_B = 1$ V .....

d) $V_A = 1$ V et $V_B = 1$ V .....

e) S'agit-il d'une porte OR, AND, NOR ou bien NAND ? .....

**Entraînement 24.8 — *Bis et repetita.***

On considère le circuit électrique ci-contre.

Il est composé de deux types de transistors qui fonctionnent comme des interrupteurs commandés en tension.

Le type 1 est considéré comme un interrupteur ouvert ou un interrupteur fermé si sa tension d'entrée est respectivement nulle ou non nulle. Le type 2 est considéré comme un interrupteur fermé ou un interrupteur ouvert si sa tension d'entrée est respectivement nulle ou non nulle.

Déterminer la valeur de la tension de sortie $V_S$ dans le cas où les tensions d'entrée sont telles que :

a) $V_A = 0$ V et $V_B = 0$ V .....

b) $V_A = 1$ V et $V_B = 0$ V .....

c) $V_A = 0$ V et $V_B = 1$ V .....

d) $V_A = 1$ V et $V_B = 1$ V .....

e) S'agit-il d'une porte OR, AND, NOR ou bien NAND ? .....

**Entraînement 24.9 — La porte mystère.**

On associe deux portes NO, deux portes AND et une porte OR selon une configuration représenté ci-après en utilisant les notations européenne (à gauche) et américaine (à droite) :

a) Que vaut $S$ si $A = B = 0$ ? .....

b) Que vaut $S$ si $A = B = 1$ ? .....

c) Que vaut $S$ si $A = 0$ et $B = 1$ ? .....

d) Que vaut $S$ si $A = 1$ et $B = 0$ ? .....

e) Ce circuit est-t-il l'équivalent d'un XOR ou d'un XNOR ? .....

## Circuits de logique séquentielle

**Entraînement 24.10 — Chronogramme d'une bascule RS.**

On s'intéresse à un type de circuit logique appelé bascule RS comportant deux entrées R et S et une sortie principale Q. Le chronogramme ci-après a pu être obtenu :

Pour chaque affirmation suivante, préciser si elle est vraie ou fausse.

a) Si R et S sont au niveau logique 0, la valeur de Q dépend de l'état antérieur .....

b) L'activation de R est une commande pour assurer d'avoir une sortie Q de niveau logique 1

c) Lorsque S passe au niveau logique 0, la sortie Q passe au niveau 1 .....

On rappelle qu'un circuit à logique séquentielle est *monostable* s'il présente un état stable dans lequel il peut rester indéfiniment et un état instable de durée déterminée (période) ; *bistable* s'il présente deux états stables, pouvant passer de l'un à l'autre par une impulsion extérieure de commande ; *astable* s'il n'y a pas d'état stable du système.

d) La bascule correspond à un circuit monostable, bistable ou astable ? .....

**Réponses mélangées**

c 0 V 1 V $1-(A+B)+A+B$ 0 V 0 256 NOR 0 V

Bistable 1 a b c Faux 1 1 V b $1\times 3^2+2\times 3^1+1\times 3^0$

c Vrai 0 V c $\overline{A\cup B}$ 1 2 $1-A\times B$ $1\times 10^2+2\times 10^1+1\times 10^0$

0 V a 3 b 10101 a c AND 0 b d

$1\times b^2+2\times b^1+1\times b^0$ $\overline{A\cap B}$ XOR d c 4 Faux b b 0 V

► Réponses et corrigés page 545

# Physique statistique

**Prérequis**
Équation d'état des gaz parfaits ($PV = nRT$).

**Constantes utiles**
→ Constante d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6{,}02 \times 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$
→ Constante des gaz parfaits : $R = 8{,}31\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$
→ Constante de Boltzmann : $k_\mathrm{B} = 1{,}38 \times 10^{-23}\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}$

## Quelques ordres de grandeur

**Entraînement 25.1 — Eau vapeur.**

a) Le nombre de molécules d'eau dans 1 mm$^3$ d'eau vapeur à la température $T = 373\,\mathrm{K}$ et à la pression $P = 1{,}0\,\mathrm{bar}$ est

(a) $1{,}9 \times 10^{11}$ (b) $1{,}9 \times 10^{16}$ (c) $1{,}9 \times 10^{19}$ (d) $1{,}9 \times 10^{22}$

.....

b) La distance moyenne entre deux molécules d'eau vapeur dans les mêmes conditions de température et de pression est

(a) 3,7 nm (b) 7,1 nm (c) 3,7 µm (d) 7,1 µm

.....

**Entraînement 25.2 — Eau liquide.**

a) La masse molaire de l'eau est $M_{\mathrm{H_2O}} = 18\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$. Estimer le nombre de molécules d'eau dans 1 mm$^3$ d'eau liquide de masse volumique $\mu = 1{,}0\,\mathrm{kg \cdot L^{-1}}$ .....

b) Estimer la distance moyenne entre deux molécules d'eau liquide .....

**Entraînement 25.3 — Composition de l'air.**

a) Les fractions molaires de dioxygène et de diazote de l'atmosphère terrestre au niveau de la mer sont

(a) $x_{\mathrm{O_2}} \approx 80\,\%$ ; $x_{\mathrm{N_2}} \approx 20\,\%$
(b) $x_{\mathrm{O_2}} \approx 70\,\%$ ; $x_{\mathrm{N_2}} \approx 30\,\%$
(c) $x_{\mathrm{O_2}} \approx 30\,\%$ ; $x_{\mathrm{N_2}} \approx 70\,\%$
(d) $x_{\mathrm{O_2}} \approx 20\,\%$ ; $x_{\mathrm{N_2}} \approx 80\,\%$

.....

Les masses molaires atomiques de l'azote et de l'oxygène sont $M(\mathrm{N}) = 14\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$ et $M(\mathrm{O}) = 16\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$.

b) Calculer la masse molaire de l'air avec deux chiffres significatifs .....

**Entraînement 25.4 — Masse de l'atmosphère terrestre.**

En supposant la valeur du champ de pesanteur uniforme ($g \approx 10\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$) et en écrivant que la pression au sol est le poids surfacique de l'atmosphère terrestre, estimer la masse totale de l'atmosphère terrestre.

*On prendra une pression au sol égale à 1 bar. Le rayon de la Terre est $R_T \approx 6{,}4 \times 10^3\,\mathrm{km}$.*

.....

## Modèle de l'atmosphère isotherme

**Entraînement 25.5 — Atmosphère terrestre.**

On se place dans le modèle de l'atmosphère terrestre isotherme de température $T$. On note $m$ la masse moyenne d'une particule et $M \approx 29\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$ la masse molaire de l'atmosphère. On prend $g = 9{,}8\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$. La pression à l'altitude $z$ au-dessus du niveau de la mer est

$$P(z) = P(0)\exp\left(-\frac{z}{H}\right).$$

a) En notant $\mathsf{L}$ la dimension d'une longueur, la dimension de $H$ est

(a) $\mathsf{L}$ (b) $\mathsf{L}^{-1}$ (c) 1

.....

b) Par une analyse dimensionnelle, donner la (ou les) expression(s) de $H$ :

(a) $\dfrac{RT}{Mg}$ (b) $\dfrac{k_\mathrm{B}T}{mg}$ (c) $\dfrac{Mg}{RT}$ (d) $\dfrac{mg}{k_\mathrm{B}T}$

.....

c) Calculer $H$ pour $T = 15\,°\mathrm{C}$ .....

d) Calculer la pression au sommet de l'Everest d'altitude 8 849 m lorsque la pression au niveau de la mer est 1,013 bar.

.....

**Entraînement 25.6 — Hauteur d'un étage.**

Des mesures de pression à deux niveaux différents d'un bâtiment à la température $T_0 = 20\,°\mathrm{C}$ ont donné $P_A = 1\,027{,}17\,\mathrm{hPa}$ à l'étage A et $P_B = 1\,027{,}54\,\mathrm{hPa}$ à l'étage B.

a) Le niveau A est plus haut que le niveau B.

(a) vrai (b) faux

.....

b) La différence d'altitude entre les deux niveaux est

(a) 2,5 m (b) 2,8 m (c) 3,1 m (d) 3,5 m

.....

# Systèmes à spectre discret d'énergies

**Entraînement 25.7 — Probabilité d'occupation d'un état.**

On considère des particules indépendantes pouvant être dans des états quantifiés, numérotés par l'entier $i$ ($i = 1, 2, \ldots$) et d'énergies notées $E_i$.

Ces niveaux d'énergie sont rangés par ordre croissant $E_1 < E_2 < E_3 < \cdots$ et sont non dégénérés.

Le système est en équilibre thermique avec un thermostat de température $T$.

La probabilité pour une particule d'occuper l'état $i$ d'énergie $E_i$ est donné par

$$p(E_i) = p_i = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{E_i}{k_\mathrm{B}T}\right),$$

où $Z$ est une constante pour une température donnée appelée fonction de partition de la particule.

a) Quelle proposition est correcte ?

(a) $Z = \sum_{i \geqslant 1} E_i \exp\left(\frac{E_i}{k_\mathrm{B}T}\right)$

(b) $Z = \sum_{i \geqslant 1} E_i \exp\left(-\frac{E_i}{k_\mathrm{B}T}\right)$

(c) $Z = \sum_{i \geqslant 1} \exp\left(-\frac{E_i}{k_\mathrm{B}T}\right)$

(d) $Z = \sum_{i \geqslant 1} \exp\left(\frac{E_i}{k_\mathrm{B}T}\right)$

.....

b) Exprimer le rapport des probabilités d'occupation des états d'énergies $E_m$ et $E_n$.

.....

c) On considère une situation où le nombre d'états est fini : $1 \leqslant i \leqslant i_0$.

La répartition des particules sur les différents états quantifiés est quasi équiprobable lorsque :

(a) $E_2 - E_1 \gg k_\mathrm{B}T$

(b) $E_2 - E_1 \ll k_\mathrm{B}T$

(c) $E_{i_0} - E_1 \gg k_\mathrm{B}T$

(d) $E_{i_0} - E_1 \ll k_\mathrm{B}T$

.....

d) On considère une situation où le nombre d'états est fini : $1 \leqslant i \leqslant i_0$.

Seul un état est très peuplé lorsque :

(a) $E_2 - E_1 \gg k_\mathrm{B}T$

(b) $E_2 - E_1 \ll k_\mathrm{B}T$

(c) $E_{i_0} - E_1 \gg k_\mathrm{B}T$

(d) $E_{i_0} - E_1 \ll k_\mathrm{B}T$

.....

**Entraînement 25.8 — Système à deux niveaux.**

On considère une assemblée de $N$ particules ayant deux niveaux d'énergie non dégénérés : l'état 1 d'énergie $E_1 = -\varepsilon < 0$ et l'état 2 d'énergie $E_2 = +\varepsilon > 0$. On note $p_1$ (respectivement $p_2$) la probabilité pour une particule d'être dans l'état 1 (respectivement l'état 2) et on pose $\beta = \dfrac{1}{k_\mathrm{B}T}$.

a) L'expression de $p_1$ est

(a) $\dfrac{\mathrm{e}^{\beta\varepsilon}}{2\cosh(\beta\varepsilon)}$ (c) $\dfrac{\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon}}{2\cosh(\beta\varepsilon)}$

(b) $\dfrac{\mathrm{e}^{\beta\varepsilon}}{2\sinh(\beta\varepsilon)}$ (d) $\dfrac{\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon}}{2\sinh(\beta\varepsilon)}$

.....

b) L'expression de $p_2$ est

(a) $\dfrac{\mathrm{e}^{\beta\varepsilon}}{2\cosh(\beta\varepsilon)}$ (c) $\dfrac{\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon}}{2\cosh(\beta\varepsilon)}$

(b) $\dfrac{\mathrm{e}^{\beta\varepsilon}}{2\sinh(\beta\varepsilon)}$ (d) $\dfrac{\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon}}{2\sinh(\beta\varepsilon)}$

.....

c) Dans la situation où $k_\mathrm{B}T \ll \varepsilon$, on a :

(a) $p_2 \gg p_1$ (b) $p_2 \approx p_1$ (c) $p_2 \ll p_1$

.....

d) Dans la situation où $k_\mathrm{B}T \gg \varepsilon$, on a :

(a) $p_2 \gg p_1$ (b) $p_2 \approx p_1$ (c) $p_2 \ll p_1$

.....

e) L'énergie moyenne du système est $\langle E_\text{système}\rangle = -N\varepsilon\tanh(\beta\varepsilon)$.

La capacité thermique à volume constant du système est défini par $C = \dfrac{\mathrm{d}\langle E_\text{système}\rangle}{\mathrm{d}T}$.

Exprimer la capacité thermique à volume constant du système en fonction de $N$, $\varepsilon$, $k_\mathrm{B}$ et $T$.

.....

## Capacités thermiques

**Entraînement 25.9 — Gaz parfait monoatomique.**

a) Combien de degrés de liberté énergétiques quadratiques possède une molécule monoatomique ?

(a) 1 (b) 3 (c) 5 (d) 7

.....

b) La capacité thermique molaire à volume constant $C_\mathrm{V,m}$ d'un gaz parfait monoatomique est :

(a) $3R/2$ (b) $5R/2$ (c) $3k_\mathrm{B}/2$ (d) $5k_\mathrm{B}/2$

.....

**Entraînement 25.10 — Théorème d'équipartition de l'énergie.**

Dans un système de particules indépendantes à l'équilibre à la température $T$, chaque degré de liberté quadratique d'une particule contribue à l'énergie moyenne de la particule par :

(a) $\dfrac{k_\mathrm{B}T}{2}$ (b) $\dfrac{3k_\mathrm{B}T}{2}$ (c) $k_\mathrm{B}T$ (d) $\dfrac{5k_\mathrm{B}T}{2}$

.....

**Entraînement 25.11 — Vitesse quadratique moyenne.**

La vitesse quadratique moyenne $v^*$ d'une molécule est définie par

$$v^* = \sqrt{< v^2 >}.$$

a) En notant $m$ la masse d'une molécule monoatomique, on a

(a) $v^* = \sqrt{\dfrac{k_\mathrm{B}T}{2m}}$ (b) $v^* = \sqrt{\dfrac{k_\mathrm{B}T}{m}}$ (c) $v^* = \sqrt{\dfrac{3k_\mathrm{B}T}{m}}$ (d) $v^* = \sqrt{\dfrac{5k_\mathrm{B}T}{m}}$

b) Ce résultat est le même pour une molécule diatomique.

(a) vrai (b) faux

c) La masse molaire atomique de l'azote est $M(\mathrm{N}) = 14\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$. Calculer la vitesse quadratique moyenne du diazote à la température $T = 20\,°\mathrm{C}$.

**Entraînement 25.12 — Solide.**

Les atomes d'un solide occupent des positions précises correspondant à la structure cristalline. Sous l'effet de l'agitation thermique, ils vibrent autour de ces positions. On modélise chaque atome par un oscillateur harmonique tridimensionnel.

a) Combien de degrés de liberté quadratiques, l'énergie cinétique d'un atome contient-elle ?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 6

b) Combien de degrés de liberté quadratiques, l'énergie potentielle d'un atome contient-elle ?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 6

c) La capacité thermique molaire d'un solide cristallin est :

(a) $3R/2$ (b) $3R$ (c) $3k_\mathrm{B}/2$ (d) $3k_\mathrm{B}$

**Réponses mélangées**

$5 \times 10^{18}\,\mathrm{kg}$ (b) (c) (a) (a) (a) (c) (b) (c)

$\dfrac{p_m}{p_n} = \exp\left(-\dfrac{E_m - E_n}{k_\mathrm{B}T}\right)$ (a) (c) 0,31 nm (b) (c) 8,4 km

(c) (b) (d) 0,35 bar (c) (a) (a) (a) $5{,}1 \times 10^2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

$29\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$ (a) $C = \dfrac{N\varepsilon^2}{k_\mathrm{B}T^2}\left(1 - \tanh^2\left(\dfrac{\varepsilon}{k_\mathrm{B}T}\right)\right)$ (a) et (b) (d) $3{,}3 \times 10^{19}$

► Réponses et corrigés page 550

# Physique quantique

**Prérequis**
Onde progressive. Densité de probabilité de présence. État stationnaire en mécanique quantique. Normalisation d'une fonction d'onde. Coefficient de transmission. Principe de superposition.

**Constantes utiles**

→ Constante de Planck $h = 6{,}6 \times 10^{-34}\,\mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}}$

→ Constante de Planck réduite : $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$

→ Constante d'Avogadro $\mathcal{N}_A = 6{,}0 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$

## Pour commencer

### Entraînement 26.1 — Caractère quantique.

Un objet est qualifié de quantique dès lors que $L \leqslant 100\lambda$, avec $L$ sa taille, $\lambda$ sa longueur d'onde de de Broglie telle que $\lambda = h/p$, et $p$ sa quantité de mouvement.

Calculer la longueur d'onde de de Broglie $\lambda$ des objets ci-dessous.

a) Balle de pistolet : $L = 10\,\mathrm{mm}$ ; $m = 10\,\mathrm{g}$ ; $v = 350\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

.....

b) Grain de pollen : $L = 5\,\mathrm{\mu m}$ ; $m = 5\,\mathrm{ng}$ ; $v = 2\,\mathrm{cm \cdot s^{-1}}$

.....

c) Virus de l'hépatite B : $L = 42\,\mathrm{nm}$ ; $m = 3 \times 10^{-18}\,\mathrm{g}$ ; $v = 0{,}1\,\mathrm{mm \cdot h^{-1}}$

.....

d) Molécule de $O_2$ : $L = 0{,}29\,\mathrm{nm}$ ; $M = 32{,}0\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$ ; $v = 1\,800\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$

.....

e) Quel(s) objet(s) pouvez-vous qualifier de quantique ?

(a) une balle de pistolet
(b) un grain de pollen
(c) le virus de l'hépatite B
(d) une molécule de $O_2$

.....

**Entraînement 26.2 — Interférences.**

Prenons une expérience d'interférences impliquant un faisceau de particules quantiques. Ce faisceau est dirigé vers un dispositif à trois fentes contenues dans un même plan. Un détecteur est placé en un point M, à une grande distance du plan contenant les fentes.

Sans plus de détails sur la géométrie de l'interféromètre, voici les différentes configurations observées :

- si la fente n° 1 est ouverte alors l'amplitude de probabilité en M vaut $\varphi_1(\mathrm{M}) = 1/\sqrt{2}$ ;
- si la fente n° 2 est ouverte alors l'amplitude de probabilité en M vaut $\varphi_2(\mathrm{M}) = \mathrm{i}/2$ avec $\mathrm{i}^2 = -1$ ;
- si la fente n° 3 est ouverte alors l'amplitude de probabilité en M vaut $\varphi_3(\mathrm{M}) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}}{\sqrt{6}}$.

On rappelle que la densité de probabilité de présence est donnée par $|\varphi(M)|^2$.

Déterminer la densité de probabilité de détection d'une particule au voisinage de M lorsque :

a) seule la fente n° 1 est ouverte .....

b) les fentes n° 1 et n° 2 sont ouvertes .....

c) les fentes n° 2 et n° 3 sont ouvertes .....

d) toutes les fentes sont ouvertes .....

# Autour des fonctions d'onde

- On rappelle qu'une fonction d'onde est dite normalisée si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2 \,\mathrm{d}x = 1$.
- On rappelle qu'en mécanique quantique, un état est dit stationnaire si sa densité de probabilité de présence $|\psi(x,t)|^2$ est indépendante du temps.
- On rappelle la formule de linéarisation : $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$.

**Entraînement 26.3 — Normalisation d'une fonction d'onde (I).**

Pour chaque fonction d'onde spatiale, déterminer la constante $A$ pour normaliser la fonction d'onde.

a) $\varphi(x) = \sqrt{A\mathrm{e}^{-|x|/a}}$ .....

b) $\varphi(x) = A\mathrm{e}^{-|x|/b}$ .....

c) $\varphi(x) = \begin{cases} A\sqrt{1-x^2/a^2} & \text{si } -a \leqslant x \leqslant a \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$ .....

**Entraînement 26.4 — Normalisation d'une fonction d'onde (II).**

Pour chaque fonction d'onde spatiale, déterminer la constante $A$ pour normaliser la fonction d'onde.

a) $\varphi(x) = \begin{cases} A\cos(\pi x/a) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant a \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$ .....

b) $\varphi(x) = \begin{cases} A(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi x/a} + 1) & \text{si } -a \leqslant x \leqslant a \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$ .....

c) $\varphi(x) = \begin{cases} A\dfrac{x}{a} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant a \\ A\dfrac{b-x}{b-a} & \text{si } a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$ .....

**Entraînement 26.5 — État stationnaire.**

Parmi les différentes fonctions $\Psi(x,t)$ suivantes, quelles sont celles pouvant représenter un état stationnaire en mécanique quantique ?

(a) $\Psi(x,t) = A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$

(b) $\Psi(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$

(c) $\Psi(x,t) = A\cos(kx)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$

(d) $\Psi(x,t) = A\cos(kx)\cos(\omega t)$

(e) $\Psi(x,t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_2 t}\right)$

.....

**Entraînement 26.6 — Fonction d'onde associée à une onde progressive.**

Rappelons l'équation de Schrödinger unidimensionnelle :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x,t)\Psi(x,t) = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}.$$

On cherche une solution pour une particule libre sous la forme d'une onde progressive.

a) Pour une particule libre, que vaut la grandeur $V(x,t)$ ? .....

b) Dans nos conditions, rappeler l'expression de l'énergie cinétique de la particule en fonction, entre autres, de la norme du vecteur d'onde $k$.

.....

c) Quelle est la fonction d'onde compatible avec l'équation de Schrödinger ?

(a) $\Psi(x,t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$

(b) $\Psi(x,t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-kx)}$

.....

d) Dans quel sens se propage l'onde ?

(a) Dans le sens des $x$ décroissants

(b) Dans le sens des $x$ croissants

.....

e) Calculer la densité de probabilité de présence $|\Psi(x,t)|^2$ .....

f) La fonction d'onde représente-t-elle un état stationnaire : « oui » ou « non » ? .....

**Entraînement 26.7 — Particule dans un puits.**

Une particule quantique de masse $m$ est confinée dans un puits. Dans son état fondamental, la fonction d'onde spatiale s'écrit

$$\varphi(x) = \begin{cases} A\cos(\alpha x) & \text{si } -\dfrac{\pi}{2\alpha} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2\alpha} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

avec $\alpha$ une grandeur réelle positive.

a) Déterminer la constante de normalisation $A$ .....

b) Calculer la probabilité $P$ que la particule se trouve dans l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4\alpha}$. Cette probabilité est définie par $P = \displaystyle\int_0^{\pi/4\alpha} |\varphi(x)|^2 \,\mathrm{d}x$.

.....

c) Donner sans calculs la position moyenne $\langle x \rangle$ de la particule, définie par $\langle x \rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x|\varphi(x)|^2 \,\mathrm{d}x$.

.....

**Entraînement 26.8 — Particule liée.**

Prenons une particule quantique de masse $m$ susceptible de se déplacer le long d'un axe $(\mathrm{O}x)$. Son état quantique est représenté par la fonction d'onde

$$\Psi(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ Ax\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et/\hbar} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

avec $\alpha$ un grandeur réelle positive.

a) Comment s'écrit le calcul de la probabilité de présence $P$ de la particule dans tout l'espace ?

(a) $P = A^2 \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-2\alpha x} \,\mathrm{d}x$

(b) $P = A^2 \displaystyle\int_{0}^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-2\alpha x} \,\mathrm{d}x$

(c) $P = A^2 \displaystyle\int_{0}^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-2\alpha x+2Et/\hbar} \,\mathrm{d}x$

(d) $P = A^2 \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{2\alpha x} \,\mathrm{d}x$

.....

b) La normalisation de la fonction d'onde impose $P = 1$.

Grâce à une intégration par parties, déterminer la constante de normalisation $A$.

.....

c) Calculer la probabilité que la particule se trouve dans l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{\alpha}$.

.....

# Cas d'un potentiel uniforme par morceaux

**Entraînement 26.9 — Détermination d'une fonction d'onde.**

On considère le profil de potentiel $V(x)$ ci-contre, constant par morceaux. On souhaite obtenir les formes $\varphi_{\mathrm{I}}(x)$, $\varphi_{\mathrm{II}}(x)$ et $\varphi_{\mathrm{III}}(x)$ de la fonction d'onde d'une particule d'énergie $E$ ($V_{\mathrm{II}} < E < V_{\mathrm{III}}$) dans les trois zones.

Pour cela on utilise l'équation de Schrödinger à une seule dimension $x$, indépendante du temps :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\varphi(x)}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\varphi(x) = E\varphi(x). \qquad (8)$$

De plus, on rappelle les solutions pour l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} = \alpha f(x)$ :

$$\text{si } \alpha < 0 : \quad f(x) = A\cos\left(\sqrt{|\alpha|}x\right) + B\sin\left(\sqrt{|\alpha|}x\right) ;$$
$$\text{si } \alpha > 0 : \quad f(x) = A\mathrm{e}^{\sqrt{\alpha}x} + B\mathrm{e}^{-\sqrt{\alpha}x}.$$

a) Utiliser l'équation (8) dans la zone I pour exprimer $\dfrac{\mathrm{d}^2\varphi_{\mathrm{I}}(x)}{\mathrm{d}x^2}$.

.....

b) Exprimer $\varphi_{\mathrm{I}}(x)$ en fonction de $A_{\mathrm{I}}$, $B_{\mathrm{I}}$, $m$ et $E$.

.....

c) Utiliser l'équation (8) dans la zone II pour exprimer $\dfrac{\mathrm{d}^2\varphi_{\mathrm{II}}(x)}{\mathrm{d}x^2}$.

.....

d) Exprimer $\varphi_{\mathrm{II}}(x)$ en fonction de $A_{\mathrm{II}}$, $B_{\mathrm{II}}$, $m$, $E$ et $V_{\mathrm{II}}$.

.....

e) Utiliser l'équation (8) dans la zone III pour exprimer $\dfrac{\mathrm{d}^2\varphi_{\mathrm{III}}(x)}{\mathrm{d}x^2}$.

.....

f) Exprimer $\varphi_{\mathrm{III}}(x)$ en fonction de $A_{\mathrm{III}}$, $B_{\mathrm{III}}$, $m$, $E$ et $V_{\mathrm{III}}$.

.....

g) Réexprimer $\varphi_{\mathrm{III}}(x)$ afin d'empêcher sa divergence quand $x \to +\infty$.

.....

**Entraînement 26.10 — Puits de potentiel fini, étude des solutions paires.**

Soit un puits de potentiel fini, de valeur nulle entre les positions $x = -a$ et $x = a$, et de valeur $V_0$ partout ailleurs. En étudiant une particule d'énergie $E < V_0$, on peut montrer que sa fonction d'onde spatiale $\varphi(x)$ prend les formes suivantes dans les trois zones définies sur la figure ci-contre :

$$\varphi_{\mathrm{I}}(x) = A_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{Qx} \quad ; \quad \varphi_{\mathrm{II}}(x) = A_{\mathrm{II}}\cos(Kx) \quad ; \quad \varphi_{\mathrm{III}}(x) = A_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{-Qx}.$$

On cherche à déterminer une relation entre $A_{\mathrm{I}}$ et $A_{\mathrm{III}}$, les amplitudes de la fonction d'onde dans les zones I et III, ainsi qu'une relation entre $Q$ et $K$, des paramètres liés à $V_0$ et $E$, en utilisant les relations de continuité pour $\varphi(x)$ et $\dfrac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}$ en $-a$ et $a$.

a) On a calculé ci-dessous les dérivées $\dfrac{\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{I}}(x)}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{II}}(x)}{\mathrm{d}x}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{III}}(x)}{\mathrm{d}x}$ :

$$-K\alpha\sin(Kx) \qquad Q\beta\mathrm{e}^{Qx} \qquad -Q\gamma\mathrm{e}^{-Qx} \qquad K\delta\sin(Kx).$$

Déterminer parmi les termes $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et $\delta$, ceux qui correspondent à $A_{\mathrm{I}}$, $A_{\mathrm{II}}$ et $A_{\mathrm{III}}$.

(a) $A_{\mathrm{I}} = \beta$, $A_{\mathrm{II}} = \delta$, $A_{\mathrm{III}} = \gamma$

(b) $A_{\mathrm{I}} = \beta$, $A_{\mathrm{II}} = \alpha$, $A_{\mathrm{III}} = \gamma$

(c) $A_{\mathrm{I}} = \gamma$, $A_{\mathrm{II}} = \alpha$, $A_{\mathrm{III}} = \beta$

.....

b) Il y a continuité de $\varphi(x)$ en $-a$. Égaliser $\varphi_{\mathrm{I}}(-a)$ et $\varphi_{\mathrm{II}}(-a)$.

.....

c) Il y a continuité de $\dfrac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}$ en $-a$. Égaliser $\dfrac{\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{I}}(-a)}{\mathrm{d}x}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{II}}(-a)}{\mathrm{d}x}$.

.....

d) Il y a continuité de $\varphi(x)$ en $a$. Égaliser $\varphi_{\mathrm{III}}(a)$ et $\varphi_{\mathrm{II}}(a)$.

.....

e) Il y a continuité de $\dfrac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}$ en $a$. Égaliser $\dfrac{\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{III}}(a)}{\mathrm{d}x}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{II}}(a)}{\mathrm{d}x}$.

.....

f) À partir des réponses des questions b) et d) trouver une relation entre $A_{\mathrm{I}}$ et $A_{\mathrm{III}}$.

.....

g) À partir des réponses des questions d) et e) trouver une relation entre $Q$ et $K$.

.....

**Entraînement 26.11 — Puits de potentiel fini, étude des solutions impaires.**

Soit un puits de potentiel fini, de valeur nulle entre les positions $x = -a$ et $x = a$, et de valeur $V_0$ partout ailleurs. En étudiant une particule d'énergie $E < V_0$, on peut montrer que sa fonction d'onde spatiale $\varphi(x)$ prend les formes suivantes dans les trois zones définies sur la figure ci-contre :

$$\varphi_{\mathrm{I}}(x) = A_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{Qx} \quad ; \quad \varphi_{\mathrm{II}}(x) = A_{\mathrm{II}}\sin(Kx) \quad ; \quad \varphi_{\mathrm{III}}(x) = A_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{-Qx}.$$

On cherche à déterminer une relation entre $A_{\mathrm{I}}$ et $A_{\mathrm{III}}$, les amplitudes de la fonction d'onde dans les zones I et III, ainsi qu'une relation entre $Q$ et $K$, des paramètres liés à $V_0$ et $E$, en utilisant les relations de continuité pour $\varphi(x)$ et $\dfrac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}$ en $-a$ et $a$.

a) On a calculé ci-dessous les dérivées $\dfrac{\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{I}}(x)}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{II}}(x)}{\mathrm{d}x}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{III}}(x)}{\mathrm{d}x}$ :

$$-Q\alpha\mathrm{e}^{-Qx} \qquad K\beta\cos(Kx) \qquad -K\gamma\cos(Kx) \qquad Q\delta\mathrm{e}^{Qx}.$$

Déterminer parmi les termes $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et $\delta$, ceux qui correspondent à $A_{\mathrm{I}}$, $A_{\mathrm{II}}$ et $A_{\mathrm{III}}$.

(a) $A_{\mathrm{I}} = \alpha$, $A_{\mathrm{II}} = \beta$, $A_{\mathrm{III}} = \delta$

(b) $A_{\mathrm{I}} = \delta$, $A_{\mathrm{II}} = \gamma$, $A_{\mathrm{III}} = \alpha$

(c) $A_{\mathrm{I}} = \delta$, $A_{\mathrm{II}} = \beta$, $A_{\mathrm{III}} = \alpha$

.....

b) Il y a continuité de $\varphi(x)$ en $-a$. Égaliser $\varphi_{\mathrm{I}}(-a)$ et $\varphi_{\mathrm{II}}(-a)$.

.....

c) Il y a continuité de $\dfrac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}$ en $-a$. Égaliser $\dfrac{\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{I}}(-a)}{\mathrm{d}x}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{II}}(-a)}{\mathrm{d}x}$.

.....

d) Il y a continuité de $\varphi(x)$ en $a$. Égaliser $\varphi_{\mathrm{III}}(a)$ et $\varphi_{\mathrm{II}}(a)$.

.....

e) Il y a continuité de $\dfrac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}$ en $a$. Égaliser $\dfrac{\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{III}}(a)}{\mathrm{d}x}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{II}}(a)}{\mathrm{d}x}$.

.....

f) À partir des réponses des questions b) et d) retrouver la relation entre $A_{\mathrm{I}}$ et $A_{\mathrm{III}}$.

.....

g) À partir des réponses des questions d) et e) trouver une relation entre $Q$ et $K$.

.....

# Effet tunnel

## Entraînement 26.12 — Coefficient de transmission.

On considère une particule de masse $m$ se déplaçant selon un axe (O$x$) soumise au potentiel représenté ci-contre. Cette particule arrive de la région I avec une énergie $E < V_0$. Dans ces conditions, on peut montrer que le coefficient de transmission $T$ s'écrit :

$$T = \frac{1}{1 + \dfrac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \sinh^2(ka)} \quad \text{avec} \quad k = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}.$$

Dans le cas où $ka \gg 1$, on montre que $T$ se simplifie sous la forme : $T \approx T_0 \mathrm{e}^{-2ka}$.

On donne l'approximation suivante : pour $x \gg 1$, $\sinh(x) \approx \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$.

a) Exprimer $T_0$ en fonction de $V_0$ et $E$ .....

b) Toutes choses égales par ailleurs, la probabilité de transmission est d'autant plus grande que la barrière est épaisse.

(a) vrai (b) faux

.....

c) Toutes choses égales par ailleurs, un proton a plus de chances d'être transmis qu'un électron.

(a) vrai (b) faux

.....

d) Toutes choses égales par ailleurs, la transmission est d'autant plus probable que la particule est énergétique.

(a) vrai (b) faux

.....

## Entraînement 26.13 — Courant tunnel.

On considère un électron de masse $m_e = 9,1 \times 10^{-31}$ kg se déplaçant selon un axe (O$x$). Ce dernier arrive de la région I avec une énergie $E = 1,0$ eV sur une barrière de potentiel de hauteur $V_0 = 2,0$ eV et d'épaisseur $a = 1,0$ nm. On peut montrer que le coefficient de transmission $T$ s'écrit :

$$T = \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} \mathrm{e}^{-2ka} \quad \text{avec} \quad k = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}.$$

en supposant l'approximation $ka \gg 1$ vérifiée. On rappelle : 1 eV = 1,6 × $10^{-19}$ J.

a) Calculer $T$ .....

On considère maintenant un faisceau incident d'électrons correspondant à un courant $I = 10$ mA.

b) Calculer l'intensité du courant transmis $I_t$, en µA .....

Toutes choses égales par ailleurs, on remplace maintenant le faisceau d'électrons par un faisceau de protons, de masses $m_p = 1{,}7 \times 10^{-27}$ kg.

c) Qualitativement, l'intensité transmise va :

(a) augmenter (b) diminuer

d) Calculer la nouvelle intensité transmise $I'_t$ .....

**Réponses mélangées**

$QA_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{-Qa} = KA_{\mathrm{II}}\sin(Ka)$ $\quad 8 \times 10^{-6}$ m $\quad \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}$ $\quad 1{,}7 \times 10^{-193}$ A $\quad A = \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}$

$A = \sqrt{\frac{2}{a}}$ $\quad A_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_{\mathrm{III}}-E)}x} + B_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_{\mathrm{III}}-E)}x}$ $\quad \frac{3}{4}$ $\quad$ (b) $\quad 1{,}9 \times 10^{-34}$ m $\quad -\frac{2m}{\hbar^2}E\varphi_{\mathrm{I}}(x)$

$A_{\mathrm{I}} = -A_{\mathrm{III}}$ $\quad A_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{-Qa} = A_{\mathrm{II}}\sin(Ka)$ $\quad A_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{-Qa} = A_{\mathrm{II}}\cos(Ka)$ $\quad$ (b) $\quad \frac{1}{2}$

$QA_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{-Qa} = KA_{\mathrm{II}}\sin(Ka)$ $\quad \frac{11-2\sqrt{6}}{12}$ $\quad \frac{5-2\sqrt{6}}{12}$ $\quad A_{\mathrm{II}}\cos\left(\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_{\mathrm{II}})}x\right) + B_{\mathrm{II}}\sin\left(\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_{\mathrm{II}})}x\right)$

$\frac{Q}{K} = \tan(Ka)$ $\quad$ (c) et (d) $\quad \frac{\hbar^2k^2}{2m}$ $\quad \frac{16E(V_0-E)}{V_0^2}$ $\quad 1{,}4\,\mu$A $\quad A = \sqrt{\frac{3}{b}}$

$-QA_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{-Qa} = KA_{\mathrm{II}}\cos(Ka)$ $\quad A_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{-Qa} = -A_{\mathrm{II}}\sin(Ka)$ $\quad$ (b) $\quad A_{\mathrm{I}} = A_{\mathrm{III}}$

$-\frac{K}{Q} = \tan(Ka)$ $\quad -\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_{\mathrm{II}})\varphi_{\mathrm{II}}(x)$ $\quad$ (b) $\quad A = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{a}}$ $\quad$ (b) $\quad A = 2\alpha^{3/2}$

(a) $\quad$ (c) $\quad B_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_{\mathrm{III}}-E)}x}$ $\quad A = \frac{1}{2a}$ $\quad A = \frac{1}{\sqrt{b}}$ $\quad 0$ $\quad$ (b) $\quad 0$

$QA_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{-Qa} = KA_{\mathrm{II}}\cos(Ka)$ $\quad A = \frac{1}{2\sqrt{a}}$ $\quad A_{\mathrm{I}}\cos\left(\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E}x\right) + B_{\mathrm{I}}\sin\left(\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E}x\right)$

(a) $\quad 1{,}4 \cdot 10^{-4}$ $\quad A_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{-Qa} = A_{\mathrm{II}}\cos(Ka)$ $\quad 2{,}5 \times 10^{-11}$ m $\quad$ oui

$\frac{2m}{\hbar^2}(V_{\mathrm{III}}-E)\varphi_{\mathrm{III}}(x)$ $\quad 1 - 5\mathrm{e}^{-2}$ $\quad |\Psi(x,t)|^2 = A^2$ $\quad 7 \times 10^{-21}$ m $\quad$ (a) et (c)

► Réponses et corrigés page 553

# Physique du laser

**Prérequis**
Modèle de l'onde plane progressive harmonique (OPPH).
Module d'onde $k$ et longueur d'onde $\lambda$ du rayonnement : $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$.

**Constantes utiles**
→ Célérité de la lumière dans le vide : $c_0 = 3{,}00 \times 10^8$ m/s
→ Constante de Boltzmann : $k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}$
→ Constante de Planck : $h = 6{,}63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$

## À propos du mode fondamental gaussien

La vibration scalaire d'une onde associée au mode gaussien fondamental peut s'écrire, à une constante multiplicative près, pour une propagation suivant les $z$ croissants, en notant $r$ la distance à l'axe (O$z$),

$$\psi(r,z,t) = \frac{w_0}{w(z)} \exp\left(\frac{-r^2}{w^2(z)}\right) \exp\Big(\mathrm{j}(\omega t - \phi(r,z))\Big),$$

où la phase totale s'écrit

$$\phi(r,z) = kz - \arctan\left(\frac{z}{z_\mathrm{R}}\right) + \frac{kr^2}{2R(z)}.$$

La longueur $w_0$ est appelé le *rayon de pincement* (ou de ceinture) ou *waist du faisceau gaussien*, et la longueur $z_\mathrm{R}$ est appelée la *longueur de Rayleigh*.

L'expression $R(z) = z\left(1 + \dfrac{z_\mathrm{R}^2}{z^2}\right)$ définit le rayon de courbure du front d'onde et $w(z) = w_0\sqrt{1 + \dfrac{z^2}{z_\mathrm{R}^2}}$ définit une mesure de l'extension radiale du faisceau.

**Entraînement 27.1 — Influence de la longueur d'onde sur la directivité.**

Un faisceau gaussien est caractérisé par une longueur de Rayleigh $z_\mathrm{R} = 5{,}00\,\mathrm{cm}$, reliée au waist $w_0$ du laser par la relation

$$z_\mathrm{R} = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}.$$

Calculer le waist pour :

a) un laser bleu de longueur d'onde $\lambda = 450\,\mathrm{nm}$

.....

b) un laser à $CO_2$ avec $\lambda = 10{,}6\,\mu\mathrm{m}$

.....

**Entraînement 27.2 — Modèle équivalent d'un faisceau gaussien pour $z \ll z_R$.**

a) Donner un équivalent simple de $R(z)$ quand $z \ll z_R$ .....

b) Donner un équivalent simple de $w(z)$ au plus bas ordre en $z$ quand $z \ll z_R$.

.....

c) On rappelle que pour $x \ll 1$, on a $\arctan(x) \approx x$.

Déterminer l'expression de $\phi(r, z)$ au plus bas ordre en $z$ quand $z \ll z_R$ et $r^2 \ll \dfrac{z_R}{k}$.

.....

d) Déduire des questions précédentes l'expression de $\psi(z, t)$ pour $z \ll z_R$, $r \ll w_0$ et $z_R \gg kr^2$.

.....

e) À quel type d'onde correspond l'expression précédente de $\psi$ ?

(a) une onde progressive plane harmonique

(b) une onde progressive sphérique harmonique

.....

**Entraînement 27.3 — Modèle équivalent d'un faisceau gaussien pour $z \gg z_R$.**

a) Donner un équivalent simple de $R(z)$ quand $z \gg z_R$. .....

b) Donner un équivalent simple de $w(z)$ quand $z \gg z_R$. .....

c) On rappelle que $\lim\limits_{x \to \infty} \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

Déterminer l'expression de $\phi(r, z)$ au plus bas ordre en $z$ quand $z \gg z_R$ et $z \gg kr^2$.

.....

d) Déduire des questions précédentes l'expression de $\psi(z, t)$ pour $z \gg z_R$, $r \ll w_0$ et $z \gg kr^2$.

.....

e) Quel est le type d'onde associé au faisceau laser pour $z \gg z_R$, $r \ll w_0$ et $z \gg kr^2$ ?

(a) une onde progressive plane harmonique.

(b) une onde progressive sphérique harmonique.

.....

## Entraînement 27.4 — Divergence d'un faisceau gaussien pour $z \gg z_R$.

On suppose que $z \gg z_R$ et on considère que l'extension radiale de l'onde gaussienne est limitée par $w(z)$. L'angle $\theta$, représenté sur la figure ci-contre, définit la divergence angulaire du faisceau.

a) Exprimer $\tan(\theta)$ en fonction de $w_0$ et $z_R$ .....

b) La divergence $\theta$ du faisceau laser :

(a) est d'autant plus grande que $z_R$ est plus grand.

(b) est d'autant plus grande que $z_R$ est plus petit.

(c) indépendante de $z_R$.

.....

## Entraînement 27.5 — Le modèle du faisceau gaussien.

Le champ électrique complexe associé à l'onde électromagnétique d'un laser se propageant suivant les $z$ croissants en un point $M(r, \theta, z)$ s'écrit

$$\underline{\vec{E}}(M, t) = \underline{E}(r, z) \exp(j(kz - \omega t))\vec{e_x}.$$

Dans cette expression, l'amplitude complexe $\underline{E}(r, z)$ s'écrit :

$$\underline{E}(r, z) = E_0 \frac{jz_R}{z + jz_R} \exp\left(-jk \frac{r^2}{2(z + jz_R)}\right),$$

où $z_R$ est une constante positive appelée longueur de Rayleigh et $E_0$ un réel positif.

a) Déterminer $\theta$ pour que le complexe $-jk \dfrac{r^2}{2(z + jz_R)}$ s'écrive sous la forme $\dfrac{-kr^2 z_R}{2(z^2 + z_R^2)} - j\theta$ ; on exprimera $\theta$ en fonction de $k$, $r$, $z$ et $z_R$ .....

On souhaite écrire le carré du module du terme exponentiel $\exp\left(-jk \dfrac{r^2}{2(z + jz_R)}\right)$ de $\underline{E}(r, z)$ sous la forme :

$$\left|\exp\left(-jk \frac{r^2}{2(z + jz_R)}\right)\right|^2 = \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2(z)}\right).$$

b) Exprimer $w^2(z)$ en fonction de $k$, $z$ et $z_R$ .....

c) On écrit $w(z)$ sous la forme $w(z) = w_0 \sqrt{1 + \dfrac{z^2}{z_R^2}}$.

Exprimer la constante $w_0$ ($w_0 > 0$) en fonction de $z_R$ et $\lambda$ .....

d) On note $A(z) = \left|E_0 \dfrac{jz_R}{z + jz_R}\right|$.

Exprimer le produit $A(z)w(z)$ en fonction de $E_0$ et $w_0$ .....

# Interaction lumière-matière, l'effet laser

Lorsqu'une onde lumineuse traverse un milieu matériel, elle interagit avec les atomes le constituant.

On considère pour simplifier que les atomes peuvent peupler seulement deux niveaux d'énergie : le niveau 1 fondamental d'énergie $E_1$ et un niveau 2 excité d'énergie $E_2$.

Il existe trois phénomènes permettant ces transitions énergétiques :

- passage de 1 à 2 par absorption d'un photon d'un rayonnement avec la probabilité par atome et par unité de temps $\dfrac{\mathrm{d}P_{12}}{\mathrm{d}t} = B_{12}u_\nu$, où $u_\nu$ est la densité spectrale d'énergie du rayonnement, c'est-à-dire l'énergie électromagnétique par unité de volume et de fréquence du rayonnement, qui s'exprime en $\mathrm{J \cdot m^{-3} \cdot Hz^{-1}}$ ;
- passage de 2 à 1 par émission spontanée d'un photon avec la probabilité par atome et par unité de temps $\dfrac{\mathrm{d}P_{21}}{\mathrm{d}t} = A_{21}$ ;
- passage de 2 à 1 par émission stimulée causée par un rayonnement avec la probabilité par atome et par unité de temps $\dfrac{\mathrm{d}P_{21}}{\mathrm{d}t} = B_{21}u_\nu$.

Le nombre d'atomes dans un état quelconque $b$ venant d'un état quelconque $a$ est lié à la probabilité d'occurrence du phénomène impliqué de telle manière que $\mathrm{d}N_b = \mathrm{d}P_{ab}N_a$.

**Entraînement 27.6 — Deux intégrales utiles.**

Soit $\alpha$ un réel positif.

a) L'intégrale $I = \displaystyle\int_0^\infty \exp(-\alpha t)\,\mathrm{d}t$ vaut :

(a) $I = 1$ (b) $I = \alpha$ (c) $I = \dfrac{1}{\alpha}$ (d) $I = -\dfrac{1}{\alpha}$

b) En effectuant une intégration par parties, déterminer la valeur de l'intégrale

$$J = \int_0^\infty t\exp(-\alpha t)\,\mathrm{d}t$$

parmi les valeurs suivantes.

*On rappelle que* $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b v(t)u'(t)\,\mathrm{d}t$.

(a) $J = 1$ (b) $J = \alpha$ (c) $J = \dfrac{1}{\alpha}$ (d) $J = \dfrac{1}{\alpha^2}$

**Entraînement 27.7 — Durée de vie d'un niveau excité.**

On considère deux niveaux atomiques d'énergie $E_1$ et $E_2$ (avec $E_2 > E_1$), dont les nombres d'atomes par unité de volume sont notés respectivement $N_1$ et $N_2$.

On ne prend en compte ici pour l'interaction lumière-matière que le phénomène d'émission spontanée.

On admet que la durée de vie moyenne du niveau 2, notée $\tau$, est $\tau = \dfrac{1}{A_{21}}$.

a) Exprimer en fonction de $A_{21}$, $N_2(t)$ et $\mathrm{d}t$, la variation $\mathrm{d}N_2(t)$ de la population d'atomes sur le niveau 2 pendant la durée $\mathrm{d}t$.

.....

b) À l'instant $t = 0$, la population d'atomes sur le niveau 2 est $N_2^0$.

Intégrer l'équation différentielle vérifiée par $N_2(t)$ et en déduire la loi $N_2(t)$ en fonction de $A_{21}$, $N_2^0$ et $t$.

.....

c) On définit la durée de demi-vie du niveau 2 comme la durée $T_{1/2}$ telle que $N_2\big(T_{1/2}\big) = \dfrac{N_2^0}{2}$.

Exprimer $T_{1/2}$ en fonction de $\tau$ .....

**Entraînement 27.8 — Lien entre énergie spectrale et flux surfacique de photons.**

Considérons, ce qui est typiquement le cas pour un rayonnement laser, que la densité spectrale d'énergie volumique $u_\nu$ ne prend de valeurs notables, et est supposée constante $u_0$, que pour des fréquences centrées sur la valeur $\nu$, comprises entre $\nu - \Delta\nu/2$ et $\nu + \Delta\nu/2$.

On note $c$ la célérité de la lumière au sein du faisceau laser, $S$ la section du faisceau et $\mathcal{J}$ le flux surfacique de photons (nombre de photons du rayonnement par unité de temps et unité de surface du faisceau).

a) Exprimer en fonction de $u_0$ et $\Delta\nu$ l'énergie électromagnétique volumique $\varpi$ du rayonnement considéré.

.....

b) En exprimant l'énergie électromagnétique des photons contenus dans le volume $\mathrm{d}V = Sc\,\mathrm{d}t$ balayé pendant la durée $\mathrm{d}t$ de deux manières différentes, l'une faisant intervenir l'éclairement $\mathcal{E}$ du faisceau (puissance moyenne surfacique) et l'autre l'énergie électromagnétique volumique $\varpi$, exprimer $u_0$ en fonction de $c$, $\Delta\nu$, $h\nu$ et $\mathcal{J}$.

*On rappelle que $\mathcal{E} = h\nu\mathcal{J}$.*

.....

**Notations.**

Pour les deux entraînements suivants, on considère les définitions et notations suivantes.

- On définit le flux surfacique de photons, noté $\mathcal{J}$, comme le nombre de photons du rayonnement par unité de temps et unité de surface du faisceau.
- La probabilité d'absorption par atome et par unité de temps est souvent notée $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{P}_{12}}{\mathrm{d}t} = \sigma_{12}\mathcal{J}$ ; la probabilité d'émission induite par atome et par unité de temps est notée $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{P}_{21}}{\mathrm{d}t} = \sigma_{21}\mathcal{J}$.
- On supposera que $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, qu'on note simplement $\sigma$.

**Entraînement 27.9 — Éclairement d'un laser et flux surfacique de photons.**

On note $\mathcal{E}$ l'éclairement d'un faisceau laser, défini comme la puissance moyenne rayonnée par unité de surface.

a) Exprimer l'éclairement $\mathcal{E}$ à l'aide du faisceau au flux surfacique $\mathcal{J}$ de photons et de l'énergie $h\nu$ d'un photon.

.....

b) Quelle est la dimension de $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{P}_{12}}{\mathrm{d}t}$ ou de $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{P}_{21}}{\mathrm{d}t}$ ?

.....

c) En déduire la dimension de $\sigma$.

.....

**Entraînement 27.10 — Équations du laser pour un système à deux niveaux.**

On considère un système à deux niveaux d'énergie dans une cavité fermée de section $S$, caractérisé par les populations atomiques volumiques $N_1(t)$ sur le niveau 1 d'énergie $E_1$ et $N_2(t)$ sur le niveau 2 d'énergie $E_2$ avec $E_2 > E_1$, tel que $N_1(t) + N_2(t) = \mathrm{C}^{\mathrm{ste}}$.

On néglige ici le phénomène d'émission spontanée devant ceux d'absorption et d'émission stimulée.

On note $c$ la célérité de la lumière dans la cavité.

a) Exprimer $\dfrac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t}$ en fonction de $\sigma$, $\mathcal{J}$, $N_1(t)$ et $N_2(t)$ .....

b) En déduire la loi $\dfrac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}$ en fonction de $\sigma$, $\mathcal{J}$ et $D(t)$, où $D(t) = N_2(t) - N_1(t)$.

.....

c) Exprimer l'évolution $\mathrm{d}\mathcal{N}(t)$ du nombre de photons émis dans le volume $\mathrm{d}V = Sc\,\mathrm{d}t$, balayé par le rayonnement dans la cavité pendant la durée $\mathrm{d}t$ en fonction de $c$, $\sigma$, $S$, $\mathcal{J}$, $D(t)$ et $\mathrm{d}t$.

.....

d) Calculer $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{J}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{S}\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{N}}{\mathrm{d}t}$ en fonction de $c$, $\sigma$, $\mathcal{J}$ et $D(t)$ .....

e) Sachant que pour un système à deux niveaux d'énergie, on ne peut qu'avoir $D(t) < 0$, un régime stationnaire dans la cavité est possible pour :

(a) $\mathcal{J} > 0$ (b) $\mathcal{J} < 0$ (c) $\mathcal{J} = 0$

.....

# Considérations énergétiques

**Entraînement 27.11 — Mesure du diamètre d'un faisceau gaussien.**

À partir de mesures de puissances, on cherche à obtenir le diamètre $D$ d'un faisceau laser gaussien qui correspond au diamètre pour lequel l'éclairement du faisceau vaut $\mathcal{E}_0 \times \mathrm{e}^{-1}$, avec $\mathcal{E}_0$ l'éclairement maximal au centre du faisceau comme illustré ci-contre.

On mesure d'abord la puissance $P = 5{,}00\,\mathrm{mW}$ contenue dans le faisceau à l'aide d'un détecteur dont le diamètre est beaucoup plus grand que le faisceau. Cela revient, pour un laser continu, à intégrer son éclairement sur un disque de rayon $\rho$ infini et diviser par une durée $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$, soit

$$P = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \mathcal{E}_0 \mathrm{e}^{-4\frac{\rho^2}{D^2}}\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta.$$

a) Réexprimer $P$ en effectuant le changement de variable $x = 4\dfrac{\rho^2}{D^2}$ .....

b) Calculer l'intégrale et exprimer $P$ en fonction de $\mathcal{E}_0$, $D$ et $\Delta t$ .....

On mesure ensuite la puissance $P' = 4{,}15\,\mathrm{mW}$ contenue dans le faisceau à l'aide du même détecteur mais occulté par un diaphragme de diamètre $d = 2{,}00\,\mathrm{cm}$. Cela correspond à intégrer son éclairement sur un cercle de rayon $\rho = \dfrac{d}{2}$, soit

$$P' = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{2\pi}\int_0^{d/2} \mathcal{E}_0 \mathrm{e}^{-4\frac{\rho^2}{D^2}}\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta.$$

c) Utiliser les résultats précédents pour exprimer $P'$ en fonction de $P$, $D$ et $d$.

.....

d) Exprimer $D$ en fonction de $d$, $P$ et $P'$ .....

e) Calculer $D$ à partir des valeurs fournies .....

**Entraînement 27.12 — Énergies et puissances.**

On s'intéresse à une source laser délivrant des impulsions de durée $\Delta t$ avec une cadence $f$ exprimée en Hz. La puissance moyenne délivrée par la source est notée $\overline{P}$. La puissance d'une impulsion est notée $P_{\text{pulse}}$ et correspond au rapport de l'énergie fournie pendant la durée de l'impulsion et cette durée $\Delta t$.

a) Exprimer l'énergie contenue dans une impulsion $E_{\text{pulse}}$ en fonction de $\overline{P}$ et $f$ .

b) Exprimer la puissance d'une impulsion $P_{\text{pulse}}$ en fonction de $\overline{P}$, $f$ et $\Delta t$ .....

c) À l'aide de la réponse précédente, classer ces sources par ordre croissant de $P_{\text{pulse}}$.

(a) $\overline{P}_a = 20\,\text{W}$ $f_a = 20\,\text{kHz}$ $\Delta t_a = 10\,\text{ns}$

(b) $\overline{P}_b = 8{,}0\,\text{W}$ $f_b = 10\,\text{kHz}$ $\Delta t_b = 2{,}0\,\text{ns}$

(c) $\overline{P}_c = 1{,}8\,\text{W}$ $f_c = 10\,\text{kHz}$ $\Delta t_c = 700\,\text{ps}$

(d) $\overline{P}_d = 1{,}5\,\text{W}$ $f_d = 80\,\text{MHz}$ $\Delta t_d = 140\,\text{fs}$.

.....

## Cavités laser

**Entraînement 27.13 — Intensité transmise par une cavité.**

Une onde lumineuse $S_0$ de longueur d'onde $\lambda$ est orientée vers une cavité constituée de deux miroirs $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ de coefficients de transmission et réflexion $t_1$, $r_1$ et $t_2$, $r_2$. Cette cavité a un indice de réfraction $n$ et une longueur $L$.

La somme des amplitudes en sortie de la cavité est $S = S_0 t_1 t_2\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi/2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}\right)^k$.

Ici, on cherche la valeur de l'intensité en sortie de la cavité $I$, qu'on prendra égale à la norme au carré de la somme des amplitudes $|S|^2$.

a) Utiliser la formule $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \dfrac{1}{1-q}$ pour réexprimer $S$ .....

b) Exprimer $I = |S|^2$ en fonction de $S_0$, $t_1$, $t_2$, $r_1$, $r_2$ et $\sin^2\left(\dfrac{\phi}{2}\right)$.

*On rappelle que* $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ *et* $\cos(\alpha) = 1 - 2\sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

.....

En divisant l'expression de $I$ obtenue précédemment par $(1 - r_1 r_2)^2$ on peut la mettre sous la forme

$$I = \frac{I_{\max}}{1 + m \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}.$$

c) Exprimer $I_{\max}$ en fonction de $S_0$, $t_1$, $t_2$, $r_1$ et $r_2$ .....

d) Exprimer $m$ en fonction de $t_1$, $t_2$, $r_1$ et $r_2$ .....

## Entraînement 27.14 — Amplitudes transmises par une cavité.

Une onde lumineuse $S_0$ de longueur d'onde $\lambda$ est orientée vers une cavité constituée de deux miroirs $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ de coefficients de transmission et réflexion $t_1$, $r_1$ et $t_2$, $r_2$. Cette cavité a un indice de réfraction $n$ et une longueur $L$.

À chaque transmission, l'amplitude complexe de l'onde est multipliée par $t$ ; à chaque réflexion elle est multipliée par $-r$ ; à chaque fois qu'elle parcourt la cavité elle est multipliée par $\mathrm{e}^{i\phi/2}$ avec $\phi = 4\pi\dfrac{nL}{\lambda}$.

Déterminer l'amplitude complexe de l'onde aux points suivants.

a) Au point A

(a) $-S_0 r_1$
(b) $S_0 t_1$
(c) $-S_0 r_2$
(d) $S_0 t_2$

b) Au point C

(a) $-S_0 t_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi/2}$
(b) $-S_0 t_1 r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi/2}$
(c) $S_0 t_1 t_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi/2}$
(d) $S_0 t_1 t_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}$

c) Au point H

(a) $S_0 t_1 r_1 r_2^2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\phi}$
(b) $-S_0 t_1 r_1 r_2^2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\phi}$
(c) $-S_0 t_1 r_1^2 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}3\phi}$
(d) $S_0 t_1 r_1 r_2^2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}3\phi}$

d) Au point $O_1$

(a) $S_0 t_1 t_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}$
(b) $-S_0 t_1 r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi/2}$
(c) $-S_0 t_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi/2}$
(d) $S_0 t_1 t_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi/2}$

e) Au point $O_2$

(a) $-S_0 t_1 t_2 r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}$
(b) $-S_0 t_1 t_2 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}$
(c) $-S_0 t_1 t_2 r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}3\phi/2}$
(d) $S_0 t_1 t_2 r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}3\phi/2}$

f) Au point $O_3$

(a) $-S_0 t_1 t_2 r_1 r_2^2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}5\phi/2}$
(b) $-S_0 t_1 t_2 r_1 r_2^2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\phi}$
(c) $S_0 t_1 t_2 r_1^2 r_2^2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}5\phi/2}$
(d) $S_0 t_1 t_2 r_1^2 r_2^2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\phi}$

## Entraînement 27.15 — Finesse d'une cavité.

L'intensité d'une onde lumineuse en fonction de sa fréquence $\nu$ en sortie d'un cavité laser $I(\nu)$ est illustrée ci-contre. Elle est telle que

$$I(\nu) = \frac{I_{\max}}{1 + m\sin^2\left(2\pi\frac{nL}{c}\nu\right)}.$$

On cherche à déterminer à quelle point la largeur spectrale de l'intensité, soit sa largeur à mi-hauteur $\delta\nu$, est « fine » par rapport à la largeur spectrale libre de la cavité $\Delta\nu = \dfrac{c}{2nL}$.

a) Effectuer le développement limité en 0 à l'ordre 1 de $\sin x$ pour réexprimer $I(\nu)$.

.....

b) Déterminer la valeur positive de $\nu$ pour laquelle $I(\nu) = \dfrac{I_{\max}}{2}$ en fonction de $c$, $n$, $L$ et $m$.

.....

c) En déduire la largeur spectrale de l'intensité $\delta\nu$ en fonction de $c$, $n$, $L$ et $m$.

.....

d) Exprimer la finesse $F = \dfrac{\Delta\nu}{\delta\nu}$ de la cavité en fonction de $m$ .....

**Réponses mélangées**

$\dfrac{\pi\sqrt{m}}{2}$ $\quad P\left(1 - \mathrm{e}^{-d^2/D^2}\right)$ $\quad kz - \dfrac{\pi}{2}$ $\quad \dfrac{w_0}{z_{\mathrm{R}}}$ $\quad \mathcal{E}_0\dfrac{\pi D^2}{4\Delta t}$ $\quad$ (b)

$I(\nu) = \dfrac{I_{\max}}{1 + m\left(2\pi\frac{nL}{c}\nu\right)^2}$ $\quad \dfrac{\mathcal{J}h\nu}{c\Delta\nu}$ $\quad$ (b) $\quad \sigma\mathcal{J}(N_1(t) - N_2(t))$ $\quad$ (a) $\quad$ (b)

(c) $\quad h\nu\mathcal{J}$ $\quad \dfrac{4r_1r_2}{(1 - r_1r_2)^2}$ $\quad$ (d) $\quad 84{,}6\,\mu\mathrm{m}$ $\quad \dfrac{z_{\mathrm{R}}^2}{z}$ $\quad$ (b) $\quad -A_{21}N_2(t)\,\mathrm{d}t$

$-2\sigma\mathcal{J}D(t)$ $\quad w_0\dfrac{z}{z_{\mathrm{R}}}$ $\quad \left(k - \dfrac{1}{z_{\mathrm{R}}}\right)z$ $\quad \dfrac{P}{f\Delta t}$ $\quad \dfrac{S_0^2t_1^2t_2^2}{(1 - r_1r_2)^2 + 4r_1r_2\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$

$u_0\Delta\nu$ $\quad$ (a) $\quad 0{,}411\,\mathrm{mm}$ $\quad$ (c) $\quad \tau\ln(2)$ $\quad E_0w_0$ $\quad L^2$ $\quad \dfrac{c}{\pi nL\sqrt{m}}$

$\dfrac{c}{2\pi nL\sqrt{m}}$ $\quad \dfrac{S_0^2t_1^2t_2^2}{(1 - r_1r_2)^2}$ $\quad N_2^0\exp(-A_{21}t)$ $\quad$ (c) $\quad \exp\left[\mathrm{j}\left(\omega t - \left(k - \dfrac{1}{z_{\mathrm{R}}}\right)z\right)\right]$

$\dfrac{z_{\mathrm{R}}}{z}\exp\left[\mathrm{j}\left(\omega t - kz + \dfrac{\pi}{2}\right)\right]$ $\quad Sc\sigma\mathcal{J}(N_2(t) - N_1(t))\,\mathrm{d}t$ $\quad T^{-1}$ $\quad$ (b) ; (c) ; (d) ; (a)

$\dfrac{P}{f}$ $\quad d\sqrt{\dfrac{-1}{\ln\left(1 - \frac{P'}{P}\right)}}$ $\quad \dfrac{2z_{\mathrm{R}}}{k}\left(1 + \dfrac{z^2}{z_{\mathrm{R}}^2}\right)$ $\quad z$ $\quad 1{,}50\,\mathrm{cm}$ $\quad c\sigma\mathcal{J}D(t)$ $\quad$ (d)

$w_0$ $\quad \sqrt{\dfrac{\lambda z_{\mathrm{R}}}{\pi}}$ $\quad k\dfrac{zr^2}{2(z^2 + z_{\mathrm{R}}^2)}$ $\quad$ (d) $\quad \dfrac{S_0t_1t_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi/2}}{1 - r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}}$ $\quad \dfrac{1}{\Delta t}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\mathcal{E}_0\dfrac{D^2}{8}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta$

► Réponses et corrigés page 560

# Puissance en régime sinusoïdal

**Prérequis**

- Pour une impédance complexe écrite en écriture algébrique $\underline{Z} = a + \mathrm{j}b$, on définit :
  - ▷ le module $|\underline{Z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ;
  - ▷ l'argument $\varphi = \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right)$ et on lui associe un facteur de puissance $\cos(\varphi) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

  On peut ainsi l'écrire également : $\underline{Z} = |\underline{Z}|e^{\mathrm{j}\varphi}$.
- Valeur efficace d'un signal $s$ : $S_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s^2(t)\rangle}$.
- Puissance moyenne pour un signal sinusoïdal : $P_{\text{moy}} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\varphi)$, où $\cos(\varphi)$ est le facteur de puissance.
- Aux bornes d'un dipôle d'impédance $\underline{Z}$,

$$P_{\text{moy}} = \mathsf{Re}(\underline{Z}) I_{\text{eff}}^2 = \mathsf{Re}(\underline{Y}) U_{\text{eff}}^2,$$

  où $\underline{Y} = \dfrac{1}{\underline{Z}}$ est l'admittance du dipôle.

*Les entraînements de cette fiche utilisent des valeurs numériques volontairement rondes afin de simplifier les calculs. Il aurait bien entendu été plus intéressant d'utiliser des valeurs correspondantes à des données réelles :* 50 Hz *pour les fréquences et* 230 V *pour les valeurs efficaces de tension.*

## Calcul sur les impédances

### Entraînement 28.1 — Association d'éléments en série.

On considère différentes associations de dipôles en série alimentées avec une pulsation $\omega = 1{,}0 \times 10^4\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Pour une résistance $R$ de $10\,\Omega$ :

a) Calculer le module de l'impédance.

.....

b) Calculer le facteur de puissance.

.....

Pour une résistance $R$ de $10\,\Omega$ en série avec une bobine $L$ d'inductance 2,0 mH :

c) Calculer le module de l'impédance.

.....

d) Calculer le facteur de puissance.

.....

Pour une résistance $R$ de $10\,\Omega$ en série avec une bobine $L$ d'inductance 2,0 mH suivie d'un condensateur $C$ de capacité 10 µF :

e) Calculer le module de l'impédance.

.....

f) Calculer le facteur de puissance.

.....

**Entraînement 28.2 — Association d'éléments en dérivation.**

On considère différentes associations de dipôles en parallèle, alimentées avec une pulsation

$$\omega = 1{,}0 \times 10^4\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}.$$

Pour une résistance $R$ de $10\,\Omega$ en parallèle avec une bobine $L$ d'inductance $2{,}0\,\mathrm{mH}$ :

a) Quelle est l'expression correcte de l'impédance ?

(a) $\underline{Z} = \dfrac{20\mathrm{j}}{1{,}0 - 20\mathrm{j}}$

(b) $\underline{Z} = \dfrac{20\mathrm{j}}{1{,}0 + 2{,}0\mathrm{j}}$

(c) $\underline{Z} = \dfrac{1{,}0 + 20\mathrm{j}}{2{,}0\mathrm{j}}$

(d) $\underline{Z} = \dfrac{1{,}0 + 2{,}0\mathrm{j}}{20\mathrm{j}}$

.....

b) Calculer le module de l'impédance .....

c) Calculer le facteur de puissance .....

Pour une résistance $R$ de $10\,\Omega$ en parallèle avec une bobine $L$ d'inductance $2{,}0\,\mathrm{mH}$ suivi d'un condensateur $C$ de capacité $10\,\mu\mathrm{F}$ également en parallèle :

d) Quelle est l'expression correcte de l'impédance ?

(a) $\underline{Z} = \dfrac{20\mathrm{j}}{2{,}0 + 1{,}0\mathrm{j}}$

(b) $\underline{Z} = \dfrac{20\mathrm{j}}{1{,}0 - 20\mathrm{j}}$

(c) $\underline{Z} = \dfrac{2{,}0 + 10\mathrm{j}}{1{,}0\mathrm{j}}$

(d) $\underline{Z} = \dfrac{1{,}0 - 2{,}0\mathrm{j}}{20\mathrm{j}}$

.....

e) Calculer le module de l'impédance .....

f) Calculer le facteur de puissance .....

**Entraînement 28.3 — Associations hybrides.**

On considère deux dipôles ci-dessous, alimentés avec une pulsation $\omega = 1{,}0 \times 10^4\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$.

Celui de gauche modélise l'étage capacitif d'un dispositif abaisseur de tension quand celui de droite modélise un sèche-cheveux.

a) Quelle est l'expression correcte de l'impédance pour le dipôle $AB$ pour lequel on choisit $R = 10\,\Omega$ et $C = 10\,\mu\mathrm{F}$ ?

(a) $\underline{Z} = 10\dfrac{10}{1{,}0 + 1{,}0\mathrm{j}}$

(b) $\underline{Z} = 5\dfrac{1{,}0 - 3{,}0\mathrm{j}}{1{,}0 - 20\mathrm{j}}$

(c) $\underline{Z} = 10\dfrac{2{,}0 + 1{,}0\mathrm{j}}{1{,}0 + 1{,}0\mathrm{j}}$

(d) $\underline{Z} = 5 \times (3{,}0 - 2{,}0\mathrm{j})$

..... 

b) Calculer le module de cette impédance .....

c) Pour ce même dipôle, calculer le facteur de puissance .....

d) Quelle est l'expression correcte de l'impédance pour le dipôle $A'B'$ pour lequel on choisit $R = 10\,\Omega$ et $L = 2{,}0\,\mathrm{mH}$.

(a) $\underline{Z} = 5\dfrac{1{,}0 + 1{,}0\mathrm{j}}{1{,}0 + 2{,}0\mathrm{j}}$

(b) $\underline{Z} = 5\dfrac{1{,}0 + 2{,}0\mathrm{j}}{1{,}0 + 1{,}0\mathrm{j}}$

(c) $\underline{Z} = \dfrac{2,5}{3{,}0 + 2{,}0\mathrm{j}}$

(d) $\underline{Z} = 5 \times (3{,}0 + 2{,}0\mathrm{j})$

..... 

e) Calculer le module de cette impédance .....

f) Pour ce même dipôle, calculer le facteur de puissance .....

# Tracer et exploiter des schémas de Fresnel

**Entraînement 28.4 — Un diagramme, un dipôle.**

On considère les quatre dipôles donnés ci-dessous.

(1)

(2)

(3)

(4)

À chacun des diagrammes de Fresnel proposés, associer l'un des dipôles donnés ci-dessus.

*Pour les propositions a) et b), $\vec{U}$ constitue la référence des phases et pour les propositions c) et d), $\vec{I}$ constitue la référence des phases.*

a)

.....

b)

.....

c)

.....

d)

.....

**Entraînement 28.5 — Diagramme de Fresnel pour les éléments en série.**

On considère une alimentation de pulsation $\omega = 1{,}0 \times 10^4\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ et de tension efficace 100 V. Pour chacune des modélisations d'installations suivantes, choisir le schéma de Fresnel les représentant correctement en utilisant la loi des mailles.

*Dans chacun des cas, le vecteur intensité $\vec{I}$ constitue la référence des phases.*

a) Une résistance $R$ de 10 Ω.

.....

b) Une résistance $R$ de 10 Ω en série avec une bobine $L$ d'inductance 2,0 mH.

.....

c) Une résistance $R$ de 10 Ω en série avec une bobine $L$ d'inductance 2,0 mH et un condensateur $C$ de capacité 10 µF.

.....

**Entraînement 28.6 — Diagramme de Fresnel pour les éléments en dérivation.**

On considère une alimentation de pulsation $\omega = 1{,}0 \times 10^4\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ et de tension efficace 100 V.

Pour chacune des modélisations d'installations suivantes, choisir le schéma de Fresnel les représentant correctement en utilisant la loi des nœuds.

*Dans chacun des cas, le vecteur tension $\vec{U}$ constitue la référence des phases.*

a) une résistance $R$ de $10\,\Omega$ en parallèle avec une bobine $L$ d'inductance 2,0 mH.

a

b

c

d

. . . . . .

b) une résistance $R$ de $10\,\Omega$ en parallèle avec une bobine $L$ d'inductance 2,0 mH suivi d'un condensateur $C$ de capacité 10 µF également en parallèle.

a

b

c

d

. . . . . .

**Entraînement 28.7 — Diagramme pour associations hybrides.**

On considère deux dipôles ci-dessous, alimentés par une tension de pulsation $\omega = 1{,}0 \times 10^4\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ et de valeur efficace 100 V.

On donne les valeurs des modules des impédances de chacun des dipôles :

$$|\underline{Z}_{AB}| = 16\,\Omega \quad \text{et} \quad |\underline{Z}_{A'B'}| = 7{,}9\,\Omega.$$

a) Pour le dipôle $AB$, calculer le facteur de puissance $\cos(\varphi_1)$ de l'association résistance et condensateur en parallèle dont on notera l'impédance équivalente $\underline{Z}_{RC}$.

*On prendra* $R = 10\,\Omega$ *et* $C = 10\,\mu\mathrm{F}$.

.....

b) En utilisant la loi des mailles et en calculant la valeur de la tension aux bornes de $\underline{Z}_{RC}$, choisir le schéma de Fresnel qui représente correctement la situation. Le vecteur intensité $\vec{I}$ constitue la référence et $\vec{U}$ la tension aux bornes de $AB$.

.....

c) Pour le dipôle $A'B'$, calculer le facteur de puissance $\cos(\varphi_2)$ de l'association résistance et bobine en série.

*On prendra* $R = 10\,\Omega$ *et* $L = 2{,}0\,\mathrm{mH}$.

.....

d) En utilisant la loi des nœuds, choisir le schéma de Fresnel qui représente correctement la situation. Le vecteur tension $\vec{U}$ constitue la référence et $\vec{I}$ l'intensité du courant circulant entre $A'$ et $B'$.

.....

**Entraînement 28.8 — Diagramme de Fresnel d'un dipôle inconnu.**

On cherche à caractériser une installation industrielle. Parmi les informations dont on dispose, se trouve le diagramme de Fresnel suivant décrivant la tension aux bornes de cette installation modélisée par un dipôle d'impédance $\underline{Z}$.

On l'alimente avec une tension de valeur efficace 100 V et on mesure une pulsation $\omega = 1{,}0 \times 10^4$ rad/s ainsi qu'une intensité de valeur efficace 2,0 A.

a) Quelle association le diagramme ci-dessus décrit-il ?

(a) $R$ et $C$ en série
(b) $R$ et $L$ en série
(c) $L$ et $C$ en série
(d) $R$ et $C$ en parallèle

.....

b) Calculer le module de l'impédance $\underline{Z}$.

.....

c) Mesurer le facteur de puissance du dipôle inconnu en exploitant le diagramme donné ci-dessus.

.....

d) Calculer la résistance de l'association identifiée plus tôt.

.....

e) Calculer l'inductance de la bobine de l'association identifiée plus tôt.

.....

## Calcul de puissance à partir des impédances

**Entraînement 28.9 — Courants efficaces.**

On considère le circuit ci-contre.

Le dipôle $R$ est une résistance et le dipôle $D$ est décrit par un facteur de puissance $\cos(\varphi) = 0{,}7$.

On mesure les valeurs efficaces des courants $i_R$ et $i_D$ et on obtient $I_{R,\text{eff}} = 5{,}0$ A et $I_{D,\text{eff}} = 2{,}0$ A. On mesure de plus la valeur efficace de $u$ qui vaut 100 V.

a) Exprimer le déphasage entre $i_R$ et $i_D$ en fonction de $\varphi$ .....

b) Exprimer $I_{\text{eff}}$ la valeur efficace de $i$ en fonction de $I_{R,\text{eff}}$, $I_{D,\text{eff}}$ et $\cos(\varphi)$ en utilisant la loi des nœuds.

.....

c) Calculer la valeur efficace de $i$ .....

d) Calculer la valeur du module de l'impédance de l'association parallèle entre $R$ et $D$.

.....

**Entraînement 28.10 — Calcul de puissance pour les éléments en série.**

On considère une alimentation de pulsation $\omega = 1{,}0 \times 10^4\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ et de tension efficace 100 V.

Calculer la puissance moyenne consommée par les dipôles ci-dessous :

a) Une résistance $R$ de $10\,\Omega$ .....

b) Une résistance de $10\,\Omega$ en série avec une bobine $L$ d'inductance 2,0 mH.

*On donne la valeur du module de leur impédance équivalente :* $22\,\Omega$ *et de son argument :* 64°.

.....

c) Une résistance de $10\,\Omega$ en série avec une bobine $L$ d'inductance 2,0 mH et un condensateur $C$ de capacité 10 µF.

*On donne la valeur du module de leur impédance équivalente :* $14\,\Omega$ *et de son argument :* 40°.

.....

**Entraînement 28.11 — Calcul de puissance pour les éléments en dérivation.**

On considère une alimentation de pulsation $\omega = 1{,}0 \times 10^4\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ et de tension efficace 100 V.

Calculer la puissance moyenne consommée par les dipôles ci-dessous :

a) Une résistance de $10\,\Omega$ en parallèle avec une bobine $L$ d'inductance 2,0 mH.

*On donne la valeur du module de leur impédance équivalente :* $9{,}0\,\Omega$.

.....

b) Une résistance $R$ de $10\,\Omega$ en parallèle avec une bobine $L$ d'inductance 2,0 mH suivi d'un condensateur $C$ de capacité 10 µF également en parallèle.

*On donne la valeur du module de leur impédance équivalente :* $9{,}0\,\Omega$.

.....

**Réponses mélangées**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $15\,\Omega$ | a | b | $50\,\Omega$ | 0,95 | $\sqrt{I_{R,\mathrm{eff}}^2 + I_{D,\mathrm{eff}}^2 + 2I_{R,\mathrm{eff}}I_{D,\mathrm{eff}}\cos(\varphi)}$ | d | | | |
| 0,45 | $16\,\Omega$ | $1{,}0 \times 10^3$ W | 0,71 | b | $43\,\Omega$ | $8{,}9\,\Omega$ | $1{,}0 \times 10^3$ W | | |
| 0,95 | b | $2{,}0 \times 10^2$ W | $22\,\Omega$ | $5{,}0 \times 10^2$ W | b | d | $8{,}9\,\Omega$ | 6,6 A | |
| a | a | $1{,}0 \times 10^3$ W | $7{,}9\,\Omega$ | $\pm\varphi$ | (2) | 1 | 0,89 | 0,45 | b |
| 2,5 mH | 0,71 | c | b | (4) | 0,87 | 0,89 | (3) | (1) | $10\,\Omega$ | $14\,\Omega$ |

► Réponses et corrigés page 571

# Transformateurs

**Prérequis**

• Loi des tensions et des courants

Pour un transformateur parfait ou idéal comportant $N_1$ spires au primaire et $N_2$ spires au secondaire, si les flèches des tensions et des courants sont dirigées vers les bornes homologues alors :

$$\frac{\text{tension au secondaire}}{\text{tension au primaire}} = \frac{N_2}{N_1} = m \qquad \text{et} \qquad \frac{\text{courant au secondaire}}{\text{courant au primaire}} = -\frac{N_1}{N_2} = -\frac{1}{m},$$

où $m$ est le rapport de transformation.

• Modèle équivalent du transformateur parfait rapporté au primaire

L'impédance $\underline{Z}$ du secondaire ramenée au primaire s'écrit $\dfrac{\underline{Z}}{m^2}$.

• Modèle équivalent du transformateur parfait rapporté au secondaire

La force électromotrice $e$ et l'impédance $\underline{Z}$ en série du primaire ramenées au primaire s'écrivent respectivement $me$ et $m^2\underline{Z}$.

## Loi des tensions et des courants

**Entraînement 29.1 — Loi en tension et en courant.**

On considère le circuit suivant. Le transformateur parfait de rapport $m = 2$ est alimenté par un signal $e(t) = E\cos(2\pi f t)$ où $f$ est la fréquence et $E$ l'amplitude du signal.

Le secondaire est relié à une résistance $R$.

Donner les expressions en fonction de $m$, $E$, $f$ et $R$ des grandeurs suivantes :

a) $u_2(t)$ .....

b) $i_2(t)$ .....

c) $i_1(t)$ .....

**Entraînement 29.2 — Bornes homologues.**

Exprimer les rapports suivants en fonction du rapport de transformation $m$.

Pour ce premier schéma :

a) $\dfrac{u_2}{u_1} =$ .....

b) $\dfrac{i_2}{i_1} =$ .....

De même pour cet autre schéma :

c) $\dfrac{u_2}{u_1} =$ .....

d) $\dfrac{i_2}{i_1} =$ .....

**Entraînement 29.3 — Conception d'un transformateur.**

On considère un transformateur parfait alimenté en tension efficace 230 V et parcouru par un courant de 1,0 A efficace. Le primaire est constitué de 500 spires et le transformateur est considéré parfait.

Le secondaire est connecté à une résistance de charge.

a) De combien de spires doit être constitué le secondaire pour abaisser la tension de 25,0% ?

.....

b) De combien de spires doit être constitué le secondaire pour obtenir un courant de valeur efficace 2,0 A en sortie ? .....

c) Le secondaire est constitué de 200 spires.

Calculer les valeurs efficaces de la tension et de l'intensité obtenues en sortie du transformateur.

.....

d) Calculer la puissance moyenne fournie en sortie .....

e) Calculer la puissance moyenne absorbée en entrée .....

# Modèles équivalents du transformateur parfait

**Entraînement 29.4 — Relations entre les grandeurs d'entrée et de sortie.**

On considère le montage ci-dessous.

Les relations ci-dessous sont-elles vraies ou fausses ?

a) $u_1 = e - R_1 i_1$ .....

b) $u_2 = me - m^2 R_1 i_2$ .....

c) $u_1 = \dfrac{R_2}{m^2} i_1$ .....

d) $u_2 = me + m^2 R_2 i_2$ .....

e) $i_2 = \dfrac{me}{R_2 + m^2 R_1}$ .....

f) $i_1 = \dfrac{e}{R_1 + \frac{R_2}{m^2}}$ .....

**Entraînement 29.5 — Impédances ramenées au primaire ou au secondaire.**

Les impédances ramenées permettent de s'affranchir des conventions des bornes homologues.

a) Exprimer l'impédance complexe du primaire ramenée au secondaire.

.....

b) Exprimer l'impédance du secondaire ramenée au primaire.

.....

c) Exprimer la tension aux bornes du générateur ramenée au secondaire.

.....

**Entraînement 29.6 — Facteur de puissance d'un transformateur (I).**

On considère le circuit suivant comportant un transformateur parfait de rapport de transformation $m = 2$ :

où $e(t)$ est une tension alternative de valeur efficace $E = 230\,\text{V}$ et de fréquence $50\,\text{Hz}$, où $R_0 = R = 100\,\Omega$ et où $L = 0{,}30\,\text{H}$.

a) Exprimer l'impédance complexe du secondaire ramenée au primaire en fonction de $L$, $R$, $m$ et $\omega$.

.....

b) Calculer la valeur numérique du facteur de puissance de cette impédance.

.....

c) Parmi les diagrammes de Fresnel ci-dessous, lequel représente correctement les tensions du circuit.

.....

d) Calculer la valeur numérique du facteur de puissance du générateur.

*On pourra s'appuyer sur le diagramme trouvé à la question précédente.*

.....

**Entraînement 29.7 — Facteur de puissance d'un transformateur (II).**

On considère le circuit suivant comportant un transformateur de rapport de transformation $m = 2$.

où $e(t)$ est une tension alternative de valeur efficace $E = 230\,\text{V}$ et de fréquence $50\,\text{Hz}$, $R_0 = 100\,\Omega$ l'impédance $\underline{Z}$ modélise une installation de facteur de puissance $\cos(\varphi) = 0,80$ et on donne $|\underline{Z}| = 100\,\Omega$.

a) Exprimer l'impédance complexe du secondaire ramenée au primaire en fonction de $\underline{Z}$ et $m$.

.....

b) Calculer la valeur numérique du facteur de puissance de cette impédance.

.....

c) Parmi les diagrammes de Fresnel ci-dessous, lequel représente correctement les tensions du circuit ?

.....

d) Calculer la valeur de l'intensité efficace $I_0$ du courant traversant $R_0$.

.....

e) Calculer la valeur de l'intensité efficace $I_e$ du courant traversant le circuit primaire.

.....

f) Calculer la valeur du facteur de puissance du générateur.

.....

# Relations entrée-sortie du transformateur

La loi de Faraday permet de calculer la force électromotrice induite $e$ dans un circuit soumis à un flux de champ magnétique $\phi$ variable s'écrit : $e = -\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$.

Le théorème d'Ampère dans les milieux magnétiques s'écrit

$$\oint_\Gamma \vec{H} \cdot \vec{\mathrm{d}\ell} = I_{\text{libre, enlacé}},$$

où $\vec{H}$ est l'excitation magnétique et $I_{\text{libre, enlacé}}$ l'intensité du courant enlacé par le contour d'Ampère $\Gamma$ orienté et fermé.

**Entraînement 29.8 — Transformateurs pour différents circuits magnétique.**

On considère les trois circuits magnétiques suivants :

Les courants génèrent une excitation magnétique $\vec{H}$. On note $B_1$ (respectivement $B_2$) les normes du champ magnétique et $\Phi_1$ (resp. $\Phi_2$) le flux magnétique dans le primaire (resp. secondaire). L'excitation magnétique et les champs magnétiques sont orientés selon le contour $\Gamma$.

Indiquer pour quel(s) circuit(s) les relations ci-dessous sont vraies.

a) $\oint_\Gamma \vec{H} \cdot \vec{\mathrm{d}\ell} = N_1 i_1 + N_2 i_2$ ..

b) $\oint_\Gamma \vec{H} \cdot \vec{\mathrm{d}\ell} = N_1 i_1 - N_2 i_2$ ..

c) $\Phi_1 = N_1 \dfrac{S}{2} B_1$ .....

d) $\Phi_2 = N_2 S B_2$ .....

e) $B_1 \dfrac{S}{2} = B_2 S$ .....

f) $B_1 S = B_2 S$ .....

g) $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{2N_2}{N_1}$ .....

h) $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{N_2}{N_1}$ .....

# Utilisation des transformateurs

**Entraînement 29.9 — Transformateur et puissance.**

Un transformateur que l'on considère parfait comporte 1000 spires au primaire. Le rapport de transformation est égal à $m = 0{,}10$.

Le primaire est alimenté par une tension de fréquence $f = 50\,\text{Hz}$ et de valeur efficace $E = 500\,\text{V}$. Un moteur de puissance $\mathcal{P} = 500\,\text{W}$ et de facteur de puissance $\cos(\varphi) = 0{,}50$ est branché au secondaire.

On rappelle que la puissance moyenne se calcule à l'aide de la formule suivant $P_{\text{moy}} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\varphi)$.

a) Quel est le nombre de spires au secondaire ? .....

b) Calculer la valeur de la tension efficace au secondaire .....

c) Calculer la valeur de l'intensité efficace du courant circulant dans le secondaire ..

d) Calculer la valeur de l'intensité efficace du courant circulant dans le primaire ....

**Entraînement 29.10 — Pertes en ligne.**

On s'intéresse à une ligne électrique reliant une source à une installation de facteur de puissance $\cos(\varphi)$. On modélise les pertes en ligne par une résistance $R_\ell$.

On considèrera par la suite que $u_i(t) = u_s(t)$, la résistance $R_\ell$ influant peu sur la tension reçue au niveau de l'installation. On donne les expressions suivantes :

$$u_s(t) = U_0\sqrt{2}\cos(2\pi f t) \quad \text{et} \quad i_s(t) = I_0\sqrt{2}\cos(2\pi f t).$$

On note $\mathcal{P}$ la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans la ligne.

a) Donner l'expression de cette puissance .....

b) Donner l'expression de la puissance moyenne $\mathcal{P}_i$ absorbée par l'installation .....

On en déduit que la puissance dissipée par effet Joule s'exprime :

$$\mathcal{P} = \frac{R_\ell \mathcal{P}_i^2}{U_0^2 \cos^2(\varphi)}.$$

On place en sortie de la source un transformateur permettant d'élever la tension de 230 V à 400 kV.

c) De quel facteur la puissance dissipée par effet Joule est-elle réduite ? .....

**Entraînement 29.11 — Chargeur de portable.**

Un chargeur de portable est laissé branché sur le réseau EDF sans être connecté à un téléphone. Le chargeur comprend, entre autres, un transformateur. L'application du théorème d'Ampère dans le noyau du transformateur permet d'écrire :

$$\oint \vec{H} \cdot \vec{\mathrm{d}\ell} = \frac{B\ell}{\mu_0 \mu_r} = N_1 i_1 + N_2 i_2.$$

a) La tension efficace fournie par EDF est de $U = 230\,\mathrm{V}$. Calculer la valeur du rapport de tension pour avoir une tension de sortie efficace de 6,0 V en fonctionnement nominal .....

b) Que vaut $i_2$ ? .....

c) Dans le modèle du transformateur parfait, la loi de transformation en courant est vérifiée, quelle serait la valeur de $i_1$ ? .....

En fait, lorsque dans cette situation, le terme $\dfrac{B\ell}{\mu_0 \mu_r}$ ne peut plus être négligé devant les autres termes. Le transformateur est alors équivalent à :

d) Calculer la valeur de $R$ sachant que la puissance consommée par le transformateur est $\mathcal{P} = 0{,}30\,\mathrm{W}$.

.....

e) Calculer l'énergie consommée sur un an en Mégajoules .....

f) Convertir l'énergie trouvée en kWh .....

**Réponses mélangées**

$\dfrac{R_2}{m^2} + \dfrac{1}{jC\omega m^2}$ vrai 250 $-\dfrac{1}{m}$ $2{,}6 \times 10^{-2}$ 0,73 50 V $\dfrac{\underline{Z}}{m^2}$

(1), (2) et (3) faux 0 A $me$ faux 9,5 MJ $U_0 I_0 \cos(\varphi)$

$-m$ 20 A 2,3 A $-\dfrac{mE}{R}\cos(2\pi f t)$ (2) 0,87 2,6 kWh (3)

(1) 230 W $R_\ell I_0^2$ $\dfrac{R}{m^2} + \dfrac{\mathrm{j}L\omega}{m^2}$ c 2 A b (2) et (3)

0 A aucun faux 9,2 A 180 kΩ $\dfrac{m^2 E}{R}\cos(2\pi f t)$ $\dfrac{1}{m}$

100 spires $m$ vrai $m^2 R_1 + jL\omega m^2$ 0,98 375 vrai 0,80

92 V et 2,5 A $mE\cos(2\pi f t)$ (2) $3{,}0 \times 10^6$ 230 W (2) et (3)

► Réponses et corrigés page 571

# Conversion électro-magnéto-mécanique

**Prérequis**

Selon la loi des mailles, la somme algébrique des tensions le long d'une maille est nulle.

Énergie stockée dans une bobine : $\mathcal{E}_{\text{mag}} = \dfrac{1}{2}Li^2$.

Théorème du moment cinétique pour un solide en rotation : $J\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{M}$.

La notation $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_y$ désigne la dérivée partielle de la fonction $f$ par rapport à $x$, « à $y$ constant ».

**Conversions d'unités**

$\rightarrow$ 1 tour/s = 60 tours/min = $2\pi$ rad/s

## Champ magnétique

### Entraînement 30.1 — Lignes de champ.

Les lignes de champ « tournent » autour des courants et sont guidées par les matériaux ferromagnétiques.

Dessiner l'allure des lignes de champ pour les machines ci-dessous en les orientant de manière cohérente avec le choix d'orientation du courant (dans le sens de la main droite).

a) .....

c) .....

b) .....

d) .....

**Entraînement 30.2 — Champ magnétique pour un contacteur.**

On cherche à déterminer le champ magnétique supposé orienté selon $x$, dans l'entrefer d'épaisseur $e$ d'un contacteur. Le matériau ferromagnétique est doux, hors saturation, de section constante et a une perméabilité magnétique relative $\mu_r$.

On suppose que le plan (O$xz$) est un plan de symétrie de la distribution de courant.

On note $\overrightarrow{B_1} = B_1\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{B_2} = B_2\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{B_3}$, $\overrightarrow{B_4}$ (respectivement $\overrightarrow{H_1} = H_1\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{H_2} = H_2\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{H_3}$, $\overrightarrow{H_4}$) les champs magnétiques (respectivement les excitations magnétiques colinéaires aux champs magnétiques) dans l'entrefer du bas, l'entrefer du haut, le milieu en forme de « I » et le milieu en forme de « C » respectivement.

On rappelle le théorème d'Ampère magnétique :

$$\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = I_{\text{enlacé par } \mathcal{C}}.$$

La ligne de champ moyenne a une longueur $l_C$ dans le matériau ferromagnétique de gauche, en forme de « C » (tirets) et $l_I$ dans celui de droite, en forme de « I » (pointillés).

a) Parmi les vecteurs suivants, lesquels sont orientés dans un sens cohérent avec le choix d'orientation du courant (sens de la main droite) ?

(a) $\overrightarrow{B_1}$ (b) $\overrightarrow{B_2}$ (c) $\overrightarrow{B_3}$ (d) $\overrightarrow{B_4}$

.....

b) À l'aide de la conservation du flux magnétique, exprimer $\|\overrightarrow{B_2}\|$, $\|\overrightarrow{B_3}\|$ et $\|\overrightarrow{B_4}\|$ en fonction de $\|\overrightarrow{B_1}\|$.

.....

c) À l'aide du théorème d'Ampère, exprimer $I$ en fonction de $H_1$, $H_2$, $H_3$, $H_4$ et $N$.

.....

d) En déduire $B_1$.

.....

**Entraînement 30.3 — Champ magnétique pour une machine synchrone.**

On cherche à déterminer le champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e_r}$, supposé radial, dans l'entrefer d'une machine synchrone. Le matériau ferromagnétique est doux, hors saturation et a une perméabilité magnétique infinie. La distribution de courant est supposée invariante par translation selon $\vec{e_z}$.

On rappelle que les plans de symétrie (respectivement d'antisymétrie) de la distribution de courant sont des plans d'antisymétrie (respectivement de symétrie) du champ magnétique.

a) Le plan (O$xz$) est-il un plan de symétrie ou d'antisymétrie pour $\vec{B}$ ?

b) Le plan (O$yz$) est-il un plan de symétrie ou d'antisymétrie pour $\vec{B}$ ?

c) Exprimer $B(r, -\theta)$ en fonction de $B(r, \theta)$ .....

d) Exprimer $B(r, \pi - \theta)$ en fonction de $B(r, \theta)$ .....

e) Que vaut $H$ dans le matériau ferromagnétique ? .....

f) Appliquer le théorème d'Ampère sur la ligne de champ représentée et déterminer $H$ dans l'entrefer pour $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

.....

g) Exprimer $B$ dans l'entrefer pour $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .....

h) Exprimer $B$ dans l'entrefer pour $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ .....

# Du champ magnétique à l'action

**Entraînement 30.4 — Conversions.**

Pour une machine synchrone, la condition de synchronisme s'écrit $\Omega = \omega$, où $\Omega$ est la vitesse de rotation du rotor et où $\omega$ est la pulsation de la tension d'alimentation du stator.

Sans calculatrice, déterminer les grandeurs suivantes.

a) La vitesse de rotation en $\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ pour une fréquence $f = 60\,\mathrm{Hz}$ .....

b) La vitesse de rotation en tour par minute pour une fréquence $f = 50\,\mathrm{Hz}$ .....

c) La fréquence nécessaire pour avoir une vitesse de rotation de $630\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ .....

d) La fréquence nécessaire pour avoir une vitesse de rotation de $9\,000\,\mathrm{tour \cdot min^{-1}}$ ..

**Entraînement 30.5 — Calcul de dérivées.**

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes.

a) $\mathcal{E}_1(\theta_r) = A + B\cos(\omega t - \theta_r)$ .....

b) $\mathcal{E}_2(x) = \dfrac{A}{B + Cx}$ .....

c) $\mathcal{E}_3(x) = A + B\cos(\omega t - kx)$ .....

**Entraînement 30.6 — Calcul de valeurs moyennes.**

Déterminer les valeurs moyennes temporelles des fonctions suivantes.

On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction périodique de période $T$ s'écrit

$$\langle s \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\,\mathrm{d}t.$$

a) $\Gamma = B\sin((\omega - \Omega)t + \phi)$ avec $\omega \neq \Omega$ .....

b) $\Gamma = B\sin((\omega - \Omega)t + \phi)$ avec $\omega = \Omega$ .....

c) $F = Bk\sin((\omega - kV)t + \phi)$ en distinguant les cas si nécessaire .....

**Entraînement 30.7 — Contacteur.**

L'inductance propre d'un contacteur est $L = \dfrac{\mu_0 \mu_r N^2 S}{l_1 + l_2 + 2\mu_r x}$, où $x$ est la largeur de l'entrefer.

Déterminer l'énergie $\mathcal{E}_{\text{mag}}$ stockée dans le contacteur lorsqu'il est parcouru par un courant $i$ puis la force $F$ exercée sur la partie mobile.

*On rappelle que l'énergie magnétique est liée à l'inductance propre par* $\mathcal{E}_{mag} = \dfrac{1}{2} L i^2$.

*Pour un mouvement de translation, la force est la dérivée de l'énergie stockée dans l'entrefer par rapport à la largeur de l'entrefer :* $F = \left.\dfrac{\partial \mathcal{E}_{mag}}{\partial x}\right)_i$.

a) $\mathcal{E}_{\text{mag}}$ .....

b) $F$ .....

**Entraînement 30.8 — Machine synchrone.**

L'énergie magnétique stockée dans l'entrefer d'une machine synchrone est

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{k'^2 \pi I_e^2 V}{2\mu_0} + \frac{k^2 \pi I^2 V}{\mu_0} + \frac{\sqrt{2} k k' \pi I I_e V}{\mu_0} \cos(\omega t - \theta_r).$$

*On rappelle que pour un mouvement de rotation, le couple est la dérivée de l'énergie stockée dans l'entrefer par rapport à l'angle entre rotor et stator :* $\Gamma = \left.\dfrac{\partial \mathcal{E}_{mag}}{\partial \theta_r}\right)_i$.

Le rotor tourne à la vitesse angulaire $\Omega$ : on a $\theta_r = \Omega t - \alpha$, où $\alpha$ est un déphasage constant.

a) Déterminer le couple $\Gamma$ .....

b) À quelle condition sur $\omega$, $\langle \Gamma \rangle$ est-il non-nul ? .....

c) Déterminer $\langle \Gamma \rangle$ dans le cas de la question précédente .....

**Entraînement 30.9 — Moteur linéaire.**

L'énergie magnétique stockée dans l'entrefer d'un moteur linéaire synchrone est

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = K I_e^2 + K' I^2 + \sqrt{2} K K' I I_e \cos(\omega t - kx).$$

*Pour un mouvement de translation, la force est la dérivée de l'énergie stockée dans l'entrefer par rapport à la largeur de l'entrefer :* $F = \left.\dfrac{\partial \mathcal{E}_{mag}}{\partial x}\right)_i$.

L'inducteur avance à la vitesse $V$ : $x = Vt - \alpha$ où $\alpha$ est une distance constante.

Déterminer la force $F$ puis la force moyenne exercée sur l'inducteur en distinguant les cas.

a) $F$ .....

b) $\langle F \rangle$ .....

# Modèle équivalent de l'induit

**Rappels.** Le modèle équivalent de l'induit d'une machine synchrone (*i.e.* un de ses circuit statorique) et d'une machine à courant continu (*i.e.* son circuit rotorique) sont rappelés ci-dessous.

Pour une machine synchrone, $E_{\text{em}}$ et $E_{\text{cem}} = -E_{\text{em}}$ sont sinusoïdaux tandis que pour une machine à courant continu, ils sont continus.

Pour une machine à courant continu, le courant est lié au couple par $i = \Phi_0 \Gamma$ et la tension à la vitesse angulaire par $E_{\text{cem}} = \Phi_0 \Omega$ où $\Phi_0$ est une constante appelée constante de couplage.

Fonctionnement générateur — Fonctionnement moteur

**Entraînement 30.10 — Analyse d'un énoncé (I).**

Dans les schémas suivants, la tension aux bornes de la machine à courant continu est notée $U$ et l'intensité du courant dans l'induit $I$. On note également $r$ la résistance interne, $E_{\text{em}}$ la force électromotrice, $E_{\text{cem}}$ la force contre-électromotrice et $L$ l'inductance propre de la machine à courant continu étudiée.

Associer chacun des énoncés suivants au circuit électrique correspondant.

(a) Une lampe modélisée par un résistance $R$ est alimentée par une dynamo, c'est-à-dire une machine à courant continu en fonctionnement générateur.

(b) Un moteur à courant continu est alimenté par un générateur idéal.

(c) L'induit d'une machine à courant continu en fonctionnement générateur est laissé en circuit ouvert.

(d) L'arbre d'une machine à courant continu est entraîné, son induit étant court-circuité.

a)


c)


b)


d)

**Entraînement 30.11 — Analyse d'un énoncé (II).**

La tension aux bornes de la machine synchrone est notée $\underline{U}$ et l'intensité du courant dans l'induit $\underline{I}$. On note également $r$ la résistance interne, $\underline{E}_{\text{em}}$ la force électromotrice, $\underline{E}_{\text{cem}}$ la force contre-électromotrice et $L$ l'inductance propre de la machine synchrone étudiée.

Associer chacun des énoncés suivants au circuit électrique correspondant.

(a) Un dipôle d'impédance $\underline{Z}$ est alimenté par une machine synchrone en fonctionnement générateur.

(b) Une génératrice synchrone est reliée à une charge résistive $R$.

(c) Un moteur synchrone est alimenté par un générateur idéal.

(d) L'arbre d'une machine synchrone est entraîné, son induit étant laissé en circuit ouvert.

(e) L'induit d'une machine synchrone en fonctionnement générateur est court-circuité.

a) .....

d) .....

b) .....

e) .....

c) .....

**Entraînement 30.12 — Moteur de treuil.**

On s'intéresse à un treuil constitué d'une poulie de rayon $\rho$ et d'un moteur à courant continu de constante de couplage $\Phi_0$, de résistance interne $r$ et d'inductance propre $L$ alimenté par une tension continue $U$.

Le treuil soulève une masse $m$ en lui appliquant une force $\vec{F} = F\vec{e_z}$.

On note $\Omega$ la vitesse angulaire du moteur et $\Gamma$ le couple qu'il fournit. On néglige les pertes fer et les pertes mécaniques du moteur, ainsi que le moment d'inertie de la poulie.

a) Grâce à une loi des mailles, exprimer $\Omega$ en fonction de $U$, $r$, $L$, $i$ et $\Phi_0$.

.....

b) Exprimer $\Omega$ en fonction de $U$, $r$, $L$, $\Gamma$ et $\Phi_0$ .....

c) Relier la vitesse $v$ à $\Omega$ .....

d) Relier la force $F$ exercée par la poulie sur la masse avec le couple $\Gamma$ exercé par le moteur.

.....

e) Exprimer $v$ en fonction de $U$, $r$, $L$, $F$ et $\Phi_0$ .....

f) En appliquant le théorème de la résultante cinétique à la masse, exprimer $F$ en fonction de $v$, $m$ et l'accélération gravitationnelle $g$.

.....

g) En déduire l'équation différentielle vérifiée par $v$ en fonction de $r$, $L$, $\rho$, $\Phi_0$, $U$, $m$ et $g$.

*On ne cherchera pas à la résoudre.*

.....

**Entraînement 30.13 — Analyse d'un énoncé (III).**

La tension aux bornes de la machine synchrone est notée $\underline{U}$ et l'intensité du courant dans l'induit $\underline{I}$. On note également $r$ la résistance interne, $\underline{E}_{\text{em}}$ la force électromotrice, $\underline{E}_{\text{cem}}$ la force contre-électromotrice et $L$ l'inductance propre de la machine synchrone étudiée.

Associer chacun des énoncés suivants, au diagramme de Fresnel correspondant.

(a) Un dipôle d'impédance quelconque est alimenté par une machine synchrone en fonctionnement générateur.

(b) Une génératrice synchrone est reliée à une charge résistive $R$.

(c) Un moteur synchrone est alimenté par un générateur idéal.

(d) L'arbre d'une machine synchrone est entraîné, son induit étant laissé en circuit ouvert.

(e) L'induit d'une machine synchrone en fonctionnement générateur est court-circuité.

a) ..... ☐

b) ..... ☐

c) ..... ☐

d) ..... ☐

e) ..... ☐

**Réponses mélangées**

(c) $B(r,\pi-\theta)=-B(r,\theta)$ $-\dfrac{\mu_0 I}{2e}$ $\dfrac{\mu_0 I}{2e}$ $3\,000\,\text{tour}\cdot\text{min}^{-1}$ $\dfrac{-AC}{(B+Cx)^2}$

(b) (d) $\omega=\Omega$ antisymétrie $\sqrt{2}KK'II_e k\sin(\omega t-kx)$ (b)

(c) $I=\dfrac{-l_C H_4+eH_1+l_I H_3-eH_2}{N}$ (d) (a) (e) $F=m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+mg$

$\dfrac{\sqrt{2}kk'\pi II_e V}{\mu_0}\sin(\omega t-\theta_r)$ $4\times10^2\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ $v=\dfrac{\rho U}{\Phi_0}+\dfrac{r\rho^2}{\Phi_0^2}F+\dfrac{L\rho^2}{\Phi_0^2}\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$

$\begin{cases}0 \text{ si } \omega\neq kV\\ B\sin(\phi) \text{ si } \omega=kV\end{cases}$ $\begin{cases}0 \text{ si } \omega\neq kV\\ \sqrt{2}KK'II_e k\sin(\alpha) \text{ sinon}\end{cases}$ symétrie

$B(r,-\theta)=B(r,\theta)$ $B\sin(\omega t-\theta_r)$ $\dfrac{\mu_0 NI}{\frac{l_C+l_I}{\mu_r}+2e}$ (a) et (c) (d) (c)

150 Hz (a) $\dfrac{\sqrt{2}kk'\pi II_e V}{\mu_0}\sin(\alpha)$ 100 Hz (a) $Bk\sin(\omega t-kx)$

$-\dfrac{\mu_0\mu_r^2N^2Si^2}{(l_1+l_2+2\mu_r x)^2}$ 0 $F=\dfrac{\Gamma}{\rho}$ $\Omega=\dfrac{U-ri-L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}{\Phi_0}$ $\Omega=\dfrac{U}{\Phi_0}-r\dfrac{\Gamma}{\Phi_0^2}-\dfrac{L}{\Phi_0^2}\dfrac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t}$

$\|\overrightarrow{B_1}\|=\|\overrightarrow{B_2}\|=\|\overrightarrow{B_3}\|=\|\overrightarrow{B_4}\|$ (b) 0 $v=\Omega\rho$ $H=\dfrac{I}{2e}$ (e)

$B\sin(\phi)$ $\dfrac{\mu_0\mu_r N^2Si^2}{2(l_1+l_2+2\mu_r x)}$ $\dfrac{mL\rho^2}{\Phi_0^2}\dfrac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{mr\rho^2}{\Phi_0^2}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+v=\dfrac{\rho U}{\Phi_0}-\dfrac{mr\rho^2 g}{\Phi_0^2}$

► Réponses et corrigés page 575

# Conversion électronique statique

**Prérequis**
La tension aux bornes d'une bobine s'écrit

$$u_L = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}.$$

La tension aux bornes d'un condensateur est continue.
L'intensité du courant parcourant une bobine est continue.
Pour tout angle $a$, on a

$$\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2} \quad \text{et} \quad \cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}.$$

## Valeurs moyennes

**Rappels** La valeur moyenne d'un signal de période $T$ est

$$\langle s(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T s(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathcal{A}}{T}$$

où $\mathcal{A}$ est l'aire sous la courbe sur une période, telle que représentée ci-dessous.

En régime périodique, la valeur moyenne de l'intensité du courant parcourant un condensateur et la valeur moyenne de la tension aux bornes d'une bobine sont nulles.

**Entraînement 31.1 — Calcul d'aires.**

Déterminer en cm$^2$ l'aire des figures ci-dessous. Les calculs seront effectués avec un seul chiffre significatif et en prenant $\pi \approx 3$. Les longueurs portées sur les figures sont en mm.

a) b) c) d) e)

## Entraînement 31.2 — Valeurs moyennes graphiquement.

Déterminer la valeur moyenne des signaux $T$-périodiques suivants.

a) $\langle u(t)\rangle$ .....

b) $\langle v(t)\rangle$ .....

c) $\langle i(t)\rangle$ .....

d) $\langle j(t)\rangle$ .....

## Entraînement 31.3

Pour chacun des signaux $T$-périodiques suivants, tracer le chronogramme puis en déduire sa valeur moyenne.

$$u(t) = \begin{cases} E_1 \text{ si } 0 \leqslant t < \alpha T \\ E_2 \text{ si } \alpha T \leqslant t < T \end{cases} \qquad i(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{\alpha T} I & \text{si } 0 \leqslant t < \alpha T \\ \dfrac{t-T}{\alpha T - T} I & \text{si } \alpha T \leqslant t < T \end{cases}$$

a) $\langle u(t)\rangle$ .....

b) $\langle i(t)\rangle$ .....

## Entraînement 31.4 — Valeurs moyennes par le calcul.

a) Déterminer la valeur moyenne temporelle de $A\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right) + B$ .....

b) Déterminer la valeur moyenne temporelle de $C\sin^2\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right)$.

*On pensera à linéariser le sinus carré.*

.....

## Entraînement 31.5

On s'intéresse au signal défini par $u(t) = \left|\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right)\right|$.

a) Quelle est la période de $u$ ? .....

b) Donner un intervalle de largeur $\dfrac{T}{2}$ sur lequel $\left|\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right)\right| = \sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right)$ ....

c) Déterminer la valeur moyenne de $u$ .....

**Entraînement 31.6 — Hacheur à couplage inductif.**

On s'intéresse au circuit ci-contre. L'interrupteur $K_1$ (respectivement $K_2$) est fermé (respectivement ouvert) entre 0 et $\alpha T$ et ouvert (respectivement fermé) entre $\alpha T$ et $T$. Les tensions $E$ et $E'$ sont positives.

a) Sachant que la tension moyenne aux bornes de la bobine est nulle, déterminer parmi les propositions suivantes le graphe correspondant à $u_L$.

..... 

b) Exprimer $E'$ en fonction de $E$ et $\alpha$ .....

**Entraînement 31.7 — Onduleur avec charge R-L.**

On s'intéresse au circuit ci-contre. Les interrupteurs $K_1$ et $K_3$ (respectivement $K_2$ et $K_4$) sont fermés (respectivement ouverts) entre 0 et $\frac{T}{2}$ et ouverts (respectivement fermés) entre $\frac{T}{2}$ et $T$. La tension $E$ est continue et positive.

a) Exprimer $u$ en fonction de $E$ entre 0 et $\frac{T}{2}$ .....

b) Exprimer $u$ en fonction de $E$ entre $\frac{T}{2}$ et $T$ .....

c) En déduire la valeur de $\langle u \rangle$ .....

d) Que vaut $\langle u_L \rangle$ ? .....

e) Relier $\langle u_R \rangle$, $\langle u_L \rangle$ et $\langle u \rangle$. En déduire $\langle u_R \rangle$ .....

f) En déduire $\langle i \rangle$ .....

# Séquence de commutation et nature des interrupteurs

**Entraînement 31.8 — États possibles des montages classiques.**

Les dipôles de type source de tension ne peuvent pas être placés en parallèle ni court-circuités. Les dipôles de types source de courant ne peuvent pas être placés en série ni placés en circuit ouvert.

La bobine est considérée comme un dipôle de type source de courant.

Parmi les états suivants, lequel est autorisé ?

a)

(a) $K_1$ et $K_2$ ouverts
(b) $K_1$ et $K_2$ fermés
(c) $K_1$ ouvert et $K_2$ fermé

.....

b)

(a) $K_1$ et $K_2$ ouverts
(b) $K_1$ et $K_2$ fermés
(c) $K_1$ fermé et $K_2$ ouvert

.....

**Entraînement 31.9 — Nature de l'interrupteur et chronogramme.**

Les caractéristiques de la diode, du transistor et de l'interrupteur bidirectionnel sont rappelées ci-contre.

Dans chacune des situations ci-dessous, indiquer la lettre correspondant à l'interrupteur le plus simple qu'il faut choisir.

a)

.....

c)

.....

b)

.....

d)

.....

**Entraînement 31.10 — États possibles pour un onduleur.**

Les dipôles de types source de tension ne peuvent pas être placés en parallèle ni court-circuités. Les dipôles de types source de courant ne peuvent pas être placés en série ni placés en circuit ouvert.

On donne le schéma de l'onduleur et la liste des états pour les quatre interrupteurs :

| $K_1$ | $K_2$ | $K_3$ | $K_4$ |
|---|---|---|---|
| Ouvert | Ouvert | Ouvert | Ouvert |
| Ouvert | Ouvert | Ouvert | Fermé |
| Ouvert | Ouvert | Fermé | Ouvert |
| Ouvert | Ouvert | Fermé | Fermé |
| Ouvert | Fermé | Ouvert | Ouvert |
| Ouvert | Fermé | Ouvert | Fermé |
| Ouvert | Fermé | Fermé | Ouvert |
| Ouvert | Fermé | Fermé | Fermé |
| Fermé | Ouvert | Ouvert | Ouvert |
| Fermé | Ouvert | Ouvert | Fermé |
| Fermé | Ouvert | Fermé | Ouvert |
| Fermé | Ouvert | Fermé | Fermé |
| Fermé | Fermé | Ouvert | Ouvert |
| Fermé | Fermé | Ouvert | Fermé |
| Fermé | Fermé | Fermé | Ouvert |
| Fermé | Fermé | Fermé | Fermé |

Parmi les états listés, combien sont permis ? .....

**Entraînement 31.11 — Nature des interrupteurs pour un redresseur.**

Les caractéristiques de la diode et du transistor sont rappelées ci-dessous.

a

b

Déterminer la nature des interrupteurs dans le montage ci-contre.

On donne les signes des courants et des tensions :

$$\begin{cases} u_1 = 0\,;\, i_1 \geqslant 0 \\ u_2 \geqslant 0\,;\, i_2 = 0 \\ u_3 = 0\,;\, i_3 \leqslant 0 \\ u_4 \geqslant 0\,;\, i_4 = 0 \end{cases} \text{ en début de période et } \begin{cases} u_1 \leqslant 0\,;\, i_1 = 0 \\ u_2 = 0\,;\, i_2 \geqslant 0 \\ u_3 \leqslant 0\,;\, i_3 = 0 \\ u_4 = 0\,;\, i_4 \leqslant 0 \end{cases} \text{ sinon.}$$

a) Interrupteur 1 .....

b) Interrupteur 2 .....

c) Interrupteur 3 .....

d) Interrupteur 4 .....

**Entraînement 31.12 — Signes dans différentes conventions.**

Dans chacun des cas, indiquer l'ensemble de valeurs que peuvent prendre $u$ et $i$.

a)

.....

b)

.....

c) transistor bloqué

.....

d) transistor passant

.....

# Équations différentielles et tracé de chronogrammes

**Entraînement 31.13 — Onduleur avec charge R-L.**

On s'intéresse au circuit ci-contre. Les interrupteurs $K_1$ et $K_3$ (respectivement $K_2$ et $K_4$) sont fermés (respectivement ouverts) entre 0 et $\frac{T}{2}$ et ouverts (respectivement fermés) entre $\frac{T}{2}$ et $T$. La tension $E$ est continue positive.

a) Quelle équation différentielle est vérifiée par $i(t)$ entre 0 et $\frac{T}{2}$ ?

.....

b) Quelle équation différentielle est vérifiée par $i(t)$ entre $\frac{T}{2}$ et $T$ ?

.....

**Entraînement 31.14 — Courant dans un hacheur à couplage inductif.**

On s'intéresse au circuit ci-contre. L'interrupteur $K_1$ (respectivement $K_2$) est fermé (respectivement ouvert) entre 0 et $\alpha T$ et ouvert (respectivement fermé) entre $\alpha T$ et $T$. Les tensions $E$ et $E'$ sont positives.

a) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ entre 0 et $\alpha T$ .....

b) En résolvant l'équation différentielle, déterminer $i(t)$ entre 0 et $\alpha T$.

*On ne cherchera pas à déterminer la constante d'intégration.*

.....

c) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ entre $\alpha T$ et $T$ .....

d) En résolvant l'équation différentielle, déterminer $i(t)$ entre $\alpha T$ et $T$.

*On ne cherchera pas à déterminer la constante d'intégration.*

.....

e) Déterminer l'ondulation du courant $\Delta i = i_{\max} - i_{\min}$ en fonction de $E$, $\alpha$ et $T$.

.....

**Entraînement 31.15 — Onduleur avec charge R-L.**

On s'intéresse au circuit ci-contre. Les interrupteurs $K_1$ et $K_3$ (respectivement $K_2$ et $K_4$) sont fermés (respectivement ouverts) entre 0 et $\dfrac{T}{2}$ et ouverts (respectivement fermés) entre $\dfrac{T}{2}$ et $T$. La tension $E$ est continue positive.

Associer les tensions $u_R$, $u$ et $u_L$ aux courbes ci-dessous.

a) $u_R$ .....

b) $u$ .....

c) $u_L$ .....

**Réponses mélangées**

ⓐ $E' = E\dfrac{\alpha}{1-\alpha}$ $0{,}3\,\mathrm{cm}^2$ $\alpha E_1 + (1-\alpha)E_2$ $L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -E'$ ⓐ $\dfrac{I}{2}$

$\left[0, \dfrac{T}{2}\right]$ $i \in \{0\},\ u \in \mathbb{R}_-$ $\dfrac{I_1 + I_2}{2}$ $i(t) = \dfrac{E}{L}t + C$ $\dfrac{E}{L}\alpha T$ ⓒ ⓐ

ⓐ $\dfrac{C}{2}$ ⓑ $0{,}1\,\mathrm{cm}^2$ $i \in \mathbb{R},\ u \in \mathbb{R}_-$ ⓒ $\dfrac{T}{2}$ $i \in \mathbb{R},\ u \in \{0\}$

$L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = -E$ $L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = E$ ⓒ ⓐ $E$ $\alpha E$ ⓒ ⓑ $6 \times 10^{-2}\,\mathrm{cm}^2$

ⓐ $i \in \mathbb{R}_+,\ u \in \mathbb{R}_+$ 0 0 $0{,}2\,\mathrm{cm}^2$ 4 0 0 $i(t) = -\dfrac{E'}{L}t + C'$

$\dfrac{2}{\pi}$ $B$ $\dfrac{I}{2}$ ⓐ $0{,}5\,\mathrm{cm}^2$ 0 ⓒ $L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = E$ $-E$

▶ Réponses et corrigés page 581

# Propagation des ondes et interfaces

**Prérequis**
Équation de d'Alembert. Ondes progressives. Ondes stationnaires. Gradient en coordonnées cartésiennes.

## Intensité acoustique

**Entraînement 32.1 — Autour du logarithme décimal.**

Dans chaque cas, calculer la valeur du logarithme. On donne les valeurs suivantes

$$\log(2) \approx 0{,}30 \qquad \log(3) \approx 0{,}48 \qquad \log(4) = 0{,}60 \qquad \log(5) = 0{,}7.$$

a) $\log(6)$ .....

b) $\log(4+5)$ .....

c) $\log(125)$ .....

**Entraînement 32.2 — Intensité acoustique.**

L'intensité acoustique $I_{\mathrm{dB}}$ s'exprime en décibel

$$I_{\mathrm{dB}} = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right),$$

où $I$ est l'intensité acoustique en échelle linéaire ($\mathrm{W/m^{-2}}$) et $I_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W/m^{-2}}$ le seuil de détection de l'oreille humaine. Dans tous les exemples, on suppose les sources acoustiques incohérentes : les intensités en échelle linéaire s'ajoutent.

a) Une étudiante perçoit le son d'une guitare (60 dB) et le son d'une trompette (70 dB).

Quelle est l'intensité totale en décibel ?

.....

b) Si l'intensité en échelle linéaire est multipliée par un facteur 5, de combien de dB l'intensité acoustique augmente-t-elle ?

.....

c) Combien faut-il de percussions jouant avec une intensité sonore de 60 dB pour atteindre une intensité acoustique totale de 120 dB ?

.....

# Vitesse et surpression

**Entraînement 32.3 — Bataille de vitesses.**

- Dans un fluide, les ondes acoustiques se propagent à la vitesse

$$v_f = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi}},$$

où $\rho_0$ est la masse volumique du fluide au repos et $\chi$ sa compressibilité isentropique.

- Dans un solide, elle s'exprime

$$v_s = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

où $\rho$ est la masse volumique et $E$ le module de Young.

a) Pour l'air, aux conditions usuelles de température et de pression, $\rho_a = 1{,}3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ et $\chi_a = 1 \times 10^{-5}\,\mathrm{Pa^{-1}}$. Dans le cas de l'eau, on a $\rho_e = 1 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ et $\chi_e = 1 \times 10^{-10}\,\mathrm{Pa^{-1}}$.

Dans quel fluide la vitesse de propagation des ondes acoustiques est-elle la plus élevée ?

.....

b) En assimilant l'air à un gaz parfait, on peut montrer que la vitesse de propagation s'exprime $v_f = A\sqrt{T}$ où $A$ est une constante et $T$ la température.

Par combien faut-il multiplier la température pour que cette vitesse soit multipliée par deux ?

.....

c) Pour l'acier, on a $E_a = 200\,\mathrm{GPa}$ et $\rho_a = 7{,}8 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.

Les ondes acoustiques vont-elles plus rapidement dans l'eau ou dans l'acier ? .....

**Entraînement 32.4 — Dérivée temporelle et gradient.**

Une onde acoustique se propage dans un fluide. La surpression $p$ en un point $\mathrm{M}(x, y)$ s'exprime

$$p(x,t) = p_1 \sin(\omega t - k_x x - k_y y).$$

a) Exprimer le gradient de $p$ .....

b) L'équation d'Euler linéarisée permet de relier la surpression $p$ à la vitesse $\vec{v}$ du fluide de masse volumique à l'équilibre $\rho_0$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p.$$

Exprimer la vitesse du fluide.

*Toute constante d'intégration sera supposée nulle.*

.....

**Entraînement 32.5 — Vitesse et surpression.**

Lors du passage d'une onde acoustique dans un fluide de masse volumique $\rho_0$, la surpression $p$ et la vitesse du fluide $\overrightarrow{v_1}$ sont reliées par l'équation d'Euler

$$\rho_0 \frac{\partial \overrightarrow{v_1}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, p.$$

Dans chaque cas, déterminer l'expression de $\overrightarrow{v_1}$.

*Toute constante d'intégration sera supposée nulle.*

a) $p(x,t) = p_1 \cos(kx - \omega t)$

.....

b) $p(x,t) = p_1 \cos(kx)\cos(\omega t)$

.....

c) $p(r,t) = \dfrac{A}{r}\cos(kr - \omega t)$ avec $\overrightarrow{\text{grad}}\, p = \dfrac{\partial p}{\partial r}\overrightarrow{e_r}$

.....

# Équation de d'Alembert et solutions

**Entraînement 32.6 — Conditions aux limites.**

À l'intérieur d'un cylindre d'axe (O$x$) et de longueur $L$, lors du passage d'une onde acoustique, les champs de surpression $p$ et de vitesse $v$ s'écrivent

$$v(x,t) = v_0 \sin(\omega t)\sin(kx + \phi) \quad \text{et} \quad p(x,t) = p_1 \cos(\omega t)\cos(kx + \phi),$$

où $\omega$ et $k$ sont respectivement les pulsation et nombre d'onde.

Déterminer dans chaque cas une valeur possible pour $\phi$ et une expression de $k$ faisant intervenir $L$ et un entier $n$. On rappelle les conditions aux limites suivantes

- à une extrémité ouverte, la surpression est nulle,
- à une extrémité fermée, la vitesse de l'air est nulle.

a) Le cylindre est ouvert aux deux extrémités .....

b) Le cylindre est ouvert en $x = 0$ et fermé en $x = L$ .....

c) Le cylindre est fermé aux deux extrémités .....

**Entraînement 32.7 — Linéarisation.**

Une onde acoustique est une perturbation de l'état d'équilibre d'un fluide. Les champs de pression $p$, de vitesse $\vec{v}$ et de masse volumique $\rho$ s'écrivent

$$p(\mathrm{M},t) = p_0 + p_1(\mathrm{M},t), \quad \vec{v}(\mathrm{M},t) = \vec{v_1}(\mathrm{M},t) \quad \text{et} \quad \rho(\mathrm{M},t) = \rho_0 + \rho_1(\mathrm{M},t).$$

Dans l'approximation acoustique, les termes $\left|\dfrac{p_1}{p_0}\right|$, $\left|\dfrac{v_1}{c}\right|$ et $\left|\dfrac{\rho_1}{\rho_0}\right|$ sont des infiniments petits de même ordre. Établir l'expression de chaque terme à l'ordre 1.

a) $\rho\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ .....

b) $\rho \operatorname{div} \vec{v}$ .....

c) $\rho\left(\dfrac{\partial p}{\partial t} + \vec{v}\cdot\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, p\right)$ .....

**Entraînement 32.8 — Solutions de l'équation de D'Alembert.**

On note $c$ la vitesse de propagation d'une onde sonore dans l'air et $p$ la surpression due au passage de l'onde.

a) Quelle est la seule égalité homogène ?

(a) $c^2\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2}$

(b) $c^2\dfrac{\partial p}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2}$

(c) $\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2}$

.....

b) On cherche une solution de cette égalité sous la forme $p(x,t) = p_0\cos(\omega t - kx)$.

Quelle relation doivent vérifier $k$ et $\omega$ ?

.....

c) On cherche une solution de cette égalité sous la forme $p(x,t) = f(x)g(t)$.

Quelle relation doivent vérifier $f$, $g$, $f''$ et $\ddot{g}$ ?

.....

# Autour des débits de volume et de masse

**Entraînement 32.9 — Autour du débit de volume.**

Le volume de fluide $\mathrm{d}V$ traversant une surface $S$ durant un intervalle de temps $\mathrm{d}t$ s'exprime grâce au débit de volume $D_v$

$$\mathrm{d}V = D_v\,\mathrm{d}t = \iint_S \vec{v}(\mathrm{M},t)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}\,\mathrm{d}t,$$

où $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ correspond au vecteur surface en M et $\vec{v}$ à la vitesse du fluide.

a) En quelle unité s'exprime le débit de volume ?

(a) $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ (b) $\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$ (c) $\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{s}$

.....

b) De l'eau s'écoule à travers un tuyau cylindrique de rayon $R = 1{,}00\,\mathrm{cm}$ à une vitesse $v = 10{,}0\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ uniforme et stationnaire. Calculer le débit de volume du fluide .....

c) En déduire le temps nécessaire en minutes pour remplir une piscine de $L = 10{,}0\,\mathrm{m}$ de long, $\ell = 2{,}00\,\mathrm{m}$ de large et $h = 1{,}00\,\mathrm{m}$ de fond. .....

**Entraînement 32.10 — Variation de masse.**

Un fluide s'écoule dans une canalisation de section $S$. On s'intéresse à un volume infinitésimal du fluide compris entre les abscisses $x$ et $x + \mathrm{d}x$. On note $\vec{v}(x,t)$ la vitesse du fluide et $\rho$ sa masse volumique supposée uniforme et stationnaire. La vitesse du fluide est uniforme sur une section de la conduite. Les débits massiques, supposés indépendants du temps, en $x$ et $x + \mathrm{d}x$ s'expriment

$$D_{m,x} = \rho v(x,t)S \quad \text{et} \quad D_{m,x+\mathrm{d}x} = \rho v(x+\mathrm{d}x,t)S.$$

a) Exprimer la masse de fluide traversant $S_x$ entre $t$ et $t + \mathrm{d}t$ .....

b) Exprimer la masse de fluide traversant $S_{x+\mathrm{d}x}$ entre $t$ et $t + \mathrm{d}t$ .....

c) En déduire l'expression de la masse $\delta m$ de fluide entrant dans le volume entre $t$ et $t + \mathrm{d}t$

.....

d) Il est possible d'écrire, pour une fonction $f$, au premier ordre en $\mathrm{d}x$

$$f(x+\mathrm{d}x,y) - f(x,y) \approx \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x.$$

Exprimer $\delta m$ en faisant en particulier apparaître $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ .....

# Réflexion et transmission

**Entraînement 32.11 — Déphasage.**

Dans chaque cas, déterminer le retard de phase de $\underline{a}$ par rapport à $\underline{b}$.

(a) 0
(b) $\pi$
(c) $\pi/2$
(d) $\pi/4$

a) $\underline{a} = 2\underline{b}$ .....

b) $\underline{a} = \mathrm{j}\underline{b}$ .....

c) $\underline{a} = (1+\mathrm{j})\underline{b}$ .....

d) $\underline{a} = -5\underline{b}$ .....

**Entraînement 32.12 — Interface entre deux fluides.**

On considère une interface entre deux fluides non miscibles d'impédances réelles $Z_1$ et $Z_2$ en $x = 0$. Une onde acoustique se propage selon les $x$ croissants. Les surpression et vitesse associées à l'onde acoustique s'expriment

$$\underline{p}(x,t) = \begin{cases} \underline{p}_{i0}\exp[\mathrm{j}(\omega t - k_1 x)] + \underline{r}\,\underline{p}_{i0}\exp[\mathrm{j}(\omega t + k_1 x)] & \text{si } x \leqslant 0, \\ \underline{t}\,\underline{p}_{i0}\exp[\mathrm{j}(\omega t - k_2 x)] & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

et

$$\underline{v}(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\underline{p}_{i0}}{Z_1}\exp[\mathrm{j}(\omega t - k_1 x)] - \dfrac{\underline{r}\,\underline{p}_{i0}}{Z_1}\exp[\mathrm{j}(\omega t + k_1 x)] & \text{si } x \leqslant 0, \\ \dfrac{\underline{t}\,\underline{p}_{i0}}{Z_2}\exp[\mathrm{j}(\omega t - k_2 x)] & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

La vitesse et la surpression sont continues en $x = 0$.

a) Établir l'expression du coefficient de réflexion pour la surpression $\underline{r}$.

.....

b) Établir l'expression du coefficient de transmission pour la surpression $\underline{t}$.

.....

c) La surpression de l'onde transmise est-elle en phase avec celle de l'onde incidente ? .....

d) Déterminer le déphasage entre la surpression de l'onde réfléchie et celle de l'onde incidente lorsque $Z_1 > Z_2$.

.....

**Entraînement 32.13 — Forces de pression.**

On considère un piston de section $S$, d'épaisseur négligeable et de masse $m$ se trouvant en $x = 0$. Il sépare deux fluides de même impédance $Z$. Une onde acoustique se propage selon les $x$ croissants. Elle est partiellement réfléchie et partiellement transmise par le piston. La surpression associée à l'onde acoustique s'exprime

$$p(x,t) = \begin{cases} p_{i0}\cos(\omega t - kx) + p_{r0}\cos(\omega t + kx + \phi_r) & \text{si } x \leqslant 0, \\ p_{t0}\cos(\omega t - kx + \phi_t) & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Elle est uniforme sur la section du piston.

a) La force de pression $\overrightarrow{F}_p$ s'exerçant sur une une surface $S$ à la frontière d'un volume $\mathcal{V}$ s'exprime

$$\overrightarrow{F_P} = -\iint_{\mathcal{S}} P\overrightarrow{\mathrm{dS}},$$

où $P$ est la pression et $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ un vecteur surface dirigé de l'intérieur du volume vers l'extérieur. On rappelle que la pression en un point M s'exprime $P(\mathrm{M},t) = P_0 + p(\mathrm{M},t)$ où $P_0$ est la pression du fluide au repos. Comment s'exprime la force de pression s'exerçant à gauche du piston ?

(a) $[P_0 + p_{i0}\cos(\omega t) + p_{r0}\cos(\omega t + \phi_r)]S\overrightarrow{e_x}$

(b) $-[P_0 + p_{i0}\cos(\omega t) + p_{r0}\cos(\omega t + \phi_r)]S\overrightarrow{e_x}$

(c) $[P_0 + p_{i0}\cos(\omega t) - p_{r0}\cos(\omega t + \phi_r)]S\overrightarrow{e_x}$

(d) $-[P_0 + p_{i0}\cos(\omega t) - p_{r0}\cos(\omega t + \phi_r)]S\overrightarrow{e_x}$

.....

b) Comment s'exprime la force de pression à droite du piston ?

(a) $[P_0 + p_{t0}\cos(\omega t + \phi_t)]S\overrightarrow{e_x}$

(b) $-[P_0 + p_{t0}\cos(\omega t + \phi_t)]S\overrightarrow{e_x}$

.....

**Réponses mélangées**

Par 4 $\quad \dfrac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}$ $\quad$ Dans l'acier $\quad$ (a) $\quad$ (c) $\quad$ (d) $\quad \phi = \pi/2$ et $k = n\pi/L$

$\rho_0 \operatorname{div} \overrightarrow{v_1}$ $\quad c^2\dfrac{f''}{f} = \dfrac{\ddot{g}}{g}$ $\quad \dfrac{kp_1}{\omega\rho_0}\sin(kx)\sin(\omega t)\overrightarrow{e_x}$ $\quad$ 7 dB $\quad$ 0,96 $\quad$ oui $\quad$ 106 minutes

$\phi = 0$ et $k = n\pi/L$ $\quad$ (b) $\quad k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}$ $\quad$ (b) $\quad 10^6$ $\quad -\rho S\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

$\dfrac{p_1}{\rho_0\omega}(k_x\overrightarrow{e_x} + k_y\overrightarrow{e_y})\sin(\omega t - k_x x - k_y y)$ $\quad \pi$ $\quad \dfrac{A}{\rho_0\omega r}\Big[-\dfrac{1}{r}\sin(kr - \omega t) + k\cos(kr - \omega t)\Big]\overrightarrow{e_r}$ $\quad$ 70,4 dB

$-p_1\cos(\omega t - k_x x - k_y y)(k_x\overrightarrow{e_x} + k_y\overrightarrow{e_y})$ $\quad \dfrac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}$ $\quad$ (c) $\quad$ Dans l'eau. $\quad \rho v(x + \mathrm{d}x, t)S\,\mathrm{d}t$

$\rho S v(x,t)\,\mathrm{d}t$ $\quad$ 2,1 $\quad \rho_0\dfrac{\partial \overrightarrow{v_1}}{\partial t}$ $\quad \dfrac{kp_1}{\omega\rho_0}\cos(kx - \omega t)\overrightarrow{e_x}$ $\quad \phi = \pi/2$ et $k = (n + 1/2)\pi/L$

$\rho_0\dfrac{\partial p_1}{\partial t}$ $\quad -\rho S\,\mathrm{d}t[v(x + \mathrm{d}x, t) - v(x,t)]$ $\quad$ 0,78 $\quad$ (a) $\quad$ (b) $\quad 3{,}14 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$

► Réponses et corrigés page 586

# Propagation des ondes et dispersion

**Prérequis**
Équation de d'Alembert - Ondes Planes Progressives Harmoniques (OPPH).

**Constantes utiles**
→ Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{kg \cdot m \cdot A^{-2} \cdot s^{-2}}$
→ Constante des gaz parfaits : $R = 8{,}314\,\mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$

## Pour bien commencer

Une onde progressive correspond à la propagation de proche en proche d'une perturbation $\xi(x,t)$ qui peut se modéliser par une Onde Plane Progressive Harmonique (OPPH) ou monochromatique (OPPM) d'expression mathématique :

- sous la forme réelle $\xi(x,t) = \xi_0 \cos(\omega t - \underline{k}x)$
- sous la forme complexe $\underline{\xi}(x,t) = \xi_0 \mathrm{e}^{j(\omega t - kx)}$,

avec $k$ le vecteur d'onde et $\omega$ la pulsation et $\xi_0$ l'amplitude.

Sa célérité $v$ s'exprime alors $v = \omega/k$.

Elle sera dite atténuée si son amplitude $\xi_0$ n'est pas une constante.

On distingue les ondes progressives des ondes stationnaires, pour lesquelles la perturbation est de la forme $\xi(x,t) = f(x) \times g(t)$, et des ondes évanescentes pour lesquelles la propagation ne se réalise que sur une très courte distance en raison d'un amortissement exponentiel de l'amplitude.

### Entraînement 33.1 — Vecteur d'onde complexe.

L'onde de tension $u(x,t)$ qui se propage dans une ligne bifilaire réelle s'exprime :

$$u(x,t) = U_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right)$$

a) Exprimer l'onde complexe $\underline{u}(x,t)$ associée à $u(x,t)$.

.....

On note $\underline{k} = k' - \mathrm{j}k''$ le vecteur d'onde complexe tel que $\underline{u}(x,t) = U_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \underline{k}x)}$.

b) Exprimer $k' = \mathsf{Re}(\underline{k})$ .....

c) Exprimer $k'' = -\mathsf{Im}(\underline{k})$ .....

**Entraînement 33.2 — Reconnaître une onde.**

Une onde électromagnétique peut se caractériser par son champ électrique $\vec{E}$ ou son champ magnétique $\vec{B}$. Pour chacune des formes proposées, qualifier l'onde avec une ou plusieurs des terminologies suivantes :

(a) progressive (b) stationnaire (c) atténuée (d) évanescente

a) $\vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\omega t - \phi)\cos(kx - \psi)$ .....

b) $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kz + \phi)$ .....

c) $\vec{E} = \vec{E}_0 \mathrm{e}^{-kz} \cos(\omega t + \phi)$ .....

d) $\vec{B} = \vec{B}_0 \mathrm{e}^{-kz} \sin(\omega t - kz + \phi)$ .....

e) $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t + kz)$ .....

**Entraînement 33.3 — Bataille de vitesses.**

La vitesse de son dans les gaz parfaits s'exprime $c_s = \sqrt{\dfrac{\gamma RT}{M}}$ avec $\gamma$ le coefficient adiabatique (5/3 pour un gaz monoatomique, 7/5 pour un gaz diatomique), $M$ la masse molaire, $T$ la température et $R$ la constante des gaz parfait. On s'intéresse aux gaz parfaits suivants :

(a) Dihydrogène ($M_{\mathrm{H}_2} = 2{,}0\,\mathrm{g/mol}$) à $T = 250\,\mathrm{K}$

(b) Argon ($M_{\mathrm{Ar}} = 0{,}040\,\mathrm{kg/mol}$) à $T = 350\,\mathrm{K}$

(c) Dioxygène ($M_{\mathrm{O}} = 16\,\mathrm{g/mol}$) à $T = 293\,\mathrm{K}$

(d) Diazote ($M_{\mathrm{N}} = 14\,\mathrm{g/mol}$) à $T = 0°\mathrm{C}$

Dans quelle situation la vitesse est la plus élevée ? .....

# Équation de propagation et relation de dispersion

**Entraînement 33.4 — Solutions de l'équation de D'Alembert.**

On note $c$ la vitesse de propagation d'une onde sonore dans l'air et $p$ la surpression due au passage de l'onde.

a) Quelle est la seule égalité homogène ?

(a) $c^2 \dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2}$ (b) $c^2 \dfrac{\partial p}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2}$ (c) $\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2}$

.....

b) En supposant que $p(x,t) = p_0 \cos(\omega t - kx)$, quelle relation vérifient $k$ et $\omega$ ? ..

c) En supposant que $p(x,t) = f(x)g(t)$, quelle relation vérifient $f$, $g$, $f''$ et $g''$ ? .

**Entraînement 33.5 — Propagation idéale.**

On donne ci-dessous l'équation de propagation du champ électrique $\vec{E}$ dans différentes situations.

(a) $\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \dfrac{n e^2}{m}\vec{E}$

(b) $\Delta \vec{E} = \mu_0 \gamma \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

(c) $\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2}$

(d) $\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \gamma \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Identifier celle(s) qui traduit(sent) une propagation idéale (sans dispersion ni absorption) ..

**Entraînement 33.6 — Dispersion ou absorption ?.**

On donne la relation de dispersion $\underline{k}(\omega)$ reliant le vecteur d'onde complexe $\underline{k}$ à la pulsation $\omega$ dans différentes situations. Elle est issue de l'équation d'onde régissant la propagation d'une onde mécanique transverse le long d'une corde vibrante.
Indiquer dans chaque cas s'il y a absorption et/ou dispersion au cours de la propagation.

a) $\underline{k} = k = \dfrac{\omega}{c}$ .....

b) $\underline{k} \simeq \dfrac{\omega}{c} - \dfrac{1}{2}\mathrm{j}\dfrac{h}{\mu c}$ .....

c) $\underline{k} = k \simeq \dfrac{\omega}{c} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\gamma\omega^3}{T_0 c^3}$ .....

d) $\underline{k} \simeq \dfrac{\omega}{c} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\gamma\omega^3}{T_0 c^3} - \dfrac{1}{2}\mathrm{j}\dfrac{h}{\mu c}$ .....

**Entraînement 33.7 — Ondes sonores dans un fluide.**

On envisage la propagation unidimensionnelle d'une onde sonore dans un fluide de masse volumique $\mu_0$.
On suppose que la surpression acoustique $p$ dans le fluide est de la forme :

$$p = p_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \underline{k}x)}$$

Établir la relation de dispersion $\underline{k}(\omega)$ vérifiée par $p(x,t)$ dans chacune des situations suivantes.

a) Fluide idéal : $c^2 \dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$ .....

b) Fluide de viscosité $\eta$ : $\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \dfrac{\eta}{\mu_0 c^2}\dfrac{\partial^3 p}{\partial t \partial x^2}$ .....

c) Pavillon de section droite $S_0 \mathrm{e}^{mx}$ : $\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{1}{S_0 \mathrm{e}^{mx}}\dfrac{\partial}{\partial x}(S_0 \mathrm{e}^{mx}\dfrac{\partial p}{\partial x})$ ...

d) Écoulement de vitesse $u$ : $(c^2 - u^2)\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} + 2u\dfrac{\partial^2 p}{\partial x \partial t}$ .....

# Vitesses de propagation

**Entraînement 33.8 — Vitesse de phase.**

On étudie la propagation des ondes de surface dans un bassin de profondeur $h$ contenant un fluide de masse volumique $\mu$ et de tension superficielle $\gamma$.

Dans chacune des situations suivantes, pour lesquelles on donne la relation de dispersion $\omega(k)$ en absence de tout phénomène d'absorption, déterminer l'expression de la vitesse de phase $v_\phi(\omega) = \dfrac{\omega}{k}$.

a) Aux courtes longueurs d'onde et faibles profondeurs : $\omega^2 = \dfrac{\gamma k^3}{\mu} \times kh$.

.....

b) Aux courtes longueurs d'onde et grandes profondeurs : $\omega^2 = \dfrac{\gamma k^3}{\mu}$.

.....

c) Aux grandes longueurs d'onde et faibles profondeurs : $\omega^2 = gk \times kh$.

.....

d) Aux grandes longueurs d'onde et grandes profondeurs : $\omega^2 = gk$.

.....

**Entraînement 33.9 — Relation de Klein-Gordon.**

La propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma dilué est conditionnée à haute fréquence par la relation de dispersion suivante : $k^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_\mathrm{p}^2}{c^2}$.

On donne les représentations graphiques suivantes :

a) Identifier le graphe représentant la fonction $k(\omega)$ .....

b) Calculer la vitesse de phase $v_\phi(\omega) = \dfrac{\omega}{k}$ .....

c) Calculer la vitesse de groupe $v_\mathrm{g}(\omega) = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$ .....

**Entraînement 33.10 — Vitesse de groupe.**

On étudie la propagation des ondes de surface dans un bassin de profondeur $h$ contenant un fluide de masse volumique $\mu$ et de tension superficielle $\gamma$.

Dans chacune des situations suivantes, pour lesquelles on donne la relation de dispersion $\omega(k)$ en absence de tout phénomène d'absorption, déterminer l'expression de la vitesse de groupe $v_g = \dfrac{d\omega}{dk}$.

a) Aux courtes longueurs d'onde et faibles profondeurs : $\omega^2 = \dfrac{\gamma k^3}{\mu} \times kh$ .....

b) Aux courtes longueurs d'onde et grandes profondeurs : $\omega^2 = \dfrac{\gamma k^3}{\mu}$ .....

c) Aux grandes longueurs d'onde et faibles profondeurs : $\omega^2 = gk \times kh$ .....

d) Aux grandes longueurs d'onde et grandes profondeurs : $\omega^2 = gk$ .....

# Phénomènes de réflexion

**Entraînement 33.11 — Propagation électrique dans un câble coaxial.**

Un câble coaxial idéal est modélisé par une ligne bifilaire de capacité linéique $\Gamma$ et d'inductance linéique $\Lambda$.

a) Identifier l'expression de son impédance caractéristique $Z_c$ par analyse dimensionnelle :

(a) $Z_c = \sqrt{\Gamma\Lambda}$
(b) $Z_c = \dfrac{\Gamma}{\Lambda}$
(c) $Z_c = \sqrt{\dfrac{\Gamma}{\Lambda}}$
(d) $Z_c = \Lambda\Gamma$
(e) $Z_c = \sqrt{\dfrac{\Lambda}{\Gamma}}$
(f) $Z_c = \Gamma\Lambda$
(g) $Z_c = \dfrac{\Lambda}{\Gamma}$
(h) $Z_c = \dfrac{1}{\sqrt{\Gamma\Lambda}}$

.....

Le câble est refermé sur une charge d'impédance $Z$. On note $R = \left|\dfrac{Z - Z_c}{Z + Z_c}\right|^2$ le coefficient de réflexion en puissance d'une onde électrique au point de jonction.

b) En cas de réflexion totale de l'onde électrique ($R = 1$), que vaut $Z$ ? .....

c) En cas d'adaptation d'impédances ($R = 0$), que vaut $Z$ ? .....

d) Lorsque la charge est purement réactive ($Z$ imaginaire pure), que vaut $R$ ? .....

On note $T$ le coefficient de transmission en puissance.

e) Lorsque la charge est purement résistive ($Z$ réelle), que vaut $T$ ? .....

**Entraînement 33.12 — Calcul de coefficients.**

Les coefficients de réflexion et de transmission en puissance sonore entre deux milieux d'impédances acoustiques $Z_1$ et $Z_2$ s'expriment :

$$R = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2 \quad \text{et} \quad T = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1+Z_2)^2}$$

On rappelle que l'impédance acoustique $Z$ d'un fluide est donnée par $Z = \mu c$ où $\mu$ désigne sa masse volumique et $c$ la célérité de l'onde sonore, et on donne $\mu_{\text{air}} = 1{,}3\,\text{kg/m}^3$, $c_{\text{air}} = 340\,\text{m/s}$, $\mu_{\text{eau}} = 1\,000\,\text{kg/m}^3$, $c_{\text{eau}} = 1\,500\,\text{m/s}$.

a) Calculer $R$ à l'interface air/eau .....

b) Calculer $R$ à l'interface eau/air .....

On admet que l'impédance acoustique $Z$ d'un solide s'écrit $Z = \rho c$ où $\rho$ désigne sa masse volumique et $c$ la célérité de l'onde sonore, et on donne $\rho = 2\,400\,\text{kg/m}^3$ et $c = 3\,100\,\text{m/s}$ pour le béton.

c) Calculer $T$ à l'interface air/béton .....

**Entraînement 33.13 — Cavité électromagnétique.**

On envisage la propagation d'une onde électromagnétique entre deux plans conducteurs parfaits placés en $z = 0$ et $z = L$. L'onde est stationnaire dans la direction (O$z$) et reste transverse dans la cavité supposée vide. On recherche donc son champ électrique de la forme $\vec{E} = E(z)\cos(\omega t - kx)\vec{u_y}$.

On rappelle l'équation de d'Alembert : $\Delta\vec{E} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$.

a) Établir l'équation différentielle vérifiée par $E(z)$ .....

Les conditions aux limites $E(z = 0) = 0$ et $E(z = L) = 0$ issues de la continuité de la composante tangentielle du champ électrique aux interfaces imposent la solution $E(z) = E_0 \sin(Kz)$ où $E_0 \in \mathbb{R}$ avec $K^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - k^2$.

b) Établir les expressions de $K$ en fonction de $L$ .....

c) Établir la forme définitive du champ électrique $\vec{E}$ .....

La pulsation de coupure $\omega_c$ de la cavité est donnée par la relation $k^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2}$. On appelle $f_{c1}$ la fréquence de coupure du mode propre de rang $p = 1$ de cette onde transverse électrique si $L = 3\,\text{cm}$.

d) Calculer la fréquence $f_{c1}$ .....

# Phénomènes dissipatifs

**Entraînement 33.14 — Profondeur de pénétration.**

On envisage la propagation d'une onde électromagnétique de pulsation $\omega$ dans un milieu conducteur de conductivité $\gamma$. Cette onde ne peut pénétrer le conducteur que sur une profondeur caractéristique $\delta$, appelée épaisseur de peau, qui dépend de $\gamma$, $\omega = 2\pi f$ et de la perméabilité magnétique du vide $\mu_0$.

a) Identifier l'expression de $\delta$ par analyse dimensionnelle.

(a) $\delta = \sqrt{\dfrac{\mu_0 \gamma \omega}{2}}$

(b) $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$

(c) $\delta = \dfrac{2}{\mu_0 \gamma \omega}$

(d) $\delta = \sqrt{\dfrac{2\gamma}{\mu_0 \omega}}$

(e) $\delta = \dfrac{\gamma \omega}{2\mu_0}$

(f) $\delta = \dfrac{2\omega}{\mu_0 \gamma}$

.....

b) Calculer $\delta$ pour du cuivre ($\gamma = 5{,}96 \times 10^7\,\mathrm{S \cdot m^{-1}}$, $f = 50$ Hz). .....

**Entraînement 33.15 — Résonateur de Helmholtz.**

On envisage la propagation d'une onde dans une cavité résonnante de volume $V$ en contact avec le milieu extérieur par une unique surface de section $S$ situé au bout d'un goulot de hauteur caractéristique $L$. Cette cavité contient un gaz caractérisé par une vitesse du son $c_s$. La fréquence de résonnance caractéristique de ce résonnateur est $f_0$.

a) Identifier l'expression de $f_0$ par analyse dimensionnelle.

(a) $f_0 = \dfrac{V}{2\pi}\sqrt{\dfrac{A}{c_s L}}$

(b) $f_0 = \dfrac{A}{2\pi}\sqrt{\dfrac{L}{V c_s}}$

(c) $f_0 = \dfrac{L}{2\pi}\sqrt{\dfrac{c_s}{AV}}$

(d) $f_0 = \dfrac{c_s}{2\pi}\sqrt{\dfrac{V}{AL}}$

(e) $f_0 = \dfrac{A}{2\pi}\sqrt{\dfrac{c_s}{VL}}$

(f) $f_0 = \dfrac{c_s}{2\pi}\sqrt{\dfrac{A}{VL}}$

.....

b) Calculer $f_0$ pour $c_s = 320\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $A = 10{,}0\,\mathrm{cm^2}$, $L = 100\,\mathrm{mm}$ et $V = 1{,}00\,\mathrm{L}$ .....

**Entraînement 33.16 — Propagation diffusive.**

On envisage la propagation d'une onde électromagnétique dans un conducteur de conductivité $\gamma$.

On donne les équations de Maxwell aux fréquences usuelles :

| | |
|---|---|
| Équation de Maxwell-Gauss (MG) $\operatorname{div}\vec{E} = 0$ | Équation de Maxwell-Thompson (MΦ) $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ |
| Équation de Maxwell-Faraday (MF) $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ | Équation de Maxwell-Ampère (MA) $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\gamma\vec{E}$ |

L'analyse vectorielle stipule que $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E}$.

a) Simplifier cette relation en injectant (MG) .....

Le théorème de Schwarz assure que $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}) = \dfrac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B})$.

b) Exploiter (MF) et (MA) pour exprimer $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E})$ .....

c) En déduire l'équation d'onde électrique dans le conducteur ...

**Réponses mélangées**

0,99 $\quad c^2\dfrac{f''}{f} = \dfrac{g''}{g}$ $\quad \dfrac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}z^2}(z) = (k^2 - \dfrac{\omega^2}{c^2})E$ $\quad \underline{k} = k = \dfrac{\omega}{u \pm c}$ $\quad$ c $\quad$ 0 ou $+\infty$

a $\quad$ b $\quad$ a $\quad$ b $\quad \Delta\vec{E} = \mu_0\gamma\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ $\quad E_0\sin(\dfrac{n\pi}{L}z)\cos(\omega t - kx)\overrightarrow{u_y}$

Pas de dispersion ni d'absorption $\quad$ e $\quad \underline{u}(x,t) = U_0\mathrm{e}^{-x/\delta}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(t-x/c)}$ $\quad \sqrt{gh}$

Dispersion sans absorption $\quad \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E}) = -\Delta\vec{E}$ $\quad$ Absorption sans dispersion

161 Hz $\quad \sqrt{\dfrac{g}{k}} = \dfrac{g}{\omega}$ $\quad \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E}) = -\mu_0\gamma\dfrac{\partial}{\partial t}(\vec{E})$ $\quad \omega^2 = \underline{k}^2c^2 + \mathrm{j}mc^2\underline{k}$ $\quad k = \omega/c$

$\sqrt{\dfrac{\gamma k}{\mu}}$ $\quad \underline{k} = k = \dfrac{\omega}{c}$ $\quad Z_\mathrm{c}$ $\quad$ c $\quad k' = \omega/c$ $\quad$ a $\quad \dfrac{p\pi}{L}$ $\quad$ f $\quad$ 0,99

b c d $\quad \dfrac{g}{2\omega}$ $\quad \sqrt{\dfrac{\gamma k^2 h}{\mu}}$ $\quad$ b $\quad$ 5 GHz $\quad$ 9,2 mm $\quad \dfrac{4ZZ_\mathrm{c}}{(Z+Z_\mathrm{c})^2}$

$\sqrt{gh}$ $\quad$ 1 $\quad$ Absorption et dispersion $\quad 2\dfrac{\omega}{k}$ $\quad \dfrac{c}{\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$ $\quad v_\mathrm{g} = \dfrac{3\omega}{2k}$

$\underline{k} = \dfrac{\omega}{c}(1 + \mathrm{j}\omega\dfrac{\eta}{\mu_0c^2})^{-1/2}$ $\quad 2{,}4\times10^{-4}$ $\quad k'' = 1/\delta$ $\quad$ a c $\quad c\sqrt{1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}$

► Réponses et corrigés page 590

# Cinématique des fluides

**Prérequis**
Débit volumique. Débit massique. Conservation du débit.

**Constantes utiles**
→ Masse volumique de l'eau : $\rho_{\text{eau}} = 1{,}00 \times 10^3\,\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
→ Masse molaire de l'eau : $M_{\text{eau}} = 18{,}0\,\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$

## Autour du débit

### Entraînement 34.1 — Premiers calculs.

On prélève pendant 3 minutes et 34 secondes de l'eau à un robinet à l'aide d'un récipient. Le volume prélevé est alors de 15,4 L.

a) Calculer le débit volumique associé, en $\text{m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$ .....

b) Calculer le débit massique associé, en $\text{kg} \cdot \text{h}^{-1}$ .....

### Entraînement 34.2 — Bataille de débits.

Parmi ces trois écoulements, quel est celui dont le débit volumique est le plus grand ?

(a) 100 kg d'eau durant 50 min
(b) 0,2 mol d'eau durant 3,0 ms
(c) 18 $\text{m}^3$ d'eau durant 2 jours

.....

### Entraînement 34.3 — Fluide mystérieux.

Un fluide inconnu s'écoule dans une canalisation de section circulaire de diamètre $d = 6\,\text{mm}$.

On mesure un débit massique $D_m = (75 \pm 5)\,\text{g} \cdot \text{s}^{-1}$ et la vitesse de l'écoulement est estimée à $v = 2\,\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

On rappelle que l'expression du débit massique $D_m$ dépend de la vitesse $v$ du fluide, de la masse volumique $\rho$ du fluide et de la surface $S$ de la section de la canalisation est $D_m = \rho S v$.

Les masses volumiques des fluides possibles sont données à température ambiante dans le tableau ci-dessous :

| Fluide | miel | eau | glycérine | huile |
|---|---|---|---|---|
| Masse volumique ($\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$) | 1,4 | 1,0 | 1,3 | 0,9 |

Quel est le fluide en circulation dans la canalisation ?

(a) la glycérine
(b) l'huile ou l'eau
(c) le miel ou la glycérine
(d) aucun des fluides du tableau

.....

**Entraînement 34.4 — Débit dans une gaine rectangulaire.**

Considérons de l'air circulant de manière incompressible dans une gaine rectangulaire de largeur $l_1 = 30\,\text{cm}$ et de hauteur $h_1 = 50\,\text{cm}$. Le débit volumique d'eau mesuré est de $4\,700\,\text{m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$.

a) Calculer la vitesse moyenne de l'air dans la conduite .....

En sortie, la gaine rectangulaire se réduit : ses dimensions sont alors $l_2 = 20$ cm et $h_2 = 30$ cm.

b) Calculer la nouvelle vitesse moyenne de l'air .....

**Entraînement 34.5 — Écoulement dans une conduite cylindrique.**

On considère un fluide incompressible, de masse volumique $\rho$, en écoulement dans une conduite cylindrique de rayon $R$ et d'axe $(\text{O}z)$. L'écoulement peut être décrit par un champ de vitesse de type « Poiseuille cylindrique »

$$\vec{v}(\text{M}) = V_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\vec{e_z}$$

où $V_0$ est une constante. On note $v$ la norme du vecteur vitesse.

a) Quelle est la formule correcte pour calculer le débit massique à travers une section droite de cet écoulement ?

(a) $D_m = \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^R \rho v \times r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

(b) $D_m = \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^R \rho v \times r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

(c) $D_m = \displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^R \rho v \times r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

.....

b) Exprimer dans ce cas le débit massique, en fonction de $\rho$, $V_0$ et $R$ .....

## Champ de vitesse de différents écoulements

On notera, en coordonnées cartésiennes, un champ de vitesse sous la forme :

$$\vec{v}(x,y,z,t) = v_x(x,y,z,t)\vec{e_x} + v_y(x,y,z,t)\vec{e_y} + v_z(x,y,z,t)\vec{e_z}.$$

**Entraînement 34.6 — Écoulement stationnaire ou non ?**

Un écoulement stationnaire vérifie la relation suivante :

$$\frac{\partial \vec{v}(x,y,z,t)}{\partial t} = \vec{0}.$$

Sachant que $\omega$, $\tau$ et $v_0$ sont des constantes, lequel parmi ces écoulements n'est pas stationnaire ?

(a) $\vec{v}(x,y,z,t) = \omega y \vec{e_x}$

(b) $\vec{v}(x,y,z,t) = v_0 \vec{e_y}$

(c) $\vec{v}(x,y,z,t) = v_0 \sin(\omega t)\vec{e_y}$

(d) $\vec{v}(x,y,z,t) = \dfrac{y}{\tau}\vec{e_y}$

.....

**Entraînement 34.7 — Caractère divergent d'un écoulement.**

Un écoulement incompressible vérifie la relation suivante en tout point :

$$\mathrm{div}(\vec{v}(x,y,z,t)) = \frac{\partial v_x(x,y,z,t)}{\partial x} + \frac{\partial v_y(x,y,z,t)}{\partial y} + \frac{\partial v_z(x,y,z,t)}{\partial z} = 0.$$

On considère l'écoulement uniforme suivant : $\vec{v}(x,y,z,t) = v_0\vec{e_y}$.

a) Calculer la divergence de cet écoulement .....

b) Est-ce que l'écoulement est incompressible ? .....

c) Un écoulement caractérisé par son champ de vitesse $\vec{v} = kx\vec{e_x} + ky\vec{e_y}$ ($k \neq 0$ constante) est-il incompressible ?

.....

d) Un écoulement caractérisé par un champ de vitesse de la forme $\vec{v} = kz\vec{e_x}$ (dit écoulement de Couette plan) est-il incompressible ?

.....

**Entraînement 34.8 — Caractère rotationnel d'un écoulement uniforme.**

Dans un écoulement irrotationnel, le rotationnel du champ de vitesse est nul en tout point. On a

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}(x,y,z,t)) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_z(x,y,z,t)}{\partial y} - \dfrac{\partial v_y(x,y,z,t)}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_x(x,y,z,t)}{\partial z} - \dfrac{\partial v_z(x,y,z,t)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_y(x,y,z,t)}{\partial x} - \dfrac{\partial v_x(x,y,z,t)}{\partial y} \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

On étudie l'écoulement uniforme défini par $\vec{v}(x,y,z,t) = v_0\vec{e_y}$.

a) Calculer le rotationnel de ce champ de vitesse .....

b) Est-ce que l'écoulement est irrotationnel ? .....

Si l'écoulement est irrotationnel, alors on lui associe un potentiel des vitesses $\phi(x,y,z,t)$.

$$\vec{v}(x,y,z,t) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\phi(x,y,z,t)) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial \phi(x,y,z,t)}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial \phi(x,y,z,t)}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial \phi(x,y,z,t)}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

c) Donner l'expression de $\phi$ d'un écoulement uniforme sachant qu'à l'origine, $\phi(0,0,0,t) = \phi_0$.

.....

**Entraînement 34.9 — Caractère rotationnel d'autres écoulements.**

a) Un écoulement est caractérisé par son champ de vitesse $\vec{v} = kx\vec{e_x} + ky\vec{e_y}$ où $k$ est une constante. Calculer le rotationnel de ce champ de vitesse.

.....

b) Si l'écoulement est irrotationnel, calculer le potentiel des vitesses de cet écoulement sachant que le potentiel des vitesses à l'origine $\phi(0,0,0,t) = \phi_0$.

*Sinon, noter qu'il est « impossible » de déterminer un potentiel des vitesses.*

.....

c) Un écoulement (dit de Couette plan) caractérisé par son champ de vitesse de la forme $\vec{v} = kz\vec{e_x}$ est-il irrotationnel ?

.....

d) Si l'écoulement est irrotationnel, calculer le potentiel des vitesses de cet écoulement sachant que le potentiel des vitesses à l'origine $\phi(0,0,0,t) = \phi_0$.

*Sinon, noter qu'il est « impossible » de déterminer un potentiel des vitesses.*

.....

**Entraînement 34.10 — Accélération d'une particule de fluide.**

L'accélération d'une particule de fluide $\vec{a}_{\mathrm{M}}(t)$ se calcule avec la dérivée particulaire du champ de vitesse

$$\vec{a}_{\mathrm{M}}(t) = \frac{\mathrm{D}\vec{v}_{\mathrm{M}}(t)}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \vec{v}(x,y,z,t)}{\partial t} + \left(\vec{v}(x,y,z,t)\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}(x,y,z,t).$$

On étudie un écoulement uniforme de la forme $\vec{v}(x,y,z,t) = v_0\vec{e_y}$.

a) Calculer l'accélération locale de la particule $\dfrac{\partial \vec{v}(x,y,z,t)}{\partial t}$ .....

b) Calculer l'accélération convective de la particule $\left(\vec{v}(x,y,z,t)\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}(x,y,z,t)$.

.....

c) En déduire l'accélération de la particule .....

**Entraînement 34.11 — Écoulement avec cisaillement.**

Un écoulement avec cisaillement a un caractère rotationnel : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}(x)) = \omega\vec{e_y} \neq \vec{0}$.

a) Exprimer le champ de vitesse $\vec{v}(x)$ de l'écoulement sachant que $\vec{v}(0) = \vec{0}$.

.....

b) L'écoulement est-il incompressible ? .....

**Entraînement 34.12 — Accélération convective d'un écoulement de Poiseuille plan.**

On étudie un écoulement de Poiseuille plan caractérisé par un champ de vitesse de la forme

$$\vec{v}(z) = v_0\left(1 - \left(\frac{z}{L}\right)^2\right)\vec{e_x},$$

avec une longueur $L$ constante.

a) À quoi est égal $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\dfrac{\vec{v}^{\,2}(z)}{2}\right)$ ?

(a) $v_0^2\dfrac{2z}{L^2}\left(1 - \left(\dfrac{z}{L}\right)^2\right)\vec{e_x}$

(b) $v_0^2\dfrac{2z}{L^2}\left(1 - \left(\dfrac{z}{L}\right)^2\right)\vec{e_z}$

(c) $-v_0^2\dfrac{2z}{L^2}\left(1 - \left(\dfrac{z}{L}\right)^2\right)\vec{e_x}$

(d) $-v_0^2\dfrac{2z}{L^2}\left(1 - \left(\dfrac{z}{L}\right)^2\right)\vec{e_z}$

.....

b) À quoi est égale $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}(z) \wedge \vec{v}(z)$ ?

(a) $v_0^2\dfrac{2z}{L^2}\left(1 - \left(\dfrac{z}{L}\right)^2\right)\vec{e_x}$

(b) $v_0^2\dfrac{2z}{L^2}\left(1 - \left(\dfrac{z}{L}\right)^2\right)\vec{e_z}$

(c) $-v_0^2\dfrac{2z}{L^2}\left(1 - \left(\dfrac{z}{L}\right)^2\right)\vec{e_x}$

(d) $-v_0^2\dfrac{2z}{L^2}\left(1 - \left(\dfrac{z}{L}\right)^2\right)\vec{e_z}$

.....

c) En déduire l'accélération convective de la particule à l'aide de la formule suivante :

$$\left(\vec{v}(z)\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}(z) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\vec{v}^{\,2}(z)}{2}\right) + \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}(z)\wedge\vec{v}(z).$$

.....

**Entraînement 34.13 — Potentiel des vitesses.**

Le potentiel des vitesses d'un écoulement est $\phi(x,y,z,t) = -\dfrac{x^2}{2\tau} + \phi_0$, avec $\tau$ et $\phi_0$ constants.

a) Retrouver le champ des vitesses $\vec{v}(x,y,z,t)$ .....

b) Calculer le rotationnel du champ de vitesse .....

c) L'écoulement est-il incompressible ? .....

d) Calculer l'accélération de la particule .....

# Pour aller un peu plus loin

**Entraînement 34.14 — Tornade.**

Le champ de vitesse de l'air au sein d'une tornade peut s'écrire, en coordonnées cylindriques :

$$\vec{v}(r) = \begin{cases} \omega r \vec{e_\theta} & \text{si } r \leqslant a \\ \dfrac{K}{r}\vec{e_\theta} & \text{si } r \geqslant a \end{cases}$$

avec $\omega$ et $K$ deux constantes. On rappelle l'expression de la divergence et du rotationnel en coordonnées cylindriques pour un champ $\vec{A}(r) = A_r(r)\vec{e_r} + A_\theta(r)\vec{e_\theta} + A_z(r)\vec{e_z}$ ne dépendant que de $r$ :

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r(r))}{\partial r} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A} = -\frac{\partial A_z(r)}{\partial r}\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\theta(r))}{\partial r}\vec{e_z}.$$

a) En utilisant la continuité de la vitesse en $r = a$, déterminer la constante $K$ .....

b) L'écoulement est-il incompressible ? .....

c) L'écoulement est-il irrotationnel pour $r \geqslant a$ ? .....

d) Exprimer le vecteur tourbillon $\vec{\Omega} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{v}$ pour $r \leqslant a$ .....

**Entraînement 34.15 — Dérivée particulaire.**

La dérivée particulaire d'un champ scalaire ou vectoriel $\Psi$ s'exprime :

$$\frac{\mathrm{D}\Psi}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial\Psi}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\Psi.$$

On s'intéresse au champ de vitesse suivant : $\vec{v}(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} 2x-3z \\ 0 \\ 3x-2z \end{pmatrix} K\exp(-t/\tau)$.

Calculer le vecteur accélération $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}$ .....

**Entraînement 34.16 — Un écoulement particulier.**

Le champ de vitesse d'un fluide s'écrit, en coordonnées cylindriques, $\vec{v}(r,\theta) = -\dfrac{\beta}{r}\vec{e_r} + \dfrac{\alpha}{r}\vec{e_\theta}$, avec $\alpha$ et $\beta$ deux constantes. On rappelle l'expression de la divergence et du rotationnel en coordonnées cylindriques pour un champ scalaire $\Phi(r,\theta)$ et un champ vectoriel $\vec{A}(r)$ ne dépendant que de $r$ :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\Phi(r,\theta)) = \frac{\partial\Phi(r)}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\vec{e_\theta} \quad ; \quad \text{div}\left(\vec{A}(r)\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r(r))}{\partial r} \quad ; \quad \overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{A}(r)\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\theta(r))}{\partial r}\vec{e_z}.$$

a) L'écoulement du fluide est-il incompressible ? .....

b) L'écoulement du fluide est-il irrotationnel ? .....

c) Si l'écoulement est irrotationnel, calculer le potentiel des vitesses de cet écoulement sachant que le potentiel des vitesses à l'origine $\Phi(1,0,0,t) = 0$.

*Sinon, noter qu'il est « impossible » de déterminer un potentiel des vitesses.*

.....

d) Calculer l'accélération particulaire $\vec{a_p}$ à l'aide de l'expression de l'accélération convective

$$\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\vec{v}^2}{2}\right) + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v})\wedge\vec{v}.$$

.....

**Réponses mélangées**

non | non | oui | non | c | $2{,}59\times10^{-1}\,\text{m}^3\cdot\text{h}^{-1}$ | $\omega a^2$

b | oui | $-v_0y+\phi_0$ | $\dfrac{x}{\tau^2}\vec{e_x}$ | d | impossible | $-\omega x\vec{e_z}$

oui | oui | $\vec{0}$ | oui | $-\dfrac{k}{2}x^2-\dfrac{k}{2}y^2+\phi_0$ | $\vec{0}$ | $\vec{0}$ | c

$22\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ | $\beta\ln(r)-\dfrac{\alpha}{r}\theta$ | b | $\vec{0}$ | oui | $\omega\vec{e_z}$ | $\vec{0}$ | $\dfrac{x}{\tau}\vec{e_x}$

$-\dfrac{\beta^2+\alpha^2}{r^3}\vec{e_r}$ | $\vec{0}$ | b | oui | $\begin{pmatrix}\dfrac{3z-2x}{\tau}-5xK\exp(-t/\tau)\\ 0\\ \dfrac{2z-3x}{\tau}-5zK\exp(-t/\tau)\end{pmatrix}K\exp(-t/\tau)$

$8{,}7\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ | $\dfrac{\pi}{2}\rho V_0R^2$ | $2{,}59\times10^2\,\text{kg}\cdot\text{h}^{-1}$ | 0 | oui | $\vec{0}$

► Réponses et corrigés page 596

# Dynamique des fluides (PSI)

**Prérequis**

La loi des gaz parfaits : $pV = nRT = \dfrac{N}{\mathcal{N}_A}RT$.

**Constantes utiles**

→ Nombre d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6{,}02 \times 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$

→ Constante des gaz parfaits : $R = 8{,}314\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$

## Généralités

### Entraînement 35.1 — Libre parcours moyen.

Considérons un gaz parfait à la pression $p$ et à la température $T$. Les particules composant ce gaz sont de diamètre $d_m = 0{,}3\,\mathrm{nm}$. Le « libre parcours moyen » noté $\ell$, distance moyenne parcourue par une particule entre deux chocs, admet comme expression :

$$\ell = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d_m^2 n^*},$$

où $n^*$ est la densité volumique de particules dans le gaz.

a) Considérons les deux conditions suivantes pour le gaz :

(a) $p = 3\,\mathrm{bar}$ et $T = 280\,\mathrm{K}$

(b) $p = 2 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$ et $T = 50\,°\mathrm{C}$

En comparant les densités de particules, estimer dans quelle condition le libre parcours moyen est le plus grand.

.....

b) Calculer le libre parcours moyen des particules composant le gaz dans le cas (a) en nm.

.....

### Entraînement 35.2 — Forces volumiques.

Une force volumique se définit par la relation $\vec{f}_{\mathrm{vol}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{f}}{\mathrm{d}\tau}$, où $\mathrm{d}\vec{f}$ est la force agissant sur le volume $\mathrm{d}\tau$.

On considère : $\vec{j}$ le vecteur densité volumique de courant (on a $i = \iint_S \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$) ; $\mu$ la masse volumique ; $\rho$ densité volumique de charges ; $\sigma$ densité surfacique de charge ; $P$ la pression.

Quelle(s) expression(s) ne correspond(ent) pas à une force volumique ?

*Vous aurez le souci de vérifier l'homogénéité des relations écrites.*

(a) $\mu\vec{g}$

(b) $\rho(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$

(c) $\vec{j} \wedge \vec{E}$

(d) $\vec{j} \wedge \vec{B}$

(e) $-\overrightarrow{\mathrm{grad}}(P)$

.....

**Entraînement 35.3 — Forces pressantes de l'atmosphère.**

a) Donner l'ordre de grandeur de la pression atmosphérique en Pa.

.....

b) Exprimer la en $\mathrm{N \cdot cm^{-2}}$.

.....

c) Quelle est l'intensité de la force que je dois appliquer sur une surface de $10\,\mathrm{cm}^2$ pour exercer la pression de 1 bar ?

.....

**Entraînement 35.4 — Échelle mésoscopique et ordre de grandeur.**

On considère un système constitué d'un litre d'air dans les conditions ambiantes usuelles (on prend $p = 1\,\mathrm{bar}$ ; $T = 15\,°\mathrm{C}$). L'air est assimilé à un gaz parfait, vérifiant l'équation d'état

$$pV = nRT = \frac{NRT}{\mathcal{N}_A},$$

où $n$ est le nombre de moles et $N$ le nombre de particules.

a) Déterminer la densité volumique $n^* = \dfrac{N}{V}$ de particules de ce système (en $\mathrm{m^{-3}}$).

(a) $2{,}5 \times 10^{25}\,\mathrm{m^{-3}}$
(b) $2{,}5 \times 10^{20}\,\mathrm{m^{-3}}$
(c) $4{,}8 \times 10^{26}\,\mathrm{m^{-3}}$
(d) $4{,}8 \times 10^{21}\,\mathrm{m^{-3}}$

.....

b) Évaluer le nombre de particules $N_0$ contenues dans le litre d'air.

(a) $2{,}5 \times 10^{22}$
(b) $2{,}5 \times 10^{25}$
(c) $4{,}8 \times 10^{29}$
(d) $4{,}8 \times 10^{26}$

.....

c) On assimile une « particule de fluide » à un cube d'air de côté $d = 0{,}1\,\mathrm{mm}$.

Évaluer le nombre de particules $N_0$ contenues dans cette particule de fluide.

.....

# Fluide et forces de pression

**Entraînement 35.5 — Forces de pression sur un barrage vertical.**

On considère un barrage assimilé à un mur vertical de hauteur $h$ et de largeur $L$ muni d'un repère orthonormé direct.

Il est en contact à gauche avec de l'air à la pression uniforme $p_0 = 1\,\text{bar}$, à droite avec de l'eau au repos de masse volumique $\mu$.

La pression dans l'eau est donnée en fonction de l'altitude $z$ par la relation $p(z) = p_0 - \mu g z$. Dans ce cas, l'origine de l'axe ascendant $(\text{O}z)$ est prise à l'interface eau/air.

Le barrage est défini sur l'intervalle $z \in [-h, 0]$.

La force de pression qu'un fluide exerce sur la surface $S$ du barrage s'écrit :

$$\overrightarrow{F_\text{p}} = F_\text{p}\,\vec{u} = \left(\iint_S p(M)\,\text{d}S\right)\vec{u} = \left(\iint_S p(y,z)\,\text{d}y\,\text{d}z\right)\vec{u},$$

où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire, perpendiculaire à la surface du barrage, orienté du fluide vers le barrage.

*Vue de dessus*

a) Exprimer la résultante des forces de pression $\overrightarrow{F_1}$ de l'air sur le barrage.

.....

b) Exprimer la résultante des forces de pression $\overrightarrow{F_2}$ de l'eau sur le barrage.

.....

c) En déduire la résultante de force de pression $\vec{F}$ agissant sur le barrage.

.....

**Entraînement 35.6 — Force de pression dans une vague.**

On souhaite exprimer la résultante des forces de pression dans une vague.

On considère une vague modélisée par un écoulement unidimensionnel, le long de l'axe (O$x$). La vitesse de l'eau, de masse volumique $\mu$, est supposée de la forme $\vec{v} = v(x,t)\vec{e_x}$.

La largeur de l'écoulement est supposée constante et égale à $L$. Le fond marin est situé à la cote $z_{\text{fond}} = f(x)$ et la surface libre de l'eau est située à la cote $z_{S_{\text{libre}}} = h(x,t)$. L'air ambiant est à la pression standard $p_0$ et le champ de pesanteur est uniforme, de norme $g$.

a) On suppose que la pression dans le fluide est de type hydrostatique, c'est-à-dire que la pression $p(M)$ en un point $M$ vaut $p_0 + \mu g \times \Delta H$, où $\Delta H$ est la hauteur de la colonne de fluide au-dessus du point $M$.

Donner l'expression de la pression $p(x,z,t)$ en un point de l'eau, en fonction de $\mu$, $g$, $h(x,t)$ et $z$.

.....

b) On considère désormais une tranche de fluide située entre $x$ et $x + \mathrm{d}x$.

Donner l'expression du volume élémentaire $\mathrm{d}V$ de ce système, en fonction de $L$, $\mathrm{d}x$, $h(x,t)$ et $f(x)$.

.....

c) On rappelle que l'expression de la résultante des forces de pression $\overrightarrow{\mathrm{d}F}$ agissant sur un volume élémentaire est $\overrightarrow{\mathrm{d}F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(p) \times \mathrm{d}V$.

En déduire l'expression de la résultante des forces de pression $\mathrm{d}F_x$ selon (O$x$), qui s'exerce sur une tranche d'épaisseur $\mathrm{d}x$.

.....

# Pression dans l'atmosphère isotherme

**Entraînement 35.7 — Masse volumique d'un gaz parfait.**

Considérons $n$ moles d'air assimilé à un gaz parfait, à la pression $p$ et à la température $T_0$.

On donne la masse molaire de l'air : $M_{\text{air}} = 29\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$.

a) On considère un système élémentaire composé $\delta n$ moles d'air. Exprimer sa masse volumique $\rho$ en fonction de $\delta n$, $M_{\text{air}}$ et de son volume $\text{d}V$.

.....

b) En utilisant la loi des gaz parfaits exprimer $\rho$ la masse volumique du gaz en fonction des grandeurs $M_{\text{air}}$, $p$, $R$ et $T_0$.

.....

c) Évaluer la masse volumique $\rho$ de l'air, au niveau de l'océan à $T_0 = 15\,°\text{C}$.

*Le résultat sera exprimé en* $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

.....

**Entraînement 35.8 — Calcul de pression.**

Un fluide de masse volumique $\rho$ possède une pression dépendant de l'altitude $z$. L'axe $(\text{O}z)$ est un axe ascendant et $p(z=0) = p_0$.

L'équation vérifiée par $p(z)$ est $\dfrac{\text{d}p}{\text{d}z} + \rho g = 0$, avec $g = 10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

**• Le fluide est de l'eau, situé dans la région $z < 0$.**

a) Quelle est la masse volumique $\rho_0$ de l'eau en $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ? .....

b) Déterminer l'expression de la pression $p(z)$ dans l'eau pour $z \in [-H, 0]$.

.....

**• Le fluide est un gaz parfait de masse molaire $M$ occupant tout l'espace. La température est uniforme et sera notée $T_0$.**

c) À l'aide de la loi de gaz parfait, écrire $\rho(z)$ en fonction de $T_0$, $p(z)$, $R$ et $M$.

.....

d) Déterminer $p(z)$ en tout point de l'espace .....

**• Le fluide est un gaz parfait de masse molaire $M$ occupant tout l'espace. La température est non uniforme et dépend de $z$ : $T(z) = T_0 - \alpha z$.**

e) Déterminer $p(z)$ en tout point de l'espace .....

**Entraînement 35.9 — Analyse du résultat.**

Dans le modèle de l'atmosphère isotherme, la pression varie avec l'altitude $z$ selon la loi

$$p(z) = p_0 \mathrm{e}^{-z/H},$$

où $H = \dfrac{RT_0}{Mg} \approx 8{,}4\,\mathrm{km}$ et $p_0 = 10^5\,\mathrm{Pa}$.

a) À quelle altitude $z_0$ exprimée en km la pression est-elle diminuée de moitié par rapport à celle au niveau de la mer ? .....

b) Établir une expression approchée de $p(z)$ valable pour des altitudes vérifiant $z \ll H$.

.....

c) Vous êtes sur la plage, les pieds dans l'eau. Vos pieds sont à la pression $p_0$.

Estimer $\dfrac{\Delta p}{p_0}$ entre vos pieds et votre tête, en pourcentage .....

# Force et écoulement dans une conduite

**Entraînement 35.10 — Calculs de débit.**

On considère un écoulement laminaire d'un fluide dans une conduite cylindrique de rayon $R$. La conduite est immobile et d'axe $(\mathrm{O}z)$. La vitesse vaut $\vec{v} = v(r)\vec{e_z}$.

L'expression générale du débit volumique, à travers une section droite de cette conduite, est

$$Q_v = \iint \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}.$$

Nous souhaitons évaluer le débit dans le sens des $z$ croissants.

a) Exprimer $\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$ en fonction de $v(r)$ et $\mathrm{d}S$ .....

Lorsque la situation est invariante par rotation autour de l'axe $(\mathrm{O}z)$, il est souvent très efficace de raisonner sur une surface élémentaire qui respecte cette invariance. On choisit donc une surface $\mathrm{d}S$ qui correspond à la portion de section droite située entre $r$ et $r + \mathrm{d}r$.

b) Exprimer $\mathrm{d}S$ en fonction de $r$ et de $\mathrm{d}r$ .....

c) Supposons que l'écoulement soit uniforme : $v(r) = \text{constante} = U$.

Exprimer alors le débit volumique $Q_v$ .....

d) On suppose maintenant que l'écoulement vérifie : $v(r) = \dfrac{v_0}{R^2}\left(R^2 - r^2\right)$.

Déterminer alors le débit volumique $Q_v$ .....

**Entraînement 35.11 — Écoulement laminaire dans une conduite.**

On étudie un écoulement visqueux et laminaire d'un fluide de viscosité dynamique $\eta$ dans une conduite cylindrique de rayon $R$. La conduite est immobile et d'axe $(\mathrm{O}z)$.

a) Le champ des vitesses est supposé du type $\vec{v}(r) = v(r)\vec{e_z}$.

Laquelle des propositions suivantes, concernant la vitesse au niveau de la paroi $v(r = R)$, est-elle correcte ?

(a) Elle est égale à la vitesse au centre de l'écoulement $v(r = 0)$.

(b) Elle est égale à la vitesse de la paroi, c'est-à-dire nulle : on a $v(r = R) = 0$.

(c) Elle est de signe opposée à la vitesse au centre de l'écoulement : on a $v(r = R) < 0$ lorsque $v(r = 0) > 0$.

(d) Elle n'est jamais nulle : on a $v(r = R) \neq 0$.

.....

b) On considère désormais le système constitué par le fluide à l'intérieur d'un cylindre de rayon $r_0 < R$ et de longueur $L$. La force $F(r_0)$ exercée par le fluide extérieur (située dans la région $r > r_0$) sur le système a pour expression

$$F(r_0) = \eta S \times \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)_{r=r_0},$$

où $S$ est la surface de contact sur laquelle se répartissent les contraintes de viscosité.

Exprimer $S$ .....

c) On admet que l'expression du champ des vitesses est $v(r) = A\big(R^2 - r^2\big)$.

Déterminer l'expression de la force $F(r_0)$ en fonction de $A$, $r_0$, $L$ et $\eta$ .....

d) Donner l'expression de la force $F_0$ exercée par tout le fluide contenue dans la conduite, sur la conduite.

.....

# Forces et aéronefs

**Entraînement 35.12 — Description du vol rectiligne.**

On étudie un aéronef de masse $m$ se déplaçant en mouvement rectiligne.

On définit les quatre angles suivants :

- L'angle $\varepsilon$ est l'angle entre la corde (c'est-à-dire l'axe de l'aile) et l'axe longitudinal de l'avion. Cet angle est constant par construction de l'avion.
- L'angle $\phi$ est l'angle entre l'axe de l'avion et l'horizontal. Cet angle est appelé l'assiette. C'est un paramètre que le pilote de l'avion contrôle lors du vol.
- L'angle $\alpha_0$ est l'angle que fait la trajectoire du centre d'inertie de l'avion avec le sol horizontal.
- L'angle $i$ est l'angle entre la corde et le vent relatif (vitesse de l'air par rapport à l'avion). Cet angle est appelé l'incidence.

Les questions suivantes s'appuient sur les deux figures ci-dessous :

FIGURE 1 – Divers axes pour un vol rectiligne

FIGURE 2 – Quatre angles

a) On considère qu'il n'y a pas de vent. Identifier, sur la figure 1, le vecteur donnant la direction du vent relatif (vitesse de l'air par rapport à l'avion) .....

b) Identifier, sur la figure 2, l'angle $\phi$ .....

c) Identifier, sur la figure 2, l'angle $\varepsilon$ .....

d) Identifier, sur la figure 2, l'angle $i$ .....

e) Identifier, sur la figure 2, l'angle $\alpha_0$ .....

f) Quelle relation lie les quatre angles $\varepsilon$, $\phi$, $\alpha_0$ et $i$ ? .....

**Entraînement 35.13 — Un avion.**

On étudie un aéronef équipé d'un moteur à hélice, autrement dit un avion.

L'avion est soumis à quatre forces :

- La force motrice $\overrightarrow{F_\mathrm{m}} = -F_\mathrm{m}\,\overrightarrow{e}$, due à l'hélice, qui est colinéaire à l'axe longitudinal de l'avion.
- Le poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$.
- La force de portance $\overrightarrow{F_\mathrm{p}} = \dfrac{1}{2}\mu S C_\mathrm{p} v^2 \overrightarrow{e_\perp}$, où $\mu$ est la masse volumique de l'air au repos, $S$ est la surface alaire, $C_\mathrm{p}$ est le coefficient de portance, $v$ est la norme de la vitesse du vent relatif et $\overrightarrow{e_\perp}$ le vecteur unitaire qui correspond à une direction perpendiculaire au vent relatif.
- La force de trainée $\overrightarrow{F_\mathrm{t}} = \dfrac{1}{2}\mu S C_t v^2 \overrightarrow{e}$, où $\mu$ est la masse volumique de l'air au repos, $S$ est la surface alaire, $C_t$ est le coefficient de trainée, $v$ est la norme de la vitesse du vent relatif et $\overrightarrow{e}$ le vecteur unitaire qui correspond à la direction du vent relatif.

On considère un vol en palier (c'est-à-dire à altitude constante), dans une atmosphère globalement au repos (c'est-à-dire sans vent).

a) Donner l'équation reliant les quatre forces qui s'exercent sur l'avion, lors de ce vol en mouvement rectiligne uniforme.

.....

b) Quelle relation lie $C_\mathrm{p}$ et $mg$ ? .....

c) Quelle relation lie $C_t$ et $F_\mathrm{m}$ ? .....

**Entraînement 35.14 — Un planeur.**

On étudie un planeur, ou un avion en panne moteur. La norme de sa vitesse est notée $v$.

On suppose qu'il n'y a pas de vent. On note $\mu$ la masse volumique de l'air et $S$ la surface alaire du planeur.

On admet que le pilote permet à son planeur d'avoir un mouvement rectiligne uniforme descendant faisant un angle $\alpha_0$ par rapport à l'horizontal.

Le planeur est soumis à trois forces :

- Le poids $\vec{P}$, selon la verticale descendante, de norme $mg$.
- La force de portance $\vec{F_\mathrm{p}}$, perpendiculaire à la vitesse du planeur, de norme
$$F_\mathrm{p} = \frac{1}{2}\mu S C_\mathrm{p} v^2,$$
où $C_\mathrm{p}$ est le coefficient de portance.
- La force de trainée $\vec{F_\mathrm{t}}$, opposée à la vitesse du planeur, de norme
$$F_\mathrm{t} = \frac{1}{2}\mu S C_t v^2,$$
où $C_t$ est le coefficient de trainée.

a) Quelle équation relie les différentes forces, lors du mouvement rectiligne uniforme descendant ?

.....

b) Projeter ces forces selon l'axe du mouvement.

En déduire l'expression de $F_\mathrm{t}$ en fonction de $m$, $g$ et $\alpha_0$ .....

c) Projeter ces forces selon un axe perpendiculaire au mouvement.

En déduire l'expression de $F_\mathrm{p}$ en fonction de $m$, $g$ et $\alpha_0$ .....

d) En déduire une relation entre $\tan\alpha_0$ et le rapport $\dfrac{C_t}{C_\mathrm{p}}$ .....

En réalité, $C_t$ et $C_\mathrm{p}$ dépendent de l'orientation de l'aile dans l'écoulement d'air, via un angle, noté $i$ et appelé « incidence ».
On donne ci-contre l'allure du graphe $C_\mathrm{p} = f(C_t)$, appelé polaire Eiffel. L'incidence varie lorsque l'on se déplace sur ce graphe. Les points A, B, C et D correspondent donc à des incidences différentes.

e) En quel point de cette polaire doit-on se placer afin de planer le plus loin possible, c'est-à-dire d'avoir une angle $\alpha_0$ le plus petit possible ?

.....

## Réponses mélangées

$2{,}5 \times 10^{13}$ $\quad \pi \dfrac{R^2}{2} v_0$ $\quad 2\pi r_0 L$ $\quad p_0 + \mu g(h(x,t) - z)$ $\quad p_0 - \rho g z$ $\quad$ (a) $\quad A_2$

$A_1$ $\quad \overrightarrow{u_3}$ $\quad \dfrac{p(z)M}{RT_0}$ $\quad \dfrac{1}{2}\mu S C_\mathrm{p} v^2 = mg$ $\quad (h(x,t) - f(x))L\,\mathrm{d}x$ $\quad 10^5\,\mathrm{Pa}$ $\quad$ C

$\pi R^2 U$ $\quad 10\,\mathrm{N \cdot cm^{-2}}$ $\quad p_0 \exp\left(-\dfrac{Mgz}{RT_0}\right)$ $\quad 5{,}8\,\mathrm{km}$ $\quad A_4$ $\quad 100\,\mathrm{N}$ $\quad$ (b)

$-\dfrac{\mu g h^2}{2} L\overrightarrow{e_x}$ $\quad 4\pi R^2 A L \eta$ $\quad i + \alpha_0 = \phi + \varepsilon$ $\quad F_\mathrm{t} = mg\sin(\alpha_0)$ $\quad 1{,}2\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$

$1 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ $\quad$ (b) $\quad -\left(p_0 + \dfrac{\mu g h}{2}\right) h L \overrightarrow{e_x}$ $\quad p_0 \left(\dfrac{T_0 - \alpha z}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{\alpha R}}$ $\quad \overrightarrow{F_\mathrm{p}} + \overrightarrow{F_\mathrm{t}} + \overrightarrow{P} + \overrightarrow{F_\mathrm{m}} = \overrightarrow{0}$

$2\pi r\,\mathrm{d}r$ $\quad \dfrac{1}{2}\mu S C_t v^2 = F_\mathrm{m}$ $\quad F_\mathrm{p} = mg\cos(\alpha_0)$ $\quad 2 \times 10^{-2}\%$ $\quad 32\,\mathrm{nm}$ $\quad A_3$

$v(r) \times \mathrm{d}S$ $\quad \tan\alpha_0 = \dfrac{C_t}{C_\mathrm{p}}$ $\quad -\mu g \dfrac{\partial h}{\partial x} \times (h(x,t) - f(x)) \times L\,\mathrm{d}x$ $\quad \dfrac{M_\mathrm{air} p}{RT_0}$

$\overrightarrow{F_\mathrm{p}} + \overrightarrow{F_\mathrm{t}} + \overrightarrow{P} = \overrightarrow{0}$ $\quad p_0 h L \overrightarrow{e_x}$ $\quad \dfrac{M_\mathrm{air}\delta n}{\mathrm{d}V}$ $\quad$ (c) $\quad -4\pi r_0^2 A L \eta$ $\quad$ (a) $\quad p_0(1 - \dfrac{z}{H})$

► Réponses et corrigés page 601

# Dynamique des fluides (PC)

**Prérequis**

- Dérivée particulaire : $\dfrac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v}$.
- Équation de conservation de la masse : $\mathrm{div}(\rho\vec{v}) + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.
- Équation de Navier-Stokes :
$$\rho\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v}\right] = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P + \eta\Delta(\vec{v}) + \vec{f},$$
où $\vec{f}$ correspond à l'équivalent volumique d'une force supplémentaire.
- Résultante des forces de pression extérieure sur une surface $\Sigma$ :
$$\overrightarrow{F_P} = -\iint_\Sigma P(\mathrm{M})\,\overrightarrow{n_{\mathrm{ext}}}\,\mathrm{d}S,$$
où $\overrightarrow{n_{\mathrm{ext}}}$ est le vecteur unitaire à l'élément de surface $\mathrm{d}S$ au point M sur $\Sigma$ orienté vers l'extérieur à $\Sigma$ et $P(\mathrm{M})$ la pression extérieure du fluide au point M.

## Pour bien commencer

### Entraînement 36.1 — Résoudre une équation différentielle.

Dans chaque cas, résoudre l'équation différentielle vérifiée par $v$ en prenant en compte les conditions aux limites et les possibles divergences de $v$.

a) $\dfrac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}y^2} = 0$ avec $v(0) = 0$ et $v(a) = v_0$ .....

b) $\dfrac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}y^2} = K$ avec $v(0) = 0$ et $v(a) = v_0$ .....

c) $\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) = K$ avec $v(R) = 0$ pour $r \in [0, R]$ .....

### Entraînement 36.2 — Calculer un débit volumique.

Dans chaque cas, établir l'expression du débit volumique.

a) $D_v = \displaystyle\int_{y=0}^{a}\left(\int_{x=0}^{b} v_0\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$, où $v_0$ est une constante .....

b) $D_v = \displaystyle\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} A\big(R^2 - r^2\big)r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$, où $A$ et $R$ sont des constantes ..

**Entraînement 36.3 — Estimer un nombre de Reynolds.**

Le nombre de Reynolds Re d'un écoulement est défini par $\mathrm{Re} = VL/\nu$, où $V$ et $L$ sont les distance et vitesse caractéristiques de l'écoulement et $\nu$ la viscosité cinématique du fluide. Pour l'eau et l'air, on a $\nu_{\text{eau}} = 1{,}0 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$ et $\nu_{\text{air}} = 1{,}6 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}$.

Dans chacun des cas suivants, calculer le nombre de Reynolds et choisir la réponse qui est la plus proche de votre estimation.

a) Un dauphin nageant à $20\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$

(a) $2{,}8 \times 10^{-3}$ (c) $2{,}8 \times 10^{10}$

(b) $2{,}8 \times 10^{6}$

b) Une balle de tennis allant à $180\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$

(a) $9{,}4 \times 10^{-4}$ (c) $9{,}4 \times 10^{4}$

(b) $9{,}4 \times 10^{7}$

c) Un moucheron tombant à une vitesse constante de $1\,\mathrm{cm \cdot s^{-1}}$

(a) $3{,}1 \times 10^{-1}$ (c) $3{,}1 \times 10^{2}$

(b) $3{,}1 \times 10^{-5}$

**Entraînement 36.4 — Estimer le rapport de deux termes.**

En raisonnant en terme d'échelles caractéristiques, établir une expression en ordre de grandeur des rapports suivants. Les vitesse et longueur caractéristiques seront notées $V$ et $L$. Les grandeurs $\rho$, $\eta$ et $\Omega$ sont des constantes.

*Par exemple, en terme d'échelle caractéristique, l'expression* $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ *est équivalente à* $\dfrac{V}{T}$*, où* $V$ *est une vitesse caractéristique et* $T$ *un temps caractéristique du problème étudié.*

a) $\dfrac{\|\rho(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v}\|}{\|\eta\Delta(\vec{v})\|}$ .....

b) $\dfrac{\|\rho(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v}\|}{\|\rho\vec{\Omega} \wedge \vec{v}\|}$ .....

c) $\dfrac{\|\eta\Delta(\vec{v})\|}{\|\rho\vec{\Omega} \wedge \vec{v}\|}$ .....

## Forces dans les fluides

**Entraînement 36.5 — Viscosité dynamique et viscosité cinématique.**

On note $\eta$ la viscosité dynamique d'un fluide visqueux et $\nu$ sa viscosité cinématique définie par $\nu = \dfrac{\eta}{\rho}$, où $\rho$ est la masse volumique du fluide.

a) Connaissant l'expression de la force volumique de viscosité au sein d'un fluide newtonien et incompressible $\overrightarrow{f_{\text{vis}}} = \eta\Delta(\vec{v})$, déterminer la dimension d'une viscosité dynamique.

b) En déduire la dimension d'une viscosité cinématique .....

c) Sachant que pour l'eau, $\eta$ vaut $10^{-3}$ usi (unités S.I.), sa viscosité cinématique vaut

(a) $\nu = 10^{3}$ usi (b) $\nu = 1$ usi (c) $\nu = 10^{-3}$ usi (d) $\nu = 10^{-6}$ usi

**Entraînement 36.6 — Statique des fluides.**

La pression $P(z)$ pour un fluide homogène de masse volumique $\mu$ au repos dépend de l'altitude : on a

$$P(z) = P_0 - \mu g z.$$

a) Exprimer l'équivalent volumique $-\overrightarrow{\text{grad}}\, P(z)$ des forces de pression.

.....

b) Exprimer la résultante des forces de pression exercées sur une surface $S$ de largeur $L$ selon $(\text{O}y)$ et de hauteur $h$ comprise entre $z = 0$ et $z = h$.

*On rappelle que cette résultante est définie par* $\overrightarrow{F_P} = -\iint_\Sigma P(\text{M})\, \overrightarrow{n_{\text{ext}}}\, \text{d}S$.

.....

**Entraînement 36.7 — Gradient de pression.**

L'écoulement d'un fluide homogène de masse volumique $\mu$ se fait dans une conduite grâce à un gradient constant de pression dans la direction $(\text{O}x)$ tel que $P(x_1) = P_1$ et $P(x_2 = x_1 + L) = P_2$.

a) Exprimer le gradient de pression $\overrightarrow{\text{grad}}\, P(x)$ du fluide .....

b) Exprimer la pression $P(x)$ du fluide selon l'abscisse $x$ .....

c) Calculer la force de pression exercée sur une section $S$ de la conduite située en $x = L$.

.....

**Entraînement 36.8 — Viscosité.**

Un écoulement incompressible d'un fluide newtonien de viscosité $\eta$ a comme champ des vitesses

$$\vec{v}(z) = v(z)\vec{e_x}$$

avec $v(z) = Az^2$.

a) Exprimer l'équivalent volumique $\eta\Delta(\vec{v}(z))$ des forces de viscosité.

.....

b) Exprimer la force de viscosité $\overrightarrow{F_\text{v}}$ exercée sur une plaque de surface $S = L^2$ à l'altitude $z = h$ par le fluide situé juste au-dessus.

*On rappelle que le fluide exerce sur une surface infinitésimale* $\text{d}S$ *la force* $\delta\overrightarrow{F_\text{v}} = \eta \dfrac{\partial v}{\partial z}\, \text{d}S\vec{e_x}$.

.....

## Entraînement 36.9 — Nombre de Reynolds.

Une bille en acier de masse volumique $\mu_a = 7{,}8 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ et de diamètre $d = 2R = 1{,}0\,\mathrm{mm}$ tombe dans un récipient contenant du glycérol, dont la masse volumique est $\mu_g = 1{,}3 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ et dont la viscosité est $\eta = 0{,}94\,\mathrm{Pa \cdot s}$.

a) Calculer le nombre de Reynolds Re, défini par $\mathrm{Re} = \dfrac{\mu_g\,\mathrm{d}v}{\eta}$, sachant que la bille atteint la vitesse limite $v_\ell = 3{,}8\,\mathrm{mm \cdot s^{-1}}$.

.....

b) L'écoulement étant laminaire, calculer la norme de la force de traînée $\overrightarrow{F_t} = -6\pi\eta R\overrightarrow{v}$ maximale.

.....

c) Calculer la norme de la poussée d'Archimède exercée par le fluide sur la bille $\overrightarrow{\Pi} = -\mu_f V_{s,i}\overrightarrow{g}$, avec la masse volumique $\mu_f$ du fluide et le volume immergé $V_{s,i}$ de la bille. Le champ de pesanteur a pour valeur $g = 9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

.....

d) Même question pour la force de pesanteur $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$ .....

e) Avant d'atteindre un mouvement rectiligne uniforme, la bille est accélérée. En faisant un bilan des forces, donner l'équation différentielle de la vitesse selon l'axe vertical descendant sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{v(t)}{\tau} = \left(1 - \frac{\mu_g}{\mu_a}\right)g,$$

en précisant l'expression de $\tau$ en fonction de $\mu_a$, $R$ et $\eta$

.....

f) Donner l'ordre de grandeur de la durée $\tau$ du régime transitoire .....

## Entraînement 36.10 — Équivalent volumique des forces de pression.

On cherche la résultante des forces de pression $\mathrm{d}\overrightarrow{F_P}$ que le fluide environnant exerce sur une particule fluide de volume $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, située entre $x$ et $x + \mathrm{d}x$, $y$ et $y + \mathrm{d}y$, $z$ et $z + \mathrm{d}z$.

La force de pression $\mathrm{d}\overrightarrow{F}$ s'exerçant sur un côté de surface $\mathrm{d}S$ de cette particule s'exprime $\mathrm{d}\overrightarrow{F} = -P\,\mathrm{d}S\overrightarrow{n}$, où $\overrightarrow{n}$ est un vecteur unitaire normal à la surface et dirigé de l'intérieur du volume vers l'extérieur.

a) Exprimer la force de pression $\mathrm{d}\overrightarrow{F_g}$ s'exerçant sur la paroi latérale gauche de la particule en fonction de $P(x, y, z)$, $\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}z$.

.....

b) Exprimer la force de pression $\mathrm{d}\overrightarrow{F_d}$ s'exerçant sur la paroi latérale droite de la particule en fonction de $P(x + \mathrm{d}x, y, z)$, $\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}z$.

.....

c) En déduire une expression de la résultante $\mathrm{d}F_{Px}$ des forces de pression suivant O$x$ en fonction de $\mathrm{d}\tau$ et d'une dérivée partielle de $P$ du premier ordre.

.....

d) Reproduire le raisonnement pour exprimer la résultante $\mathrm{d}F_{Py}$ des forces de pression suivant O$y$ en fonction de $\mathrm{d}\tau$ et d'une dérivée partielle de $P$ du premier ordre.

.....

e) Reproduire le raisonnement pour exprimer la résultante $\mathrm{d}F_{Pz}$ des forces de pression suivant O$z$ en fonction de $\mathrm{d}\tau$ et d'une dérivée partielle de $P$ du premier ordre.

.....

f) En déduire l'expression vectorielle de la force volumique de pression $\overrightarrow{f_P}$ en fonction de $P$ au sein du fluide.

.....

**Entraînement 36.11 — Surface fermée soumise à une pression non uniforme.**

On cherche la résultante des forces de pression $\overrightarrow{F_P}$ qui s'exerce sur un solide de révolution d'axe (O$z$), de surface fermée $\Sigma$, constituée de deux sections planes $S_1$ et $S_2$ perpendiculaires à (O$z$), reliées par une surface latérale $S_{\text{lat}}$ de forme quelconque.

La surface latérale $S_{\text{lat}}$ comme la section $S_1$ sont soumises à une pression $P_1$ tandis que la section $S_2$ est soumise à la pression $P_2$.

On rappelle que $\oiint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}\overrightarrow{S}_{\text{ext}} = \iiint_{\mathcal{V}} \overrightarrow{\text{grad}}\,P\,\mathrm{d}\tau$, où $\mathcal{V}$ est le volume limité par la surface fermée $\Sigma$.

a) Que vaudrait la résultante des forces de pression s'exerçant sur $\Sigma$ si on avait $P_1 = P_2$ ?

.....

b) La distribution des pressions qui s'exercent sur $\Sigma$ est équivalente à la superposition d'une distribution uniforme $P_1$ sur l'ensemble de $\Sigma$ et d'une pression extérieure $P'$ appliquée sur la partie droite de la seule section $S_2$, avec :

(a) $P' = P_2$ (b) $P' = P_2 - P_1$ (c) $P' = P_1 + P_2$

.....

c) La résultante des forces de pression qui s'exerce sur le solide de surface fermée $\Sigma$ vaut :

(a) $\overrightarrow{F_P} = (P_2 - P_1)S_1\overrightarrow{e_z}$
(b) $\overrightarrow{F_P} = (P_1 - P_2)S_1\overrightarrow{e_z}$
(c) $\overrightarrow{F_P} = (P_2 - P_1)S_2\overrightarrow{e_z}$
(d) $\overrightarrow{F_P} = (P_1 - P_2)S_2\overrightarrow{e_z}$

.....

**Entraînement 36.12 — Équivalent volumique des forces de viscosité.**

Pour un champ des vitesses de la forme

$$\vec{v}(\mathrm{M},t) = v_x(y,t)\vec{e_x},$$

une particule de fluide de volume $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ est soumis à des forces visqueuses $\mathrm{d}\vec{F_1}$ et $\mathrm{d}\vec{F_2}$ s'exerçant sur ses faces inférieure (à la cote $y$) et supérieure (à la cote $y+\mathrm{d}y$).

La force visqueuse $\mathrm{d}\vec{F}_v$ exercée par une particule de fluide sur celle se trouvant **au-dessus** s'écrit

$$\mathrm{d}\vec{F_\mathrm{v}} = -\eta\frac{\partial v_x}{\partial y}\,\mathrm{d}S\vec{e_x},$$

où $\eta$ est la viscosité dynamique du fluide et $\mathrm{d}S$ la surface de contact.

a) Quel cas parmi les quatre choix suivants est-il celui qui convient ?

(a) $\begin{cases}\mathrm{d}\vec{F_1}(y,t) = +\eta\dfrac{\partial v_x}{\partial y}(y,t)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\vec{e_x}\\ \mathrm{d}\vec{F_2}(y+\mathrm{d}y,t) = +\eta\dfrac{\partial v_x}{\partial y}(y+\mathrm{d}y,t)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\vec{e_x}\end{cases}$

(b) $\begin{cases}\mathrm{d}\vec{F_1}(y,t) = -\eta\dfrac{\partial v_x}{\partial y}(y,t)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\vec{e_x}\\ \mathrm{d}\vec{F_2}(y+\mathrm{d}y,t) = -\eta\dfrac{\partial v_x}{\partial y}(y+\mathrm{d}y,t)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\vec{e_x}\end{cases}$

(c) $\begin{cases}\mathrm{d}\vec{F_1}(y,t) = +\eta\dfrac{\partial v_x}{\partial y}(y,t)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\vec{e_x}\\ \mathrm{d}\vec{F_2}(y+\mathrm{d}y,t) = -\eta\dfrac{\partial v_x}{\partial y}(y+\mathrm{d}y,t)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\vec{e_x}\end{cases}$

(d) $\begin{cases}\mathrm{d}\vec{F_1}(y,t) = -\eta\dfrac{\partial v_x}{\partial y}(y,t)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\vec{e_x}\\ \mathrm{d}\vec{F_2}(y+\mathrm{d}y,t) = +\eta\dfrac{\partial v_x}{\partial y}(y+\mathrm{d}y,t)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\vec{e_x}\end{cases}$

.....

b) En déduire l'expression de la résultante $\mathrm{d}\vec{F} = \mathrm{d}\vec{F_1} + \mathrm{d}\vec{F_2}$ des forces de viscosité sur le volume $\mathrm{d}\tau$ en fonction de $\mathrm{d}\tau$, $\eta$ et d'une dérivée partielle de $v_x$ du second ordre.

.....

c) En généralisant le résultat obtenu à la question précédente, quelle est, pour un champ eulérien de vitesses quelconque $\vec{v}(\mathrm{M},t)$, l'expression de l'équivalent volumique des forces de viscosité au sein d'un fluide visqueux newtonien et incompressible ?

(a) $\overrightarrow{f_\mathrm{vis}} = \eta\Delta(\vec{v})$

(b) $\overrightarrow{f_\mathrm{vis}} = -\eta\Delta(\vec{v})$

(c) $\overrightarrow{f_\mathrm{vis}} = \eta\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}(\vec{v}))$

.....

# Autour de l'équation de Navier-Stokes

**Entraînement 36.13 — À propos de la dérivée particulaire.**

On considère un fluide de masse volumique $\rho$ en écoulement avec un champ eulérien des vitesses $\vec{v}(\mathrm{M}, t)$.

On pourra se reporter à l'expression de la dérivée particulaire rappelée en prérequis.

a) Le terme $\rho \dfrac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}$ a la dimension d'une :

(a) accélération massique
(b) accélération volumique
(c) force massique
(d) force volumique

.....

b) Le terme $\dfrac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}$ est nul pour tout écoulement

(a) uniforme et stationnaire
(b) incompressible et stationnaire
(c) incompressible
(d) uniforme

.....

c) On considère l'écoulement incompressible, stationnaire et homogène d'un fluide dont les lignes de courant sont rectilignes et parallèles. Que vaut $\dfrac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}$ ?

.....

**Entraînement 36.14 — Statique des fluides en référentiel non galiléen.**

L'eau, fluide newtonien homogène de viscosité dynamique constante $\eta = 10^{-3}\,\mathrm{Pa \cdot s}$ et de masse volumique $\mu = 1{,}0 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, est soumise au champ de pesanteur uniforme $\vec{g}$ et se trouve au repos dans un récipient. On note $(\mathrm{O}z)$ l'axe vertical ascendant.

a) Simplifier l'équation de Navier-Stokes (rappelée en prérequis).

*On notera $\vec{F}_{\mathrm{V,a}}$ la résultante des forces volumiques autres que celles de pression appliquées au fluide.*

.....

b) Le récipient contenant l'eau est en translation d'accélération $\vec{a}_{\mathrm{M}}(t) = a\vec{e_x}$ par rapport à un référentiel galiléen. Choisir la bonne réponse.

(a) $\vec{F}_{\mathrm{V,a}} = \mu g\vec{e_z} + \mu a\vec{e_x}$
(b) $\vec{F}_{\mathrm{V,a}} = \mu g\vec{e_z} - \mu a\vec{e_x}$
(c) $\vec{F}_{\mathrm{V,a}} = -\mu g\vec{e_z} + \mu a\vec{e_x}$
(d) $\vec{F}_{\mathrm{V,a}} = -\mu g\vec{e_z} - \mu a\vec{e_x}$

.....

c) Comme précédemment, l'eau est soumise au champ de pesanteur terrestre uniforme $\vec{g}$ mais cette fois-ci, le récipient et son contenu sont en rotation uniforme autour de l'axe $(\mathrm{O}z)$ ascendant à la vitesse angulaire $\omega$ constante par rapport à un référentiel galiléen. Choisir la bonne réponse.

(a) $\vec{F}_{\mathrm{V,a}} = \mu g\vec{e_z} + \mu\omega r^2\vec{e_r}$
(b) $\vec{F}_{\mathrm{V,a}} = \mu g\vec{e_z} - \mu\omega r^2\vec{e_r}$
(c) $\vec{F}_{\mathrm{V,a}} = -\mu g\vec{e_z} + \mu\omega r^2\vec{e_r}$
(d) $\vec{F}_{\mathrm{V,a}} = -\mu g\vec{e_z} - \mu\omega r^2\vec{e_r}$

.....

## Entraînement 36.15 — Écoulement de Couette plan.

On considère l'écoulement stationnaire d'un fluide newtonien incompressible de viscosité dynamique $\eta$ entre deux plaques situées en $z = -a$ et $z = +a$, de dimensions suivant $(\mathrm{O}x)$ et $(\mathrm{O}y)$ supposées infinies.

Les deux plaques sont mobiles suivant $\overrightarrow{e_x}$ de vitesses respectives $-U\overrightarrow{e_x}$ et $+U\overrightarrow{e_x}$. On adopte les conditions aux limites $\overrightarrow{v}(a) = U\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{v}(-a) = -U\overrightarrow{e_x}$.

On suppose le champ eulérien des vitesses dans l'écoulement du type $\overrightarrow{v}(\mathrm{M}) = v(z)\overrightarrow{e_x}$. Le champ de pression sera supposé ne dépendre ici que de $z$. On note $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{e_z}$ le champ de pesanteur local.

On pourra se reporter à l'expression de la dérivée particulaire ainsi qu'à l'équation de Navier-Stokes (rappelées en prérequis) avec ici $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{0}$.

Pour un champ vectoriel $\overrightarrow{A} = A_x\overrightarrow{e_x} + A_y\overrightarrow{e_y} + A_z\overrightarrow{e_z}$, on rappelle les expressions de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}$ et de $\Delta\overrightarrow{A}$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{pmatrix},$$

avec par exemple $\Delta A_x = \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}$.

a) Calculer l'accélération particulaire $\dfrac{\mathrm{D}\overrightarrow{v}}{\mathrm{D}t}$ de cet écoulement .....

b) Le laplacien vectoriel du champ des vitesses s'écrit pour cet écoulement :

(a) $\Delta(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$ (b) $\Delta(\overrightarrow{v}) = \dfrac{\mathrm{d}^2 v(z)}{\mathrm{d}z^2}\overrightarrow{e_x}$ (c) $\Delta(\overrightarrow{v}) = \dfrac{\mathrm{d}^2 v(z)}{\mathrm{d}z^2}\overrightarrow{e_z}$

.....

c) Exprimer en fonction de $U$, $a$ et $z$ la loi $v(z)$ .....

d) Le $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{v})$ associé à cet écoulement vaut :

(a) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$ (b) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{v}) = \dfrac{U}{a}\overrightarrow{e_x}$ (c) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{v}) = \dfrac{U}{a}\overrightarrow{e_y}$ (d) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{v}) = -\dfrac{U}{a}\overrightarrow{e_y}$

.....

## Entraînement 36.16 — Écoulement de Poiseuille cylindrique.

Un fluide newtonien incompressible de viscosité dynamique $\eta$ s'écoule en régime stationnaire dans une canalisation cylindrique d'axe (O$z$), de longueur $L$ et de rayon $R$. On néglige les effets de la pesanteur.

Du fait des symétries du problème, on cherche en coordonnées cylindriques un champ des vitesses et un champ de pression de la forme $\vec{v}(\mathrm{M}) = v(r,z)\vec{e_z}$ et $P(\mathrm{M}) = P(r,z)$.

On donne pour de tels champs : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P = \dfrac{\partial P}{\partial r}\vec{e_r} + \dfrac{\partial P}{\partial z}\vec{e_z}$ et $\mathrm{div}(\vec{v}) = \dfrac{\partial v(r,z)}{\partial z}$.

L'écoulement est régi par l'équation de Navier-Stokes qui s'écrit ici : $\vec{0} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(P) + \eta\Delta(\vec{v})$.

Du fait de la prise en compte de la viscosité, la vitesse du fluide s'annule sur les parois de la canalisation en $r = R$.

a) Obtenir à partir de l'équation de conservation de la masse (rappelée en prérequis) avec ici $\rho = C^{\mathrm{ste}}$ une équation aux dérivées partielles vérifiée par $v(r,z)$. En déduire que :

(a) $v(r,z) = C$ avec $C$ une constante
(b) $v(r,z)$ ne dépend que de $r$
(c) $v(r,z)$ ne dépend que de $z$
(d) $v(r,z)$ dépend de $r$ et $z$

.....

On donne pour le champ de vitesses de cet écoulement : $\Delta(\vec{v}) = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial v(r,z)}{\partial r}\right)\vec{e_z}$.

b) Le champ de pression est tel que :

(a) $\dfrac{\partial P}{\partial r} = C^{\mathrm{ste}}$
(b) $\dfrac{\partial P}{\partial r}$ ne dépend que de $z$
(c) $\dfrac{\partial P}{\partial r}$ ne dépend que de $r$
(d) $\dfrac{\partial P}{\partial r}$ dépend de $r$ et $z$

.....

c) Le champ de pression est tel que :

(a) $\dfrac{\partial P}{\partial z} = C^{\mathrm{ste}}$
(b) $\dfrac{\partial P}{\partial z}$ ne dépend que de $z$
(c) $\dfrac{\partial P}{\partial z}$ ne dépend que de $r$
(d) $\dfrac{\partial P}{\partial z}$ dépend de $r$ et $z$

.....

d) Le champ des vitesses s'écrit :

(a) $v(r) = \dfrac{[P(0) - P(L)]}{\eta L}(R^2 - r^2)$
(b) $v(r) = \dfrac{[P(0) - P(L)]}{2\eta L}(R^2 - r^2)$
(c) $v(r) = \dfrac{[P(L) - P(0)]}{4\eta L}(R^2 - r^2)$
(d) $v(r) = \dfrac{[P(0) - P(L)]}{4\eta L}(R^2 - r^2)$

.....

**Entraînement 36.17 — Écoulement parfait.**

Un liquide non visqueux et de masse volumique $\mu$ subit un écoulement dans une conduite de section variable.

On représente la situation par le schéma ci-contre.

a) Simplifier l'équation de Navier-Stokes (voir prérequis, avec $\vec{f} = \vec{0}$) sachant que la force de pesanteur agit. Cette équation s'appelle *l'équation d'Euler*.

.....

b) L'écoulement fluide est considéré comme parfait, stationnaire, incompressible et homogène. L'équation d'Euler conduit à la relation de Bernoulli sur une ligne de courant entre A et B.

$$\mu\frac{v_A^2}{2} + \mu g R + P_A = \mu\frac{v_B^2}{2} + \mu g r + P_B$$

Simplifier cette expression en exprimant $v_B^2 - v_A^2$ sachant que $P_A - P_B = \Delta P - \mu g(R - r)$.

.....

c) L'écoulement étant incompressible, le débit volumique $D_V$ se conserve : $D_V = v_A S = v_B s$.

Exprimer le débit volumique en fonction de $\mu$, $\Delta P$, $s$ et $S$ .....

## Entraînements supplémentaires

**Entraînement 36.18 — Écoulement de Poiseuille plan.**

Sous l'effet d'un gradient de pression, un fluide incompressible de masse volumique $\mu$ et de viscosité $\eta$ circule entre deux plans immobiles et horizontaux d'altitude $z = \pm h$. L'écoulement est laminaire en régime permanent et le champ de vitesse est de la forme $\vec{v}(z) = v(z)\vec{e_x}$. Du fait de la symétrie du problème, les grandeurs sont indépendantes de la variable $y$.

a) Calculer l'accélération d'une particule de fluide (voir l'expression de la dérivée particulaire en prérequis).

.....

b) Simplifier l'équation de Navier-Stokes (voir prérequis) .....

c) Projeter l'expression précédente sur l'axe (O$x$) .....

d) Déterminer le champ de vitesse de l'équation avec le gradient de pression horizontal $A > 0$ constant et sachant que $v(x = 0) = v_0$ et $v(x = \pm h) = 0$. On donne $\eta \dfrac{\mathrm{d}^2 v(z)}{\mathrm{d}z^2} = -A$.

Exprimer $v(z)$ en fonction de $v_0$, $A$, $h$, $\eta$ et $z$ .....

e) En considérant que la pression ne varie pas avec l'altitude, même question que précédemment pour le champ de pression de l'équation sachant que $P(x = 0) = P_0$. On donne $\dfrac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x} = -A$.

Exprimer $P(x)$ en fonction de $P_0$, $v_0$, $h$ et $x$ .....

**Entraînement 36.19 — Écoulement de Couette plan.**

Un fluide incompressible de masse volumique $\mu$ et de viscosité $\eta$ est initialement au repos dans le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{e_z}$ entre deux plans horizontaux $z = 0$ et $z = h$. Le déplacement du plan supérieur en $z = h$ à la vitesse constante $\vec{v}(h) = v_p\vec{e_x}$ met en mouvement le fluide. Du fait de la symétrie du problème, toutes les grandeurs sont indépendantes de la variable $y$. Le champ de pression dépend uniquement de la variable $z$.

a) Le champ de vitesse a la forme $\vec{v}(z,t) = v(z,t)\vec{e_x}$. Simplifier l'équation de Navier-Stokes.

.....

b) Écrire la projection selon l'axe (O$x$) de l'équation précédente .....

c) Exprimer en ordre de grandeur en fonction de $\mu$, $\eta$ et $h$ la durée $\tau$ du régime transitoire d'après l'équation précédente.

.....

d) Estimer cette durée (en h/min/s) sur une hauteur $h = 1{,}0\,\mathrm{dm}$ pour l'eau, dont la viscosité cinématique est $\nu = \dfrac{\eta}{\mu} = 1{,}0 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$.

.....

e) Écrire précisément et le plus simplement possible l'équation $\mu \dfrac{\partial v(z,t)}{\partial t} = \eta \dfrac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2}$ quand le régime stationnaire.

.....

f) Déterminer précisément le profil de vitesse correspondant à l'équation précédente, sachant, comme le fluide est visqueux, on a $v(z = 0) = 0$ et $v(z = h) = v_p$.

.....

g) En déduire la force de viscosité $\vec{F_\mathrm{v}}$ exercée sur le plan supérieur de surface $S$, qui est définie par la formule $\vec{F_\mathrm{v}} = -\eta \left(\dfrac{\mathrm{d}v(z)}{\mathrm{d}z}\right)_{z=h} S\vec{e_x}$ .....

**Entraînement 36.20 — Forme étendue de la relation de Bernoulli.**

On considère l'écoulement stationnaire, incompressible et irrotationnel d'un fluide parfait, uniquement soumis à des forces conservatives (pression et pesanteur), régi par l'équation aux dérivées partielles :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\vec{v}^2}{2}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{P}{\rho}\right) + \vec{g}.$$

a) En choisissant l'axe (O$z$) vertical ascendant, la quantité $C = P + \dfrac{\rho\vec{v}^2}{2} + \rho g z$, appelée « charge » est :

(a) une constante indépendante du temps, identique en tout point de l'écoulement irrotationnel, stationnaire, incompressible et parfait ;

(b) constante le long de la ligne de courant choisie, mais fonction du temps ;

(c) une constante indépendante du temps ne dépendant que de la ligne de courant choisie.

.....

b) La chute de pression au passage d'un cyclone présentant des vents de 200 km/h vaut en ordre de grandeur (on négligera les effets de la pesanteur et on donne $\rho_{\text{air}} = 1{,}2\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$) :

(a) $P_{\text{max}} - P_{\text{min}} = 2\,\text{bar}$

(b) $P_{\text{max}} - P_{\text{min}} = 0{,}2\,\text{bar}$

(c) $P_{\text{max}} - P_{\text{min}} = 20\,\text{mbar}$

(d) $P_{\text{max}} - P_{\text{min}} = 2\,\text{mbar}$

.....

**Entraînement 36.21 — Vidange d'un récipient et formule de Torricelli.**

On envisage l'écoulement parfait et incompressible d'un liquide de masse volumique $\rho$ contenu dans un récipient cylindrique de rayon $R$ à travers un orifice de rayon $a$. On note $h$ le dénivelé entre la surface libre du liquide et le trou.

On suppose que $a \ll R$, ce qui permet de considérer que le régime d'écoulement est stationnaire dans le récipient (ou quasi-stationnaire).

La surface libre du liquide ainsi que le jet en sortie sont au contact de l'atmosphère de pression uniforme $P_0$.

On note $\vec{g} = -g\vec{e_z}$ le champ de pesanteur supposé uniforme.

On rappelle la relation simple de Bernoulli applicable sur une ligne de courant pour un écoulement parfait, stationnaire, incompressible, où toutes les forces appliquées sont conservatives : $P + \rho g z + \rho\dfrac{v^2}{2} = C^{\text{ste}}$, où (O$z$) est la verticale ascendante.

a) En appliquant la relation de Bernoulli à la ligne de courant allant de A à B, établir une relation liant $v_{\text{A}}$, $v_{\text{B}}$, $g$ et $h$.

.....

b) En exploitant la conservation du débit-volume, exprimer $v_{\text{B}}$ en fonction de $v_{\text{A}}$, $R$ et $a$.

.....

c) Simplifier l'expression de $v_{\text{B}}$ obtenue en a) compte tenu du fait que $a \ll R$ .....

**Entraînement 36.22 — Forme simple de la relation de Bernoulli.**

Soit l'écoulement incompressible (de masse volumique $\rho$) et stationnaire d'un fluide parfait (non visqueux), uniquement soumis à des forces conservatives (pression et champ de pesanteur uniforme), régi par l'équation d'Euler :

$$\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{P}{\rho}\right) + \vec{g}.$$

On rappelle l'identité vectorielle :

$$\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{\vec{v}^2}{2}\right) + \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v})\wedge\vec{v}.$$

Enfin, on rappelle que :

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\phi)\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \phi(\mathrm{B}) - \phi(\mathrm{A})$$

.

a) En prenant $(\mathrm{O}z)$ suivant la verticale ascendante, on peut écrire :

(a) $\vec{g} = +\overrightarrow{\mathrm{grad}}(gz)$

(b) $\vec{g} = +\overrightarrow{\mathrm{grad}}(gz^2)$

(c) $\vec{g} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(gz)$

(d) $\vec{g} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(gz^2)$

b) On fait circuler l'équation d'Euler à un instant donné le long d'une ligne de courant entre deux points A et B, c'est à dire en formant $\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \frac{D\vec{v}}{Dt}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}$.

En utilisant l'expression de la dérivée particulaire rappelée en prérequis, le calcul conduit à :

(a) $\dfrac{v_{\mathrm{B}}^2 - v_{\mathrm{A}}^2}{2} = \dfrac{P_{\mathrm{B}} - P_{\mathrm{A}}}{\rho} - g(z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{A}})$

(b) $\dfrac{v_{\mathrm{A}}^2 - v_{\mathrm{A}}^2}{2} = \dfrac{P_{\mathrm{A}} - P_{\mathrm{A}}}{\rho} + g(z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{A}})$

(c) $\dfrac{v_{\mathrm{A}}^2 - v_{\mathrm{A}}^2}{2} = \dfrac{P_{\mathrm{A}} - P_{\mathrm{A}}}{\rho} - g(z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{A}})$

c) Pour un écoulement stationnaire et incompressible d'un fluide parfait, soumis à des forces toutes conservatives, la quantité $P + \dfrac{\rho\vec{v}^2}{2} + \rho g z$, où $(\mathrm{O}z)$ est suivant la verticale ascendante du lieu, est :

(a) une constante indépendante du temps, identique en tout point de l'écoulement vérifiant les hypothèses précédentes ;

(b) constante le long de la ligne de courant choisie, mais fonction du temps ;

(c) une constante indépendante du temps ne dépendant que de la ligne de courant choisie.

**Entraînement 36.23 — Adimensionnement de l'équation de Navier-Stokes.**

On considère l'écoulement d'un fluide newtonien visqueux de viscosité dynamique $\eta$, et incompressible de masse volumique $\rho$, régi par l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P + \rho\vec{g} + \eta\Delta(\vec{v}),$$

où $\vec{g} = -g\vec{e_z}$ désigne le champ de pesanteur supposé uniforme. L'axe $(\text{O}z)$ est suivant la verticale ascendante.

Soit $T$ une durée, $L$ une longueur commune sur les trois axes $(\text{O}x)$, $(\text{O}y)$, $(\text{O}z)$ et $U$ une vitesse, trois grandeurs caractéristiques de l'écoulement.

On définit les variables sans dimension $t^* = \dfrac{t}{T}$, $x^* = \dfrac{x}{L}$ (idem pour $y^*$ et $z^*$), ainsi que $\vec{v^*} = \dfrac{\vec{v}}{U}$.

On note $\overrightarrow{\text{grad}}^* = L\,\overrightarrow{\text{grad}}$ l'opérateur gradient et $\Delta^* = L^2\,\Delta$ l'opérateur laplacien adimensionnés.

On cherche à réécrire l'équation de Navier-Stokes sous la forme adimensionnée

$$\mathcal{S}_{\text{tr}}\frac{\partial \vec{v^*}}{\partial t^*} + \left(\vec{v^*}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}^*\right)\vec{v^*} = -\overrightarrow{\text{grad}}^*\left(\frac{P}{P^*}\right) - \frac{1}{\mathcal{F}_{\text{r}}}\vec{e_z} + \frac{1}{\text{Re}}\Delta^*(\vec{v^*}),$$

où $\mathcal{S}_{\text{tr}}$ est appelé nombre de Strouhal, $\mathcal{F}_{\text{r}}$ le nombre de Froude et Re le nombre de Reynolds.

La grandeur $P^*$ a la dimension d'une pression.

a) Réécrire $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ en fonction de $\dfrac{\partial \vec{v^*}}{\partial t^*}$, $U$ et $T$ .....

b) Réécrire $\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}$ en fonction de $\left(\vec{v^*}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}^*\right)\vec{v^*}$, $U$ et $L$ .....

c) Réécrire $\Delta(\vec{v})$ en fonction de $\Delta^*(\vec{v^*})$, $U$ et $L$ .....

d) Exprimer $P^*$ en fonction de $\rho$ et $U$ .....

e) Exprimer le nombre de Strouhal $\mathcal{S}_{\text{tr}}$ en fonction de $L$, $T$ et $U$ .....

f) Exprimer le nombre de Froude $\mathcal{F}_{\text{r}}$ en fonction de $L$, $g$ et $U$ .....

g) Exprimer le nombre de Reynolds Re en fonction de $\eta$, $\rho$, $L$ et $U$ .....

## Réponses mélangées

$\sqrt{2gh}$ $\left[\frac{P_1-P_2}{L}(L-x_1)+P_1\right]S\vec{e_x}$ $\eta\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\,\mathrm{d}\tau\,\vec{e_x}$ $\vec{0}$ (a) $D_v = A\pi\frac{R^4}{2}$

$-\frac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}\tau$ (b) (a) (b) (a) (a) $\frac{2\Delta P}{\mu}$ $\frac{U^2}{L}\left(\vec{v^*}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}^*\right)(\vec{v^*})$

$P(x) = P_0 - \frac{2\eta v_0}{h^2}x$ $\vec{0}$ $\vec{0} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P(x,z) + \eta\Delta\vec{v}(z) + \mu\vec{g}$ $v(z) = \frac{v_p}{h}z$

$\vec{0}$ $\frac{P_2-P_1}{L}\vec{e_x}$ (c) (c) $-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P$ $\frac{U^2}{gL}$ (d) $\frac{U}{T}\frac{\partial\vec{v^*}}{\partial t^*}$ $\frac{R^2}{a^2}v_\mathrm{A}$

2 h 46 min 40 s $\frac{\mu}{\eta}h^2$ $\frac{\mathrm{d}^2 v(z)}{\mathrm{d}z^2} = 0$ $2A\eta\vec{e_x}$ $\frac{2\mu_\mathrm{a}R^2}{9\eta}$ $3{,}4\times10^{-5}$ N

$\frac{\partial P(x,z)}{\partial x} = \eta\frac{\partial^2 v(z)}{\partial z^2}$ (d) $\mu\frac{\partial\vec{v}(z,t)}{\partial t} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P(z,t) + \eta\Delta\vec{v}(z,t) + \mu\vec{g}$ (d) $v_\mathrm{B}^2 = v_\mathrm{A}^2 + 2gh$

$\mu\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v}\right) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P + \mu\vec{g}$ $v(r) = -\frac{KR^2}{4}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)$ (c) (b)

$-\frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}\tau$ (a) $-P(x+\mathrm{d}x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\vec{e_x}$ $v(z) = v_0\left(1-\frac{z^2}{h^2}\right)$ $\vec{0}$

$5{,}2\times10^{-3}$ (b) $v(y) = \frac{v_0}{a}y - \frac{K}{2}ay\left(1-\frac{y}{a}\right)$ $\frac{U}{L^2}\Delta^*(\vec{v^*})$ $4{,}0\times10^{-5}$ N

$L\left(P_0h - \mu g\frac{h^2}{2}\right)\vec{e_z}$ (d) (c) (c) $-\frac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}\tau$ $\rho U^2$ 0,5 ms

$\frac{\eta}{\rho\Omega L^2}$ $2A\eta hL^2\vec{e_x}$ $\mu g\vec{e_z}$ $-\eta\frac{v_p}{h}S\vec{e_x}$ $\frac{L}{UT}$ $L^2.T^{-1}$ (c)

$\frac{P_2-P_1}{L}(x-x_1)+P_1$ (d) $\frac{V}{\Omega L}$ $U\frac{z}{a}$ $6{,}7\times10^{-6}$ N $\vec{0} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P(\mathrm{M},t) + \vec{F}_{\mathrm{V,a}}$

$D_V = v_\mathrm{B}s = Ss\sqrt{\frac{2\Delta P}{\mu(S^2-s^2)}}$ $\mu\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} = \eta\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2}$ $M.L^{-1}.T^{-1}$

$P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\vec{e_x}$ $\frac{\rho VL}{\eta}$ (b) (c) $\frac{\rho LU}{\eta}$ $v(y) = \frac{v_0}{a}y$ (d) $D_v = v_0ab$

► Réponses et corrigés page 605

# Bilans en mécanique des fluides

**Prérequis**
Débits massique et volumique. Forces pressantes. Moment de force. Puissance d'une force.

**Constantes utiles**

→ Masse volumique de l'eau liquide dans les conditions standard de pression et température : $\mu = 1{,}0 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$

→ Accélération de la pesanteur : $g = 9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$

## Bilans d'énergie

### Entraînement 37.1 — Quelle est la bonne formule ?

Les équations suivantes sont-elles homogènes ?

Dans ces expressions, $w_i$ représente un travail indiqué massique, $\mathcal{P}_i$ une puissance indiquée, $\Delta P$ une perte de charge en pression et $\Delta h$ une perte de charge en hauteur.

a) $\left(\frac{v_\mathrm{s}^2}{2}\right) = \rho w_i$ .....

b) $D_\mathrm{m}\left(\frac{P_\mathrm{s}}{\rho}\right) = \mathcal{P}_i$ .....

c) $D_\mathrm{m}\left(\frac{P_\mathrm{s}}{\rho} + \frac{v_\mathrm{s}^2}{2} + gz_s\right) - D_\mathrm{m}\left(\frac{P_\mathrm{e}}{\rho} + \frac{v_\mathrm{e}^2}{2} + gz_e\right) = -D_\mathrm{m}\Delta P$ .....

d) $\left(\frac{P_\mathrm{s}}{\rho g} + \frac{v_\mathrm{s}^2}{2g} + z_s\right) - \left(\frac{P_\mathrm{e}}{\rho g} + \frac{v_\mathrm{e}^2}{2g} + z_e\right) = -\Delta h$ .....

### Entraînement 37.2 — Perte de charge et conversion.

On rappelle la relation de Bernoulli généralisée :

$$\frac{1}{2}\Delta v^2 + \frac{\Delta P}{\mu_0} + g\Delta z = w_u - gh_\mathrm{pc}.$$

a) On donne $h_\mathrm{pc} = 3{,}0\,\mathrm{m}$. Sachant que $\mu_0 = 2{,}0 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $g = 9{,}8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, calculer la perte de pression $\Delta P_\mathrm{pc}$ correspondant à cette perte de charge.

.....

b) La perte de charge précédente est due à la montée du fluide dans un tuyau vertical de hauteur $L = 10\,\mathrm{m}$. Au milieu de ce tuyau se situe une pompe qui fournit un travail massique utile $w_u$ au fluide.

Quelle doit être la valeur de ce travail massique pour qu'il n'y ait ni variation de vitesse ni variation de pression du fluide entre l'entrée et la sortie du tuyau ?

.....

## Entraînement 37.3 — Hypothèses sur l'écoulement.

Étudions la vidange d'un réservoir rempli d'eau. Le liquide, s'écoule par un orifice de section $s$ très inférieure à la section $S$ du réservoir. La hauteur de fluide, comptée à partir de l'orifice de sortie est notée $h(t)$ à l'instant $t$.

À l'instant initial, elle vaut $h_0$. On négligera toute perte de charge.

Dire si les caractéristiques ci-dessous conviennent à la situation.

a) Écoulement incompressible .....

b) Écoulement quasi-stationnaire ..

c) Écoulement parfait .....

d) Fluide homogène .....

## Entraînement 37.4 — Vidange d'un réservoir.

On étudie la vidange d'un réservoir rempli d'eau. Le liquide s'écoule par un orifice de section $s$ très inférieure à la section $S$ du réservoir. On négligera toute perte de charge. On considère une ligne de courant passant par les points A et B représentés sur le schéma. La relation de Bernoulli s'écrit sur cette ligne de courant :

$$\frac{P_A}{\mu} + \frac{v_A^2}{2} + gz_A = \frac{P_B}{\mu} + \frac{v_B^2}{2} + gz_B$$

a) Que peut-on dire des pressions aux points A et B ?

(a) $P_A < P_B$ (c) $P_A = P_B$

(b) $P_A > P_B$ (d) $P_B = P_A + \mu g(z_A - z_B)$

.....

b) Le débit volumique au point $A$ s'écrit :

(a) $D_{v,A} = \mu S v_A$ (b) $D_{v,A} = S v_A$ (c) $D_{v,A} = \dfrac{S v_A}{\mu}$

.....

c) Le débit volumique au point $B$ s'écrit :

(a) $D_{v,B} = \mu s v_B$ (b) $D_{v,B} = s v_B$ (c) $D_{v,B} = \dfrac{s v_B}{\mu}$

.....

d) Le fluide étant incompressible, il y a conservation du débit volumique. Que peut-on en déduire sur les vitesses en A et en B ?

(a) $v_A = v_B$ (b) $v_A \gg v_B$ (c) $v_A \ll v_B$

.....

e) On donne $h(t) = z_A - z_B$, en utilisant la relation de Bernoulli et les résultats précédents, quelle expression de $v_B$ est correcte ?

(a) $v_B = \sqrt{2\dfrac{P_A}{\mu} + 2gh(t)}$ (b) $v_B = \sqrt{2gh(t)}$ (c) $v_B = v_A + \sqrt{2gh(t)}$

.....

**Entraînement 37.5 — Simplifier la relation de Bernoulli.**

On donne l'expression usuelle de la formule de Bernoulli $\dfrac{v^2}{2} + gz + \dfrac{P}{\mu} = \text{cte}$.

a) Comment se simplifie-t-elle si l'écoulement est horizontal ?

.....

b) Comment se simplifie-t-elle si l'écoulement est lent ?

.....

c) On admet qu'elle s'écrit $\dfrac{v^2}{2} = gh$ à la sortie d'une citerne de hauteur $h = 5\,\text{cm}$.

À quelle vitesse $v$ le fluide est-t-il éjecté ?

.....

**Entraînement 37.6 — Quelle pompe choisir ?**

On étudie une fontaine dont le circuit d'eau est présenté ci-contre. Il comprend une pompe $(P)$ fournissant un travail utile massique $w_u$, relié à un tube $T$ de longueur $L = 10\,\text{m}$ et de diamètre $D = 10\,\text{mm}$. Lors de son passage dans le tube, le fluide subit une perte de charge régulière correspondant à une perte d'énergie massique $\Delta e_{\text{pcr}} = \dfrac{1}{2}\xi\dfrac{L}{D}U^2$ où $U$ est la vitesse débitante du fluide dans le tube et $\xi = 0,022$.

On suppose qu'avant la pompe, le fluide est à une pression $P_0$ et de vitesse négligeable.

On rappelle que le débit volumique s'écrit : $D_v = SU$ avec $S$ la section de l'écoulement ainsi que l'expression de la relation de Bernoulli généralisée :

$$\frac{1}{2}\Delta v^2 + \frac{\Delta P}{\mu} + g\Delta z = w_u - gh_{\text{pc}}.$$

a) On souhaite une vitesse $U = 7{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, calculer le débit volumique nécessaire $D_v$ en $\text{L}\cdot\text{s}^{-1}$.

.....

b) Choisir la bonne façon d'appliquer la relation de Bernoulli généralisée au fluide parcourant ce circuit le long d'une ligne de courant AB, A étant avant la pompe et B après le robinet.

(a) $\dfrac{1}{2}U^2 + gL = w_u - \dfrac{1}{2}\xi\mu g\dfrac{L}{D}U^2$

(b) $\dfrac{1}{2}U^2 + \dfrac{P_0}{\mu} + gL = w_u - \dfrac{1}{2}\mu g\xi\dfrac{L}{D}U^2$

(c) $\dfrac{1}{2}U^2 + gL = w_u - \dfrac{1}{2}\xi\dfrac{L}{D}U^2$

(d) $\dfrac{1}{2}U^2 + \dfrac{P_0}{\mu} + gL = w_u - \dfrac{1}{2}\xi\dfrac{L}{D}U^2$

.....

c) Pour obtenir un bilan de puissance à partir de la relation précédente, il faut la multiplier par :

(a) $D_v$ (b) $\mu D_v$ (c) $\mu$

.....

d) Quelle puissance la pompe doit-elle fournir pour atteindre le débit volumique souhaité ?

.....

e) Pour atteindre le débit volumique souhaité, nous avons le choix entre plusieurs pompes de différentes puissances $\mathcal{P}_i$. Laquelle choisir ?

(a) $\mathcal{P}_1 = 100\,\text{W}$ (b) $\mathcal{P}_2 = 300\,\text{W}$ (c) $\mathcal{P}_3 = 500\,\text{W}$ (d) $\mathcal{P}_4 = 700\,\text{W}$

.....

**Entraînement 37.7 — Lecture d'un diagramme de Moody.**

On donne ci-dessous le diagramme de Moody d'un fluide en écoulement de pleine section dans une conduite cylindrique de longueur $\ell$ et de diamètre $D$.

a) On donne $\mathrm{Re} = 2 \times 10^4$ le nombre de Reynolds de l'écoulement, $D = 20\,\mathrm{cm}$ le diamètre de la canalisation et $\varepsilon = 4\,\mathrm{mm}$ la rugosité absolue de la conduite.

En déduire, par lecture graphique, le coefficient de perte de charge $\xi$ dans la canalisation.

.....

b) On donne $\rho = 1 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ la masse volumique du fluide.

Calculer la perte de charge $\Delta P = \dfrac{1}{2}\rho U^2 \xi \dfrac{\ell}{D}$ dans la canalisation pour une vitesse débitante $U = 0{,}5\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ et une longueur $\ell = 10\,\mathrm{m}$.

.....

c) Pour un autre écoulement de nombre de Reynolds $\mathrm{Re} = 8 \times 10^5$ et de coefficient de perte de charge $\xi = 0{,}015$ déterminer la rugosité relative $\varepsilon/D$ par lecture graphique.

.....

d) En déduire la rugosité absolue $\varepsilon$ de la conduite si son diamètre est $D = 30\,\mathrm{cm}$.

.....

**Entraînement 37.8 — Pression dans un immeuble.**

On étudie le circuit d'eau d'un immeuble décrit ci-dessous. Il comprend un tuyau $T$ de longueur $L = 19\,\mathrm{m}$ permettant d'amener de l'eau jusqu'au dernier étage. Son diamètre est $D = 10\,\mathrm{mm}$. À l'extrémité de ce tube se trouve un coude $C$ permettant l'accès à un robinet $R_0$.

Au passage dans le coude et dans le robinet, le fluide subit les pertes de charge singulières $\Delta P_C = \frac{1}{2}k_1\mu U_1^2$ et $\Delta P_{R_0} = \frac{1}{2}k_2\mu U_2^2$ correspondant à des pertes de pression. On note $U_1$ et $U_2$ les vitesses débitantes respectivement en amont du coude et du robinet. On donne $k_1 = 1{,}3$ et $k_2 = 1{,}5$.

On rappelle que le débit volumique s'écrit : $D_v = SU$ avec $S$ la section de l'écoulement ainsi que l'expression de la relation de Bernoulli généralisée :

$$\frac{1}{2}\Delta v^2 + \frac{\Delta P}{\mu} + g\Delta z = w_u - \frac{\Delta P_{\mathrm{pc}}}{\mu}.$$

a) Le débit volumique voulu est de $0{,}25\,\mathrm{L}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, calculer les vitesses $U_1$ et $U_2$ .....

b) Quelle pression $P_i$ faut-il imposer en amont du circuit d'eau, sachant que $P_0 = 1{,}0\,\mathrm{bar}$ ?

.....

**Entraînement 37.9 — Puissance d'une installation.**

Une hélice d'hydrolienne est placée dans un écoulement d'eau unidimensionnel à symétrie cylindrique. On note (S*) le système fermé représenté sur le schéma. Dans la suite, $P_1$, $P_2$, $S_1$ et $S_2$ représentent les pressions et sections des systèmes (1) et (2). On a, de plus, $P_1 = P_2$.

a) La pression autour du tube de courant est supposée uniforme. Que vaut la résultante des forces pressantes qui s'exercent sur (S*) ?

(a) $\vec{F} = (P_1S_1 - P_2S_2)\vec{u}_x$ (c) $\vec{F} = \vec{0}$

(b) $\vec{F} = (P_2S_2 - P_1S_1)\vec{u}_x$

.....

b) Quelle puissance développe cette force ?

(a) $\mathcal{P}(\vec{F}_P) = P_1S_1v_1 - P_2S_2v_2$ (b) $\mathcal{P}(\vec{F}_P) = P_2S_2v_2 - P_1S_1v_1$ (c) $\mathcal{P}(\vec{F}_P) = 0$

.....

c) On note $\mathcal{P}$ la puissance reçue par l'hélice. Quelle puissance est reçue par (S*) ? .....

d) On note $D_{\mathrm{m}}$ le débit massique, l'écoulement étant stationnaire.

Exprimer l'énergie cinétique qui sort de (S*) pendant une durée élémentaire $\mathrm{d}t$.

.....

e) Exprimer l'énergie cinétique qui entre dans (S*) pendant une durée élémentaire $\mathrm{d}t$.

.....

f) Par application du théorème de la puissance cinétique $\dfrac{\mathrm{d}E_c^*}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{P}_{\text{ext}}$ à (S*), exprimer $\mathcal{P}$ si l'écoulement est horizontal. *On rappelle que les actions intérieures ne travaillent pas lorsqu'on suppose l'écoulement parfait et incompressible.*

.....

g) On suppose $v_2 \ll v_1$ et on donne $v_1 = 1\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ et $D_\mathrm{m} = 200\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, calculer $\mathcal{P}$ .....

## Bilans de masse

**Entraînement 37.10 — Effectuer un bilan de masse sur un système ouvert et fixe.**

Soit (S) une surface de contrôle, délimitant un système ouvert et fixe de masse $m$. Un fluide s'écoule à travers depuis la canalisation d'entrée (1) jusqu'à la canalisation de sortie (2).

a) Exprimer la masse de fluide $\mathrm{d}m_1$ qui entre dans (S) pendant la durée élémentaire $\mathrm{d}t$ à l'aide du débit massique entrant $D_{m1}$.

.....

b) Exprimer la masse de fluide $\mathrm{d}m_2$ qui sort de (S) pendant la durée élémentaire $\mathrm{d}t$ à l'aide du débit massique sortant $D_{m2}$ .....

c) Exprimer la variation de masse $\mathrm{d}m$ de (S) en fonction de $\mathrm{d}m_1$ et $\mathrm{d}m_2$ .....

d) En régime stationnaire $\mathrm{d}m = 0$, en déduire la relation entre $D_{m1}$ et $D_{m2}$ .....

**Entraînement 37.11 — Effectuer un bilan de masse sur un système fermé et mobile.**

On définit le système (S*) fermé et mobile constitué :

- de (S) et de la masse $\mathrm{d}m_1$ qui y entre, à l'instant $t$ ;
- de (S) et de la masse $\mathrm{d}m_2$ qui en sort, à l'instant $t + \mathrm{d}t$.

On note $m(t)$ la masse de (S) à l'instant $t$.

a) Exprimer la masse de fluide $m^*(t)$ de (S*) en fonction de $m(t)$ et $\mathrm{d}m_1$.

.....

b) Exprimer la masse de fluide $m^*(t + \mathrm{d}t)$ de (S*) en fonction de $m(t + \mathrm{d}t)$ et $\mathrm{d}m_2$.

.....

c) Exprimer la variation de masse $\mathrm{d}m^*$ de (S*).

.....

d) En régime stationnaire $m(t) = m(t + \mathrm{d}t)$, en déduire la relation entre $\mathrm{d}m_1$ et $\mathrm{d}m_2$.

.....

# Bilans de quantité de mouvement

**Entraînement 37.12 — Poussée d'une fusée.**

On étudie le mouvement d'une fusée de masse $m(t)$ et de vitesse $\vec{v}(t)$ lancée depuis la Terre grâce à l'éjection des gaz issus de la combustion de ses ergols. À l'instant initial, la masse de la fusée est $m(t=0) = m_0$.

La pression de l'air autour de la fusée est supposée uniforme et le coefficient de frottement de l'air sur la fusée est noté $\lambda$.

a) Le champ de pesanteur $\vec{g}$ est supposé uniforme. Exprimer le poids de la fusée.

.....

b) Quelle forme prend la force de frottement fluide linéaire qu'elle ressent ?

.....

c) Exprimer la résultante des forces de pression .....

d) Les gaz sont éjectés de la fusée avec un débit massique noté $D_\mathrm{m}$ et une vitesse relative par rapport à la fusée notée $\vec{u}$. Exprimer la variation $\overrightarrow{\mathrm{d}p}$ de la quantité de mouvement des gaz éjectés dans le référentiel de la fusée entre les instants $t$ et $t + \mathrm{d}t$

.....

e) Soit $\overrightarrow{F_\mathrm{P}}$ la force de poussée subie par la fusée de la part des gaz éjectés.

À partir de l'expression obtenue à la question précédente, déterminer l'expression de $\overrightarrow{F_\mathrm{P}}$.

.....

**Entraînement 37.13 — Voile solaire.**

On considère une sonde spatiale disposant d'une voile réfléchissante et rigide de surface $S$. Un flux de photons de densité volumique $n$ arrive en incidence normale sur la voile à une célérité $c$ selon le vecteur $\overrightarrow{e_x}$. La quantité de mouvement d'un photon est donnée par $\dfrac{h}{\lambda}$ avec $h$ la constante de Planck et $\lambda$ la longueur d'onde.

a) Donner l'expression du volume dans lequel sont contenus les photons incidents sur la voile pendant une durée infinitésimale $\mathrm{d}t$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ de la voile .....

b) Exprimer la quantité de mouvement $\vec{p}(t)$ de ces photons incidents.

.....

c) Exprimer la quantité de mouvement $\vec{p}(t + \mathrm{d}t)$ des mêmes photons après avoir heurté la voile.

.....

d) Par application du théorème de la quantité de mouvement $\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}_\mathrm{ext}$, en déduire la force exercée par les photons sur la voile .....

**Entraînement 37.14 — Action d'un écoulement sur une canalisation.**

On étudie l'écoulement unidimensionnel supposé parfait stationnaire incompressible et homogène, d'un fluide dans une canalisation à symétrie cylindrique.

On note (S*) le système fermé représenté sur le schéma.

On notera $P_1$, $S_1$ et $v_1$ les pression, surface et vitesse en amont et $P_2$, $S_2$ et $v_2$ les pression, surface et vitesse en aval de l'écoulement.

a) Exprimer la force pressante qui s'exerce sur (S*) en amont .....

b) Exprimer la force pressante qui s'exerce sur (S*) en aval .....

c) On note $\vec{F}$ la force exercée par (S*) sur la canalisation. Quelle force exerce la canalisation sur (S*) ?

.....

d) On note $D_\mathrm{m}$ le débit massique entrant et sortant de la canalisation. Exprimer la quantité de mouvement qui sort de (S*) pendant une durée élémentaire d$t$.

.....

e) Exprimer la quantité de mouvement qui entre dans (S*) pendant la même durée élémentaire d$t$.

.....

f) Par application du théorème de la quantité de mouvement $\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}^*}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}_\mathrm{ext}$ à (S*), exprimer $\vec{F}$ si l'écoulement est lent et horizontal.

*On ne prendra en compte dans cette question que les forces horizontales.*

.....

g) La formule de Bernoulli assure que $P_1 = P_2 = P$.

Calculer $F = \|\vec{F}\|$ si $P = 2\,\mathrm{bar}$ et $S_2 = S_1/2 = 10\,\mathrm{cm}^2$ .....

# Bilans de moment cinétique

**Entraînement 37.15 — Bilan de moments d'une turbine.**

On étudie le mouvement du rotor d'axe $(Oz)$ d'une turbine entraînée par un écoulement d'eau avec un coefficient de frottement $\lambda$.

a) On modélise la liaison du rotor par un pivot parfait. Quel est le moment résultant de l'action de liaison ?

.....

b) On note $\omega$ la vitesse angulaire de rotation. La charge mécanique du rotor exerce un couple résistant linéaire, quelle est son expression ?

.....

c) On néglige les effets de pesanteur et les effets pressants sont de résultante nulle sur l'écoulement ; on note $\vec{\Gamma}$ le moment ressenti par l'écoulement. Exprimer le moment exercé par l'eau sur le rotor.

.....

d) Par application du théorème du moment cinétique on montre que $\Gamma = D_\mathrm{m}(\ell_1 v_1 - \ell_2 v_2)$ en négligeant les frottements et avec $D_\mathrm{m}$ le débit massique. Que représentent $\ell_1$ et $\ell_2$ ?

(a) Les bras de levier des écoulements d'entrée et de sortie.
(b) Le rayon des tubes d'entrée et de sortie.
(c) La longueur des tubes d'entrée et de sortie.
(d) Le diamètre du carter de la turbine.

.....

**Réponses mélangées**

$v = 0{,}99\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ $\quad 3{,}1\times10^2\,\mathrm{Pa}$ $\quad \mathcal{P} = 100\,\mathrm{W}$ $\quad$ (c) $\quad -\lambda\vec{v}$ où $\lambda\in\mathbb{R}^+$ $\quad \xi = 0{,}05$

oui $\quad U_1 = U_2 = 3{,}2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ $\quad -\vec{\Gamma}$ $\quad \mathrm{d}m_1 = D_{m1}\,\mathrm{d}t$ $\quad$ oui $\quad \frac{1}{2}D_\mathrm{m}v_2^2\,\mathrm{d}t$

(b) $\quad$ oui $\quad \vec{F_\mathrm{P}} = -D_\mathrm{m}\vec{u}$ $\quad$ homogène $\quad \frac{1}{2}D_\mathrm{m}v_1^2\,\mathrm{d}t$ $\quad 2\times10^{-4}$ $\quad Sc\,\mathrm{d}t$

non homogène $\quad \vec{F}_{\text{photons}\to\text{voile}} = 2\frac{h}{\lambda}nSc\vec{e_x}$ $\quad P_1S_1\vec{u}_x$ $\quad \frac{v^2}{2}+\frac{P}{\mu} = \text{cte}$ $\quad$ (b)

$-\vec{F}$ $\quad \vec{0}$ $\quad \mathrm{d}m^* = 0$ $\quad m\vec{g}$ $\quad \vec{F} = (P_1S_1 - P_2S_2)\vec{u}_x$ $\quad$ (c) $\quad \vec{dp} = D_\mathrm{m}\vec{u}\,\mathrm{d}t$

$\mathrm{d}m = \mathrm{d}m_1 - \mathrm{d}m_2$ $\quad \vec{p}(t+\mathrm{d}t) = -\frac{h}{\lambda}nSc\,\mathrm{d}t\vec{e_x}$ $\quad D_\mathrm{m}\vec{v_1}\,\mathrm{d}t$ $\quad \vec{p}(t) = \frac{h}{\lambda}nSc\,\mathrm{d}t\vec{e_x}$

$\vec{0}$ $\quad gz + \frac{P}{\mu} = \text{cte}$ $\quad -P_2S_2\vec{u}_x$ $\quad$ (b) $\quad D_{m1} = D_{m2}$ $\quad$ homogène

3,0 bar $\quad$ (c) $\quad$ non homogène $\quad$ (c) $\quad m^*(t) = m(t) + \mathrm{d}m_1$ $\quad \mathrm{d}m_1 = \mathrm{d}m_2$

$m^*(t+\mathrm{d}t) = m(t+\mathrm{d}t) + \mathrm{d}m_2$ $\quad \mathrm{d}m_2 = D_{m2}\,\mathrm{d}t$ $\quad$ oui $\quad$ (c) $\quad \mathcal{P} = 3{,}6\times10^2\,\mathrm{W}$

(b) $\quad$ (a) $\quad -\lambda\omega\vec{u}_z$ où $\lambda\in\mathbb{R}^+$ $\quad 5{,}9\times10^4\,\mathrm{Pa}$ $\quad 60\,\mu\mathrm{m}$ $\quad F = 200\,\mathrm{N}$

$D_\mathrm{m}\vec{v_2}\,\mathrm{d}t$ $\quad -\mathcal{P}$ $\quad$ (c) $\quad D_v = 0{,}55\,\mathrm{L\cdot s^{-1}}$ $\quad \mathcal{P} = \frac{1}{2}D_\mathrm{m}(v_1^2 - v_2^2)$ $\quad 1{,}3\times10^2\,\mathrm{J/kg}$

► Réponses et corrigés page 615

# Transformations chimiques

**Prérequis**
Enthalpie, entropie, enthalpie libre. Premier et second principes de la thermodynamique.
Loi de Hess. Grandeurs de réaction, constante d'équilibre, déplacements d'équilibre.
Énergie de liaison.

**Constantes utiles**

→ Constante des gaz parfaits : $R = 8{,}314\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$

*Dans cette fiche, $\nu_i$ désigne les nombres stœchiométriques algébriques, c'est-à-dire pris positivement pour les produits et négativement pour les réactifs.*

## Utilisation des relations fondamentales

### Entraînement 38.1 — Déterminer une enthalpie standard de réaction (I).

La loi de Hess permet d'exprimer une enthalpie standard de réaction $\Delta_\mathrm{r}H^\circ$ en fonction des enthalpies standard de formation $\Delta_\mathrm{f}H_i^\circ$ des composés impliqués dans la réaction selon la relation :

$$\Delta_\mathrm{r}H^\circ = \sum_i \nu_i \Delta_\mathrm{f}H_i^\circ.$$

Ci-dessous sont données quelques enthalpies standard de formation à 298 K.

| | $CH_3COOH(\ell)$ | $CO_2(g)$ | $H_2O(\ell)$ | $H_2O(g)$ | $CH_3OH(\ell)$ | $CH_4(g)$ | $O_2(g)$ | $H_2(g)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta_\mathrm{f}H^\circ$ ($\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}$) | −485 | −400 | −300 | −250 | −240 | −70 | 0 | 0 |

Exprimer puis calculer l'enthalpie standard de réaction $\Delta_\mathrm{r}H^\circ$ (en $\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}$) en fonction des enthalpies standard de formation des composés impliqués dans chacune des réactions suivantes, réalisées à une température de 298 K et à la pression standard $P^\circ = 1\,\mathrm{bar}$.

a) Synthèse de l'eau sous forme gazeuse : $H_2(g) + \frac{1}{2}O_2(g) = H_2O(g)$.

.....

b) Synthèse du méthane : $CH_3OH(\ell) + H_2(g) = CH_4(g) + H_2O(\ell)$.

.....

c) Combustion de l'acide éthanoïque : $CH_3COOH(\ell) + 2\,O_2(g) = 2\,CO_2(g) + 2\,H_2O(\ell)$.

.....

**Entraînement 38.2 — Déterminer une enthalpie standard de réaction (II).**

On considère les équations de réaction (1) et (2) suivantes, dont les enthalpies standard de réaction valent respectivement $\Delta_r H_1^\circ = -562{,}6\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}$ et $\Delta_r H_2^\circ = -1\,075{,}2\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}$.

$$(1)\quad H_2S(g) + \frac{3}{2}\,O_2(g) = H_2O(\ell) + SO_2(g) \qquad\qquad (2)\quad CS_2(\ell) + 3\,O_2(g) = CO_2(g) + 2\,SO_2(g)$$

On s'intéresse à l'équation de réaction

$$(3)\quad CS_2(\ell) + 2\,H_2O(\ell) = CO_2(g) + 2\,H_2S(g).$$

*On rappelle que si une réaction (3) peut s'écrire comme combinaison linéaire de deux réactions (1) et (2) telle que (3) = $\alpha \times$ (1) + $\beta \times$ (2), alors la loi de Hess s'écrit $\Delta_r H_3^\circ = \alpha \Delta_r H_1^\circ + \beta \Delta_r H_2^\circ$.*

a) Déterminer les valeurs de $\alpha$ et $\beta$ telles que $(3) = \alpha \times (1) + \beta \times (2)$.

.....

b) En déduire la valeur de $\Delta_r H_3^\circ$, en $\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}$ .....

**Entraînement 38.3 — Déterminer une entropie standard de réaction (III).**

De la relation d'Euler découle une relation permettant d'exprimer une entropie standard de réaction $\Delta_r S^\circ$ en fonction des entropies molaires standard $S_{m,i}^\circ$ des composés impliqués dans la réaction selon la relation :

$$\Delta_r S^\circ = \sum_i \nu_i S_{m,i}^\circ.$$

Ci-dessous sont données quelques entropies molaires standard à 298 K.

| | $H_2O(\ell)$ | $CH_4(g)$ | $CH_3OH(\ell)$ | $H_2(g)$ | $CH_3COOH(\ell)$ | $H_2O(g)$ | $O_2(g)$ | $CO_2(g)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_m^\circ$ ($\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$) | 65 | 70 | 128 | 131 | 160 | 189 | 205 | 214 |

Exprimer puis calculer l'entropie standard de réaction $\Delta_r S^\circ$ (en $\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$) en fonction des entropies molaires standard des composés impliqués dans chacune des réactions suivantes, réalisées à une température de 298 K et à la pression standard $P^\circ = 1\,\mathrm{bar}$.

a) Synthèse de l'eau sous forme gazeuse : $H_2(g) + \frac{1}{2}\,O_2(g) = H_2O(g)$.

.....

b) Synthèse du méthane : $CH_3OH(\ell) + H_2(g) = CH_4(g) + H_2O(\ell)$.

.....

c) Combustion de l'acide éthanoïque : $CH_3COOH(\ell) + 2\,O_2(g) = 2\,CO_2(g) + 2\,H_2O(\ell)$.

.....

**Entraînement 38.4 — Autour des enthalpies libres standard de réaction.**

Pour une réaction se produisant à température $T$ constante sous 1 bar, l'enthalpie libre standard de réaction $\Delta_r G^\circ$ est définie par $\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T \times \Delta_r S^\circ$ et $\Delta_r G^\circ = -RT \ln K^\circ$, où $\Delta_r H^\circ$, $\Delta_r S^\circ$ et $K^\circ$ sont respectivement l'enthalpie standard de réaction, l'entropie standard de réaction et la constante d'équilibre de la réaction considérée.

On se propose de calculer l'enthalpie libre standard de réaction $\Delta_r G^\circ$ ainsi que la constante d'équilibre $K^\circ$ de plusieurs réactions, présentées dans le tableau ci-dessous. Pour chacune d'elles sont données les valeurs numériques de l'enthalpie standard de réaction et de l'entropie molaire standard de réaction, à 298 K.

| | Équation de réaction | $\Delta_r H^\circ$ (kJ · mol$^{-1}$) | $\Delta_r S^\circ$ (J · K$^{-1}$ · mol$^{-1}$) |
|---|---|---|---|
| (1) | $H_2(g) + \frac{1}{2} O_2(g) = H_2O(g)$ | −250 | −44,5 |
| (2) | $CH_3OH(\ell) + H_2(g) = CH_4(g) + H_2O(\ell)$ | −130 | −124 |
| (3) | $CH_3COOH(\ell) + 2\,O_2(g) = 2\,CO_2(g) + 2\,H_2O(\ell)$ | −915 | −12 |

a) Calculer $\Delta_r G_1^\circ$ à 298 K, en kJ · mol$^{-1}$

.....

b) Calculer $K_1^\circ$ à 298 K.

.....

c) Calculer $\Delta_r G_2^\circ$ à 298 K, en kJ · mol$^{-1}$.

.....

d) Calculer $K_2^\circ$ à 298 K.

.....

e) Calculer $\Delta_r G_3^\circ$ à 298 K, en kJ · mol$^{-1}$.

.....

f) Calculer $K_3^\circ$ à 298 K.

.....

**Entraînement 38.5 — Calculer des grandeurs thermodynamiques liées.**

La loi de Hess généralisée permet d'exprimer une enthalpie libre standard de réaction $\Delta_r G^\circ$ en fonction des enthalpies libres standard de formation $\Delta_f G_i^\circ$ des composés impliqués dans la réaction selon la relation :

$$\Delta_r G^\circ = \sum_i \nu_i \Delta_f G_i^\circ.$$

En outre, on rappelle la relation suivante : $\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T \times \Delta_r S^\circ$, où $\Delta_r H^\circ$ et $\Delta_r S^\circ$ sont respectivement l'enthalpie standard de réaction et l'entropie standard de réaction.

L'équilibre de Deacon correspond à l'équation de réaction $O_2(g) + 4\,HC\ell(g) = 2\,H_2O(g) + 2\,C\ell_2(g)$. Son enthalpie standard de réaction à 298 K vaut $\Delta_r H^\circ = -114{,}8$ kJ · mol$^{-1}$. Quelques enthalpies libres standard de formation sont données ci-dessous à 298 K.

| | $O_2(g)$ | $C\ell_2(g)$ | $HC\ell(g)$ | $H_2O(g)$ |
|---|---|---|---|---|
| $\Delta_f G^\circ$ (kJ · mol$^{-1}$) | 0 | 0 | −95 | −229 |

a) Calculer $\Delta_r G^\circ$ à 298 K, en kJ · mol$^{-1}$ .....

b) Calculer $\Delta_r S^\circ$ à 298 K, en J · K$^{-1}$ · mol$^{-1}$ .....

**Entraînement 38.6 — Exploiter une régression linéaire.**

On considère la réaction de décomposition du peroxyde d'hydrogène, d'équation :

$$H_2O_2(\ell) = H_2O(\ell) + \frac{1}{2}\,O_2(g).$$

On donne ci-dessous la courbe représentant l'évolution de l'enthalpie libre standard de réaction $\Delta_r G^\circ$ en fonction de la température $T$ ainsi qu'une régression linéaire de cette courbe.

On suppose que $\Delta_r H^\circ$ et $\Delta_r S^\circ$ sont indépendants de la température (approximation d'Ellingham) et on rappelle la relation $\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T \times \Delta_r S^\circ$.

a) Déterminer le coefficient directeur de la droite $a$ en précisant son unité ...

b) Déterminer l'ordonnée à l'origine $b$ en précisant son unité .....

c) Identifier les grandeurs thermodynamiques correspondant à $a$ et $b$.

(a) $a = \Delta_r H^\circ$ (c) $a = \Delta_r S^\circ$ (e) $b = \Delta_r H^\circ$ (g) $b = \Delta_r S^\circ$

(b) $a = -\Delta_r H^\circ$ (d) $a = -\Delta_r S^\circ$ (f) $b = -\Delta_r H^\circ$ (h) $b = -\Delta_r S^\circ$

.....

d) En déduire la valeur de $\Delta_r H^\circ$, en kJ · mol$^{-1}$ .....

e) En déduire la valeur de $\Delta_r S^\circ$, en J · K$^{-1}$ · mol$^{-1}$ .....

**Entraînement 38.7 — Exploiter la relation de van 't Hoff.**

Parmi les expressions fausses suivantes, indiquer celles qui ont au moins le mérite d'être homogènes.

(a) $\dfrac{dK^\circ}{dT} = \dfrac{\Delta_r H^\circ}{RT^2}$ (b) $\dfrac{dK^\circ}{dT} = -\dfrac{\Delta_r H^\circ}{RT}$ (c) $\dfrac{d\ln K^\circ}{dT} = \dfrac{\Delta_r S^\circ}{RT}$ (d) $\dfrac{dK^\circ}{dT} = \dfrac{\Delta_r G^\circ}{RT^2}$

.....

**Entraînement 38.8 — Étudier l'influence de la température sur un équilibre.**

Soit la réaction de formation de l'ammoniac gazeux, d'équation $\frac{1}{2}\,N_2(g) + \frac{3}{2}\,H_2(g) = NH_3(g)$. L'enthalpie standard de formation de l'ammoniac gazeux à 298 K vaut $\Delta_f H^\circ(NH_3(g)) = -46{,}1\,kJ \cdot mol^{-1}$ et les autres sont nulles. La constante d'équilibre à $T_1 = 400\,K$ vaut $K_1^\circ = 6{,}8$.

a) Calculer à 298 K l'enthalpie standard de réaction $\Delta_r H^\circ$, en $kJ \cdot mol^{-1}$.

.....

b) Intégrer la relation de van 't Hoff $\frac{d\ln K^\circ}{dT} = \frac{\Delta_r H^\circ}{RT^2}$ entre deux valeurs de température notées $T_1$ et $T_2$, en supposant que l'enthalpie standard de réaction est indépendante de la température (approximation d'Elligham). Les constantes d'équilibre associées sont notées $K_1^\circ$ et $K_2^\circ$.

.....

c) Calculer $K_2^\circ$ à $T_2 = 500\,K$ .....

# Utilisation de cycles thermodynamiques

**Entraînement 38.9 — Exploiter les énergies de liaison.**

On s'intéresse à la formation d'éthanol liquide $C_2H_5OH(\ell)$ à partir des corps simples pris dans leur état standard de référence. Quelques énergies de liaison sont données ci-dessous.

| Liaison | C–C | C–H | C–O | O–H | H–H | O=O |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Énergie de liaison $\mathcal{E}$ ($kJ \cdot mol^{-1}$) | 346 | 411 | 358 | 459 | 435 | 502 |

L'énergie de liaison $\mathcal{E}$(A–B) est l'énergie à fournir pour rompre la liaison A–B de manière homolytique, c'est-à-dire de telle sorte que les deux électrons de la liaison se partagent entre les deux atomes.

a) Parmi les corps simples suivants, identifier ceux impliqués dans la formation de l'éthanol.

(a) $O_2(g)$ (b) $H_2(g)$ (c) $N_2(g)$ (d) $C(s)$

.....

b) En supposant une stœchiométrie de 1 pour l'éthanol, établir l'équation de la réaction de formation de l'éthanol à partir des corps simples identifiés à la question précédente.

.....

c) Donner le schéma de Lewis de l'éthanol .....

d) Dénombrer le nombre de liaisons et remplir le tableau suivant.

| liaison | C–C | C–H | C–O | O–H |
|---|---|---|---|---|
| nombre de liaisons | | | | |

e) Exprimer et calculer, en $kJ \cdot mol^{-1}$, l'enthalpie standard de formation de l'éthanol liquide.

.....

**Entraînement 38.10 — Établir un cycle thermodynamique.**

On considère la réaction de formation de l'ammoniac liquide $NH_3(\ell)$ à 208 K, dont l'équation est :

$$N_2(g) + 3\,H_2(g) \longrightarrow 2\,NH_3(\ell).$$

L'enthalpie de formation associée est notée $\Delta_f H^\circ(NH_3(\ell))$. L'enthalpie standard de vaporisation de l'ammoniac liquide est $\Delta_{vap} H^\circ(NH_3(\ell)) = 20\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$. Quelques énergies de liaison sont données ci-dessous.

| Liaison | H−H | N−H | N≡N |
|---|---|---|---|
| Énergie de liaison $\mathcal{E}$ ($\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$) | 450 | 400 | 960 |

On rappelle que l'énergie de liaison, notée $\mathcal{E}(\text{A}-\text{B})$, est l'énergie à fournir pour rompre la liaison A−B de manière homolytique, c'est-à-dire de telle sorte que les deux électrons de la liaison covalente se partagent entre A et B.

a) Indiquer les réponses exactes.

(a) L'énergie de liaison $\mathcal{E}(\text{H}-\text{H})$ est l'énergie à fournir pour rompre une liaison simple H−H.

(b) Pour former une mole de $N_2(g)$ à partir de deux moles de N(g), il faut fournir une énergie égale à $2 \times \mathcal{E}(\text{N}\equiv\text{N})$.

(c) Pour former une mole de $NH_3(g)$, il faut disposer d'une mole de N(g) et de trois moles de H(g).

(d) La formation d'une mole de $NH_3(g)$ à partir d'une mole de N(g) et de trois moles de H(g) libère une énergie égale à $3 \times \mathcal{E}(\text{N}-\text{H})$.

.....

b) Indiquer les expressions des énergies associées aux étapes (1) et (2) du cycle ci-après.

$$\begin{tikzcd}
N_2(g) + 3\,H_2(g) \arrow[r, "(1)"'] \arrow[d, "\mathcal{E}(\text{N}\equiv\text{N}) + 3\times\mathcal{E}(\text{H}-\text{H})"'] & 2\,NH_3(\ell) \\
2\,N(g) + 6\,H(g) \arrow[r, "-6\times\mathcal{E}(\text{N}-\text{H})"'] & 2\,NH_3(g) \arrow[u, "(2)"']
\end{tikzcd}$$

(a) (1) $= \Delta_f H^\circ(NH_3(\ell))$ et (2) $= -\Delta_{vap} H^\circ(NH_3(\ell))$

(b) (1) $= 2\Delta_f H^\circ(NH_3(\ell))$ et (2) $= 2\Delta_{vap} H^\circ(NH_3(\ell))$

(c) (1) $= \Delta_f H^\circ(NH_3(\ell))$ et (2) $= \Delta_{vap} H^\circ(NH_3(\ell))$

(d) (1) $= 2\Delta_f H^\circ(NH_3(\ell))$ et (2) $= -2\Delta_{vap} H^\circ(NH_3(\ell))$

.....

c) Calculer $\Delta_f H^\circ(NH_3(\ell))$ à 298 K, en $\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ .....

**Entraînement 38.11 — Cas d'un réacteur monobare et adiabatique.**

On considère la combustion de l'éthanol $C_2H_5OH(\ell)$, supposée adiabatique et monobare, dont l'équation de réaction est $C_2H_5OH(\ell) + 3\,O_2(g) \longrightarrow 3\,H_2O(g) + 2\,CO_2(g)$. L'éthanol et le dioxygène sont introduits en proportions stœchiométriques. On note $n_0$ la quantité de matière initiale en éthanol. L'enthalpie standard de la réaction à 298 K vaut $\Delta_r H^\circ = -1\,236\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}$. Quelques capacités molaires standard, supposées indépendantes de la température, sont données ci-dessous.

| | $C_2H_5OH(\ell)$ | $O_2(g)$ | $CO_2(g)$ | $H_2O(g)$ |
|---|---|---|---|---|
| $C^\circ_{p,m,k}$ ($\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$) | 111 | 29,9 | 37,1 | 33,6 |

a) Parmi les affirmations, indiquer celles qui sont correctes.

(a) Lors d'une transformation monobare, la pression du système est constante à tout instant.

(b) Lors d'une transformation adiabatique, la température du système est constante à tout instant.

(c) Lors d'une transformation adiabatique, le système n'échange pas de chaleur.

(d) Pour une transformation adiabatique et monobare sans travail autre que celui des forces de pression, la variation d'enthalpie du système est nulle : $\Delta H = 0$.

.....

b) On décompose la transformation précédente en deux étapes :

- une étape chimique isobare et isotherme d'avancement $\xi$ dont la variation d'enthalpie est notée $\Delta H_{chi}$ ;
- une étape physique isobare et isoavancement durant laquelle la température varie et dont la variation d'enthalpie est notée $\Delta H_{phy}$.

Attribuer les variations d'enthalpies $\Delta H_{chi}$ et $\Delta H_{phy}$ aux étapes (1) et (2) du schéma ci-dessous.

.....

c) Exprimer $\Delta H_{chi}$ en fonction de l'enthalpie standard de réaction $\Delta_r H^\circ$ et de $n_0$. On pourra s'aider d'une analyse dimensionnelle .....

d) Exprimer $\Delta H_{phy}$ en fonction de $T_i$, $T_f$, $n_0$ et des capacités thermiques molaires $C^\circ_{p,m,k}$.

.....

e) Établir la relation entre $\Delta H$, $\Delta H_{phy}$ et $\Delta H_{chi}$ .....

f) Exprimer puis calculer $T_f$ en °C .....

# Déplacements d'équilibre

**Entraînement 38.12 — Étudier l'influence de paramètres sur un équilibre.**

On considère une transformation chimique endothermique, dont l'équation de réaction est :

$$CH_4(g) + H_2O(g) = CO(g) + 3\,H_2(g).$$

La loi de van 't Hoff précise qu'une augmentation isobare de température appliquée à un système physico-chimique initialement dans un état d'équilibre provoque une évolution dans le sens endothermique de la réaction modélisant la transformation. Le système a donc tendance à réagir de façon à s'opposer aux changements imposés afin de compenser cette perturbation, jusqu'à l'établissement d'un nouvel état d'équilibre. De même, une augmentation isotherme de la pression déplace l'équilibre dans le sens d'une diminution de la quantité de matière totale de gaz.

a) Déterminer le sens d'évolution du système lors d'une augmentation isobare de la température.

(a) sans évolution (b) sens direct (c) sens inverse

b) Indiquer l'expression correcte du quotient de réaction de l'équilibre précédent.

(a) $Q = \dfrac{x_{H_2}^3 x_{CO}}{x_{CH_4} x_{H_2O}} \left(\dfrac{P_{tot}}{P^\circ}\right)^2$

(b) $Q = \dfrac{x_{H_2}^3 x_{CO}}{x_{CH_4} x_{H_2O}} \left(\dfrac{P^\circ}{P_{tot}}\right)^2$

(c) $Q = \dfrac{x_{CH_4} x_{H_2O}}{x_{H_2}^3 x_{CO}} \left(\dfrac{P_{tot}}{P^\circ}\right)^2$

c) Indiquer le sens d'évolution du système lors d'une augmentation isotherme de la pression.

(a) sans évolution (b) sens direct (c) sens inverse

d) Indiquer l'expression correcte du quotient de réaction de l'équilibre précédent.

(a) $Q = \dfrac{n_{H_2}^3 n_{CO}}{n_{CH_4} n_{H_2O} n_{tot}^2} \left(\dfrac{P_{tot}}{P^\circ}\right)^2$

(b) $Q = \dfrac{n_{H_2}^3 n_{CO}}{x_{CH_4} n_{H_2O} n_{tot}^2} \left(\dfrac{P^\circ}{P_{tot}}\right)^2$

(c) $Q = \dfrac{n_{H_2}^3 n_{CO} n_{tot}^2}{n_{CH_4} n_{H_2O}} \left(\dfrac{P_{tot}}{P^\circ}\right)^2$

e) En déduire le sens d'évolution du système lors de l'ajout isotherme et isobare de dihydrogène $H_2$.

(a) sans évolution (b) sens direct (c) sens inverse

f) En déduire le sens d'évolution du système lors de l'ajout isotherme et isobare de $H_2O$.

(a) sans évolution (b) sens direct (c) sens inverse

g) Déterminer le sens d'évolution du système lors de l'ajout isotherme et isobare de $N_2$.

(a) sans évolution (b) sens direct (c) sens inverse

## Autres entraînements

**Entraînement 38.13 — Identifier un état standard de référence.**

Parmi les corps ci-dessous, quels sont les corps simples dans leur état standard de référence à 298 K ?

(a) $O_2(g)$ (c) $N_2(g)$ (e) $C(s)$ (g) $CO_2(g)$
(b) $H_2(\ell)$ (d) $Fe(\ell)$ (f) $I_2(s)$ (h) $H_2O(g)$

.....

**Entraînement 38.14 — Déterminer l'enthalpie par combinaison.**

On considère les équations de réaction (1) et (2) suivantes, dont les enthalpies standard de réaction valent respectivement $\Delta_r H_1^\circ = -191\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$ et $\Delta_r H_2^\circ = -282\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$.

$$(1)\quad H_2(g) + O_2(aq) = H_2O_2(aq) \qquad\qquad (2)\quad H_2(g) + \frac{1}{2}\,O_2(aq) = H_2O(\ell)$$

On s'intéresse à la réaction de dismutation du peroxyde d'hydrogène, notée (3) :

$$(3)\quad 2\,H_2O_2(aq) = O_2(aq) + 2\,H_2O(\ell).$$

*On rappelle que si une réaction (3) peut s'écrire comme combinaison linéaire de deux réactions (1) et (2) telle que (3) = $\alpha \times$ (1) + $\beta \times$ (2), alors la loi de Hess s'écrit $\Delta_r H_3^\circ = \alpha\Delta_r H_1^\circ + \beta\Delta_r H_2^\circ$.*

a) Déterminer les valeurs de $\alpha$ et $\beta$ telles que $(3) = \alpha \times (1) + \beta \times (2)$ ..

b) En déduire la valeur de $\Delta_r H_3^\circ$, en $\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$ .....

**Entraînement 38.15 — Exploiter la relation de Kirchhoff.**

La loi de Kirchhoff donne la relation entre l'enthalpie standard d'une réaction à la température $T_2$ en fonction de l'enthalpie standard de la même réaction à la température $T_1$ :

$$\Delta_r H^\circ(T_2) = \Delta_r H^\circ(T_1) + \int_{T_1}^{T_2} \sum_k \nu_k C_{p,m,k}^\circ \mathrm{d}T,$$

où $C_{p,m,k}^\circ$ est la capacité molaire standard de l'espèce $k$ et $\nu_k$ le nombre stœchiométrique de l'espèce $k$.

On considère la synthèse de l'eau liquide $H_2O(\ell)$ à partir du dihydrogène gazeux $H_2(g)$ et du dioxygène gazeux $O_2(g)$, dont l'équation de réaction est $2\,H_2(g) + O_2(g) \longrightarrow 2\,H_2O(\ell)$.

Quelques capacités molaires standard, considérées indépendantes de la température, sont données ci-dessous.

| | $H_2(g)$ | $O_2(g)$ | $H_2O(\ell)$ |
|---|---|---|---|
| $C_{p,m,k}^\circ$ ($\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$) | 28,8 | 29,4 | 75,3 |

L'enthalpie standard de formation de l'eau $H_2O(\ell)$ à 298 K vaut $-285\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$.

a) Indiquer la valeur correcte de l'enthalpie standard de la réaction de synthèse de l'eau à 298 K.

(a) $-285\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}$ (c) $-142{,}5\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}$ (e) $-570\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}$

(b) $285\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}$ (d) $142{,}5\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}$ (f) $570\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}$

.....

b) Calculer $\Delta_\mathrm{r}H^\circ$ à 323 K pour la synthèse de l'eau, en $\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}$, à l'aide de la loi de Kirchhoff.

.....

**Entraînement 38.16 — Procédé Haber-Bosch.**

Le procédé Haber-Bosch est un procédé chimique en phase gazeuse qui permet la synthèse de l'ammoniac $NH_3(g)$ à partir de diazote $N_2(g)$ et de dihydrogène $H_2(g)$, en présence d'un catalyseur :

$$N_2(g) + 3\,H_2(g) = 2\,NH_3(g).$$

Les grandeurs suivantes sont données à 298 K.

| | $N_2(g)$ | $H_2(g)$ | $NH_3(g)$ |
|---|---|---|---|
| $\Delta_\mathrm{f}H^\circ$ ($\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}$) | 0 | 0 | $-46$ |
| $S^\circ_\mathrm{m}$ ($\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol}$) | 190 | 130 | 192 |

a) Calculer à 298 K l'enthalpie standard de la réaction $\Delta_\mathrm{r}H^\circ$, en $\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}$.

.....

b) Indiquer la thermicité de cette transformation.

(a) exothermique (b) endothermique (c) athermique

.....

c) Calculer à 298 K l'entropie standard de la réaction $\Delta_\mathrm{r}S^\circ$, en $\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$.

.....

d) Calculer à 298 K l'enthalpie libre standard de la réaction $\Delta_\mathrm{r}G^\circ$, en $\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}$.

.....

e) Calculer la constante d'équilibre $K^\circ$ de la réaction.

.....

f) Indiquer la ou les réponse(s) exacte(s).

(a) Une augmentation de pression isotherme déplace l'équilibre dans le sens de formation de $NH_3(g)$.

(b) Une augmentation de température isobare déplace l'équilibre dans le sens de formation de $NH_3(g)$.

.....

## Réponses mélangées

(e) $-915\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$ $-124\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$ (b) $-196\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$

$-236{,}7\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$ $-34\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$

| C–C | C–H | C–O | O–H |
|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 1 | 1 |

(a), (c), (e) et (f)

$-44{,}5\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$ (b) $236\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$ $\Delta H_{\mathrm{phy}} = (3C^\circ_{\mathrm{p,m,H_2O}} + 2C^\circ_{\mathrm{p,m,CO_2}})n_0(T_\mathrm{f} - T_\mathrm{i})$

(c) $\alpha = -2$ et $\beta = 2$ $-911\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$ $7{,}7\cdot 10^5$ $-99\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$

$-78\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$ 0,42 $\Delta H = \Delta H_{\mathrm{phy}} + \Delta H_{\mathrm{chi}}$ (c)

(a), (b) et (d) (a) (d) $\ln\left(\dfrac{K_2^\circ}{K_1^\circ}\right) = \dfrac{\Delta_\mathrm{r}H^\circ}{R}\left(\dfrac{1}{T_1} - \dfrac{1}{T_2}\right)$ $-93{,}0\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$

(d) et (e) $4{,}89\cdot 10^{159}$ $-182\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$ $-99\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$ $\alpha = -2$ et $\beta = 1$

(c) et (d) $28\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$ (a) $-250\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$ $\Delta H_{\mathrm{chi}}$ pour (1) $\Delta H_{\mathrm{phy}}$ pour (2)

$-46{,}1\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$ $\Delta H_{\mathrm{chi}} = \Delta_\mathrm{r}H^\circ \times n_0$ $\Delta_\mathrm{f}H^\circ(\mathrm{C_2H_5OH}(\ell)) = -1{,}66\times 10^3\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$ $-568\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$

$50{,}0\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$ $-28\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$ 7 088 °C $-65\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$ $-130\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$

(b) (a), (c) et (d) (a), (c) et (d) $2\,\mathrm{C(s)} + 3\,\mathrm{H_2(g)} + \frac{1}{2}\,\mathrm{O_2(g)} \rightarrow \mathrm{C_6H_5OH}(\ell)$

$2{,}04\cdot 10^{16}$ (a) (a) $-92\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$ $-123{,}5\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$ $3{,}15\cdot 10^{41}$

▶ Réponses et corrigés page 620

# Courbes intensité-potentiel

**Prérequis**
Pour la demi-équation électronique du couple Ox/Red : $\alpha$ Ox $+ n\,\mathrm{e}^- = \beta$ Red, le potentiel de Nernst à 25 °C s'écrit :

$$E = E^\circ + \frac{0{,}06}{n} \log\left(\frac{a_{\mathrm{ox}}^{\alpha}}{a_{\mathrm{red}}^{\beta}}\right).$$

## Avant toute chose

**Entraînement 39.1 — Potentiel à l'abandon.**

À l'aide du montage à trois électrodes, la courbe intensité-potentiel ci-dessous est obtenue à 25 °C pour le couple $Cu^{2+}/Cu$.

L'électrode de travail est en cuivre et la concentration en ions cuivriques $Cu^{2+}$ présents dans la solution électrolytique est noté $C$ à l'instant initial.

Le potentiel à l'abandon $E_{\mathrm{ab}}$ (également appelé « potentiel à courant nul » ou « potentiel à l'équilibre ») est le point de la courbe $i(E)$ pour lequel le courant est nul. La valeur de ce potentiel est donnée par le potentiel de Nernst.

On donne $E^\circ_{Cu^{2+}/Cu} = 0{,}34\,\mathrm{V}$.

a) Déterminer la concentration $C$ des ions cuivriques dans la solution électrolytique .....

b) La mesure du potentiel $E_{\mathrm{ab}}$ est effectuée à l'aide d'un voltmètre dont la borne « V » est reliée à l'électrode de travail en cuivre et la borne « COM » à une électrode de référence au calomel dont le potentiel est 0,25 V.

Quelle est la tension lue sur le voltmètre ? .....

## Entraînement 39.2 — Domaine de prédominance/Domaine d'existence.

La courbe intensité-potentiel du couple $Cu^{2+}/Cu$ est donnée ci-dessous.

Cette courbe délimite deux domaines :

(a) Domaine du réducteur

(b) Domaine de l'oxydant

a) À quel domaine correspond le domaine ① ?

.....

b) À quel domaine correspond le domaine ② ?

.....

Le couple concerné est $Cu^{2+}/Cu$. Au niveau de la courbe $i(E)$ est indiqué les éléments $A$ et $B$ réagissant.

c) Quelle est l'espèce $A$ ? .....

d) Quelle est l'espèce $B$ ? .....

## Entraînement 39.3 — Parties anodique et cathodique de la courbe $i(E)$ .

La courbe intensité-potentiel du couple $Fe^{2+}/Fe$ est donnée ci-contre.

La partie anodique de la courbe $i(E)$ est la portion de courbe pour laquelle l'intensité du courant arrivant au niveau de l'électrode de travail est positive. Dans ces conditions, l'électrode de travail se comporte en anode.

a) Quelle réaction se produit sur l'électrode de travail lorsque le courant est positif ?

.....

b) En ①, nous devons placer une flèche indiquant le sens de la réaction se produisant.

Laquelle choisir ?

(a) ⟶ (b) ⟵

.....

La partie cathodique de la courbe $i(E)$ est la portion de courbe pour laquelle l'intensité du courant arrivant au niveau de l'électrode de travail est négative. Dans ces conditions, l'électrode de travail se comporte en cathode.

c) Quelle réaction se produit sur l'électrode de travail lorsque le courant est négatif ?

.....

d) En ②, nous devons placer une flèche indiquant le sens de la réaction se produisant.

Laquelle choisir ?

(a) ⟶ (b) ⟵

.....

**Entraînement 39.4 — Courbe $i(E)$ de $Fe^{3+}/Fe^{2+}$.**

Figure ⓐ Figure ⓑ Figure ⓒ Figure ⓓ

Quelle figure correspond à la courbe $i(E)$ de $Fe^{3+}/Fe^{2+}$ ? .....

## Calcul de surpotentiel

*Le surpotentiel est également appelé surtension.*

**Entraînement 39.5 — Surpotentiels anodique et cathodique.**

La courbe intensité-potentiel du couple Ox/Red est présentée ci-contre.

Le surpotentiel anodique est défini pour un courant de fonctionnement anodique $i_0 > 0$ par la relation suivante :

$$\eta_a(i_0) = E(i_0) - E_{\text{ab}}.$$

Le surpotentiel cathodique est défini pour un courant de fonctionnement cathodique $i_0' < 0$ par la relation suivante :

$$\eta_c(i_0') = E(i_0') - E_{\text{ab}}.$$

a) Évaluer le surpotentiel anodique pour $i_0 = 20\,\text{mA}$ .....

b) Évaluer le surpotentiel cathodique pour $i_0' = -20\,\text{mA}$ .....

c) Estimer le surpotentiel anodique à courant nul : $\eta_{a,0} = \lim\limits_{i_0 \to 0^+} \eta_a(i_0)$ .....

d) Estimer le surpotentiel cathodique pour $\eta_{c,0} = \lim\limits_{i_0' \to 0^-} \eta_c(i_0')$ .....

**Entraînement 39.6 — Calcul de surpotentiels à partir du potentiel à l'abandon.**

On fait l'acquisition à 25 °C, de la courbe $i$-$E$ du couple $HSO_4^-/SO_2$ dans une solution où

$$[HSO_4^-] = 0{,}100\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1},$$
$$[SO_2] = 0{,}001\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$$
$$\text{et pH} = 4.$$

Le potentiel standard du couple considéré est $E^\circ = 0{,}16\,\text{V}$.

- On constate que le courant en oxydation devient non nul quand le potentiel de l'électrode devient supérieur à $V_{\text{ox}} = 0{,}2\,\text{V}$.
- De même son potentiel devient non nul en réduction quand le potentiel de l'électrode devient inférieur à $V_{\text{red}} = -0{,}5\,\text{V}$.

a) Dans les conditions de l'expérience, le couple $HSO_4^-/SO_2$ est-il lent ou rapide ?

.....

b) Écrire la demi-équation d'oxydo-réduction associée au couple $HSO_4^-/SO_2$.

.....

c) Calculer la valeur du potentiel de Nernst dans les conditions de l'expérience.

.....

d) Déterminer le surpotentiel anodique à courant nul $\eta_{a,0}$ dans les conditions expérimentales proposées.

.....

e) Déterminer le surpotentiel cathodique à courant nul $\eta_{c,0}$ dans les conditions expérimentales proposées.

.....

# Domaine d'électroactivité

**Entraînement 39.7 — Courbe $i(E)$ de l'eau.**

Le domaine d'électroactivité est le domaine de potentiel dans lequel il est possible d'étudier des couples redox. Ce domaine est limité par les deux « murs du solvant » ou « fronts du solvant ».

Voici la courbe $i$-$E$ de l'eau obtenue avec des électrodes de platine Pt.

a) Que doit-on écrire sur la partie ① ?

ⓐ $H^+ \longrightarrow H_2$
ⓑ $Pt \longrightarrow Pt^{2+}$
ⓒ $H_2O \longrightarrow O_2$
ⓓ pas de réaction

.....

b) Que doit-on écrire sur la partie ② ?

ⓐ $H^+ \longrightarrow H_2$
ⓑ $Pt \longrightarrow Pt^{2+}$
ⓒ palier de diffusion
ⓓ pas de réaction

.....

c) Que doit-on écrire sur la partie ③ ?

ⓐ $H^+ \longrightarrow H_2$
ⓑ palier de diffusion
ⓒ $H_2O \longrightarrow O_2$
ⓓ pas de réaction

.....

d) Quels sont les couples que l'on pourrait éventuellement observer dans l'eau dans les conditions de l'expérience ?

ⓐ $Ag^+/Ag$, $E^\circ = 0{,}80\,V$
ⓑ $I_2/I^-$, $E^\circ = 0{,}54\,V$
ⓒ $Mg^{2+}/Mg$, $E^\circ = -2{,}37\,V$
ⓓ $Ag^{2+}/Ag$, $E^\circ = 1{,}98\,V$

.....

On a placé un des couples précédents dans l'eau et on fait l'acquisition de la courbe ci-dessous.

e) De quel couple s'agit-il ?

ⓐ $Ag^+/Ag$
ⓑ $I_2/I^-$
ⓒ $Mg^{2+}/Mg$
ⓓ $Ag^{2+}/Ag$

.....

# Palier de diffusion

**Entraînement 39.8 — Courbe $i(E)$ de $Cu^{2+}/Cu$.**

Les phénomènes de diffusion entraînent une limitation du courant selon la relation :

$$i_{\text{diff}} = nKS[\text{réactif}]$$

où

- $n$ est le nombre d'électrons échangés,
- $K$ une constante,
- $S$ la surface de l'électrode
- et [réactif] la concentration du réactif.

Cela se manifeste sur la courbe par un palier horizontal de valeur $i_{\text{diff}}$.

Ci-contre, on donne la courbe $i$-$E$ pour le couple $Cu^{2+}/Cu$ en milieu aqueux.

a) Quelle espèce est soumise à un phénomène de diffusion ?

(a) $H^+$ (b) Cu (c) $Cu^{2+}$ (d) $H_2O$

.....

b) Que vaut $i_{\text{diff}}$ pour cette réaction ?

.....

c) Que vaut $i_{\text{diff}}$ si on dilue la solution d'un facteur 10 ?

.....

**Entraînement 39.9 — Détermination graphique d'un couple.**

La courbe ci-dessous présente les courbes anodiques des couples $O_2/H_2O$ et $Cl_2/Cl^-$. Le solvant est l'eau.

a) Quelle est la réaction associée à la courbe 1 ?

.....

b) Quelle est la réaction associée à la courbe 2 ?

.....

**Entraînement 39.10 — Courbe $i(E)$ du couple $IO_3^-/I_2$.**

La courbe $i$-$E$ du couple $IO_3^-/I_2$ en milieu aqueux, obtenue avec des électrodes de platine Pt est donnée ci dessous. Dans les conditions expérimentales du tracé, on a $E(IO_3^-/I_2) = E°(IO_3^-/I_2) = 1{,}19\,V$.

a) Écrire la demi-équation rédox associée au couple $IO_3^-/I_2$ .....

b) Sur quelle partie de la courbe doit-on écrire $IO_3^- \longrightarrow I_2$ ? .....

c) Sur quelle partie de la courbe doit-on écrire $I_2 \longrightarrow IO_3^-$ ? .....

d) Sur quelle(s) partie(s) de la courbe se manifeste le phénomène de diffusion ?

.....

e) Estimer le surpotentiel à $i = 0$ anodique.

.....

f) Estimer le surpotentiel à $i = 0$ cathodique.

.....

g) Comment appelle-t-on les parties ① et ⑧ ?

ⓐ mur de l'eau
ⓑ palier de diffusion
ⓒ front du solvant
ⓓ surpotentiel à $i \neq 0$

.....

**Réponses mélangées**

ⓐ ⓐ Réduction 0,2 V ⓐ ⓒ $2\,H_2O \rightarrow O_2 + 4\,H^+ + 4\,e^-$

ⓐ ⓑ $10^{-3}$ mol/L Oxydation ⓐ ⓐ et ⓑ ⓓ

0,15 V ③ $Cu^{2+}$ ⓐ et ⓒ 0,34 V 0 V ⓑ −0,3 V

−0,3 mA −0,26 V ⑥ $HSO_4^- + 3\,H^+ + 2\,e^- = SO_2 + 2\,H_2O$

−0,14 V ② et ⑦ Cu −0,36 V $2\,IO_3^- + 12\,H^+ + 10\,e^- = I_2 + 6\,H_2O$

ⓒ $2\,Cl^- \rightarrow Cl_2 + 2\,e^-$ 0,4 V −0,03 mA lent −0,1 V

► Réponses et corrigés page 627

# Phénomène de corrosion

**Prérequis**
Loi de Nernst : pour $\alpha\,\mathrm{Ox} + n\,e^- + \beta\,\mathrm{H}^+ = \gamma\,\mathrm{Red} + \delta\,\mathrm{H_2O}$, on a

$$E_{\mathrm{Nernst}} = E^\circ + \frac{0{,}06}{n}\log\left(\frac{a_{\mathrm{Ox}}^{\alpha}\,[\mathrm{H}^+]^{\beta}}{a_{\mathrm{Red}}^{\gamma}}\right).$$

Diagrammes potentiel-pH. Courbes courant-potentiel.

**Constantes utiles**

→ Constante d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6{,}02 \times 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$

→ Charge élémentaire : $e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$

→ Constante de Faraday : $\mathcal{F} = e \times \mathcal{N}_A = 96\,500\,\mathrm{C}\cdot\mathrm{mol}^{-1}$

## Outils d'étude des réactions d'oxydoréduction

### Entraînement 40.1 — Pile Daniell.

Considérons la pile Daniell ci-contre. L'intensité du courant traversant la résistance $R$ dans le sens indiqué sur le schéma est constante et vaut $I = 100\,\mu\mathrm{A}$.

Donnée : $M_{\mathrm{Zn}} = 65{,}4\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{mol}^{-1}$.

a) Dans quel sens circulent les électrons ?

(a) de l'électrode de cuivre vers celle de zinc

(b) de l'électrode de zinc vers celle de cuivre

b) Quelle électrode joue le rôle de cathode ?

(a) celle de zinc (b) celle de cuivre

c) Quel métal est oxydé ?

(a) le zinc (b) le cuivre

d) Déterminer la quantité d'électricité (en mC) échangée entre les deux couples en une durée $\tau = 10\,\mathrm{min}$.

e) En déduire la masse (en µg) de zinc oxydée pendant la durée $\tau$ .....

**Entraînement 40.2 — Détermination d'un surpotentiel.**

À l'aide d'un montage à trois électrodes, on mesure la courbe ci-dessous dans une solution de pH = 4 dans laquelle la seule espèce électroactive est l'eau. On rappelle les couples de l'eau : $H_2O/H_2$ (potentiel standard 0 V) et $O_2/H_2O$ (potentiel standard 1,23 V).

a) Quel couple de l'eau est responsable de la courbe observée ? .....

b) En déduire les espèces X et Y à faire apparaître sur la courbe.

(a) $H_2O \longrightarrow O_2$

(b) $O_2 \longrightarrow H_2O$

(c) $H_2 \longrightarrow H_2O$

(d) $H_2O \longrightarrow H_2$

.....

c) Exprimer le potentiel de Nernst du couple.

(a) $E^\circ + \dfrac{0{,}06}{4} \log \left[ \dfrac{p_{H_2}}{p^\circ} \left( \dfrac{[H_2O]}{c^\circ} \right)^2 \right]$

(b) $E^\circ + \dfrac{0{,}06}{4} \log \left[ \dfrac{p^\circ}{p_{H_2}} \dfrac{[H^+]}{c^\circ} \right]$

(c) $E^\circ + \dfrac{0{,}06}{2} \log \left[ \dfrac{p^\circ}{p_{H_2}} \left( \dfrac{[H^+]}{c^\circ} \right)^2 \right]$

(d) $E^\circ + \dfrac{0{,}06}{4} \log \left[ \dfrac{p_{O_2}}{p^\circ} \left( \dfrac{[H^+]}{c^\circ} \right)^4 \left( \dfrac{c^\circ}{[H_2O]} \right)^2 \right]$

(e) $E^\circ + \dfrac{0{,}06}{4} \log \left[ \dfrac{p_{O_2}}{p^\circ} \left( \dfrac{[H^+]}{c^\circ} \right)^4 \right]$

(f) $E^\circ + \dfrac{0{,}06}{2} \log \left[ \dfrac{p^\circ}{p_{O_2}} \left( \dfrac{[H^+]}{c^\circ} \right)^2 \right]$

.....

d) Le calculer numériquement pour une pression partielle de 1 bar .....

e) En déduire le surpotentiel anodique à vide $\eta_a$, défini à partir du point où la courbe décroche de l'axe des abscisses.

.....

**Entraînement 40.3 — Charge échangée au cours d'une réaction.**

Un morceau de fer de masse $m_1 = 1\,\text{mg}$ s'oxyde sous l'action de l'oxygène en milieu acide selon la réaction

$$\alpha\ \text{Fe} + \text{O}_2 + \beta\ \text{H}^+ = \gamma\ \text{Fe}^{2+} + \delta\ \text{H}_2\text{O}.$$

Données :

- Potentiels standard :
  - ▷ $E^\circ\left(\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}\right) = -0{,}44\,\text{V}$ ;
  - ▷ $E^\circ(\text{O}_2\,/\text{H}_2\text{O}) = 1{,}23\,\text{V}$.
- Masse molaire du Fe : $M_{\text{Fe}} = 55{,}8\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$.

a) Déterminer les valeurs correctes du quadruplet $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.

(a) $(1, 2, 1, 1)$
(b) $(2, 2, 2, 2)$
(c) $(2, 4, 2, 2)$
(d) $(1, 4, 1, 2)$

.....

b) Au bout d'un temps $\tau = 1\,\text{h}$, il ne reste que 45 % de la masse initiale de fer.

Après avoir dressé un tableau d'avancement, déterminer l'avancement $\xi$ de la réaction.

.....

c) En raisonnant sur la demi-équation électronique du couple $\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}$, déterminer le nombre de moles d'électrons échangées en fonction de l'avancement $\xi$.

(a) $\xi$
(b) $2\xi$
(c) $3\xi$
(d) $4\xi$

.....

d) En déduire $Q$, la quantité d'électricité (ou charge) échangée entre les deux couples durant le temps $\tau$.

*On exprimera $Q$ en coulomb.*

.....

# Corrosion, passivation, protection

**Entraînement 40.4 — Thermodynamique de la corrosion.**

On représente ci-dessous le diagramme potentiel-pH de corrosion de l'aluminium, en traits pleins, auquel est superposé celui de l'eau, en traits pointillés.

*Certaines questions peuvent admettre plusieurs réponses.*

a) L'aluminium est-il stable dans l'eau du point de vue thermodynamique ?

(a) Oui, toujours
(b) Non, jamais
(c) Cela dépend de la teneur en dioxygène.
(d) Cela dépend du pH.

b) On dit qu'un métal se passive lorsque son oxydation forme un solide à sa surface.

L'aluminium peut-il se passiver dans l'eau ?

(a) Oui, sous forme de $Al^{3+}$
(b) Oui, sous forme de $Al_2O_3$
(c) Oui, sous forme de $AlO_2^-$
(d) Non

c) On laisse une plaque d'aluminium dans une solution maintenue à pH = 3.

Si l'on attend suffisamment longtemps, que va-t-il se passer ?

(a) La plaque va rester stable sans modification.
(b) L'épaisseur de la plaque va diminuer, mais elle ne disparaîtra jamais complètement.
(c) La plaque va totalement se dissoudre.
(d) Un dépôt solide va se former à la surface de la plaque.

d) Même question, avec les mêmes propositions, pour l'eau du robinet.

*On rappelle que l'eau du robinet vérifie* pH ≈ 7,5 *et contient du dioxygène dissous.*

**Entraînement 40.5 — Passivation.**

On considère un morceau de zinc en présence d'eau aérée.

Le processus électrochimique qui a lieu est schématisé ci-dessous.

Les deux couples rédox intervenant dans la réaction d'oxydoréduction sont $O_2/HO^-$ et $Zn^{2+}/Zn$.

a) Quel espèce se corrode ? .....

b) Quel espèce se réduit ? .....

c) Écrire la réaction d'oxydoréduction se produisant.

*On choisira comme nombres stœchiométriques les plus petits entiers possibles.*

.....

d) Au cours de la réaction d'oxydoréduction, comment varie le pH ?

(a) Le pH augmente.

(b) Le pH reste constant.

(c) Le pH diminue.

.....

e) En présence de $HO^-$, les ions $Zn^{2+}$ précipitent sous forme de $Zn(OH)_2$. Cet oxyde de zinc forme à la surface du zinc une couche imperméable.

Quelle phrase est juste ?

(a) Le zinc se passive progressivement.

(b) Le zinc s'oxyde toujours même s'il est entièrement recouvert d'oxyde de zinc.

(c) La couche d'oxyde va se dissoudre progressivement car le milieu devient acide.

(d) Le zinc cesse de s'oxyder mais le dioxygène se réduit toujours.

.....

**Entraînement 40.6 — Corrosion d'une lame de magnésium.**

Le but de l'exercice est de déterminer si le magnésium métallique est susceptible d'être corrodé par une solution aqueuse acidifiée de pH = 4.

a) Exprimer le potentiel de Nernst $E_{Mg^{2+}/Mg}$ en fonction du potentiel standard $E^\circ_{Mg^{2+}/Mg}$ et de $[Mg^{2+}]$.

.....

b) On donne $E^\circ_{Mg^{2+}/Mg} = -2{,}37\,\text{V}$ et $[Mg^{2+}] = 1 \times 10^{-6}\,\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

Calculer sa valeur numérique.

.....

c) Exprimer le potentiel de Nernst $E_{H^+/H_2}$ en fonction du potentiel standard $E^\circ_{H^+/H_2}$, du pH et de la pression partielle en dihydrogène $p_{H_2}$.

.....

d) On rappelle $E^\circ_{H^+/H_2} = 0\,\text{V}$ et on suppose $p_{H_2} = 1\,\text{bar}$.

Calculer sa valeur numérique.

.....

e) Le surpotentiel cathodique du couple $H^+/H_2$ sur une électrode de magnésium est de l'ordre de $-0{,}1\,\text{V}$.

Parmi les diagrammes intensité-potentiel représentés ci-dessous, lequel correspond à la situation étudiée ?

a

b

c

d

.....

f) En cherchant sur le diagramme courant-potentiel s'il existe un éventuel potentiel de corrosion, déterminer si la lame de magnésium sera corrodée.

.....

**Entraînement 40.7 — Corrosion différentielle.**

On met en contact dans une solution une lame de zinc et une lame de fer.

Les couples intervenant sont $Zn^{2+}/Zn$ (potentiel standard $-0{,}76\,V$), $Fe^{2+}/Fe$ (potentiel standard $-0{,}45\,V$) et $H_2O/H_2$ (potentiel standard $0\,V$).

La figure ci-dessous représente le diagramme courant-potentiel associé, avec comme échelle $0{,}2\,V/div$ en abscisse et $10\,mA/div$ en ordonnée.

Le surpotentiel cathodique du couple $H_2O/H_2$ n'est pas le même sur les deux métaux : un phénomène de corrosion différentielle peut apparaître, où la réduction de l'eau n'a pas lieu sur le métal qui est oxydé. On rappelle que le potentiel de corrosion (ou potentiel mixte) est celui pour lequel le courant anodique est égal au courant cathodique, sa valeur absolue est alors appelée courant de corrosion.

a) En raisonnant sur les potentiels standard, identifier le métal qui s'oxyde .....

b) En supposant que la réduction de l'eau a lieu sur le zinc, déterminer graphiquement le potentiel de corrosion et le courant de corrosion.

(a) $-0{,}85\,V$ et $2\,mA$
(b) $-0{,}65\,V$ et $18\,mA$
(c) $-0{,}60\,V$ et $10\,mA$
(d) $-0{,}40\,V$ et $2\,mA$

.....

c) Même question et mêmes valeurs proposées en supposant que la réduction de l'eau a lieu sur le fer.

.....

d) Finalement, sur quel métal la réduction de l'eau a-t-elle lieu ? .....

e) Comment se déplacent les électrons lors de la réaction ?

(a) Ils restent dans le zinc.
(b) Ils restent dans le fer.
(c) Du fer vers le zinc.
(d) Du zinc vers le fer.

.....

# Vitesse et courant de corrosion

**Entraînement 40.8 — Détermination d'un courant de corrosion.**

Une lame de magnésium est plongée dans une solution aqueuse acidifiée, maintenue à pH = 4. Le magnésium (couple $Mg^{2+}/Mg$) est alors corrodé par les ions $H^+$ (couple $H^+/H_2$).

On donne la constante des gaz parfaits $R = 8{,}3\,\mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$.

a) Écrire l'équation de la réaction de corrosion .....

b) Déterminer graphiquement le potentiel de corrosion, pour lequel il y a égalité des courants anodique et cathodique .....

c) En raisonnant sur la demi-équation électronique appropriée, exprimer la charge électrique échangée lorsqu'il y a production de $n$ moles de dihydrogène .....

d) À 25 °C et sous 1,0 bar, la réaction produit 1,0 mL de dihydrogène (gaz parfait) en dix minutes. Calculer numériquement la charge échangée pendant cette durée.

.....

e) En déduire la valeur numérique du courant de corrosion .....

**Entraînement 40.9 — Vitesse de corrosion d'une pièce en fer.**

Une pièce en fer de masse $m_0$ à l'instant initial se corrode en présence de dioxygène pour former de l'hydroxyde de fer $Fe(OH)_2$ suivant la réaction $Fe + \frac{1}{2}O_2 + H_2O \;=\; Fe(OH)_2$.

Le courant de corrosion est défini par $i_c = \alpha\mathcal{F}\frac{d\xi}{dt} > 0$ où $\alpha$ est la variation du nombre d'oxydation du fer lors de la réaction (égal au nombre d'électrons échangés) et $\xi$ l'avancement de la réaction. On cherche à le relier à la variation de la masse de la pièce de fer $\frac{dm}{dt}$.

a) Déterminer la valeur de $\alpha$ .....

b) Exprimer $\frac{dm}{dt}$ en fonction de $\frac{d\xi}{dt}$ et de la masse molaire du fer .....

c) En déduire la relation entre le courant de corrosion $i_c$ et $\frac{dm}{dt}$.

(a) $i_c = -\frac{2M_{Fe}}{\mathcal{F}}\frac{dm}{dt}$ (b) $i_c = -\frac{M_{Fe}}{2\mathcal{F}}\frac{dm}{dt}$ (c) $i_c = -\frac{\mathcal{F}}{2M_{Fe}}\frac{dm}{dt}$ (d) $i_c = -\frac{2\mathcal{F}}{M_{Fe}}\frac{dm}{dt}$

.....

**Entraînement 40.10 — Vitesse de corrosion d'une lamelle de cuivre.**

En milieu acide, le cuivre se corrode en ion cuivreux $Cu^{2+}$. La vitesse de corrosion est proportionnelle au courant de corrosion : $i_{corr} = 2\mathcal{F}\dfrac{d\xi}{dt}$, en notant $\xi$ l'avancement de la réaction.

Données :

- masse volumique $\rho_{Cu} = 8{,}96\,g \cdot cm^{-3}$ ;
- masse molaire $M_{Cu} = 63{,}5\,g \cdot mol^{-1}$.

a) En supposant le courant de corrosion constant, déterminer le temps $\tau$ nécessaire à la corrosion d'une masse $m_0$ de cuivre en fonction de $i_{corr}$, $M_{Cu}$, $\mathcal{F}$ et $m_0$.

.....

b) Une électrode de cuivre de surface $S = 2\,cm^2$ voit son épaisseur passer de $e_1 = 5{,}00\,mm$ à $e_2 = 4{,}98\,mm$ en un temps $\tau$. Déterminer $\tau$ sachant que le courant de corrosion est de $65\,\mu A$.

(a) 19 jours et 4 heures
(b) 19 jours et 10 heures
(c) 193 jours et 23 heures
(d) 1 jour et 22 heures

.....

c) Une seconde électrode perd 0,1 mg en 1 heure et 45 minutes. L'intensité du courant de corrosion est de $55\,\mu A$. Peut-elle être en cuivre ?

.....

**Réponses mélangées**

Le zinc  0,99 V  Le fer  (a)  (b)  $\dfrac{2\mathcal{F}m_0}{i_{corr}M_{Cu}}$  −2,55 V  (a)  $O_2$  (b)

0,36 V  $O_2/H_2O$  (b)  1,9 C  0,20 µg  $2\,Zn + O_2 + 2\,H_2O = 2\,Zn^{2+} + 4\,HO^-$

(a)  (a)  −1 V  (b)  7,8 C  (c)  60 mC  (a)  −0,24 V

$5 \times 10^{-6}$ mol  (d)  (b)  (b),(d)  $Mg + 2\,H^+ = Mg^{2+} + H_2$  oui  (d)

$2n\mathcal{F}$  (a)  2  $E^\circ_{Mg^{2+}/Mg} + 0{,}03\log\left(\dfrac{[Mg^{2+}]}{C^\circ}\right)$  Zn  (c)  $2M_{Fe}\dfrac{d\xi}{dt}$

13 mA  (d)  non  $E^\circ_{H^+/H_2} - 0{,}06\,pH - 0{,}03\log\dfrac{p_{H_2}}{p^\circ}$  (b)  (e)

► Réponses et corrigés page 630

# Piles et accumulateurs

**Prérequis**
Équation d'état des gaz parfaits. Notion d'équilibre chimique. Couple oxydant/réducteur. Demi-équation électronique. Réaction d'oxydo-réduction. Relation de Nernst. Tension à vide. Loi de Hess.

**Constantes utiles**

→ Constante d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6{,}02 \times 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$

→ Constante de Faraday : $\mathcal{F} = 96\,500\,\mathrm{C \cdot mol^{-1}}$

→ Constante des gaz parfaits : $R = 8{,}314\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$

## Pour bien commencer

**Entraînement 41.1 — Durée de fonctionnement et capacité électrique d'une pile.**

Lors de la décharge d'une pile à travers un conducteur ohmique de résistance $R = 15\,\Omega$, la tension $u$ aux bornes de la pile (et de la résistance) est mesurée *via* un voltmètre.

La tension maximale relevée pendant la décharge, l'intensité maximale du courant circulant à travers la résistance et la durée de fonctionnement (autonomie) de cette pile sont respectivement notées $U$, $I$ et $\Delta t$.

a) Quelles sont les propositions correctes ?

(a) $I = RU$ (b) $I = \dfrac{U}{R}$ (c) $I = 6{,}5\,\mathrm{mA}$ (d) $I = 27\,\mathrm{mA}$

.....

b) Par définition, la capacité électrique d'une pile est la charge électrique maximale $Q$ échangée entre les électrodes de la pile lors de sa décharge. D'une certaine façon, c'est une mesure de la quantité d'électricité que la pile peut stocker ou fournir. Comment s'exprime alors la capacité électrique d'une pile ?

(a) $\dfrac{U\Delta t}{R}$ (b) $\dfrac{U^2\Delta t}{R}$ (c) $\dfrac{UR}{\Delta t}$ (d) $\dfrac{R\Delta t}{U}$

.....

c) Calculer en ampèreheure la capacité électrique de cette pile .....

**Entraînement 41.2 — Au bout d'une heure de fonctionnement.**

La pile ci-contre (deux demi-piles, reliées par un pont salin) débite un courant d'intensité constante $I$ pendant la durée $\Delta t$.

Le compartiment de gauche correspond à une lame d'argent plongeant dans une solution de nitrate d'argent (volume $V_1 = 100{,}0\,\mathrm{mL}$ et concentration $C_1 = 0{,}100\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$), mettant en jeu le couple $Ag^+/Ag$. Celui de droite correspond à une lame de plomb plongeant dans une solution de nitrate de plomb ($V_2 = V_1$ et $C_2 = C_1$), mettant en jeu le couple $Pb^{2+}/Pb$.

Les ions argent sont réduits sur l'électrode d'argent : $Ag^+ + e^- = Ag$. Le plomb est oxydé sur l'électrode de plomb : $Pb = Pb^{2+} + 2\,e^-$. Finalement, l'équation de réaction est :

$$2\,Ag^+(aq) + Pb(s) = 2\,Ag(s) + Pb^{2+}(aq).$$

a) Exprimer la quantité d'électricité $Q$ échangée pendant $\Delta t$ en fonction de $I$ et $\Delta t$

b) Quelle(s) relation(s) correspond(ent) à la quantité de matière d'électrons $n_e$ échangée pendant $\Delta t$ ?

(a) $n_e = Qe/\mathcal{N}_A$ (b) $n_e = Q\mathcal{F}$ (c) $n_e = I\Delta t/\mathcal{N}_A$ (d) $n_e = Q/\mathcal{F}$

.....

c) Exprimer la quantité de matière $n_{Ag^+}$ consommée pendant $\Delta t$ en fonction de $n_e$

d) Exprimer la quantité de matière $n_{Pb^{2+}}$ formée pendant $\Delta t$ en fonction de $n_e$ ....

e) Calculer la concentration finale $\left[Ag^+\right]_f$ pour $\Delta t = 1{,}00\,\mathrm{h}$ et $I = 65{,}0\,\mathrm{mA}$ .....

f) Calculer la concentration finale $\left[Pb^{2+}\right]_f$ pour $\Delta t = 1{,}00\,\mathrm{h}$ et $I = 65{,}0\,\mathrm{mA}$ .....

**Entraînement 41.3 — Demi-équations et équation de fonctionnement.**

Soit une pile zinc-argent. Le compartiment de gauche correspond à une lame de zinc plongeant dans une solution de sulfate de zinc ($Zn^{2+}(aq) + SO_4{}^{2-}(aq)$). Celui de droite correspond à une lame d'argent plongeant dans une solution de nitrate d'argent ($Ag^+(aq) + NO_3{}^-(aq)$).

a) Écrire la demi-équation électronique associée au couple $Zn^{2+}/Zn$ .....

b) Écrire la demi-équation électronique associée au couple $Ag^+/Ag$ .....

c) Sachant que la réaction électrochimique se fait entre le zinc $Zn(s)$ et les ions argent $Ag^+(aq)$, écrire l'équation de la réaction d'oxydo-réduction ayant lieu dans cette pile .....

d) Quelles sont les propositions correctes ?

(a) L'électrode d'argent s'épaissit.
(b) L'électrode de zinc s'épaissit.
(c) L'électrode d'argent s'amincit.
(d) L'électrode de zinc s'amincit.

.....

# Autour de la pile Daniell

**Entraînement 41.4 — Polarité et tension à vide.**

Soit une pile Daniell cuivre-zinc. Le compartiment de gauche correspond à une lame de zinc plongeant dans une solution de sulfate de zinc ($Zn^{2+}(aq) + SO_4{}^{2-}(aq)$) à $0{,}1\,mol \cdot L^{-1}$. Celui de droite correspond à une lame de cuivre plongeant dans une solution de sulfate de cuivre ($Cu^{2+}(aq) + SO_4{}^{2-}(aq)$) à $0{,}25\,mol \cdot L^{-1}$. On donne : $E^\circ(Zn^{2+}/Zn) = -0{,}76\,V$ et $E^\circ(Cu^{2+}/Cu) = 0{,}34\,V$.

La relation de Nernst pour un couple $M^{n+}/M$ (cation métallique/métal) de potentiel standard $E^\circ$ est : $E = E^\circ + \dfrac{RT}{n\mathcal{F}} \ln \dfrac{a(M^{n+})}{a(M)}$, avec $n$ le nombre d'électrons échangés. Si $T = 298\,K$ (25 °C), on peut utiliser l'approximation $\dfrac{RT\ln(10)}{\mathcal{F}} \approx 0{,}059\,V$. La concentration standard, égale à $1\,mol \cdot L^{-1}$, est notée $C^\circ$.

On rappelle également que la relation entre l'enthalpie libre de la réaction $\Delta_r G$ de fonctionnement d'une pile et la tension à vide $U_{co}$ (en circuit ouvert) est : $\Delta_r G = -n\mathcal{F}U_{co}$.

a) Calculer le potentiel de Nernst du couple $Zn^{2+}/Zn$ à 25 °C .....

b) Calculer le potentiel de Nernst du couple $Cu^{2+}/Cu$ à 25 °C .....

c) Indiquer la polarité (+ ou −) de chaque demi-pile .....

d) Identifier alors l'anode et la cathode .....

e) Quelles propositions indiquent correctement le sens de déplacement des porteurs de charge ?

(a) Dans les fils, les électrons se déplacent de la cathode vers l'anode.

(b) Dans le pont salin, les anions se déplacent du compartiment de gauche vers celui de droite.

(c) Dans les fils, les électrons se déplacent de l'anode vers la cathode.

(d) Dans le pont salin, les cations se déplacent du compartiment de gauche vers celui de droite.

.....

f) Calculer la tension à vide $U_{co}$ de la pile (différence de potentiel à ses bornes) .

g) Calculer l'enthalpie libre de réaction à 25 °C .....

**Entraînement 41.5 — Constante d'équilibre et potentiels standard.**

Soit une pile Daniell cuivre-zinc, d'équation de fonctionnement

$$Cu^{2+}(aq) + Zn(s) \longrightarrow Zn^{2+}(aq) + Cu(s)$$

et de constante d'équilibre $K^\circ$. On donne : $E^\circ(Zn^{2+}/Zn) = -0{,}76\,V$ et $E^\circ(Cu^{2+}/Cu) = 0{,}34\,V$.

a) Exprimer $K^\circ$ en fonction des activités des composés à l'équilibre .....

b) Exprimer $K^\circ$ en fonction des concentrations des solutés à l'équilibre .....

c) Écrire la relation de Nernst à 25 °C pour le couple $Zn^{2+}/Zn$ .....

d) Écrire la relation de Nernst à 25 °C pour le couple $Cu^{2+}/Cu$ .....

e) L'unicité du potentiel à l'équilibre implique une égalité entre le potentiels de Nernst des deux couples d'oxydo-réduction. Appliquer l'unicité du potentiel à l'équilibre pour en déduire les relations correctes.

(a) $E^\circ_{Cu^{2+}/Cu} - E^\circ_{Zn^{2+}/Zn} = \frac{0{,}059}{2} \log \frac{[Zn^{2+}]_{éq}}{[Cu^{2+}]_{éq}}$

(b) $E^\circ_{Zn^{2+}/Zn} - E^\circ_{Cu^{2+}/Cu} = \frac{0{,}059}{2} \log \frac{[Zn^{2+}]_{éq}}{[Cu^{2+}]_{éq}}$

(c) $E^\circ_{Cu^{2+}/Cu} - E^\circ_{Zn^{2+}/Zn} = \frac{0{,}059}{2} \log \frac{[Cu^{2+}]_{éq}}{[Zn^{2+}]_{éq}}$

(d) $E^\circ_{Zn^{2+}/Zn} - E^\circ_{Cu^{2+}/Cu} = \frac{0{,}059}{2} \log \frac{[Cu^{2+}]_{éq}}{[Zn^{2+}]_{éq}}$

.....

f) En déduire l'expression correcte de $K^\circ$ en fonction des potentiels standard.

(a) $K^\circ = 10^{\frac{2}{0{,}059}(E^\circ(Cu^{2+}/Cu) - E^\circ(Zn^{2+}/Zn))}$

(b) $K^\circ = 10^{\frac{0{,}059}{2}(E^\circ(Cu^{2+}/Cu) - E^\circ(Zn^{2+}/Zn))}$

(c) $K^\circ = 10^{\frac{2}{0{,}059}(E^\circ(Zn^{2+}/Zn) - E^\circ(Cu^{2+}/Cu))}$

(d) $K^\circ = 10^{\frac{2}{0{,}059}(E^\circ(Zn^{2+}/Zn) - E^\circ(Cu^{2+}/Cu))}$

.....

g) Calculer $K^\circ$ à 25 °C .....

## Détermination d'un potentiel standard

**Entraînement 41.6 — Expression d'un potentiel standard à partir de deux autres.**

La relation entre l'enthalpie libre standard de demi-réaction $\Delta_{1/2}G^\circ$ et le potentiel standard $E^\circ$ du couple considéré est : $\Delta_{1/2}G^\circ = -n \times \mathcal{F} \times E^\circ$, avec $n$ le nombre d'électrons échangés et $\mathcal{F}$ la constante de Faraday. On donne les potentiels standard suivants : $E^\circ_1(Cu^{2+} / Cu) = 0{,}34\,V$ et $E^\circ_2(Cu^{2+} / Cu^{+}) = 0{,}16\,V$.

Celui du couple $Cu^{+} / Cu$ est noté $E^\circ_3$.

a) Écrire la demi-équation électronique, notée (1), associée au couple $Cu^{2+} / Cu$ ....

b) Écrire la demi-équation électronique, notée (2), associée au couple $Cu^{2+} / Cu^{+}$ ...

c) Écrire la demi-équation électronique, notée (3), associée au couple $Cu^{+} / Cu$ .....

d) Quelle est la combinaison linéaire reliant ces trois demi-équations ?

(a) $(1) = (2) + (3)$

(b) $(1) = (3) - (2)$

(c) $(1) = 2 \times \big((2) + (3)\big)$

.....

e) Quelle est la relation entre les trois enthalpies libres standard de demi-réaction ?

(a) $\Delta_{1/2}G^\circ_1 = \Delta_{1/2}G^\circ_2 + \Delta_{1/2}G^\circ_3$

(b) $\Delta_{1/2}G^\circ_1 = \Delta_{1/2}G^\circ_2 - \Delta_{1/2}G^\circ_3$

(c) $\Delta_{1/2}G^\circ_1 = \Delta_{1/2}G^\circ_3 - \Delta_{1/2}G^\circ_2$

(d) $\Delta_{1/2}G^\circ_1 = 2 \times (\Delta_{1/2}G^\circ_2 + \Delta_{1/2}G^\circ_3)$

.....

f) En déduire une relation entre les trois potentiels standard et calculer $E^\circ_3$.

(a) $E^\circ_3 = 2E^\circ_2 - E^\circ_1 = -0{,}02\,V$

(b) $E^\circ_3 = 2E^\circ_1 - E^\circ_2 = 0{,}52\,V$

(c) $E^\circ_3 = E^\circ_1 - E^\circ_2 = 0{,}18\,V$

(d) $E^\circ_3 = E^\circ_2 - E^\circ_1 = -0{,}18\,V$

.....

# Autour de l'électrolyse

**Entraînement 41.7 — Écriture de la réaction d'une électrolyse.**

On s'intéresse à la production de dichlore et de soude par électrolyse de l'eau salée en milieu très basique : à l'électrode (1) les ions chlorure sont transformés en dichlore (couple $Cl_2/Cl^-$) et à l'électrode (2) l'eau se transforme en dihydrogène en libérant des ions $HO^-$ (couple $H_2O/H_2$ en milieu basique).

a) Écrire l'équation de la réaction électrochimique ayant lieu à l'électrode (1) ...

b) Écrire l'équation de la réaction électrochimique ayant lieu à l'électrode (2) ...

c) En déduire l'équation de la réaction d'électrolyse .....

**Entraînement 41.8 — Bilan de matière d'une électrolyse.**

On s'intéresse à la production de dichlore et de soude par électrolyse de l'eau salée en milieu très basique : à l'électrode (1) les ions chlorure sont transformés en dichlore (couple $Cl_2/Cl^-$) et à l'électrode (2) l'eau se transforme en dihydrogène en libérant des ions $HO^-$ (couple $H_2O/H_2$ en milieu basique). L'équation de la réaction d'électrolyse est

$$2\,H_2O\,(\ell) + 2\,Cl^-\,(aq) \longrightarrow Cl_2\,(g)^+\,H_2\,(g) + 2\,HO^-\,(aq) :$$

il y a un échange de 2 électrons.

L'électrolyse est réalisée avec une densité de courant par unité de surface d'électrode $j = 6{,}00\,kA \cdot m^{-2}$, l'électrolyseur possédant une surface totale $S = 100\,m^2$ d'électrodes.

a) Déterminer la charge électrique échangée entre les électrodes en une heure ...

b) En supposant que tous les électrons participent à la réaction d'électrolyse, déterminer la quantité de matière de dichlore produite pendant cette durée .....

c) En utilisant l'équation d'état des gaz parfaits, en déduire le volume correspondant à 0 °C et sous 1 bar. L'exprimer en $m^3$ .....

d) On n'obtient en réalité que $233\,m^3$. Déterminer le rendement faradique de l'électrolyse.

.....

**Entraînement 41.9 — Bilan énergétique d'une électrolyse.**

On s'intéresse à la production de dichlore et de soude par électrolyse de l'eau salée en milieu très basique : à l'électrode (1) les ions chlorure sont transformés en dichlore (couple $Cl_2/Cl^-$) et à l'électrode (2) l'eau se transforme en dihydrogène en libérant des ions $HO^-$ (couple $H_2O/H_2$ en milieu basique). L'équation de la réaction d'électrolyse est : $2\,H_2O\,(\ell) + 2\,Cl^-\,(aq) \longrightarrow Cl_2\,(g) + H_2\,(g) + 2\,HO^-\,(aq)$.

L'électrolyse est réalisée sous une tension $U = 3{,}00\,V$ et avec une densité de courant par unité de surface d'électrode $j = 6{,}00\,kA \cdot m^{-2}$, l'électrolyseur possédant une surface totale $S = 100\,m^2$ d'électrodes. Le volume de dichore obtenu est égal à $233\,m^3$.

a) Déterminer l'énergie électrique consommée par heure d'électrolyse .....

b) Déterminer l'énergie électrique consommée par $m^3$ de dichlore produit .....

**Entraînement 41.10 — Récupération d'or par électrolyse.**

Une électrolyse permet d'obtenir de l'or solide Au par réduction des ions aurocyanure $Au(CN)_2{}^-$ à la cathode, notée (1). Des ions cyanure $CN^-$ sont également produits à cette électrode. À l'anode, notée (2), se produit l'oxydation de l'eau.

Dans ce procédé, le surpotentiel cathodique du couple $Au(CN)_2{}^- / Au$ est nul alors que le surpotentiel anodique du couple $O_2 / H_2O$ vaut +0,60 V.

On donne les potentiels standard à pH = 0 suivants :

$$E^\circ(H_3O^+ / H_2) = 0\,V, E^\circ(Au(CN)_2{}^- / Au) = -0{,}60\,V \text{ et } E^\circ(O_2 / H_2O) = 1{,}23\,V.$$

a) Écrire la réaction électrochimique se produisant sur (1) .....

b) Préciser alors le sens réel de déplacement des porteurs de charge dans les fils (électrons).

(a) (1) vers (2) (b) (2) vers (1)

.....

c) En déduire le signe (+ ou −) de l'intensité $I$ du courant électrique mesurée par le milliampèremètre.

(a) $I < 0$ (b) $I > 0$

.....

d) La solution est basique. Écrire alors la réaction électrochimique se produisant sur (2).

.....

e) La demi-équation associée au couple de l'eau à l'anode est : $2\,H_2O = 4\,H^+ + O_2 + 4\,e^-$.

Calculer le potentiel de Nernst associé pour pH = 14 .....

f) Sachant que le potentiel de Nernst du couple $Au(CN)_2{}^- / Au$ est ici approximativement égal à son potentiel standard, choisir la tension qu'il faut *a minima* imposer pour démarrer l'électrolyse.

(a) 0,60 V (b) 0,99 V (c) 1,60 V (d) 1,83 V

.....

g) En pratique, que risque-t-il d'arriver si la tension imposée dépasse une certaine valeur limite ?

(a) Le générateur va se détériorer.
(b) Le solvant va se réduire.
(c) L'or récupéré sera de mauvaise qualité.
(d) La solution va chauffer puis bouillir.

.....

# Courbes courant-potentiel

*L'introduction ci-dessous concerne les trois entraînements suivants.*

On réalise l'électrolyse d'une solution contenant des ions étain $Sn^{4+}$, argent $Ag^{+}$ et plomb $Pb^{2+}$ entre deux électrodes inertes. La figure ci-dessous donne l'allure schématique des courbes courant-potentiel relatives à l'expérience. L'échelle n'est pas respectée sur l'axe des abscisses. Les valeurs indiquées correspondent aux potentiels d'équilibre calculés à partir de la loi de Nernst. Dans les conditions de l'expérience, les surpotentiels des couples de l'eau valent respectivement 0,70 V en oxydation et −0,30 V en réduction.

**Entraînement 41.11 — Analyse du diagramme courant-potentiel.**

a) Que vaut le potentiel au point A indiqué à gauche du diagramme courant-potentiel ?

(a) −0,90 V (b) −0,70 V (c) −0,50 V (d) −0,30 V

b) Pourquoi représenter la branche anodique $Ag \longrightarrow Ag^{+}$ n'est-il pas nécessaire dans ce contexte ?

(a) Il n'y a pas d'argent métallique qui puisse s'oxyder dans le système.

(b) L'argent est un métal noble, inattaquable chimiquement.

(c) L'oxydation de l'argent est thermodynamiquement impossible.

(d) Cette branche est confondue avec la branche cathodique $Ag^{+} \longrightarrow Ag$.

**Entraînement 41.12 — Identification de la réaction d'électrolyse.**

La tension imposée par le générateur augmente progressivement jusqu'à observation d'une réaction.

a) Qu'observe-t-on à l'anode ?

(a) Du dihydrogène gazeux se dégage.

(b) Du dioxygène gazeux se dégage.

(c) Un métal se dépose.

(d) Un métal se dissout.

b) Qu'observe-t-on à la cathode ?

(a) Du dihydrogène gazeux se dégage.

(b) Un dépôt de plomb apparaît.

(c) Un dépôt d'étain apparaît.

(d) Un dépôt d'argent apparaît.

c) En déduire l'équation de la réaction observée .....

d) À partir de quelle valeur de tension commence-t-on à observer cette réaction ?

(a) 0,45 V (b) 1,15 V (c) 1,25 V (d) 2,25 V

**Entraînement 41.13 — Application à la métallurgie.**

L'électrolyse est réalisée dans le contexte de la production d'étain par hydrométallurgie : le but est d'obtenir un dépôt d'étain à la cathode, l'argent et le plomb étant des impuretés qui ne doivent pas se déposer.

a) Écrire l'équation de la réaction d'électrolyse que l'on souhaite réaliser

b) Quelle(s) impureté(s) doivent impérativement être éliminée(s) avant l'électrolyse ?

(a) $Ag^+$ et $Pb^{2+}$ (b) $Pb^{2+}$ seulement (c) $Ag^+$ seulement (d) Aucune

c) Quelle est la tension minimale à imposer pour que la réaction souhaitée ait lieu ?

(a) 0,25 V (b) 0,55 V (c) 1,00 V (d) 1,70 V

d) En pratique, la tension à imposer est supérieure à cette valeur seuil. Pourquoi ?

(a) Le rendement de l'électrolyse n'est pas de 100 %.

(b) Accélérer la réaction demande une tension plus élevée.

(c) La solution électrolytique se comporte comme une résistance, ce qui ajoute une contribution ohmique.

(d) Des réactions parasites sont à prendre en compte.

## Pour aller plus loin avec la pile Daniell

**Entraînement 41.14 — Charge totale d'une pile.**

Soit une pile Daniell cuivre-zinc, d'équation de fonctionnement $Cu^{2+}(aq) + Zn(s) \longrightarrow Zn^{2+}(aq) + Cu(s)$ et constituée d'un volume $V_1 = 100\,mL$ d'une solution de sulfate de zinc ($Zn^{2+}(aq) + SO_4{}^{2-}(aq)$) à la concentration $C_1 = 0{,}1\,mol \cdot L^{-1}$ et d'un volume $V_2 = 100\,mL$ d'une solution de sulfate de cuivre ($Cu^{2+}(aq) + SO_4{}^{2-}(aq)$) à la concentration $C_2 = 0{,}25\,mol \cdot L^{-1}$. Les plaques de zinc et de cuivre ont toutes les deux une masse $m = 30\,g$. On donne $M(Zn) = 65{,}4\,g \cdot mol^{-1}$.

a) Calculer la quantité de matière d'ions $Cu^{2+}$ contenue dans la solution de sulfate de cuivre.

b) Calculer la quantité de matière de zinc Zn contenue dans la plaque métallique

c) Identifier le réactif limitant de la transformation

d) Calculer la quantité maximale d'électrons circulant dans la pile durant son fonctionnement.

e) Calculer en coulomb puis en ampèreheure la charge maximale que la pile peut débiter.

## Réponses mélangées

$+$ (cathode) : Cu ; $-$ (anode) : Zn  (a)  $Zn + 2\,Ag \longrightarrow Zn^{2+} + 2\,Ag$  (b)

$+$ : Cu et $-$ : Zn  $2\,Cl^- \longrightarrow Cl_2 + 2\,e^-$  (a) et (d)  $Cu^+ + e^- = Cu$

$4\,HO^- = 2\,H_2O + O_2 + 4\,e^-$  $K^\circ = 10^{37} > 1$  91,7 %  $E_{Zn} = -0{,}79\,V$

$n_{Pb^{2+}} = \dfrac{n_e}{2}$  $[Ag^+]_f = 75{,}8\,mmol \cdot L^{-1}$  $254\,m^3$  $2\,H_2O + 2\,e^- \longrightarrow H_2 + 2\,HO^-$

$Sn^{4+} + 2\,H_2O \longrightarrow Sn + O_2 + 4\,H^+$  $Q = 0{,}52\,A \cdot h$  (d)  $U_{co} = 1{,}11\,V$  (b) et (c)

$n(Zn) = 0{,}46\,mol$  $n(e^-) = 5{,}0 \times 10^{-2}\,mol$  $E = E^\circ(Cu^{2+}/Cu) + \dfrac{0{,}059}{2}\log\left(\dfrac{[Cu^{2+}]}{C^\circ}\right)$

$K^\circ = \dfrac{[Zn^{2+}]_{éq}}{[Cu^{2+}]_{éq}}$  $Ag^+ + e^- = Ag$  $Zn^{2+} + 2\,e^- = Zn$  $K^\circ = \dfrac{a(Cu)_{éq} \times a(Zn^{2+})_{éq}}{a(Zn)_{éq} \times a(Cu^{2+})_{éq}}$

$6{,}48 \times 10^9\,J$  (a)  (c)  $n(Cu^{2+}) = 2{,}5 \times 10^{-2}\,mol$  (b)  $Cu^{2+} + e^- = Cu^+$

(d)  $Au(CN)_2^- + e^- = Au + 2\,CN^-$  $Q = 4{,}8 \times 10^3\,C = 1{,}3\,A \cdot h$

$E(O_2\,/\,H_2O) = 0{,}39\,V$  $\Delta_r G = -2{,}12 \times 10^2\,kJ \cdot mol^{-1}$  (b) et (d)

(b) et (c)  $2\,H_2O + 2\,Cl^- \longrightarrow Cl_2 + H_2 + 2\,HO^-$  (a)  $2{,}78 \times 10^7\,J \cdot m^{-3}$

(b)  (b)  (a)  (c)  $Cu^{2+}$  $1{,}12 \times 10^4\,mol$  $Q = I\Delta t$

$E = E^\circ(Zn^{2+}/Zn) + \dfrac{0{,}059}{2}\log\left(\dfrac{[Zn^{2+}]}{C^\circ}\right)$  (c)  $[Pb^{2+}]_f = 112\,mmol \cdot L^{-1}$  (d)

(a)  (b)  (a)  $n_{Ag^+} = n_e$  $4\,Ag^+ + 2\,H_2O \longrightarrow 4\,Ag + O_2 + 4\,H^+$

(a) et (d)  $Cu^{2+} + 2\,e^- = Cu$  $E_{Cu} = 0{,}32\,V$  $2{,}16 \times 10^9\,C$

► Réponses et corrigés page 636

# Réponses et corrigés

# Fiche n° 1. Opérateurs vectoriels

## Réponses

**1.1** ..... d

**1.2** a) .... $\left(z+y+\frac{yz}{a}\right)\vec{e_x}+\left(x+z+\frac{xz}{a}\right)\vec{e_y}+\left(x+y+\frac{yx}{a}\right)\vec{e_z}$

**1.2** b) ..... $6x\vec{e_x}+2a\vec{e_y}-2a\vec{e_z}$

**1.2** c) ..... $(2xy+z^2)\vec{e_x}+(2yz+x^2)\vec{e_y}+(2xz+y^2)\vec{e_z}$

**1.2** d) ..... $2y\vec{e_x}+2x\vec{e_y}+4\frac{a^2}{b}\mathrm{e}^{z/(2b)}\vec{e_z}$

**1.2** e) ..... $16xy\vec{e_x}+\left(8x^2-\frac{6a^4}{y^2}\right)\vec{e_y}-5b^2\vec{e_z}$

**1.3** a) ..... $\left(-\frac{2r}{a}-2\right)\vec{e_r}-2\vec{e}_\theta+3\vec{e_z}$

**1.3** b) ..... $-\frac{2a^2}{r^3}\mathrm{e}^{5\theta}\vec{e_r}+\frac{5a^2}{r^3}\mathrm{e}^{5\theta}\vec{e}_\theta$

**1.3** c) ..... $\frac{r}{\sqrt{r^2-a^2}}\vec{e_r}$

**1.3** d) ..... $28\frac{\theta r^3}{a^4}\vec{e_r}+7\frac{r^3}{a^4}\vec{e}_\theta+\frac{1}{z}\vec{e_z}$

**1.3** e) ..... $-\frac{z\sin\theta}{r^2}\vec{e_r}+\frac{z\cos\theta}{r^2}\vec{e}_\theta+\frac{\sin\theta}{r}\vec{e_z}$

**1.4** ..... a

**1.5** a) ..... 16

**1.5** b) ..... c

**1.5** c) ..... b

**1.5** d) ..... a

**1.5** e) ..... c

**1.5** f) ..... $2\sqrt{17}$

**1.6** a) ..... a

**1.6** b) ..... b

**1.6** c) ..... a

**1.6** d) ..... b

**1.6** e) ..... a

**1.7** a) ..... $6x+2a-2b$

**1.7** b) ..... $2x+4\frac{a^2}{b}\mathrm{e}^{\frac{z}{2b}}$

**1.7** c) ..... $16xy-\frac{6x^4}{y^2}$

**1.7** d) ..... 0

**1.7** e) ..... $x(2y-x)$

**1.8** a) ..... $-3\frac{r}{a}+1$

**1.8** b) ..... 0

**1.9** ..... b

**1.10** a) ..... 3

**1.10** b) ..... 3

**1.10** c) ..... b

**1.11** a) ..... $\vec{0}$

**1.11** b) ..... $-4c\mathrm{e}^{\frac{z}{2c}}\vec{e_x}-2x\vec{e_z}$

**1.11** c) ..... $\frac{8x^2}{y}(3x-y)\vec{e_z}$

**1.11** d) ..... $2\vec{e_y}$

**1.11** e) ..... $x^2\vec{e_x}-2xy(\vec{e_y}+\vec{e_z})-x^2\vec{e_z}.$

**1.12** a) ..... $-4\theta\vec{e_z}$

**1.12** b) ..... $2\vec{e_z}$

**1.13** a) ..... b

**1.13** b) ..... $\boxed{0{,}80\,\mathrm{UA/m}}$

**1.13** c) ..... $\boxed{\text{a}}$

**1.13** d) ..... $\boxed{2}$

**1.14** a) ..... $\boxed{\dfrac{2y}{a}}$

**1.14** b) ..... $\boxed{2}$

**1.14** c) ..... $\boxed{6-\dfrac{b^2}{z^2}}$

**1.15** ..... $\boxed{\begin{pmatrix} \dfrac{2y}{a} \\ 2 \\ 6-\dfrac{b^2}{z^2} \end{pmatrix}}$

**1.16** a) ..... $\boxed{\text{c}}$

**1.16** b) ..... $\boxed{\text{b}}$

**1.16** c) ..... $\boxed{\text{d}}$

**1.16** d) ..... $\boxed{\text{a}}$

**1.16** e) ..... $\boxed{\text{d}}$

**1.17** a) ..... $\boxed{\overrightarrow{e_r}+\dfrac{2a}{r}\overrightarrow{e_\theta}+\dfrac{-6b}{r\sin\theta\varphi^2}\overrightarrow{e_\varphi}}$

**1.17** b) .... $\boxed{3r^2\begin{pmatrix} \sin^3(\theta-\varphi) \\ \cos(\theta-\varphi)\sin^2(\theta-\varphi) \\ -\dfrac{1}{\sin\theta}\cos(\theta-\varphi)\sin^2(\theta-\varphi) \end{pmatrix}}$

**1.17** c) ..... $\boxed{r\sqrt{\varphi}\begin{pmatrix} 2\sin\theta \\ \cos\theta \\ \dfrac{1}{2\varphi} \end{pmatrix}}$

**1.17** d) ..... $\boxed{\dfrac{1}{r\cos^2\theta}\overrightarrow{e_\theta}}$

**1.18** a) ..... $\boxed{3+\dfrac{4a\cos\theta}{r}-\dfrac{6}{\varphi^2\sin\theta}\dfrac{a}{r}}$

**1.18** b) ..... $\boxed{4r\sin\theta\sqrt{\varphi}+2r\cos\theta\sqrt{\varphi}+\dfrac{r}{2\sqrt{\varphi}}}$

**1.18** c) ..... $\boxed{1/\tan(\theta)}$

**1.19** a) ..... $\boxed{\dfrac{6b}{r\varphi\tan\theta}\overrightarrow{e_r}-\dfrac{6b}{r\varphi}\overrightarrow{e_\theta}+\dfrac{2a\theta}{r}\overrightarrow{e_\varphi}}$

**1.19** b) ..... $\boxed{\dfrac{r}{2\sqrt{\varphi}}\overrightarrow{e_\theta}-r\sqrt{\varphi}\cos(\theta)\overrightarrow{e_\varphi}}$

**1.19** c) ..... $\boxed{2\overrightarrow{e_\varphi}}$

## Corrigés

**1.1** Calculons les trois composantes du vecteur gradient dans le système de coordonnées cartésiennes $(x, y, z)$.

On a

$$\frac{\partial V}{\partial x}=yz,\quad \frac{\partial V}{\partial y}=xz \quad \text{et} \quad \frac{\partial V}{\partial z}=xy.$$

Parmi les solutions proposées, la (c) est donc exclue.

Les solutions (a), (b) et (d) sont possibles (termes de droite corrects) mais les notations des gradients (termes de gauche) ne sont pas tous valables.

La notation $\vec{\nabla}$ comme $\overrightarrow{\mathrm{grad}}$ doit être surmontée d'une flèche pour qualifier la nature vectorielle de l'opérateur gradient, donc les réponses (a) et (b) sont exclues. Précisons que le gradient s'applique à un champ scalaire donc un champ dont la notation ne doit pas être surmonté d'une flèche : deuxième manière d'exclure la réponse (b).

La réponse (d) est l'ultime solution restante, on constate bien qu'elle ne comporte aucune erreur de notation.

.....

**1.2** a) Posons $f(x,y,z) = xy + yz + zx + \dfrac{xyz}{a}$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + z + \frac{yz}{a}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x + z + \frac{xz}{a} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = y + x + \frac{xy}{a}.$$

Donc le vecteur gradient de $f$ s'écrit $\left(z + y + \dfrac{yz}{a}\right)\vec{e_x} + \left(x + y + \dfrac{xz}{a}\right)\vec{e_y} + \left(x + y + \dfrac{yx}{a}\right)\vec{e_z}$.

La réponse attendue est bien un vecteur !

.....

**1.2** b) Posons $f(x,y,z) = 3x^2 + 2a(y-z) + b^2$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2a \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -2a.$$

Donc le vecteur gradient de $f$ s'écrit $6x\vec{e_x} + 2a\vec{e_y} - 2a\vec{e_z}$.

.....

**1.2** c) Posons $f(x,y,z) = x^2y + y^2z + z^2x + a^3$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + z^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2yz \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = y^2 + 2zx.$$

Donc le vecteur gradient de $f$ s'écrit $(2xy + z^2)\vec{e_x} + (2yz + x^2)\vec{e_y} + (2xz + y^2)\vec{e_z}$.

.....

**1.2** d) Posons $f(x,y,z) = 2xy + 8a^2\mathrm{e}^{z/(2b)} - 6c^2$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 4\frac{a^2}{b}\mathrm{e}^{z/(2b)}.$$

Donc le vecteur gradient de $f$ s'écrit $2y\vec{e_x} + 2x\vec{e_y} + 4\dfrac{a^2}{b}\mathrm{e}^{z/(2b)}\vec{e_z}$.

.....

**1.2** e) Posons $f(x,y,z) = 8x^2y + \dfrac{6a^4}{y} - 5b^2z$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 16xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = (8x^2 - \frac{6a^4}{y^2}) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -5b^2.$$

Donc le vecteur gradient de $f$ s'écrit $16xy\vec{e_x} + \left(8x^2 - \dfrac{6a^4}{y^2}\right)\vec{e_y} - 5b^2\vec{e_z}$.

.....

**1.3** a) Posons $f(r,\theta,z) = 3z - \dfrac{r^2}{a} - 2r\theta$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{2r}{a} - 2\theta, \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = -2r \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 3.$$

Donc le vecteur gradient de $f$ s'écrit $-\left(\dfrac{2r}{a} + 2\right)\vec{e_r} - 2\vec{e}_\theta + 3\vec{e_z}$.

.....

**1.3** b) Posons $f(r,\theta,z) = \dfrac{a^2}{r^2}\mathrm{e}^{5\theta}$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{2a^2}{r^3}\mathrm{e}^{5\theta}, \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{5a^2}{r^2}\mathrm{e}^{5\theta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Donc le vecteur gradient de $f$ s'écrit $-\dfrac{2a^2}{r^3}\mathrm{e}^{5\theta}\vec{e_r} + \dfrac{5a^2}{r^3}\mathrm{e}^{5\theta}\vec{e}_\theta$.

.....

**1.3** c) Posons $f(r,\theta,z)=\sqrt{r^2-a^2}$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{r}{\sqrt{r^2-a^2}},\quad \frac{\partial f}{\partial \theta}=0\quad \text{et}\quad \frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

Donc le vecteur gradient de $f$ s'écrit $\dfrac{r}{\sqrt{r^2-a^2}}\vec{e_r}$.

.....

**1.3** d) Posons $f(r,\theta,z)=7\left(\dfrac{r}{a}\right)^4\theta+\ln(z/b)$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial r}=28\frac{\theta r^3}{a^4},\quad \frac{\partial f}{\partial \theta}=7\frac{r^2}{a^4}\quad \text{et}\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{z}.$$

Donc le vecteur gradient de $f$ s'écrit $28\dfrac{\theta r^3}{a^4}\vec{e_r}+7\dfrac{r^3}{a^4}\vec{e}_\theta+\dfrac{1}{z}\vec{e_z}$.

.....

**1.3** e) Posons $f(r,\theta,z)=\dfrac{z}{r}\sin(\theta)$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial r}=-\frac{z\sin\theta}{r^2},\quad \frac{\partial f}{\partial \theta}=\frac{z\cos\theta}{r}\quad \text{et}\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\sin\theta}{r}.$$

Donc le vecteur gradient de $f$ s'écrit $-\dfrac{z\sin\theta}{r^2}\vec{e_r}+\dfrac{z\cos\theta}{r^2}\vec{e}_\theta+\dfrac{\sin\theta}{r}\vec{e_z}$.

.....

**1.4** Considérons la notation du gradient (terme de gauche des équations proposées). La réponse (d) est exclue car la notation nabla d'un gradient ne fait pas intervenir le produit scalaire. La réponse (c) est exclue car le couple de variables ne correspond à aucun de ceux proposés par l'énoncé. Considérons donc la formule cartésienne du gradient (terme de droite des équations proposées) pour les deux options restantes. La réponse (b) fait une interversion des coordonnées de dérivation et de celles de direction, elle est donc exclue. La bonne réponse est (a).

.....

**1.5** a) On a $g(A)=g(-1,1,2)=(-1-2)^2+(1+1)^2+2^2-1=9+4+4-1=16$.

.....

**1.5** b) Exprimons le gradient de la fonction scalaire $g$. On a

$$\overrightarrow{\text{grad}}(g(x,y,z))=\frac{\partial g}{\partial x}\vec{e_x}+\frac{\partial g}{\partial y}\vec{e_y}+\frac{\partial g}{\partial z}\vec{e_z}=(2(x-2))\vec{e_x}+(2y+2)\vec{e_y}+2z\vec{e_z}.$$

Par projection sur l'axe de direction $\vec{e_z}$ on obtient la quantité $2z$. Réponse (c).

.....

**1.5** c) Exprimons le gradient de la fonction scalaire $g$. On a

$$\overrightarrow{\text{grad}}(g(x,y,z))=\frac{\partial g}{\partial x}\vec{e_x}+\frac{\partial g}{\partial y}\vec{e_y}+\frac{\partial g}{\partial z}\vec{e_z}=(2(x-2))\vec{e_x}+(2y+2)\vec{e_y}+2z\vec{e_z}.$$

Par projection sur l'axe de direction $\vec{e_y}$ on obtient la quantité $2y+2$. Réponse (c).

.....

**1.5** d) Exprimons le gradient de la fonction scalaire $g$. On a

$$\overrightarrow{\text{grad}}(g(x,y,z))=\frac{\partial g}{\partial x}\vec{e_x}+\frac{\partial g}{\partial y}\vec{e_y}+\frac{\partial g}{\partial z}\vec{e_z}=(2(x-2))\vec{e_x}+(2y+2)\vec{e_y}+2z\vec{e_z}.$$

Par projection sur l'axe de direction $\vec{e_x}$ on obtient la quantité $2x-4$. Réponse (a).

.....

**1.5** e) Exprimons le gradient de la fonction scalaire $g$. On a

$$\overrightarrow{\text{grad}}(g(x,y,z)) = \frac{\partial g}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial g}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial g}{\partial z}\overrightarrow{e_z} = (2(x-2))\overrightarrow{e_x} + (2y+2)\overrightarrow{e_y} + 2z\overrightarrow{e_z}.$$

Cette notation est équivalente au vecteur colonne de la réponse (c).

.....

**1.5** f) Connaissant les composantes du gradient d'après les réponses précédentes, on peut exprimer la norme du vecteur gradient $\left\|\vec{\nabla} g(x,y,z)\right\|$ en un point quelconque. On a

$$\left\|\vec{\nabla} g(x,y,z)\right\| = \sqrt{(2x-4)^2 + (2y+2)^2 + 4z^2}.$$

On réalise l'application numérique au point $A(-1,1,2)$ : on a

$$\left\|\vec{\nabla} g(A)\right\| = \left\|\vec{\nabla} g(-1,1,2)\right\| = \sqrt{(-2-4)^2 + (2+2)^2 + 4\times 2^2} = \sqrt{36+16+16} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}.$$

.....

**1.6** a) Rappelons l'expression du gradient en coordonnées cartésiennes : on a

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f(x,y,z)) = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e_z}.$$

Or, ici $\overrightarrow{\text{grad}}\, f = 2xy\overrightarrow{e_x} + x^2\overrightarrow{e_y} + a^2\overrightarrow{e_z}$, donc par identification : $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z} = a^2$. Réponse (a).

.....

**1.6** b) On a $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy$ donc par intégration par rapport à la variable $x$ il vient $f(x,y,z) = x^2y + \text{Cste}$ avec $\text{Cste} = g(y,z)$ une fonction des coordonnées $y$ et $z$ car $\dfrac{\partial g(y,z)}{\partial x} = 0$. Réponse (b)

.....

**1.6** c) On a $f(x,y,z) = x^2y + g(y,z)$ donc $\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = x^2 + \dfrac{\partial g(y,z)}{\partial y}$. Or, d'après l'énoncé, on a

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = x^2.$$

On déduit de ces deux équations que l'on a nécessairement $\dfrac{\partial g}{\partial y} = 0$. Réponse (a).

.....

**1.6** d) On a $\dfrac{\partial g(y,z)}{\partial y} = 0$ donc par intégration par rapport à la variable $y$ il vient $g(y,z) = \text{Cste}$ avec $\text{Cste} = h(z)$ une fonction de la seule coordonnée $z$ car $\dfrac{\partial h(z)}{\partial y} = 0$.

On a $f(x,y,z) = x^2y + g(y,z) = x^2y + h(z)$ donc $\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = \dfrac{\partial h}{\partial z}$. Or, on sait d'après l'énoncé que $\dfrac{\partial f}{\partial z} = a^2$. On déduit de ces deux équations que l'on a nécéssairement $\dfrac{\partial h}{\partial z} = a^2$ donc $h(z) = a^2z + \text{Cste}$ soit finalement $g = a^2z + \text{Cste}$. Réponse (b).

.....

**1.6** e) On a $f(x,y,z) = x^2y + g(y,z) = x^2y + h(z) = x^2y + a^2z + \text{Cste}$. On a donc $f(0,0,0) = \text{Cste}$, or $f(0,0,0) = 0$ donc $\text{Cste} = 0$. Réponse (a).

.....

**1.7** a) Pour éviter les étourderies vous pouvez vérifier que les trois termes de la somme ont bien la même dimension et que cette dimension correspond à la dimension de l'argument de l'opérateur divergence divisée par une longueur.

.....

**1.7** b) On a $0 + 2x + 8\dfrac{a^2}{2b}\mathrm{e}^{\frac{z}{2b}} = 2x + 4\dfrac{a^2}{b}\mathrm{e}^{\frac{z}{2b}}$.

**1.7** c) On a $8 \times 2xy - \dfrac{6x^4}{y^2} + 0 = 16y - \dfrac{6x^4}{y^2}$.

**1.7** d) On a $0 + 0 = 0$.

**1.7** e) On a $2xy - x^2 = x(2y - x)$.

**1.8** a) On a $-3\dfrac{r}{a} - 2 + 3 = -3\dfrac{r}{a} + 1$.

**1.8** b) La composante $A_\theta$ ne dépend pas de $\theta$ !

**1.9** Il faut calculer chacune des divergences au point A.

- Cas (a) : on a $\mathrm{div}\left(x^2\vec{e_x} + y^2\vec{e_y} + z^2\vec{e_z}\right) = 2x + 2y + 2z$ donc la valeur de divergence en $A$ vaut
$$2 \times (-1) + 2 \times (-1) + 2 \times 1 = -2.$$
- Cas (b) : on a $\mathrm{div}\left(y^2\vec{e_x} + x^2\vec{e_y} + z^2\vec{e_z}\right) = 2z$ donc la valeur de divergence en $A$ vaut $2 \times 1 = +2$.
- Cas (c) : on a $\mathrm{div}\left(z^2\vec{e_x} + x^2\vec{e_y} + y^2\vec{e_z}\right) = 0$ donc la valeur de divergence en $A$ vaut 0.
- Cas (d) : on a $\mathrm{div}\left(y^2\vec{e_x} + x^2\vec{e_z} + z^2\vec{e_y}\right) = 0$ donc la valeur de divergence en $A$ vaut 0.

La valeur de divergence maximale est dans le cas (a). Réponse A.

**1.10** a) On a $1 + 1 + 1 = 3$.

**1.10** b) On a $\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial(r^2.r)}{\partial r} + 0 + 0 = \dfrac{3r^2}{r^2} = 3$.

**1.10** c) On a $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(r.r)}{\partial r} + 0 + 0 = \dfrac{2r}{r} = 2$. Réponse (b).

**1.11** a) On a $(0-0)\vec{e_x} + (0-0)\vec{e_y} + (0-0)\vec{e_z} = \vec{0}$.

**1.11** b) On a $\left(0 - \dfrac{8c^2}{2c}\mathrm{e}^{\frac{z}{2c}}\right)\vec{e_x} + (0-0)\vec{e_y} + (0-2x)\vec{e_z} = -4c\mathrm{e}^{\frac{z}{2c}}\vec{e_x} - 2x\vec{e_z}$.

**1.11** c) On a $(0-0)\vec{e_x} + (0-0)\vec{e_y} + \left(\dfrac{24x^3}{y} - 8x^2\right)\vec{e_z} = \dfrac{8x^2}{y}(3x - y)\vec{e_z}$.

**1.11** d) On a $(0-0)\vec{e_x} + (1-(-1))\vec{e_y} + (0-0)\vec{e_z} = 2\vec{e_y}$.

**1.11** e) On a $(x^2-0)\vec{e_x} + (0-2xy)\vec{e_y} + (-2xy - x^2)\vec{e_z} = x^2\vec{e_x} - 2xy(\vec{e_y} + \vec{e_z}) - x^2\vec{e_z}$.

**1.12** a) On a $\left(\dfrac{1}{r} \times (0) - 0\right)\vec{e_r} + (0-0)\vec{e_\theta} + \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(-2r^2\theta)}{\partial r} - 0\right)\vec{e_z} = -4\theta\vec{e_z}$.

**1.12** b) On a $\left(\frac{1}{r}\times(0)-0\right)\vec{e_r}+(0-0)\vec{e_\theta}+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r^2)}{\partial r}-0\right)\vec{e_z}=2\vec{e_z}$.

.....

**1.13** a) Par définition du potentiel, on a $\mathrm{d}\Phi = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Phi\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}$. Cette quantité étant nulle sur une équipotentielle par définition, le vecteur $\vec{v}$ doit être nécessairement orthogonal au vecteur $\mathrm{d}\vec{\ell}$ en tout point de l'équipotentielle. Réponse (b).

.....

**1.13** b) Au premier ordre on peut écrire que $v(\mathrm{C})\approx\frac{\Delta\Phi}{\Delta\ell}$. Graphiquement, au niveau du point C, on a :

$$\Delta\Phi = 1{,}60\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s} - 1{,}20\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s} = 0{,}40\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s} \qquad \text{et} \qquad \Delta\ell = AC = 0{,}50\,\mathrm{m} \quad \text{donc} \quad v(\mathrm{C})\approx 0{,}80\,\mathrm{UA/m}.$$

.....

**1.13** c) Le champ demandé est orienté dans le sens du gradient de $\Phi$, c'est-à-dire dans le sens des potentiels croissants. Réponse (a).

.....

**1.13** d) Les deux points $C$ et $D$ sont sur une même ligne de champ. En considérant un tube de champ centré sur cette ligne de champ commune et qui s'appuie sur les deux autres lignes de champ de la figure, on peut écrire que : $S_\mathrm{C}v_\mathrm{C} = S_\mathrm{D}v_\mathrm{D}$. Les valeurs de $S$ sont proportionnelles à la distance sur le graphe entre les deux lignes de champs délimitant le tube, donc en mesurant ces distances au niveau des points $C$ et $D$ on a : $\frac{S_\mathrm{D}}{S_\mathrm{C}}\approx\frac{1{,}6\,\mathrm{cm}}{0{,}8\,\mathrm{cm}}=2{,}0$. L'intensité du champ $\vec{v}$ est environ 2 fois plus importante en C qu'en D. On retrouve le fait que plus les lignes de champs sont resserrées, plus le champ est intense.

.....

**1.14** a) Posons $f(x,y,z)=\frac{x^2y}{a}+bz+c^2$. Calculons les dérivées partielles secondes : on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{2y}{a},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

Donc le laplacien scalaire de $f$ s'écrit $\frac{2y}{a}$.

.....

**1.14** b) Posons $f(x,y,z)=y^2-5az$. Calculons les dérivées partielles secondes : on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

Donc le laplacien scalaire de $f$ s'écrit 2.

.....

**1.14** c) Posons $f(x,y,z)=b^2\ln(\frac{z}{a})+3x^2$. Calculons les dérivées partielles secondes : on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z}=-\frac{b^2}{z^2}.$$

Donc le laplacien scalaire de $f$ s'écrit $6-\frac{b^2}{z^2}$.

.....

**1.15** Posons $A_x(x,y,z)=\frac{x^2y}{a}+bz+c^2$ puis $A_y=y^2-5az$ et $A_z=b^2\ln(\frac{z}{a})+3x^2$. On calcule les laplaciens scalaires de ces trois fonctions selon la formule : $\Delta(f(x,y,z))=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

On obtient $\Delta A_x=\frac{2y}{a}$, $\Delta A_y=2$ et $\Delta A_z=6-\frac{b^2}{z^2}$. Le laplacien vectoriel s'écrit donc : $\frac{2y}{a}\vec{e_x}+2\vec{e_y}+6-\frac{b^2}{z^2}\vec{e_z}$, que l'on peut aussi mettre sous la forme du vecteur colonne proposée en réponse.

.....

**1.16** a) Ne pas oublier d'indiquer qu'il s'agit d'un opérateur vectoriel : $\overrightarrow{\text{grad}}\,A$ et non grad$(A)$!!

.....

**1.16** b) L'argument est un vecteur, pensez à choisir la base de projection de façon à faciliter le calcul.

.....

**1.16** c) Ne pas oublier d'indiquer qu'il s'agit d'un opérateur vectoriel : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$ et non rot$(\vec{A})$!!

.....

**1.16** d) Vérifiez l'homogénéité des trois termes : homogénéité de l'argument du laplacien divisée par le carré d'une longueur!

.....

**1.16** e) Neuf termes à calculer! Heureusement souvent beaucoup sont nuls du fait des symétries et invariances...

.....

**1.17** a) Posons $f(r,\theta,\varphi) = r + 2a\theta + \dfrac{6b}{\varphi}$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = 2a \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{-6b}{\varphi^2}.$$

Donc le vecteur gradient de $f$ s'écrit $1\vec{e_r} + \dfrac{2a}{r}\vec{e_\theta} + \dfrac{-6b}{r\sin\theta\varphi^2}\vec{e_\varphi}$.

.....

**1.17** b) Posons $f(r,\theta,\varphi) = (r\sin(\theta-\varphi))^3$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 3r^2\sin^3(\theta-\varphi), \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = 3r^3\cos(\theta-\varphi)\sin^2(\theta-\varphi) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = -\cos(\theta-\varphi)\sin^2(\theta-\varphi)\sin\theta.$$

Donc le vecteur gradient de $f$ s'écrit bien sous la forme de vecteur colonne proposée en réponse.

.....

**1.17** c) Posons $f(r,\theta,\varphi) = r^2\sqrt{\varphi}\sin\theta$. Calculons les dérivées partielles : on a

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 2\sin\theta, \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = r\cos\theta \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{r\sin\theta}{2\varphi}.$$

Donc le vecteur gradient de $f$ s'écrit bien sous la forme de vecteur colonne proposée en réponse.

.....

**1.17** d) La seule dérivée partielle non nulle est celle par rapport à la coordonnée $\theta$. On peut soit utiliser la dérivation de la fonction tangente soit développer grâce à l'identité $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$.

.....

**1.18** a) On calcule $3\dfrac{r^2}{r^2} + \dfrac{1}{r\sin\theta}2\sin\theta\cos\theta + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{-6a}{\varphi^2} = 3 + \dfrac{2\cos\theta}{r} - \dfrac{6}{\varphi^2\sin\theta}\dfrac{a}{r}$.

.....

**1.18** b) On calcule $\dfrac{4r^3}{r^2}\sin\theta\sqrt{\varphi} + \dfrac{1}{r\sin\theta}2\sin\theta\cos\theta r^2\sqrt{\varphi} + \dfrac{1}{r\sin\theta}r^2\sin\theta\dfrac{1}{2\sqrt{\varphi}} = 4r\sin\theta\sqrt{\varphi} + 2r\cos\theta\sqrt{\varphi} + \dfrac{r}{2\sqrt{\varphi}}$.

.....

**1.18** c) La composante $A_\theta$ ne dépend que de $r$.

.....

**1.19** a) On calcule $\dfrac{1}{r\sin\theta}\left(\dfrac{6b}{\varphi}\cos\theta - 0\right)\vec{e_r} + \left(\dfrac{1}{r\sin\theta}\times 0 - \dfrac{1}{r}\dfrac{6b}{\varphi}\right)\vec{e}_\theta + \dfrac{1}{r}(2a\theta - 0)\vec{e_\varphi}$.

.....

**1.19** b) On a

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(r^2\sin(\theta)\sqrt{\varphi}\overrightarrow{e_r}\right)\\
&= \frac{1}{r\sin\theta}(0-0)\overrightarrow{e_r} + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\times\frac{\partial}{\partial\varphi}(r^2\sin(\theta)\sqrt{\varphi}) - \frac{1}{r}\times 0\right)\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(0 - \frac{\partial}{\partial\theta}(r^2\sin(\theta)\sqrt{\varphi})\right)\overrightarrow{e_\varphi}\\
&= \frac{1}{r\sin\theta}\times\frac{\partial}{\partial\varphi}(r^2\sin(\theta)\sqrt{\varphi})\overrightarrow{e_\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(r^2\sin(\theta)\sqrt{\varphi})\overrightarrow{e_\varphi}\\
&= \frac{r}{2\sqrt{\varphi}}\overrightarrow{e_\theta} - r\sqrt{\varphi}\cos(\theta)\overrightarrow{e_\varphi}.
\end{aligned}$$

**1.19** c) On calcule $\frac{1}{r\sin\theta}(0-0)\overrightarrow{e_r} + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\times 0 - \frac{1}{r}\times 0\right)\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r^2) - 0\right)\overrightarrow{e_\varphi} = 2\overrightarrow{e_\varphi}$.

# Fiche n° 2. Changements de référentiel

## Réponses

**2.1** a) ..... b
**2.1** b) ..... a
**2.1** c) ..... d
**2.2** a) ..... Vrai
**2.2** b) ..... Faux
**2.2** c) ..... Faux
**2.3** a) ..... a
**2.3** b) ..... b
**2.3** c) ..... b
**2.3** d) ..... b
**2.4** a) ..... c
**2.4** b) ..... b
**2.4** c) ..... a
**2.4** d) ..... d
**2.4** e) ..... $-\omega^2 r\vec{e_r}$
**2.4** f) ..... $2\omega\dot{r}\vec{e_\theta}$
**2.4** g) ..... $\ddot{r}\vec{e_r}$
**2.5** a) ..... a
**2.5** b) ..... a et b
**2.5** c) ..... d
**2.5** d) ..... c
**2.5** e) ..... c
**2.5** f) ..... c
**2.6** a) ..... $\vec{0}$
**2.6** b) ..... $m\omega_0^2\ell\vec{e_r}$
**2.6** c) ..... $\dfrac{m\omega_0^2\ell\vec{e_r}}{2}$
**2.7** ..... c
**2.8** a) ..... $2m\omega_0 v_1\vec{e_x}$
**2.8** b) .... $2m\omega_0(v_2\vec{e_y} - v_1\vec{e_z})$
**2.8** c) ..... $-2m\omega_0 v_1\vec{e_\theta}$
**2.8** d) ..... $2m\omega_0 v_1\vec{e}_r$
**2.9** a) ..... c
**2.9** b) ..... c
**2.9** c) ..... $-2m\Omega\dot{z}\cos\lambda\vec{e}_x$
**2.10** a) ..... c
**2.10** b) ..... b
**2.10** c) ..... $3{,}8\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$
**2.11** a) ..... 0,5
**2.11** b) ..... b
**2.11** c) ..... $-mg\vec{e_y}$
**2.11** d) ..... $T\sin(\theta_e)\vec{e_x} + T\cos(\theta_e)\vec{e_y}$
**2.11** e) ..... $-ma\vec{e_x}$
**2.11** f) ..... d
**2.11** g) ..... b
**2.11** h) ..... 27°
**2.12** a) ..... b
**2.12** b) ..... c
**2.12** c) ..... $\sqrt{\dfrac{\mu g}{d}}$
**2.12** d) ..... $10\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$
**2.13** a) ..... $T^{-2}$
**2.13** b) ..... b
**2.13** c) ..... a
**2.13** d) ..... $\dfrac{v_0}{\Omega}\sin(\Omega t)$
**2.13** e) ..... c

## Corrigés

**2.1** a) Cette trajectoire est appelée cycloïde.

.....

**2.1** b) Le centre de la roue est immobile dans le référentiel du vélo, et le point V a une trajectoire circulaire autour de l'axe (fixe) de la roue.

.....

**2.1** c) La valve V du vélo appartient au solide de référence de ce référentiel : il est donc fixe dans ce référentiel.

.....

**2.2** a) Le référentiel $\mathcal{R}_1$ est en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen, donc il est lui-même galiléen.

.....

**2.2** b) Le référentiel $\mathcal{R}_2$ n'est pas en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen (il est en rotation !), donc il n'est pas galiléen.

.....

**2.2** c) Le référentiel $\mathcal{R}_3$ n'est pas en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen (il est accéléré !), donc il n'est pas galiléen.

.....

**2.3** a) $\mathcal{R}_\mathrm{t}$ est un référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel terrestre (supposé galiléen), donc il est lui-même galiléen. $\mathcal{R}_\mathrm{p}$ est immobile par rapport à $\mathcal{R}_\mathrm{t}$ donc $\mathcal{R}_\mathrm{p}$ est aussi galiléen. Réponse (a).

.....

**2.3** b) Le référentiel $\mathcal{R}_\mathrm{t}$ n'est pas en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel terrestre (supposé galiléen) ; donc, il n'est pas galiléen. $\mathcal{R}_\mathrm{p}$ est immobile par rapport à $\mathcal{R}_\mathrm{t}$ donc $\mathcal{R}_\mathrm{p}$ n'est pas galiléen non plus.

.....

**2.3** c) Le référentiel $\mathcal{R}_\mathrm{t}$ est en translation rectiligne non uniforme par rapport au référentiel terrestre (supposé galiléen), donc il n'est pas galiléen. Le référentiel $\mathcal{R}_\mathrm{p}$ est en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}_\mathrm{t}$ qui est non galiléen ; donc $\mathcal{R}_\mathrm{p}$ n'est pas galiléen non plus.

.....

**2.3** d) Le référentiel $\mathcal{R}_\mathrm{t}$ n'est pas en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel terrestre (supposé galiléen), donc il n'est pas galiléen. Le référentiel $\mathcal{R}_\mathrm{p}$ est en mouvement par rapport à $\mathcal{R}_\mathrm{t}$ qui est non galiléen. Il sera *a priori* non galiléen aussi sauf si la vitesse de marche compense exactement le déplacement du train, ce qui paraît peu probable...

.....

**2.4** b) Le référentiel $\mathcal{R}'$ n'est pas en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel galiléen $\mathcal{R}$, il n'est donc pas galiléen.

.....

**2.4** c) On rappelle qu'une accélération est homogène à une distance divisée par un temps au carré (comme le montre la formule $\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t^2}$) ; donc, on a $[a] = L.T^{-2}$.

On constate que seule la réponse (a) est constituée de deux termes homogènes à une accélération.

.....

**2.4** d) Par analyse dimensionnelle, on constate que seule la réponse (d) est constituée d'un terme homogène à une accélération.

.....

**2.4** e) On a $\overrightarrow{a_\mathrm{e}} = \overrightarrow{\Omega} \wedge (\Omega\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{r}\overrightarrow{e}_r) = \Omega\overrightarrow{e_z} \wedge \omega r\overrightarrow{e_\theta}$ soit $\overrightarrow{a_\mathrm{e}} = -\omega^2 r\overrightarrow{e_r}$.

.....

**2.4** f) La vitesse $\left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'}$ vaut $\dot{r}\overrightarrow{e_r}$. Ainsi, l'accélération de Coriolis vaut : $\overrightarrow{a_\mathrm{C}} = 2\omega\dot{r}\overrightarrow{e_\theta}$

.....

**2.4** g) En utilisant l'expression de $\overrightarrow{a}_\mathcal{R}(\mathrm{M})$ issue des questions c et d, et la loi de composition des accélérations, on trouve $\overrightarrow{a}_{\mathcal{R}'}(\mathrm{M}) = \ddot{r}\overrightarrow{e_r}$.

.....

**2.5** a) Le référentiel $\mathcal{R}_1$ est en rotation dans $\mathcal{R}_t$. *A priori*, il faut prendre en compte la force d'inertie centrifuge et à la force d'inertie de Coriolis. Cependant, la vitesse de M dans le référentiel $\mathcal{R}_1$ est nulle, donc la force de Coriolis est nulle : réponse (a).

.....

**2.5** b) Le référentiel $\mathcal{R}_1$ est en rotation dans $\mathcal{R}_t$. *A priori*, il faut prendre en compte la force d'inertie centrifuge et à la force d'inertie de Coriolis : réponses (a), (b).

.....

**2.5** c) Le référentiel $\mathcal{R}_2$ est en translation rectiligne uniforme dans $\mathcal{R}_t$ : c'est donc un référentiel galiléen. Aucune force d'inertie n'est à prendre en compte : réponse (d).

.....

**2.5** d) Le référentiel $\mathcal{R}_3$ est en translation rectiligne non uniforme dans $\mathcal{R}_t$ : il non galiléen.

.....

**2.5** e) Le référentiel $\mathcal{R}_3$ est en translation rectiligne non uniforme dans $\mathcal{R}_t$ : il est non galiléen.

.....

**2.5** f) Le référentiel $\mathcal{R}_4$ est en translation rectiligne non uniforme dans $\mathcal{R}_t$ : il est non galiléen.

.....

**2.6** a) Si le point M est placé sur l'axe de rotation, la distance HM est nulle.

.....

**2.6** b) Comme le point M est placé dans le plan $(\mathrm{O}, \vec{e_x}, \vec{e_y})$ (ou dans le plan $(\mathrm{O}, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$), la distance HM vaut $\ell$. Ainsi, on a $\overrightarrow{f_{\mathrm{ie}}} = m\omega_0^2 \ell \vec{e_r}$.

.....

**2.6** c) Dans cette situation, on a $\mathrm{HM} = \ell \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Ainsi, $\overrightarrow{f_{\mathrm{ie}}} = m\omega_0^2 \ell \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\vec{e_r} = \frac{m\omega_0^2 \ell \vec{e_r}}{2}$.

.....

**2.7** On a $\overrightarrow{f_{\mathrm{iC}}} = -2m\Omega_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -2m\Omega_0 v_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2m\Omega_0 v_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

.....

**2.8** a) Comme $\vec{e_z} \wedge \vec{e_y} = -\vec{e_x}$, alors l'expression de la force de Coriolis est $\overrightarrow{f_{\mathrm{iC}}} = 2m\omega_0 v_1 \vec{e_x}$.

.....

**2.8** b) On a $\overrightarrow{f_{\mathrm{iC}}} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(\mathrm{M}) = -2m(\omega_0 v_1 \vec{e_x} \wedge \vec{e_y} + \omega_0 v_1 \vec{e_x} \wedge \vec{e_z})$ ainsi $\overrightarrow{f_{\mathrm{iC}}} = 2m\omega_0(v_2 \vec{e_y} - v_1 \vec{e_z})$.

.....

**2.8** c) Comme $\vec{e_z} \wedge \vec{e_r} = \vec{e_\theta}$, alors l'expression de la force de Coriolis est $\overrightarrow{f_{\mathrm{iC}}} = -2m\omega_0 v_1 \vec{e_\theta}$.

.....

**2.8** d) Le produit vectoriel $\vec{e_z} \wedge \vec{e_z} = \vec{0}$, il faut donc se concentrer sur $\vec{e_z} \wedge \vec{e_\theta} = -\vec{e}_r$ donc $\overrightarrow{f_{\mathrm{iC}}} = 2m\omega_0 v_1 \vec{e}_r$.

.....

**2.9** a) La période de rotation de la Terre sur elle-même est de $T = 24\,\mathrm{h} = 86\,400\,\mathrm{s}$ ; sa vitesse angulaire autour de l'axe $(\mathrm{O}, Z)$ est donc $\Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86400} = 7{,}3 \times 10^{-5}\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$.

.....

**2.9** b) L'angle entre le vecteur $\vec{\Omega}$ et l'axe $(Ay)$ est la latitude $\lambda$. Par conséquent, la projection fait apparaître un $\cos\lambda$ sur $\vec{e_y}$ et un $\sin\lambda$ sur $\vec{e_z}$. La projection sur $\vec{e_x}$ est nulle car $\vec{\Omega} \perp \vec{e_x}$. C'est donc la réponse (c).

.....

**2.9** c) Le produit vectoriel $\Omega\begin{pmatrix}0\\ \cos\lambda\\ \sin\lambda\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\0\\ \dot{z}\end{pmatrix}$ amène $-2m\Omega\cos\lambda\dot{z}\vec{e}_x$.

**2.10** a) Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{HM}}$ est nécessairement dirigé radialement, donc suivant le vecteur $\vec{e_r}$ : réponse (c).

**2.10** b) Pour commencer, le $\cos\alpha$ n'a pas de dimension. Seul le rapport $\dfrac{g}{\ell}$ est homogène à un temps à la puissance -2, comme doit l'être $\omega^2$. C'est donc la réponse (b).

**2.11** a) On a $f_{\mathrm{ie}} = 0{,}025\,\mathrm{N}$ et $P = 0{,}05\,\mathrm{N}$, ainsi le rapport entre les deux normes vaut 0,5.

**2.11** b) Le rapport des normes des forces vaut 0,5 ; les deux forces sont du même ordre de grandeur.

**2.11** f) L'utilisation du principe fondamental dans un référentiel non galiléen comme $\mathcal{R}_1$ nécessite l'utilisation des forces d'inertie (d'entrainement ici). La réponse (d) est pour laquelle la force d'entrainement $\vec{f_{\mathrm{ie}}} = -m\vec{a_{\mathrm{e}}}$ est correctement utilisée.

**2.11** g) Le nombre $\tan(\theta_{\mathrm{e}})$ est sans dimension. Seul le rapport de $a$ sur $g$ est aussi adimensionné : réponse (b).

**2.12** a) Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ est bien colinéaire et dans le même sens que $\vec{e}_r$. C'est donc la réponse (b).

**2.12** b) Le palet est expulsé radialement par la force centrifuge (dirigée suivant $+\vec{e_r}$). C'est donc la réponse (c).

**2.12** c) Dans le cas limite, les deux forces radiales se compensent : $\mu mg = m\omega_{\max}^2 d$, soit $\omega_{\max} = \sqrt{\dfrac{\mu g}{d}}$.

**2.13** a) La dimension est identique à celle de l'autre terme de la différence, soit $T^{-2}$.

**2.13** b) C'est le signe de $\dfrac{k}{m} - \omega^2$ qui indique la solution. Ici ce terme est négatif. Ce n'est donc pas l'équation de l'oscillateur harmonique ! La solution diverge : (b).

**2.13** c) C'est le signe de $\dfrac{k}{m} - \omega^2$ qui indique la solution. Ici ce terme est positif. C'est l'équation de l'oscillateur harmonique non amorti ! C'est la réponse (a).

**2.13** d) Comme $\omega^2 < \dfrac{k}{m}$, la solution est du type oscillateur harmonique : $x(t) = A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)$. L'application de $x(0) = 0$ implique que $A = 0$.

Ainsi, $\dot{x}(t) = B\Omega\cos(\Omega t)$ et la condition $\dot{x}(0) = v_0$ implique que $B\Omega = v_0$.
Finalement, $x(t) = \dfrac{v_0}{\Omega}\sin(\Omega t)$.

**2.13** e) La solution correspondant à $\omega^2 > \dfrac{k}{m}$ est de la forme $x(t) = A\cosh(\Omega t + \varphi)$. C'est une solution divergente ; le seul graphique qui représente une solution divergente est le (c).

# Fiche n° 3. Loi du frottement solide

## Réponses

**3.1** a) ..... c

**3.1** b) ..... b

**3.1** c) ..... c

**3.1** d) ..... a

**3.2** a) ..... Faux

**3.2** b) ..... Vrai

**3.2** c) ..... Faux

**3.3** ..... a

**3.4** a) ..... d

**3.4** b) ..... 2,8 N

**3.5** a) ..... −1,5 N

**3.5** b) ..... 3,2 N

**3.5** c) ..... Faux

**3.6** ..... c

**3.7** ..... d

**3.8** a) ..... $f_\mathrm{d}(F\sin(\alpha) - mg)$

**3.8** b) ..... a

**3.8** c) ..... $\ddot{x} = -f_\mathrm{d}g + \dfrac{F}{m}$

**3.9** a) ..... a

**3.9** b) ..... a

**3.9** c) ..... $-\left(x_0 + \dfrac{fmg}{k}\right)\omega_0 \sin(\omega_0 t)\overrightarrow{u_x}$

**3.9** d) ..... 384 ms

**3.9** e) ..... 3,0 cm

**3.10** a) ..... $\dfrac{1}{6}\left(8 - 7\dfrac{v^2}{gh}\right)$

**3.10** b) ..... 0,8

**3.11** a) ..... a

**3.11** b) ..... 1,6 ms

**3.11** c) ..... −70 µm

**3.12** a) ..... 5 s

**3.12** b) ..... 7 s

**3.12** c) ..... 350 N

**3.12** d) ..... 175 N

**3.12** e) ..... b

**3.12** f) ..... a

## Corrigés

**3.1** a) La brosse est animée d'un mouvement relatif par rapport au tableau elle ne peut donc être en situation d'adhérence et de plus sa forme de parallélépipède empêche toute possibilité de roulement. Elle glisse sur le tableau, réponse c.

.....

**3.1** b) Pour bien comprendre imaginons que les pneus du véhicule comportent en surface des points de peinture. Si le véhicule roule sur une route, alors le mouvement des roues va déposer les points de peinture sur la route : ceux-ci apparaissent nettement après le passage du véhicule : on pourrait dire métaphoriquement que le motif adhère au sol. On dit qu'il y a roulement sans glissement, car la roue adhère au sol. C'est bien le cas ici, donc réponse b.

**3.1** c) Pour bien comprendre imaginons que les pneus du véhicule comportent en surface des points de peinture. Si le véhicule à roue freine à tel point que les roues ne tournent plus alors on ne voit plus sur la route qu'une traînée colorée sans motif : l'un d'entre eux est étiré sur la route : on pourrait dire métaphoriquement qu'il glisse. Dans le cas où le véhicule dérape, on imagine très bien que les pneus crissent autrement dit les pneus glissent sur le sol. On dit que la voiture glisse car elle n'adhère pas au sol. C'est bien le cas ici, donc réponse (c). Lorsque la roue glisse mais maintient un mouvement de rotation autour de son axe malgré le dérapage, on dit qu'il y a roulement avec glissement.

**3.1** d) Le tapis roulant déplace le livre mais celui-ci n'a pas de mouvement relatif par rapport au tapis. La vitesse de glissement est donc nulle, la boîte adhère au tapis, réponse (a).

**3.2** a) Exprimons la vitesse du tapis en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ : $v_0 = 3{,}6\,\mathrm{km \cdot h^{-1}} = \dfrac{3\,600\,\mathrm{m}}{3\,600\,\mathrm{s}} = 1\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.
Ainsi, $\vec{v}_{\text{glissement}}(\text{valise/tapis}) = (v_1 - v_0)\vec{u_x} = 0\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Le valise de Sam ne glisse pas sur le tapis roulant.

**3.2** b) Déterminons la vitesse de la valise de Paul : $v_1 = \dfrac{p_1}{m} = \dfrac{8{,}0\,\mathrm{N \cdot s}}{15\,\mathrm{kg}} = 0{,}6\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$
Ainsi, $\vec{v}_{\text{glissement}}(\text{valise/tapis}) = (v_1 - v_0)\vec{u_x} = -0{,}3\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. La valise de Paul glisse sur le tapis.

**3.2** c) On a $\vec{v}_{\text{glissement}}(\text{valise/tapis}) = (v_1 - v_0)\vec{u_x} = -2\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Le sac d'Assia glisse sur le tapis.

**3.3** La réponse (c) est forcément exclue car les vecteurs $\vec{F}$ et $\vec{e_y}$ sont orthogonaux donc de produit scalaire nul. Le solide est à l'équilibre (immobile) donc la résultante des forces qui s'applique sur lui est nulle :

$$\vec{R_\mathrm{T}} + \vec{F} + \vec{R_\mathrm{N}} + \vec{P} = \vec{0}.$$

Par projection, on a d'une part $\vec{R_\mathrm{N}} + \vec{P} = \vec{0}$ sur l'axe verticale et d'autre part $\vec{R_\mathrm{T}} + \vec{F} = \vec{0}$ sur l'axe horizontal. En décomposant les forces à l'aide du repère introduit ces deux équations deviennent respectivement $\vec{R_\mathrm{N}} \cdot \vec{e_y} + \vec{P} \cdot \vec{e_y} = 0$ et $\vec{R_\mathrm{T}} \cdot \vec{e_x} + \vec{F} \cdot \vec{e_x} = 0$. En développant l'expression de la force poids et en considérant la valeur de la norme de la force de tension fournie par l'énoncé on obtient $\vec{R_\mathrm{N}} \cdot \vec{e_y} - mg = 0$ et $\vec{R_\mathrm{T}} \cdot \vec{e_x} + \left\|\vec{F}\right\| = 0$ soit $\vec{R_\mathrm{N}} \cdot \vec{e_y} = mg = 10\,\mathrm{N}$ et $\vec{R_\mathrm{T}} \cdot \vec{e_x} = -\left\|\vec{F}\right\| = -5\,\mathrm{N}$ . Les réponses (b) et (d) sont fausses, (a) est vraie.

**3.4** a) La projection du principe fondamental de la dynamique conduit aux relations suivantes :

$$\begin{cases} F - R_\mathrm{T} - mg\sin(\alpha) = 0 & (\mathrm{O}x) \\ R_\mathrm{N} - mg\cos(\alpha) = 0 & (\mathrm{O}y) \end{cases}$$

Nous obtenons donc $R_\mathrm{N} = mg\cos(\alpha)$. De plus, le solide est à la limite de glissement donc $R_\mathrm{T} = \mu_\mathrm{s} mg\cos(\alpha)$.
Ainsi, $F = R_\mathrm{T} + mg\sin(\alpha) = mg\cos(\alpha)(\mu_\mathrm{s} + \tan(\alpha))$ : c'est la réponse (d) qui est juste.

**3.4** b) On a $F = mg\cos(\alpha)(\mu_\mathrm{s} + \tan(\alpha)) = 0{,}35\,\mathrm{kg} \times 10\,\mathrm{m \cdot s^{-2}} \times \cos(20\,°)(0{,}5 + \tan(20\,°))$ puis $F = 2{,}8\,\mathrm{N}$.

**3.5** a) On a $T = -\left\|\vec{R}\right\|\sin(\alpha) = -3{,}5\,\mathrm{N} \times \sin(25°) = -1{,}5\,\mathrm{N}$.

**3.5** b) On a $N = \left\|\vec{R}\right\|\cos(\alpha) = -3{,}5\,\mathrm{N} \times \cos(25°) = 3{,}2\,\mathrm{N}$.

**3.5** c) D'après la loi de Coulomb, le cube ne glissera pas sur son support si, et seulement si :

$$\|\vec{T}\| < \mu_s \|\vec{N}\|.$$

Ici, on a $\|\vec{T}\| = 1{,}5\,\mathrm{N}$ et $\mu_s\|\vec{N}\| = 0{,}6 \times 3{,}2\,\mathrm{N} = 1{,}9\,\mathrm{N}$. Le cube ne glisse donc pas sur son support.

**3.6** Pour comparer les situations, il faut déterminer la valeur de $\alpha$ pour chacune d'elles, et le tout avec une même unité (choisissons les degrés). La situation (b) est évidente et donne $\alpha = 30°$. La situation (a) équivaut à $\alpha = \arctan 0{,}5 = 27°$. La situation (c) équivaut à $\alpha = \arctan 0{,}8 = 39°$. La situation (d) équivaut à $\alpha = \dfrac{\pi}{8} = 23°$. Le couple de solides ayant le plus grand cône de frottement est donc celui utilisé dans la situation (c).

**3.8** a) Notons que dans cette application, le glissement se fait suivant $+\vec{e_x}$ donc $T = \vec{T}\cdot\vec{e_x} < 0$ et $N = \vec{N}\cdot\vec{e_z} > 0$.

D'après la loi de Coulomb et la relation (1), on a $\|\vec{T}\| = |T| = f_\mathrm{d}(mg - F\sin(\alpha)) > 0$.
Nous en déduisons alors l'expression de $T$ : $T = -|T| = f_\mathrm{d}(F\sin(\alpha) - mg)$.

**3.8** b) D'après l'expression de $T$ et la relation (2), nous obtenons : $\ddot{x} = -f_\mathrm{d}g + \dfrac{F}{m}(\cos(\alpha) + f_\mathrm{d}\sin(\alpha))$.

**3.8** c) D'après la question précédente :

$$\ddot{x} = -f_\mathrm{d}g + \frac{F}{m}.$$

Nous pouvons voir que le poids va contribuer à ralentir la luge alors que la force de traction l'accélère.

**3.9** a) La solution de l'équation différentielle est la somme de la solution particulière $x_\mathrm{p}$ de l'équation totale et de la solution générale $x_\mathrm{g}$ de l'équation homogène :

$$x = x_\mathrm{p} + x_\mathrm{g} = -\frac{fmg}{k} + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t).$$

Les conditions à $t = 0$ imposent : $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$ Ainsi, $A = x_0 - \dfrac{fmg}{k}$ et $B = 0$.

Ainsi, la position du solide obéit à l'équation : $x(t) = \left(x_0 + \dfrac{fmg}{k}\right)\cos(\omega_0 t) - \dfrac{fmg}{k}$.

**3.9** b) La vitesse du solide dans le référentiel d'étude s'écrit : $\vec{v}(\text{solide})_{\mathcal{R}_0} = \dot{x}\vec{u_x} = -\left(x_0 + \dfrac{fmg}{k}\right)\omega_0\sin(\omega_0 t)\vec{u_x}$.

**3.9** c) La vitesse du support est nulle, donc la vitesse de glissement est la vitesse du solide. Nous en déduisons que $\vec{v}(\text{solide})_{\mathcal{R}_0} = -\left(x_0 + \dfrac{fmg}{k}\right)\omega_0\sin(\omega_0 t)\vec{u_x}$.

**3.9** d) La phase de glissement s'arrête dès que la vitesse de glissement s'annule à nouveau. On a alors

$$\vec{v}_{\text{glissement solide/support}}(t_1) = -\left(x_0 + \frac{fmg}{k}\right)\omega_0\sin(\omega_0 t)\vec{u_x} = 0.$$

Cela impose : $\sin(\omega_0 t_1) = 0$ donc $t_1 = \dfrac{\pi}{\omega_0}$.

Ainsi, $t_1 = \pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = \pi\sqrt{\dfrac{0{,}3\,\mathrm{kg}}{7\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}}} = 384\,\mathrm{ms}$.

**3.9** e) On a $x(t_1) = \left(x_0 + \dfrac{fmg}{k}\right)\cos\left(\omega_0 \dfrac{\pi}{\omega_0}\right) - \dfrac{fmg}{k}$ donc $x(t_1) = -\left(x_0 + \dfrac{fmg}{k}\right) - \dfrac{fmg}{k} = -x_0 - \dfrac{2fmg}{k}$.

Ainsi, $x(t_1) = 0{,}09\,\mathrm{m} - \dfrac{2 \times 0{,}2 \times 0{,}3\,\mathrm{kg} \times 10\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}}{20\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}} = 3{,}0\,\mathrm{cm}$.

.....

**3.10** a) On a $f_\mathrm{d} mgh = Mgh - \dfrac{1}{2}(m+M)v^2$ et donc

$$f_\mathrm{d} = \frac{M}{m} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{M}{m}\right)\frac{v^2}{gh} = \frac{4}{3} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{4}{3}\right)\frac{v^2}{gh} = \frac{1}{6}\left(8 - \frac{7v^2}{gh}\right).$$

.....

**3.10** b) On a : $f_\mathrm{d} = \dfrac{1}{6}\left(8 - \dfrac{7 \times \left(0{,}82\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\right)^2}{0{,}15\,\mathrm{m} \times 10\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}}\right) = 0{,}8$.

.....

**3.11** a) Par définition de la vitesse de glissement, on a

$$\vec{v}_\mathrm{glissement}(\text{palet/tapis}) = \vec{v}(\mathrm{G}, t) - \vec{v}_\mathrm{tapis} = (v(t) - v_0)\vec{e_x}.$$

.....

**3.11** b)

Le glissement s'arrête dès que la vitesse de glissement s'annule à savoir $v(t) = v_0$.
La vitesse du tapis $v_0$ peut être écrite dans la même unité que $v(t)$ : $v_0 = \dfrac{1260 \times 100\mathrm{cm}}{3\,600\,\mathrm{s}} = 35\,\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.
Reportons alors la valeur de $v_0$ sur le diagramme suivant afin de lire la date $t_1$.

Par lecture graphique : $t_1 = 1{,}6\,\mathrm{ms}$.

.....

**3.11** c)

La lecture graphique permet de déterminer que $x_1 = -70\,\mu\mathrm{m}$.

.....

**3.12** a) L'opérateur exerce une force de plus en plus importante sur l'armoire jusqu'à atteindre la valeur critique au delà de laquelle on passe d'une phase d'adhérence à une phase de glissement. L'armoire est immobile pendant la durée où la force croît jusqu'à la force limite, soit pendant environ 5 secondes.

.....

**3.12** b) Le sol exerce une force à peu près constante de l'instant $t = 5\,\mathrm{s}$ jusqu'à l'instant $t = 12\,\mathrm{s}$. Au-delà celle-ci s'annule : l'armoire ne glisse plus et s'immobilise. La phase de glissement dure donc $7\,\mathrm{s}$.

.....

**3.12** c) La phase statique s'arrête à l'instant $t = 5\,\mathrm{s}$ , et correspond à la valeur de force maximale exercée par l'opérateur, soit environ $350\,\mathrm{N}$.

.....

**3.12** d) La phase dynamique commence à l'instant $t = 5\,\mathrm{s}$. Au-delà, l'opérateur exerce une force constante en moyenne, de l'ordre de $175\,\mathrm{N}$.

.....

**3.12** e) La valeur de la force de réaction tangentielle maximale du sol sur l'armoire est la force maximale exercée par l'opérateur sur l'armoire, soit $R_{T,\mathrm{max}} = 350$ N. Or à la limite d'adhérence $R_{T,\mathrm{max}} = \mu_\mathrm{s} R_\mathrm{N} = \mu_\mathrm{s} mg$. D'où $\mu_\mathrm{s} = \dfrac{R_{T,\mathrm{max}}}{mg}$. En prenant $g = 10\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$, l'application numérique donne $\mu_\mathrm{s} \sim 0,5$. Réponse (b).

.....

**3.12** f) La valeur de la force de réaction tangentielle du sol sur l'armoire en glissement est la valeur de la force exercée par l'opérateur sur cette phase, soit $R_{T,\mathrm{gliss}} = 175\,\mathrm{N}$. Or en supposant l'armoire à l'équilibre mécanique lors du glissement on a $R_{T,\mathrm{gliss}} = \mu_\mathrm{d} R_\mathrm{N} = \mu_\mathrm{d} mg$. D'où $\mu_\mathrm{d} = \dfrac{R_{T,\mathrm{gliss}}}{mg}$. En prenant $g = 10\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$, l'application numérique donne $\mu_\mathrm{s} \sim 0,25$. Autre manière plus rapide de raisonner : la force appliquée en glissement est la moitié de la force maximale en adhérence, donc le coefficient de frottement est diminué de moitié entre les deux phases : $\mu_\mathrm{s} \sim 2\mu_\mathrm{d}$. Réponse (a).

.....

# Fiche n° 4. Électrostatique

## Réponses

**4.1** a) ..... $R\,\mathrm{d}\theta$

**4.1** b) ..... $2\pi R$

**4.1** c) ..... $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

**4.1** d) ..... $\pi R^2$

**4.1** e) ..... $\frac{4}{3}\pi R^3$

**4.2** a) ..... $\lambda_0 \ell$

**4.2** b) ..... $2\pi^2 q_0$

**4.3** a) ..... $+1\,000 \times e$

**4.3** b) ..... $L \times \ell$

**4.3** c) ..... $2{,}57 \times 10^{-15}\ \mathrm{C \cdot m^{-2}}$

**4.4** a) ..... $(\mathrm{O}, \vec{e_x} + \vec{e_y}, \vec{e_z})$, $(\mathrm{O}, \vec{e_x} - \vec{e_y}, \vec{e_z})$ et $(\mathrm{O}, \vec{e_x}, \vec{e_y})$

**4.4** b) ..... $(\mathrm{O}, \vec{e_x}, \vec{e_z})$ et $(\mathrm{O}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$

**4.5** a) ..... $6{,}5 \times 10^{-2}\ \mathrm{m^3}$

**4.5** b) ..... $3{,}3 \times 10^{-9}\ \mathrm{C}$

**4.5** c) ..... $7{,}9 \times 10^{-1}\ \mathrm{m^2}$

**4.5** d) ..... $6 \times 10^{-6}\ \mathrm{C}$

**4.6** a) ..... b

**4.6** b) ..... c

**4.6** c) ..... 0

**4.7** a) ..... b

**4.7** b) ..... b

**4.7** c) ..... d

**4.7** d) ..... b et c

**4.8** a) ..... $-2\vec{e_x} + 8\vec{e_y}$

**4.8** b) ..... $5\vec{e_y}$

**4.8** c) ..... b et c

**4.9** a) ..... $\vec{e_y}$

**4.9** b) ..... $\vec{e_z}$

**4.9** c) ..... d

**4.10** ..... b et d

**4.11** a) ..... c et d

**4.11** b) ..... a et d

**4.12** ..... c

**4.13** a) ..... d

**4.13** b) ..... c

**4.13** c) ..... b

**4.13** d) ..... $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \sqrt{\frac{z^2}{z^2 + R^2}}\right)$

**4.13** e) ..... $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

**4.13** f) ..... $\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 z^2}$

**4.14** a) ..... a et f

**4.14** b) ..... 0

**4.15** a) ..... d

**4.15** b) ..... c

**4.15** c) ..... $\underbrace{\frac{q}{2\varepsilon_0}}_{K}(1 - \cos\alpha)$

**4.15** d) ..... $1{,}8 \times 10^{-8}\ \mathrm{V \cdot m}$

**4.16** a) ..... $\boxed{4\pi r^2 E(r)}$

**4.16** b) ..... (c)

**4.16** c) ..... $\boxed{q \text{ et } 0}$

**4.17** a) ..... nulle

**4.17** b) ..... négative

**4.17** c) ..... nulle

**4.17** d) ..... positive

**4.18** a) ..... (a)

**4.18** b) ..... (c)

**4.19** a) ..... (b)

**4.19** b) ..... $V(a)$

**4.19** c) ..... $E_0 a(1 + \mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e}^{-1})$

**4.20** a) ..... (c)

**4.20** b) ..... $\boxed{\dfrac{1}{r}\left(1 + \dfrac{a\cos(\theta)}{2r}\right)}$

**4.20** c) ..... $\boxed{\dfrac{1}{r}\left(1 - \dfrac{a\cos(\theta)}{2r}\right)}$

**4.20** d) ..... $\boxed{\dfrac{qa\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$

**4.21** a) ..... (a)

**4.21** b) ..... positif

**4.21** c) ..... $1 \times 10^2\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}$.

**4.21** d) ..... (b)

**4.22** a) ..... $Q = 4\rho_0 \mathcal{A} H/3,\ \rho_\mathrm{m} = 2\rho_0/3$

**4.22** b) ..... $Q = \rho_0 \pi R^2 H/2,\ \rho_\mathrm{m} = \rho_0/2$

**4.22** c) ..... $Q = \rho_0 4\pi R^3,\ \rho_\mathrm{m} = 0$

**4.23** ..... (a)

**4.24** ..... 0

**4.25** ..... (a)

**4.26** a) ..... (d)

**4.26** b) ..... (b)

**4.27** a) ..... Courbe (3)

**4.27** b) ..... Courbe (1)

**4.27** c) ..... Courbe (2)

**4.28** ..... $\boxed{\dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\dfrac{h}{R(R+h)}}$

## Corrigés

**4.1** a) Comme $r$ et $z$ sont constants, donc $\mathrm{d}r$ et $\mathrm{d}z$ sont nuls ; ainsi $\mathrm{d}\mathcal{C} = R\,\mathrm{d}\theta$.

.....

**4.1** b) On a $\mathcal{C} = \displaystyle\int_0^{2\pi} R\,\mathrm{d}\theta = R\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = R[\theta]_0^{2\pi} = 2\pi R$.

.....

**4.1** d) On a $\mathcal{S} = \displaystyle\int_{r=0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^R r\,\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R [\theta]_0^{2\pi} = \frac{R^2}{2}\times 2\pi = \pi R^2$.

.....

**4.1** e) On a

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \int_{r=0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^R r^2\,\mathrm{d}r\int_0^\pi \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\\ &= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R \times \big[-\cos(\theta)\big]_0^\pi \times [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{R^3}{3}\times\big(-(-1-1)\big)\times 2\pi = \frac{4}{3}\pi R^3.\end{aligned}$$

.....

**4.2** a) On a $Q = \int_0^\ell \lambda_0 \,\mathrm{d}x = \lambda_0 \int_0^\ell \mathrm{d}x = \lambda_0 \big[x\big]_0^\ell = \lambda_0 \ell$.

.....

**4.2** b) On a $Q = \int_0^{2\pi} \lambda(\theta) a \,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} q_0 \frac{\theta}{a} a \,\mathrm{d}\theta = q_0 \int_0^{2\pi} \theta \,\mathrm{d}\theta = q_0 \left[\frac{\theta^2}{2}\right]_0^{2\pi} = 2\pi^2 q_0$.

.....

**4.3** a) Chaque électron porte la charge (négative) $-e$. En arrachant $N$ électrons de la feuille, celle-ci se charge positivement : on a $Q = +N \times e$, avec $N = 1\,000$.

.....

**4.3** b) La feuille est modélisée par un rectangle d'aire $S = L \times \ell$.

.....

**4.3** c) Il suffit de faire l'application numérique : $\sigma = 2{,}57 \times 10^{-15}\,\mathrm{C \cdot m^{-2}}$.

.....

**4.5** a) On a $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 6{,}5 \times 10^{-2}\,\mathrm{m^3}$, en écriture scientifique, et en gardant deux chiffres significatifs.

.....

**4.5** b) La densité volumique de charge est uniforme donc la charge totale est donnée par

$$Q = \rho_0 V = 3{,}3 \times 10^{-9}\,\mathrm{C},$$

en écriture scientifique, et en ne gardant que deux chiffres significatifs.

.....

**4.5** c) On a $\mathcal{A} = 4\pi R^2 = 7{,}9 \times 10^{-1}\,\mathrm{m^2}$, en écriture scientifique, et en gardant deux chiffres significatifs.

.....

**4.5** d) La densité surfacique de charge étant uniforme, $Q = \sigma\mathcal{A} = 6 \times 10^{-6}\,\mathrm{C}$, en écriture scientifique, et en ne gardant qu'un chiffre significatif (autant que la donnée qui possède le moins de chiffres significatifs).

.....

**4.6** a) L'élément de surface $\mathrm{d}S = R\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$ est la multiplication du déplacement élémentaire $R\,\mathrm{d}\theta$ le long de la circonférence d'un cercle de rayon $R$ et d'axe $(\mathrm{O}z)$ du tube et du déplacement élémentaire $\mathrm{d}z$ le long de l'axe $(\mathrm{O}z)$.

.....

**4.6** b) On a $Q = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{H} \sigma(\theta) R \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$.

.....

**4.6** c) On a $Q = \sigma_0 R H \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta = 0$. Le tube n'est globalement pas chargé. Ce résultat était attendu puisque la densité surfacique de charge est $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos(\theta)$ (les charges positives et négatives se répartissent de manière égale sur sa surface).

.....

**4.7** d) Le cylindre étant désormais infini, la distribution devient invariante par translation suivant $(\mathrm{O}z)$.

.....

**4.8** a) Le principe de superposition assure que le champ électrostatique total en $\mathrm{M}_1$ est la somme des champs produits par les deux sources.

.....

**4.8** c) Le point $\mathrm{M}_3$ est le symétrique du point $\mathrm{M}_1$ par rapport au plan $\mathcal{P}$. Ainsi, le vecteur-champ en $\mathrm{M}_3$ est le symétrique du vecteur-champ en $\mathrm{M}_1$ par rapport au plan $\mathcal{P}$. Enfin, le point $\mathrm{M}_2$ appartient à ce plan de symétrie donc le vecteur-champ au point $\mathrm{M}_2$ appartient également à ce plan de symétrie.

.....

**4.9** a) La projection du vecteur $\vec{e_y}$ est nulle sur le plan $(\Pi_1)$, donc $\vec{e_y}$ est normal à ce plan.

**4.9** b) La projection du vecteur $\vec{e_z}$ est nulle sur le plan $(\Pi_2)$, donc $\vec{e_z}$ est normal à ce plan.

**4.9** c) En un point M d'un plan d'antisymétrie de la distribution de charge, le champ électrostatique est perpendiculaire à ce plan. Par exemple, si le point M est sur l'axe $(\mathrm{O}x)$, appartenant au plan $(\Pi_2)$, le champ électrostatique est suivant l'axe $(\mathrm{O}z)$ : $\vec{E}(\mathrm{M}) = E(\mathrm{M})\vec{e_z}$.

**4.10** Le plan $(\mathrm{M}, \vec{e_x}, \vec{e_y})$ est un plan de symétrie donc $\vec{E}(\mathrm{M}) = E_x(x,y,z)\vec{e_x} + E_y(x,y,z)\vec{e_y}$. Enfin, l'invariance par translation selon $\vec{e_z}$ permet d'affirmer que les composantes $E_x$ et $E_y$, et donc la norme $\left\|\vec{E}\right\|$, de $\vec{E}(\mathrm{M})$ ne dépendent pas de $z$.

**4.13** a) En repérage cylindrique, le déplacement élémentaire est $\vec{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}r\vec{e_r} + r\,\mathrm{d}\theta\vec{e_\theta} + \mathrm{d}z\vec{e_z}$. Sur le disque, $z$ est fixé (à 0) donc l'aire s'obtient en multipliant les deux composantes non nulles du vecteur-déplacement élémentaire $\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$.

**4.13** b) Par relation de Chasles, on a $\overrightarrow{\mathrm{PM}} \cdot \vec{e_z} = (\overrightarrow{\mathrm{PO}} + \overrightarrow{\mathrm{OM}}) \cdot \vec{e_z} = r\vec{e_r} \cdot \vec{e_z} + z\vec{e_z} \cdot \vec{e_z} = 0 + z$.

**4.13** c) On a $\overrightarrow{\mathrm{PM}} = \overrightarrow{\mathrm{PO}} + \overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\vec{e_r} + z\vec{e_z}$ donc $\mathrm{PM} = \sqrt{\overrightarrow{\mathrm{PM}}^2} = \sqrt{\overrightarrow{\mathrm{PM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PM}}} = \sqrt{z^2 + r^2}$.

**4.13** d) En séparant les variables et en effectuant le changement de variable $u = r^2$ (d'où $\mathrm{d}u = 2r\,\mathrm{d}r$), il vient :

$$E_z = \frac{\sigma z}{8\pi\varepsilon_0} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \mathrm{d}\theta \times \int_{u=0}^{u=R^2} (u+z^2)^{-3/2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sigma z}{4\varepsilon_0}\left[-2(u+z^2)^{-1/2}\right]_{u=0}^{u=R^2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+R^2/z^2}}\right).$$

**4.13** e) On a $\sqrt{1+R^2/z^2} \xrightarrow[R/z\to+\infty]{} \infty$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{1+R^2/z^2}} \xrightarrow[R/z\to\infty]{} 0$. Ainsi, $E_z \xrightarrow[R/z\to\infty]{} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

**4.13** f) Le développement limité fourni permet d'écrire :

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{R^2}{z^2}}} = \left(1+\frac{R^2}{z^2}\right)^{-1/2} \underset{R/z\to 0}{=} 1 - \frac{R^2}{2z^2} \quad \text{d'où} \quad E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - 1 + \frac{R^2}{2z^2}\right] = \overbrace{\pi R^2 \sigma}^{Q_0} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 z^2},$$

ce qui correspond bien au champ créé par une charge ponctuelle de charge $Q_0$ et distante de $z$ du point d'observation.

**4.15** a) L'aire d'un élément de surface d'une sphère de rayon $r$ est $\mathrm{d}S = r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$. Ici, le rayon de la calotte est $R$ donc la variable $r$ est fixée à $R$. En conclusion, $\mathrm{d}S = R^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$.

**4.15** b) Pour rappel, la colatitude $\theta$ est définie sur $[0,\pi]$ quand la longitude $\varphi$ est décrite sur $[0,2\pi]$.
Pour décrire/paramétriser la calotte, on peut procéder de la sorte : on considère un point $\mathrm{M}(R,\theta,\varphi)$ sur la calotte, et on lui fait faire un tour complet autour de l'axe $(\mathrm{O}z)$ : $\varphi$ a parcouru l'intervalle $[0,2\pi]$ en décrivant un cercle.
Ensuite, la calotte peut être vue comme un « accolage » de cercles de rayon allant de $R\sin\alpha$ à 0 (le cercle de rayon nul étant confondu avec un point de l'axe $(\mathrm{O}z)$). En d'autres termes, cela implique que $\theta \in [\pi-\alpha, \pi]$.
Ainsi, pour totalement parcourir la calotte, il faut $\varphi \in [0,2\pi]$ et $\theta \in [\pi-\alpha,\pi]$. Il vient

$$\phi = \int_{\theta=\pi-\alpha}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \vec{E} \cdot R^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_r.$$

**4.15** c) Le champ $\vec{E}$ est celui sur la calotte sphérique, soit en $r = R$. Ainsi, on a

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \times R^2 \int_{\theta=\pi-\alpha}^{\pi} \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \qquad \text{donc} \qquad \phi = \underbrace{\frac{q}{2\varepsilon_0}}_{K}(1-\cos\alpha).$$

.....

**4.15** d) Pour $\alpha = \pi$ et $q = e$, on a $\phi = \dfrac{e}{\varepsilon_0}$. Donc, après calcul, $\phi = 1{,}8 \times 10^{-8}\,\mathrm{V\cdot m}$.

.....

**4.16** a) On a $\phi(\vec{E}) = \oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = 4\pi r^2 E(r)$.

.....

**4.16** b) Le théorème de Gauss assure que $\phi(\vec{E}) = Q/\varepsilon_0$ donc $Q = \varepsilon_0\phi(\vec{E}) = \varepsilon_0 4\pi r^2 E(r) = q\left(1+\dfrac{r}{a}\right)\mathrm{e}^{-r/a}$.

.....

**4.18** a) Le gradient est dirigé dans le sens des potentiels croissants, orthogonalement aux équipotentielles.

.....

**4.18** b) Comme $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$, la direction du champ est opposée à celle du gradient.

.....

**4.19** a) Le segment AB a une pente constante $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{2a-0}{2a-a} = 2$. Or, cette dernière correspond à $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Ainsi, $\mathrm{d}y = 2\,\mathrm{d}x$.

.....

**4.19** b) Pour $x > 0$, le champ $\vec{E}$ est orienté suivant $+\vec{e_x}$. Il s'agit donc du sens des potentiels décroissants. Comme $2a > a$, $V(2a) < V(a)$. $V(a)$ est donc le potentiel le plus élevé.

.....

**4.19** c) Le champ étant porté par $\vec{e_x}$, on a $\vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = E_x dx$. On a alors

$$V(\mathrm{A}) - V(\mathrm{B}) = \int_a^{2a} E_0\left(1-\mathrm{e}^{-x/a}\right)dx = E_0\left[x + a\mathrm{e}^{-x/a}\right]_a^{2a} = E_0 a(1+\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{-1}).$$

.....

**4.20** a) On a $\mathrm{AM}^2 = \|\overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{AO}}\|^2 = \|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\|^2 + \|\overrightarrow{\mathrm{AO}}\|^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}} = r^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 - ar\cos(\theta)$.

.....

**4.20** b) On a $\dfrac{1}{\mathrm{AM}} = \dfrac{1}{r}\left(1 + \left(\dfrac{a}{2r}\right)^2 - \dfrac{a\cos(\theta)}{r}\right)^{-1/2}$. On utilise ensuite l'approximation $(1+\varepsilon)^\alpha = 1 + \alpha\varepsilon$ à l'ordre 1 en $\varepsilon$ autour de 0. À l'ordre 1 en $\dfrac{a}{r}$, on trouve $\dfrac{1}{\mathrm{AM}} \simeq \dfrac{1}{r}\left(1 + \dfrac{a\cos(\theta)}{2r}\right)$.

.....

**4.20** c) De manière similaire, $\mathrm{BM}^2 = r^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + ar\cos(\theta)$ donc $\dfrac{1}{\mathrm{BM}} = \dfrac{1}{r}\left(1 + \left(\dfrac{a}{2r}\right)^2 + \dfrac{a\cos(\theta)}{r}\right)^{-1/2}$ et à l'ordre 1 en $\dfrac{a}{r}$, on trouve $\dfrac{1}{\mathrm{BM}} \simeq \dfrac{1}{r}\left(1 - \dfrac{a\cos(\theta)}{2r}\right)$.

.....

**4.20** d) On a $V(\mathrm{M}) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{\mathrm{AM}} - \dfrac{1}{\mathrm{BM}}\right) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1 + \dfrac{a\cos(\theta)}{2r} - 1 + \dfrac{a\cos(\theta)}{2r}\right) = \dfrac{qa\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$.

.....

**4.21** a) Les lignes de champ électrostatique sont orientées vers les charges négatives.

.....

**4.21** b) Sachant que $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$, le champ électrostatique pointe vers les valeurs de potentiel décroissantes, d'où le signe $+$.

.....

**4.21** c) En appelant $A_{100}$ et $A_{200}$ les projetés respectifs de A sur les équipotentielles de 100 V et 200 V, alors la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V = -\dfrac{\partial V}{\partial z}\vec{e_z}$ (car ici $\vec{E}(\text{A})$ est selon $\vec{e_z}$) permet d'approximer la norme du champ en A :

$$E(\text{A}) = \frac{V(\text{A}_{200}) - V(\text{A}_{100})}{z_{\text{A}_{200}} - z_{\text{A}_{100}}} = \frac{200 - 100}{2{,}5\,\text{division} \times 40\,\text{cm}\cdot\text{division}^{-1}} = 1 \times 10^2\,\text{V}\cdot\text{m}^{-1}.$$

.....

**4.21** d) Du fait de la verticalité de l'individu par rapport à l'horizontalité du sol, les équipotentielles sont davantage resserrées en B qu'en A ; ainsi, le champ électrostatique est plus intense en B qu'en A : c'est l'effet de pointe.

.....

**4.22** a) Sachant que $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, une séparation des variables conduit à :

$$Q = \rho_0 \iint_{\mathcal{A}} \mathrm{d}S \int_{z=-H}^{z=H} \left(1 - \frac{z^2}{H^2}\right) \mathrm{d}z = \rho_0 \mathcal{A} \left[z - \frac{z^3}{3H^2}\right]_{-H}^{H} = 4\rho_0 \mathcal{A} H/3\,.$$

Le volume du pavé est $2H\mathcal{A}$ donc la charge volumique moyenne s'exprime comme : $\rho_\text{m} = 2\rho_0/3$.

.....

**4.22** b) Sachant que $\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$, une séparation des variables conduit à :

$$Q = \rho_0 \int_{r=0}^{r=R} \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right) \mathrm{d}r \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \mathrm{d}\theta \int_{z=0}^{z=H} \mathrm{d}z = \rho_0 \left[\frac{r}{2} - \frac{r^4}{4R^2}\right]_0^R \big[\theta\big]_0^{2\pi} \big[z\big]_0^H = \rho_0 \pi R^2 H/2.$$

Le volume du cylindre est $\pi R^2 H$ donc la charge volumique moyenne s'exprime comme : $\rho_\text{m} = \rho_0/2$.

.....

**4.22** c) Sachant que $\mathrm{d}V = r^2 \sin(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$, une séparation des variables conduit à :

$$Q = \rho_0 R^2 \int_{r=0}^{r=+\infty} \mathrm{e}^{-r/R}\,\mathrm{d}r \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \mathrm{d}\varphi = \rho_0 R^2 \big[-R\mathrm{e}^{-r/R}\big]_0^{+\infty} \big[-\cos(\theta)\big]_0^{\pi} \big[\varphi\big]_0^{2\pi} = \rho_0 4\pi R^3.$$

Le volume de l'espace étant infini mais la charge totale finie, la charge volumique moyenne est nulle : $\rho_\text{m} = 0$.

.....

**4.24** On a $\operatorname{div} \vec{E}_1 = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(r\frac{\alpha}{r})}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial 0}{\partial \theta} + \dfrac{\partial 0}{\partial z} = 0 + 0 + 0.$

.....

**4.26** a) Le gradient est dirigé dans le sens des potentiels croissants, orthogonalement aux équipotentielles.

.....

**4.26** b) Comme $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$, la direction du champ est opposée à celle du gradient.

.....

**4.27** a) Le potentiel s'annule en $r = r_0$, est positif pour $r < r_0$ et négatif pour $r > r_0$.

.....

**4.27** b)

- Pour $0 \leqslant r \leqslant R$, l'expression fournie est celle d'un polynôme de degré 2 en $r$ dont la représentation graphique est une parabole. Ici, le coefficient devant $r^2$ est négatif donc la parabole est orientée vers les valeurs négatives.
- Pour $r \geqslant R$, l'expression fournie est une fonction inverse dont la représentation graphique est une branche d'hyperbole.

Les deux expressions prennent la même valeur en $r = R$ : la fonction est continue.

.....

**4.27** c) L'équation fournie est celle d'une droite décroissante dont l'ordonnée à l'origine est non nulle : le potentiel décroît de manière affine. Seule la courbe (2) correspond à un tel cas.

.....

**4.28** Sachant que $\mathrm{d}\tau = r^2 \sin(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$, une séparation des variables conduit à :

$$\mathcal{E} = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0}\int_{r=R}^{r=R+h}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\mathrm{d}\varphi = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_R^{R+h}\big[-\cos(\theta)\big]_0^{\pi}\big[\varphi\big]_0^{2\pi} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{h}{R(R+h)}.$$

.....

# Fiche n° 5. Magnétostatique

## Réponses

**5.1** a) ..... a et d

**5.1** b) ..... d

**5.1** c) ..... a

**5.2** ..... $2j_0 S \dfrac{b}{a}$

**5.3** ..... $j_{\mathrm{s},0}\ell$

**5.4** a) ..... d

**5.4** b) ..... $4\pi R^2 j_r(R)$

**5.5** ..... b et c

**5.6** a) ..... a, c et d

**5.6** b) ..... b, c et d

**5.6** c) ..... a, c et d

**5.7** a) ..... $4d\ell j_0$

**5.7** b) ..... a et c

**5.7** c) ..... b

**5.8** a) ..... $-\mu_0 n_2 I_2 \overrightarrow{e_y}$

**5.8** b) ..... d

**5.9** ..... d

**5.10** ..... 2

**5.11** a) ..... 2

**5.11** b) ..... b

**5.12** a) ..... $4Bd$

**5.12** b) ..... $-2Bd$

**5.12** c) ..... $\dfrac{7\pi}{2}Bd$

**5.13** a) ..... $I$

**5.13** b) ..... $0$

**5.13** c) ..... $-I$

**5.13** d) ..... $4I$

**5.14** a) ..... a et e

**5.14** b) ..... $0$

**5.15** a) ..... $0$

**5.15** b) ..... $-Bax$

**5.15** c) ..... $-Ba^2$

**5.16** a) ..... b

**5.16** b) ..... $\dfrac{\mu_0 NI}{2\pi r}$

**5.16** c) ..... $\dfrac{\mu_0 NIa}{2\pi}\ln\left(\dfrac{R+a/2}{R-a/2}\right)$

**5.17** a) ..... $1\times 10^1\ \mathrm{T}$

**5.17** b) ..... $4\times 10^2\ \mathrm{Wb}$

**5.17** c) ..... $3\times 10^2\ \mathrm{Wb}$

**5.18** a) ..... c

**5.18** b) ..... $\dfrac{\mu_0\overrightarrow{\mathcal{M}}}{2\pi z^3}$

**5.19** ..... d

**5.20** a) ..... $mB_{\mathrm{ext}}$

**5.20** b) ..... $\dfrac{mB_{\mathrm{ext}}}{Mg}$

**5.21** a) ..... $-\overrightarrow{e_z}$

**5.21** b) ..... $+\overrightarrow{e_z}$

**5.21** c) ..... $+\overrightarrow{e_z}$

**5.21** d) ..... $+\overrightarrow{e_z}$

**5.22** a) ..... $\boxed{-\dfrac{\mu_0 I m}{2\pi r^2}\vec{e_r}}$

**5.22** b) ..... (b)

**5.23** ..... (c)

**5.24** ..... (a)

**5.25** a) ..... (d)

**5.25** b) ..... $\boxed{-\dfrac{e}{T}\underbrace{\pi r^2 \vec{e_z}}_{\vec{S}}}$

**5.25** c) ..... $\boxed{-\dfrac{e}{2m_\mathrm{e}}}$

**5.25** d) ..... (b)

**5.26** a) ..... $\boxed{\dfrac{\mu_0 I \ell}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}}$

**5.26** b) ..... $\boxed{\dfrac{\mu_0}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}}$

**5.26** c) ..... $\boxed{\dfrac{\mu_0 I^2 \ell}{4\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}}$

**5.26** d) ..... $\boxed{\dfrac{\mu_0}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}}$

## Corrigés

**5.1** a) L'intensité du courant s'exprime en fonction des densité surfacique et volumique de courant grâce aux relations $I = \iint \vec{j}\cdot\vec{\mathrm{d}S}$ et $I = \int \vec{j_\mathrm{s}}\cdot\vec{\mathrm{d}\ell}$.

.....

**5.1** b) On note $j$ la norme du vecteur $\vec{j}$. On a $I = \iint \vec{j}\cdot\vec{\mathrm{d}S}$ donc $\mathrm{I} = [j]\times\mathrm{L}^2$ et donc $[j] = \mathrm{I}\cdot\mathrm{L}^{-2}$.

.....

**5.1** c) On note $j_\mathrm{s}$ la norme du vecteur $\vec{j_\mathrm{s}}$. On a $I = \int \vec{j_\mathrm{s}}\cdot\vec{\mathrm{d}\ell}$ donc $\mathrm{I} = [j_\mathrm{s}]\times\mathrm{L}$ et donc $[j_\mathrm{s}] = \mathrm{I}\cdot\mathrm{L}^{-1}$.

.....

**5.2** On a $I = \iint \vec{j}\cdot\vec{\mathrm{d}S} = \iint j_0\vec{e_z}\cdot\mathrm{d}S\vec{e_z} = \int_0^a j_0\dfrac{b}{r}2\pi r\,\mathrm{d}r = 2\pi j_0 b\times a$, soit $I = 2j_0 S\dfrac{b}{a}$, avec $S = \pi a^2$.

.....

**5.3** On a $I = \int \vec{j_\mathrm{s}}\cdot\vec{\mathrm{d}\ell} = \int_0^\ell j_{\mathrm{s},0}\vec{e_\theta}\cdot\mathrm{d}z\vec{e_\theta} = \int_0^\ell j_{\mathrm{s},0}\,\mathrm{d}z = j_{\mathrm{s},0}\ell$.

.....

**5.4** a) Le courant de particules chargées est radial : le vecteur densité de courant électrique $\vec{j}$ est radial, c'est-à-dire porté par $\vec{e_r}$ : $\vec{j} = j_r(r,\theta,\varphi)$. Aussi, l'émission est isotrope donc il y a invariance de la distribution de courant électrique par rotation autour du point O : la composante $j_r$ n'est une fonction que de $r$. Il vient : $\vec{j} = j_r(r)\vec{e_r}$.

.....

**5.4** b) L'intensité du courant électrique traversant une surface élémentaire de vecteur surface élémentaire $\vec{\mathrm{d}S} = r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\vec{e_r}$ est $\mathrm{d}I_r = \vec{j}\cdot\vec{\mathrm{d}S} = j_r(r)r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$. Cette grandeur est uniforme sur une sphère de rayon $R$ (de surface $4\pi R^2$) donc $I_R = 4\pi R^2 j_r(R)$.

.....

**5.5** Les plans $(x\mathrm{O}y)$ et $(x\mathrm{O}z)$ sont des plans d'antisymétrie de la distribution car les courants de la distribution sont répartis de manière strictement opposée de part et d'autre de chacun de ces plans. Par ailleurs, la longueur du solénoïde n'intervient pas dans l'étude des symétries d'une distribution, mais doit être considérée lors d'une étude de ses invariances.

.....

**5.6** a) En tout point M du plan $(x\mathrm{O}y)$, plan d'antisymétrie pour la distribution, le champ magnétostatique appartient à ce plan. C'est bien le cas pour le point O et les différents points $\mathrm{P}_i$. Il est alors possible d'écrire : $\vec{B}(\mathrm{M}) = B_x(\mathrm{M})\vec{e_x} + B_y(\mathrm{M})\vec{e_y}$. Par ailleurs, le vecteur $\vec{e_z}$ est bien normal au plan $(x\mathrm{O}y)$.

.....

**5.6** b) Le vecteur $\vec{e_x}$ est bien normal au plan $(y\mathrm{O}z)$. En tout point M du plan $(y\mathrm{O}z)$, plan de symétrie pour la distribution, le champ magnétostatique est perpendiculaire à ce plan, donc est selon $\pm\vec{e_x}$. Il est alors possible d'écrire : $\vec{B}(\mathrm{M}) = B_x(\mathrm{M})\vec{e_x}$. Les différents points $\mathrm{P}_i$ n'appartiennent pas à ce plan, donc rien ne peut en être déduit sur le champ en ces points.

.....

**5.6** c) Il faut bien préciser que c'est en tout point M du plan $(x\mathrm{O}z)$, plan de symétrie pour la distribution, que le champ magnétostatique est perpendiculaire à ce plan. C'est bien le cas pour le point O mais pas pour les différents points $\mathrm{P}_i$ (qui n'appartiennent pas à ce plan). Il est alors possible d'écrire : $\vec{B}(\mathrm{M}) = B(\mathrm{M})\vec{e_y}$.

Le point O appartient aux plans de symétrie $(x\mathrm{O}z)$ et $(y\mathrm{O}z)$ donc le champ en ce point doit être perpendiculaire à ces deux plans : il est nécessairement nul.

Puisque le plan $(x\mathrm{O}y)$ est un plan d'antisymétrie pour la distribution, en tout point de ce plan le champ magnétostatique appartient à ce plan. C'est bien le cas pour les différents points $\mathrm{P}_i$. Il est alors possible d'écrire :

$$\vec{B}(\mathrm{P}_i) = B_x(\mathrm{P}_i)\vec{e_x} + B_y(\mathrm{P}_i)\vec{e_y}.$$

De plus, puisque le plan $(y\mathrm{O}z)$ est un plan de symétrie pour la distribution, c'est un plan d'antisymétrie pour le champ magnétostatique. Tout cela permet alors d'écrire : $B_y(\mathrm{P}_2) = -B_y(\mathrm{P}_1)$ et $B_x(\mathrm{P}_2) = B_x(\mathrm{P}_1)$, mais pas $\vec{B}(\mathrm{P}_2) = -\vec{B}(\mathrm{P}_1)$ ! En bref, il est aussi possible d'écrire : $\vec{B}(\mathrm{P}_2) = -\mathrm{sym}\big(\vec{B}(\mathrm{P}_1)\big)$, où « sym » représente l'opération de symétrie par rapport au plan $(y\mathrm{O}z)$.

.....

**5.7** a) On a $I = \iint_\Sigma \vec{j}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iint_S j_0\vec{e_x}\cdot\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\vec{e_x} = j_0 \times 2\ell \times 2d = 4j_0\ell d$.

.....

**5.7** b) Le vecteur densité volumique de courant est $\vec{j} = j_0\vec{e_x}$ et $j_0$ est constant donc la distribution est invariante par translation suivant $(\mathrm{O}x)$ et $(\mathrm{O}y)$. La couche étant finie, elle n'est pas invariante par translation suivant $(\mathrm{O}z)$, et encore moins par rotation autour de cet axe, le vecteur $\vec{j}$ étant porté par $\vec{e_x}$.

.....

**5.7** c) La distribution est invariante par translation suivant les axes $(\mathrm{O}x)$ et $(\mathrm{O}y)$, donc la composante $B_y$ du champ ne dépend que de $z$.

.....

**5.8** a) En tenant compte du sens du courant, on a $\vec{B_2}(\mathrm{O}) = -\mu_0 n_2 I_2\vec{e_y}$, où $n_2$ est le nombre de spires par unité de longueur du solénoïde (2).

.....

**5.8** b) D'après le théorème de superposition, on a $\vec{B}(\mathrm{O}) = \vec{B_1}(\mathrm{O}) + \vec{B_2}(\mathrm{O})$ donc $\vec{B}(\mathrm{O}) = \mu_0(n_1 I_1\vec{e_x} - n_2 I_2\vec{e_y})$.

.....

**5.9** Sachant que la force magnétique s'exprime comme $\vec{F} = q\vec{v}\wedge\vec{B}$ alors le produit $qvB$ est homogène à une force. Si l'égalité $B = \dfrac{mv}{qR}$ est vraisemblable alors $qv \times B = qv \times \dfrac{mv}{qR} = \dfrac{mv^2}{R}$ serait homogène à une force. Or, $mv^2$ est homogène à une énergie puisque l'énergie cinétique s'exprime comme $\dfrac{mv^2}{2}$. De plus, d'après l'expression du travail élémentaire $\delta W = \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ d'une force $\vec{F}$ constante, une énergie divisée par une longueur correspond à une force. Finalement, le rapport $\dfrac{mv^2}{R}$ est donc bien homogène à une force et la relation $B = \dfrac{mv}{qR}$ est vraisemblable du point de vue de l'analyse dimensionnelle. Bien sûr, d'autres raisonnements sont possibles en se basant sur d'autres relations !

.....

**5.10** Le champ magnétique est linéaire pour $0 < r < a$ et hyperbolique pour $r > a$.

.....

**5.11** a) Sachant que $B_y = kx \neq 0$ pour tout $\mathrm{M}(x, y, z)$ alors le vecteur champ magnétostatique ne peut pas être constamment parallèle à $\overrightarrow{e_x}$, ce qui élimine la carte de champ (3). En prenant les points de l'espace où $x = 0$, le vecteur champ magnétostatique doit s'écrire comme $\overrightarrow{B}(\mathrm{M}) = ky\overrightarrow{e_x}$ : les vecteurs champs le long de cette ligne doivent être perpendiculaires à cette ligne. Parmi les cartes de champ (1), (2) et (4) restantes, seule la (2) possède cette propriété.

Autre méthode possible : En prenant les points de l'espace où $y = 0$, le vecteur champ magnétostatique doit s'écrire comme $\overrightarrow{B}(\mathrm{M}) = kx\overrightarrow{e_y}$ : les vecteurs champs le long de cette ligne doivent être perpendiculaires à cette ligne. Seule la carte de champ (2) possède cette propriété.

.....

**5.11** b) Le flux magnétostatique est conservatif donc le resserrement des lignes de champ constaté de M à N permet d'affirmer que le champ magnétostatique est plus intense au point N qu'au point M.

.....

**5.12** a) Le calcul de la circulation du champ magnétostatique de A à C se décompose en deux.

- D'une part sur [AB] : $\mathcal{C}_{\mathrm{AB}} = \displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = 0$ (chemin perpendiculaire aux lignes de champ).
- D'autre part, sur [BC] on a
$$\mathcal{C}_{\mathrm{BC}} = \int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = 4Bd \text{ (chemin parallèle aux lignes de champ).}$$

.....

**5.12** b) D'une part sur [AB] : $\mathcal{C}_{\mathrm{AB}} = \displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = -8Bd$. Seule la projection de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ sur la ligne de champ doit être prise en compte. Le signe moins provient du sens de $\overrightarrow{B}$ par rapport à celui de la projection de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. D'autre part sur [BC] : $\mathcal{C}_{\mathrm{BC}} = \displaystyle\int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = 6Bd$.

.....

**5.12** c) D'une part sur [AB] : $\mathcal{C}_{\mathrm{AB}} = \displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \frac{7\pi d}{2}B$. Le chemin [AB] est un demi-cercle de longueur $\dfrac{7\pi d}{2}$. D'autre part sur [BC] : $\mathcal{C}_{\mathrm{BC}} = \displaystyle\int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = 0$ (chemin perpendiculaire aux lignes de champ).

.....

**5.13** a) Le contour enlace le fil. L'orientation du contour et le sens de $I$ sont tels que $I_{\mathrm{enl}} = +I$.

.....

**5.13** b) Le contour n'enlace pas le fil donc $I_{\mathrm{enl}} = 0$, quels que soient l'orientation du contour et le sens de $I$.

.....

**5.13** c) Le contour enlace le fil. L'orientation du contour et le sens de $I$ sont tels que $I_{\mathrm{enl}} = -I$.

.....

**5.13** d) Le fil est positionné de façon telle que le courant passe quatre fois « à l'intérieur » du contour. L'orientation du contour et le sens de $I$ sont tels que $I_{\mathrm{enl}} = +4I$.

.....

**5.14** a) Le produit scalaire $\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$ est positif lorsque le champ $\overrightarrow{B}$ et le vecteur surface élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ (donné par l'orientation de la surface) pointent globalement dans la même direction (ils forment ainsi un angle aigu, c'est-à-dire compris entre 0 et 90°).

Pour le cas (a), le champ $\overrightarrow{B}$ est vertical et vers le haut. De même, le vecteur surface élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ est vertical et orienté vers le haut (d'après l'orientation du contour). Finalement : $\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} > 0$, soit $\phi > 0$.

Pour le cas (b), le champ $\vec{B}$ est vertical et vers le bas. Par contre, le vecteur surface élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ est vertical et orienté vers le haut (d'après l'orientation du contour). Finalement : $\vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} < 0$, soit $\phi < 0$.

Pour le cas (c), le champ $\vec{B}$ est vertical et vers le haut. Par contre, le vecteur surface élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ est vertical et orienté vers le bas (d'après l'orientation du contour). Finalement : $\vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} < 0$, soit $\phi < 0$.

Pour le cas (e), le champ $\vec{B}$ pointe globalement vers le bas. Par ailleurs, le vecteur surface élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ est vertical et orienté vers le bas (d'après l'orientation du contour). Finalement : $\vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} > 0$, soit $\phi > 0$.

Pour le cas (f), le champ $\vec{B}$ pointe globalement vers le haut. Par ailleurs, le vecteur surface élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ est vertical et orienté vers le bas (d'après l'orientation du contour). Finalement : $\vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} < 0$, soit $\phi < 0$.

.....

**5.14** b) Pour le cas (d), le champ $\vec{B}$ est horizontal. Par contre, le vecteur surface élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ est vertical. Finalement : $\vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = 0$, soit $\phi = 0$. Aucune ligne de champ ne passe à travers la surface orientée, donc le flux est nécessairement nul.

.....

**5.15** a) À ce sens de parcours de la spire est associé le vecteur normal $\vec{n}$ opposé au champ magnétostatique. D'où $\phi(\vec{B}) = \iint_\Sigma \vec{B} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = -\iint_\Sigma B\,\mathrm{d}S$ en notant $\Sigma$ l'intersection entre le plan de la spire et la zone de champ.

Pour $x < 0$ on a donc $\phi(\vec{B}) = 0$.

.....

**5.15** b) Le champ $\vec{B}$ est uniforme donc on a $\phi(\vec{B}) = -B\Sigma = -Bax$.

.....

**5.15** c) Ici, on a $\phi(\vec{B}) = -B\Sigma = -Ba^2$.

.....

**5.16** a) Les $N$ spires du tore traversent la surface délimitée par le cercle de centre O et de rayon $R - \dfrac{a}{2} < r < R + \dfrac{a}{2}$. Le courant enlacé vaut donc $I_{\mathrm{enl}} = NI$.

.....

**5.16** b) Sur le contour fermé choisi, $r$ et $B(r)$ sont constants. Il vient :

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{\mathrm{d}l} = \oint B(r)\vec{e_\theta} \cdot r\,\mathrm{d}\theta\vec{e_\theta} = 2\pi r B(r).$$

D'après le théorème d'Ampère, on a $2\pi r B(r) = \mu_0 I_{\mathrm{enl}}$ et donc $B(r) = \dfrac{\mu_0 NI}{2\pi r}$.

.....

**5.16** c) On a $\phi(\vec{B}) = \iint \vec{B} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = \displaystyle\int_{R-a/2}^{R+a/2} \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}\,\mathrm{d}r \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}z = \frac{\mu_0 NIa}{2\pi} \ln\left(\frac{R + a/2}{R - a/2}\right)$.

.....

**5.17** a) On a $B = \mu_0 \mu_\mathrm{r} \dfrac{N}{\ell} I$. Donc, $B = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H \cdot m^{-1}} \times 4\,000 \times \dfrac{1\,000}{10 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}} \times 200 \times 10^{-3}\,\mathrm{A} \approx 1 \times 10^1\,\mathrm{T}$.

.....

**5.17** b) On a $\phi = NBS$. Donc, $\phi = 1000 \times 1 \times 10^1\,\mathrm{T} \times (20 \times 10^{-2}\,\mathrm{m})^2 = 4 \times 10^2\,\mathrm{Wb}$.

.....

**5.17** c) Le champ magnétostatique est un champ à flux conservatif. Or, le circuit magnétique joue le rôle d'un tube de champ, donc la « loi des nœuds magnétique » appliquée à la jonction qui surmonte $(S_1)$ donne : $\phi = \phi_1 + \phi_2$, soit $\phi_1 = \phi - \phi_2 = \phi - \dfrac{1}{4}\phi = \dfrac{3}{4}\phi$. Donc, $\phi_1 = \dfrac{3}{4} \times 4 \times 10^2\,\mathrm{Wb} = 3 \times 10^2\,\mathrm{Wb}$.

.....

**5.18** a) Pour une boucle de courant plane, de surface $S$ et parcourue par un courant d'intensité $I$ (ce qui permet de définir le vecteur surface $\vec{S}$), le moment magnétique est défini par la relation $\vec{\mathcal{M}} = I\vec{S}$. Pour une spire de rayon $R$ et d'axe (O$z$), le vecteur surface a alors pour expression $\vec{S} = S\vec{e_z} = \pi R^2\vec{e_z}$, donc $\vec{\mathcal{M}} = \pi R^2 I\vec{e_z}$.

.....

**5.18** b) Dans le cadre de l'approximation dipolaire : $z \gg R$ donc $R^2 + z^2 = z^2$. Le champ magnétostatique s'écrit alors : $\vec{B}(\mathrm{M}) = \dfrac{\mu_0 I R^2}{2z^3}\vec{e_z}$ ou encore $\vec{B}(\mathrm{M}) = \dfrac{\mu_0\vec{\mathcal{M}}}{2\pi z^3}$.

.....

**5.19** Des valeurs particulières de $\theta$, telles $\theta = 0$ ou $\theta = \pi/2$, et l'étude de l'orientation du champ magnétostatique pour ces angles, permettent de conclure que $\vec{B}(\mathrm{M}) = \dfrac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\cos(\theta)\vec{e_r} + \sin(\theta)\vec{e_\theta})$.

.....

**5.20** a) Le moment du couple magnétique s'exprime comme $\Gamma_z = +mB_{\text{ext}}$ à l'équilibre, car $\vec{m}$ et $\overrightarrow{B_{\text{ext}}}$ sont orthogonaux.

.....

**5.20** b) À l'équilibre, le théorème du moment cinétique donne : $0 = mB_{\text{ext}} - dMg$, soit $d = \dfrac{mB_{\text{ext}}}{Mg}$.

.....

**5.21** a) D'après la relation $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$, le moment $\vec{\Gamma}$ est colinéaire à $-\vec{e_z}$ et de même sens.

.....

**5.21** b) D'après la relation $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$, le moment $\vec{\Gamma}$ est colinéaire à $+\vec{e_z}$ et de même sens.

.....

**5.21** c) D'après la relation $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$, le moment $\vec{\Gamma}$ est colinéaire à $+\vec{e_z}$ et de même sens.

.....

**5.21** d) D'après la relation $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$, le moment $\vec{\Gamma}$ est colinéaire à $+\vec{e_z}$ et de même sens.

.....

**5.22** a) Lorsque le dipôle est aligné sur le champ (même direction et même sens) : $\vec{m} \cdot \overrightarrow{B_{\text{ext}}} = m\left\|\overrightarrow{B_{\text{ext}}}\right\|$, soit $\vec{F} = +\overrightarrow{\text{grad}}\left(\dfrac{\mu_0 I m}{2\pi r}\right) = -\dfrac{\mu_0 I m}{2\pi r^2}\vec{e_r}$.

.....

**5.22** b) La force $\vec{F}$ est dirigée dans la direction et le sens du gradient de la norme du champ magnétostatique. Le dipôle est donc attiré vers les régions de champ plus intense. On peut aussi remarquer que le dipôle a tendance à se déplacer de manière à minimiser son énergie potentielle.

.....

**5.23** La circulation du champ magnétostatique le long d'un cercle de rayon $R$ au sein duquel passe par son centre une ligne infinie parcourue par un courant électrique stationnaire est $2\pi RB$. Le théorème d'Ampère appliqué au cercle permet d'écrire $2\pi RB = \mu_0 I$ : la circulation du champ magnétostatique est homogène au produit d'une intensité électrique par une perméabilité magnétique (du vide). Ainsi, seule l'expression $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}$ est valide.

.....

**5.24** Le flux magnétique traversant un solénoïde comportant $N$ spires de section $S$ est $\phi = NBS$. Or, l'inductance propre $L$ permet d'exprimer le flux en fonction de l'intensité : $\phi = LI$. Il vient : $B = \dfrac{LI}{NS}$.

.....

**5.25** a) En un point de l'orbite circulaire, la charge $-e$ de l'électron passe à chaque période de révolution $T$, d'où le débit de charge $I = -e/T$.

.....

**5.25** b) La norme du vecteur surface $\vec{S}$ est l'aire du disque de rayon $r$ et de centre O : $\left\|\vec{S}\right\| = \pi r^2$. De plus, le vecteur surface $\vec{S}$ est orienté par la règle de la main droite, selon le sens du vecteur vitesse de l'électron (c'est aussi le sens choisi algébriquement pour l'intensité $I$). Il vient : $\vec{m} = -\dfrac{e}{T}\underbrace{\pi r^2 \vec{e_z}}_{\vec{S}}$.

.....

**5.25** c) Par comparaison des expressions $\vec{m} = -\dfrac{e}{T}\vec{S}$ et $\vec{\sigma} = \dfrac{2m_\mathrm{e}}{T}\vec{S}$, il vient : $\vec{m} = \gamma\vec{\sigma}$, avec $\gamma = -\dfrac{e}{2m_\mathrm{e}}$.

.....

**5.25** d) On a $\|\vec{m}\| = \underbrace{|\gamma|}_{+\frac{e}{2m_\mathrm{e}}}\underbrace{\|\vec{\sigma}\|}_{n\hbar}$, soit $\|\vec{m}\| = n\underbrace{\dfrac{e\hbar}{2m_\mathrm{e}}}_{\mu_\mathrm{B}}$. Donc,

$$\mu_\mathrm{B} = \frac{1{,}602 \times 10^{-19}\ \mathrm{C} \times \frac{6{,}63 \times 10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}}{2\pi}}{2 \times 9{,}11 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}} = 9{,}28 \times 10^{-24}\ \mathrm{A\cdot m^2}.$$

Attention : la réponse (a) n'est pas correcte car $\gamma = -\dfrac{e}{2m_\mathrm{e}}$, donc $\mu_\mathrm{B} = -\hbar\gamma$, et non pas $\mu_\mathrm{B} = +\hbar\gamma$. Par ailleurs, la réponse (c) n'est pas correcte car l'unité indiquée correspond à une énergie, et non pas à un moment magnétique !

.....

**5.26** a) Le flux propre est $\Phi_\mathrm{p} = \iint \vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \displaystyle\int_{R_1}^{R_2} B\vec{e_\theta}\cdot\ell\,\mathrm{d}r\vec{e_\theta} = \int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\ell\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ell\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu_0 I\ell}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$.

.....

**5.26** b) L'inductance propre par unité de longueur : $\Lambda = \dfrac{L}{\ell} = \dfrac{\Phi_\mathrm{p}}{\ell I} = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}$.

.....

**5.26** c) La composante du champ ne dépendant que de $r$, on peut découper le volume en portions d'espace comprises entre 2 cylindres, le premier de rayon $r$, le deuxième de rayon $r + \mathrm{d}r$, tous les deux de hauteur $\ell$. Le volume élémentaire vaut alors : $\mathrm{d}\tau = 2\pi\ell r\,\mathrm{d}r$. L'énergie magnétique correspondant à une portion de longueur $\ell$ du câble est alors :

$$W_\mathrm{m} = \frac{1}{2\mu_0}\iiint B^2\,\mathrm{d}\tau = \frac{\ell}{2\mu_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2 r^2}2\pi r\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I^2\ell}{4\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}.$$

.....

**5.26** d) L'inductance propre par unité de longueur est $\Lambda = \dfrac{L}{\ell} = \dfrac{2W_\mathrm{m}}{\ell I^2} = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}$.

.....

# Fiche n° 6. Équations de Maxwell

## Réponses

**6.1** a) ..... d

**6.1** b) ..... $I \cdot T$

**6.1** c) ..... $\dfrac{M}{I \cdot T^2}$

**6.1** d) ..... $\dfrac{M \cdot L}{I \cdot T^3}$

**6.1** e) ..... $\dfrac{M \cdot L}{I \cdot T^3}$

**6.2** a) ..... b

**6.2** b) ..... c

**6.2** c) ..... $1{,}1 \times 10^{12}$

**6.2** d) ..... $1{,}1 \times 10^{1}$

**6.2** e) ..... $1{,}1 \times 10^{-8}$

**6.3** a) .... $E_0 \cos[\omega t - kx]\overrightarrow{e_y} + E_0 \sin[\omega t - kx]\overrightarrow{e_z}$

**6.3** b) ..... $-E_0 \exp[\mathrm{i}(\omega t + kz)]\overrightarrow{e_x}$ $+\mathrm{i}E_0 \exp[\mathrm{i}(\omega t + kz)]\overrightarrow{e_y}$

**6.4** a) ..... Nulle

**6.4** b) ..... Positive

**6.4** c) ..... Négative

**6.4** d) ..... Negative

**6.4** e) ..... Nulle

**6.4** f) ..... Positive

**6.5** a) ..... Nulle

**6.5** b) ..... Positive

**6.5** c) ..... Négative

**6.5** d) ..... Nulle

**6.5** e) ..... Positive

**6.5** f) ..... Négative

**6.6** a) ..... $\mu_0 \text{ div } \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \text{div} \vec{E}}{\partial t}$

**6.6** b) ..... $\mu_0 \text{ div } \vec{j} + \mu_0 \dfrac{\partial \rho}{\partial t}$

**6.6** c) ..... b

**6.7** a) ..... m

**6.7** b) ..... 0

**6.7** c) ..... Oui

**6.7** d) ..... d

**6.7** e) ..... $\vec{0}$

**6.8** a) ..... $r\omega\overrightarrow{e_\theta}$

**6.8** b) ..... $-\omega y\overrightarrow{e_x} + \omega x\overrightarrow{e_y}$

**6.8** c) ..... $2\omega\overrightarrow{e_z}$

**6.8** d) ..... $r\omega$

**6.8** e) ..... $\dfrac{a^2}{r}\omega$

**6.9** a) ..... $3a - 5br^2$

**6.9** b) ..... b

**6.9** c) ..... $4\pi R^3(a - bR^2)$

**6.9** d) ..... c

**6.9** e) ..... $4\pi R^3(a - bR^2)$

**6.10** a) ..... oui

**6.10** b) ..... non

**6.10** c) ..... oui

**6.11** a) ..... $E_0 \dfrac{k}{\omega} \cos(\omega t - kz + \varphi)\overrightarrow{e_y}$

**6.11** b) .... $E_0\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sinh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z)\exp(-\alpha t)\overrightarrow{e_y}$

**6.11** c) ..... $-\dfrac{2E_0}{k^2r^3}\displaystyle\int \cos(\omega t)\overrightarrow{e_\theta}\,\mathrm{d}t$

**6.12** a) ..... $\boxed{B_0 \dfrac{k}{\varepsilon_0 \mu_0 \omega} \sin(\omega t - kz + \varphi)\overrightarrow{e_x}}$

**6.12** b) ..... $\boxed{\dfrac{B_0}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \cosh(\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\alpha z) \exp(-\alpha t)\overrightarrow{e_x}}$

**6.12** c) ..... $\boxed{\dfrac{c^3 B_0}{k^2 \omega r^3} \cos(\omega t)\overrightarrow{e_z}}$

**6.13** a) ..... $\boxed{\text{a}}$

**6.13** b) ..... $\boxed{-\mu_0 n \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \dfrac{r}{2}\overrightarrow{e_\theta}}$

**6.13** c) ..... $\boxed{-\mu_0 n \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \dfrac{R^2}{2r}\overrightarrow{e_\theta}}$

**6.13** d) ..... $\boxed{\text{d}}$

**6.13** e) ..... $\boxed{-\mu_0 n \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \dfrac{r}{2}\overrightarrow{e_\theta}}$

**6.13** f) ..... $\boxed{-\mu_0 n \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \dfrac{R^2}{2r}\overrightarrow{e_\theta}}$

**6.14** a) .... $\boxed{\dfrac{E_0 B_0}{\mu_0} \cos(\omega t - kz + \varphi) \sin(\omega t - kz + \varphi)\overrightarrow{e_z}}$

**6.14** b) .... $\boxed{-\dfrac{E_0 B_0}{\mu_0} \cosh(\beta z) \sinh(\beta z) \exp(-2\alpha t)\overrightarrow{e_x}}$

**6.15** a) ..... $\boxed{\begin{array}{l} -\dfrac{E_{0y}}{c} \cos(k\,z - \omega\,t + \psi_2)\,\overrightarrow{e_x} \\ +\dfrac{E_{0x}}{c} \cos(k\,z - \omega\,t + \psi_1)\,\overrightarrow{e_y} \end{array}}$

**6.15** b) ..... $\boxed{\dfrac{E_x^2 + E_y^2}{\mu_0\,c}\,\overrightarrow{e_z}}$

**6.15** c) ..... $\boxed{\begin{array}{l} E_{0x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\,z - \omega\,t + \psi_1)}\,\overrightarrow{e_x} \\ +E_{0y}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\,z - \omega\,t + \psi_2)}\,\overrightarrow{e_y} \end{array}}$

**6.15** d) ..... $\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{1}{c}\Big(E_{0x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\,z - \omega\,t + \psi_1)}\,\overrightarrow{e_y} \\ -E_{0y}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\,z - \omega\,t + \psi_2)}\,\overrightarrow{e_x}\Big) \end{array}}$

**6.15** e) ..... $\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{1}{c}\Big(E_{0x}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k\,z - \omega\,t + \psi_1)}\,\overrightarrow{e_y} \\ -E_{0y}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k\,z - \omega\,t + \psi_2)}\,\overrightarrow{e_x}\Big) \end{array}}$

**6.15** f) ..... $\boxed{\dfrac{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}{2\,\mu_0\,c}\,\overrightarrow{e_z}}$

**6.15** g) ..... $\boxed{\text{a}}$

**6.16** a) ..... $\boxed{\dfrac{LQ^2}{2\varepsilon_0 S}}$

**6.16** b) ..... $\boxed{-\dfrac{R}{2\varepsilon_0 S^2} Q \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_r}}$

**6.16** c) ..... $\boxed{-\dfrac{e}{\varepsilon_0 S} Q \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}}$

**6.16** d) ..... $\boxed{\text{c}}$

**6.16** e) ..... $\boxed{\text{b}}$

## Corrigés

**6.1** a) Les trois premières équations correspondent aux équations de Maxwell-Gauss, Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère. La dernière est une formulation de l'équation de conservation de la charge, qui n'est pas une des équations de Maxwell mais une conséquence de deux d'entre elles.

.....

**6.1** b) La définition de l'intensité du courant électrique est : $i(t) = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, donc $\dim(q) = I \cdot T$.

.....

**6.1** c) Par analyse dimensionnelle de la force de Lorentz, on a

$$\dim(\overrightarrow{B}) = \frac{\dim(\overrightarrow{F})}{\dim(q)\dim(\overrightarrow{v})} = \frac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{I \cdot T \cdot L \cdot T^{-1}} = \frac{M}{I \cdot T^2}.$$

.....

**6.1** d) Par analyse dimensionnelle de la force de Lorentz, on a $\dim(\overrightarrow{E}) = \dfrac{\dim(\overrightarrow{F})}{\dim(q)} = \dfrac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{I \cdot T} = \dfrac{M \cdot L}{I \cdot T^3}$.

.....

**6.1** e) Par analyse dimensionnelle de l'équation de Maxwell-Faraday, on a

$$\dim(\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E})) = \frac{\dim(\vec{E})}{L} = \frac{\dim(\vec{B})}{T} \qquad \text{donc} \qquad \dim(\vec{E}) = \frac{\dim(\vec{B})\cdot L}{T} = \frac{M\cdot I^{-1}\cdot T^{-2}\cdot L}{T} = \frac{M\cdot L}{I\cdot T^3}.$$

**6.2** a) On a $\left\|\vec{j}_{\text{cond}}\right\| = \|\sigma E_0\cos(\omega t+\varphi)\| < \|\sigma E_0\|$ et $\left\|\vec{j}_{\text{dépl}}\right\| = \|-\varepsilon_0\omega E_0\sin(\omega t+\varphi)\| < \|\varepsilon_0\omega E_0\|$. Donc,

$$\alpha \text{ a pour ordre de grandeur } \frac{\sigma E_0}{\varepsilon_0\omega E_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}.$$

**6.2** b) On a $\alpha \gg 1 \iff f \ll \dfrac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0} = \dfrac{1\times 10^7\,\mathrm{S\cdot m^{-1}}}{2\pi\times 8{,}8\times 10^{-12}\,\mathrm{F\cdot m^{-1}}} = 1{,}8\times 10^{17}\,\mathrm{Hz}$.

**6.2** c) On a $\alpha = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0\omega} = \dfrac{1{,}0\times 10^7\,\mathrm{S\cdot m^{-1}}}{8{,}8\times 10^{-12}\,\mathrm{F\cdot m^{-1}}\times 1{,}0\times 10^6\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}} = 1{,}1\times 10^{12} \gg 1$.

**6.2** d) On a $\alpha = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0\omega} = \dfrac{1{,}0\times 10^{-4}\,\mathrm{S\cdot m^{-1}}}{8{,}8\times 10^{-12}\,\mathrm{F\cdot m^{-1}}\times 1{,}0\times 10^6\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}} = 1{,}1\times 10^{1}$, dont l'ordre de grandeur est 1.

**6.2** e) On a $\alpha = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0\omega} = \dfrac{1{,}0\times 10^{-13}\,\mathrm{S\cdot m^{-1}}}{8{,}8\times 10^{-12}\,\mathrm{F\cdot m^{-1}}\times 1{,}0\times 10^6\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}} = 1{,}1\times 10^{-8} \ll 1$.

**6.3** a) On a

$$\begin{aligned}\underline{\vec{E}}_1 &= E_0\exp[\mathrm{i}(\omega t-kx)]\vec{e_y} - \mathrm{i}E_0\exp[\mathrm{i}(\omega t-kx)]\vec{e_z}\\ &= E_0(\cos(\omega t-kx)+\mathrm{i}\sin(\omega t-kx))\vec{e_y} - \mathrm{i}E_0(\cos(\omega t-kx)+\mathrm{i}\sin(\omega t-kx))\vec{e_z}.\end{aligned}$$

Donc, $\vec{E}_1 = \mathsf{Re}(\underline{\vec{E}}_1) = E_0\cos[\omega t-kx]\vec{e_y} + E_0\sin[\omega t-kx]\vec{e_z}$.

**6.5** a) On peut estimer le rotationnel selon un axe en observant si le champ de vecteurs « tourne » dans le sens direct ou indirect. Si le champ de vecteurs ne « tourne » pas autour d'un axe alors le rotationnel est nul. Si le champ de vecteurs semble « tourner » dans le sens direct alors le rotationnel est positif, dans le cas contraire, il est négatif.

**6.6** a) Avec la relation de Maxwell-Ampère et le théorème de Schwarz, on a :

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}) = \mathrm{div}\left(\mu_0\,\vec{j} + \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \mu_0\ \mathrm{div}\ \vec{j} + \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial\,\mathrm{div}\,\vec{E}}{\partial t}.$$

**6.6** b) Avec la relation de Maxwell-Gauss, on a :

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}) = \mu_0\ \mathrm{div}\ \vec{j} + \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial(\frac{\rho}{\varepsilon_0})}{\partial t} = \mu_0\left(\mathrm{div}\ \vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t}\right).$$

**6.6** c) Comme $\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}) = 0$, on obtient : $\mathrm{div}\,\vec{j} + \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0$.

**6.7** a) En utilisant l'homogénéité, on voit que $a$ est une longueur, en mètres ($m$).

**6.7** b) On a $\Delta V = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \dfrac{V_0}{a^2}(2+4-6) = 0$.

**6.7** c) L'équation de Poisson $\Delta V = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ est vérifiée en prenant $\rho = 0$ car l'énoncé impose un espace vide de charges.

.....

**6.7** d) On a $V(x,0,0) = \dfrac{V_0}{a^2}x^2$ : c'est une parabole.
En voici l'allure :

.....

**6.7** e) Le champ électrique est donné par :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{e_x} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{e_y} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e_z} = 2\frac{V_0}{a^2}(-x\vec{e_x} - 2y\vec{e_y} + 3z\vec{e_z}).$$

En O, origine du repère, ce champ est nul.

.....

**6.8** a) On a $\vec{v} = \omega\vec{e_z} \wedge (r\vec{e_r} + z\vec{e_z}) = r\omega\vec{e_\theta}$.

.....

**6.8** b) On a $\vec{v} = \omega\vec{e_z} \wedge (x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}) = -\omega y\vec{e_x} + \omega x\vec{e_y}$.

.....

**6.8** c) En coordonnées cartésiennes, on obtient : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = 2\omega\vec{e_z}$.

.....

**6.8** d) L'expression $\displaystyle\oint_\Gamma \vec{v}_{(\text{M})} \cdot \vec{\text{d}l}_{(\text{M})} = \iint_\Sigma \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v})_{(\text{M})} \cdot \vec{n}\,\text{d}S_{(\text{M})}$ s'écrit, avec $\vec{\text{d}\ell} = r\,\text{d}\theta\vec{e_\theta}$ et $\vec{n}\,\text{d}S_{(\text{M})} = r\,\text{d}r\,\text{d}\theta\vec{e_z}$, d'où $v2\pi r = \displaystyle\int_0^r 4\omega\pi r\,\text{d}r$, soit $v = r\omega$.

.....

**6.8** e) L'expression $\displaystyle\oint_\Gamma \vec{v}_{(\text{M})} \cdot \vec{\text{d}l}_{(\text{M})} = \iint_\Sigma \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v})_{(\text{M})} \cdot \vec{n}\,\text{d}S_{(\text{M})}$ s'écrit, avec $\vec{\text{d}\ell} = r\,\text{d}\theta\vec{e_\theta}$ et $\vec{n}\,\text{d}S_{(\text{M})} = r\,\text{d}r\,\text{d}\theta\vec{e_z}$, d'où $v2\pi r = \displaystyle\int_0^a 4\omega\pi r\,\text{d}r + \int_a^r 0 \times \pi r\,\text{d}r$, soit $v = \dfrac{a^2}{r}\omega$.

.....

**6.9** a) On a $\text{div}\,\vec{A} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} = \dfrac{1}{r^2}(3ar^2 - 5br^4) = 3a - 5br^2$.

.....

**6.9** c) On a

$$\begin{aligned}
\oiint_{\text{sphère}} \vec{A} \cdot \vec{\text{d}S} &= \iiint_{\text{boule}} \text{div}\,\vec{A}\,\text{d}\tau \\
&= \int_{r=0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} (3a - 5br^2)r^2\sin(\varphi)\,\text{d}r\,\text{d}\theta\,\text{d}\varphi \\
&= \big[\theta\big]_0^{2\pi} \times \big[-\cos(\varphi)\big]_0^{\pi} \times \big[ar^3 - br^5\big]_0^R \\
&= 4\pi R^3(a - bR^2).
\end{aligned}$$

.....

**6.9** e) On a

$$\oiint_{\text{sphère}} \vec{A} \cdot \vec{\text{d}S} = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} (aR - bR^3)R^2 sin(\varphi)\,\text{d}\theta\,\text{d}\varphi = 4\pi R^3(a - bR^2).$$

On retrouve bien le résultat de la question c).

.....

**6.10** a) Il faut vérifier que les équations de Maxwell sont respectées les unes après les autres. On a :

- $\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z} = 0$
- $\operatorname{div}\vec{B} = \dfrac{\partial B_x}{\partial x} + \dfrac{\partial B_y}{\partial y} + \dfrac{\partial B_z}{\partial z} = 0$
- $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = \left(\dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{e_z} = \dfrac{\partial E_y}{\partial x}\vec{e_z} = E_0 k \sin(\omega t - kx + \varphi_0)\vec{e_z}$

  $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -E_0 k \sin(\omega t - kx + \varphi_0)\vec{e_z}$
- Enfin,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} &= \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\vec{e_z}\\ &= -\frac{\partial B_z}{\partial x}\vec{e_y} = -\frac{E_0 k^2}{\omega}\sin(\omega t - kx + \varphi_0)\vec{e_y}\end{aligned}$$

$\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -E_0\omega \sin(\omega t - kx + \varphi_0)\vec{e_y}$ donc $\varepsilon_0\mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\dfrac{E_0 k^2}{\omega}\sin(\omega t - kx + \varphi_0)\vec{e_y}$

Les quatre équations de Maxwell sont respectées donc le champ électromagnétique peut exister.

.....

**6.10** b) On a

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial E_y}{\partial y} = -E_0 k \sin(wt + ky).$$

L'équation de Maxwell-Gauss dans le vide n'est pas respectée donc ce champ électromagnétique ne peut pas exister.

.....

**6.10** c) On a

- $\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z} = 0$
- $\operatorname{div}\vec{B} = \dfrac{\partial B_x}{\partial x} + \dfrac{\partial B_y}{\partial y} + \dfrac{\partial B_z}{\partial z} = 0$
-

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} &= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{e_z} = -\frac{\partial E_y}{\partial z}\vec{e_x} + \frac{\partial E_x}{\partial z}\vec{e_y}\\ &= E_2 k \sin(\omega t + kz + \varphi_2)\vec{e_x} - E_1 k \sin(\omega t + kz + \varphi_1)\vec{e_y}\end{aligned}$$

$\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -E_2 k \sin(\omega t + kz + \varphi_2)\vec{e_x} + E_1 k \sin(\omega t + kz + \varphi_1)\vec{e_y}$
- Enfin,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} &= \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\vec{e_z} = -\frac{\partial B_y}{\partial z}\vec{e_x} + \frac{\partial B_x}{\partial z}\vec{e_y}\\ &= -\frac{E_1 k^2}{\omega}\sin(\omega t + kz + \varphi_1)\vec{e_x} + \frac{E_2 k^2}{\omega}\sin(\omega t + kz + \varphi_2)\vec{e_y}\end{aligned}$$

$\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -E_1\omega \sin(\omega t + kz + \varphi_1)\vec{e_x} - \omega E_2 \sin(\omega t + kz + \varphi_2)\vec{e_y}$ donc

$\varepsilon_0\mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\dfrac{E_1 k^2}{\omega}\sin(\omega t + kz + \varphi_1)\vec{e_x} - \dfrac{E_2 k^2}{\omega}\sin(\omega t + kz + \varphi_2)\vec{e_y}$

Les quatre équations de Maxwell sont respectées donc le champ électromagnétique peut exister.

.....

**6.11** a) Le champ électrique est de la forme $\vec{E} = E_x(z,t)\vec{e_x}$ avec $E_x(z,t) = E_0\cos(\omega t - kz + \varphi)$.

D'après l'expression du rotationnel en coordonnées cartésiennes, on a

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = \frac{\partial E_x}{\partial z}\vec{e_y} = E_0 k\sin(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_y}.$$

D'après l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{B} = \int -\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E})\,\mathrm{d}t = -E_0 k\vec{e_y}\int \sin(\omega t - kx + \varphi)\,\mathrm{d}t = E_0\frac{k}{\omega}\cos(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_y} + \overrightarrow{\mathrm{Cste}}.$$

Comme le milieu est vide de charge et de courant, il n'y a aucun champ statique donc $\overrightarrow{\mathrm{Cste}} = \vec{0}$.

.....

**6.11** b) Le champ électrique est de la forme $\vec{E} = E_x(z,t)\vec{e_x}$ avec $E_x(z,t) = E_0\cosh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z)\exp(-\alpha t)$.

D'après l'expression du rotationnel en coordonnées cartésiennes, on a

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = \frac{\partial E_x}{\partial z}\vec{e_y} = E_0\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha\sinh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z)\exp(-\alpha t)\vec{e_y}.$$

D'après l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{B} = \int -\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E})\,\mathrm{d}t = -E_0\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha\sinh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z)\vec{e_y}\int \exp(-\alpha t)\,\mathrm{d}t = E_0\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sinh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z)\exp(-\alpha t)\vec{e_y} + \overrightarrow{\mathrm{Cste}}.$$

Comme le milieu est vide de charge et de courant, il n'y a aucun champ statique donc $\overrightarrow{\mathrm{Cste}} = \vec{0}$.

.....

**6.11** c) Le champ électrique est de la forme $\vec{E} = E_z(r,t)\vec{e_z}$ avec

$$E_x(z,t) = \frac{E_0}{(kr)^2}\cos(\omega t).$$

D'après l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques, on a

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial E_z}{\partial r}\vec{e_\theta} = \frac{2E_0}{k^2r^3}\cos(\omega t)\vec{e_\theta}.$$

D'après l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{B} = \int -\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E})\,\mathrm{d}t = -\frac{2E_0}{k^2r^3}\int \cos(\omega t)\vec{e_\theta}\,\mathrm{d}t.$$

Comme $\vec{e_\theta}$ est un vecteur dont l'orientation dépend du temps (base cylindrique), on ne peut développer plus le calcul car on ne connaît pas l'évolution temporelle de l'angle $\theta$.

.....

**6.12** a) Le champ magnétique est de la forme $\vec{B} = B_y(z,t)\vec{e_y}$ avec $B_y(z,t) = B_0\sin(\omega t - kz + \varphi)$.

D'après l'expression du rotationnel en coordonnées cartésiennes, on a

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = -\frac{\partial B_y}{\partial z}\vec{e_x} = B_0 k\cos(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_x}.$$

D'après l'équation de Maxwell-Ampère vide de courant ($\vec{j} = \vec{0}$) :

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\int \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B})\,\mathrm{d}t = \frac{B_0 k}{\varepsilon_0\mu_0}\vec{e_x}\int \cos(\omega t - kz + \varphi)\,\mathrm{d}t = \frac{B_0 k}{\varepsilon_0\mu_0\omega}\sin(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_x} + \overrightarrow{\mathrm{Cste}}.$$

Comme le milieu est vide de charge et de courant, il n'y a aucun champ statique donc $\overrightarrow{\mathrm{Cste}} = \vec{0}$.

.....

**6.12** b) Le champ magnétique est de la forme $\vec{B} = B_y(z,t)\vec{e_y}$ avec $B_y(z,t) = B_0 \sinh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z)\exp(-\alpha t)$.

D'après l'expression du rotationnel en coordonnées cartésiennes, on a

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = -\frac{\partial B_y}{\partial z}\vec{e_x} = -B_0\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha\cosh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z)\exp(-\alpha t)\vec{e_x}.$$

D'après l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\int \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B})\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}B_0\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha\cosh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z)\vec{e_x}\int\exp(-\alpha t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{B_0}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\cosh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\alpha z)\exp(-\alpha t)\vec{e_x} + \overrightarrow{\mathrm{Cste}}.\end{aligned}$$

Comme le milieu est vide de charge et de courant, il n'y a aucun champ statique donc $\overrightarrow{\mathrm{Cste}} = \vec{0}$.

*Ce champ électromagnétique $(\vec{E},\vec{B})$ est le même que celui de la question b) de l'entraînement précédent, en posant* $E_0 = \dfrac{B_0}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$.

.....

**6.12** c) Le champ magnétique est de la forme $\vec{B} = B_\theta(r,t)\vec{e_\theta}$ avec $B_\theta(r,t) = \dfrac{cB_0}{(kr)^2}\sin(\omega t)$.

D'après l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques, on a

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \frac{1}{r}\frac{\partial rB_\theta}{\partial r}\vec{e_z} = -\frac{cB_0}{k^2r^3}\sin(\omega t)\vec{e_z}.$$

D'après l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\int\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B})\,\mathrm{d}t = -\frac{cB_0}{\varepsilon_0\mu_0k^2r^3}\vec{e_z}\int\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{c^3B_0}{k^2\omega r^3}\cos(\omega t)\vec{e_z} + \overrightarrow{\mathrm{Cste}}.$$

Comme le milieu est vide de charge et de courant, il n'y a aucun champ statique donc $\overrightarrow{\mathrm{Cste}} = \vec{0}$. Contrairement aux cas précédents, on ne retrouve pas le champ de la question c) de l'entraînement précédent : ces champs électromagnétiques $(\vec{E},\vec{B})$ ne sont pas solutions d'une seule équation de Maxwell et pas de l'ensemble (équation de propagation !) donc il ne s'agit pas de champs électromagnétiques qui se propagent.

.....

**6.13** a) Le solénoïde étant invariant par rotation autour de l'axe $(\mathrm{O}z)$ et par translation le long du même axe, la norme du champ électrique ne dépend que de $r$.

.....

**6.13** b) L'équation de Maxwell-Faraday est $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$. On calcule d'abord le rotationnel de $\vec{E}$. Le champ magnétique étant porté par $(\mathrm{O}z)$, il reste : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial rE_\theta}{\partial r}\vec{e_z}$.

On calcule la dérivée du champ magnétique par rapport au temps pour $r < a$ : $\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \mu_0 n\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\vec{e_z}$.

Enfin, on a $rE_\theta = -\mu_0 n\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\dfrac{r^2}{2}$ donc $E_\theta = -\mu_0 n\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\dfrac{r}{2}$.

.....

**6.13** c) Le champ magnétique étant nul à l'extérieur du solénoïde, on a :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial rE_\theta}{\partial r} = 0 \qquad \text{donc} \qquad E_\theta = \frac{C}{r}$$

avec $C$ une constante. Il reste à déterminer cette constante. Par continuité du champ électrique en $r = R$, on a

$$\frac{C}{R} = -\mu_0 n\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\frac{R}{2} \qquad \text{donc} \qquad C = -\mu_0 n\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\frac{R^2}{2}.$$

Ainsi, on a $\vec{E} = -\mu_0 n\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\dfrac{R^2}{2r}\vec{e_\theta}$.

.....

**6.13** d) La forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday est $\oint_\Gamma \vec{E}\cdot\vec{\mathrm{d}\ell} = -\iint_\Sigma \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\vec{\mathrm{d}S}$.

Nous sommes donc amenés à calculer la circulation de $\vec{E}$ sur le contour délimitant la surface $\Sigma$ que l'on va choisir et à calculer le flux de $\vec{B}$ à travers cette même surface.

Pour que le calcul de la circulation soit simple, il faut trouver une surface dont le contour ne dépend pas de $r$, ainsi le champ électrique sera constant sur ce contour.

Pour que le calcul du flux soit simple, il faut dans un premier temps trouver une surface dont la surface élémentaire ne s'exprime pas en fonction des variables de $B$ : $B$ étant constant ici, la question ne se pose pas. Dans un deuxième temps, on choisit une surface telle que $\vec{B}$ et le vecteur normal à la surface soient colinéaires afin que le produit scalaire se calcule facilement : on choisit une surface perpendiculaire à $\vec{e_z}$.

On souhaite donc une surface de rayon constant $r$, perpendiculaire à $\vec{e_z}$, il s'agit donc d'un disque de rayon $r$ et d'axe $(\mathrm{O}z)$.

.....

**6.13** e) La forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday est $\oint_\Gamma \vec{E}\cdot\vec{\mathrm{d}\ell} = -\iint_\Sigma \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\vec{\mathrm{d}S}$.

On choisit comme surface $\Sigma$, le disque de rayon $r$ et donc comme contour $\Gamma$ le cercle de rayon $r$. La circulation de $\vec{E}$ donne :

$$\oint_\Gamma \vec{E}\cdot\mathrm{d}\ell = 2\pi r E(r,t).$$

Le flux de la dérivée du champ magnétique donne : $\iint_\Sigma \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\vec{\mathrm{d}S} = \pi r^2\mu_0 n\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$. Finalement, $\vec{E} = -\mu_0 n\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\frac{r}{2}\vec{e_\theta}$.

.....

**6.13** f) La forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday est $\oint_\Gamma \vec{E}\,\mathrm{d}\ell = -\iint_\Sigma \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\vec{\mathrm{d}S}$.

On choisit comme surface $\Sigma$, le disque de rayon $r$ et donc comme contour $\Gamma$ le cercle de rayon $r$. La circulation de $\vec{E}$ donne :

$$\oint_\Gamma \vec{E}\,\mathrm{d}\ell = 2\pi r E(r,t).$$

Le flux de la dérivée du champ magnétique donne : $\iint_\Sigma \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\vec{\mathrm{d}S} = \pi R^2\mu_0 n\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$. Finalement, $\vec{E} = -\mu_0 n\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\frac{R^2}{2r}\vec{e_\theta}$.

.....

**6.14** a) On a

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0}E_0\cos(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_x}\wedge B_0\sin(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_y} = \frac{E_0B_0}{\mu_0}\cos(\omega t - kz + \varphi)\sin(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_z}.$$

L'énergie se propage dans une direction orthogonale à celles des champs électrique et magnétique.

.....

**6.14** b) On a

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0}E_0\cosh(\beta z)\exp(-\alpha t)\vec{e_z}\wedge B_0\sinh(\beta z)\exp(-\alpha t)\vec{e_y} = -\frac{E_0B_0}{\mu_0}\cosh(\beta z)\sinh(\beta z)\exp(-2\alpha t)\vec{e_x}.$$

L'énergie se propage dans une direction orthogonale à celles des champs électrique et magnétique.

.....

**6.15** a) Pour une onde plane progressive, on a la relation de structure :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega} = \frac{\vec{e_z}\wedge\vec{E}}{c} = \frac{1}{c}\left|\begin{array}{c}0\\0\\1\end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{c}E_x\\E_y\\E_z\end{array}\right. = \frac{1}{c}\left|\begin{array}{c}-E_y\\E_x\\0\end{array}\right. .$$

On en déduit : $\vec{B} = -\frac{E_{0y}}{c}\cos(k\,z - \omega\,t + \psi_2)\,\vec{e_x} + \frac{E_{0x}}{c}\cos(k\,z - \omega\,t + \psi_1)\,\vec{e_y}$.

.....

**6.15** b) Le vecteur de Poynting est donné par :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0\, c} \left| \begin{matrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{matrix} \right. \wedge \left| \begin{matrix} -E_y \\ E_x \\ 0 \end{matrix} \right. = \frac{1}{\mu_0\, c} \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ E_x^2 + E_y^2 \end{matrix} \right. = \frac{E_x^2 + E_y^2}{\mu_0\, c}\, \vec{e_z}.$$

.....

**6.15** c) En notation complexe, avec $\vec{r} = \overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et $\vec{k}$ le vecteur d'onde, le champ électrique peut s'écrire :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 \exp\left[\mathrm{i}\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega\, t\right)\right] = \underline{\vec{E}}_0 \exp[\mathrm{i}(k\, z - \omega\, t)]$$

avec $\underline{\vec{E}_0} = E_{0x}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\psi_1}\, \vec{e_x} + E_{0y}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\psi_2}\, \vec{e_y}$ ; $\underline{\vec{E}_0}$ est l'amplitude complexe du champ électrique.

.....

**6.15** d) L'équation de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \underline{\vec{E}} = -\dfrac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t}$ donne : $\mathrm{i}\, \vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = +\mathrm{i}\, \omega\, \underline{\vec{B}}$. Donc,

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \underline{\vec{E}} = \frac{\vec{e_z}}{c} \wedge \left(E_{0x}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\, z - \omega\, t + \psi_1)}\, \vec{e_x} + E_{0y}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\, z - \omega\, t + \psi_2)}\, \vec{e_y}\right) = \frac{1}{c}\left(E_{0x}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\, z - \omega\, t + \psi_1)}\, \vec{e_y} - E_{0y}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\, z - \omega\, t + \psi_2)}\, \vec{e_x}\right).$$

.....

**6.15** e) On en déduit le conjugué : $\underline{\vec{B}}^* = \dfrac{1}{c}\left(E_{0x}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k\, z - \omega\, t + \psi_1)}\, \vec{e_y} - E_{0y}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k\, z - \omega\, t + \psi_2)}\, \vec{e_x}\right)$.

.....

**6.15** f) Le produit vectoriel $\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*$ vaut :

$$\begin{aligned} \underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^* &= \left(E_{0x}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\, z - \omega\, t + \psi_1)}\, \vec{e_x} + E_{0y}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\, z - \omega\, t + \psi_2)}\, \vec{e_y}\right) \wedge \left(\frac{1}{c}\left(E_{0x}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k\, z - \omega\, t + \psi_1)}\, \vec{e_y} - E_{0y}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k\, z - \omega\, t + \psi_2)}\, \vec{e_x}\right)\right) \\ &= \frac{E_{0x}^2}{c}\, \vec{e_z} + \frac{E_{0y}^2}{c}\, \vec{e_z} = \frac{\left(E_{0x}^2 + E_{0y}^2\right)\vec{e_z}}{c}. \end{aligned}$$

On en déduit le vecteur complexe $\dfrac{1}{2\,\mu_0}\, \underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^* = \dfrac{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}{2\,\mu_0\, c}\, \vec{e_z}$.

.....

**6.15** g) Avec $\langle \cos^2 \rangle = \dfrac{1}{2}$, la valeur moyenne du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ vaut :

$$\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \left\langle \frac{\left(E_{0x}\, \cos(k\, z - \omega\, t + \psi_1)\right)^2 + \left(E_{0y}\, \cos(k\, z - \omega\, t + \psi_2)\right)^2}{\mu_0\, c}\, \vec{e_z} \right\rangle = \frac{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}{2\,\mu_0\, c}\, \vec{e_z}.$$

La valeur moyenne du vecteur $\left\langle \dfrac{\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*}{2\,\mu_0} \right\rangle$ est identique : on peut donc choisir l'une ou l'autre des deux méthodes.

.....

**6.16** a) On intègre la densité volumique d'énergie électromagnétique dans tout le volume $\mathcal{V}$ séparant les deux armatures :

$$\mathcal{E} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\, \mathrm{d}\tau = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S^2}\, \mathrm{d}\tau = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S^2} LS = \frac{LQ^2}{2\varepsilon_0 S}.$$

.....

**6.16** b) On a $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \dfrac{\frac{Q}{\varepsilon_0 S}\vec{e_z} \cdot \frac{\mu_0}{2S}\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} R\vec{e_\theta}}{\mu_0} = -\dfrac{R}{2\varepsilon_0 S^2} Q \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\, \vec{e_r}$.

.....

**6.16** c) On cherche le flux sortant du vecteur de Poynting à travers la surface $\Sigma$ du cylindre de rayon $R$ et de hauteur $L$ formé par les deux armatures du condensateur soit

$$\oiint_{\Sigma} \vec{\Pi} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\frac{R}{2\varepsilon_0 S^2} Q \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \times 2\pi RL = -\frac{L\pi R^2}{\varepsilon_0 S^2} Q \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\frac{L}{\varepsilon_0 S} Q \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}.$$

.....

**6.16** d) On a $\dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \dfrac{\partial\left(\dfrac{LQ(t)^2}{2\varepsilon_0 S}\right)}{\partial t} = \dfrac{L}{2\varepsilon_0 S} 2Q(t)\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}(t) = \dfrac{L}{\varepsilon_0 S} Q \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\phi.$

.....

**6.16** e) On a $\dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \phi = 0.$

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradski, qui dit $\oiint_{\Sigma} \vec{\Pi} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{\Pi} \, \mathrm{d}\tau$ et en utilisant que $\mathcal{E} = \iiint_{\mathcal{V}} e \, \mathrm{d}\tau$, on obtient :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial e}{\partial t} \, \mathrm{d}\tau + \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{\Pi} \, \mathrm{d}\tau = 0 \qquad \text{donc} \qquad \frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\Pi} = 0,$$

ce qui correspond au théorème de Poynting en l'absence de courant de conduction.

.....

# Fiche n° 7. Induction

## Réponses

**7.1** a) ..... $\boxed{\vec{e_z}}$

**7.1** b) ..... $\boxed{-\vec{e_z}}$

**7.1** c) ..... $\boxed{\vec{e_y}}$

**7.1** d) ..... $\boxed{\vec{e_y}}$

**7.1** e) ..... $\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e_y}+\vec{e_z})}$

**7.1** f) ..... $\boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e_y}+\vec{e_z})}$

**7.2** a) ..... d

**7.2** b) ..... aucune

**7.2** c) ..... b

**7.2** d) ..... a

**7.3** a) ..... oui

**7.3** b) ..... oui

**7.3** c) ..... non

**7.3** d) ..... non

**7.3** e) ..... oui

**7.3** f) ..... non

**7.4** a) ..... $\boxed{0}$

**7.4** b) ..... $\boxed{-Bx_{\mathrm{c}}\ell}$

**7.4** c) ..... $\boxed{-B\ell^2}$

**7.4** d) ..... $\boxed{-B(a-(x_{\mathrm{c}}-\ell))\ell}$

**7.4** e) ..... $\boxed{0}$

**7.4** f) ..... $\boxed{-Bv\ell}$

**7.4** g) ..... $\boxed{0}$

**7.4** h) ..... $\boxed{Bv\ell}$

**7.5** a) ..... $\boxed{\pi R^2 B_{\mathrm{m}}\cos(\omega t)}$

**7.5** b) ..... $\boxed{\pi a^2 B_{\mathrm{m}}\cos(\omega t)}$

**7.5** c) ..... $\boxed{\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r}$

**7.5** d) ..... $\boxed{2\pi B_0\left(\frac{R^2}{2}-\frac{R^3}{3a}\right)}$

**7.5** e) ..... $\boxed{2\pi B_0\frac{a^2}{6}}$

**7.6** a) ..... $\boxed{B\pi R^2\cos(\omega t)}$

**7.6** b) ..... $\boxed{0}$

**7.6** c) ..... $\boxed{-\frac{B\pi R^2}{2}}$

**7.6** d) ..... $\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}B\pi R^2}$

**7.6** e) ..... $\boxed{B\pi R^2}$

**7.7** a) ..... a

**7.7** b) ..... a

**7.7** c) ..... $\boxed{\frac{\mu_0 N I a}{2\pi}\ln\left(\frac{d+a}{d}\right)}$

**7.7** d) ..... $\boxed{\frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi}\ln\left(\frac{d+a}{d}\right)}$

**7.8** a) ..... c

**7.8** b) ..... $\boxed{B_0\omega\sin(\omega t)\frac{r}{2}}$

**7.9** a) ..... c

**7.9** b) ..... a

**7.10** a) ..... c

**7.10** b) ..... $\boxed{\frac{-\alpha B\underline{I}}{h+\mathrm{j}(m\omega-\frac{k}{\omega})}}$

**7.10** c) ..... c

**7.11** a) ..... $\boxed{-Ri^2}$

**7.11** b) ..... $\boxed{mv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - fv}$

**7.11** c) ..... $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}_\mathrm{J}}$

**7.12** a) ..... $\boxed{-iaB\overrightarrow{e_y}}$

**7.12** b) ..... $\boxed{ibB\overrightarrow{e_x}}$

**7.12** c) ..... $\boxed{iaB\overrightarrow{e_y}}$

**7.12** d) ..... $\boxed{-ibB\overrightarrow{e_x}}$

**7.12** e) ..... $\boxed{\overrightarrow{0}}$

**7.13** a) ..... $\boxed{\overrightarrow{0}}$

**7.13** b) ..... $\boxed{-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}aB\overrightarrow{e_z}}$

**7.13** c) ..... $\boxed{i\dfrac{\sqrt{3}}{2}aB\overrightarrow{e_x}}$

**7.14** a) ..... $\boxed{S\overrightarrow{e_y}}$

**7.14** b) ..... $\boxed{-IBS\overrightarrow{e_z}}$

**7.14** c) ..... $\boxed{\overrightarrow{0}}$

**7.14** d) ..... $\boxed{IBS\overrightarrow{e_x}}$

**7.14** e) ..... $\boxed{\text{c}}$

**7.14** f) ..... $\boxed{\text{d}}$

**7.14** g) ..... $\boxed{\text{d}}$

**7.15** a) ..... $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{B^2\ell^2}{mR}v = 0}$

**7.15** b) ..... $\boxed{\text{c}}$

**7.16** a) ..... $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{B^2\ell^2}{mr}v(t) = -\dfrac{B\ell E}{mr}}$

**7.16** b) ..... $\boxed{-\dfrac{E}{B\ell}}$

**7.17** a) ..... $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2 i(t)}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{r}{L}\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{B^2\ell^2}{mL}i(t) = 0}$

**7.17** b) ..... $\boxed{\text{a}}$

**7.17** c) ..... $\boxed{\text{c}}$

**7.17** d) ..... $\boxed{\text{d}}$

**7.18** a) ..... $\boxed{\text{b}}$

**7.18** b) ..... $\boxed{E - Ba\dot{x} - Ri}$

**7.18** c) ..... $\boxed{-\dfrac{(Ba)^2}{m}i - R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$

**7.18** d) ..... $\boxed{R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{(Ba)^2}{m}i = 0}$

**7.18** e) ..... $\boxed{R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \left(\dfrac{(Ba)^2}{m} + \dfrac{1}{C}\right)i = 0}$

**7.18** f) ..... $\boxed{L\dfrac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \left(\dfrac{(Ba)^2}{m} + \dfrac{1}{C}\right)i = 0}$

**7.19** a) ..... $\boxed{\text{b}}$

**7.19** b) ..... $\boxed{x_0 + \dfrac{e}{Ba}\left(t + \tau \mathrm{e}^{-\dfrac{t}{\tau}} - \tau\right)}$

**7.20** a) ..... $\boxed{\text{b}}$

**7.20** b) ..... $\boxed{\text{b}}$

**7.21** a) ..... $\boxed{\text{d}}$

**7.21** b) ..... $\boxed{-iB2\pi RN\overrightarrow{e_z}}$

**7.22** a) ..... $\boxed{\text{a}}$

**7.22** b) ..... $\boxed{-S\overrightarrow{e_z}}$

**7.22** c) ..... $\boxed{-B\dfrac{t}{\tau}S}$

**7.22** d) ..... $\boxed{\dfrac{BS}{\tau}}$

**7.22** e) ..... $\boxed{300\,\mathrm{mV}}$

**7.22** f) ..... $\boxed{\text{b}}$

**7.22** g) ..... $\boxed{S\overrightarrow{e_z}}$

**7.22** h) ..... $\boxed{\dfrac{BSt}{\tau}}$

**7.22** i) ..... $\boxed{-\dfrac{BS}{\tau}}$

**7.22** j) ..... $\boxed{300\,\mathrm{mV}}$

**7.23** a) ..... $\boxed{Ei - Ri^2}$

**7.23** b) ..... $\boxed{mv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + kxv + \alpha v^2}$

**7.23** c) ..... $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}_\mathrm{f} + \mathcal{P}_\mathrm{J}}$

## Corrigés

**7.1** e)

.....

**7.1** f)

.....

**7.3** a) Il y a trois façons de modifier un flux : modifier la surface, modifier le champ, changer l'angle entre le vecteur normal à la surface et le champ. Ici, comme $\vec{B} \wedge \vec{n} = \vec{0}$ à $t = 0$, les deux vecteurs sont colinéaires. Comme le cadre tourne autour d'un de ses côtés , l'angle entre $\vec{n}$ et $\vec{B}$ va varier au cours du temps.

.....

**7.3** b) La surface où le champ est non nul augmente au cours du temps tant que le cadre n'est pas entièrement dans la zone où règne le champ.

.....

**7.3** c) Le produit scalaire entre $\vec{B}(t)$ et $\vec{n}$ est nul.

.....

**7.3** d) Ni la surface, ni l'angle entre $\vec{B}$ et $\vec{n}$ ne varie.

.....

**7.3** e) La surface varie.

.....

**7.3** f) Il ne faut pas confondre les termes « uniforme » (ne varie pas dans l'espace) et « constant » (ne varie pas dans le temps).

.....

**7.4** b)

**7.4** c)

**7.4** d)

**7.5** a) On a $\Phi = \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} B_m \cos(\omega t) r\,\mathrm{d}r \times \mathrm{d}\theta = B_m \cos(\omega t) \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} r\,\mathrm{d}r \times \mathrm{d}\theta.$

**7.5** b) On a $\Phi = \int_{r=0}^{a}\int_{\theta=0}^{2\pi} B_m \cos(\omega t) r\,\mathrm{d}r \times \mathrm{d}\theta = B_m \cos(\omega t) \int_{r=0}^{a}\int_{\theta=0}^{2\pi} r\,\mathrm{d}r \times \mathrm{d}\theta.$

**7.5** d) On a $\Phi' = \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} B_0\left(1-\frac{r}{a}\right) r\,\mathrm{d}r \times \mathrm{d}\theta = B_0 \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} \left(r - \frac{r^2}{a}\right) \mathrm{d}r \times \mathrm{d}\theta = 2\pi B_0 \left[\frac{R^2}{2} - \frac{R^3}{3a}\right].$

**7.5** e) On a $\Phi' = \int_{r=0}^{a}\int_{\theta=0}^{2\pi} B_0\left(1-\frac{r}{a}\right) r\,\mathrm{d}r \times \mathrm{d}\theta = B_0 \int_{r=0}^{a}\int_{\theta=0}^{2\pi} \left(r - \frac{r^2}{a}\right) \mathrm{d}r \times \mathrm{d}\theta = 2\pi B_0 \frac{a^2}{6}.$

**7.6** a) L'angle entre la normale à la spire et le champ magnétique $\vec{B}$ étant $\omega t$, le calcul du flux s'écrit

$$\Phi = \iint_S \vec{B}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \iint_S B\cos(\omega t)\,\mathrm{d}S = B\cos(\omega t)\iint_S \mathrm{d}S = B\pi R^2\cos(\omega t).$$

**7.7** d) Le flux propre à travers les N spires sera $\dfrac{\mu_0 N^2 I a}{2\pi}\ln\left(\dfrac{d+a}{d}\right) = LI$.

**7.8** b) On a $\dfrac{\mathrm{d}(rE(r))}{\mathrm{d}r} = B_0 r\omega\sin(\omega t)$. Donc, $E = \displaystyle\int_{r'=0}^{r} B_0 r'\omega\sin(\omega t)\,\mathrm{d}r' = B_0\omega\sin(\omega t)\int_{r'=0}^{r} r'\,\mathrm{d}r'$.

**7.9** b) Chaque terme de l'équation doit avoir même dimension. Or $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ a pour dimension $\dfrac{\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-1}}{\mathrm{T}}$, donc $\dfrac{a^2B^2v}{Rm}$ a pour dimension $\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-2}$. On déduit la dimension de $\dfrac{a^2B^2}{Rm}$ en divisant $\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-2}$ par la dimension de la vitesse $\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-1}$. Donc $\dfrac{a^2B^2}{Rm}$ a pour dimension $\mathrm{T}^{-1}$.

**7.11** a) On a $e\times i = Ri\times i$ donc $-Bav\times i = Ri^2$ donc $Bavi = -Ri^2$.

**7.11** b) On a $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\times v = f\times v + f_\mathrm{L}\times v$ donc $mv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = f\times v + Bai\times v$ donc $Bavi = mv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - fv$.

**7.11** c) D'après les questions précédentes, on peut égaliser les deux expressions de $Bavi$ ; on a donc

$$-Ri^2 = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - fv \qquad \text{donc} \qquad fv = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + Ri^2 = \frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}_\mathrm{J} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) + \mathcal{P}_\mathrm{J} = \frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}_\mathrm{J}.$$

**7.12** e) Dans le cas d'un champ uniforme (égal à la même valeur en tout point de l'espace), la résultante des forces de Laplace s'exerçant sur un circuit fermé est nulle.

**7.13** a) Le champ magnétique $\vec{B}$ et le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ sont tous deux portés par $\vec{e_x}$. Le produit vectoriel $\overrightarrow{\mathrm{QR}}\wedge\vec{B}$ étant nul, on a $\vec{F_\mathrm{L}} = \vec{0}$.

**7.13** b) Le courant étant uniforme, la force de Laplace s'écrit : $\vec{F_\mathrm{L}} = i\overrightarrow{\mathrm{RS}}\wedge\vec{B}$. On a

$$\overrightarrow{\mathrm{RS}} = a\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\vec{e_y} + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\vec{e_z}\right) = \frac{a}{2}\left(\vec{e_y} + \sqrt{3}\vec{e_z}\right) \qquad \text{donc} \qquad \vec{F_\mathrm{L}} = i\frac{a}{2}\left(\vec{e_y} + \sqrt{3}\vec{e_z}\right)\wedge\left(B\vec{e_y}\right) = -i\frac{\sqrt{3}}{2}aB\vec{e_z}.$$

**7.13** c) Le courant étant uniforme, la force de Laplace s'écrit : $\vec{F_\mathrm{L}} = i\overrightarrow{\mathrm{SQ}}\wedge\vec{B}$. On a

$$\overrightarrow{\mathrm{SQ}} = a\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\vec{e_y} - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\vec{e_z}\right) = \frac{a}{2}\left(\vec{e_y} + \sqrt{3}\vec{e_z}\right) \qquad \text{donc} \qquad \vec{F_\mathrm{L}} = i\frac{a}{2}\left(\vec{e_y} - \sqrt{3}\vec{e_z}\right)\wedge\left(B\vec{e_y}\right) = i\frac{\sqrt{3}}{2}aB\vec{e_x}.$$

**7.14** a) D'après la règle de la main droite, le sens circulation du courant d'intensité $I$ impose que $\vec{S} = S\vec{e_y}$.

**7.14** b) D'après l'expression du couple des forces de Laplace, on a $\vec{\Gamma}_\mathrm{L} = \vec{\mathcal{M}}\wedge\vec{B_1} = IS\vec{e_y}\wedge B\vec{e_x} = -IBS\vec{e_z}$.

**7.14** c) D'après l'expression du couple des forces de Laplace, on a $\vec{\Gamma}_\mathrm{L} = \vec{\mathcal{M}}\wedge\vec{B_1} = IS\vec{e_y}\wedge B\vec{e_y} = \vec{0}$.

**7.14** d) D'après l'expression du couple des forces de Laplace, on a $\vec{\Gamma}_\mathrm{L} = \vec{\mathcal{M}}\wedge\vec{B_1} = IS\vec{e_y}\wedge B\vec{e_z} = IBS\vec{e_x}$.

**7.14** e) Le couple des forces de Laplace produit par $\overrightarrow{B_3}$ est orienté selon les $x > 0$, d'après la règle de la main droite, la spire va donc tourner autour de l'axe (O$x$) dans le sens direct.

.....

**7.14** f) Aucun couple calculé plus tôt n'est orienté selon $\overrightarrow{e_y}$, il n'y a donc pas de champ magnétique qui provoque une rotation de la spire autour de l'axe (O$y$).

.....

**7.14** g) Le couple des forces de Laplace produit par $\overrightarrow{B_1}$ est orienté selon les $z < 0$, d'après la règle de la main droite, la spire va donc tourner autour de l'axe (O$z$) dans le sens indirect. Il n'y a donc pas de champ magnétique qui provoque une rotation de la spire autour de l'axe (O$z$) dans le sens direct.

.....

**7.15** a) L'équation électrique permet d'établir que $i(t) = \dfrac{B\ell v}{R}$. En injectant cette relation dans l'équation mécanique, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{B^2\ell^2}{mR}v = 0.$$

.....

**7.15** b) La résolution de l'équation différentielle sur $v$ donne $v(t) = A\exp\left(-\dfrac{B^2\ell^2}{mR}t\right)$. À l'instant $t = 0$, on a$v(t = 0) = v_0$, donc $A\exp(0) = v_0$ et donc $A = v_0$. Ainsi, on a $v(t) = v_0\exp\left(-\dfrac{B^2\ell^2}{mR}t\right)$.

.....

**7.16** a) On isole $i(t)$ dans l'équation électrique pour obtenir $i = \dfrac{B\ell v(t)}{r} + \dfrac{E}{r}$. En injectant ce résultat dans l'équation mécanique, on obtient

$$m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{B^2\ell^2}{r}v(t) - \frac{B\ell E}{r} \qquad \text{donc} \qquad \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{B^2\ell^2}{mr}v(t) = -\frac{B\ell E}{mr}.$$

.....

**7.16** b) La vitesse limite $v_{\text{lim}}$ correspond à la vitesse atteinte en régime permanent soit quand $\dfrac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = 0$.

On a donc $\dfrac{B^2\ell^2}{r}v_{\text{lim}} = -\dfrac{B\ell E}{r}$. On en déduit $v_{\text{lim}} = -\dfrac{E}{B\ell}$.

.....

**7.17** a) À partir de l'équation électrique, on a $v = \dfrac{1}{B\ell}\left(L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + ri(t)\right)$, qu'on injecte dans l'équation mécanique.

On obtient $\dfrac{m}{B\ell}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + ri\right) = -B\ell i$, et ainsi $\dfrac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{r}{L}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{B^2\ell^2}{mL}i = 0$.

.....

**7.17** c) On calcule son discriminant $\Delta = \dfrac{r^2}{L^2} - 4\dfrac{B^2\ell^2}{mL} = \dfrac{1}{0,25} - 4 \times \dfrac{1 \times 10^{-2}}{0,01 \times 0,5} = 4 - 4 \times 2 = -4$.

.....

**7.17** d) Le discriminant étant négatif, les racines complexes sont

$$\rho_{1/2} = -\frac{r}{2L} \pm \mathrm{j}\frac{1}{2}\sqrt{4\frac{B^2\ell^2}{mL} - \frac{r^2}{L^2}} = -\frac{r}{2L} \pm \mathrm{j}\omega$$

avec $\omega = \dfrac{1}{2}\sqrt{4\dfrac{B^2\ell^2}{mL} - \dfrac{r^2}{L^2}}$. On obtient $i(t) = \mathrm{e}^{-\frac{r}{2L}t}(\alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t))$.

.....

**7.18** a) Avec la règle de main droite, en utilisant l'orientation du contour, on oriente la surface pour le calcul du flux (suivant $-\overrightarrow{e_z}$). La source de tension induite de fém $e$ a une polarité (sa flèche tension) dans le même sens que l'orientation du contour.

.....

**7.18** b) D'après la loi des mailles, on a $E + e = u + Ri$, donc $E - Ba\dot{x} = u + Ri$, et donc $u = E - Ba\dot{x} - Ri$.

**7.18** c) D'après la question précédente, $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E - Ba\dot{x} - Ri) = -Ba\ddot{x} - R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$. Comme $\ddot{x} = \dfrac{Ba}{m}i$, on a

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{(Ba)^2}{m}i - R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

**7.18** d) Le dipôle 1 est un fil, sa tension $u$ est donc nulle, ainsi $-\dfrac{(Ba)^2}{m}i - R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$, ou $R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{(Ba)^2}{m}i = 0$.

**7.18** e) Le dipôle 2 est un condensateur traversé par un courant d'intensité $i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, soit $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \dfrac{i}{C}$. D'où

$$\frac{i}{C} = -\frac{(Ba)^2}{m}i - R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \qquad \text{et donc} \qquad R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{(Ba)^2}{m} + \frac{1}{C}\right)i = 0.$$

**7.18** f) Le dipôle 4 est une association série d'une bobine et d'un condensateur. La tension à ses bornes est donc $u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u_C$ avec $u_C$ la tension aux bornes du condensateur. Donc $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = L\dfrac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = L\dfrac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{i}{C}$. D'où

$$L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{i}{C} = -\frac{(Ba)^2}{m}i - R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \qquad \text{et donc} \qquad L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{(Ba)^2}{m} + \frac{1}{C}\right)i = 0.$$

**7.19** a) L'argument $-\dfrac{t}{\tau}$ de l'exponentielle doit être sans dimension. Donc $\tau$ a la même dimension que $t$, soit T.

**7.20** b) Chaque terme de l'équation doit avoir même dimension.

*On pouvait aussi exploiter le fait que* $\left[\dfrac{R}{L}\right] = \mathrm{T}^{-1}$ *et* $[g] = \mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-2}$.

**7.21** b) On a $\overrightarrow{F_\mathrm{L}} = \displaystyle\int_{\theta=0}^{2\pi N} iR\,\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_\theta} \wedge (B\overrightarrow{e_r}) = -iRB\int_{\theta=0}^{2\pi N} d\theta\overrightarrow{e_z} = -iB2\pi RN\overrightarrow{e_z}$.

**7.22** a) La flèche de tension de la fém $e$ induite est orientée dans le même sens que le courant induit $i_\mathrm{ind}$, soit horaire, donc elle est orientée dans le même sens que $E$.

**7.22** b) D'après la règle de la main droite, le vecteur surface du circuit $\overrightarrow{S}$ est orienté selon $-\overrightarrow{e_z}$, $S$ étant positif, il vient que $\overrightarrow{S} = -S\overrightarrow{e_z}$.

**7.22** c) Le flux magnétique traversant le circuit est tel que $\phi = \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{S} = B\dfrac{t}{\tau}\overrightarrow{e_z}\cdot(-S\overrightarrow{e_z}) = -B\dfrac{t}{\tau}S$.

**7.22** d) La fém apparaissant dans le circuit est telle que $e = -\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{\tau}\dfrac{\mathrm{d}(-BtS)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{BS}{\tau}$.

**7.22** e) D'après la loi des mailles $u = E + e = E + \dfrac{BS}{\tau}$. D'où

$$u = 2{,}00\times10^{-3}\,\mathrm{V} + \frac{2\,\mathrm{T}}{1\,\mathrm{s}}\times500\times10^{-4}\,\mathrm{m}^2 = 300\,\mathrm{mV}.$$

**7.22** f) La flèche de tension de la fém $e$ induite est orientée dans le même sens que le courant induit $i_{\text{ind}}$, soit anti-horaire, donc elle est orientée dans le sens opposé à $E$.

.....

**7.22** g) D'après la règle de la main droite, le vecteur surface du circuit $\vec{S}$ est orienté selon $\vec{e_z}$, $S$ étant positif, il vient que $\vec{S} = S\vec{e_z}$.

.....

**7.22** h) Le flux magnétique traversant le circuit est tel que $\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B\dfrac{t}{\tau}\vec{e_z} \cdot S\vec{e_z} = \dfrac{BSt}{\tau}$.

.....

**7.22** i) La fém apparaissant dans le circuit est telle que $e = -\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{\tau}\dfrac{\mathrm{d}(BtS)}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{BS}{\tau}$.

.....

**7.22** j) D'après la loi des mailles $u = E - e = E + \dfrac{BS}{\tau}$. D'où

$$u = 2{,}00 \times 10^{-3}\,\mathrm{V} + \frac{2\,\mathrm{T}}{1\,\mathrm{s}} \times 500 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2 = 300\,\mathrm{mV}.$$

.....

**7.23** a) On a $E \times i + e \times i = Ri \times i$ donc $Ei - Bav \times i = Ri^2$ et donc $Bavi = Ei - Ri^2$.

.....

**7.23** b) On a $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \times v = f_{\mathrm{L}} \times v - kx \times v - \alpha v \times v$ donc $mv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = Bai \times v - kxv - \alpha v^2$. Finalement, on a

$$Bavi = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + kxv + \alpha v^2.$$

.....

**7.23** c) D'après les questions précédentes, on peut égaliser les deux expressions de $Bavi$.

On a donc $Ei - Ri^2 = mv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + kxv + \alpha v^2$ et donc

$$Ei = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + kxv + \alpha v^2 + Ri^2 = \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}k\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}_{\mathrm{f}} + \mathcal{P}_{\mathrm{J}} = \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) + \mathcal{P}_{\mathrm{f}} + \mathcal{P}_{\mathrm{J}} = \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}_{\mathrm{f}} + \mathcal{P}_{\mathrm{J}}.$$

.....

# Fiche n° 8. Ferromagnétisme

## Réponses

**8.1** a) ..... $\boxed{\text{b}}$

**8.1** b) ..... $\boxed{\dfrac{\mu_0|\mathcal{M}|}{4\pi R_T^3}\sqrt{4\cos^2\theta_P+\sin^2\theta_P}}$

**8.1** c) ..... $\boxed{-8{,}0\times10^{22}\ \mathrm{A\cdot m^2}}$

**8.2** a) ..... $\boxed{\dfrac{-e\omega}{2\pi}}$

**8.2** b) ..... $\boxed{-\dfrac{e\omega}{2}R^2\overrightarrow{e_z}}$

**8.3** a) ..... $\boxed{-\mathcal{M}B_{\text{ext}}\cos(\alpha)}$

**8.3** b) ..... $\boxed{0}$

**8.3** c) ..... $\boxed{\pi}$

**8.4** a) ..... $\boxed{\text{d}}$

**8.4** b) ..... $\boxed{0,\ \pi}$

**8.4** c) ..... $\boxed{\text{a}}$

**8.4** d) ..... $\boxed{\text{b}}$

**8.5** a) ..... $\boxed{\mathcal{M}a\overrightarrow{e_x}}$

**8.5** b) ..... $\boxed{2\mathcal{M}bx\overrightarrow{e_x}}$

**8.5** c) ..... $\boxed{\dfrac{c}{x}\mathcal{M}\overrightarrow{e_x}}$

**8.5** d) ..... $\boxed{\text{a}}$

**8.6** a) ..... $\boxed{\text{b et c}}$

**8.6** b) ..... $\boxed{\text{d}}$

**8.6** c) ..... $\boxed{\oint_\Gamma \vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}=Ni}$

**8.6** d) ..... $\boxed{B=\dfrac{\mu Ni}{\ell}}$

**8.6** e) ..... $\boxed{\dfrac{\mu S}{\ell}Ni}$

**8.6** f) ..... $\boxed{\dfrac{\ell}{\mu S}\Phi}$

**8.6** g) ..... $\boxed{\dfrac{\ell}{\mu S}}$

**8.7** a) ..... $\boxed{\text{b}}$

**8.7** b) ..... $\boxed{-\chi_m\dfrac{B^2}{\mu_0(1+\chi_m)}}$

**8.7** c) ..... $\boxed{\text{b}}$

## Corrigés

**8.1** a) Le dipôle est orienté du nord géographique vers le pôle sud. Il vient donc que $\vec{\mathcal{M}}\cdot\overrightarrow{e_z}=\mathcal{M}<0$.

.....

**8.1** b) On calcule la norme de $\vec{B}$ : $||\vec{B}||=\sqrt{B_r^2+B_\theta^2+B_\varphi^2}=\dfrac{\mu_0|\mathcal{M}|}{4\pi R_T^3}\sqrt{4\cos^2\theta_P+\sin^2\theta_P}$.

.....

**8.1** c) L'étudiant mesure $||B||\approx5{,}1\times10^{-5}$ T. Ainsi, il obtient :

$$\mathcal{M}=-\frac{4\pi R_T^3}{\mu_0\sqrt{4\cos^2\theta_P+\sin^2\theta_P}}B=-\frac{4\pi(6\,370\times10^3\ \mathrm{m})^3}{4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{T\cdot m\cdot A^{-1}}\sqrt{4\cos^2 41°+\sin^2 41°}}5{,}1\times10^{-5}\ \mathrm{T}=-8{,}0\times10^{22}\ \mathrm{A\cdot m^2}.$$

.....

**8.2** a) L'intensité vaut $I=\dfrac{-e}{T}$ avec $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$. Ainsi, nous obtenons $I=\dfrac{-e\omega}{2\pi}$.

.....

**8.2** b) Nous avons par définition $\overrightarrow{\mathcal{M}} = IS\vec{n}$. D'après la question précédente $I = \dfrac{-e\omega}{2\pi}$ et la surface de la boucle vaut $S = \pi R^2$. La normale à la boucle est donnée par le vecteur unitaire $\vec{e_z}$. Nous obtenons donc $\overrightarrow{\mathcal{M}} = -\dfrac{e\omega}{2}R^2\vec{e_z}$.

.....

**8.3** b) Le système étant conservatif, la position d'équilibre stable est donnée par un minimum d'énergie potentielle. Soit d'après l'expression de l'énergie potentielle $E_p = -\mathcal{M}B_{\text{ext}}\cos(\alpha)$ : $\alpha = 0$.

Le moment magnétique est dans la même direction et le même sens que le champ magnétique extérieur.

.....

**8.3** c) Le système étant conservatif, la position d'équilibre instable est donnée par un maximum d'énergie potentielle. Soit d'après l'expression de l'énergie potentielle $E_p = -\mathcal{M}B_{\text{ext}}\cos(\alpha)$ : $\alpha = \pi$.

Le moment magnétique est dans la même direction et le sens opposé que le champ magnétique extérieur.

.....

**8.4** a) Le théorème du moment cinétique appliqué à l'aimant suivant l'axe (O$z$) s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}(J\dot{\alpha})}{\mathrm{d}t} = \left(\overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}_{\text{ext}}\right) \cdot \vec{e_z}.$$

Nous avons $\overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}_{\text{ext}} = \mathcal{M}(\cos(\alpha)\vec{e_x} + \sin(\alpha)\vec{e_y}) \wedge B_{\text{ext}}\vec{e_x} = -\mathcal{M}B_{\text{ext}}\sin(\alpha)\vec{e_z}$.

Ainsi, la solution s'écrit : $J\ddot{\alpha} = -\mathcal{M}B_{\text{ext}}\sin(\alpha)$.

.....

**8.4** b) À l'équilibre $\ddot{\alpha} = 0$, l'équation différentielle en $\alpha$ se réduit alors à $\sin(\alpha) = 0$. Les solutions appartenant au domaine de définition sont 0 et $\pi$.

.....

**8.4** c) Considérons une petite perturbation qui écarte le moment de sa position d'équilibre $\alpha = \alpha_{\text{eq1}} + \varepsilon = \varepsilon$.

L'équation différentielle en $\alpha$ devient donc : $J\ddot{\varepsilon} + \mathcal{M}B_{\text{ext}}\sin\varepsilon = 0$. Dans l'approximation des petits angles, nous obtenons : $J\ddot{\varepsilon} + \mathcal{M}B_{\text{ext}}\varepsilon = 0$.

Étant donné que $B_{\text{ext}}\mathcal{M} > 0$, nous reconnaissons l'équation d'un oscillateur harmonique traduisant des oscillations autour de la position d'équilibre stable $\alpha_{\text{eq1}}$.

.....

**8.4** d) Considérons une petite perturbation qui écarte le moment de sa position d'équilibre $\alpha = \alpha_{\text{eq2}} + \varepsilon = \pi + \varepsilon$.

L'équation différentielle en $\alpha$ devient donc : $J\ddot{\varepsilon} + \mathcal{M}B_{\text{ext}}\sin(\pi + \varepsilon) = 0$. Nous obtenons donc : $J\ddot{\varepsilon} - \mathcal{M}B_{\text{ext}}\sin(\varepsilon) = 0$. Ce qui devient dans l'approximation des petits angles : $J\ddot{\varepsilon} - \mathcal{M}B_{\text{ext}}\varepsilon = 0$.

Comme $B_{\text{ext}}\mathcal{M} > 0$, cette équation différentielle n'est pas celle d'un oscillateur harmonique. La solution diverge. $\alpha_{\text{eq2}}$ n'est donc pas une position d'équilibre stable.

.....

**8.5** a) Comme $\overrightarrow{\mathcal{M}} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}$ est l'opérateur $\mathcal{M}\dfrac{d}{dx}$ et $\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x} = a$, $\vec{F} = \mathcal{M}\dfrac{d}{dx}(ax)\vec{e_x} = \mathcal{M}a\vec{e_x}$.

.....

**8.5** b) Dans ce cas, nous avons $\dfrac{dB}{dx} = 2bx$ d'où $\vec{F} = \mathcal{M}\dfrac{d}{dx}\left(bx^2\right)\vec{e_x} = 2\mathcal{M}bx\vec{e_x}$.

.....

**8.5** c) Dans ce cas, nous avons $\dfrac{dB}{dx} = \dfrac{c}{x}$ d'où $\vec{F} = \mathcal{M}\dfrac{d}{dx}(c\ln(x))\vec{e_x} = \dfrac{c}{x}\mathcal{M}\vec{e_x}$.

.....

**8.5** d) Si $B(x)$ est une fonction croissante alors la force sera orientée selon $+\vec{e_x}$. L'aimant se déplacera alors vers les zones de fort champ magnétique.

Si $B(x)$ est une fonction décroissante alors la force sera orientée selon $-\vec{e_x}$. L'aimant se déplacera alors vers les zones de fort champ magnétique.

.....

**8.6** c) On écrit le théorème d'Ampère : $\oint_\Gamma \vec{H} \cdot \vec{d\ell} = Ni$, où $N$ est le nombre de spires de la bobine.

.....

**8.6** d) Si les courants sont suffisamment faibles pour que le matériau soit dans son domaine linéaire, on a :

$$\frac{B}{\mu}\ell = Ni \qquad \text{donc} \qquad B = \frac{\mu N i}{\ell}.$$

.....

**8.6** e) Le flux du champ magnétique s'écrivant $\Phi = BS$, on peut injecter l'expression du champ $B$ : $\Phi = \dfrac{\mu S}{\ell}Ni$.

.....

**8.6** f) On remplace simplement : $Ni = \text{fmm} = \dfrac{\ell}{\mu S}\Phi$.

.....

**8.6** g) On appelle **reluctance** $\mathcal{R} = \dfrac{Ni}{\Phi} = \dfrac{\ell}{\mu S}$ le rapport entre la « force magnétomotrice » (fmm) et le flux magnétique.

.....

**8.7** a) Par définition, on a $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H}$.

.....

**8.7** c) Sachant que $|\chi_m| \ll 1$, nous pouvons simplifier l'expression de l'énergie potentielle d'interaction : $e_p = -\chi_m \dfrac{B^2}{\mu_0}$. Comme $\chi_m < 0$, l'énergie potentielle d'interaction décroît quand le champ magnétique décroît : les milieux diamagnétiques sont donc attirés vers les zones de faible champ magnétique.

.....

# Fiche n° 9. Ondes électromagnétiques I

## Réponses

**9.1** a) ..... $3 \times 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

**9.1** b) ..... $5 \times 10^{14}\,\mathrm{Hz}$

**9.1** c) ..... $1 \times 10^{-1}\,\mathrm{m}$

**9.1** d) ..... $1 \times 10^{-20}\,\mathrm{s}$

**9.2** a) ..... $\dfrac{E_0^2 S}{2\mu_0 c}$

**9.2** b) ..... $1 \times 10^{-5}\,\mathrm{W}$

**9.2** c) ..... Ampoule classique

**9.3** a) ..... $B_0 = \sqrt{\dfrac{2\mu_0 \langle P \rangle}{cS}}$

**9.3** b) ..... b

**9.4** a) ..... $-\omega E_0 \sin(\omega t - kx)\vec{e_z}$

**9.4** b) ..... $kE_0 \sin(\omega t - kx)\vec{e_z}$

**9.4** c) ..... $\vec{0}$

**9.4** d) ..... $-k^2 E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$

**9.4** e) ..... $-\omega^2 E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$

**9.5** a) ..... $-\omega B_0 \sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right) \sin(\omega t - kx)\vec{e_z}$

**9.5** b) ..... $kB_0 \sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right) \sin(\omega t - kx)\vec{e_z}$

**9.5** c) ..... $\dfrac{\pi}{a} B_0 \cos\left(\dfrac{\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$

**9.5** d) ..... $-\omega^2 B_0 \sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$

**9.5** e) ..... $-k^2 B_0 \sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$

**9.5** f) ..... $-\left(\dfrac{\pi}{a}\right)^2 B_0 \sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$

**9.6** a) ..... $0$

**9.6** b) ..... $-kE_0 \sin(\omega t - kx)\vec{e_y}$

**9.6** c) ..... $k^2 E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$

**9.7** a) ..... $E_0 \sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right)\left(-\dfrac{\pi}{a}\cos(\omega t - kz) + k\alpha \sin(\omega t - kz)\right)$

**9.7** b) ..... $E_0 \cos\left(\dfrac{\pi y}{a}\right)\left(\dfrac{\pi}{a}\alpha \cos(\omega t - kz) - k \sin(\omega t - kz)\right)\vec{e_x}$

**9.7** c) ..... $-E_0 \cos(\omega t - kz)\left(\left(\dfrac{\pi}{a}\right)^2 + k^2\right) \times \left(\cos\left(\dfrac{\pi y}{a}\right) + \alpha \sin\left(\dfrac{\pi y}{a}\right)\right)\vec{e_x}$

**9.8** a) ..... c

**9.8** b) ..... $-\vec{\Delta}\vec{E}$

**9.8** c) ..... $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$

**9.9** a) ..... signal n° 1

**9.9** b) ..... signal n° 2

**9.9** c) ..... signal n° 3

**9.10** a) ..... Progressive

**9.10** b) ..... Stationnaire, donc non progressive et harmonique

**9.10** c) ..... Progressive et harmonique

**9.11** ..... a

**9.12** a) ..... $-(\alpha^2 + k^2)\vec{E}$

**9.12** b) ..... $-\omega^2 \vec{E}$

**9.12** c) ..... $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2$

**9.12** d) ..... Oui

**9.13** a) ..... $\dfrac{ak}{r} \sin(\omega t - kr)\vec{e_\varphi}$

**9.13** b) ..... $\boxed{\dfrac{ak}{\omega r}\cos(\omega t - kr)\vec{e_\varphi}}$

**9.13** c) ..... (a), (c) et (e)

**9.14** a) ..... $\boxed{z = ct - (2p+1)\dfrac{\lambda}{4}}$

**9.14** b) ..... $\boxed{x = qa}$

**9.15** a) ..... $\boxed{\mathrm{j}\omega\underline{\vec{E}}}$

**9.15** b) ..... $\boxed{-\mathrm{j}k_x\underline{E}_x}$

**9.15** c) ..... $\boxed{-\mathrm{j}k_z\underline{E}_x\vec{e_y} + \mathrm{j}k_y\underline{E}_x\vec{e_z}}$

**9.15** d) ..... $\boxed{-k^2\underline{\vec{E}}}$

**9.15** e) ..... (d)

**9.15** f) ..... (a)

**9.15** g) ..... (c)

**9.15** h) ..... (b)

**9.16** a) ..... $\boxed{v_\varphi = \dfrac{c}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}}$

**9.16** b) ..... $\boxed{v_\mathrm{g} = c\sqrt{1-\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$

**9.17** a) ..... $\boxed{\varepsilon_0 c E_0^2\cos^2(\omega t - ky)\vec{e_y}}$

**9.17** b) ..... $\boxed{\varepsilon_0 E_0^2\cos^2(\omega t - ky)}$

**9.18** a) ..... $\boxed{\dfrac{\varepsilon_0 c a^2}{r^2}\cos^2(\omega t - kr)\vec{e_r}}$

**9.18** b) ..... $\boxed{\dfrac{\varepsilon_0 a^2}{r^2}\cos^2(\omega t - kr)}$

**9.18** c) ..... $\boxed{4\pi\varepsilon_0 c a^2\cos^2(\omega t - kr)}$

**9.19** a) ..... $\boxed{\dfrac{E_0}{\omega}\left[-k\sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\vec{e_x} - \dfrac{\pi}{a}\cos\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\sin(\omega t - kz)\vec{e_z}\right]}$

**9.19** b) ..... $\boxed{\dfrac{E_0^2}{\mu_0}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\left[\dfrac{1}{c}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos^2(\omega t - kz)\vec{e_z} - \dfrac{\pi}{a\omega}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\sin(\omega t - kz)\vec{e_x}\right]}$

**9.19** c) ..... $\boxed{\dfrac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2}\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\vec{e_z}}$

**9.20** a) ..... (a)

**9.20** b) ..... (f)

**9.20** c) ..... (c)

**9.20** d) ..... (d)

**9.20** e) ..... (c)

**9.20** f) ..... (a)

**9.20** g) ..... (b)

**9.20** h) ..... (d)

## Corrigés

**9.2** a) La puissance rayonnée par le LASER a alors pour expression $P = \iint \vec{\Pi}\cdot\vec{dS} = \Pi S$. Le vecteur de Poynting vaut

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = -\frac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kx)\vec{e_z}\wedge\vec{e_y} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kx)\vec{e_x}.$$

En moyenne, puisque $\langle\cos^2\rangle = \dfrac{1}{2}$, on a alors : $\langle P\rangle = \dfrac{E_0^2 S}{2\mu_0 c}$.

.....

**9.2** b) Numériquement, on a $\langle P\rangle = \dfrac{1\times10^2\,\mathrm{V^2\cdot m^{-1}}\cdot 1\times10^{-6}\,\mathrm{mm^2}}{2(4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{H\cdot m^{-1}})(3\times10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})} = \dfrac{10^{-4}}{750}\mathrm{W} = 1\times10^{-5}\,\mathrm{W}$.

.....

**9.2** c) Contrairement à ce que l'on pourrait penser, c'est l'ampoule classique à filament qui est la plus puissante.

.....

**9.3** a) La puissance moyenne de l'onde s'exprime en fonction de la norme de $B_0$ :

$$\langle P\rangle = \frac{E_0^2 S}{2\mu_0 c} = \frac{cB_0^2 S}{2\mu_0} \qquad \text{donc} \qquad B_0 = \sqrt{\frac{2\mu_0\langle P\rangle}{cS}}.$$

.....

**9.3** b) Numériquement, on a $B_0 = \sqrt{\dfrac{2(4\pi\times 10^{-7}\,\mathrm{H\cdot m^{-1}})(1\,\mathrm{W})}{1\,\mathrm{m^2}\cdot 3\times 10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}} = 1\times 10^{-8}\,\mathrm{T}$. Le champ terrestre est plus intense que le champ de l'onde radiofréquence.

.....

**9.6** a) L'unique composante de $\vec{E}$, ici suivant $\vec{e_z}$, ne dépend pas de $z$, donc

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0.$$

.....

**9.6** b) On a $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \left(\dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{e_z}$, ce qui donne

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = (0-0)\vec{e_x} + \left(0 - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + (0-0)\vec{e_z} = -kE_0\sin(\omega t - kx)\vec{e_y}.$$

.....

**9.6** c) On a $\vec{\Delta}\vec{E} = \Delta E_x\vec{e_x} + \Delta E_y\vec{e_y} + \Delta E_z\vec{e_z}$. Ici, comme $E_y = E_x = 0$, il reste donc

$$\vec{\Delta}\vec{E} = \Delta E_z\vec{e_z} = \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}\right)\vec{e_z} = \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + 0 + 0\right)\vec{e_z}.$$

Enfin, comme on a $\dfrac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = (-k)^2 E_0\cos(\omega t - kx) = k^2 E_0\cos(\omega t - kx)$, on a $\vec{\Delta}\vec{E} = k^2 E_0\cos(\omega t - kx)\vec{e_z} = k^2\vec{E}$.

.....

**9.7** a) On a

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{\pi}{a}E_0\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz) + k\alpha E_0\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\sin(\omega t - kz)\\ &= E_0\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\left(-\frac{\pi}{a}\cos(\omega t - kz) + k\alpha\sin(\omega t - kz)\right).\end{aligned}$$

.....

**9.7** b) On a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} &= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{e_z}\\ &= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + (0-0)\vec{e_y} + (0-0)\vec{e_z} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{e_x}.\end{aligned}$$

En calculant les dérivées partielles, on trouve

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} &= \left(\frac{\pi}{a}\alpha E_0\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz) + kE_0\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\sin(\omega t - kz)\right)\vec{e_x}\\ &= E_0\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\left(\frac{\pi}{a}\alpha\cos(\omega t - kz) + k\sin(\omega t - kz)\right)\vec{e_x}\end{aligned}$$

.....

**9.7** c) On a $\vec{\Delta}\vec{E} = \Delta E_x \vec{e_x} + \Delta E_y \vec{e_y} + \Delta E_z \vec{e_z}$. Ici, $E_x = 0$, il reste donc

$$\begin{aligned}\vec{\Delta}\vec{E} &= \Delta E_y \vec{e_y} + \Delta E_z \vec{e_z} = \left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}\right)\vec{e_z} \\ &= \left(0 + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}\right)\vec{e_y} + \left(0 + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}\right)\vec{e_z} = \left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}\right)\vec{e_z}.\end{aligned}$$

En calculant les dérivées partielles,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} &= -\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 E_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz) - k^2 E_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz) \\ &= -\left(\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + k^2\right) E_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz) \\ \text{et} \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} &= -\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \alpha E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz) - k^2 \alpha E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz) \\ &= -\left(\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + k^2\right) \alpha E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz),\end{aligned}$$

on obtient $\vec{\Delta}\vec{E} = -E_0 \cos(\omega t - kz)\left(\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + k^2\right)\left(\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) + \alpha \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\right)\vec{e_x}$.

---

**9.8** a) L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. En lui appliquant le rotationnel, on obtient :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

où l'on a utilisé l'équation de Maxwell-Ampère dans le vide. Ainsi, $\alpha = -\mu_0 \varepsilon_0$.

---

**9.8** b) Grâce à la formule du double rotationnel, on obtient : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{E}) - \vec{\Delta}\vec{E}$. Or, d'après l'équation de Maxwell-Gauss dans le vide, on a $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$. Donc, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}) = -\vec{\Delta}\vec{E}$.

---

**9.8** c) Les deux formules obtenues précédemment donnent :

$$-\vec{\Delta}\vec{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{soit} \quad \vec{\Delta}\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{c^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \quad \text{d'où} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}.$$

---

**9.12** a) Le champ électrique n'a qu'une composante selon $\vec{e_y}$ qui dépend de $x$ et de $z$.

Ainsi, le laplacien vectoriel s'écrit :

$$\vec{\Delta}\vec{E} = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}\vec{e_y} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}\vec{e_y} = E_0 \cos(\alpha z)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(\sin(\omega t - kx))\vec{e_y} + E_0 \sin(\omega t - kx)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}(\cos(\alpha z))\vec{e_y}$$

avec $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(\sin(\omega t - kx)) = -k^2 \sin(\omega t - kx)$ et $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}(\cos(\alpha z)) = -\alpha^2 \cos(\alpha z)$. Ainsi, $\Delta\vec{E} = (-k^2 - \alpha^2)\vec{E} = -(k^2 + \alpha^2)\vec{E}$.

---

**9.12** b) On a : $\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = E_0 \cos(\alpha z)\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}(\sin(\omega t - kx))\vec{e_y} = -\omega^2 E_0 \cos(\alpha z)\sin(\omega t - kx)\vec{e_y} = -\omega^2 \vec{E}$.

---

**9.12** c) On utilise l'équation de d'Alembert avec les deux termes calculés précédemment, on obtient :

$$-(\alpha^2 + k^2)\vec{E} = -\frac{\omega^2}{c^2}\vec{E} \quad \text{soit} \quad \alpha^2 + k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad \text{d'où} \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2.$$

---

**9.12** d) La relation de dispersion précédente se réécrit : $\dfrac{\omega^2}{k^2} = \dfrac{\omega^2 c^2}{\omega^2 - c^2\alpha^2}$ d'où $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k} = c\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{c\alpha}{\omega}\right)^2}}$.

La vitesse de phase $v_\varphi$ dépend ici de la pulsation $\omega$ : il y a donc dispersion.

.....

**9.13** a) On a $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rE_\theta)}{\partial r}\overrightarrow{e_\varphi} = \dfrac{a}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\cos(\omega t - kr)\overrightarrow{e_\varphi} = \dfrac{a}{r}k\sin(\omega t - kr)\overrightarrow{e_\varphi}$.

.....

**9.13** b) Avec Maxwell-Faraday, on a $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \dfrac{a}{r}k\sin(\omega t - kr)\overrightarrow{e_\varphi} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$. Donc, $\vec{B} = \dfrac{ak}{\omega r}\cos(\omega t - kr)\overrightarrow{e_\varphi}$.

.....

**9.13** c) Les vecteurs $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ sont respectivement colinéaires aux vecteurs $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$ donc le champ est transverse électromagnétique et forme un trièdre direct.

.....

**9.14** a) Pour que $\cos(\omega t - kz) = 0$, il faut que $\omega t - kz = (2p+1)\dfrac{\pi}{2}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et donc que $z = \dfrac{\omega}{k}t - (2p+1)\dfrac{\pi}{2k}$. Or, dans le vide $k = \dfrac{\omega}{c} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ d'où $z = ct - (2p+1)\dfrac{\lambda}{4}$. La structure est analogue à une onde progressive selon $z$.

.....

**9.14** b) Pour que $\sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right) = 0$, il faut que $\dfrac{\pi x}{a} = q\pi$ avec $q \in \mathbb{Z}$ et donc que $x = qa$. Ces plans sont indépendants du temps comme une onde stationnaire selon $x$.

.....

**9.15** a) On a $\dfrac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t} = \mathrm{j}\omega\underline{\vec{E}}$.

.....

**9.15** b) La seule composante non nulle de $\vec{E}$ est la composante $E_x$ sur l'axe $x$. On a donc

$$\text{div}\,\underline{\vec{E}} = \frac{\partial\underline{E}_0\exp[\mathrm{j}(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)]}{\partial x} = -\mathrm{j}k_x\underline{E}_x.$$

.....

**9.15** c) Seule composante $E_x$ de $\vec{E}$ est non nulle. Donc, $\overrightarrow{\text{rot}}\,\underline{\vec{E}} = -\mathrm{j}k_z\underline{E}_x\overrightarrow{e_y} + \mathrm{j}k_y\underline{E}_x\overrightarrow{e_z}$.

.....

**9.15** d) La seule composante non nulle de $\vec{E}$ est la composante $E_x$ sur l'axe $x$. Donc,

$$\begin{aligned}\Delta\underline{\vec{E}} &= \Delta(\exp[-\mathrm{j}(k_x x + k_y y + k_z z)])\,\underline{E}_0\exp(\mathrm{j}\omega t)\overrightarrow{e_x}\\ &= [(-\mathrm{j}k_x)^2 + (-\mathrm{j}k_y)^2 + (-\mathrm{j}k_z)^2]\exp[-\mathrm{j}(k_x x + k_y y + k_z z)]\,\underline{E}_0\exp(\mathrm{j}\omega t)\overrightarrow{e_x} = -k^2\underline{\vec{E}}.\end{aligned}$$

.....

**9.15** e) On a $\dfrac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t} = \mathrm{j}\omega\underline{\vec{E}}$.

.....

**9.15** f) On a $\text{div}\,\underline{\vec{E}} = -\mathrm{j}\vec{k}\cdot\underline{\vec{E}}$.

.....

**9.15** g) On a $\overrightarrow{\text{rot}}\,\underline{\vec{E}} = -\mathrm{j}\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}$.

.....

**9.15** h) On a $\vec{\Delta}\,\underline{\vec{E}} = -k^2\underline{\vec{E}}$.

.....

**9.16** a) On divise la relation de dispersion par $\omega^2$ : on obtient $\dfrac{k^2}{\omega^2} = \dfrac{1-\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}{c^2}$ donc $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{c}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$.

.....

**9.16** b) On différentie la relation de dispersion donnée : on a $\mathrm{d}(k^2) = \mathrm{d}\left(\dfrac{\omega^2 - \omega_0^2}{c^2}\right)$, donc $2k\,\mathrm{d}k = \dfrac{2\omega}{c^2}\,\mathrm{d}\omega$, donc $\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = c^2\dfrac{k}{\omega} = \dfrac{c^2}{v_\varphi}$. On en déduit ainsi, grâce à la vitesse de phase trouvée précédemment : $v_\mathrm{g} = c\sqrt{1 - \left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$.

**9.17** a) On a $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \dfrac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - ky)\vec{e_z}\wedge\vec{e_x} = \varepsilon_0 c E_0^2\cos^2(\omega t - ky)\vec{e_y}$ avec $\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1$.

**9.17** b) On a $w_\mathrm{em} = \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \dfrac{B^2}{2\mu_0} = \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}\cos^2(\omega t - ky) + \dfrac{E_0^2}{2\mu_0 c^2}\cos^2(\omega t - ky) = \varepsilon_0 E_0^2\cos^2(\omega t - ky)$, avec $\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1$.

**9.18** a) On a $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \dfrac{a^2}{\mu_0 c r^2}\cos^2(\omega t - kr)\vec{e_\theta}\wedge\vec{e_\varphi} = \dfrac{\varepsilon_0 c a^2}{r^2}\cos^2(\omega t - kr)\vec{e_r}$ avec $\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1$.

**9.18** b) On a $w_\mathrm{em} = \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \dfrac{B^2}{2\mu_0} = \dfrac{\varepsilon_0 a^2}{2r^2}\cos^2(\omega t - kr) + \dfrac{a^2}{2\mu_0 c^2 r^2}\cos^2(\omega t - kr) = \dfrac{\varepsilon_0 a^2}{r^2}\cos^2(\omega t - kr)$, avec $\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1$.

**9.18** c) On calcule la puissance rayonnée, avec $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e_r}$ :

$$\begin{aligned}P &= \iint \frac{\varepsilon_0 c a^2}{r^2}\cos^2(\omega t - kr)\vec{e}_r\cdot r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e_r} = \iint \frac{\varepsilon_0 c a^2}{r^2}\cos^2(\omega t - kr) r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\\ &= \frac{\varepsilon_0 c a^2}{r^2}\cos^2(\omega t - kr) r^2\iint\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\varepsilon_0 c a^2}{r^2}\cos^2(\omega t - kr) r^2\int_0^\pi\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi.\end{aligned}$$

La double intégrale donne $4\pi$, donc l'expression de la puissance est :

$$P = 4\pi\frac{\varepsilon_0 c a^2}{r^2}\cos^2(\omega t - kr) r^2 = 4\pi\varepsilon_0 c a^2\cos^2(\omega t - kr).$$

**9.19** a) Avec l'équation de Maxwell-Faraday, on a

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial E_y}{\partial z}\vec{e_x} + \frac{\partial E_y}{\partial x}\vec{e_z} = -kE_0\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin(\omega t - kz)\vec{e_x} + \frac{\pi}{a}E_0\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\vec{e_z} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

donc $\vec{B} = -\dfrac{k}{\omega}E_0\sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\vec{e_x} - \dfrac{\pi}{a\omega}E_0\cos\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\sin(\omega t - kz)\vec{e_z}$.

**9.19** b) On a

$$\begin{aligned}\vec{\Pi} &= \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_y\vec{e_y}}{\mu_0}\wedge(B_x\vec{e_x} + B_z\vec{e_z}) = -\frac{E_y B_x}{\mu_0}\vec{e_z} + \frac{E_y B_z}{\mu_0}\vec{e_x}\\ &= \frac{E_0^2}{\mu_0}\left[\frac{1}{c}\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos^2(\omega t - kz)\vec{e_z} - \frac{\pi}{a\omega}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\sin(\omega t - kz)\vec{e_x}\right]\\ &= \frac{E_0^2}{\mu_0}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\left[\frac{1}{c}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos^2(\omega t - kz)\vec{e_z} - \frac{\pi}{a\omega}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\sin(\omega t - kz)\vec{e_x}\right].\end{aligned}$$

**9.19** c) On a $\left\langle\vec{\Pi}\right\rangle = \dfrac{E_0^2}{2\mu_0 c}\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\vec{e_z} = \dfrac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2}\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\vec{e_z}$ avec $\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1$.

**9.20** a) L'onde associée à $\vec{E_1}$ est rectiligne se propageant selon $+z$.

**9.20** b) L'onde associée à $\overrightarrow{E_2}$ est circulaire droite se propageant selon $-z$.

.....

**9.20** c) L'onde associée à $\underline{\overrightarrow{E}}_3$ est circulaire gauche se propageant selon $+z$.

.....

**9.20** d) L'onde associée à $\overrightarrow{E_4}$ est circulaire gauche se propageant selon $-z$.

.....

**9.20** e) On a $\overrightarrow{E_1}\left(t=\frac{T}{3}, z=0\right) = \begin{cases} E_0\cos\alpha\cos\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{3}\right)\overrightarrow{e_x} \\ E_0\sin\alpha\cos\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{3}\right)\overrightarrow{e_y} \end{cases} = E_0\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\begin{cases}\cos\alpha\overrightarrow{e_x} \\ \sin\alpha\overrightarrow{e_y}\end{cases} = -\frac{E_0}{2}\begin{cases}\cos\alpha\overrightarrow{e_x} \\ \sin\alpha\overrightarrow{e_y}.\end{cases}$

Le vecteur est opposé au cas initial donc d'angle $\alpha+\pi$ et la norme est réduite de moitié d'où le cas (c).

.....

**9.20** f) On a $\overrightarrow{E_2}\left(t=\frac{T}{2}, z=0\right) = \begin{cases} E_0\cos\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}+\alpha\right)\overrightarrow{e_x} \\ E_0\sin\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}+\alpha\right)\overrightarrow{e_y} \end{cases} = \begin{cases} E_0\cos(\pi+\alpha)\overrightarrow{e_x} \\ E_0\sin(\pi+\alpha)\overrightarrow{e_y} \end{cases} = \begin{cases} -E_0\cos(\alpha)\overrightarrow{e_x} \\ -E_0\sin(\alpha)\overrightarrow{e_y}. \end{cases}$

Le vecteur est opposé au cas initial donc d'angle $\alpha+\pi$ d'où le cas (a).

.....

**9.20** g) On a

$$\begin{aligned}\underline{\overrightarrow{E}}_3\left(t=\frac{T}{4}, z=0\right) &= E_0\exp\left[\mathrm{j}\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{4}+\alpha\right)\right](\overrightarrow{e_x}-\mathrm{j}\overrightarrow{e_y}) = E_0\exp\left(\mathrm{j}\frac{\pi}{2}\right)\exp(\mathrm{j}\alpha)\,(\overrightarrow{e_x}-\mathrm{j}\overrightarrow{e_y}) \\ &= E_0\,\mathrm{j}\,\exp(\mathrm{j}\alpha)\,(\overrightarrow{e_x}-\mathrm{j}\overrightarrow{e_y}) = E_0[\cos(\alpha)+\mathrm{j}\sin(\alpha)]\,(\mathrm{j}\overrightarrow{e_x}+\overrightarrow{e_y}) \\ &= \begin{cases} -E_0\sin(\alpha)\overrightarrow{e_x} \\ E_0\cos(\alpha)\overrightarrow{e_y}. \end{cases}\end{aligned}$$

Le champ est déphasé de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à l'angle initial d'où le cas (b).

.....

**9.20** h) On a $\overrightarrow{E_4}\left(t=\frac{T}{4}, z=0\right) = \begin{cases} E_0\cos\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{4}+\alpha\right)\overrightarrow{e_x} \\ -E_0\sin\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{4}-\alpha\right)\overrightarrow{e_y} \end{cases} = \begin{cases} E_0\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\overrightarrow{e_x} \\ -E_0\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\overrightarrow{e_y} \end{cases} = \begin{cases} -E_0\sin(\alpha)\overrightarrow{e_x} \\ -E_0\cos(\alpha)\overrightarrow{e_y}. \end{cases}$

Le vecteur fait un angle $\alpha$ avec le vecteur $-\overrightarrow{e_y}$ et $\frac{\pi}{2}+\alpha$ avec $\overrightarrow{e_x}$ d'où le cas (d).

.....

# Fiche n° 10. Ondes électromagnétiques II

## Réponses

**10.1** a) ..... oui

**10.1** b) ..... non

**10.1** c) ..... oui

**10.2** a) ..... $\underline{k}^2 = \dfrac{\mathrm{i}\omega}{\alpha}$

**10.2** b) ..... $\underline{k}^3 = \dfrac{\omega^3}{\alpha} - \dfrac{\beta}{\alpha}\omega$

**10.2** c) ..... $\underline{k} = \dfrac{\beta - \omega^2}{\mathrm{i}\alpha}$

**10.3** a) ..... $\underline{\rho}\left(\dfrac{\underline{\alpha}}{\varepsilon_0} + \mathrm{i}\,\omega\right)$

**10.3** b) ..... $\mathrm{i}\,\omega\,\underline{\rho}\left(1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) = 0$

**10.4** a) ..... $\pm\dfrac{1+\mathrm{i}}{\delta}$ avec $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0\,\alpha\,\omega}}$

**10.4** b) ..... $\pm\mathrm{i}\dfrac{\omega}{c}\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}$

**10.4** c) ..... $\pm\dfrac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$

**10.4** d) ..... $\pm\dfrac{\omega}{c}$

**10.5** a) ..... $v_\varphi = \dfrac{c}{\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$

**10.5** b) ..... $v_g = c\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega_p}}$

**10.6** a) ..... $\dfrac{nE_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kz)\overrightarrow{e_z}$

**10.6** b) ..... $\dfrac{nE_0^2}{2\mu_0 c}\overrightarrow{e_z}$

**10.6** c) ..... $\dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}\left(1 + n^2\right)\cos^2(\omega t - kz)$

**10.6** d) ..... $\dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}\left(1 + n^2\right)$

**10.7** a) ..... $\dfrac{E_0^2}{2\mu_0\omega\delta}\mathrm{e}^{-\frac{2x}{\delta}}\overrightarrow{e_x}$

**10.7** b) ..... $\dfrac{\gamma E_0^2}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2x}{\delta}}$

**10.8** ..... $\dfrac{|\underline{E}_0|^2}{2\mu_0 c}\,\mathrm{Re}(\underline{n})\overrightarrow{e_z}$

**10.9** ..... $k^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$

**10.10** a) ..... $\mathrm{div}\,\overrightarrow{E} = 0$

**10.10** b) ..... $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B} = \mu_0\gamma\overrightarrow{E} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}$

**10.10** c) ..... $\Delta\overrightarrow{E} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \mu_0\gamma\dfrac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}$

**10.11** a) ..... non

**10.11** b) ..... non

**10.11** c) ..... non

**10.11** d) ..... oui

**10.12** a) ..... oui

**10.12** b) ..... oui

**10.12** c) ..... oui

**10.12** c) ..... oui

**10.12** d) ..... oui

**10.13** a) ..... c

**10.13** b) ..... a

**10.13** c) ..... b

**10.14** a) ..... 1 et 4

**10.14** b) ..... 1 et 2

**10.14** c) ..... 1 et 3

**10.15** a) ..... $\boxed{\begin{cases} r+1 = t \\ n_1 - rn_1 = tn_2 \end{cases}}$

**10.15** b) ..... $\boxed{\begin{cases} r = \dfrac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \\ t = \dfrac{2n_1}{n_1 + n_2} \end{cases}}$

**10.16** a) ..... $\boxed{2\,\mathrm{m} \text{ et } 4\,\mathrm{m}}$

**10.16** b) ..... $\boxed{\dfrac{1}{3} \text{ et } \dfrac{4}{3}}$

**10.16** c) ..... $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

**10.16** d) ..... $\boxed{\dfrac{1}{9} \text{ et } \dfrac{8}{9}}$

**10.17** a) ..... $\boxed{\dfrac{|\underline{E}|^2}{2\mu_0\omega}\,\mathrm{Re}\left(\vec{\underline{k}}_1\right)}$

**10.17** b) ..... $\boxed{\begin{array}{c} -\dfrac{|\underline{E}|^2|\underline{r}|^2}{2\mu_0\omega}\,\mathrm{Re}\left(\vec{\underline{k}}_1\right) \\ \dfrac{|\underline{E}|^2|\underline{t}|^2}{2\mu_0\omega}\,\mathrm{Re}\left(\vec{\underline{k}}_2\right) \end{array}}$

**10.17** c) ..... $\boxed{|\underline{r}|^2 \text{ et } |\underline{t}|^2\,\mathrm{Re}\left(\dfrac{\underline{k}_2}{\underline{k}_1}\right)}$

## Corrigés

**10.1** a) La première équation indique que $\vec{a}$ et $\vec{b}$ doivent être orthogonaux. Les deux équations suivantes indiquent que $\vec{a}$ et $\vec{c}$ sont orthogonaux et de même pour $\vec{b}$ et $\vec{c}$.

.....

**10.1** b) Les trois vecteurs doivent être orthogonaux et le sens de $\vec{c}$ doit respecter la règle de la main droite, ce qui n'est pas le cas ici.

.....

**10.1** c) Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ doivent être colinéaires et orthogonaux à $\vec{c}$.

.....

**10.2** a) On a $\dfrac{\partial \vec{\underline{E}}}{\partial t} = \mathrm{i}\omega\vec{\underline{E}}$ et $\dfrac{\partial^2 \vec{\underline{E}}}{\partial z^2} = -\underline{k}^2\vec{\underline{E}}$.

.....

**10.2** b) On peut écrire $\dfrac{\partial^3 \vec{\underline{E}}}{\partial t^3} = -\mathrm{i}\omega^3\vec{\underline{E}}$ et $\dfrac{\partial^3 \vec{\underline{E}}}{\partial z^3} = -\mathrm{i}\underline{k}^3\vec{\underline{E}}$.

.....

**10.2** c) On a $\dfrac{\partial^2 \vec{\underline{E}}}{\partial t^2} = -\omega^2\vec{\underline{E}}$.

.....

**10.3** a) En régime sinusoïdal forcé, l'équation de conservation de la charge devient, en tenant compte de la loi d'Ohm locale, s'écrit $\mathrm{i}\,\omega\underline{\rho} + \underline{\alpha}\,\mathrm{div}\,\vec{\underline{E}} = 0$. Avec l'équation de Maxwell-Gauss, on a $\underline{\rho}\left(\dfrac{\underline{\alpha}}{\varepsilon_0} + \mathrm{i}\,\omega\right)$.

.....

**10.3** b) En injectant l'expression de la conductivité complexe, l'équation de précédente devient :

$$\underline{\rho}\left(\frac{N\,e^2}{\mathrm{i}\,m\,\omega\,\varepsilon_0} + \mathrm{i}\,\omega\right) = \mathrm{i}\,\omega\,\underline{\rho}\left(1 - \frac{N\,e^2}{m\,\varepsilon_0\,\omega^2}\right) = \mathrm{i}\,\omega\,\underline{\rho}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) = 0.$$

.....

**10.4** a) Si $\omega \ll \dfrac{1}{\tau} \ll \omega_p$, alors :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 + \mathrm{i}\frac{\omega_p^2\,\tau^2}{\omega\,\tau\,(1-\mathrm{i}\,\omega\,\tau)}\right] \sim \frac{\omega^2}{c^2}\,\mathrm{i}\,\frac{\omega_p^2\,\tau}{\omega} = \mathrm{i}\,\frac{\omega_p^2\,\tau}{c^2}\,\omega = \mathrm{i}\,\alpha_0\,\mu_0\,\omega.$$

En utilisant $\mathrm{i} = \dfrac{(1+\mathrm{i})^2}{2}$, on en déduit $\underline{k} = \pm\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\sqrt{\alpha_0\,\mu_0\,\omega} = \pm\dfrac{1+\mathrm{i}}{\delta}$.

.....

**10.4** b) Si $\dfrac{1}{\tau} \ll \omega < \omega_p$, alors :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 + \mathrm{i}\frac{\omega_p^2\,\tau^2}{\omega\,\tau\,(1-\mathrm{i}\,\omega\,\tau)}\right] \sim \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 + \mathrm{i}\frac{\omega_p^2\,\tau^2}{-\mathrm{i}\,\omega^2\,\tau^2}\right] = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right].$$

Il vient ainsi $\underline{k} = \pm\mathrm{i}\dfrac{\omega}{c}\sqrt{-1 + \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}$.

.....

**10.4** c) Si $\dfrac{1}{\tau} \ll \omega_p < \omega$, alors :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 + \mathrm{i}\frac{\omega_p^2\,\tau^2}{\omega\,\tau\,(1-\mathrm{i}\,\omega\,\tau)}\right] \sim \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 + \mathrm{i}\frac{\omega_p^2\,\tau^2}{-\mathrm{i}\,\omega^2\,\tau^2}\right] = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right] = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}.$$

Il vient ainsi : $\underline{k} = \pm\dfrac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$.

.....

**10.4** d) Si $\dfrac{1}{\tau} \ll \omega_p \ll \omega$, alors :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 + \mathrm{i}\frac{\omega_p^2\,\tau^2}{\omega\,\tau\,(1-\mathrm{i}\,\omega\,\tau)}\right] \sim \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 + \mathrm{i}\frac{\omega_p^2\,\tau^2}{-\mathrm{i}\,\omega^2\,\tau^2}\right] \sim \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Il vient ainsi : $\underline{k} = \pm\dfrac{\omega}{c}$.

.....

**10.5** a) Si $\omega > \omega_p$, alors $\underline{k}^2 > 0$ : le nombre d'onde est réel. On a $k'' = 0$ et $k' = \pm\dfrac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$.

Le champ en notation réelle a pour expression : $\vec{E} = E_0\,\cos\big(\omega\,t - k'\,z\big)\,\vec{e_x}$. L'onde est progressive et sa vitesse de phase vaut :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{|k'|} = \frac{c}{\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}}.$$

.....

**10.5** b) La vitesse de groupe est définie par $v_g = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$. En dérivant la relation de dispersion, on obtient :

$$v_g = c^2\,\frac{|k'|}{\omega} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}.$$

.....

**10.6** a) On a $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \dfrac{nE_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kz)\vec{e_z}$.

.....

**10.6** b) On peut écrire $\big\langle\vec{\Pi}\big\rangle = \dfrac{nE_0^2}{\mu_0 c}\big\langle\cos^2(\omega t - kz)\big\rangle\vec{e_z} = \dfrac{nE_0^2}{2\mu_0 c}\vec{e_z}$.

.....

**10.6** c) On a $w_{EM} = \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \dfrac{B^2}{2\mu_0} = \left(\dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} + \dfrac{n^2 E_0^2}{2\mu_0 c^2}\right)\cos^2(\omega t - kz) = \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}\big(1 + n^2\big)\cos^2(\omega t - kz)$.

.....

**10.6** d) On peut écrire $\langle w_{EM}\rangle = \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}\left(1+n^2\right)\left\langle\cos^2(\omega t - kz)\right\rangle = \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}\left(1+n^2\right)$.

**10.7** a) On a

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0\omega\delta}\mathrm{e}^{-\frac{2x}{\delta}}\left[\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) + \cos^2\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right]\vec{e_x}$$

donc $\left\langle\vec{\Pi}\right\rangle = \dfrac{E_0^2}{2\mu_0\omega\delta}\mathrm{e}^{-\frac{2x}{\delta}}\vec{e_x}$.

**10.7** b) On peut écrire $\langle p_J\rangle = \left\langle\vec{j}\cdot\vec{E}\right\rangle = \left\langle\gamma|\vec{E}|^2\right\rangle = \gamma E_0^2\mathrm{e}^{-\frac{2x}{\delta}}\left\langle\cos^2\left(\omega t - \dfrac{x}{\delta}\right)\right\rangle = \dfrac{\gamma E_0^2}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2x}{\delta}}$.

**10.8** On a $\left\langle\vec{\Pi}\right\rangle = \dfrac{1}{2\mu_0}\,\mathsf{Re}\left(\underline{E}_0^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-kz)}\vec{e_x}\wedge\dfrac{nE_0}{c}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-kz)}\vec{e_y}\right) = \dfrac{1}{2\mu_0 c}\,\mathsf{Re}(|\underline{E}_0|^2\,\underline{n}\vec{e_z}) = \dfrac{|\underline{E}_0|^2}{2\mu_0 c}\,\mathsf{Re}(\underline{n})\vec{e_z}$.

**10.9** Le laplacien $\Delta\underline{\vec{E}}$ se réduit ici à $\dfrac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial z^2}$. La dérivée partielle de $\underline{\vec{E}}$ par rapport à $z$ vaut $-\underline{k}^2\,\underline{\vec{E}}$. La dérivée partielle de $\underline{\vec{E}}$ par rapport à $t$ vaut $-\omega^2\,\underline{\vec{E}}$. La dérivée partielle $\dfrac{\partial\vec{j}}{\partial t}$ vaut $\mathrm{i}\,\omega\,\underline{\alpha}\,\underline{\vec{E}}$.
Il vient ainsi : $-\underline{k}^2\,\underline{\vec{E}} + \dfrac{1}{c^2}\,\omega^2\,\underline{\vec{E}} = \mathrm{i}\,\omega\,\underline{\alpha}\,\mu_0\,\underline{\vec{E}} = \dfrac{n\,e^2}{m}\,\underline{\alpha}\,\mu_0\,\underline{\vec{E}}$. En posant $\omega_p^2 = \dfrac{n\,e^2}{m}\,\underline{\alpha}\,\mu_0\,c^2 = \dfrac{n\,e^2}{m}\,\underline{\alpha}\,\dfrac{1}{\varepsilon_0}$ et avec $\underline{\vec{E}}$ non nul, on obtient :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}.$$

**10.10** a) Les équations de Maxwell s'écrivent $\operatorname{div}\vec{E} = 0$ et $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\gamma\vec{E} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$.

**10.10** c) On exprime le rotationnel $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E}$. On peut alors écrire

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E}) = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\gamma\vec{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right).$$

Donc, $\Delta\vec{E} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\gamma\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$.

**10.11** a) On a $\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\partial E}{\partial z} \neq 0$.

**10.11** b) On a $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = \vec{0} \neq -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$.

**10.11** c) On peut écrire $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = -\dfrac{\omega E_0}{c^2}\cos(\omega t - kz)\vec{e_y}$ et $\mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \dfrac{\omega E_0}{c^2}\cos(\omega t - kz)\vec{e_z}$.

**10.11** d) On a $\operatorname{div}\vec{B} = \dfrac{\partial B}{\partial x} = 0$.

**10.12** a) On a $\operatorname{div}\underline{\vec{E}} = \dfrac{\partial\underline{E}}{\partial x} = 0$.

**10.12** b) On peut écrire $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\underline{\vec{E}} = -kE_0\exp[\mathrm{i}(\omega t - kz)]\vec{e_y}$ et $-\dfrac{\partial\underline{\vec{B}}}{\partial t} = -kE_0\exp[\mathrm{i}(\omega t - kz)]\vec{e_y}$.

**10.12** c) On a $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\underline{\vec{B}} = \dfrac{\omega E_0}{c^2}\exp[\mathrm{i}(\omega t - kz)]\overrightarrow{e_x}$ et $\mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t} = \dfrac{\omega E_0}{c^2}\exp[\mathrm{i}(\omega t - kz)]\overrightarrow{e_x}$.

.....

**10.12** d) On a $\mathrm{div}\,\underline{\vec{B}} = \dfrac{\partial \underline{B}}{\partial y} = 0$.

.....

**10.13** a) On a $\underline{k}^2$ est complexe donc $\underline{k} = k + \mathrm{i}k''$.

.....

**10.13** b) On a $\underline{k}^2 > 0$ donc $\underline{k}$ est réel et $\underline{k} = k'$.

.....

**10.13** c) On a $\underline{k}^2 < 0$ donc $\underline{k}$ est un imaginaire pur et $\underline{k} = \mathrm{i}k''$.

.....

**10.14** a) La norme de $\vec{E}$ est une fonction sinusoïdale de $x$ et de $t$.

.....

**10.14** b) La norme de $\vec{E}$ est une fonction sinusoïdale de $t$ et décroît exponentiellement avec $x$.

.....

**10.14** c) La norme de $\vec{E}$ est une fonction sinusoïdale de $t$. Elle décroît exponentiellement avec $x$ mais en présentant des oscillations.

.....

**10.15** a) La continuité du champ électrique impose

$$\vec{E}_i(0,t) + \vec{E}_r(0,t) = \vec{E}_t(0,t) \qquad \text{donc} \qquad E_0\cos(\omega t) + rE_0\cos(\omega t) = tE_0\cos(\omega t) \qquad \text{donc} \qquad 1 + r = t.$$

La continuité du champ magnétique impose

$$\vec{B}_i(0,t) + \vec{B}_r(0,t) = \vec{B}_t(0,t) \quad \text{donc} \quad \frac{n_1E_0}{c}\cos(\omega t) - \frac{n_1rE_0}{c}\cos(\omega t) = \frac{n_2tE_0}{c}\cos(\omega t) \quad \text{donc} \quad n_1 - rn_1 = tn_2.$$

.....

**10.15** b) On déduit de la question précédente

$$n_1 - rn_1 = tn_2 = n_2 + rn_2 \qquad \text{donc} \qquad n_1 - n_2 = r(n_1 + n_2) \qquad \text{donc} \qquad r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

et

$$t = 1 + r = \frac{n_1 + n_2 + n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}.$$

.....

**10.16** a) Dans le vide, $\lambda_1 = 2\,\mathrm{m}$ et dans le plasma, $\lambda_2 = 4\,\mathrm{m}$.

.....

**10.16** b) On lite sur la figure $r = \dfrac{E_r}{E_i} = \dfrac{1}{3}$ et $t = \dfrac{E_t}{E_i} = \dfrac{4}{3}$.

.....

**10.16** c) On peut écrire

$$r = \frac{1 - n_2}{1 + n_2} = \frac{1}{3} \qquad \text{donc} \qquad 3 - 3n_2 = 1 + n_2 \qquad \text{donc} \qquad 2 = 4n_2 \qquad \text{donc} \qquad n_2 = \frac{1}{2}.$$

On peut aussi écrire

$$t = \frac{2}{1 + n_2} = \frac{4}{3} \qquad \text{donc} \qquad 6 = 4 + 4n_2 \qquad \text{donc} \qquad n_2 = \frac{1}{2}.$$

.....

**10.16** d) On écrit $R = |r|^2 = \dfrac{1}{9}$ et $T = |t|^2 n_2 = \dfrac{16}{9} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{8}{9}$.

.....

**10.17** a) On a

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \mathsf{Re}(\underline{\vec{E}}^* \wedge \underline{\vec{B}}) = \frac{1}{2\mu_0} \mathsf{Re}\left[\underline{\vec{E}}^* \wedge \left(\frac{\underline{\vec{k}}_1 \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}\right)\right] = \frac{1}{2\mu_0\omega} \mathsf{Re}\left[(\underline{\vec{E}}^* \cdot \underline{\vec{E}})\underline{\vec{k}}_1 - (\underline{\vec{E}}^* \cdot \underline{\vec{k}}_1)\underline{\vec{E}}\right].$$

On en déduit $\langle \vec{\Pi} \rangle = \dfrac{|\underline{E}|^2}{2\mu_0\omega} \mathsf{Re}\left(\underline{\vec{k}}_1\right)$.

.....

**10.17** b) On écrit $\langle \vec{\Pi}_r \rangle = -\dfrac{|\underline{E}|^2 |\underline{r}|^2}{2\mu_0\omega} \mathsf{Re}\left(\underline{\vec{k}}_1\right)$ et $\langle \vec{\Pi}_t \rangle = \dfrac{|\underline{E}|^2 |\underline{t}|^2}{2\mu_0\omega} \mathsf{Re}\left(\underline{\vec{k}}_2\right)$.

.....

**10.17** c) On a $R = |\underline{r}|^2$ et $T = |\underline{t}|^2 \, \mathsf{Re}\left(\dfrac{\underline{k}_2}{\underline{k}_1}\right)$.

.....

# Fiche n° 11. Modèle scalaire de la lumière

## Réponses

**11.1** a) ..... $\boxed{n_{\text{air}} \times h}$

**11.1** b) ..... $\boxed{n_{\text{eau}} \times H}$

**11.1** c) ..... $\boxed{n_{\text{air}} \times h + n_{\text{eau}} \times H}$

**11.1** d) ..... $\boxed{1 \times h + n_{\text{eau}} \times H}$

**11.2** a) ..... $\boxed{n \times e}$

**11.2** b) ..... $\boxed{1 \times (\text{AA}' - e)}$

**11.2** c) ..... $\boxed{\text{AA}' + (n-1)e}$

**11.3** a) ..... $\boxed{\text{AB}\sin(\alpha)}$

**11.3** b) ..... $\boxed{-\text{AB}\sin(\alpha)}$

**11.4** a) ..... $\boxed{\text{Convergente}}$

**11.4** b) ..... $\boxed{\text{Convergente}}$

**11.4** c) ..... $\boxed{\text{Divergente}}$

**11.4** d) ..... $\boxed{\text{Convergente}}$

**11.5** a) ..... $\boxed{\text{a et c}}$

**11.5** b) ..... $\boxed{\text{c}}$

**11.6** a) ..... $\boxed{\text{b et c}}$

**11.6** b) ..... $\boxed{\text{b}}$

**11.6** c) ..... $\boxed{n_1 a \sin\alpha}$

**11.6** d) ..... $\boxed{\text{a}}$

**11.6** e) ..... $\boxed{n_2 a \sin\beta}$

**11.6** f) ..... $\boxed{n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2}$

**11.7** a) ..... $\boxed{\text{a et b}}$

**11.7** b) ..... $\boxed{\frac{2\pi}{\lambda_0}((\text{SA}') + d + e)}$

**11.7** c) ..... $\boxed{\frac{2\pi}{\lambda_0}((\text{SA}) + d + ne)}$

**11.7** d) ..... $\boxed{\frac{2\pi}{\lambda_0}(n-1)e}$

**11.8** a) ..... $\boxed{\frac{\pi}{\lambda_0}\frac{h}{\sin\theta_1}}$

**11.8** b) ..... $\boxed{\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{h}{\sin\theta_1} + \pi}$

**11.8** c) ..... $\boxed{2e\tan\theta_2}$

**11.8** d) ..... $\boxed{\frac{h}{2} - e\tan\theta_2}$

**11.8** e) ..... $\boxed{\text{b}}$

**11.8** f) ..... $\boxed{\frac{4\pi}{\lambda_0}\left(\frac{h}{2\sin\theta_1} + \left(n - \frac{1}{n}\right)\frac{e}{\cos\theta_2}\right)}$

**11.8** g) ..... $\boxed{\frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{e}{\cos\theta_2}\left(n - \frac{1}{n}\right) - \pi}$

**11.8** h) ..... $\boxed{\text{a}}$

**11.9** a) ..... $\boxed{\frac{2\pi}{\lambda_0}e(n-1)}$

**11.9** b) ..... $\boxed{\frac{e}{\cos\theta_2}}$

**11.9** c) ..... $\boxed{\text{I}_1\text{I}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}$

**11.9** d) ..... $\boxed{\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{e}{\cos\theta_2}(n - \cos(\theta_1 - \theta_2))}$

**11.9** e) ..... $\boxed{\text{c}}$

**11.9** f) ..... $\boxed{\frac{2\pi}{\lambda_0}e(n\cos\theta_2 - \cos\theta_1)}$

**11.10** a) ..... $\boxed{2\pi}$

**11.10** b) ..... $\boxed{\pi}$

**11.10** c) ..... $\boxed{\frac{e}{\cos\theta_2}}$

**11.10** d) ..... $\boxed{\frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{ne}{\cos\theta_2} - \pi}$

**11.11** a) ..... $\boxed{\Delta f = 1{,}0 \times 10^{11}\,\text{Hz}}$

**11.11** b) ..... $\boxed{\Delta f = 1{,}0 \times 10^{7}\,\text{Hz}}$

**11.11** c) ..... $\boxed{\tau_c = 45 \times 10^{3}\,\text{ps}}$

**11.11** d) ..... $\boxed{②,\ ①\ \text{puis}\ ③}$

**11.12** a) ..... $\boxed{K_1 S_0 \dfrac{T}{2\pi\tau} \sin\left(2\pi \dfrac{\tau}{T}\right)}$

**11.12** b) ..... $\boxed{ⓓ}$

**11.12** c) ..... $\boxed{100\,\text{GHz}}$

**11.12** d) ..... $\boxed{\dfrac{K_2 S_0^2}{2\tau}\left(\tau + \dfrac{T}{4\pi}\sin\left(4\pi\dfrac{\tau}{T}\right)\right)}$

**11.12** e) ..... $\boxed{ⓑ}$

**11.12** f) ..... $\boxed{\text{non}}$

**11.13** a) ..... $\boxed{1{,}00 \times 10^{-10}\,\text{W}}$

**11.13** b) ..... $\boxed{7{,}50 \times 10^{-10}\,\text{W}}$

**11.13** c) ..... $\boxed{6{,}67 \times 10^{-9}\,\text{W}}$

**11.13** d) ..... $\boxed{2 \times 10^{-17}\,\text{J}}$

**11.13** e) ..... $\boxed{3{,}38 \times 10^{-16}\,\text{J}}$

**11.13** f) ..... $\boxed{3{,}33 \times 10^{-16}\,\text{J}}$

**11.13** g) ..... $\boxed{ⓐ}$

## Corrigés

**11.1** a) L'air a pour indice optique $n_{\text{air}}$. Du point S au point I, le rayon lumineux parcourt la distance $h$.

.....

**11.1** b) L'eau a pour indice optique $n_{\text{eau}}$. Du point I au point F, le rayon lumineux parcourt la distance $H$.

.....

**11.1** c) Les chemins optiques se somment : $(\text{SF}) = (\text{SI}) + (\text{IF}) = n_{\text{air}} \times h + n_{\text{eau}} \times H$.

.....

**11.1** d) L'indice optique du vide est égal à 1.

.....

**11.2** a) Entre les points B et C, le rayon confondu avec l'axe optique parcourt la distance géométrique $e$.

.....

**11.2** b) L'indice optique du vide est égal à 1. De plus, à la distance totale $\text{AA}'$, il faut retrancher l'épaisseur $e$ de la lentille pour obtenir la distance géométrique parcourue par le rayon lumineux dans l'air.

.....

**11.2** c) Les chemins optiques se somment : $(\text{AA}') = n \times e + 1 \times (\text{AA}' - e) = \text{AA}' + (n-1)e$. Cette expression est valable quel que soit le rayon issu de A et arrivant en $\text{A}'$ puisque les points A et $\text{A}'$ sont conjugués !

.....

**11.3** a) En décomposant le chemin optique de la source S jusqu'au point A, la différence de chemin optique demandée s'écrit : $(\text{SA}) - (\text{SB}) = (\text{SH}) + (\text{HA}) - (\text{SB})$. Par ailleurs, le plan passant par H et B étant une surface d'onde issu de S, il vient : $(\text{SA}) - (\text{SB}) = (\text{HA})$. Dans l'air, cela donne : $(\text{SA}) - (\text{SB}) = \text{HA} = \text{AB}\sin(\alpha)$.

.....

**11.3** b) Il y a égalité des chemins optiques : $(\text{SAS}') = (\text{SBS}')$, c'est-à-dire $(\text{SA}) + (\text{AS}') = (\text{SB}) + (\text{BS}')$.

On en déduit : $(\text{AS}') - (\text{BS}') = (\text{SB}) - (\text{SA}) = -\text{AB}\sin(\alpha)$.

.....

**11.4** a)

En vertu du théorème de Malus, les rayons en aval de la lentille sont parallèles à l'axe optique. En amont, les surfaces d'ondes sont des cercles concentriques centrés sur un point (lui aussi en amont), qui est donc le conjugué d'une image à l'infini sur l'axe optique, à savoir le foyer principal objet. Ainsi, $\mathcal{L}_1$ est convergente.

**11.4** b)

Les surfaces d'onde permettent de voir qu'il y a conjugaison entre un objet réel et une image réelle (de même taille, et renversée) : $\mathcal{L}_2$ est donc nécessairement convergente.

**11.4** c)

Les surfaces d'onde incidentes sont des cercles concentriques centrés sur un point en aval de la lentille. De plus, en vertu du théorème de Malus, les rayons émergents sont parallèles à l'axe optique. Le point en question est donc le foyer objet de la lentille, situé après son centre optique : $\mathcal{L}_3$ est donc divergente.

**11.4** d)

En vertu du théorème de Malus, les rayons incidents, parallèles entre eux, proviennent d'un objet à l'infini, qui est conjugué par la lentille d'un point hors de l'axe optique : il s'agit d'un foyer image secondaire, situé après le centre optique. $\mathcal{L}_4$ est donc convergente.

**11.5** a) Les rayons incidents étant parallèles à l'axe optique, d'après le théorème de Malus, les surfaces d'onde sont perpendiculaires à l'axe optique.

**11.5** b) Tout se passe comme si $F'$ était une source ponctuelle émettant une onde sphérique : les surfaces d'onde sont donc des cercles concentriques centrés sur $F'$.

**11.6** a) Le point $H_1$ est le projeté orthogonal de $I_2$ : d'après le théorème de Malus, ils se situent donc sur la même surface d'onde. De même, $H_2$ et $I_1$ appartiennent à un même front d'onde issu de $M_\infty$ (principe du retour inverse de la lumière).

**11.6** b) On voit sur le schéma que $i_1 + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\pi}{2}$ d'où directement $\alpha = i_1$.

**11.6** c) Dans le triangle $H_1I_1I_2$, on a $\sin\alpha = \frac{H_1I_1}{a}$. De plus, $(H_1I_1) = n_1 H_1I_1$, d'où $(H_1I_1) = n_1 a \sin\alpha$.

**11.6** d) Dans le triangle $H_2I_1I_2$, on a $\beta + \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - i_2\right) = \pi$ d'où $\beta = i_2$.

.....

**11.6** e) Dans le triangle $H_2I_1I_2$, on a $\sin\beta = \frac{I_2H_2}{a}$. De plus, $(I_2H_2) = n_2 I_2H_2$, d'où $(I_2H_2) = n_2 a \sin\beta$.

.....

**11.6** f) Les chemins optiques $(H_1I_1)$ et $(I_2H_2)$ étant identiques, on retrouve la loi de la réfraction de Snell-Descartes : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.

.....

**11.7** a) L'indice de la lame étant différent de celui de l'air, C et C′ ne sont pas sur la même surface d'onde.

.....

**11.7** b) On a $\phi(C') = \frac{2\pi}{\lambda_0}(SC') = \frac{2\pi}{\lambda_0}(SA') + \frac{2\pi}{\lambda_0}(A'B') + \frac{2\pi}{\lambda_0}(B'C') = \frac{2\pi}{\lambda_0}(\left(SA'\right) + d + e)$.

.....

**11.7** c) On a $\phi(C) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(SC) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(SA) + \frac{2\pi}{\lambda_0}(AB) + \frac{2\pi}{\lambda_0}(BC) = \frac{2\pi}{\lambda_0}((SA) + d + ne)$.

.....

**11.7** d) Les points A et A′ appartenant à la même surface d'onde, les chemins optiques (SA) et $\left(SA'\right)$ sont égaux donc le déphasage est $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n-1)e$.

.....

**11.8** a) D'après la loi de la réflexion de Snell-Descartes, au niveau du point d'incidence A, l'angle réfléchi est égal à l'angle incident en valeur absolu. Le triangle SAM est donc un triangle isocèle qu'on peut subdiviser en deux triangles rectangles. Ainsi, en se plaçant dans celui d'hypoténuse SA et de côté $h/2$, le chemin optique (SA) est tel que

$$(SA) = n_{\text{air}} \times SA = 1 \times \frac{h}{2\sin\theta_1} = \frac{h}{2\sin\theta_1}$$

donc la phase $\phi_1(A) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{h}{2\sin\theta_1} = \frac{\pi}{\lambda_0}\frac{h}{\sin\theta_1}$.

.....

**11.8** b) Le chemin optique (AM) est égal au chemin optique (SA), ainsi $(SM) = 2\times(SA)$. Donc, avec le déphasage induit par la réflexion, la phase est telle que $\phi_1(M) = 2 \times \phi_1(A) + \pi = \frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{h}{2\sin\theta_1} + \pi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{h}{\sin\theta_1} + \pi$.

.....

**11.8** c) En se plaçant dans le triangle rectangle d'hypoténuse BC, on constate que

$$\tan\theta_2 = \frac{BD/2}{e} \qquad \text{donc} \qquad BD = 2e\tan\theta_2.$$

.....

**11.8** d) La distance EB est telle que $EB = \frac{h - BD}{2} = \frac{h}{2} - e\tan\theta_2$.

.....

**11.8** e) En se plaçant dans le triangle rectangle SEB, le chemin optique (SB) est tel que

$$(SB) = n_{\text{air}} \times SB = 1 \times \frac{EB}{\sin\theta_1} = \frac{h}{2\sin\theta_1} - \frac{e\tan\theta_2}{\sin\theta_1} = \frac{h}{2\sin\theta_1} - \frac{e\sin\theta_2}{\cos\theta_2\sin\theta_1} = \frac{h}{2\sin\theta_1} - \frac{e}{n\cos\theta_2}$$

donc la phase $\phi_2(B) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\frac{h}{2\sin\theta_1} - \frac{e}{n\cos\theta_2}\right)$.

.....

**11.8** f) En se plaçant dans le triangle rectangle d'hypoténuse BC, le chemin optique (BC) est tel que

$$(\mathrm{BC}) = n \times \mathrm{BC} = \frac{ne}{\cos\theta_2}.$$

Le chemin optique (SC) est donc tel que

$$(\mathrm{SC}) = (\mathrm{SB}) + (\mathrm{BC}) = \frac{h}{2\sin\theta_1} - \frac{e}{n\cos\theta_2} + \frac{ne}{\cos\theta_2} = \frac{h}{2\sin\theta_1} + \left(n - \frac{1}{n}\right)\frac{e}{\cos\theta_2}.$$

Le chemin optique (SM) est égal au double de (SC). Ainsi la phase est $\phi_2(\mathrm{M}) = \dfrac{4\pi}{\lambda_0}\left(\dfrac{h}{2\sin\theta_1} + \left(n - \dfrac{1}{n}\right)\dfrac{e}{\cos\theta_2}\right)$.

.....

**11.8** g) On a

$$\Delta\phi = \phi_2(\mathrm{M}) - \phi_1(\mathrm{M}) = \frac{4\pi}{\lambda_0}\left(\frac{h}{2\sin\theta_1} + \left(n - \frac{1}{n}\right)\frac{e}{\cos\theta_2}\right) - \frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{h}{2\sin\theta_1} - \pi = \frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{e}{\cos\theta_2}\left(n - \frac{1}{n}\right) - \pi.$$

.....

**11.8** h) On a

$$\Delta\phi = \frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{e}{\cos\theta_2}\left(n - \frac{1}{n}\right) - \pi = \frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{e}{\sqrt{1 - \sin^2\theta_2}} - \pi.$$

Or, d'après la loi de la réflexion de Snell-Descartes, il vient que

$$\Delta\phi = \left(n - \frac{1}{n}\right) = \frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{ne}{\sqrt{n^2 - \sin^2\theta_1}}\left(n - \frac{1}{n}\right) - \pi = \frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{e\left(n^2 - 1\right)}{\sqrt{n^2 - \sin^2\theta_1}} - \pi.$$

.....

**11.9** a) Les chemins optiques $(\mathrm{SI}_1)$ et $(\mathrm{SH}_1)$, ainsi que $(\mathrm{I}_2\mathrm{N})$ et $(\mathrm{H}_2\mathrm{M})$ sont égaux, on peut donc écrire

$$\Delta\phi = \phi(\mathrm{N}) - \phi(\mathrm{M}) = \frac{2\pi}{\lambda_0}((\mathrm{SM}) - (\mathrm{SN})) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n\mathrm{I}_1\mathrm{I}_2 - \mathrm{H}_1\mathrm{H}_2) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(ne + d - e) - \frac{2\pi}{\lambda_0}d = \frac{2\pi}{\lambda_0}e(n-1).$$

.....

**11.9** b) Dans le triangle rectangle d'hypoténuse $\mathrm{I}_1\mathrm{I}_2$, on a $\cos\theta_2 = \dfrac{e}{\mathrm{I}_1\mathrm{I}_2}$.

.....

**11.9** c) On identifie un triangle rectangle $\mathrm{I}_1\mathrm{I}_2\mathrm{H}_3$ d'hypoténuse $\mathrm{I}_1\mathrm{I}_2$ avec un angle $\theta_1 - \theta_2$ de côté adjacent $\mathrm{H}_1\mathrm{H}_2$. Il vient que $\mathrm{H}_1\mathrm{H}_2 = \mathrm{I}_1\mathrm{I}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)$.

Cas 2

.....

**11.9** d) Les chemins optiques $(SI_1)$ et $(SH_1)$, ainsi que $(I_2N)$ et $(H_2M)$ sont égaux, on peut donc écrire

$$\Delta\phi = \phi(N) - \phi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0}((SM) - (SN)) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(nI_1I_2 - H_1H_2).$$

En utilisant les expressions obtenues précédemment, on a

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0}(nI_1I_2 - I_1I_2\cos(\theta_1 - \theta_2)) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{e}{\cos\theta_2}(n - \cos(\theta_1 - \theta_2)).$$

.....

**11.9** e) En utilisant l'identité trigonométrique, il vient que $\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2$. De plus, la loi de Snell-Descartes de la réfraction nous permet d'écrire $\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 + n\sin^2\theta_2$. Enfin, en utilisant l'identité trigonométrique $1 = \sin^2\theta_2 + \cos^2\theta_2$, il vient que

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 + n - n\cos^2\theta_2.$$

.....

**11.9** f) En utilisant les expressions obtenues précédemment, on a

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{e}{\cos\theta_2}(n - \cos(\theta_1 - \theta_2)) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{e}{\cos\theta_2}\big(n - \cos\theta_1\cos\theta_2 - n + \cos^2\theta_2\big)\\ &= \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{e}{\cos\theta_2}\big(-\cos\theta_1\cos\theta_2 + n\cos^2\theta_2\big).\end{aligned}$$

Donc, $\Delta\phi = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}e(n\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$.

.....

**11.10** a) Le rayon est d'abord réfléchi par la lame semi-réfléchissante. L'indice de réfraction de la lame est supérieur à celui de l'air, il y a donc un déphasage de $\pi$. Puis, le rayon est réfléchi par le miroir et est donc, de nouveau, déphasé de $\pi$.

.....

**11.10** b) Le rayon passe une première fois dans la lame, puis est réfléchi par $M_2$ : le rayon est déphasé de $\pi$. Il traverse une deuxième fois la lame et est réfléchi une seconde fois par la lame. Dans ce cas, le milieu de propagation du rayon incident est le plus réfringent : il n'y a pas de déphasage supplémentaire.

.....

**11.10** c) On considère le triangle rectangle d'hypoténuse $I_1I_2$ et on utilise la relation trigonométrique $\cos\theta_2 = \dfrac{e}{I_2I_2}$.

.....

**11.10** d) Le rayon réfléchi par $M_1$ traverse la lame entre $I_1$ et $I_3$ avant la réflexion par $M_1$. Le rayon réfléchi par $M_2$ traverse la lame entre $I_1$ et $I_2$ avant la réflexion par $M_2$, puis entre $I_2$ et $I_1$ après la réflexion par $M_2$, puis entre $I_1$ et $I_3$. En tenant compte du déphasage dû au réflexion, et comme $I_1I_2 = I_1I_3$, il vient que

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0}(3nI_1I_2) + \pi - \frac{2\pi}{\lambda_0}(nI_1I_2 + 2\pi) = \frac{4\pi}{\lambda_0}nI_1I_2 - \pi = \frac{4\pi}{\lambda_0}\frac{ne}{\cos\theta_2} - \pi.$$

.....

**11.11** a) Attention à la conversion des picosecondes en secondes : on a $1\,\text{ps} = 1\times10^{-12}\,\text{s}$.

.....

**11.11** b) Attention à la conversion des microsecondes en secondes : on a $1\,\mu\text{s} = 1\times10^{-6}\,\text{s}$.

.....

**11.11** c) La relation $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda} = \dfrac{\Delta f}{f}$ se réécrit $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda} = \dfrac{1}{\tau_c f}$, soit $\tau_c = \dfrac{\lambda^2}{c\Delta\lambda}$. Ainsi, on a :

$$\tau_c = \frac{\big(820\times10^{-9}\,\text{m}\big)^2}{3\times10^8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}\times50\times10^{-9}\,\text{m}} = 45\times10^{-15}\,\text{s} = 45\times10^3\,\text{ps}.$$

.....

**11.11** d) Une source possède une cohérence temporelle d'autant plus forte que le temps de cohérence est long (trains d'onde avec une durée importante). Parmi les trois sources, c'est le laser qui possède la meilleure cohérence temporelle. La source de lumière blanche munie du filtre possède la moins bonne cohérence temporelle.

.....

**11.12** a) La tension $u_1$ vérifie

$$u_1 = K_1\langle s(t)\rangle = \frac{K_1}{\tau}\int_0^\tau s(t)\,\mathrm{d}t = \frac{K_1}{\tau}\int_0^\tau S_0\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{K_1 S_0}{\tau}\left[\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right]_0^\tau$$
$$= K_1 S_0\frac{1}{\omega\tau}\sin(\omega\tau) = K_1 S_0\frac{T}{2\pi\tau}\sin\left(2\pi\frac{\tau}{T}\right).$$

.....

**11.12** b) La valeur maximale de la fonction $\sin\left(2\pi\frac{\tau}{T}\right)$ est 1, donc la valeur maximale de $u_1$ est $K_1 S_0\frac{T}{2\pi\tau}$.

.....

**11.12** c) La valeur maximale du signal $u_1$ est $K_1 S_0\frac{T}{2\pi\tau}$. Ce signal est exploitable lorsque

$$K_1 S_0\frac{T}{2\pi\tau} \geqslant \frac{K_1 S_0}{2\pi\times 100} \qquad \text{soit} \qquad T \geqslant \frac{\tau}{100} \qquad \text{soit} \qquad f \leqslant \frac{100}{\tau}.$$

Ainsi la fréquence maximale du signal exploitable par le capteur A est $f = \dfrac{100}{1\times 10^{-9}\,\mathrm{s}} = 1\times 10^{11}\,\mathrm{Hz} = 100\,\mathrm{GHz}$.

.....

**11.12** d) La tension $u_2$ vérifie

$$u_2 = K_2\left\langle s^2(t)\right\rangle = \frac{K_2}{\tau}\int_0^\tau s^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{K_2 S_0^2}{\tau}\int_0^\tau \cos^2(\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{K_2 S_0^2}{2\tau}\left(\int_0^\tau \mathrm{d}t + \int_0^\tau \cos(2\omega t)\,\mathrm{d}t\right)$$
$$= \frac{K_2 S_0^2}{2\tau}\left(\tau + \frac{T}{4\pi}\sin\left(4\pi\frac{\tau}{T}\right)\right).$$

.....

**11.12** e) La valeur maximale de la fonction $\sin\left(4\pi\frac{\tau}{T}\right)$ est 1, donc la valeur maximale de $u_2$ est $\frac{K_2 S_0^2}{2\tau}\left(\tau + \frac{T}{4\pi}\right)$.

.....

**11.12** f) La valeur maximale du signal $u_2$ est $\frac{K_2 S_0^2}{2\tau}\left(\tau + \frac{T}{4\pi}\right)$. Ce signal est exploitable lorsque

$$\frac{K_2 S_0^2}{2\tau}\left(\tau + \frac{T}{4\pi}\right) \geqslant \frac{K_2 S_0^2}{2} \qquad \text{soit} \qquad K_2 S_0^2\frac{T}{8\pi\tau} \geqslant 0 \qquad \text{soit} \qquad f < +\infty.$$

Ainsi, théoriquement, il n'y a pas de limite à la fréquence du signal exploitable par le capteur B.

.....

**11.13** a) On a $\mathcal{P}_{\min\,1} = \dfrac{I_{\mathrm{obs}\,1}}{s_1} = \dfrac{3\times 10^{-11}\,\mathrm{A}}{0{,}3\,\mathrm{A}\cdot\mathrm{W}^{-1}} = 1{,}00\times 10^{-10}\,\mathrm{W}$.

.....

**11.13** d) On a $E_{\min\,1} = \mathcal{P}_{\min\,1}\times\tau = 1{,}00\times 10^{-10}\,\mathrm{W}\times 2{,}00\times 10^{-7}\,\mathrm{s} = 2{,}00\times 10^{-17}\,\mathrm{J}$.

.....

**11.13** g) Le nombre minimal de photons reçus par une photodiode $N_{\min}$ vérifie $N_{\min} = \dfrac{E_{\min}}{h\nu} = \dfrac{E_{\min}\lambda_0}{hc}$.
Ainsi, on a $N_{\min\,1} = 47$, $N_{\min\,2} = 935$ et $N_{\min\,3} = 1\,104$.

.....

# Fiche n° 12. Interférences à deux ondes

## Réponses

**12.1** a) .. $\boxed{\cos(a)\cos(b) = \dfrac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}}$

**12.1** b) ..... $\boxed{\cos^2 a = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}}$

**12.1** c) ..... $\boxed{\sin^2 a = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}}$

**12.1** d) ..... $\boxed{\sin(a)\cos(a) = \dfrac{\sin(2a)}{2}}$

**12.2** a) ..... $\boxed{\cos(\omega t - kx)}$

**12.2** b) ..... $\boxed{-\sin(\omega t - kx)}$

**12.2** c) ..... $\boxed{\text{c}}$

**12.3** a) ..... $\boxed{\dfrac{2\pi}{\omega_1}}$

**12.3** b) ..... $\boxed{0}$

**12.3** c) ..... $\boxed{\dfrac{2\pi}{\omega_2}}$

**12.3** d) ..... $\boxed{0}$

**12.3** e) ..... $\boxed{\dfrac{\pi}{\omega_1}}$

**12.3** f) ..... $\boxed{\dfrac{S_1^2}{2}}$

**12.3** g) ..... $\boxed{\dfrac{\pi}{\omega_2}}$

**12.3** h) ..... $\boxed{\dfrac{S_2^2}{2}}$

**12.4** a) ..... $\boxed{1+\cos(\pm\varphi_1 \mp \varphi_2)}$

**12.4** b) ..... $\boxed{A^2}$

**12.4** c) ..... $\boxed{\dfrac{A^2+B^2}{2}}$

**12.4** d) ..... $\boxed{\dfrac{A^2}{8}\left(\dfrac{5}{4}+\cos(\varphi_0)\right)}$

**12.5** ..... $\boxed{\text{c}}$

**12.6** a) ..... $\boxed{k(x'-x)}$

**12.6** b) ..... $\boxed{\text{a}}$

**12.6** c) ..... $\boxed{\omega(t-t')}$

**12.6** d) ..... $\boxed{\text{a}}$

**12.7** a) ..... $\boxed{\text{c}}$

**12.7** b) ..... $\boxed{1{,}3\,\text{cm}}$

**12.7** c) ..... $\boxed{48\,\mu\text{m}}$

**12.8** a) ..... $\boxed{\text{b}}$

**12.8** b) ..... $\boxed{0{,}57\,\text{cm}}$

**12.8** c) ..... $\boxed{0{,}76\,\mu\text{m}}$

**12.8** d) ..... $\boxed{6{,}4\,\text{cm}}$

**12.8** e) ..... $\boxed{0{,}14\,\mu\text{m}}$

**12.9** a) ..... $\boxed{a\sin(\theta_1)}$

**12.9** b) ..... $\boxed{\arctan\left(\dfrac{y}{f_2'}\right)}$

**12.9** c) ..... $\boxed{\dfrac{nay}{f_2'}}$

**12.9** d) ..... $\boxed{\dfrac{f_2'\lambda}{na}}$

**12.9** e) ..... $\boxed{\text{b}}$

**12.10** a) ..... $\boxed{\text{a}}$

**12.10** b) ..... $\boxed{(n-1)\alpha y}$

**12.10** c) ..... $\boxed{\dfrac{\lambda_0}{(n-1)\alpha}}$

**12.10** d) ..... $\boxed{\text{b}}$

**12.11** a) ..... $\boxed{\dfrac{e}{\cos(\theta)}}$

**12.11** b) ..... $\boxed{2e\tan(\theta)}$

**12.11** c) ..... $\boxed{\mathrm{IK}\sin(\theta)}$

**12.11** d) ..... $\boxed{2e\dfrac{1-\cos^2(\theta)}{\cos(\theta)}}$

**12.11** e) ..... $\boxed{2ne\cos(\theta)}$

**12.11** f) ..... $\boxed{\text{c}}$

**12.12** a) ..... $\boxed{\text{b}}$

**12.12** b) ..... $\boxed{\dfrac{2e\sin^2 i}{\cos(i)}}$

**12.12** c) ..... $\boxed{\dfrac{e}{\cos(i)}}$

**12.12** d) ..... $\boxed{2ne\cos(i)}$

**12.12** e) ..... $\boxed{\text{c}}$

**12.13** a) ..... $\boxed{1{,}0\times10^{-1}\,\mathrm{s}}$

**12.13** b) ..... $\boxed{2{,}2\times10^{-1}\,\mathrm{m}}$

**12.13** c) ..... $\boxed{2{,}6\times10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}}$

**12.13** d) ..... $\boxed{9{,}5\times10^{-3}\,\mathrm{m}^{-1}}$

**12.13** e) ..... $\boxed{1{,}9\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}}$

**12.13** f) ..... $\boxed{1{,}3\times10^{-9}\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{m}^{-1}}$

**12.14** a) ..... $\boxed{\dfrac{c}{\nu_1-\nu_2}}$

**12.14** b) ..... $\boxed{6{,}00\times10^{11}\,\mathrm{Hz}}$

**12.14** c) ..... $\boxed{\dfrac{c}{\nu_1+\nu_2}}$

**12.14** d) ..... $\boxed{6{,}00\times10^{12}\,\mathrm{Hz}}$

**12.14** e) ..... $\boxed{599{,}8\,\mathrm{nm}}$

**12.14** f) ..... $\boxed{600{,}2\,\mathrm{nm}}$

**12.15** a) ..... $\boxed{\text{a}}$

**12.15** b) ..... $\boxed{\text{b}}$

**12.15** c) ..... $\boxed{\text{c}}$

**12.16** a) ..... $\boxed{f'\tan(\theta)}$

**12.16** b) ..... $\boxed{1\,555{,}2}$

**12.16** c) ..... $\boxed{\text{b}}$

**12.16** d) ..... $\boxed{\text{a}}$

**12.16** e) ..... $\boxed{8{,}22\,\mathrm{mm}}$

**12.16** f) ..... $\boxed{\text{a}}$

**12.16** g) ..... $\boxed{19{,}7\,\mathrm{mm}}$

**12.16** h) ..... $\boxed{5{,}47\,\mathrm{cm}}$

## Corrigés

**12.1** a) Si on somme les relations (1) et (2), il vient que

$$\cos(a-b)+\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)+\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)=2\cos(a)\cos(b).$$

Donc, $\cos(a)\cos(b)=\dfrac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}$.

.....

**12.1** b) En remplaçant $b$ par $a$ dans la relation précédente, il vient que

$$\cos(a)\cos(a)=\frac{\cos(a-a)+\cos(a+a)}{2} \qquad \text{donc} \qquad \cos^2 a=\frac{1+\cos(2a)}{2}.$$

.....

**12.2** a) On a

$$\begin{aligned}
s(x,t) &= S_0\ \cos(\omega t-kx)+S_0\ \cos(\omega t-kx+\varphi)=S_0\ \big(\cos(\omega t-kx)+\cos(\omega t-kx+\varphi)\big)\\
&= S_0\ \big(\cos(\omega t-kx)+\cos(\omega t-kx)\cos(\varphi)-\sin(\omega t-kx)\sin(\varphi)\big)\\
&= S_0\ \big(\cos(\omega t-kx)\ \big(1+\cos(\varphi)\big)-\sin(\omega t-kx)\sin(\varphi)\big)\\
&= S_0\big(\ f(x,t)\ \big(1+\cos(\varphi)\big)+g(x,t)\ \sin(\varphi)\ \big).
\end{aligned}$$

Par identification, on a $f(x,t)=\cos(\omega t-kx)$ et $g(x,t)=-\sin(\omega t-kx)$.

.....

**12.2** c) La fonction $s(x,t)$ s'annule si, et seulement si,

$$\begin{cases}1+\cos(\varphi)=0\\ \sin(\varphi)=0\end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases}\varphi=\pi\ \ [2\pi]\\ \varphi=\pi\ \ [\pi].\end{cases}$$

On en déduit que l'unique condition d'annulation est $\varphi=\pi\ \ [2\pi]$.

.....

**12.3** a) La pulsation du signal $s_1(t)=S_1\cos(\omega_1 t-k_1x)$ est $\omega_1$ donc sa période est $T_1=\dfrac{2\pi}{\omega_1}$.

.....

**12.3** b) On a

$$\begin{aligned}
\langle s_1(t)\rangle &= \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} S_1\cos(\omega_1 t-k_1x)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T_1}\frac{1}{\omega_1}S_1\Big[\sin(\omega_1 t-k_1x)\Big]_0^{T_1}\\
&= \frac{\omega_1}{2\pi}\frac{1}{\omega_1}S_1(\sin(\omega_1T_1-k_1x)-\sin(-k_1x))=\frac{1}{2\pi}S_1(\sin(2\pi-k_1x)-\sin(-k_1x)).
\end{aligned}$$

Comme $\sin(2\pi-k_1x)=\sin(-k_1x)$, on voit que $\langle s_1(t)\rangle=0$.

.....

**12.3** d) On a

$$\begin{aligned}
\langle s_2(t)\rangle &= \frac{1}{T_2}\int_0^{T_2} S_2\sin(\omega_2 t-k_2x+\varphi_2)\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{T_2}\frac{1}{\omega_2}S_2\Big[\cos(\omega_2 t-k_2x+\varphi_2)\Big]_0^{T_2}\\
&= -\frac{\omega_2}{2\pi}\frac{1}{\omega_2}S_2(\cos(\omega_2T_2-k_2x+\varphi_2)-\cos(-k_2x+\varphi_2))=-\frac{1}{2\pi}S_2(\cos(2\pi-k_2x+\varphi_2)-\cos(-k_2x+\varphi_2)).
\end{aligned}$$

Comme $\cos(2\pi-k_2x+\varphi_2)=\cos(-k_2x+\varphi_2)$, on voit que $\langle s_2(t)\rangle=0$.

.....

**12.3** e) Le signal $f_1(t) = s_1^2(t) = S_1^2 \cos^2(\omega_1 t - k_1 x)$. Or, on a

$$\cos(a)\cos(a) = \frac{\cos(a-a)+\cos(a+a)}{2} \qquad \text{donc} \qquad \cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}.$$

Donc, $f_1(t) = \dfrac{S_1^2}{2} + \dfrac{S_1^2}{2}\cos(2\omega_1 t - 2k_1 x)$.

Ainsi, la pulsation du signal $f_1(t)$ est $2\omega_1$ donc sa période est $T_3 = \dfrac{2\pi}{2\omega_1} = \dfrac{\pi}{\omega_1}$.

.....

**12.3** f) On a

$$\begin{aligned}
\langle f_1(t)\rangle &= \frac{1}{T_3}\int_0^{T_3} \frac{S_1^2}{2} + \frac{S_1^2}{2}\cos(2\omega_1 t - 2k_1 x)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T_3}\frac{S_1^2}{2}\left(\int_0^{T_3}\mathrm{d}t + \int_0^{T_3}\cos(2\omega_1 t - 2k_1 x)\,\mathrm{d}t\right)\\
&= \frac{1}{T_3}\frac{S_1^2}{2}\left([t]_0^{T_3} + \frac{1}{2\omega_1}[\sin(2\omega_1 t - 2k_1 x)]_0^{T_3}\right) = \frac{1}{T_3}\frac{S_1^2}{2}\left(T_3 + \frac{1}{2\omega_1}(\sin(2\omega_1 T_3 - 2k_1 x) - \sin(-2k_1 x))\right)\\
&= \frac{S_1^2}{2}\left(1 + \frac{\omega_1}{\pi}\frac{1}{2\omega_1}(\sin(2\pi - 2k_1 x) - \sin(-2k_1 x))\right).
\end{aligned}$$

Comme $\sin(2\pi - 2k_1 x) = \sin(-2k_1 x)$, on voit que $\langle f_1(t)\rangle = \dfrac{S_1^2}{2}$.

.....

**12.3** g) Le signal $f_2(t) = s_2^2(t) = S_2^2 \sin^2(\omega_2 t - k_2 x + \varphi_2)$. Or, on a

$$\sin(a)\sin(a) = \frac{\cos(a-a)-\cos(a+a)}{2} \qquad \text{donc} \qquad \sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}.$$

Donc, $f_2(t) = \dfrac{S_2^2}{2} - \dfrac{S_2^2}{2}\cos(2\omega_2 t - 2k_2 x + 2\varphi_2)$.

Ainsi, la pulsation du signal $f_2(t)$ est $2\omega_2$ donc sa période est $T_4 = \dfrac{2\pi}{2\omega_2} = \dfrac{\pi}{\omega_2}$.

.....

**12.3** h) On a

$$\begin{aligned}
\langle f_2(t)\rangle &= \frac{1}{T_4}\int_0^{T_4} \frac{S_2^2}{2} - \frac{S_2^2}{2}\cos(2\omega_2 t - 2k_2 x + 2\varphi_2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T_4}\frac{S_2^2}{2}\left(\int_0^{T_4}\mathrm{d}t - \int_0^{T_4}\cos(2\omega_2 t - 2k_2 x + 2\varphi_2)\,\mathrm{d}t\right)\\
&= \frac{1}{T_4}\frac{S_2^2}{2}\left(\big[t\big]_0^{T_4} - \frac{1}{2\omega_2}\Big[\sin(2\omega_2 t - 2k_2 x + 2\varphi_2)\Big]_0^{T_4}\right)\\
&= \frac{1}{T_4}\frac{S_2^2}{2}\left(T_4 - \frac{1}{2\omega_2}(\sin(2\omega_2 T_4 - 2k_2 x + 2\varphi_2) - \sin(-2k_2 x + 2\varphi_2))\right)\\
&= \frac{S_2^2}{2}\left(1 - \frac{\omega_2}{\pi}\frac{1}{2\omega_2}(\sin(2\pi - 2k_2 x + 2\varphi_2) - \sin(-2k_2 x + 2\varphi_2))\right).
\end{aligned}$$

Comme $\sin(2\pi - 2k_2 x + 2\varphi_2) = \sin(-2k_2 x + 2\varphi_2)$, on voit que $\langle f_2(t)\rangle = \dfrac{S_2^2}{2}$.

.....

**12.4** a) On a

$$\begin{aligned}
&\left\langle [\cos(\omega_0 t + \varphi_1) + \cos(\omega_0 t + \varphi_2)]^2 \right\rangle\\
&= \left\langle [\cos(\omega_0 t + \varphi_1)]^2 + 2\cos(\omega_0 t + \varphi_1)\cos(\omega_0 t + \varphi_2) + [\cos(\omega_0 t + \varphi_2)]^2 \right\rangle\\
&= \left\langle \frac{\cos(0) + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_1)}{2} \right\rangle + \left\langle 2\frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos(2\omega_0 t + \varphi_1 + \varphi_2)}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{\cos(0) + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_2)}{2} \right\rangle\\
&= \frac{1}{2} + 0 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + 0 + \frac{1}{2} + 0 = 1 + \cos(\pm\varphi_1 \mp \varphi_2).
\end{aligned}$$

.....

**12.4** b) On a

$$\begin{aligned}
&\left\langle [A\cos(3\omega_0 t+\varphi_1)+A\cos(\omega_0 t+\varphi_2)]^2\right\rangle\\
&=\left\langle [A\cos(3\omega_0 t+\varphi_1)]^2+2A^2\cos(3\omega_0 t+\varphi_1)\cos(\omega_0 t+\varphi_2)+[A\cos(\omega_0 t+\varphi_2)]^2\right\rangle\\
&=\left\langle A^2\frac{\cos(0)+\cos(6\omega_0 t+2\varphi_1)}{2}\right\rangle+\left\langle 2A^2\frac{\cos(2\omega_0 t+\varphi_1-\varphi_2)+\cos(4\omega_0 t+\varphi_1+\varphi_2)}{2}\right\rangle\\
&\qquad+\left\langle A^2\frac{\cos(0)+\cos(2\omega_0 t+2\varphi_2)}{2}\right\rangle\\
&=A^2\left[\frac{1}{2}+0+0+0+\frac{1}{2}+0\right]=A^2.
\end{aligned}$$

.....

**12.4** c) On a

$$\begin{aligned}
&\left\langle [A\cos(42\omega_0 t+\varphi_1)+B\sin(43\omega_0 t+\varphi_2)]^2\right\rangle\\
&=\left\langle [A\cos(42\omega_0 t+\varphi_1)]^2+2AB\cos(42\omega_0 t+\varphi_1)\sin(43\omega_0 t+\varphi_2)+[B\sin(43\omega_0 t+\varphi_2)]^2\right\rangle\\
&=\left\langle A^2\frac{\cos(0)+\cos(84\omega_0 t+2\varphi_1)}{2}\right\rangle+\left\langle 2AB\frac{\sin(\omega_0 t-\varphi_1+\varphi_2)+\sin(85\omega_0 t+\varphi_1+\varphi_2)}{2}\right\rangle\\
&\qquad+\left\langle B^2\frac{\cos(0)-\cos(86\omega_0 t+2\varphi_2)}{2}\right\rangle\\
&=\left[\frac{A^2}{2}+0+0+0+\frac{B^2}{2}-0\right]=\frac{A^2+B^2}{2}.
\end{aligned}$$

.....

**12.4** d) On a

$$\begin{aligned}
&\left\langle \left[\frac{A}{4}\sin\left(\frac{\omega_0}{2}t+\varphi_0\right)+\frac{A}{2}\sin\left(\frac{\omega_0}{2}t+2\varphi_0\right)\right]^2\right\rangle\\
&=\left\langle \left[\frac{A}{4}\sin(\frac{\omega_0}{2}t+\varphi_0)\right]^2+\frac{A^2}{4}\sin(\frac{\omega_0}{2}t+\varphi_0)\sin(\frac{\omega_0}{2}t+2\varphi_0)+\left[\frac{A}{2}\sin(\frac{\omega_0}{2}t+2\varphi_0)\right]^2\right\rangle\\
&=\left\langle \frac{A^2}{16}\frac{\cos(0)-\cos(\omega_0 t+2\varphi_0)}{2}\right\rangle+\left\langle \frac{A^2}{4}\frac{\cos(\varphi_0)-\cos(\omega t+3\varphi_0)}{2}\right\rangle+\left\langle \frac{A^2}{4}\frac{\cos(0)-\cos(\omega_0 t+4\varphi_0)}{2}\right\rangle\\
&=\left[\frac{A^2}{32}-0+\frac{A^2}{8}\cos(\varphi_0)-0+\frac{A^2}{8}-0\right]=\frac{A^2}{8}\left(\frac{1}{4}+\cos(\varphi_0)+1\right)=\frac{A^2}{8}\left(\frac{5}{4}+\cos(\varphi_0)\right).
\end{aligned}$$

.....

**12.5**

- Pour (a), on a $C=\dfrac{10{,}0\times10^6\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}-1{,}00\,\mathrm{MW\cdot m^{-2}}}{10{,}0\times10^6\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}+1{,}00\,\mathrm{MW\cdot m^{-2}}}=\dfrac{1{,}00\times10^7\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}-1{,}00\times10^6\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}}{1{,}00\times10^7\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}+1{,}00\times10^6\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}}=0{,}82.$
- Pour (b), on a $C=\dfrac{660\,\mathrm{mW\cdot mm^{-2}}-0{,}220\,\mathrm{kW\cdot dm^{-2}}}{660\,\mathrm{mW\cdot mm^{-2}}+0{,}220\,\mathrm{kW\cdot dm^{-2}}}=\dfrac{6{,}60\times10^5\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}-2{,}20\times10^4\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}}{6{,}60\times10^5\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}+2{,}20\times10^4\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}}=93{,}5.$
- Pour (c), on a $C=\dfrac{5{,}00\,\mathrm{mW\cdot mm^{-2}}-2{,}00\,\mathrm{mW\cdot cm^{-2}}}{5{,}00\,\mathrm{mW\cdot mm^{-2}}+2{,}00\,\mathrm{mW\cdot cm^{-2}}}=\dfrac{5{,}00\times10^3\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}-20{,}0\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}}{5{,}00\times10^3\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}+20{,}0\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}}=99{,}2.$
- Pour (d), on a $C=\dfrac{72{,}0\,\mathrm{pW\cdot \mu m^{-2}}-3{,}00\,\mathrm{MW\cdot km^{-2}}}{72{,}0\,\mathrm{pW\cdot \mu m^{-2}}+3{,}00\,\mathrm{MW\cdot km^{-2}}}=\dfrac{72{,}0\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}-3{,}00\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}}{72{,}0\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}+3{,}00\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}}=92{,}0.$

.....

**12.6** a) On a $\Delta\varphi=\omega t_0-kx-\big(\omega t_0-kx'\big)=k\big(x'-x\big)$.

.....

**12.6** b) Le déphasage $\Delta\varphi_n$ entre deux positions successives est constant si $k(x_n-x_{n+1})=0\ \ [2\pi]=n2\pi$. Autrement dit, on a $\Delta x_n=n\dfrac{2\pi}{k}=n\dfrac{2\pi\lambda}{2\pi}=n\lambda$. Pour un instant donné, les positions distantes d'un nombre entier de fois la longueur d'onde de la vibration lumineuse sont en phases : réponse (a).

.....

**12.6** c) On a $\Delta\varphi = \omega t - kx_0 - \big(\omega t' - kx_0\big) = \omega\big(t - t'\big)$.

**12.6** d) Le déphasage $\Delta\varphi_n$ entre deux instants successifs est constant si $\omega(t_n - t_{n+1}) = 0 \ [2\pi] = n2\pi$. Autrement dit, on a $\Delta t_n = n\dfrac{2\pi}{\omega} = n\dfrac{2\pi T}{2\pi} = nT$. Pour une position donnée, les instants séparés d'un nombre entier de fois la période de la vibration lumineuse sont en phase : réponse (a).

**12.7** a) On a $I(\mathrm{M}) = 2I_0\left(1 + \cos\left(\dfrac{2\pi x}{i}\right)\right)$ ; on identifie donc $i = \dfrac{\lambda D}{na}$.

**12.7** b) Par lecture graphique, on constate qu'entre $x = -20\,\mathrm{mm}$ et $x = +20\,\mathrm{mm}$ se trouve 3 interfranges. Donc, on a $i = \dfrac{4{,}0\,\mathrm{cm}}{3} = 1{,}3\,\mathrm{cm}$.

**12.7** c) On a $a = \dfrac{\lambda D}{ni}$. Donc, $a = \dfrac{630 \times 10^{-9}\,\mathrm{m} \times 1{,}0\,\mathrm{m}}{1{,}0 \times 1{,}3 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}} = 48\,\mu\mathrm{m}$.

**12.8** a) On a $C(x) = \cos\left(\dfrac{2\pi x}{X}\right)$ ; on identifie donc $X = \dfrac{2\lambda_{\mathrm{moy}}^2 D}{na\Delta\lambda}$.

**12.8** c) On a $\lambda_{\mathrm{moy}} = \dfrac{ina}{D}$. Donc, $\lambda_{\mathrm{moy}} = \dfrac{0{,}57 \times 10^{-3}\,\mathrm{m} \times 1{,}0 \times 0{,}20 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}}{1{,}5\,\mathrm{m}} = 0{,}76\,\mu\mathrm{m}$.

**12.8** e) On a $\Delta\lambda = \dfrac{2\lambda_{\mathrm{moy}}^2 D}{naX}$. Donc, $\Delta\lambda = \dfrac{2 \times (0{,}76.10^{-6})^2 \times 1{,}5}{1{,}0 \times 0{,}20.10^{-3} \times 6{,}4.10^{-2}} = 0{,}14\,\mu\mathrm{m}$.

**12.9** a) On a $\sin(\theta_1) = \dfrac{\mathrm{S_2H}}{a}$ donc $\mathrm{S_2H} = a\sin(\theta_1)$.

**12.9** b) À l'aide du tracé en pointillé, on obtient un triangle avec : $\tan(\theta_1) = \dfrac{y}{f_2'}$. On en déduit $\theta_1 = \arctan(\dfrac{y}{f_2'})$.

**12.9** c) On sait que $\delta_{\mathrm{SM}} = \mathcal{L}_{\mathrm{S_2H}} = n\mathrm{S_2H} = na\sin(\theta_1)$. À l'ordre 1, on a $\sin(\theta_1) = \theta_1$ et $\tan(\theta_1) = \theta_1 = \dfrac{y}{f_2'}$. Donc, on a $\delta_{\mathrm{SM}} = \dfrac{nay}{f_2'}$.

**12.9** d) En identifiant, on a : $\dfrac{y}{i} = \dfrac{\delta_{\mathrm{SM}}}{\lambda} = \dfrac{nay}{f_2'\lambda}$. Donc : $i = \dfrac{\lambda f_2'}{na}$.

**12.9** e) L'éclairement ne dépend que de la variable $y$, ainsi pour une valeur de $y$ fixée l'éclairement doit être constant, ce qui est seulement le cas pour la figure 2 soit la réponse (b).

**12.10** a) Dans l'interféromètre, un rayon est atténué par deux lames séparatrices, ainsi son éclairement en sortie $I'$ est tel que $I' = I_0/4$. Donc son amplitude en sortie $S'$ est telle que $S'^2 = S_0^2/4$, soit $S' = S_0/2$.

**12.10** b) En considérant $l$ la distance parcourue par un rayon dans un des bras de l'interféromètre de S jusqu'à l'écran, la différence de marche entre les rayons passant par les deux bras de l'interféromètre est

$$\delta = n_{\mathrm{air}}(l - e) + ne - \big(n_{\mathrm{air}}\big(l - e'\big) + ne'\big) = l + (n-1)e - l - (n-1)e' = (n-1)\big(e - e'\big) = (n-1)\alpha y.$$

**12.10** c) Le déphasage entre les deux rayons est $\Delta\varphi = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}\delta = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}(n-1)\alpha y$. Par identification, on a

$$2\pi\frac{y}{i} = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n-1)\alpha y \qquad \text{donc} \qquad i = \frac{\lambda_0}{(n-1)\alpha}.$$

**12.10** d) L'éclairement ne dépend que de la variable $y$, ainsi pour une valeur de $y$ fixée l'éclairement doit être constant, ce qui est seulement le cas pour la figure 2. Réponse (b).

**12.11** a) On a $\cos(\theta) = \dfrac{e}{\mathrm{IJ}} = \dfrac{e}{\mathrm{JK}}$ ; donc, $\mathrm{IJ} = \mathrm{JK} = \dfrac{e}{\cos(\theta)}$.

**12.11** b) On a $\tan(\theta) = \dfrac{\frac{\mathrm{IK}}{2}}{e} = \dfrac{\mathrm{IK}}{2e}$ ; donc, $\mathrm{IK} = 2e\tan(\theta)$.

**12.11** c) On a $\sin(\theta) = \dfrac{\mathrm{IH}}{\mathrm{IK}}$ ; donc, $\mathrm{IH} = \mathrm{IK}\sin(\theta)$

**12.11** d) On a $\mathrm{IH} = \mathrm{IK}\sin(\theta) = 2e\tan(\theta)\sin(\theta) = 2e\dfrac{\sin^2(\theta)}{\cos(\theta)}$ car $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$. Or, $\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$.

Donc, $\mathrm{IH} = 2e\dfrac{1-\cos^2(\theta)}{\cos(\theta)}$.

**12.11** e) On a $\delta_{\mathrm{SM}} = \mathcal{L}_{\mathrm{IJ}} + \mathcal{L}_{\mathrm{JK}} - \mathcal{L}_{\mathrm{IH}} = n(\mathrm{IJ} + \mathrm{JK} - \mathrm{IH})$. En injectant les résultats précédents on obtient :

$$\delta_{\mathrm{SM}} = n\left(2\frac{e}{\cos(\theta)} - 2e\frac{1-\cos^2(\theta)}{\cos(\theta)}\right) = \frac{2ne}{\cos(\theta)}\left[1 - \left(1-\cos^2(\theta)\right)\right] = \frac{2ne}{\cos(\theta)}\cos^2(\theta) = 2ne\cos(\theta).$$

**12.11** f) La différence de marche ne dépend que de la variable $\theta$. Or l'éclairement dépend de la différence de marche (formule de Fresnel) donc l'éclairement dépend uniquement de la variable $\theta$. Cela signifie que l'on retrouve une valeur fixée d'éclairement pour une valeur fixée de $\theta$ ! Autrement dit, l'ensemble des points de même éclairement correspond à un cercle, conformément à ce qui est observé dans la figure 3. Réponse (c).

**12.12** a) La rayon inférieur d'amplitude $S'$ en M est réfléchi deux fois de plus que le rayon supérieur d'amplitude $S$ en M. Ainsi $S' = r^2 S$. Comme l'éclairement $I$ est proportionnel au carré de l'amplitude, on a $I' = r^4 I$ et

$$I' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 I = \frac{I}{4} \qquad \text{donc} \qquad \frac{I'}{I} = \frac{1}{4}.$$

**12.12** b) D'après la loi de la réflexion, on a $\tan(i) = \dfrac{\frac{1}{2}\mathrm{BE}}{e}$ et donc $\mathrm{BE} = 2e\tan(i)$. Par ailleurs, on a $\sin(i) = \dfrac{\mathrm{BH}}{\mathrm{BE}}$, d'où $\mathrm{BH} = \mathrm{BE}\sin(i)$. En injectant la première relation dans la seconde, il vient

$$\mathrm{BH} = 2e\tan(i)\sin(i) = \frac{2e\sin^2 i}{\cos(i)}.$$

**12.12** c) D'après la loi de la réflexion, il vient $\cos(i) = \dfrac{e}{\mathrm{BD}}$. On en déduit $\mathrm{BD} = \dfrac{e}{\cos(i)}$.

**12.12** d) On a

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{SM}} &= \mathcal{L}_{\mathrm{SABDFM}} - \mathcal{L}_{\mathrm{SABHCM}}\\ &= (\mathrm{SA} + n\mathrm{AB} + n\mathrm{BD} + n\mathrm{DE} + \mathrm{EF} + \mathrm{FM}) - (\mathrm{SA} + n\mathrm{AB} + \mathrm{BH} + \mathrm{HC} + \mathrm{CM}).\end{aligned}$$

Or, on a BD = DE, EF = HC et FM = CM donc

$$\delta_{\mathrm{SM}} = 2n\mathrm{BD} - \mathrm{BH} = 2n\frac{e}{\cos(i)} - \frac{2e\sin^2 i}{\cos(i)} = 2ne\frac{1-\sin^2 i}{\cos(i)} = 2ne\frac{\cos^2 i}{\cos(i)} = 2ne\cos(i).$$

**12.12** e) Les franges d'interférences sont isophases, donc telles que $\delta_{\mathrm{SM}}$ soit constant. Or $\delta_{\mathrm{SM}}$ ne dépend que de l'angle $i$, donc les franges d'interférences coïncident avec des cercles épais concentriques. Réponse (c).

**12.13** a) On identifie la période $\frac{2\pi}{T_1}t = 60t$ donc $T_1 = \frac{2\pi}{60}\mathrm{s} = 1{,}0 \times 10^{-1}\,\mathrm{s}$.

**12.13** b) On identifie la longueur d'onde $\frac{2\pi}{\lambda_1}x = 28x$ donc $\lambda_1 = \frac{2\pi}{28}\mathrm{m} = 2{,}2 \times 10^{-1}\,\mathrm{m}$.

**12.13** c) On identifie la fréquence $2\pi\nu_2 t = \left(\frac{t}{21} - \frac{t}{32}\right)$ donc $\nu_2 = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{21} - \frac{1}{32}\right)\mathrm{s}^{-1} = 2{,}6 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}$.

**12.13** d) On identifie le nombre d'onde $2\pi\sigma_2 t = \left(\frac{x}{7} - \frac{x}{12}\right)$ donc $\sigma_2 = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{12}\right)\mathrm{m}^{-1} = 9{,}5 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^{-1}$.

**12.13** e) Attention : le terme $\frac{\pi}{2}$ correspond à la valeur de la phase du signal à l'origine (argument de la fonction cosinus pour $t = 0$ et $x = 0$), il n'entre ni dans l'expression de la pulsation temporelle, ni dans celle de la pulsation spatiale.

Ainsi, on identifie la pulsation temporelle $\omega_3 t = \frac{3\pi}{5}t + \frac{t}{23}$ ; donc $\omega_3 = \frac{3\pi}{5} + \frac{1}{23}\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1} = 1{,}9\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

**12.13** f) On identifie la pulsation spatiale $k_3 x = \frac{2\pi\nu_3}{5c}x$ ; donc $k_3 = \frac{1{,}9}{5 \times 3 \times 10^8}\mathrm{rad}\cdot\mathrm{m}^{-1} = 1{,}3 \times 10^{-9}\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{m}^{-1}$.

**12.14** a) La période spatiale de $\cos\left(2\pi\frac{\nu_1 - \nu_2}{c}x\right)$ est telle que $\lambda = \frac{c}{\nu_1 - \nu_2}$.

**12.14** b) D'après la figure, on a $\frac{\lambda}{2} = 0{,}500\,0\,\mathrm{mm}$ donc $\lambda = 1{,}000 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$. Or, on a vu que $\lambda = \frac{c}{\nu_1 - \nu_2}$. Donc,

$$\Delta\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}}{1{,}000 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}} = 3{,}000 \times 10^{11}\,\mathrm{Hz}.$$

**12.14** c) La période spatiale de $\cos\left(2\pi\frac{\nu_1 + \nu_2}{c}x\right)$ est telle que $\lambda' = \frac{c}{\nu_1 + \nu_2}$.

**12.14** d) D'après la figure, on a $8\lambda' = 2{,}400\,\mu\mathrm{m}$ donc $\lambda' = 3{,}000 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}$. Or, on a vu que $\lambda' = \frac{c}{\nu_1 + \nu_2}$. Donc,

$$\nu_0 = \frac{c}{2\lambda'} = \frac{3 \times 10^8\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}}{2 \times 3{,}000 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}} = 5{,}000 \times 10^{14}\,\mathrm{Hz}.$$

**12.14** e) En sommant $2\nu_0$ et $\Delta\nu$, il vient que $2\nu_0 + \Delta\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_1 - \nu_2 = 2\nu_1$, donc $\nu_1 = \nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}$ et donc

$$\lambda_1 = \frac{c}{\nu_1} = \frac{3 \times 10^8\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}}{5{,}00 \times 10^{14}\,\mathrm{Hz} + \frac{3{,}00 \times 10^{11}\,\mathrm{Hz}}{2}} = 599{,}8\,\mathrm{nm}.$$

**12.14** f) En soustrayant $\Delta\nu$ à $2\nu_0$, il vient que $2\nu_0 - \Delta\nu = \nu_1 + \nu_2 - \nu_1 + \nu_2 = 2\nu_2$, donc $\nu_2 = \nu_0 - \dfrac{\Delta\nu}{2}$ et donc

$$\lambda_2 = \frac{c}{\nu_2} = \frac{3 \times 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}}{5{,}00 \times 10^{14}\,\mathrm{Hz} - \frac{3{,}00 \times 10^{11}\,\mathrm{Hz}}{2}} = 600{,}2\,\mathrm{nm}.$$

.....

**12.15** a) La figure est dans le plan $(z\mathrm{O}x)$. L'ensemble des points d'éclairement constant correspond à des franges linéaires de direction parallèle à l'axe $(\mathrm{O}z)$. Autrement dit, les ensembles de points isophases ne dépendent ni de la coordonnée $y$ (figure plane) ni de la coordonnée $z$ (orientation des franges), donc uniquement de la coordonnée $x$. De manière analogue, on peut dire qu'il n'y a aucune variation d'éclairement selon la coordonnée $z$. Réponse (a).

.....

**12.15** b) La figure est dans le plan $(y\mathrm{O}z)$. L'ensemble des points d'éclairement constant correspond à des franges linéaires de direction parallèle à l'axe $(\mathrm{O}z)$. Autrement dit, les ensembles de points isophases ne dépendent ni de la coordonnée $x$ (figure plane) ni de la coordonnée $z$ (orientation des franges), donc uniquement de la coordonnée $y$. De manière analogue, on peut dire qu'il n'y a aucune variation d'éclairement selon la coordonnée $z$. Réponse (b).

.....

**12.15** c) La figure est dans le plan $(z\mathrm{O}y)$. L'ensemble des points d'éclairement constant correspond à des franges circulaires. Les ensembles de points d'éclairement constant sont définis pour une valeur constante de distance au centre de la figure $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ issu du point O. Réponse (c).

.....

**12.16** a) On a $\tan(\theta) = \dfrac{r}{f'}$ ; donc $r = f' \tan(\theta)$.

.....

**12.16** b) On a $p_0 = \dfrac{2ne\cos(0)}{\lambda} = \dfrac{2ne}{\lambda}$. Donc, $p_0 = \dfrac{2 \times 1{,}00 \times 500 \times 10^{-6}}{6{,}43 \times 10^{-7}} = 1\,555{,}2$.

.....

**12.16** d) Lorsque $\theta$ augmente, $\cos(\theta)$ diminue donc $p$ diminue aussi. Le premier anneau brillant correspond au premier entier de $p$ plus petit que $p_0 = 1\,555{,}2$. Donc $p_1 = 1\,555$.

.....

**12.16** e) On a $r_1 = f' \tan(\theta_1) = f' \tan\left(\arccos\left(\dfrac{p_1\lambda}{2ne}\right)\right)$. Donc,

$$r_1 = 50{,}0 \times 10^{-2} \tan\left(\arccos\left(\frac{1555 \times 643 \times 10^{-9}}{2 \times 1{,}00 \times 500 \times 10^{-6}}\right)\right) = 8{,}22\,\mathrm{mm}.$$

.....

**12.16** f) Pour voir le deuxième anneau brillant, il faut que $\theta$ augmente encore donc que $p$ diminue d'un entier : on a donc $p_2 = 1\,554$.

.....

**12.16** g) On a $r_2 = f' \tan(\theta_2) = f' \tan\left(\arccos\left(\dfrac{p_2\lambda}{2ne}\right)\right)$. Donc,

$$r_2 = 50{,}0 \times 10^{-2} \tan\left(\arccos\left(\frac{1554 \times 643 \times 10^{-9}}{2 \times 1{,}00 \times 500 \times 10^{-6}}\right)\right) = 19{,}7\,\mathrm{mm}.$$

.....

**12.16** h) On a $p_{10} = 1\,555 - 9 = 1\,546$ et $r_{10} = f' \tan(\theta_{10}) = f' \tan\left(\arccos\left(\dfrac{p_{10}\lambda}{2ne}\right)\right)$. Donc,

$$r_{10} = 50{,}0 \times 10^{-2} \tan\left(\arccos\left(\frac{1546 \times 643 \times 10^{-9}}{2 \times 1{,}00 \times 500 \times 10^{-6}}\right)\right) = 5{,}47\,\mathrm{cm}.$$

.....

# Fiche n° 13. Interférences à N ondes

## Réponses

**13.1** a) ..... c

**13.1** b) ..... $2(1+\cos\theta)$

**13.1** c) ..... b

**13.1** d) ..... $2(1-\cos\theta)$

**13.2** a) ..... $2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\theta}{2}}$

**13.2** b) ..... $4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$

**13.3** a) ..... $2\mathrm{j}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\theta}{2}}$

**13.3** b) ..... $4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$

**13.4** a) ..... $\frac{1}{(1-R)^2}$

**13.4** b) ..... $\frac{4R}{(1-R)^2}$

**13.5** a) ..... 2

**13.5** b) ..... $\theta$

**13.5** c) ..... $-\theta$

**13.6** ..... 1

**13.7** a) ..... $a=3$

**13.7** b) ..... $\underline{f}(\varphi)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$

**13.7** c) ..... $a=5$

**13.7** d) ..... $\underline{f}(\varphi)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}3\varphi}$

**13.8** ..... 1,67 µm

**13.9** a) ..... b

**13.9** b) ..... 1 200 traits/mm

**13.10** ..... −19,1°

**13.11** a) ..... [14,1°; 24,5°]

**13.11** b) ..... [29,1°, 56,0°]

**13.11** c) ..... [46,8°; 79,4°]

**13.11** d) ..... c

**13.12** a) ..... $1-\cos^2(\varphi)$

**13.12** b) ..... $\frac{1}{2}(1-\cos(\varphi))$

**13.12** c) ..... $2I_0(1+\cos(\varphi))$

**13.13** a) ..... d

**13.13** b) ..... d

**13.13** c) ..... b

**13.13** d) ..... b

**13.14** ..... c

**13.15** a) ..... $\pi$

**13.15** b) ..... $2\pi$

**13.15** c) ..... $\frac{2\pi}{N}$

**13.15** d) ..... a

**13.16** a) ..... 1

**13.16** b) ..... $N-1$

**13.16** c) ..... 10

**13.17** a) ..... c

**13.17** b) ..... $\frac{4\pi}{N}$

**13.18** a) ..... $x=p$ et $y=a_0\sin(\theta')$

**13.18** b) ..... 0,534 µm

**13.18** c) ..... 534 nm

**13.19** a) ..... c

**13.19** b) ..... c

**13.19** c) ..... c

**13.19** d) ..... c

**13.20** a) ..... $\frac{6\pi}{\lambda}a$

**13.20** b) ..... $\frac{\pi}{\lambda}a$

**13.20** c) ..... $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{5\pi}{\lambda}a\sin\theta}$

**13.21** ..... 1,69

**13.22** a) ..... $\frac{3\pi}{N}$

**13.22** b) ..... 0,05

## Corrigés

**13.1** a) On a : $\underline{Z}_1 = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = (1+\cos\theta) + \mathrm{j}\sin\theta$. Ainsi,

$$\underline{Z}_1^* = (1+\cos(\theta)) - \mathrm{j}\sin(\theta) = (1+\cos(-\theta)) + \mathrm{j}\sin(-\theta) = 1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}.$$

**13.1** b) On a : $\underline{Z}_1\underline{Z}_1^* = \left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\right) \times \left(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}\right) = 2 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}$. Ainsi, $\underline{Z}_1\underline{Z}_1^* = 2(1+\cos(\theta))$.

**13.1** c) On a : $\underline{Z}_2 = 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta} = (1-\cos(-\theta)) - \mathrm{j}\sin(-\theta)$.
Ainsi, $\underline{Z}_2^* = (1-\cos(-\theta)) + \mathrm{j}\sin(-\theta) = (1-\cos(\theta)) - \mathrm{j}\sin(\theta) = 1 - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$.

**13.1** d) On a : $\underline{Z}_2\underline{Z}_2^* = \left(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}\right) \times \left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\right) = 2 - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}$. Ainsi, $\underline{Z}_2\underline{Z}_2^* = 2(1-\cos(\theta))$.

**13.2** a) On a : $\underline{Z}_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\theta}{2}} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\theta}{2}}\right) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\theta}{2}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Ainsi, $\underline{f}\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\theta}{2}}$.

**13.2** b) On a : $\underline{Z}_1\underline{Z}_1^* = \left(2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\theta}{2}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \times \left(2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\theta}{2}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = 4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

**13.3** a) On a $\underline{Z}_2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\theta}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\theta}{2}}\right) = 2\mathrm{j}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\theta}{2}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Ainsi, $\underline{g}\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\mathrm{j}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\theta}{2}}$.

**13.3** b) On a : $\underline{Z}_2\underline{Z}_2^* = \left(2\mathrm{j}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\theta}{2}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \times \left(-2\mathrm{j}\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\theta}{2}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = 4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

**13.4** a) On a $\underline{s}\underline{s}^* = \dfrac{1}{1-R\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}} \times \dfrac{1}{1-R\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}} = \dfrac{1}{1+R^2-R(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi})} = \dfrac{1}{1+R^2-2R(\cos\varphi)}$.
Or, $\cos\varphi = 1 - 2\sin^2(\varphi/2)$. Ainsi,

$$\underline{s}\underline{s}^* = \frac{1}{1+R^2-2R(1-2\sin^2(\varphi/2))} = \frac{1}{(1-R)^2+4R\sin^2(\varphi/2)} = \frac{1}{(1-R)^2}\frac{1}{1+\frac{4R}{(1-R)^2}\sin^2(\varphi/2)}.$$

Par identification, on trouve $a = \dfrac{1}{(1-R)^2}$ et $m = \dfrac{4R}{(1-R)^2}$.

**13.5** a) On sait que $\cos(\theta') = \cos(\theta) \implies \theta' = \theta + 2k\pi$ ou $\theta' = -\theta + 2k'\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$.

Les valeurs $k = 0$ et $k' = 0$ sont les seules permettant de respecter l'ensemble de définition de $\theta'$. Nous en déduisons $\theta' = \{-\theta, \theta\}$.

Il y a donc deux éléments dans l'ensemble des solutions.

**13.5** b) On a $\theta \in [-90°, 0°]$. Ainsi, $\theta < -\theta$. Le plus petit élément de l'ensemble des solutions est $\theta$.

**13.5** c) Le plus grand élément de l'ensemble des solutions est $-\theta$.

**13.6** On sait que $\sin(\theta') = \sin(\theta) \Rightarrow \theta' = \theta + 2k\pi$ ou $\theta' = \pi - \theta + 2k'\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$.
Il existe une seule possibilité pour avoir une solution comprise dans l'intervalle $[-90°, 90°]$ . Nous en déduisons $\theta' = \{\theta\}$. Il y a qu'un élément dans l'ensemble des solutions.

**13.7** a) On a $\underline{s}(\varphi) = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} + \mathrm{e}^{2\mathrm{j}\varphi} = \dfrac{1-\mathrm{e}^{3\mathrm{j}\varphi}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}} = \dfrac{\mathrm{e}^{3\mathrm{j}\varphi/2}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi/2}}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{-3\mathrm{j}\varphi/2}-\mathrm{e}^{3\mathrm{j}\varphi/2}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi/2}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi/2}}\right)$. Ainsi, $\underline{s}(\varphi) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\dfrac{\sin\left(3\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$.

Nous en déduisons $a = 3$ et $\underline{f}(\varphi) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$.

.....

**13.7** c) On a $\underline{s}(\varphi) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\left(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} + \mathrm{e}^{2\mathrm{j}\varphi} + \mathrm{e}^{3\mathrm{j}\varphi} + \mathrm{e}^{4\mathrm{j}\varphi}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\dfrac{1-\mathrm{e}^{5\mathrm{j}\varphi}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\dfrac{\mathrm{e}^{5\mathrm{j}\varphi/2}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi/2}}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{-5\mathrm{j}\varphi/2}-\mathrm{e}^{5\mathrm{j}\varphi/2}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi/2}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi/2}}\right)$.

Ainsi, $\underline{s}(\varphi) = \mathrm{e}^{3\mathrm{j}\varphi}\dfrac{\sin\left(5\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$. Nous en déduisons $a = 5$ et $\underline{f}(\varphi) = \mathrm{e}^{3\mathrm{j}\varphi}$.

.....

**13.8** On a $a = \dfrac{1\,\mathrm{mm}}{600\,\text{traits}} = \dfrac{1\times10^{-3}\,\mathrm{m}}{600\,\text{traits}} = 1{,}67\,\mu\mathrm{m}$.

.....

**13.9** a) On a $1\,\text{pied} = \dfrac{1\,\text{yard}}{3}$ et $1\,\text{inch} = \dfrac{1\,\text{pied}}{12}$. De plus, $1\,\text{inch} = \dfrac{1\,\text{yard}}{3\times12} = \dfrac{91{,}44\,\mathrm{cm}}{3\times12}$, donc $1\,\text{inch} = 25{,}4\,\mathrm{mm}$.

.....

**13.9** b) La linéature du réseau vaut $n = \dfrac{30\,000\,\text{traits}}{1\,\text{inch}} = \dfrac{30\,000\,\text{traits}}{25{,}4\,\mathrm{mm}}$, soit $n = 1\,200\,\text{traits/mm}$.

.....

**13.10** En observant l'ordre $p = 1$ sous émergence normale, on a $\theta = 0$.
On en déduit $\sin(\theta_0) = -1\times\dfrac{600\,\text{traits}}{1\,\mathrm{mm}}\times546{,}1\,\mathrm{nm} = -\dfrac{600\,\text{traits}}{1\times10^{-3}\,\mathrm{m}}\times546{,}1\times10^{-9}\,\mathrm{m}$ d'où $\theta_0 = -19{,}1°$.

.....

**13.11** a) Le spectre de la source diffracté dans l'ordre 1 s'étale entre les angles : $\theta_1^{\min}$ tel que

$$\sin(\theta_1^{\min}) = 1\times\frac{600\,\text{traits}}{1\times10^{-3}\,\mathrm{m}}\times404{,}7\times10^{-9}\,\mathrm{m}\ \text{donc}\ \theta_1^{\min} = 14{,}1°$$

et $\theta_1^{\max}$ tel que

$$\sin(\theta_1^{\max}) = 1\times\frac{600\,\text{traits}}{1\times10^{-3}\,\mathrm{m}}\times690{,}7\times10^{-9}\,\mathrm{m}\ \text{donc}\ \theta_1^{\max} = 24{,}5°.$$

.....

**13.11** b) Le spectre de la source diffracté dans l'ordre 2 s'étale entre les angles $\theta_2^{\min}$ tel que

$$\sin(\theta_2^{\min}) = 2\times\frac{600\,\text{traits}}{1\times10^{-3}\,\mathrm{m}}\times404{,}7\times10^{-9}\,\mathrm{m}\ \text{donc}\ \theta_2^{\min} = 29{,}1°$$

et $\theta_2^{\max}$ tel que

$$\sin(\theta_2^{\max}) = 2\times\frac{600\,\text{traits}}{1\times10^{-3}\,\mathrm{m}}\times690{,}7\times10^{-9}\,\mathrm{m}\ \text{donc}\ \theta_2^{\max} = 56{,}0°.$$

.....

**13.11** c) Le spectre de la source diffracté dans l'ordre 3 s'étale entre les angles :
$\theta_3^{\min}$ tel que

$$\sin(\theta_3^{\min}) = 3\times\frac{600\,\text{traits}}{1\times10^{-3}\,\mathrm{m}}\times404{,}7\times10^{-9}\,\mathrm{m}\ \text{donc}\ \theta_3^{\min} = 46{,}8°$$

et $\theta_3^{\max}$ tel que

$$\sin(\theta_3^{\max}) = 3\times\frac{600\,\text{traits}}{1\times10^{-3}\,\mathrm{m}}\times546{,}1\times10^{-9}\,\mathrm{m}\ \text{donc}\ \theta_3^{\max} = 79{,}4°.$$

Pour les longueurs d'onde supérieures à $546{,}1\times10^{-9}\,\mathrm{m}$, l'angle de diffraction n'est pas défini. Les raies correspondantes ne sont donc pas observables.

.....

**13.11** d) Compte tenu des angles limites des spectres précédents, on constate un premier chevauchement des ordres dès l'ordre 2, pour les longueurs d'onde $\lambda$ telles que : $3 \times n \times \lambda \leqslant 2 \times n \times 690{,}7 \times 10^{-9}$, soit pour $\lambda \leqslant 460{,}5\,\text{nm}$. Ainsi, les trois premières raies du mercure diffractées dans l'ordre 3 se mélangent avec le spectre d'ordre 2. La bonne réponse est la réponse (c).

.....

**13.12** a) Comme $N = 2$, on a $\sin^2\left(N\dfrac{\varphi}{2}\right) = \sin^2(\varphi) = 1 - \cos^2(\varphi)$.

.....

**13.12** b) Comme $\cos(\varphi) = \cos^2\left(\dfrac{\varphi}{2}\right) - \sin^2\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)$, on a $\sin^2\left(\dfrac{\varphi}{2}\right) = \dfrac{1}{2}(1 - \cos(\varphi))$.

.....

**13.12** c) On a

$$I = 2I_0\frac{1-\cos^2(\varphi)}{1-\cos(\varphi)} = 2I_0\frac{(1-\cos(\varphi))(1+\cos(\varphi))}{(1-\cos(\varphi))} = 2I_0(1+\cos(\varphi)).$$

Nous retrouvons la formule de Fresnel donnant l'expression de l'intensité pour un interféromètre à deux ondes.

.....

**13.13** a)

La différence de marche se réduit dans ce cas précis, à : $\delta_A = \left[T_2H'\right] - [HT_1]$.
Notons par ailleurs que $\theta$ et $\theta'$ sont deux angles positifs au vue de la convention adoptée.
Nous retrouvons l'angle $\theta$ au sommet $T_2$ du triangle rectangle $T_1HT_2$.
Ainsi, $[HT_1] = a\sin(\theta)$ car l'indice optique est pris égal à 1.
De la même façon, nous trouvons : $\left[T_2H'\right] = a\sin\left(\theta'\right)$
Conclusion : $\delta_A = a\left(\sin\left(\theta'\right) - \sin(\theta)\right)$.

.....

**13.13** b)

La différence de marche se réduit dans ce cas précis, à :

$$\delta_B = -[HT_1] - \left[T_1H'\right].$$

Notons par ailleurs que $\theta$ est un angle positif alors que $\theta'$ est négatif au vue de la convention adoptée.
Nous retrouvons l'angle $\theta$ au sommet $T_2$ du triangle rectangle $T_1HT_2$.
Ainsi, $[HT_1] = a\sin(\theta)$ car l'indice optique est pris égal à 1.
De la même façon, nous trouvons : $\left[T_1H'\right] = a\sin\left(|\theta'|\right) = -a\sin\left(\theta'\right)$
Conclusion : $\delta_B = a\left(\sin\left(\theta'\right) - \sin(\theta)\right)$.

.....

**13.13** c)

La différence de marche se réduit dans ce cas précis, à : $\delta_C = \left[T_2H'\right] - [HT_1]$.
Notons par ailleurs que $\theta$ et $\theta'$ sont négatifs au vue de la convention adoptée.
Nous retrouvons l'angle $|\theta|$ au sommet $T_2$ du triangle rectangle $T_1HT_2$.
Ainsi, $[HT_1] = a\sin(|\theta|) = -a\sin(\theta)$ car l'indice optique est pris égal à 1.
De la même façon, nous trouvons : $\left[T_2H'\right] = a\sin\left(|\theta'|\right) = -a\sin\left(\theta'\right)$
Conclusion : $\delta_C = a\left(\sin(\theta) - \sin\left(\theta'\right)\right)$.

.....

**13.13** d)

La différence de marche se réduit dans ce cas précis, à :

$$\delta_D = -[HT_1] - \left[T_1H'\right].$$

Notons par ailleurs que $\theta$ est un angle négatif alors que $\theta'$ est positif au vue de la convention adoptée.
Nous retrouvons l'angle $|\theta|$ au sommet $T_2$ du triangle rectangle $T_1HT_2$.
Ainsi, $[HT_1] = a\sin(|\theta|) = -a\sin(\theta)$ car l'indice optique est pris égal à 1.
De la même façon, nous trouvons : $\left[T_1H'\right] = a\sin\left(\theta'\right)$.
Conclusion : $\delta_D = a\left(\sin(\theta) - \sin\left(\theta'\right)\right)$.

.....

**13.14**

Notons $H_2$ le projeté orthogonal de $O_1$ sur le rayon incident 2 et $K_2$ le projeté orthogonal de $O_1$ sur le rayon émergent 2.

En application du théorème de Malus - Dupin, les chemins optiques de moins l'infini jusqu'à $O_1$ sur le rayon 1 et de moins l'infini jusqu'à $H_2$ sur le rayon 2 sont identiques.

Il en est de même pour les chemins optiques de $O_1$ jusqu'à l'infini sur le rayon émergent 1 avec celui de $K_2$ jusqu'à l'infini sur le rayon émergent 2.

La différence de marche du rayon 2 par rapport au rayon 1 vaut donc : $\delta_{2/1} = n_{\text{air}}[H_2O_2 + K_2O_2]$.

Compte tenu des angles sur la figure, on a : $H_2O_2 = a\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) = \sin(\theta_0)$ et $K_2O_2 = a\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta)$.

On en déduit $\delta_{2/1} = a(\sin(\theta_0) + \sin(\theta))$, soit la réponse (c).

.....

**13.15** a) La fonction $\sin(x)$ est $2\pi$-périodique en $x$ mais $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$, d'où $\sin^2(x+\pi) = \sin^2(x)$, montrant que la fonction $\sin^2(x)$ est $\pi$-périodique en $x$.

.....

**13.15** b) Posons $x = \frac{\phi}{2}$. La fonction $\sin^2(x)$ est $\pi$-périodique en $x$, donc $2\pi$-périodique en variable $\phi$.

.....

**13.15** c) Posons $x = \frac{N\phi}{2}$. La fonction $\sin^2(x)$ est $\pi$-périodique en $x$, donc $\frac{2\pi}{N}$ périodique en variable $\phi$.

.....

**13.15** d) La période de la fonction réseau est le p.p.c.m. des périodes des fonctions $\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)$ et $\sin^2\left(\frac{N\phi}{2}\right)$, soit le p.p.c.m. de $2\pi$ et de $\frac{2\pi}{N}$. La fonction réseau est donc $2\pi$-périodique en variable $\phi$.

.....

**13.16** a) Quand $\phi \to 0$, la fonction réseau présente une forme indéterminée de type $\frac{0}{0}$. On lève cette indétermination en formant un développement limité du numérateur et du dénominateur à l'ordre 1.

D'où $\mathcal{R}_N(\phi) \sim \left(\frac{\frac{N\phi}{2}}{N\frac{\phi}{2}}\right)^2 = 1$. La fonction réseau admet une limite finie en 0. On la prolonge par continuité en posant $\mathcal{R}_N(0) = 1$. La fonction réseau est alors continue et dérivable sur tout $\mathbb{R}$.

.....

**13.16** b) La fonction réseau s'annule pour $\sin\left(\frac{N\phi}{2}\right) = 0$ avec $\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \neq 0$, soit pour $\frac{N\phi}{2} = q\pi$ avec $\phi \neq 0$ et $\phi \neq 2\pi$. Sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ les zéros de la fonction réseau correspondent aux valeurs $\phi = q\frac{2\pi}{N}$, avec $q$ entier compris entre 1 et $(N-1)$, soit $N-1$ valeurs par période.

.....

**13.16** c) On sait qu'on a $(N-1)$ zéros de la fonction réseau sur une période, soit ici 9 valeurs. On a donc $N = 10$.

.....

**13.17** a) Le terme $\sin\left(\frac{N\phi}{2}\right)$ s'annule la première fois après $\phi = 0$ pour $\frac{N\phi}{2} = \pi$, soit pour $\phi = \frac{2\pi}{N}$, d'où la réponse (c).

.....

**13.17** b) Plaçons-nous autour du pic principal en $\phi = 0$. Les premiers zéros autour de $\phi = 0$ sont obtenus pour $\phi = \pm\frac{2\pi}{N}$ d'où $\delta\phi = \frac{4\pi}{N}$.

.....

**13.18** a) L'équation $y = ax + b$ est une modélisation de la relation $a_0 \sin\theta' = p\lambda$.

Par identification, on trouve $x = p$ et $y = a_0 \sin(\theta')$.

.....

**13.18** b) Afin de réaliser la régression linéaire, il est nécessaire d'établir le tableau suivant :

| $p$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_0 \sin(\theta')$ (en µm) | $-1{,}61$ | $-1{,}07$ | $-0{,}54$ | 0 | 0,52 | 1,07 | 1,59 |

Il ne reste qu'à faire la régression linéaire à la calculatrice.

La quantité $a_0 \sin(\theta)$ est homogène à une longueur alors que $p$ est sans dimension. Ainsi, $a$ est homogène à une longueur.
On a $a = 0{,}534\,\mu\text{m}$.

.....

**13.18** c) Par identification $\lambda = a = 0{,}534\,\mu\text{m} = 534\,\text{nm}$.

.....

**13.19** a)

Les angles $D$, $\theta$ et $\theta'$ sont positifs au vue de la convention adoptée.
À l'aide du schéma, nous comprenons que $|D_\text{A}| = |\theta'| - |\theta|$.
Ainsi, $D_\text{A} = \theta' - \theta$.

.....

**13.19** b)

L'angle $\theta$ est positif alors que $\theta'$ et $D$ sont négatifs au vue de la convention adoptée.
À l'aide du schéma, nous comprenons que $|D_\text{B}| = |\theta'| + |\theta|$.
Ainsi, $D_\text{B} = \theta' - \theta$.

.....

**13.19** c)

L'angle $\theta$ est positif alors que $\theta'$ et $D$ sont négatifs au vue de la convention adoptée.
À l'aide du schéma, nous comprenons que $|D_\mathrm{C}| = |\theta'| - |\theta|$.
Ainsi, $D_\mathrm{C} = \theta' - \theta$.

**13.19** d)

L'angle $\theta$ est négatif alors que $\theta'$ et $D$ sont positifs au vue de la convention adoptée.
À l'aide du schéma, nous comprenons que $|D_\mathrm{D}| = |\theta'| + |\theta|$.
Ainsi, $D_\mathrm{D} = \theta' - \theta$.

**13.20** a) On a $\underline{s}(\theta) = \displaystyle\sum_{k=0}^{5} \mathrm{e}^{k\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda}a\sin(\theta)} = \frac{1-\mathrm{e}^{6\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda}a\sin(\theta)}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda}a\sin(\theta)}} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{5\pi}{\lambda}a\sin(\theta)}\left(\frac{\sin\left(\frac{6\pi}{\lambda}a\sin(\theta)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda}a\sin(\theta)\right)}\right)$. Ainsi, $\alpha = \dfrac{6\pi}{\lambda}a$.

**13.20** b) Par identification $\beta = \dfrac{\pi}{\lambda}a$.

**13.20** c) Par identification $\underline{g}(\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{5\pi}{\lambda}a\sin(\theta)}$.

**13.21** Plaçons nous autour du pic principal en $\phi = 0$. On cherche $\phi$ tel que $\mathcal{R}_N(\phi) = \dfrac{1}{2}$. Soit encore en considérant que $\phi \ll 1$, $\left(\dfrac{\dfrac{N\phi}{2} - \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{N\phi}{2}\right)^3}{\dfrac{N\phi}{2}}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$, qui donne $1 - \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{N\phi}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. On en tire $\phi = \pm\dfrac{2}{N}\sqrt{6\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}$, qui donne : $\Delta\phi_{1/2} = \dfrac{4}{N}\sqrt{6\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}$ On en déduit la valeur de $\alpha$ cherchée : $\alpha = \dfrac{4}{\pi}\sqrt{6\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}$ soit $\alpha \approx 1{,}69$.

**13.22** a) On observe que le premier maximum secondaire est à peu près à mi distance entre les deux premiers zéros de la fonction réseau après un pic principal, soit entre $\dfrac{2\pi}{N}$ et $\dfrac{4\pi}{N}$. On peut donc évaluer la position du premier maximum secondaire pour $\dfrac{3\pi}{N}$.

**13.22** b) On calcule pour $\phi = \dfrac{3\pi}{N}$, $\mathcal{R}_N(\phi) = \left(\dfrac{\sin\left(\dfrac{3\pi N}{2N}\right)}{N\sin\left(\dfrac{3\pi}{2N}\right)}\right)^2 = \left(\dfrac{-1}{\dfrac{3\pi}{2}}\right)^2$ en tenant compte du fait que $N \gg 1$ (qui donne $\sin(x) \sim x$) et avec $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = -1$. Il reste $\mathcal{R}_N(\phi) = \left(\dfrac{2}{3\pi}\right)^2$, soit $\mathcal{R}_N(\phi) \approx 0{,}05$. Notons que la valeur du premier maximum secondaire est indépendante de celle de $N$ et représente moins de 5% de la valeur d'un pic principal. Seuls les pics principaux sont visibles.

# Fiche n° 14. Outils mathématiques pour la diffusion

## Réponses

**14.1** a) ..... $\boxed{abc}$

**14.1** b) ..... $\boxed{abc\sin(\alpha)}$

**14.1** c) ..... $\boxed{\pi r^2 h}$

**14.1** d) ..... $\boxed{\pi r^2 h\cos(\alpha)}$

**14.2** a) ..... $\boxed{\text{negatif}}$

**14.2** b) ..... $\boxed{\text{positif}}$

**14.2** c) ..... $\boxed{\text{b}}$

**14.2** d) ..... $\boxed{\text{b}}$

**14.2** e) ..... $\boxed{\text{a}}$

**14.2** f) ..... $\boxed{\text{c}}$

**14.3** a) ..... $\boxed{\dfrac{2\pi rh}{3}}$

**14.3** b) ..... $\boxed{\dfrac{\pi r^2}{3}}$

**14.3** c) ..... $\boxed{\text{c}}$

**14.4** a) ..... $\boxed{\text{c}}$

**14.4** b) ..... $\boxed{\text{b}}$

**14.4** c) ..... $\boxed{\pi R^2 + 2\dfrac{V}{R}}$

**14.4** d) ..... $\boxed{\text{b}}$

**14.4** e) ..... $\boxed{\text{a et c}}$

**14.5** a) ..... $\boxed{n(x,t) = j_0 x + n_0}$

**14.5** b) ..... $\boxed{n(x,t) = \dfrac{n_1 - n_0}{L}x + n_0}$

**14.5** c) ..... $\boxed{\dfrac{p}{2}x(x-L) + n_0}$

**14.6** a) ..... $\boxed{n(x,t) = n_0 \exp\left(\dfrac{t}{\tau}\right)}$

**14.6** b) ..... $\boxed{n(t) = \dfrac{n_0}{1 + \dfrac{n_0 t}{n_c \tau}}}$

**14.6** c) ..... $\boxed{n_0\left(1 - \dfrac{x}{L}\right)\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) + p\tau\left(1 - \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right)}$

## Corrigés

**14.2** ) Le point B est au niveau d'un col de la fonction $f(x,y)$. À partir du point B, en se déplaçant dans la direction $y$ croissant en gardant $x$ fixe à $x = x_\mathrm{B}$, la quantité $f(x_\mathrm{B}, y)$ décroît de plus en plus. La dérivée seconde par rapport à $y$ est donc négative. De même, en se déplaçant dans la direction $x$ croissant à $y$ fixe à $y = y_\mathrm{B}$, la quantité $f(x, y_\mathrm{B})$ croît de plus en plus. La dérivée seconde par rapport à $x$ est donc positive.

.....

**14.3** c) On a les équivalences suivantes :

$$\frac{\partial V}{\partial h} > \frac{\partial V}{\partial r} \iff \frac{\pi r^2}{3} > \frac{2\pi rh}{3} \iff r > 2h.$$

.....

**14.4** a) Il faut sommer la surface du fond de la casserole et la surface latérale.

.....

**14.4** b) C'est le volume d'un cylindre de rayon $R$ et de hauteur $H$.

**14.4** c) Il faut utiliser les deux résultats précédents.

**14.4** d) On fait varier le rayon $R$ pour une valeur de $V$ fixée à $V_0$. La notation $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}R}(R, V_0)$ n'est pas adéquate, la notation « d » étant réservée aux fonctions d'une seule variable.

**14.4** e) Pour minimiser la surface on cherche : $\left(\frac{\partial S}{\partial R}\right)_{V_0} = 2\pi R + 2V(-\frac{1}{R^2}) = 0$, soit $V = \pi R^3$. Or $V = \pi R^2 H$, on en déduit donc $R = H$ par identification. On peut vérifier dans sa cuisine que cela correspond bien au choix « standard » des industriels.

**14.5** c) Par intégration successives on obtient :

$$\frac{\partial n}{\partial x}(x,t) = px + A \quad \text{donc} \quad n(x,t) = \frac{px^2}{2} + Ax + B.$$

Les conditions aux limites imposent :

$$\begin{cases} n(0,t) = B & = n_0 \\ n(L,t) = \dfrac{pL^2}{2} + AL + B & = n_0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} B & = n_0 \\ A & = -\dfrac{pL}{2}. \end{cases}$$

La fonction $n$ s'écrit alors :

$$n(x,t) = \frac{px^2}{2} - \frac{pL}{2}x + n_0 = \frac{p}{2}x(x-L) + n_0.$$

**14.6** b) On a une fonction qui dépend que de $t$. On sépare les variables, en écrivant

$$-\frac{\mathrm{d}n}{n^2} = \frac{\mathrm{d}t}{n_c\tau} \quad \text{donc} \quad \mathrm{d}\left(\frac{1}{n}\right) = \mathrm{d}\left(\frac{t}{n_c T}\right).$$

On intègre :

$$\frac{1}{n(t)} - \frac{1}{n_0} = \frac{t}{n_c\tau} \quad \text{donc} \quad n(t) = \frac{n_0}{1 + \dfrac{n_0 t}{n_c\tau}}.$$

**14.6** c) On a une équation différentielle sur $t$ : $\frac{\partial n}{\partial t}(x,t) + \frac{n(x,t)}{\tau} = p$. C'est une équation linéaire dont la solution est de la forme $n(x,t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + p\tau$. La condition initiale impose $n(x,0) = n_0\left(1 - \frac{x}{L}\right)$. On a donc

$$A = n_0\left(1 - \frac{x}{L}\right) - p\tau = A(x).$$

La solution est donc de la forme :

$$n(x,t) = n_0\left(1 - \frac{x}{L}\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + p\tau\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right).$$

# Fiche n° 15. Diffusion particulaire

## Réponses

**15.1** a) ..... $\boxed{\mathrm{d}\tau = \vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{d}S}\,\mathrm{d}t}$

**15.1** b) ..... $\boxed{\mathrm{d}^2N = \left(n\vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{d}S}\right)\mathrm{d}t}$

**15.1** c) ..... $\boxed{\mathrm{d}\Phi = n\vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{d}S}}$

**15.1** d) ..... $\boxed{\vec{j}(M,t) = n(M,t)\vec{v}(M,t)}$

**15.1** e) ..... $\boxed{\mathrm{m}^{-2}\cdot\mathrm{s}^{-1}}$

**15.2** a) ..... ⓐ

**15.2** b) ..... ⓑ

**15.2** c) ..... ⓒ

**15.2** d) ..... $\boxed{\delta N = -\dfrac{\partial j}{\partial x}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t}$

**15.3** a) ..... ⓒ

**15.3** b) ..... $\boxed{-\oiint_S \vec{j}(P,t)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}\times\mathrm{d}t}$

**15.4** a) ..... $\boxed{\mathrm{d}x = \mathrm{d}u\sqrt{\dfrac{t}{a}}}$

**15.4** b) ..... $\boxed{N = \dfrac{K}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\mathrm{erf}(+\infty)}$

**15.4** c) ..... $\boxed{\alpha = \dfrac{K}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}}$

**15.5** a) ..... $\boxed{(A,B) = (1,1)}$

**15.5** b) ..... $\boxed{n = \dfrac{n_c}{1+\left(\dfrac{n_c}{n_0}-1\right)\exp\left(-\dfrac{t}{T}\right)}}$

**15.6** a) ..... $\boxed{\alpha^2 D - \beta = 0}$

**15.6** b) ..... $\boxed{-\dfrac{2D}{\delta^2} + \omega = 0}$

**15.6** c) ..... $\boxed{D = \dfrac{1}{4a}}$

**15.7** a) ..... ⓓ

**15.7** b) ..... ⓐ

**15.8** a) ..... $\boxed{46\,\text{jours}}$

**15.8** b) ..... $\boxed{\dfrac{\tau_{\text{sel}}}{\tau} \approx 5}$

**15.9** a) ..... Vanilline

**15.9** b) ..... Géraniol

**15.9** c) ..... Limonène

**15.10** b) ..... ⓑ

**15.10** c) ..... $\boxed{B \approx 1\times10^4}$

**15.10** d) ..... $\boxed{L \approx 4\times10^{-9}\,\mathrm{m}}$

**15.10** e) ..... $\boxed{L \approx 1\times10^{-4}\,\mathrm{m}}$

**15.10** f) ..... $\boxed{L \approx 8\times10^{-4}\,\mathrm{m}}$

**15.11** ..... $\boxed{n_c\dfrac{T_2}{T_1}}$

**15.12** a) ..... ⓐ

**15.12** b) ..... ⓑ

**15.12** c) ..... ⓓ

**15.13** a) ..... $\boxed{N(t) = n(x,t)S\,\mathrm{d}x}$

**15.13** b) ..... $\boxed{\mathrm{d}N = \dfrac{\partial n}{\partial t}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t}$

**15.13** c) ..... ⓐ

**15.13** d) ..... ⓑ

**15.13** e) ..... ⓒ

**15.13** f) ..... $\boxed{\mathrm{d}N = -\dfrac{\partial j}{\partial x}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t}$

**15.13** g) ..... $\boxed{\dfrac{\partial n}{\partial t} = -\dfrac{\partial j}{\partial x}}$

**15.13** h) ..... $\boxed{\dfrac{\partial n}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 n}{\partial x^2}}$

**15.14** a) ..... $\boxed{\mathrm{d}N = \dfrac{\partial n}{\partial t} S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t}$

**15.14** b) ..... (a)

**15.14** c) ..... (b)

**15.14** d) ..... (c)

**15.14** e) ..... $\boxed{\delta N = -\dfrac{\partial j}{\partial x} S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \sigma(x,t) S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t}$

**15.14** f) ..... $\boxed{\dfrac{\partial n}{\partial t} = -\dfrac{\partial j}{\partial x} + \sigma}$

**15.14** g) ..... $\boxed{\dfrac{\partial n}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \sigma}$

**15.15** a) ..... $\boxed{N(t) = \iiint_V n(\mathrm{M},t)\,\mathrm{d}\tau}$

**15.15** b) ..... $\boxed{\mathrm{d}N = \left(\iiint_V \dfrac{\partial n}{\partial t}\,\mathrm{d}\tau\right) \times \mathrm{d}t}$

**15.15** c) ..... (c)

**15.15** d) ..... (d)

**15.15** e) ..... (a)

**15.15** f) ..... (b)

## Corrigés

**15.1** a) On a $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}S_M \times v\,\mathrm{d}t \times \cos\theta = \vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} \times \mathrm{d}t = \vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} \times \mathrm{d}t$.

.....

**15.1** b) On a $\mathrm{d}^2N = n\,\mathrm{d}\tau = n \times \mathrm{d}S_M \times v\,\mathrm{d}t \times \cos\theta = \vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} \times \mathrm{d}t = \left(n\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}\right) \times \mathrm{d}t$.

.....

**15.1** c) On a $\mathrm{d}^2N = \mathrm{d}\Phi \times \mathrm{d}t$.

.....

**15.1** d) Par identification de $\vec{j}$ dans la relation rappelée dans l'énoncé.

.....

**15.1** e) La grandeur $n$ est un nombre de particules par mètre cube.

.....

**15.2** a) On suppose $\mathrm{d}t$ suffisamment court pour considérer $\vec{j}$ constant entre $t$ et $t + \mathrm{d}t$.

.....

**15.2** b) On compte positivement les particules entrant dans le système et négativement celles qui en sortent.

.....

**15.2** c) La diffusion a lieu ici suivant l'axe $(\mathrm{O}x)$, il n'y a donc pas de transfert de particules au niveau de la surface latérale (ce qui se traduit par le fait que localement $\vec{j}$ et la surface considérée soient orthogonaux).

.....

**15.2** d) Les transferts de particules se font au niveau des sections situées en $x$ et $x + \mathrm{d}x$ : on a

$$\delta N = (j(x) - j(x + \mathrm{d}x)) \cdot S\,\mathrm{d}t = -\frac{\partial j}{\partial x} S\,\mathrm{d}x \times \mathrm{d}t.$$

.....

**15.3** a) Il faut intégrer le flux élémentaire sur toute la surface fermée en prenant en compte le fait que $\vec{j}$ n'est *a priori* pas uniforme sur la surface. On multiplie ensuite ce flux (supposé constant sur un temps court) par la durée $\mathrm{d}t$ considérée.

.....

**15.3** b) Les particules quittant le volume constituent une perte.

.....

**15.4** b) Le changement de variable $u = x\sqrt{\dfrac{a}{t}}$ donne $u^2 = \dfrac{ax^2}{t}$. Le nombre total de particules dopantes s'écrit donc à chaque instant :

$$N = \int_0^{+\infty} \frac{K}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{ax^2}{t}\right) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{K}{\sqrt{t}} \exp\left(-u^2\right) \mathrm{d}u \sqrt{\frac{t}{a}} = \int_0^{+\infty} \frac{K}{\sqrt{a}} \exp\left(-u^2\right) \mathrm{d}u = \frac{K}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\mathrm{erf}(+\infty).$$

.....

**15.5** a) On met les deux termes au même dénominateur :

$$\frac{A(n_c - n) + Bn}{n(n_c - n)} = \frac{An_c + (B - A)n}{n(n_c - n)}.$$

Pour qu'il y ait égalité, il faut donc vérifier le système : $\begin{cases} A & = 1 \\ B - A & = 0. \end{cases}$ On trouve $A = B = 1$.

.....

**15.5** b) On a

$$\int_{n_0}^{n(t)} \frac{n_c\,\mathrm{d}n}{n(n_c - n)} = \int_{n_0}^{n(t)} \frac{\mathrm{d}n}{n} + \int_{n_0}^{n(t)} \frac{\mathrm{d}n}{(n_c - n)} = \int_{n_0}^{n(t)} \frac{\mathrm{d}n}{n} - \int_{n_0}^{n(t)} \frac{-\,\mathrm{d}n}{(n_c - n)}$$

$$= \ln\left(\frac{n(t)}{n_0}\right) - \ln\left(\frac{n_c - n(t)}{n_c - n_0}\right) = \ln\left(\frac{(n_c - n_0)n(t)}{n_0(n_c - n(t))}\right) = \ln\left(\frac{(n_c - n_0)}{n_0\left(\dfrac{n_c}{n(t)} - 1\right)}\right)$$

On peut alors isoler $n(t)$ : on a $n(t) = \dfrac{n_c}{1 + \left(\dfrac{n_c}{n_0} - 1\right)\exp\left(-\dfrac{t}{T}\right)}$.

.....

**15.6** a) On calcule les dérivées :

$$\frac{\partial n}{\partial t}(x,t) = \beta n(x,t) \qquad \frac{\partial n}{\partial x}(x,t) = \alpha n(x,t) \qquad \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}(x,t) = \alpha^2 n(x,t).$$

En injectant dans l'équation de diffusion, on trouve $\alpha^2 D - \beta = 0$.

.....

**15.6** b) On calcule les dérivées :

$$\frac{\partial n}{\partial t}(x,t) = -\omega n_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right), \qquad \frac{\partial n}{\partial x}(x,t) = -\frac{1}{\delta}n(x,t) + \frac{n_0}{\delta}\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$$

$$\text{et} \quad \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}(x,t) = -\frac{1}{\delta}\left(-\frac{1}{\delta}n(x,t) + \frac{n_0}{\delta}\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right)$$
$$- \frac{n_0}{\delta^2}\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) - \frac{n_0}{\delta^2}\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$$
$$= -\frac{2n_0}{\delta^2}\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right).$$

En injectant dans l'équation de diffusion, on trouve $-\dfrac{2D}{\delta^2} + \omega = 0$ soit $\delta = \pm\sqrt{\dfrac{2D}{\omega}}$.

.....

**15.6** c) On calcule les dérivées :

$$\frac{\partial n}{\partial x}(x,t) = -\frac{K}{t^{3/2}} 2ax \exp\left(-\frac{ax^2}{t}\right)$$
$$\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}(x,t) = -\frac{K}{t^{3/2}} 2a \exp\left(-\frac{ax^2}{t}\right) + \frac{K}{t^{5/2}} 4a^2x^2 \exp\left(-\frac{ax^2}{t}\right)$$
$$\frac{\partial n}{\partial t}(x,t) = -\frac{K}{2t^{3/2}} \exp\left(-\frac{ax^2}{t}\right) + \frac{K}{t^{5/2}} ax^2 \exp\left(-\frac{ax^2}{t}\right).$$

En injectant dans l'équation de diffusion, on trouve $D = \frac{1}{4a}$.

.....

**15.7** a) En notant $n^\star$ l'ordre de grandeur de $n$, l'équation de la diffusion donne : $\frac{n^\star}{\tau} = D\frac{n^\star}{L^2}$.

.....

**15.7** b) En notant $n^\star$ l'ordre de grandeur de $n$, l'équation de la diffusion donne : $\frac{n^\star}{\tau} = D\frac{n^\star}{L^2}$.

.....

**15.8** a) On trouve un temps caractéristique de diffusion de l'ordre de $\tau = 4 \times 10^6\,\mathrm{s} \approx 46\,\text{jours}$! Mieux vaut « mélanger » son café c'est-à-dire créer un transport par convection!

.....

**15.8** b) On a $D_{\text{sel}} \approx 5 \times D$, l'ordre de grandeur reste sensiblement le même car le milieu support est le même, mais le phénomène est plus rapide car l'entité chimique est plus petite donc plus mobile.

.....

**15.10** b)

Attention à l'orientation de l'axe des abscisses : $\frac{1000}{T}$ est décroissant donc l'axe est bien gradué à $T$ croissant.

L'échelle verticale est logarithmique et l'axe horizontal gradué dans le sens des $\frac{1000}{T}$ décroissants.

On a $y = \log(D) = \frac{\ln(D)}{\ln(10)}$ et $x = -\frac{1000}{T}$, vérifient donc une loi affine du type $y = A + B'x$, soit $\ln(D) = A - \frac{B}{T}$.

.....

**15.10** c) On complète le tableau :

| $\Theta$ (°C) | 25 | 500 | 800 |
|---|---|---|---|
| $T$ (K) | 298 | 773 | 1073 |
| $\frac{1}{T}$ ($\mathrm{K}^{-1}$) | $3{,}4 \times 10^{-3}$ | $1{,}3 \times 10^{-3}$ | $9{,}3 \times 10^{-4}$ |
| $D$ ($\mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$) | $4 \times 10^{-17}$ | $3 \times 10^{-8}$ | $1{,}6 \times 10^{-6}$ |
| $\ln D$ (où $D$ en $\mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$) | $-37{,}7$ | $-17{,}3$ | $-13{,}3$ |

On en déduit $B = -\dfrac{(-13,3) - (-37,7)}{9{,}3 \times 10^{-4} - 3{,}4 \times 10^{-3}} = 9{,}8 \times 10^3$. On aurait aussi pu faire une régression linéaire.

.....

**15.10** d) En utilisant l'ordre de grandeur de la longueur caractéristique, et en convertissant en MKS, on a

$$\begin{aligned} L &\approx \sqrt{4 \times 10^{-17}\,\mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1} \times (1 \times 10^{-2}\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{cm}^{-1})^2 \times 3\,600\,\mathrm{s/h}} \\ &= 2 \times \sqrt{10^{-22} \times 10} \times 60\,\mathrm{m} \approx 120 \times 3 \times 10^{-11}\mathrm{m} \approx 3{,}6 \times 10^{-10}\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$

Soit, en gardant un chiffre significatif : $L \approx 4 \times 10^{-9}$ m. La migration des atomes de carbone se fait donc à l'échelle d'une maille ($\approx 1 \times 10^{-10}$ m).

.....

**15.10** e) En utilisant l'ordre de grandeur de la longueur caractéristique, et en convertissant en MKS :

$$\begin{aligned} L &\approx \sqrt{3 \times 10^{-8}\,\mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1} \times (1 \times 10^{-2}\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{cm}^{-1})^2 \times 3\,600\,\mathrm{s/h}} \\ &\approx 1,7 \times \sqrt{10^{-12}} \times 60\,\mathrm{m} \approx 102 \times 10^{-6}\mathrm{m} \approx 1 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$

La migration des atomes de carbone se fait donc à l'échelle d'une maille.

.....

**15.10** f) En utilisant l'ordre de grandeur de la longueur caractéristique, et en convertissant en MKS :

$$\begin{aligned} L &\approx \sqrt{1{,}6 \times 10^{-6}\,\mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1} \times (1 \times 10^{-2}\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{cm}^{-1})^2 \times 3\,600\,\mathrm{s/h}} \\ &\approx 1,3 \times \sqrt{10^{-10}} \times 60\,\mathrm{m} \approx 78 \times 10^{-5}\mathrm{m} \approx 7{,}8 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$

Soit, en gardant un chiffre significatif : $L \approx 8 \times 10^{-4}$ m. La migration des atomes de carbone se fait donc sur un grand nombre de mailles ce qui permet d'expliquer la formation des grains.

.....

**15.12** a) On utilise la loi des gaz parfaits.

.....

**15.12** b) En régime permanent, on a $\dfrac{\mathrm{d}^2 n}{\mathrm{d}z^2} = 0$.

.....

**15.12** c) On a $\Phi = jS = -D\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z}S = DS\dfrac{n_0}{L}$. On remarque que $\Phi$ est indépendant de $z$ puisque l'on est en régime permanent.

.....

**15.13** a) On suppose la tranche suffisamment fine pour considérer la densité particulaire uniforme.

.....

**15.13** b) De même, on a $N(t + \mathrm{d}t) = S\,\mathrm{d}x n(x, t + \mathrm{d}t)$.

.....

**15.13** c) On suppose $\mathrm{d}t$ suffisamment court pour considérer $\vec{j}$ constant entre $t$ et $t+\mathrm{d}t$.

.....

**15.13** d) On compte positivement les particules entrant dans le système et négativement celles qui en sortent.

.....

**15.13** e) Il n'y a pas de transfert de particules au niveau de la surface latérale du fait des orientations réciproques de $\vec{j}$ et de la surface considérée.

.....

**15.13** f) Les transferts de particules se font au niveau des sections situées en $x$ et $x+\mathrm{d}x$.

.....

**15.13** g) On a $\mathrm{d}N = \dfrac{\partial T}{\partial t} S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = -\dfrac{\partial j_Q}{\partial x} S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$.

.....

**15.13** h) On a $j = -D\dfrac{\partial n}{\partial x}$.

.....

**15.14** a) Même raisonnement que précédemment.

.....

**15.14** b) On suppose $\mathrm{d}t$ suffisamment court pour considérer $\vec{j}$ constant entre $t$ et $t+\mathrm{d}t$.

.....

**15.14** c) On compte positivement les particules entrant dans le système et négativement celles qui en sortent.

.....

**15.14** d) Il n'y a pas de transfert de particules au niveau de la surface latérale du fait des orientations réciproques de $\vec{j}$ et de la surface considérée.

.....

**15.14** e) Les transferts de particules se font au niveau des sections situées en $x$ et $x+\mathrm{d}x$.

.....

**15.14** f) On a $\mathrm{d}N = \dfrac{\partial T}{\partial t} S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = -\dfrac{\partial j_Q}{\partial x} S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \sigma(x,t) S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$.

.....

**15.14** g) On a $j = -D\dfrac{\partial n}{\partial x}$.

.....

**15.15** a) Le nombre de particules dans le volume $d\tau$ est $n(\mathrm{M},t)\,\mathrm{d}\tau$.

.....

**15.15** b) On a $\mathrm{d}N = N(t+\mathrm{d}t) - N(t) = \iiint_V n(M,t+\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}\tau - \iiint_V n(\mathrm{M},t)\,\mathrm{d}\tau$.

.....

**15.15** c) Il faut intégrer le flux élémentaire sur toute la surface fermée.

.....

**15.15** d) Attention : $n_{\mathrm{prod}}(\mathrm{M},t)$ n'est pas forcément uniforme.

.....

**15.15** e) Les particules quittant le volume $V$ constituent une perte pour le système.

.....

**15.15** f) Attention aux conventions de signe.

.....

# Fiche n° 16. Diffusion thermique

## Réponses

**16.1** a) ..... d

**16.1** b) ..... b

**16.1** c) ..... c

**16.1** d) ..... $\mathrm{d}U = \mu c \dfrac{\partial T}{\partial t} S \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

**16.1** e) ..... b

**16.1** f) ..... a

**16.1** g) ..... c

**16.1** h) ..... $-\dfrac{\partial j_Q}{\partial x} S \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

**16.2** a) ..... a

**16.2** b) ..... a

**16.2** c) ..... b

**16.3** a) ..... $\sqrt{2}$

**16.3** b) ..... $1/\sqrt{2}$

**16.3** c) ..... 4

**16.3** d) ..... 2

**16.4** a) ..... a

**16.4** b) ..... $2 \times 10^{-3}$

**16.4** c) ..... Oui

**16.5** a) ..... $T(x) = \dfrac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$

**16.5** b) ..... b et c

**16.5** c) ..... a

**16.6** a) ..... b

**16.6** b) ..... c

**16.6** c) ..... d

**16.6** d) ..... a

**16.7** a) ..... a

**16.7** b) ..... c

**16.7** c) ..... c

**16.7** d) ..... en série

**16.7** e) ..... 0,5 kW

**16.8** ..... $\dfrac{T_1 + R_{\mathrm{th}} h_2 S T_2}{1 + R_{\mathrm{th}} h_2 S}$

**16.9** a) ..... $4{,}5 \times 10^{-2}\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}$

**16.9** b) ..... $0{,}53\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}$

**16.9** c) ..... c

**16.9** d) ..... $3{,}2 \times 10^{-1}\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}$

**16.9** e) ..... 47,5 W

**16.10** a) ..... 0,7 m

**16.10** b) ..... 0,8 m

**16.10** c) ..... (cub., c) (cyl., a) (sph., b)

**16.10** d) ..... Sphérique

**16.10** e) ..... 11 °C

**16.11** ..... c

**16.12** a) .. $\dfrac{\mathrm{d}\theta_{\mathrm{i}}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\theta_i}{R_{\mathrm{th}} C_{\mathrm{th}}} = \dfrac{1}{R_{\mathrm{th}} C_{\mathrm{th}}} (R_{\mathrm{th}} \phi_{\mathrm{i}} + \theta_{\mathrm{e}})$

**16.12** b) ..... $\dfrac{1}{R_{\mathrm{th}}} (\theta_{\mathrm{i0}} - \theta_{\mathrm{e0}} - \theta_{\mathrm{e1}} \cos(\omega t))$

**16.13** a) ..... a

**16.13** b) ..... a

**16.14** ..... Les bottes de paille

**16.15** a) ..... $\mathrm{d}U = \mu c \dfrac{\partial T}{\partial t} S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

**16.15** b) ..... $\lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

**16.15** c) ..... $p_{\mathrm{prod}} S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

**16.15** d) ..... $\mu c \dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + p_{\mathrm{prod}}$

**16.16** a) ..... $\mathrm{d}U = \mu c \dfrac{\partial T}{\partial t} S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

**16.16** b) ..... $\lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

**16.16** c) ..... c

**16.16** d) ... $\mu c \dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} - h \dfrac{p}{S}(T(x,t) - T_{\mathrm{ext}})$

**16.17** a) ..... b

**16.17** b) . $\dfrac{R_{\mathrm{th}} h_1 S + \dfrac{h_1}{h_2}}{1 + \dfrac{h_1}{h_2} + R_{\mathrm{th}} h_1 S} T_1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{h_1}{h_2} + R_{\mathrm{th}} h_1 S} T_2$

**16.17** c) .. $\dfrac{1}{1 + \dfrac{h_2}{h_1} + R_{\mathrm{th}} h_2 S} T_1 + \dfrac{\dfrac{h_2}{h_1} + R_{\mathrm{th}} h_2 S}{1 + \dfrac{h_2}{h_1} + R_{\mathrm{th}} h_2 S} T_2$

**16.18** a) ..... $\mathrm{d}U = 0$

**16.18** b) ..... $\delta Q = 0$

**16.18** c) ..... b

**16.18** d) ..... $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\dfrac{\Phi_0}{2\pi\lambda} \dfrac{1}{r}$

**16.19** a) ..... $T(r) = T_1 + \dfrac{\Phi_0}{2\pi\lambda} \ln\left(\dfrac{r_1}{r}\right)$

**16.19** b) ..... $T(r) = T_1 + (T_2 - T_1) \dfrac{\ln\left(\frac{r_1}{r}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}$

**16.20** a) ..... c

**16.20** b) ..... b

**16.20** c) ..... $\dfrac{\lambda\,\mathrm{d}z r\,\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}$

**16.20** d) ..... b

**16.20** e) ..... $\dfrac{2\pi\lambda r\,\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}$

**16.20** f) ..... b

**16.20** g) ..... $\dfrac{2\pi\lambda L r}{\mathrm{d}r}$

**16.20** h) ..... a

**16.20** i) ..... $\dfrac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi\lambda L}$

**16.20** j) ..... $\dfrac{2\pi\lambda L}{\ln(r_2/r_1)}(T_{\mathrm{a}} - T_{\mathrm{e}})$

**16.21** a) ..... 0

**16.21** b) ..... 0

**16.21** c) ..... b

**16.21** d) ..... $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\dfrac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \dfrac{1}{r^2}$

**16.22** a) ..... $T_1 + \dfrac{\Phi_0}{4\pi\lambda}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_1}\right)$

**16.22** b) ..... $T(r) = T_1 + (T_2 - T_1) \dfrac{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}}$

## Corrigés

**16.1** a) On utilise l'analyse dimensionnelle.

.....

**16.1** c) Il faut utiliser la première loi de Joule, en supposant la tranche suffisamment fine pour considérer la température uniforme. À l'instant $t$, l'énergie interne de l'élément de volume de section $S$ et de longueur $\mathrm{d}x$ peut s'écrire : $U(t) = \mu(S\,\mathrm{d}x)cT(x,t)$.

.....

**16.1** d) On exprime l'énergie interne à l'instant $t+\mathrm{d}t$ : $U(t+\mathrm{d}t) = \mu cS\,\mathrm{d}xT(t+\mathrm{d}t)$ puis on calcule la différence $\mathrm{d}U = U(t+\mathrm{d}t) - U(t)$.

.....

**16.1** e) On considère $\mathrm{d}t$ suffisamment court pour considérer $\overrightarrow{j_Q}$ constant entre $t$ et $t+\mathrm{d}t$. Le vecteur $\overrightarrow{S}$ entant est orienté suivant $\overrightarrow{e_x}$.

.....

**16.1** f) Attention aux conventions de signe ! Le vecteur $\overrightarrow{S}$ entrant est orienté dans le sens $-\overrightarrow{e_x}$.

.....

**16.1** g) Il n'y a pas de transfert thermique au niveau de la surface latérale du fait des orientations réciproques de $\overrightarrow{j_Q}$ et de la surface considérée.

.....

**16.1** h) On a $j_Q(x,t)S\,\mathrm{d}t - j_Q(x+\mathrm{d}x,t)S\,\mathrm{d}t = -\dfrac{\partial j_Q}{\partial x}S\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$. On peut vérifier qualitativement le signe pour éviter les étourderies.

.....

**16.2** a) La situation est unidimensionnelle : la température ne dépend spatialement que de $x$.

.....

**16.2** b) Le courant thermique $\overrightarrow{j}_Q = -\lambda\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,T$ est donc dirigé seulement selon $\overrightarrow{e}_x$.

.....

**16.2** c) La variation d'énergie interne pendant $\mathrm{d}t$ est $\mathrm{d}U = \mu(S\,\mathrm{d}x)c\dfrac{\partial T}{\partial t}\,\mathrm{d}t$. Cette variation est due au flux thermique $\Phi\,\mathrm{d}t = j_Q(x,t)S\,\mathrm{d}t - j_Q(x+\mathrm{d}x,t)S\,\mathrm{d}t = -\dfrac{\partial j_Q}{\partial x}S\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$. Comme $j_Q = -\lambda\dfrac{\partial T}{\partial x}$ on a :

$$\mu(S\,\mathrm{d}x)c\frac{\partial T}{\partial t}\,\mathrm{d}t = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}S\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$$

qui se simplifie en $\dfrac{\partial T}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ avec $D = \dfrac{\lambda}{\mu c}$. On vérifie donc l'équation de diffusion libre à une dimension sans source.

.....

**16.4** a) Lorsque $\mathrm{Fo} \ll 1$, il ne s'est pas écoulé suffisamment de temps pour que la diffusion n'ait lieu : le processus peut être considéré comme adiabatique.

Lorsque $\mathrm{Fo} \gg 1$, suffisamment de temps s'est écoulé pour que la diffusion ait eu lieu.

.....

**16.4** c) Le nombre de Fourier vaut :

$$\mathrm{Fo} = \frac{13\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}\times 1{,}5\times 10^{-2}\,\mathrm{s}}{7\,800\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}\times 480\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{kg}^{-1}\times\left(5\times 10^{-3}\,\mathrm{m}\right)^2} = 2\times 10^{-3} \ll 1.$$

L'hypothèse d'une transformation adiabatique est donc valide.

.....

**16.5** a) L'équation de la diffusion devient $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$ soit $T(x) = Ax + B$. On utilise enfin les conditions limites $T(0) = T_1$ et $T(L) = T_2$. Le profil de température est donc linéaire dans la barre en régime permanent.

.....

**16.5** b) L'hypothèse de barre homogène permet d'affirmer que la conductivité est identique dans toute la barre. L'hypothèse de régime permanent permet d'affirmer que $\overrightarrow{j_Q}$ est à flux conservatif. L'hypothèse des parois latérales calorifugées permet d'affirmer que le flux n'est orienté que suivant $\overrightarrow{e_x}$.

.....

**16.5** c) On a $\Phi(x) = \iint_S \overrightarrow{j}_Q(x) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = j(x).S = -\lambda S \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\lambda S}{L}(T_1 - T_2)$.

.....

**16.6** a) La contrainte est due à l'inhomogénéité spatiale d'une grandeur intensive.

.....

**16.6** b) La réponse correspond au flux d'une grandeur, le processus tendant à diminuer l'inhomogénéité spatiale liée à la contrainte.

.....

**16.6** c) Le modèle proposé correspond donc au cas où l'on fait l'hypothèse d'une réponse linéaire du système.

.....

**16.6** d) C'est donc une propriété intrinsèque du milieu.

.....

**16.7** a) On a $R_{\mathrm{th,v}} = \dfrac{L}{\lambda S} = \dfrac{5 \times 10^{-3}}{1 \times 1} = 5 \times 10^{-3}\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}$.

.....

**16.7** b) $\Delta T = 19 - 9 = 10\,°\mathrm{C}$. Le flux $\Phi$ vaut donc $\Phi = \dfrac{\Delta T}{R_{\mathrm{th}}} = \dfrac{10}{5 \times 10^{-3}} = \dfrac{10}{5 \times 10^{-3}} = 2 \times 10^3\,\mathrm{W}$.

.....

**16.7** c) On a $\phi = \dfrac{T_1 - T(0)}{R_{\mathrm{th},i}} = h_1 S(T_1 - T(0))$, $\phi = \dfrac{T(L) - T_2}{R_{\mathrm{th},i}} = h_2 S(T(L) - T_2)$.

.....

**16.7** d) Les différentes couches sont traversées par le même flux thermique : ainsi, les résistances thermiques sont en série.

.....

**16.7** e) On a $\Phi' = \dfrac{1}{R'_{\mathrm{th}}}(T_1 - T_2)$. Les résistance thermiques sont en série ; donc

$$R'_{\mathrm{th}} = R_{\mathrm{th}} + R_{\mathrm{th},1} + R_{\mathrm{th},2} = \frac{L}{\lambda S} + 2 \times \frac{1}{hS} = 9 \times 10^{-3}\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}.$$

On a donc $\Phi' = \dfrac{10}{9 \times 10^{-3}} \approx 1{,}1 \times 10^3\,\mathrm{W}$.

Les pertes sont presque deux fois plus faibles que dans le cas du premier modèle : des conditions limites peu réalistes peuvent conduire à surestimer fortement les pertes thermiques.

.....

**16.8** Par substitution on élimine $\phi$ : $T_1 - T(L) = R_{\mathrm{th}} h_2 S(T(L) - T_2)$ puis on isole $T(L)$.

$$T(L) = \frac{T_1 + R_{\mathrm{th}} h_2 S T_2}{1 + R_{\mathrm{th}} h_2 S}.$$

.....

**16.9** a) La surface du mur en brique est de $7{,}5 - 1{,}2 = 6{,}3\,\mathrm{m}^2$. La résistance de la brique est

$$R_\mathrm{b} = \frac{e_\mathrm{b}}{\lambda_\mathrm{b}(S_\mathrm{tot} - S_\mathrm{f})} = 4{,}53 \times 10^{-2}\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}.$$

.....

**16.9** b) Celle de l'isolant est $R_\mathrm{i} = \dfrac{e_\mathrm{i}}{\lambda_\mathrm{i}(S_\mathrm{tot} - S_\mathrm{f})} = 5{,}29 \times 10^{-1}\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}$.

.....

**16.9** d) La résistance de la brique et de l'isolant sont en série ; d'où

$$R_\mathrm{mur} = R_\mathrm{b} + R_\mathrm{i} = 5{,}74 \times 10^{-1}\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}.$$

Les résistances $R_\mathrm{mur}$ et $R_\mathrm{f}$ sont en parallèle. La résistance équivalente du mur est alors :

$$R_\mathrm{eq} = \frac{R_\mathrm{mur} R_\mathrm{f}}{R_\mathrm{mur} + R_\mathrm{f}} = 3{,}16 \times 10^{-1}\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}.$$

.....

**16.9** e) Pour maintenir cet écart, le système de chauffage doit fournir un flux thermique $\phi$ tel que

$$\phi = \frac{\Delta T}{R_\mathrm{eq}} = \frac{15\,\mathrm{K}}{3{,}16 \times 10^{-1}\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}} = 47{,}5\,\mathrm{W}.$$

.....

**16.10** c) Il faut calculer les surfaces d'échange pour les différents igloo pour identifier le dénominateur des intégrales. En notant $r$ la variable d'espace, on a

$$S_\mathrm{cub.} = 5r^2, \qquad S_\mathrm{cyl.} = \pi r^2 + 2\pi r \times r = 3\pi r^2 \qquad \text{et} \qquad S_\mathrm{sph.} = 2\pi r^2.$$

.....

**16.10** d) Toutes les résistances thermiques sont de la même forme

$$R_{\text{th}} = \int_a^{a+e} \frac{\mathrm{d}r}{\alpha r^2} = \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{a+e}\right] = \frac{e}{\alpha a(a+e)}.$$

On peut alors facilement calculer les résistances thermiques pour les différents igloo en identifiant pour chacun la valeur de $\alpha$ et $a$. D'où,

$$R_{\text{th, cub.}} = \frac{0{,}1}{5 \times 0{,}2 \times 1 \times 1{,}1} = \frac{1}{55 \times 0{,}2} = \frac{1}{11}\mathrm{K \cdot W^{-1}}$$
$$R_{\text{th, cyl.}} = \frac{0{,}1}{3\pi \times 0{,}2 \times 0{,}7 \times 0{,}8} = \frac{1}{52{,}1 \times 0{,}2} = \frac{1}{10{,}4}\mathrm{K \cdot W^{-1}}$$
$$R_{\text{th, sph.}} = \frac{0{,}1}{2\pi \times 0{,}2 \times 0{,}8 \times 0{,}9} = \frac{1}{44{,}6 \times 0{,}2} = \frac{1}{8{,}9}\mathrm{K \cdot W^{-1}}.$$

.....

**16.10** e) On a $\Delta T = R_{\text{th,C}}\phi = \dfrac{100}{8{,}9} = 11{,}2\,°\mathrm{C}$.

.....

**16.12** a) La loi des nœuds en terme de potentiels appliqué en N donne :

$$C_{\text{th}}\frac{\mathrm{d}\theta_{\text{i}}}{\mathrm{d}t} = \phi_{\text{i}} + \frac{1}{R_{\text{th}}}(\theta_{\text{e}} - \theta_{\text{i}}) \qquad \text{donc} \qquad \frac{\mathrm{d}\theta_{\text{i}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\theta_{\text{i}}}{R_{\text{th}}C_{\text{th}}} = \frac{1}{R_{\text{th}}C_{\text{th}}}(R_{\text{th}}\phi_{\text{i}} + \theta_{\text{e}}).$$

.....

**16.12** b) Si $\theta_{\text{i}}$ est une constante, l'équation différentielle se simplifie en

$$\phi_{\text{i}}(t) = \frac{1}{R_{\text{th}}}(\theta_{\text{i0}} - \theta_{\text{e0}} - \theta_{\text{e1}}\cos(\omega t)).$$

Le chauffage est donc en opposition de phase avec la température extérieure.

.....

**16.13** b) Les résistances thermiques des isolants ⓐ et ⓑ s'écrivent respectivement :

$$R_{\text{a}} = \frac{1}{2\pi\lambda_{\text{a}}L}\ln\left(\frac{5}{1}\right) = \frac{1}{2\pi L}\left(\frac{1}{\lambda_{\text{a}}}\ln(5)\right) \qquad \text{et} \qquad R_{\text{b}} = \frac{1}{2\pi\lambda_{\text{b}}L}\ln\left(\frac{7}{5}\right) = \frac{1}{2\pi L}\left(\frac{1}{\lambda_{\text{b}}}[\ln(7) - \ln(5)]\right)$$

Les deux résistances étant en série et comme on cherche la température à l'interface entre ces deux isolants, la formule du pont diviseur de tension appliqué au potentiel donne :

$$\theta_M = 20 + \frac{R_{\text{b}}}{R_{\text{a}} + R_{\text{b}}} \times 80 = 20 + \frac{80}{1 + \dfrac{\lambda_{\text{b}}}{\lambda_{\text{a}}}\dfrac{\ln(5)}{\ln(7) - \ln(5)}} = 20 + \frac{80}{1 + 3\dfrac{1}{\dfrac{\ln(7)}{\ln(5)} - 1}}$$
$$= 20 + \frac{80}{1 + 3\dfrac{1}{\dfrac{\ln(7)}{\ln(5)} - 1}} = 20 + \frac{80}{1 + \dfrac{1}{0{,}07}} = 20 + \frac{7 \times 80}{107} \approx 25{,}2\,°\mathrm{C}.$$

.....

**16.14**

| Isolants | Épaisseur pour $r = 7$ $e$ (cm) | Déphasage (pour $r = 7$) $\Delta\tau$ | Énergie grise surfacique $\mathcal{E}_{\text{S}}$ ($\mathrm{kWh \cdot m^{-2}}$) |
|---|---|---|---|
| Fibres de bois | 26 | 17 h 00 | 78 |
| Bottes de paille | 36 | 14 h 30 | 3,6 |
| Laines minérales | 21 | 4 h 30 | 50 |
| Vermiculite | 35 | 19 h 20 | 84 |
| Polystyrène expansé | 22 | 4 h 40 | 140 |
| Polyuréthane | 16 | 4 h 30 | 160 |

.....

**16.15** a) Il faut utiliser la première loi de Joule, en supposant la tranche suffisamment fine pour considérer la température uniforme. À l'instant $t$, l'énergie interne de l'élément de volume de section $S$ et de longueur $\mathrm{d}x$ peut s'écrire : $U(t) = \mu(S\,\mathrm{d}x)cT(x,t)$.

.....

**16.15** b) Le transfert reçu en $x$ est $\overrightarrow{j_Q}(x,t)\cdot S\overrightarrow{e_x}\,\mathrm{d}t$. Le transfert reçu en $x+\mathrm{d}x$ est $\overrightarrow{j_Q}(x+\mathrm{d}x,t)\cdot S(-\overrightarrow{e_x})\,\mathrm{d}t$, le signe étant dû à l'orientation de $\overrightarrow{S}$. Le flux total reçu est la somme des flux précédents :

$$\Phi(x+\mathrm{d}x,t) = [j_Q(x,t) - j_Q(x+\mathrm{d}x,t)]S\,\mathrm{d}t = -\frac{\partial j_Q}{\partial x}(x+\mathrm{d}x,t)\,\mathrm{d}xS\,\mathrm{d}t = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

.....

**16.15** c) L'énergie produite est proportionnelle au volume de la tranche et vaut $p_{\mathrm{prod}}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$.

.....

**16.16** a) Raisonnement identique à celui de l'entraînement précédent.

.....

**16.16** b) Raisonnement identique à celui de l'entraînement précédent.

.....

**16.16** d) La surface latérale vaut $p\,\mathrm{d}x$ : attention à l'algébrisation.

La variation d'énergie interne de l'élément de volume de section $S$ et de longueur $\mathrm{d}x$ est due aux flux thermiques conductifs suivant l'axe $(Ox)$ et conducto-convectif en radial :

$$\mathrm{d}U = \mu c\frac{\partial T}{\partial t}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - h(T(x,t)-T_{ext})p\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

soit $\mu c\dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} - h\dfrac{p}{S}(T(x,t)-T_{\mathrm{ext}})$.

.....

**16.17** a) Le premier graphique correspond au premier modèle ne prenant pas en compte les pertes conducto-convectives.

.....

**16.17** b) À partir de la première et la troisième ligne du système on obtient :

$$h_1S(T_1 - T(0)) = h_2S(T(L) - T_2) \qquad \text{donc} \qquad T(L) = \frac{h_1}{h_2}(T_1 - T(0)) + T_2.$$

En injectant cette expression dans la seconde équation, on trouve :

$$T(0)\left[1+\frac{h_1}{h_2}\right] - \left(\frac{h_1}{h_2}T_1 + T_2\right) = R_{\mathrm{th}}h_1S(T_1 - T(0)) \quad \text{donc} \quad T(0)\left[1+\frac{h_1}{h_2}+R_{\mathrm{th}}h_1S\right] = \left(R_{\mathrm{th}}h_1S + \frac{h_1}{h_2}\right)T_1 + T_2$$

$$\text{donc} \quad T(0) = \frac{R_{\mathrm{th}}h_1S + \dfrac{h_1}{h_2}}{1+\dfrac{h_1}{h_2}+R_{\mathrm{th}}h_1S}T_1 + \frac{1}{1+\dfrac{h_1}{h_2}+R_{\mathrm{th}}h_1S}T_2.$$

.....

**16.17** c) On fait de même pour obtenir $T(L)$ : à partir de la 1e et la 3e ligne on a : $T(0) = T_1 - \dfrac{h_2}{h_1}(T(L) - T_2)$. On injecte dans la seconde équation :

$$T_1 + \frac{h_2}{h_1}T_2 - \left[1 + \frac{h_2}{h_1}\right]T(L) = R_{\text{th}}h_2S(T(L) - T_2)$$

soit :

$$T(L) = \frac{1}{1 + \dfrac{h_2}{h_1} + R_{\text{th}}h_2S}T_1 + \frac{\dfrac{h_2}{h_1} + R_{\text{th}}h_2S}{1 + \dfrac{h_2}{h_1} + R_{\text{th}}h_2S}T_2.$$

.....

**16.18** a) La quantité $U$ est une fonction d'état. Comme on est en régime permanent, l'énergie interne du système fermé considéré est donc constante.

.....

**16.18** b) En appliquant le premier principe, on a $\mathrm{d}U = \delta W + \delta Q$. Ici, il n'y a pas de travail fourni au système, donc $\delta Q = 0$.

.....

**16.18** c) On a $0 = \delta Q = (\Phi(r) - \Phi(r + \mathrm{d}r))\,\mathrm{d}t$.

.....

**16.18** d) La loi de Fourier donne $-\lambda\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}2\pi rh = \Phi_0$.

.....

**16.19** a) On a $\displaystyle\int_{T_1}^{T_r}\mathrm{d}T = T(r) - T_1 = \int_{r_1}^{r} -\frac{\Phi_0}{2\pi\lambda h}\frac{\mathrm{d}r}{r} = -\frac{\Phi_0}{2\pi\lambda h}\ln\left(\frac{r}{r_1}\right)$.

La valeur de $\Phi_0$ peut être imposée par continuité du flux par un autre processus physique (transfert conducto-convectif par exemple) ; cela permet alors de mesurer la température sur une isotherme, par exemple $T_2$ (souvent une température de surface).

.....

**16.19** b) On a $T_2 = T_1 + \dfrac{\Phi_0}{2\pi\lambda h}\ln\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)$ et donc $\Phi_0 = (T_2 - T_1)\dfrac{2\pi\lambda h}{\ln\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)}$. Dans le cas où l'on impose les températures $T_1$ et $T_2$, on peut à partir du champ de température déterminé ici calculer $\Phi_0$, ce qui permet alors d'évaluer par exemple des pertes énergétiques.

.....

**16.20** a) Le système est invariant par rotation autour de l'axe $(\mathrm{O}, \vec{e_z})$ et par translation le long du même axe.

.....

**16.20** b) La variation de température étant uniquement radial le flux thermique sera selon cette direction. Sinon, on peut aussi utiliser la loi de Fourier sachant que le gradient s'écrit

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z}$$

en cylindrique.

.....

**16.20** c) On a $\delta^3 G_{\text{th}} = \dfrac{\lambda\delta S}{\delta L} = \dfrac{\lambda\,\mathrm{d}z r\,\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}$. On utilise l'expression précédente de la conductance.

.....

**16.20** d) Les isothermes sont communes aux « bornes » de tous les éléments de volumes.

.....

**16.20** e) On a $\delta^2 G_{\text{th}} = \sum \delta^3 G_{\text{th}} = \int_0^{2\pi} \frac{\lambda \, \mathrm{d}z r \, \mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} = \frac{2\pi\lambda r \, \mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}$.

.....

**16.20** f) Les isothermes sont communes aux « bornes » de tous les éléments de volumes.

.....

**16.20** g) On a $\delta G_{\text{th}} = \sum \delta^2 G_{\text{th}} = \int_0^L \frac{2\pi\lambda r \, \mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} = \frac{2\pi\lambda L r}{\mathrm{d}r}$.

.....

**16.20** h) Les cylindres évidés sont traversés par des flux identiques.

.....

**16.20** i) On a $R_{\text{th}} = \sum \delta R_{\text{th}} = \sum \frac{1}{G_{\text{th}}} = \int_{r1}^{r2} \frac{\mathrm{d}r}{2\pi\lambda L r}$.

.....

**16.20** j) On a $T_{\text{a}} - T_{\text{e}} = R_{\text{th}}\Phi_0 = \frac{1}{2\pi\lambda L} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)\Phi_0$.

.....

**16.21** a) La quantité $U$ est une fonction d'état. Comme on est en régime permanent, l'énergie interne du système fermé considéré est donc constante.

.....

**16.21** b) On peut appliquer le premier principe : $\mathrm{d}U = \delta W + \delta Q$. Ici, il n'y a pas de travail fourni au système ; donc, on a $\delta Q = 0$.

.....

**16.21** c) On a $0 = \delta Q = (\Phi(r) - \Phi(r + \mathrm{d}r)) \, \mathrm{d}t$.

.....

**16.21** d) La loi de Fourier donne $-\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} 4\pi r^2 = \Phi_0$.

.....

**16.22** a) On a $\int_{T_1}^{T_r} \mathrm{d}T = T(r) - T_1 = \int_{r_1}^{r} -\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)$.

.....

**16.22** b) On a $T_2 = T_1 + \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$, donc $\Phi_0 = (T_2 - T_1)\frac{4\pi\lambda}{\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)}$. Dans le cas où l'on impose les températures $T_1$ et $T_2$ on peut à partir du champ de température déterminé ici calculer $\Phi_0$, ce qui permet alors d'évaluer par exemple des pertes énergétiques.

.....

# Fiche n° 17. Transferts thermiques

## Réponses

**17.1** a) ..... positif

**17.1** b) ..... négatif

**17.1** c) ..... nul

**17.2** a) ..... b et e

**17.2** b) ..... $60\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$

**17.3** a) ..... b

**17.3** b) ..... b

**17.3** c) ..... Même sens que $\overrightarrow{e_r}$

**17.3** d) ..... Même sens que $\overrightarrow{e_r}$

**17.3** e) ..... $2{,}9\times10^{5}\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$

**17.3** f) ..... $1{,}4\times10^{5}\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$

**17.4** ..... $\mathrm{W\cdot K^{-1}\cdot m^{-2}}$

**17.5** a) ..... b

**17.5** b) ..... $65\,°\mathrm{C}$

**17.6** a) ..... c

**17.6** b) ..... $\lambda\dfrac{\pi a^2}{b}(T_0-T_a)$

**17.7** a) ..... $62{,}9\,\mathrm{MW\cdot m^{-2}}$

**17.7** b) ..... $3{,}8\times10^{26}\,\mathrm{W}$

**17.7** c) ..... c

**17.7** d) ..... c

**17.8** a) ..... b

**17.8** b) ..... b

**17.8** c) ..... $1{,}5\,\mathrm{m^2}$

**17.9** ..... $\mathrm{L^2\cdot T^{-1}}$

**17.10** a) ..... c

**17.10** b) ..... b

**17.11** a) ..... $\dfrac{p_v}{2\lambda}x(L-x)+(T_1-T_0)\dfrac{x}{L}+T_0$

**17.11** b) ..... d

**17.11** c) ..... $60\,\mathrm{W\cdot m^{-3}}$

**17.12** a) ..... $T_0+\dfrac{I^2}{2\gamma\lambda S^2}\left(\left(\dfrac{L}{2}\right)^2-x^2\right)$

**17.12** b) ..... 0

**17.12** c) ..... $T_0+\dfrac{I^2}{\lambda\gamma S^2}\dfrac{L^2}{8}$

**17.12** d) ..... b et c

**17.13** a) ..... $1{,}0\times10^{-2}\,\mathrm{K\cdot W^{-1}}$

**17.13** b) ..... $1{,}2\,\mathrm{W\cdot K^{-1}\cdot m^{-1}}$

**17.13** c) ..... $4{,}0\,\mathrm{cm}$

**17.14** a) ..... a

**17.14** b) ..... c

**17.15** a) ..... $0{,}50\,\mu\mathrm{m}$

**17.15** b) ..... $5{,}8\times10^{3}\,\mathrm{K}$

**17.15** c) ..... $9{,}35\,\mu\mathrm{m}$

**17.16** a) ..... c

**17.16** b) ..... $260\,\mathrm{K}$

## Corrigés

**17.2** a) Le profil de température dans le mur est une fonction affine en régime stationnaire.

On a alors $\overrightarrow{\text{grad}}\,T = \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\vec{e_x}$ indépendant de $x$. La loi de Fourier donne alors $\vec{\jmath}_{\text{th}} = -\lambda\,\overrightarrow{\text{grad}}\,T = -\lambda\dfrac{T_\text{C} - T_\text{A}}{e}\vec{e_x}$ pour tous les points de la dalle. Ici, $\overrightarrow{\text{grad}}\,T = \dfrac{T_\text{C} - T_\text{A}}{e}\vec{e_x}$ avec $\dfrac{T_\text{C} - T_\text{A}}{e} = 50\,\text{K}\cdot\text{m}^{-1}$.

**17.2** b) On a $\|\vec{\jmath}_{\text{th}}(\text{B})\| = \lambda\dfrac{|T_\text{C} - T_\text{A}|}{e} = 1{,}2\,\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}\times\dfrac{10\,\text{K}}{0{,}2\,\text{m}} = 60\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$.

**17.3** a) La température ne dépend spatialement que de la distance $r$ à l'axe (O$z$). Par conséquent, on a

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,T = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\vec{e_r}.$$

**17.3** b) La température ne dépend spatialement que de la distance $r$ à l'axe (O$z$). Par conséquent, on a

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,T = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\vec{e_r}.$$

**17.3** c) On constate que $\overrightarrow{\text{grad}}\,T\cdot\vec{e_r} = \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} < 0$ donc $\vec{\jmath}_{\text{th}}\cdot\vec{e_r} > 0$.

**17.3** d) On constate que $\overrightarrow{\text{grad}}\,T\cdot\vec{e_r} = \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} < 0$ donc $\vec{\jmath}_{\text{th}}\cdot\vec{e_r} > 0$.

**17.3** e) On a $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = \dfrac{T_\text{C} - T_\text{A}}{\ln\left(\dfrac{c}{a}\right)}\dfrac{1}{r}$ donc $\|\vec{\jmath}_{\text{th}}(\text{A})\| = \vec{\jmath}_{\text{th}}(\text{A})\cdot\vec{e_r} = -\lambda\dfrac{T_\text{C} - T_\text{A}}{\ln\left(\dfrac{c}{a}\right)}\dfrac{1}{a}$. Donc,

$$\lambda\frac{T_\text{A} - T_\text{C}}{\ln\left(\dfrac{c}{a}\right)}\frac{1}{a} = 400\,\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}\times\frac{10\,\text{K}}{\ln(2)}\frac{1}{2\times10^{-2}\,\text{m}} = 2{,}9\times10^{5}\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}.$$

**17.3** f) On obtient $\vec{\jmath}_{\text{th}}(\text{C})\cdot\vec{e_r} = -\lambda\dfrac{T_\text{C} - T_\text{A}}{\ln\left(\dfrac{c}{a}\right)}\dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{2}\vec{\jmath}_{\text{th}}(\text{A})\cdot\vec{e_r}$.

**17.5** a) La puissance transmise par la paroi au fluide est $P_{p\to f} = hS(T_p - T_f)$. Par définition de la résistance thermique, on a $R_\text{cc} = \dfrac{T_p - T_f}{P_{p\to f}}$ donc $R_\text{cc} = \dfrac{1}{hS}$.

**17.5** b) On a $T_\text{toit} - T_\text{air} = \dfrac{P_{\text{toit}\to\text{air}}}{hS} = \dfrac{40\times10^{3}\,\text{W}}{20\,\text{W}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}\times50\,\text{m}^{2}} = 40\ \text{K}$.

**17.6** b) On obtient $P_0 = -\lambda\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(0)\pi a^2$ avec $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(0) = \dfrac{T_a - T_0}{b}$.

**17.7** a) On calcule $\varphi_\odot = 5{,}67\times10^{-8}\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-4}\times(5\,772\,\text{K})^4 = 6{,}29\times10^{7}\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$.

**17.7** b) On a $P_S = \varphi_\odot 4\pi R_\odot^2 = 6{,}29\times10^{7}\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\times4\pi\left(696\times10^{6}\,\text{m}\right)^2 = 3{,}83\times10^{26}\,\text{W}$.

**17.7** c) La puissance $\varphi(r)4\pi r^2$ traversant la sphère de rayon $r$ étant identique à celle émise par le Soleil $\varphi_\odot 4\pi R_\odot^2$, il vient $\varphi(r) = \varphi_\odot \left(\dfrac{R_\odot}{r}\right)^2$.

.....

**17.7** d) On trouve $\varphi(D_{ST}) = \varphi_\odot \left(\dfrac{R_\odot}{D_{ST}}\right)^2$. Donc,

$$\varphi(D_{ST}) = 6{,}29 \times 10^7\,\mathrm{W\cdot m^{-2}} \times \left(\frac{696 \times 10^3\,\mathrm{km}}{150 \times 10^6\,\mathrm{km}}\right)^2 = 1{,}35 \times 10^3\,\mathrm{W\cdot m^{-2}} \quad \text{arrondi à} \quad 1{,}4 \times 10^3\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}.$$

.....

**17.8** a) La radiateur rayonne vers l'air la puissance $P_r = \sigma T_s^4 S$ et reçoit la puissance $P_a = \sigma T_a^4 S$ de la part de l'air. La puissance cédée par le radiateur à l'air est donc $P = P_r - P_a$.

.....

**17.8** b) La loi de Newton rappelée dans la fiche donne le résultat.

.....

**17.8** c) La puissance totale cédée par le radiateur à l'air est $P = \big(\sigma\big(T_s^4 - T_a^4\big) + h(T_s - T_a)\big)S$.

On a

$$\begin{aligned}\sigma\big(T_s^4 - T_a^4\big) + h(T_s - T_a) &= 5{,}67 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-4}} \times \big(333^4 - 293^4\big)\mathrm{K}^4 + 10\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}} \times 40\,\mathrm{K}\\ &= 679\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}.\end{aligned}$$

Donc $S = \dfrac{P}{\sigma(T_s^4 - T_a^4) + h(T_s - T_a)} = \dfrac{1{,}0 \times 10^3\,\mathrm{W}}{679\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}} = 1{,}5\,\mathrm{m}^2$.

.....

**17.10** b) La durée caractéristique $\tau$ de la diffusion thermique est liée à la longueur caractéristique $L$ de l'œuf et à sa diffusivité thermique $D$ par $\tau = \dfrac{L^2}{D}$. On en déduit que $\dfrac{\tau_a}{\tau_p} = \left(\dfrac{L_a}{L_p}\right)^2 \approx 3^2$ (où l'indice « a » est pour l'œuf d'autruche et « p » pour l'œuf de poule).

.....

**17.11** a) En intégrant $\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} = -\dfrac{p_v}{\lambda}$ par rapport à $x$, on obtient $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{p_v}{\lambda}x + A$ puis $T(x) = -\dfrac{p_v}{\lambda}\dfrac{x^2}{2} + Ax + B$. Les conditions aux limites $T(0) = T_0$ et $T(L) = T_1$ mènent à $B = T_0$ et $A = \dfrac{T_1 - T_0}{L} + \dfrac{p_v L}{2\lambda}$.

.....

**17.11** b) On pose $A = \dfrac{p_v L}{2\lambda} + \dfrac{T_1 - T_0}{L}$. La température est maximale en $x_1 = 3L/10$. Or $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{p_v}{\lambda}x + A$. On a donc $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = 0$ pour $x_1 = \dfrac{\lambda A}{p_v}$. Après calculs, on obtient $p_v = \dfrac{5\lambda}{L^2}(T_0 - T_1)$.

.....

**17.11** c) On a $p_v = \dfrac{5 \times 1{,}2\,\mathrm{W\cdot K^{-1}\cdot m^{-1}}}{1\,\mathrm{m}^2} \times 10\,\mathrm{K} = 60\,\mathrm{W\cdot m^{-3}}$.

.....

**17.12** a) On note $A = \dfrac{I^2}{\lambda\gamma S^2}$. En intégrant $\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} = -A$ par rapport à $x$, on obtient $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -Ax + B$ puis $T(x) = -A\dfrac{x^2}{2} + Bx + C$. Les conditions aux limites $T\left(\pm\dfrac{L}{2}\right) = T_0$ mènent à $B = 0$ et $C = T_0 + AL^2/8$.

On peut aussi justifier $B = 0$ par un argument de symétrie du profil de température par rapport au plan $x = 0$. Le profil étant parabolique et $T\left(\pm\dfrac{L}{2}\right) = T_0$ prouvent que $x \longmapsto T(x)$ est une fonction paire donc que $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(0) = 0$.

.....

**17.12** d) On a $\vec{\jmath}_{\text{th}}\left(-\frac{L}{2}\right)\cdot\vec{e_x} = -\lambda\left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_{-L/2} < 0$ car $\left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_{-L/2} > 0$ et $\vec{\jmath}_{\text{th}}\left(\frac{L}{2}\right)\cdot\vec{e_x} = -\lambda\left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_{-L/2} > 0$ car $\left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_{-L/2} < 0$.

.....

**17.13** a) Par définition de la résistance thermique du mur, on a $R = \frac{T_1 - T_2}{P_{1\to 2}} = \frac{10}{10^3} = 1{,}0\times 10^{-2}\,\mathrm{K\cdot W^{-1}}$.

.....

**17.13** b) En notant $S = hL = 25\,\mathrm{m}^2$, la conductivité du béton est alors $\lambda_1 = \frac{e}{SR} = \frac{0,3}{25\times 10^{-2}} = 1{,}2\,\mathrm{W\cdot K^{-1}\cdot m^{-1}}$.

.....

**17.13** c) Les deux matériaux sont associés en série. Afin que la puissance traversant le mur isolé soit divisée par 5 pour la même différence de température, il faut que la résistance thermique soit multipliée par 5. En notant $R_1$ la résistance du mur de béton et $R_2$ celle de la plaque de polystyrène, $R_1 + R_2 = 5R_1$ soit $R_2 = 4R_1$.

Ceci s'écrit alors $\frac{e_2}{\lambda_2 S} = 4\frac{e_1}{\lambda_1 S}$. L'épaisseur $e_2$ de polystyrène est donc $e_2 = 4e_1\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 4{,}0\,\mathrm{cm}$.

.....

**17.14** a) La conductance est proportionnelle à la surface du mur. En écrivant que $G_m = KS_m$, on en déduit que $G'_m = K(S_m - S_f)$ et donc $G'_m = \frac{S_m - S_f}{S_m}G_m$.

.....

**17.14** b) Le mur percé et la fenêtre sont associés en parallèle. La conductance thermique équivalente est la somme de la conductance de la fenêtre $G_f$ et de celle du mur percé $G'_m$ différente de $G_m$. Donc, on a

$$G = G_f + \frac{S_m - S_f}{S_m}G_m = G_m\left(1 - \frac{S_f}{S_m}\right) + G_f.$$

.....

**17.15** b) Avec la loi de Wien, on obtient $T = \frac{2\,898\,\mu\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}}{0{,}50\,\mu\mathrm{m}} = 5{,}8\times 10^3\,\mathrm{K}$.

.....

**17.15** c) On calcule $\lambda'_m = \frac{2\,898\,\mu\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}}{310\,\mathrm{K}} = 9{,}35\,\mu\mathrm{m}$.

.....

**17.16** a) La puissance émise par un élément de surface $S$ d'atmosphère est $P_e = \varphi_a \times 2S$ et la puissance reçue est $P_r = \varphi_S S + \varphi_T S$. En régime stationnaire, $P_r = P_e$ donc $\varphi_a = \frac{\varphi_S + \varphi_T}{2}$.

.....

**17.16** b) On a $\varphi_a = \frac{(70+450)\mathrm{W\cdot m^{-2}}}{2} = 260\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$. On en déduit que

$$T_a = \left(\frac{\varphi_a}{\sigma}\right)^{1/4} = \left(\frac{260\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}}{5{,}67\times 10^{-8}\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-4}}}\right)^{1/4} = 260\,\mathrm{K}.$$

.....

# Fiche n° 18. Tables et diagrammes thermodynamiques

## Réponses

**18.1** a) .. $9{,}1 \times 10^{-4}\,\mathrm{g \cdot mL^{-1}}$

**18.1** b) ..... b

**18.1** c) ..... a

**18.2** a) ..... ①

**18.2** b) ..... ③

**18.2** c) ..... ②

**18.2** d) ..... 760,8 mmHg

**18.2** e) ..... diphasé

**18.2** f) ... $1{,}017 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^3/kg}$

**18.2** g) ..... $7{,}6672\,\mathrm{m^3/kg}$

**18.2** h) ..... c

**18.3** a) ..... isobare

**18.3** b) ..... isotherme

**18.3** c) ..... isochore

**18.3** d) ..... $2V_1$

**18.4** a) ..... b

**18.4** b) ..... a

**18.4** c) ..... d

**18.5** a) ..... 0

**18.5** b) ..... $-\dfrac{p_0}{v_0}$

**18.5** c) ..... $\infty$

**18.5** d) ..... $-\gamma\dfrac{p_0}{v_0}$

**18.5** e) ..... isochore

**18.5** f) ..... isobare

**18.5** g) ..... isotherme

**18.5** h) ..... isentrope

**18.6** a) ..... $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} - \dfrac{T}{c_p} = 0$

**18.6** b) ..... b

**18.6** c) ..... b

**18.6** d) ..... a

**18.7** ..... a

**18.8** a) ..... a, c

**18.8** b) ..... a, d

**18.8** c) ..... b, d

**18.8** d) ..... c, d

**18.8** e) ..... $800\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$

**18.8** f) ... $-5\,000\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$

**18.8** g) ..... $-1\,650\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$

**18.9** a) ..... b

**18.9** b) ..... d

**18.9** c) ..... c

**18.10** a) ..... a, d

**18.10** b) ..... b, c, d

**18.10** c) ..... b et c

**18.10** d) ..... (a)

**18.11** a) ..... $\dfrac{R}{\ln(10)Mvc_p}$

**18.11** b) ..... isochore

**18.11** c) ..... isobare

**18.11** d) ..... isotherme

**18.11** e) ..... isentrope

**18.12** a) ..... a

**18.12** b) ..... $1\,320\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$

**18.12** c) ..... $2\,650\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$

**18.12** d) ..... $420\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$

**18.12** e) ..... b

**18.12** f) ..... $x_\mathrm{B} = 40\%$

**18.12** g) ..... b

**18.13** a) ..... b

**18.13** b) ..... d

**18.13** c) ..... $2{,}45\,\mathrm{m^3/kg}$

**18.13** d) ..... d

**18.13** e) ..... $2{,}45\,\mathrm{m^3/kg}$

**18.14** a) ..... $2\,675{,}6\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$

**18.14** b) ..... $419{,}2\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$

**18.14** c) ..... c

**18.14** d) .... $-2\,031\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$

**18.15** a) ..... c

**18.15** b) ..... b

**18.16** a) ..... b

**18.16** b) ..... isotherme

**18.16** c) ..... isentrope

**18.16** d) ..... isochore

**18.16** e) ..... isobare

**18.17** a) ..... $\boxed{\dfrac{T_0}{c_p}}$

**18.17** b) ..... $\boxed{0}$

**18.17** c) ..... $\boxed{\dfrac{T_0}{c_v}}$

**18.17** d) ..... $\boxed{\infty}$

**18.17** e) ..... isentrope

**18.17** f) ..... isobare

**18.17** g) ..... isochore

**18.17** h) ..... isotherme

**18.18** a) ..... c

**18.18** b) ..... b

**18.19** a) ..... $\boxed{2\,680\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}}$

**18.19** b) ..... c

**18.19** c) .... $\boxed{8\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}}$

**18.19** d) ..... $\boxed{300\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}}$

**18.19** e) ..... $\boxed{250\,°\mathrm{C}}$

**18.19** f) ..... $\boxed{400\,°\mathrm{C}}$

**18.19** g) ..... a

## Corrigés

**18.1** a) On a $v(T = 200\,°\mathrm{C}, p = 200\,\mathrm{kPa}) = 1{,}0805\,\mathrm{m^3/kg} = 1{,}0805 \times 10^6\,\mathrm{mL\cdot kg^{-1}} = 1{,}0805 \times 10^3\,\mathrm{mL\cdot g^{-1}}$ $\approx 1{,}1 \times 10^3\,\mathrm{mL\cdot g^{-1}}$ donc $\rho = \dfrac{1}{v} = \dfrac{1}{1{,}1 \times 10^3} = 0,9090\cdots \times 10^{-3}\mathrm{g\cdot mL^{-1}} \approx 9{,}1 \times 10^{-4}\,\mathrm{g\cdot mL^{-1}}$.

*Remarque : La division ci-dessus « se pose à la main ». Il est aussi possible d'utiliser le développement limité autour de 0 de $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x$ à l'ordre 1 :* $\dfrac{1}{1{,}1 \times 10^3} = (1+0,1)^{-1} \times 10^{-3} \approx (1-0,1) \times 10^{-3} = 9 \times 10^{-4}$.

.....

**18.1** b) Par lecture de la table, on a $T_{\mathrm{sat}}(200\,\mathrm{kPa}) = 120{,}21\,°\mathrm{C}$.

.....

**18.1** c) Par lecture de la table, on a $100\,°\mathrm{C} < T_{\mathrm{sat}}(200\,\mathrm{kPa}) = 120{,}21\,°\mathrm{C}$ : le fluide est donc monophasé sous forme de liquide.

.....

**18.2** d) À 100 °C, on a

$$p_{\mathrm{sat}} = 0{,}10142\,\mathrm{MPa} = 0{,}10142 \times 10^6 \times 1\,\mathrm{Pa} = 0{,}10142 \times 10^6 \times \frac{1}{133,3}\mathrm{mmHg} = 760{,}8\,\mathrm{mmHg}.$$

.....

**18.2** e) On a $v = 1{,}03\,\mathrm{cm^3/g} = 1{,}03 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^3/kg}$. Or, par lecture de la table, le volume massique du liquide saturant est $v_\ell(60\,°\mathrm{C}) = 1{,}017 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^3/kg}$ et celui de la vapeur saturante est $v_{\mathrm{g}}(60\,°\mathrm{C}) = 7{,}6672\,\mathrm{m^3/kg}$. Il vient que $v_\ell(60\,°\mathrm{C}) \leqslant v \leqslant v_{\mathrm{g}}(60\,°\mathrm{C})$ : le système est alors diphasé, c'est-à-dire un mélange de vapeur et de liquide.

.....

**18.2** h) Le théorème des moments exprimé en terme de volume massique est $x_{\mathrm{g}} = \dfrac{v - v_{\mathrm{l}}}{v_{\mathrm{g}} - v_{\mathrm{l}}}$.

Or, $v_{\mathrm{g}} = 7{,}6672\,\mathrm{m^3/kg} \approx 7v \approx 7 \times 10^3 v_{\mathrm{l}}$ donc il est numériquement raisonnable de considérer que $v_{\mathrm{g}} - v_{\mathrm{l}} \approx v_{\mathrm{g}}$ et $v - v_{\mathrm{l}} \approx v$, d'où $x_{\mathrm{g}} \approx v/v_{\mathrm{g}}$.

.....

**18.3** d) La transformation est isobare donc $V_2 = \dfrac{T_2 V_1}{T_1} = 2V_1$.

.....

**18.4** a) La transformation est isotherme donc $PV = nRT$ est une constante.

.....

**18.4** b)

- Lors de la transformation (A) isobare, le volume augmente donc (b) ne convient pas. Dans le cas de (d), la transformation (C) isochore a lieu au volume minimal, ce qui est en contradiction avec la fiche synoptique où le volume prend sa valeur maximale pendant cette transformation ($V = 3V_1$) : la (d) ne convient donc pas.
- Pour la transformation (B) isotherme, la pression et le volume vérifient la relation $P = \dfrac{\text{cste}}{V}$ donc, en échelle linéaire, la représentation graphique de $P = f(V)$ est une branche d'hyperbole, ce qui ne peut que correspondre à (a).

.....

**18.4** c) Le sens de rotation est horaire : le travail total reçu au cours du cycle est négatif, le cycle est moteur.

.....

**18.5** h) La courbe isobare est de pente nulle donc la courbe ① est la courbe isobare. La courbe isochore est de pente infinie donc la courbe ② est la courbe isochore.

Il reste deux courbes à identifier : la courbe isotherme vérifiant $p_{\text{iso}-T} = \dfrac{\text{A}}{v}$ et la courbe isentropique $p_{\text{iso}-s} = \dfrac{B}{v^\gamma}$ où $A = nrT = p_0 v_0$ et $B = p_0 v_0^\gamma$ sont des constantes. L'identification des courbes se fait par un calcul de dérivée au point $\text{M}_0$ de coordonnées $(p_0, v_0)$ :

$$\left(\frac{\mathrm{d}p_{\text{iso}-T}}{\mathrm{d}v}\right)(v_0) = -\frac{A}{v_0^2} = -\frac{p_0}{v_0} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}p_{\text{iso}-s}}{\mathrm{d}v}\right)(v_0) = -\gamma\frac{B}{v_0^{\gamma+1}} = -\gamma\frac{p_0}{v_0} = \gamma\left(\frac{\mathrm{d}p_{\text{iso}-T}}{\mathrm{d}v}\right)(v_0)\,.$$

Au point $\text{M}_0$, la courbe isentrope est donc la courbe la plus pentue : la courbe ④ est la courbe isentrope et la courbe ③ est la courbe isotherme.

.....

**18.6** a) En combinant la 2ème identité thermodynamique et la seconde loi de Joule, il vient : $c_P\,\mathrm{d}T = T\,\mathrm{d}s + v\,\mathrm{d}p$. Le long d'une courbe isobare, $\mathrm{d}p = 0$. L'équation différentielle en $T(s)$ s'obtient en réorganisant les variables $s$ et $T$ de telle sorte qu'une dérivée $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}$ apparaisse : $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} - \dfrac{T}{c_p} = 0$.

.....

**18.6** b) L'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} - \dfrac{T}{c_p} = 0$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants et sans second membre dont la solution est de la forme $T(s) = A\exp\left(\dfrac{s}{c_p}\right)$. Le choix (arbitraire) de la constante d'intégration $A$ est ici fait de telle sorte que la courbe isobare passe par un état de référence $(s_0, T_0)$ : $A = T_0\exp\left(-\dfrac{s_0}{c_p}\right)$, d'où $T(s) = T_0\exp\left(\dfrac{s - s_0}{c_p}\right)$.

*Conseil : Tester la vraisemblance en remarquant que, d'une part,* $T(s = s_0) = T_0$ *et, d'autre part,* $\dim(s - s_0) = \dim(c_p)$ *: l'argument d'exponentielle est bien sans dimension.*

.....

**18.6** c) La loi de Laplace donne $p_1^{1-\gamma}T_1^\gamma = p_2^{1-\gamma}T_2^\gamma$ soit $p_2^{1-\gamma} = \left(\dfrac{T_1}{T_2}\right)^\gamma p_1^{1-\gamma}$, d'où $p_1\left(\dfrac{T_1}{T_2}\right)^{\gamma/(1-\gamma)}$.

.....

**18.6** d) Graphiquement, $T_1 < T_2$, soit $\dfrac{T_1}{T_2} < 1$. Or, $\dfrac{p_2}{p_1} = \left(\dfrac{T_1}{T_2}\right)^{\gamma/(1-\gamma)}$ avec $\gamma > 1$, c'est-à-dire que $\dfrac{\gamma}{1-\gamma} < 0$. Ainsi, $\dfrac{T_1}{T_2} < 1$ implique que $\left(\dfrac{T_1}{T_2}\right)^{\gamma/(1-\gamma)} > 1$. Autrement dit, $\dfrac{p_2}{p_1} > 1$ donc $p_2 > p_1$.

.....

**18.7** Le transfert thermique correspond géométriquement à l'aire du cycle parcouru dans le diagramme entropique. Il est compté positivement si le cycle est parcouru dans le sens horaire (moteur) et négativement si le cycle est parcouru dans le sens trigonométrique (récepteur). Attention ici, l'entropie est donnée en $\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}$ donc $Q_{\text{ABCDA}} = (T_\text{B} - T_\text{A})(S_\text{C} - S_\text{B}) = 100 \cdot 1{,}5 \times 10^3 = 1{,}5 \times 10^5$ J.

.....

**18.8** a) Une enthalpie massique est indiquée en $\mathrm{J \cdot kg^{-1}}$, et non en J. Le point A est à droite de la courbe de saturation et en-dessous du point critique donc le fluide est à l'état gazeux. Les courbes isenthalpes ($\mathrm{d}h = 0$) sont quasiment horizontales, c'est-à-dire presque confondues avec des courbes isothermes ($\mathrm{d}T = 0$) : le modèle du gaz parfait peut être considéré comme valide au point A car la relation $\mathrm{d}h = c\,\mathrm{d}T$ n'est pas mise en défaut au point A. Enfin, le point A passe par la courbe isobare 0,05 bar représentée en pointillés.

.....

**18.8** b) Le point B est à gauche de la courbe de saturation et en-dessous du point critique donc le fluide est à l'état liquide. Une lecture graphique, réalisée à l'aide d'une règle graduée, puis l'application d'une « règle de trois », conduit à évaluer l'abscisse du point B comme étant $600\,\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$.

.....

**18.8** c) La grandeur $x$ représente le titre massique en vapeur dans le mélange. Le point E se situe à équidistance (le long de la courbe isotherme passant par le point E) des courbes isotitres $x = 0{,}6$ et $x = 0{,}8$. Ainsi, $x_\mathrm{E} = 0{,}7$.

.....

**18.8** d) En passant de l'état E à l'état F (situé sur la courbe d'ébullition), le système passe d'un état diphasé à un état de liquide juste saturant : la vapeur saturante se liquéfie. De plus, cette transformation est isotherme ; or, l'eau étant un corps pur, elle est également isobare.

.....

**18.8** f) Par lecture graphique, $s_\mathrm{E} = 800\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$. Ainsi, $s_\mathrm{F} - s_\mathrm{E} = 800 - 5800 = -5\,000\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$.

.....

**18.8** g) L'incrément des courbes isenthalpes est de $200\,\mathrm{J \cdot kg^{-1}}$. Aussi, le point E étant situé à équidistance (le long de la courbe isotherme passant par le point E ) des courbes isenthalpes 1800 et $2\,000\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$, il vient que $h_\mathrm{E} = 1\,900\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$. De même, $h_\mathrm{F} = 250\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$, d'où $h_\mathrm{F} - h_\mathrm{E} = 250 - 1900 = -1\,650\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$.

.....

**18.9** a) Pour une phase condensée incompressible indilatable (domaine liquide, à gauche de la courbe de saturation), $\mathrm{d}h = c_p\,\mathrm{d}T$ donc à $T$ constante, $h$ est constante. Une courbe isotherme doit donc être verticale dans cette zone.

Pour un mélange liquide-vapeur d'un corps pur (zone sous la courbe de saturation) à l'équilibre, si $T$ est fixée alors $p$ est fixée aussi. Une courbe isotherme doit donc être horizontale dans cette zone.

Pour un gaz parfait (domaine vapeur, à droite de la courbe de saturation, et pour une faible pression), $\mathrm{d}h = c_p\,\mathrm{d}T$ donc à $T$ constante, $h$ est constante. Une courbe isotherme doit donc être verticale dans cette zone.

.....

**18.9** b) On peut procéder par élimination :

- Il ne s'agit pas d'isobares car nous aurions alors des droites horizontales.
- Il ne s'agit pas d'isenthalpes car nous aurions alors des droites verticales.
- Il ne s'agit pas d'isothermes car dans la zone gaz à faible pression (domaine de validité de l'hypothèse gaz parfait), nous aurions alors des droites verticales.
- Il ne s'agit pas d'isotitres car certaines courbes sont en dehors du domaine liquide + vapeur.

Il s'agit donc nécessairement d'isentropes.

.....

**18.9** c) Ces courbes n'existent que dans le domaine Liquide + Vapeur et se rejoignent toutes au point critique, il s'agit donc d'isotitres.

.....

**18.10** a) La pression est de 100 bar donc $100 \times 1{,}00 \times 10^5\,\mathrm{Pa} = 1{,}00 \times 10^7\,\mathrm{Pa}$.

La température est indiquée en °C donc la réponse (b) ne convient pas. Le point A est à gauche de la courbe de saturation et en-dessous du point critique donc le fluide est à l'état liquide.

.....

**18.10** b) Par lecture graphique, la pression est de $10^0$bar $= 1$ bar $\neq 1$ Pa donc la (a) ne convient pas. Le point B est sous la courbe de saturation donc la réponse (b) convient. La valeur de $x$ indiquée correspond au titre massique en vapeur. Sa valeur est de $0,4$ donc le titre en liquide est $1 - 0{,}4 = 0{,}6$.

.....

**18.10** c) Le long d'une isotherme $\mathrm{d}T = 0$ ce qui, avec la seconde loi de Joule, implique : $\mathrm{d}h = 0$. Les courbes isenthalpes sont donc des portions de droites parallèles à l'axe des ordonnées (puisque $h$ est la grandeur en abscisses).

.....

**18.10** d) Le modèle du gaz parfait est une bonne approximation lorsque les courbes isothermes ($\mathrm{d}T = 0$) sont également des courbes isenthalpes ($\mathrm{d}h = c_p\,\mathrm{d}T = 0$), ce qui tend à être le cas en zone (a).

.....

**18.11** a) L'équation d'état donne $p = \dfrac{R}{Mv}T$ donc, en différenciant à $v$ fixé, il vient $\mathrm{d}p = \dfrac{R}{Mv}\,\mathrm{d}T$. L'utilisation de la 2$^{\text{nde}}$ loi de Joule puis la division par $p\ln(10)$ permet d'écrire :

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}\frac{1}{\ln(10)} = \frac{R}{Mv}\frac{1}{p\ln(10)}\frac{\mathrm{d}h}{c_p} \quad \text{soit} \quad \frac{\mathrm{d}(\ln p/\ln(10))}{\mathrm{d}h} = \frac{R}{c_pMv\ln(10)}\frac{1}{p} \quad \text{d'où} \quad \frac{\mathrm{d}\log(p)}{\mathrm{d}h} = \frac{A}{p} \text{ avec } A = \frac{R}{\ln(10)Mvc_p}$$

une constante pour une transformation isochore ($v = \text{cste}$).

.....

**18.11** e) La courbe isobare est de pente nulle donc la courbe ④ est la courbe isobare. Du fait de la seconde loi de Joule, la courbe isotherme est également une courbe isenthalpe, c'est-à-dire de pente infinie. Ainsi, la courbe isotherme est la courbe ①.

Pour une courbe isochore, il a été montré que $\dfrac{\mathrm{d}\log(p)}{\mathrm{d}h} = \dfrac{A}{p}$ avec $A$ une constante. Ainsi, dans un diagramme $(\log(p), h)$, il apparaît que la pente n'est pas constante ; elle tend vers l'infini lorsque $h$ tend vers 0 : la courbe ③ est donc la courbe isochore et, par élimination, la courbe ② est la courbe isentrope.

.....

**18.12** a) L'échelle des abscisses étant linéaire, il est possible d'utiliser la position du point B par rapport à la courbe de saturation pour déterminer si le fluide contient plus de liquide ou plus de vapeur. Ici, le point B est plus proche de la courbe de bulle (isotitre $x = 0$ en trait plein) que de la courbe de rosée (isotitre $x = 1$ en trait plein) donc il y a davantage de liquide que de vapeur.

.....

**18.12** b) L'enthalpie massique du fluide diphasé correspond à l'abscisse du point B : $h_\mathrm{B} = 1\,320\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$.

.....

**18.12** c) L'enthalpie massique de la vapeur saturante de l'état représenté par le point B correspond à l'abscisse du projeté de B sur la courbe de rosée : $h_{\mathrm{v,B}} = 2\,650\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$.

.....

**18.12** d) L'enthalpie massique du liquide saturant de l'état représenté par le point B correspond à l'abscisse du projeté de B sur la courbe de bulle : $h_{\mathrm{l,B}} = 420\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$.

.....

**18.12** f) On a

$$x_\mathrm{B} = \frac{h_\mathrm{B} - h_{\mathrm{l,B}}}{h_{\mathrm{v,B}} - h_{\mathrm{l,B}}} = \frac{1320 - 420}{2650 - 420} = \frac{900}{2230} \approx \frac{900}{2250} = \frac{9000}{2250} \times 10^{-1} = 0{,}40,$$

ce qui est cohérent avec le fait que le point B soit placé sur la courbe isotitre $x = 0{,}4$.

.....

**18.12** g) Pour rappel, l'enthalpie massique du liquide saturant d'un mélange diphasé correspond à l'abscisse du projeté de cet état sur la courbe de bulle tandis que l'enthalpie massique de la vapeur saturante correspond à l'abscisse du projeté sur la courbe de rosée. Dans le diagramme $\log(p) - h$, la distance entre ces deux projetés est $h_\mathrm{v} - h_\mathrm{l} = \Delta_\mathrm{vap} h$.

Graphiquement, il apparaît que $h_\mathrm{v}$ diminue et que $h_\mathrm{l}$ augmente avec la pression, d'où une enthalpie de vaporisation $\Delta_\mathrm{vap} h$ qui diminue lorsque la pression augmente.

.....

**18.13** b) L'équation d'état des gaz parfaits est $PV = nRT$ avec $n$ la quantité de matière et $V$ le volume.

Or, $n = m/M$ ($m$ est la masse) donc il vient $PV = mTR/M$ soit $Pv = rT$ avec $v = V/m$.

.....

**18.13** c) On a $v = \dfrac{rT}{p} = \dfrac{0{,}46 \times 10^3 \times (260 + 273)}{100 \times 10^3} = 2{,}45\,\mathrm{m}^3/\mathrm{kg}$.

.....

**18.13** d) De manière générale, les points $\mathrm{M}(x, y)$ le long d'un segment défini par les points $\mathrm{M}_1(x_1, y_1)$ et $\mathrm{M}_2(x_2, y_2)$ vérifient $y = y_1 + (x - x_1)\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

.....

**18.14** c) Par extensivité et additivité de l'enthalpie, $h_\mathrm{i} = xh_\mathrm{g} + (1 - x)h_\ell$ avec $x$ le titre massique de la vapeur saturante. Ici, $x = 90\% = 0,90$ et $1 - x = 10\% = 0,10$.

.....

**18.14** d) On a $q = \Delta h = h_\ell(P = 1{,}0142\,\mathrm{bar}) - h_\mathrm{i}$ avec $h_\mathrm{i}$ l'enthalpie massique initiale du mélange et

$$h_\mathrm{i} = 10\% \times h_\ell(P = 1{,}0142\,\mathrm{bar}) + 90\% \times h_\mathrm{g}(P = 1{,}0142\,\mathrm{bar}) = 10\% \times 419,2 + 90\% \times 2675,6 = 2\,450\,\mathrm{kJ} \cdot \mathrm{kg}^{-1}.$$

Ainsi, le transfert thermique massique est $q = 419,2 - 2450 = -2\,031\,\mathrm{kJ} \cdot \mathrm{kg}^{-1}$.

.....

**18.15** a) La transformation (D) étant isentropique, la loi de Laplace est valide : $PV^\gamma = \text{cste}$. De plus, le gaz est parfait donc l'injection de l'équation d'état $PV = nRT$ dans la loi de Laplace aboutit à $TV^{\gamma-1} = \text{cste}$.

.....

**18.15** b) Lors de la transformation (D) isentrope, le volume décroît de $3V_1$ à $V_1$. De plus, le volume et la température ne sont pas reliés par une relation linéaire ($TV^{\gamma-1} = \text{cste}$). Ainsi, seule la réponse (b) vérifie ces deux conditions.

.....

**18.16** a) L'équation d'état des gaz parfaits donne $p = \dfrac{nR}{V}T$.

Or, ici, $V = m \times v_0 = nMv_0$. Ainsi, $p = \dfrac{R}{Mv_0}T$ d'où $\dfrac{\partial p}{\partial T} = \dfrac{R}{Mv_0} = \text{cste}$ : une courbe isochore est une courbe de pente constante (et positive) dans un diagramme $(p, T)$.

.....

**18.16** e) La courbe isobare est de pente nulle donc la courbe ① est la courbe isobare. La courbe isotherme est de pente infinie donc la courbe ④ est la courbe isotherme. La courbe isochore est une courbe de pente constante (finie et non nulle) donc la courbe ③ est la courbe isochore. Par élimination, la courbe ② est la courbe isentrope.

.....

**18.17** h) La courbe isotherme est de pente nulle donc la courbe ④ est la courbe isotherme. La courbe isentrope est de pente infinie donc la courbe ① est la courbe isentrope.

Il reste deux courbes à identifier : la courbe isobare de pente $\dfrac{T_0}{c_p}$ et la courbe isochore de pente $\dfrac{T_0}{c_v}$. Le rapport de

la pente de la courbe isochore par celle de la courbe isobare est $\frac{T_0}{c_v} \times \left(\frac{T_0}{c_p}\right)^{-1} = \frac{c_p}{c_v} = \gamma > 1$ : au point $M_0$, la courbe isochore est plus pentue que la courbe isobare donc la courbe ② est la courbe isochore et la courbe ③ est la courbe isobare.

.....

**18.18** a) La transformation (D) étant isentropique, la loi de Laplace est valide : $PV^\gamma = \text{cste}$. De plus, le gaz est parfait donc l'injection de l'équation d'état $PV = nRT$ dans la loi de Laplace aboutit à $P^{1-\gamma}T^\gamma = \text{cste}$.

.....

**18.18** b) Lors de la transformation (A) isobare, la température augmente donc la réponse (a) est à rejeter. La transformation (C) étant isochore, la relation entre la pression et la température est une relation linéaire $P = \frac{nRT}{V}$, ce qui correspond à une portion de droite. Pour la transformation (D) isentropique, la pression et la température vérifient $P = \frac{\text{cste}}{T^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}}$, ce qui ne peut pas être une portion de droite puisque $\gamma > 1$ ; la (c) ne convient pas.

.....

**18.19** a) Le point I se trouve à l'intersection de la courbe isobare $250\,\text{mbar} = 2{,}5 \times 10^{-1}\,\text{bar}$ et de la courbe isotherme 100 °C. La courbe isobare de $2{,}5 \times 10^{-1}$ bar est la droite horizontale située à peu près à mi-chemin entre la deuxième et la troisième graduation en partant de la graduation associée à $10^{-1}$bar. La courbe isotherme de 100 °C correspond à la courbe en pointillés dont le label est $T = 100°C$. Par lecture graphique de l'abscisse du I , $h_\text{I} = 2\,680\,\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

.....

**18.19** b) Le point I se trouve à droite de la courbe de saturation (et bien en-dessous de l'isobare critique, une droite horizontale passant par le sommet de la courbe de saturation). Ainsi, le fluide est initialement une vapeur sèche.

.....

**18.19** c) Le point I passe par une courbe isentrope qui est ici représentée à l'aide de tirets. La valeur associée n'est pas indiquée, mais les deux courbes isentropes voisines indiquent $7\,\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $9\,\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$. L'incrément du réseau des courbes isentropes est de $1\,\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ donc $s_\text{I} = 8\,\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

.....

**18.19** d) Le point F est à l'intersection de la courbe isentrope $s_\text{F} = s_\text{I} = 8\,\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ avec la courbe isobare $p_\text{F} = 1\,\text{bar}$, c'est-à-dire la droite passant par l'ordonnée $10^0$bar. Par lecture graphique de l'abscisse du point F, on a $h_\text{F} = 2\,980\,\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ donc $w = 2980 - 2680 = 300\,\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

.....

**18.19** e) Le point F passe la courbe isotherme comprise entres les courbes isothermes de 200 °C et 300 °C. L'incrément étant de 50 °C, cette isotherme est associée à 250 °C donc $T_\text{F} = 250\,°\text{C}$.

.....

**18.19** f) L'entropie finale est désormais $s_{\text{F}'} = (1 + 6\%)s_\text{F} = (1 + 0,06) \times 8 = 8 + 0,48 \approx 8{,}5\,\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$. Or, il n'y a aucune courbe isentrope tracée pour cette valeur d'entropie massique. Il faut interpoler la position du point F′ dans le diagramme $\log(p) - h$. Pour cela, il suffit de tracer un segment horizontal le long de la courbe isobare de 1 bar qui relie les courbes isentropes de $8\,\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $9\,\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$. La position du point F′ est approximativement au milieu du segment tracé. Le point F′ passe par la courbe isotherme de 400 °C donc $T_{\text{F}'} = 400\,°\text{C}$.

.....

**18.19** g) L'élévation totale de température s'exprime comme $T_{\text{F}'} - T_\text{I}$ tandis que celle due à la compression (réversible) est $T_\text{F} - T_\text{I}$. L'élévation de température due aux irréversibilités est donc $T_{\text{F}'} - T_\text{F}$. Sa proportion relativement à l'élévation totale est donc $\frac{T_{\text{F}'} - T_\text{F}}{T_{\text{F}'} - T_\text{I}} \times 100$.

.....

# Fiche n° 19. Thermodynamique industrielle

## Réponses

**19.1** a) ..... a

**19.1** b) ..... d

**19.1** c) ..... c

**19.1** d) ..... a

**19.2** a) ..... c

**19.2** b) ..... d

**19.2** c) ..... a

**19.2** d) ..... a

**19.3** a) ..... c

**19.3** b) ..... $\frac{1}{M}\frac{\gamma R}{\gamma - 1}(T_2 - T_1)$

**19.3** c) ..... $c_2 = \sqrt{\frac{2}{M}\frac{\gamma R}{\gamma - 1}(T_1 - T_2)}$

**19.3** d) ..... $383\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

**19.4** a) ..... b

**19.4** b) ..... a

**19.5** a) ..... a

**19.5** b) ..... a

**19.5** c) ..... b

**19.5** d) ..... d

**19.5** e) ..... a

**19.5** f) ..... c

**19.5** g) ..... $-\frac{w_1 + w_3}{q_2}$

**19.5** h) ..... $1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$

**19.6** a) ..... $1 \to 2$

**19.6** b) ..... $50\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$

**19.6** c) ..... $2 \to 3$

**19.6** d) ..... $-200\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$

**19.6** e) ..... 4

**19.7** a) ..... $2{,}50\,\mathrm{kJ \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$

**19.7** b) ..... $50\,°\mathrm{C}$

**19.7** c) ..... $110\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$

**19.7** d) ..... $140\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$

**19.7** e) ..... 0,78

**19.7** f) ..... $100\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$

**19.8** a) ..... f

**19.8** b) ..... a

**19.8** c) ..... a

**19.8** d) ..... b

**19.8** e) ..... a

**19.8** f) ..... c

**19.8** g) ..... a

**19.8** h) ..... b

**19.9** a) ..... condenseur

**19.9** b) ..... évaporateur

**19.9** c) ..... condenseur

**19.10** a) ..... $D_{\mathrm{m1}} + D_{\mathrm{m2}} = D_{\mathrm{m}}$

**19.10** b) ..... $c_{\mathrm{p}}(T - T_1) = q_{2\to 1}$

**19.10** c) ..... $\boxed{c_\mathrm{p}(T - T_2) = q_{1\to 2}}$

**19.10** d) ..... $\boxed{D_\mathrm{m1}(T - T_1) + D_\mathrm{m2}(T - T_2) = 0}$

**19.10** e) ..... $\boxed{T = \dfrac{D_\mathrm{m1}T_1 + D_\mathrm{m2}T_2}{D_m}}$

**19.10** f) ..... $\boxed{38\,°\mathrm{C}}$

**19.11** a) ..... $\boxed{\text{a}}$

**19.11** b) ..... $\boxed{\text{d}}$

**19.11** c) ..... $\boxed{9 \times 10^6\,\mathrm{J}}$

**19.12** a) ..... $\boxed{\text{a}}$

**19.12** b) ..... $\boxed{\text{d}}$

**19.12** c) ..... $\boxed{\Delta h = v(p_2 - p_1)}$

**19.12** d) ..... $\boxed{v(p_2 - p_1)}$

**19.12** e) ..... $\boxed{1{,}99\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}}$

## Corrigés

**19.1** a) La transformation est adiabatique donc $q = 0$ et $s_\mathrm{e} = q/T = 0$ ; la transformation est réversible donc $s_\mathrm{c} = 0$. Finalement, $\Delta h = w_\mathrm{i}$ et $\Delta s = 0$.

**19.1** b) Il n'y a pas de pièce mobile donc $w_\mathrm{i} = 0$ et donc $\Delta h = q$ ; on a $\Delta s = s_\mathrm{e} + s_\mathrm{c}$.

**19.1** c) La transformation est adiabatique donc $q = 0$ et $s_\mathrm{e} = q/T = 0$ ; il n'y a pas de pièce mobile donc $w_\mathrm{i} = 0$ et ainsi $\Delta h = 0$. On a $\Delta s = s_\mathrm{c}$.

**19.1** d) La transformation est adiabatique donc $q = 0$ et $s_\mathrm{e} = q/T = 0$ ; la transformation est réversible donc $s_\mathrm{c} = 0$ et ainsi $\Delta h = w_\mathrm{i}$ ; $\Delta s = 0$.

**19.2** a) On a $\Delta h = c_\mathrm{p}\Delta T \approx 1\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}} \times 10\,\mathrm{K} = 10\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$.

**19.2** b) On a $e_\mathrm{c} = \dfrac{1}{2}v^2 \approx 0,5 \times \left(10\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}\right)^2 = 50\,\mathrm{J \cdot kg^{-1}}$.

**19.2** c) On a $\Delta e_\mathrm{p} = g\Delta z \approx 10\,\mathrm{m \cdot s^{-2}} \times 1\,\mathrm{m} = 10\,\mathrm{J \cdot kg^{-1}}$.

**19.3** a) On a $\Delta h + \Delta e_\mathrm{p} + \Delta e_\mathrm{c} = q_\mathrm{e} + w_\mathrm{i}$. Ici, $\Delta e_\mathrm{p} = 0$, $q_\mathrm{e} = 0$ (adiabatique car isolée thermiquement) et $w_\mathrm{i} = 0$ (tuyère indéformable). On en déduit : $\Delta h + \Delta e_\mathrm{c} = 0$ (donc $h + e_\mathrm{c} = \mathrm{cte}$).

**19.3** b) La deuxième loi de Joule s'écrit : $\Delta h = c_\mathrm{p}(T_2 - T_1) = \dfrac{1}{M}\dfrac{\gamma R}{\gamma - 1}(T_2 - T_1)$.

**19.3** c) Comme $c_1$ est négligable, on en déduit des questions précédentes :

$$\frac{1}{2}c_2^2 = -\Delta h = -\frac{1}{M}\frac{\gamma R}{\gamma - 1}(T_2 - T_1) \qquad \text{et} \qquad c_2 = \sqrt{\frac{2}{M}\frac{\gamma R}{\gamma - 1}(T_1 - T_2)}.$$

**19.3** d) La vitesse d'éjection est alors $c_2 = 383\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

**19.4** a) La première phase étant isentropique, les températures sont liées par la loi de Laplace

$$T_1^\gamma p_1^{1-\gamma} = \text{cte} = T_2^\gamma p_2^{1-\gamma} \quad \text{donc} \quad T_2^\gamma = T_1^\gamma \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1-\gamma},$$

ce qui conduit au résultat en prenant la puissance $1/\gamma$ de l'ensemble.

.....

**19.5** a) Parcouru dans le sens horaire, le cycle est moteur.

.....

**19.5** b) Les travaux $w_2$ et $w_4$ sont nuls. Les travaux reçus pendant le cycle sont $w_1$ et $w_3$.

.....

**19.5** c) La deuxième phase est isobare, d'où : $q_2 = \Delta h = c_\mathrm{p}(T_3 - T_2)$.

.....

**19.5** d) La quatrième phase est isobare, d'où : $q_4 = \Delta h = c_\mathrm{p}(T_1 - T_4)$.

.....

**19.5** e) Le transfert thermique est nul pour cette transformation (isentropique). Le premier principe pour les systèmes en écoulement permanent s'écrit donc ici : $\Delta h = w_1$. d'où : $w_1 = h_2 - h_1 = c_\mathrm{p}(T_2 - T_1) > 0$.

.....

**19.5** f) De même, on a $w_3 = h_4 - h_3 = c_\mathrm{p}(T_4 - T_3) < 0$.

.....

**19.5** g) Les échanges énergétiques étant algébriques, le rendement du cycle est défini par $\rho = -\dfrac{w_\mathrm{i}}{q_\mathrm{c}} = -\dfrac{w_1 + w_3}{q_2}$.

.....

**19.5** h) Le rendement du turbopropulseur est alors : $\rho = -\dfrac{c_\mathrm{p}(T2 - T_1 + T_4 - T_3)}{c_\mathrm{p}(T_3 - T_2)} = 1 - \dfrac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$.

.....

**19.6** a) Le compresseur a pour effet d'augmenter la pression et la température du fluide : ici, il s'agit donc de l'étape $1 \to 2$.

.....

**19.6** b) D'après le premier principe industriel, on a $w_\mathrm{compr} = h_2 - h_1 = 450 - 400 = 50\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$.

.....

**19.6** c) Le domaine de la vapeur est à droite du diagramme, celui du liquide à gauche, la liquéfaction correspond donc à l'étape $2 \to 3$.

.....

**19.6** d) D'après le premier principe industriel, $q_\mathrm{cond} = h_3 - h_2 = 250 - 450 = -200\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$.

.....

**19.7** a) La compression étant réversible, et en l'absence d'échange thermique, la compression est isentropique donc $s_\mathrm{S,rév} = s_\mathrm{E} = 2{,}50\,\mathrm{kJ \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$.

.....

**19.7** b) L'état de sortie « S,rév » du compresseur se trouve à l'intersection entre l'isentrope passant par E et l'isobare à $P_S = 10\,\text{bar}$, comme schématisé ci-dessous.

.....

**19.7** c) D'après le premier principe industriel, on a $w_{\text{rév}} = h_{\text{S,rév}} - h_{\text{E}} = 650 - 540 = 110\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$.

.....

**19.7** d) La donnée de la température permet de placer le point S sur le diagramme. D'après le premier principe industriel, on a $w = h_{\text{S}} - h_{\text{E}} = 680 - 540 = 140\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$.

.....

**19.7** f) La compression est adiabatique, il n'y a donc pas d'entropie échangée. Toute la variation d'entropie correspond à une création, d'où $s_{\text{créée}} = s_{\text{S}} - s_{\text{E}} = 2{,}60 - 2{,}50 = 0{,}1\,\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$.

.....

**19.8** a) La machine produit du travail ($W < 0$) grâce à un fluide chauffé ($Q_{\text{c}} > 0$) puis refroidi ($Q_{\text{f}} < 0$) : ainsi, on a $W < 0$ ; $Q_{\text{f}} < 0$ ; $Q_{\text{c}} > 0$.

.....

**19.8** c) La machine reçoit du travail ($W > 0$) pour que le fluide refroidisse un compartiment plus froid (source froide $Q_{\text{f}} > 0$) que l'air ambiant, tout en réchauffant ce dernier ($Q_{\text{c}} < 0$) : on a $W > 0$ ; $Q_{\text{f}} > 0$ ; $Q_{\text{c}} < 0$.

.....

**19.8** e) La machine reçoit du travail ($W > 0$) pour que le fluide refroidisse un compartiment plus froid (source froide $Q_{\text{f}} > 0$) que l'air ambiant, tout en réchauffant ce dernier ($Q_{\text{c}} < 0$) : on a $W > 0$ ; $Q_{\text{f}} > 0$ ; $Q_{\text{c}} < 0$.

.....

**19.8** g) La machine reçoit du travail ($W > 0$) pour que le fluide refroidisse un compartiment plus froid (source froide $Q_{\text{f}} > 0$) que l'air ambiant, tout en réchauffant ce dernier ($Q_{\text{c}} < 0$) : on a $W > 0$ ; $Q_{\text{f}} > 0$ ; $Q_{\text{c}} < 0$.

.....

**19.9** a) Le fluide d'une centrale est chauffé dans la chaudière (source chaude), passe par la turbine pour produire un travail puis est refroidi dans le condenseur (source froide).

.....

**19.9** b) Le fluide d'un réfrigérateur refroidit la source froide en se réchauffant grâce à l'évaporateur, puis le fluide est refroidi dans le condenseur en contact avec l'air extérieur (source chaude).

.....

**19.9** c) Le fluide d'une pompe à chaleur réchauffe la source chaude en se refroidissant grâce au condenseur, puis le fluide est réchauffé dans l'évaporateur en contact avec l'air extérieur (source froide).

.....

**19.10** a) Loi des nœuds sur les fluides donne $D_{\mathrm{m1}} + D_{\mathrm{m2}} = D_{\mathrm{m}}$.

.....

**19.10** b) On a $\Delta h_1 = q_{2\to1}$ donc $c_{\mathrm{p}}(T - T_1) = q_{2\to1}$.

.....

**19.10** c) On a $\Delta h_2 = q_{1\to2}$ donc $c_{\mathrm{p}}(T - T_2) = q_{1\to2}$.

.....

**19.10** e) On a $D_{\mathrm{m}}T = D_{\mathrm{m1}}T_1 - D_{\mathrm{m2}}T_2$ donc $T = \dfrac{D_{\mathrm{m1}}T_1 + D_{\mathrm{m2}}T_2}{D_{\mathrm{m}}}$.

.....

**19.10** f) On a $T = \dfrac{3{,}0\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1} \times 353\,\mathrm{K} + 7{,}0\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1} \times 293\,\mathrm{K}}{3{,}0\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1} + 7{,}0\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1}} = 311\,\mathrm{K} = 38\,°\mathrm{C}$.

.....

**19.11** a) La turbine est isolée thermiquement et horizontale, donc $q_{\mathrm{e}} = 0$ et $\Delta e_{\mathrm{p}} = 0$. Les températures sont identiques en entrée et sortie, donc d'après la loi de Joule $\Delta h = 0$. Le premier principe s'écrit donc $\Delta e_{\mathrm{c}} = w_{\mathrm{i}}$.

.....

**19.11** b) Comme $\Delta T = 0$, cela signifie que $\Delta H = 0$ (deuxième loi de Joule) et que : $W_{\mathrm{f}} = -W_{\mathrm{i}} = -\Delta E_{\mathrm{c}} = \dfrac{1}{2}mc_1^2$.

.....

**19.11** c) La masse traversant la turbine pendant 1 heure est de 1 800 kg, d'où

$$W_{\mathrm{f}} = \frac{1}{2} \times 1\,800\,\mathrm{kg} \times (100\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})^2 = 9 \times 10^6\,\mathrm{J}\,.$$

.....

**19.12** a) Le transfert thermique $q_{\mathrm{e}}$ est nul, et on peut supposer $e_{\mathrm{c}} = \mathrm{cte}$ et $e_{\mathrm{p}} = \mathrm{cte}$ (vitesse négligeables et variation d'altitude faible).

.....

**19.12** c) La deuxième identité thermodynamique s'écrit :

$$\mathrm{d}h = T\,\mathrm{d}s + v\,\mathrm{d}p$$

avec ici $\mathrm{d}s = 0$ car l'écoulement est isentropique. On a donc $\Delta h = v(p_2 - p_1)$.

.....

**19.12** d) Finalement, on a $w_{\mathrm{i}} = v(p_2 - p_1)$.

.....

**19.12** e) Numériquement, on a $w_{\mathrm{i}} = 1{,}99\,\mathrm{kJ}\cdot\mathrm{kg}^{-1}$.

.....

# Fiche n° 20. Signaux

## Réponses

**20.1** a) ..... $0$

**20.1** b) ..... $\frac{1}{2}$

**20.1** c) ..... $0$

**20.2** a) ..... c

**20.2** b) ..... d

**20.3** a) ..... instable

**20.3** b) ..... stable

**20.3** ..... instable

**20.3** ..... stable

**20.3** ..... instable

**20.4** a) ..... c

**20.4** b) ..... a

**20.4** c) ..... a

**20.5** a) ..... a

**20.5** b) ..... c

**20.5** c) ..... c

**20.6** a) ..... 0,75 A

**20.6** b) ..... 4 V

**20.6** c) ..... 333 Hz

**20.6** d) ..... a

**20.6** e) ..... b

**20.6** f) ..... a

**20.6** g) ..... 2,56 mH

**20.7** a) ..... b

**20.7** b) ..... a

**20.7** c) ..... b

**20.7** d) ..... 1,6 $\mu$F

**20.8** a) ..... b

**20.8** b) ..... c

**20.9** a) ..... b

**20.9** b) ..... a

**20.9** c) ..... c

**20.9** d) ..... 50 $\Omega$

**20.9** e) ..... 7 mH

**20.10** a) ..... $4x^0$

**20.10** b) ..... $4x^{-2}$

**20.10** c) ..... $1x^0$

**20.10** d) ..... $\frac{2}{3}x^0$

**20.10** e) ..... $\frac{2}{5}x^1$

**20.10** f) ..... $\frac{3}{5}x^0$

**20.11** a) ..... 1 ms

**20.11** b) ..... 2 V

**20.11** c) ..... 1 kHz

**20.11** d) ..... b

**20.11** e) ..... $0$

**20.11** f) ..... a et d

**20.11** g) ..... a

**20.12** a) ..... 20 ms

**20.12** b) ..... 0,1 V

**20.12** c) ..... 0,1 V

**20.12** d) ..... 50 Hz

**20.12** e) ..... 0,1 V

**20.12** f) ..... b et c

**20.12** g) ..... a

**20.13** a) ..... 1 Hz

**20.13** b) ..... 16,7 Hz

**20.13** c) ..... 12,5 Hz

**20.13** d) ..... 9,61 Hz

**20.13** e) ..... a

**20.13** f) .. Repliement de spectre

**20.13** g) ..... d

**20.14** a) ..... a

**20.14** b) .. $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0 s = H_0 \omega_0 e$

**20.14** c) ..... b

**20.15** a) ..... B

**20.15** b) ..... A

**20.15** c) ..... C

**20.15** d) ..... E

**20.15** e) ..... D

**20.16** a) ..... 0,1 ms

**20.16** b) ..... 0,005 ms

**20.16** c) ..... 10 V

**20.16** d) ..... 0,6

**20.16** e) ..... 200 kHz

**20.16** f) ..... 10 kHz

## Corrigés

**20.1** a) On a $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \cos(\omega t)\,\mathrm{d}t = \left[\dfrac{\sin(\omega t)}{\omega}\right]_0^T = 0$ car la fonction $t \mapsto \sin(\omega t)$ est $T$-périodique.

.....

**20.1** b) Il faut commencer par linéariser le $\cos^2$ :

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1+\cos(2\omega t)}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

comme la fonction $\cos(2\omega t)$ est périodique de période $\dfrac{T}{2}$.

.....

**20.1** c) Il faut faire une intégration par parties. On a

$$\frac{1}{T}\int_0^T t\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\left[\frac{t}{\omega}\sin(\omega t)\right]_0^T - \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

.....

**20.2** On commence par remarquer que les deux graphiques tendent vers une valeur non nulle : cela élimine la proposition (b) et les propositions (a) et (f) qui ne sont pas stables.

La proposition (e) est l'équation d'un oscillateur harmonique : elle ne correspond pas aux graphiques.

Le signal $s_1(t)$ présente une discontinuité de sa pente : il est donc régi par une équation différentielle du premier ordre : c'est la proposition (c).

On en déduit que le signal $s_2(t)$ est associé à la proposition (d).

.....

**20.3** Pour une équation différentielle linéaire à coefficients constants une condition nécessaire de stabilité, et suffisante pour les systèmes du premier et second ordre, est que tous les coefficients de l'équation différentielle soient de même signe.

.....

**20.4** En régime permanent, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil : on a $u_C\left(0^-\right) = E$, $i\left(0^-\right) = i_C\left(0^-\right) = 0$.

La bobine impose la continuité de l'intensité électrique qui la traverse et le condensateur la tension à ses bornes : on a $u_C\left(0^+\right) = E, i\left(0^-\right) = 0$. Comme $u_R = u_C$, on a donc : $i_R\left(0^+\right) = \dfrac{E}{R}$ soit d'après la loi des nœuds

$$i_C\left(0^+\right) = -i_R\left(0^+\right) = -\frac{E}{R}.$$

En régime permanent, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil : ainsi, on a $u_C(+\infty) = \dfrac{R}{R+r}E$, $i\left(0^-\right) = i_R\left(0^-\right) = \dfrac{E}{R+r}$ et $i_C\left(0^-\right) = 0$.

.....

**20.5** L'interrupteur étant ouvert et le régime permanent étant atteint : $i_2\left(0^-\right) = 0$ et $i_1\left(0^-\right) = i\left(0^-\right) = \dfrac{E_1}{2R}$.

La bobine impose la continuité du courant qui la traverse : $i\left(0^+\right) = i\left(0^-\right) = \dfrac{E_1}{2R}$. Pour déterminer $i_1$ et $i_2$ il nous faut deux équations : on utilise la loi des mailles dans la grande maille et la loi des nœuds :

$$\begin{cases} i_1\left(0^+\right) + i_2\left(0^+\right) = \dfrac{E_1}{2R} \\ E_1 - Ri_1\left(0^+\right) = E_2 - Ri_2\left(0^+\right) \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} i_1\left(0^+\right) + i_2\left(0^+\right) = \dfrac{E_1}{2R} \\ i_1\left(0^+\right) - i_2\left(0^+\right) = \dfrac{E_1 - E_2}{R} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} i_1\left(0^+\right) = \dfrac{3E_1 - 2E_2}{4R} \\ i_2\left(0^+\right) = \dfrac{2E_2 - E_1}{4R}. \end{cases}$$

En régime permanent, la bobine se comporte comme un fil. On a donc directement $i_1(+\infty) = \dfrac{E_1}{R}$, $i_2(+\infty) = \dfrac{E_2}{R}$ donc $i(+\infty) = \dfrac{E_1 + E_2}{R}$. On a donc le système :

$$\begin{cases} i_1(+\infty) + i_2(+\infty) & = i(+\infty) \\ E_1 - Ri_1(+\infty) & = Ri(+\infty) \\ E_2 - Ri_2(+\infty) & = Ri(+\infty). \end{cases}$$

En sommant les deux dernières lignes, on a directement $i(+\infty) = \dfrac{E_1 + E_2}{3R}$. On a alors le système :

$$\begin{cases} i_1(+\infty) + i_2(+\infty) & = \dfrac{E_1 + E_2}{3R} \\ i_1(+\infty) - i_2(+\infty) & = \dfrac{E_1 - E_2}{R}. \end{cases}$$

On a alors $i_1(+\infty) = \dfrac{2E_1 - E_2}{3R}$ et $i_2(+\infty) = \dfrac{2E_2 - E_1}{3R}$.

.....

**20.6** g) Le module de $\underline{Z}$ est tel que $|\underline{Z}| = \left|\dfrac{\underline{U}}{\underline{I}}\right| = \dfrac{4\,\mathrm{V}}{0{,}75\,\mathrm{A}} = \dfrac{16}{3}\,\Omega$. Or, on a $|\underline{Z}| = L\omega$ ; donc

$$L = \frac{|\underline{Z}|}{\omega} = \frac{16/3\,\Omega}{2\pi\dfrac{1\,000}{3}} = \frac{8 \times 10^{-3}}{\pi} = 2{,}56 \times 10^{-3}\,\mathrm{H} = 2{,}56\,\mathrm{mH}.$$

.....

**20.7** d) Graphiquement, on trouve $T = 1\,\mathrm{ms}$. Le module de l'impédance est $|\underline{Z}| = \left|\dfrac{\underline{U}}{\underline{I}}\right| = \dfrac{2\,\mathrm{V}}{0{,}02\,\mathrm{A}} = 100\,\Omega$. Donc,

$$C = \frac{1}{|\underline{Z}|\omega} = \frac{T}{2\pi|\underline{Z}|} \simeq 0{,}16\frac{10^{-3}\mathrm{s}}{100\,\Omega} = 1{,}6\,\mu\mathrm{F}.$$

.....

**20.8** On a une association de dipôles en série : $\underline{Z} = R + \mathrm{j}L\omega$. Comme $|\underline{Z}|$ est le rapport des amplitudes de la tension et de l'intensité électrique, on a $|\underline{Z}|^2 = R^2 + (L\omega)^2 = \left(\dfrac{U_0}{I_0}\right)^2$.

L'argument de l'impédance vaut $\varphi = \arctan\left(\dfrac{L\omega}{R}\right)$.

.....

**20.9** L'analyse graphique donne :

$$U_0 = 8\,\mathrm{V}, \quad I_0 = 100\,\mathrm{mA}, \quad T = 0{,}7\,\mathrm{ms} \quad \text{et} \quad \delta t_{u/i} = -100\,\mu\mathrm{s}.$$

La pulsation est donc $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{7} \cdot 10^4 = 8{,}97 \times 10^3\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$. Le déphasage de la tension par rapport à l'intensité électrique :

$$\varphi = -2\pi\frac{\delta t}{T} = 2\pi\frac{1/10}{0{,}7} = \frac{2\pi}{7} = \frac{2}{7}\pi$$

À partir des relevés graphiques, on a le système :

$$\begin{cases} R^2 + (L\omega)^2 & = (80)^2 \\ \dfrac{L\omega}{R} & = \tan\left(\dfrac{2}{7}\pi\right). \end{cases}$$

On a donc $R^2\left[1 + \tan^2\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)\right] = \left(\dfrac{U_0}{I_0}\right)^2 = \left(\dfrac{8}{0{,}1}\right)^2$ donc $R = \dfrac{U_0/I_0}{\sqrt{1 + \tan^2\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)}} = \dfrac{U_0}{I_0}\cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right) = 50\,\Omega$.

On en déduit $L = 7\,\mathrm{mH}$.

.....

**20.11** c) La période étant de $T = 1\,\text{ms}$, la fréquence du fondamental est $f = \dfrac{1}{T} = 1\,\text{kHz}$.

.....

**20.11** d) La fonction $u(t)$ est décroissante sur l'intervalle $[0, T/2]$ : cela élimine les propositions (a) et (d).

En $T/2$, on a $u(T/2) = -U$ : c'est donc la réponse (b).

.....

**20.11** e) La valeurs $a_0$ correspond à la valeur moyenne : elle est donc nulle ici.

.....

**20.11** f) Par intégration par parties, on trouve :

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} U\left(1-\frac{4t}{T}\right)\cos(2\pi f n t)\,\mathrm{d}t = \frac{4U}{T}\left(\left[\left(1-\frac{4t}{T}\right)\frac{\sin(2\pi f n t)}{2\pi f n}\right]_0^{T/2} + \frac{4}{T}\int_0^{T/2}\frac{\sin(2\pi f n t)}{2\pi f n}\,\mathrm{d}t\right)$$
$$= \frac{4U}{T}\left(0 + \frac{4}{T}\left[-\frac{\cos(2\pi f n t)}{(2\pi f n)^2}\right]_0^{T/2}\right) = \frac{16U}{4\pi^2 T^2 f^2 n^2}\times(-\cos(\pi n)+1) = \frac{4U}{\pi^2 n^2}(1-\cos(\pi n))$$

On a donc $a_n = 0$ si $n$ est pair et $a_n = \dfrac{8U}{\pi^2 n^2}$.

.....

**20.12** d) La fréquence fondamentale est $\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{20\,\text{ms}} = 50\,\text{Hz}$.

.....

**20.12** e) Par définition, on a $\underline{c_0} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T s(t)\,\mathrm{d}t = s_0 = 0{,}1\,\text{V}$.

.....

**20.12** f) Pour ce signal carré particulier, numériquement, $s_0 = S_\text{m}$. Ainsi, $s(t \in [0, T/2]) = s_0 + S_\text{m} = 2S_\text{m}$ et $s(t \in [T/2, T]) = 0$. Il vient alors :

$$\underline{c_n} = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} 2S_\text{m}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\,2\pi\nu\,t}\,\mathrm{d}t = \frac{2S_\text{m}}{-\mathrm{i}n\,2\pi\nu}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\,2\pi\nu\,t}\right]_0^{T/2}$$
$$= \frac{2S_\text{m}}{-\mathrm{i}n\,2\pi\nu}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\pi\overbrace{\nu T}^{=1}} - 1\right] = \frac{2S_\text{m}}{-\mathrm{i}n\,2\pi\nu}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ \dfrac{2S_\text{m}}{\mathrm{i}n\pi\nu} & \text{si } n \text{ impair.}\end{cases}$$

.....

**20.12** g) Les harmoniques de rang pair doivent êtres nulles, ce qui exclut le cas (b).

De plus, numériquement, on a $s_0 = S_\text{m}$ et $2/\pi \approx 0,64 < 1$, d'où $s_0 > 2s_0/\pi = 2S_\text{m}/\pi$ : cette relation n'est pas vérifié dans le cas du spectre (c).

.....

**20.13** b) La période $T_e$ d'échantillonnage est la durée entre deux points d'acquisition successifs. La fréquence d'échantillonnage $f_e$ vaut donc :

$$f_e = \frac{1}{T_e} = \frac{N}{T_\text{max}} = \frac{500}{30} = 16{,}7\,\text{Hz}.$$

.....

**20.13** e) Le spectre (a) car les autres font apparaître des pics « fantômes » car la $\dfrac{f_e}{2}$ est inférieure à la fréquence des harmoniques.

.....

**20.13** g) C'est le critère de Shannon-Nyquist.

.....

**20.14** a) On a $\underline{H} \underset{\omega\to 0}{\longrightarrow} H_0$ et $\underline{H} \underset{\omega\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\omega_0 H_0}{\mathrm{j}\omega} \underset{\omega\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ le filtre est donc un passe-bas. Le dénominateur étant d'ordre 1, c'est un passe-bas d'ordre 1.

.....

**20.14** b) On a

$$\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{H_0}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}} \quad \text{donc} \quad \left(1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}\right)\underline{s} = H_0\underline{e}.$$

Multiplier par $\mathrm{j}\omega$ est équivalent à dériver en réel ; on trouve donc l'équation différentielle $s + \dfrac{1}{\omega_0}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = H_0 e$.

.....

**20.15** a) Le pré-amplificateur ne change que l'amplitude du signal pas son spectre : le spectre B correspond à $u_2(t)$.

.....

**20.15** b) Le filtre passe-bande à une bande passante assez étroit pour ne garder que $f_p - f_m$, $f_p$ et $f_p + f_m$ : le spectre A correspond donc à $u_3(t)$.

.....

**20.15** d) Le multiplieur donne en sortie :

- pour une fréquence en entrée de $f_p$ :

$$k(A\cos(2\pi f_p t)) \times U_p\cos(2\pi f_p t) = kAU_p\cos^2(2\pi f_p t) = kAU_p\frac{1+\cos(2\pi[2f_p]t)}{2}.$$

- pour une fréquence en entrée de $f_p \pm f_m$ :

$$\begin{aligned} k(A\cos(2\pi[f_p \pm f_m]t)) \times U_p\cos(2\pi f_p t) &= kAU_p\cos(2\pi[f_p \pm f_m]t)\cos(2\pi f_p t) \\ &= kAU_p\frac{\cos(2\pi[f_m]t)+\cos(2\pi[2f_p+f_m]t)}{2}. \end{aligned}$$

Le signal $u_4(t)$ correspond au spectre E.

.....

**20.16** ) La tension $u_+(t)$ oscille entre 4 V et 16 V. En identifiant les valeurs extrêmes à partir de son expression, on a le système :

$$\begin{cases} U_p(1+m) = 16\,\mathrm{V} \\ U_p(1-m) = 4\,\mathrm{V} \end{cases} \qquad \text{donc} \qquad \begin{cases} U_p = 10\,\mathrm{V} \\ m = 0{,}6. \end{cases}$$

.....

# Fiche n° 21. ALI

## Réponses

**21.1** a) ..... (a)

**21.1** b) ..... (b)

**21.1** c) ..... (a)

**21.1** d) ..... (c)

**21.2** a) ..... $i_1 = i_2 + i_1'$

**21.2** b) ..... $\dfrac{u_1}{R_1} = \dfrac{u_2}{R_2} + C_1 \dfrac{\mathrm{d}u_1'}{\mathrm{d}t}$

**21.2** c) ..... $i_1 = -i_2'$

**21.2** d) ..... $\dfrac{V_\mathrm{D} - V_\mathrm{A}}{R_1} = i_2' = C_2 \dfrac{\mathrm{d}V_\mathrm{A}}{\mathrm{d}t}$

**21.3** a) ..... (b)

**21.3** b) ..... $i_2 + i_4 = 0$

**21.3** c) ..... (b)

**21.3** d) ..... $i_5 + i_6 = 0$

**21.3** e) ..... (c)

**21.4** a) ..... $\dfrac{u_1}{R_1} = \dfrac{u_\mathrm{s}}{R_1 + R_2}$

**21.4** b) ..... $i_1 = i_2 + i_3$

**21.4** c) ..... $i_2 = \dfrac{u_\mathrm{e}}{R}$

**21.4** d) ..... $i_3 = C \dfrac{\mathrm{d}u_\mathrm{e}}{\mathrm{d}t}$

**21.4** e) .... $u_\mathrm{s} = u_R + u_C + u_\mathrm{e} = R i_1 + u_C + u_\mathrm{e}$

**21.4** f) ..... $\dfrac{\mathrm{d}u_\mathrm{s}}{\mathrm{d}t} = R \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \dfrac{i_1}{C} + \dfrac{\mathrm{d}u_\mathrm{e}}{\mathrm{d}t}$

**21.4** g) ..... $\dfrac{\mathrm{d}u_\mathrm{s}}{\mathrm{d}t} = RC \dfrac{\mathrm{d}^2 u_\mathrm{e}}{\mathrm{d}t^2} + 3 \dfrac{\mathrm{d}u_\mathrm{e}}{\mathrm{d}t} \dfrac{1}{RC} u_\mathrm{e}$

**21.5** a) ..... $i_1 + i_2 = i_3$

**21.5** b) ..... $\dfrac{u_1}{R_1} + \dfrac{u_2}{R_2} = -\dfrac{u_\mathrm{s}}{R_3}$

**21.6** a) ..... $i_1 = i_3$

**21.6** b) ..... $i_2 = i_4$

**21.6** c) ..... $V_+ = \dfrac{R_4}{R_2 + R_4} u_2$

**21.6** d) ..... $V_- = \dfrac{R_3}{R_1 + R_3} u_1 + \dfrac{R_1}{R_1 + R_3} u_\mathrm{s}$

**21.7** a) ..... $i_\mathrm{e} + i_C + i_2 = 0$

**21.7** b) ..... $i_C + i_1 = 0$

**21.7** c) ..... $-i_\mathrm{e} + \dfrac{v_\mathrm{e} - V_\mathrm{B}}{R_2} + \mathrm{j}\omega C_1 (v_\mathrm{e} - V_\mathrm{C}) = 0$

**21.7** d) ..... (b) et (d)

**21.7** e) ..... (c)

**21.8** a) ..... $0$

**21.8** b) ..... $\dfrac{\underline{u_\mathrm{e}}}{R} + \mathrm{j}C\omega \underline{u_\mathrm{s}} = 0$

**21.8** c) ..... $-\dfrac{1}{\mathrm{j}RC\omega}$

**21.8** d) ..... $u_\mathrm{e}(t) + RC \dfrac{\mathrm{d}u_\mathrm{s}}{\mathrm{d}t}(t) = 0$

**21.8** e) ..... (b)

**21.8** f) ..... $R$

**21.9** a) ..... $0$

**21.9** b) ..... $\mathrm{j}C\omega \underline{u_\mathrm{e}} + \dfrac{\underline{u_\mathrm{s}}}{\mathrm{j}L\omega} = 0$

**21.9** c) ..... $LC\omega^2$

**21.9** d) ..... $u_\mathrm{s}(t) = -LC \dfrac{\mathrm{d}^2 u_\mathrm{e}}{\mathrm{d}t^2}$

**21.9** e) ..... (c)

**21.9** f) ..... $\boxed{\dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}}$

**21.10** a) ..... $\boxed{\text{b}}$

**21.10** b) ..... $\boxed{\text{a}}$

**21.11** a) ..... $\boxed{v_\mathrm{s} = v_\mathrm{e}}$

**21.11** b) ..... $\boxed{v_\mathrm{s} = -v_\mathrm{e}}$

**21.12** a) ..... $\boxed{1}$

**21.12** b) ..... $\boxed{-1}$

**21.12** c) ..... $\boxed{1}$

**21.12** d) ..... $\boxed{-2\arctan(RC\omega)}$

**21.12** e) ..... $\boxed{E\sin(\omega t)}$

**21.13** a) ..... $\boxed{R_2}$

**21.13** b) ..... $\boxed{R_1}$

**21.13** c) ..... $\boxed{\omega_1 = \dfrac{1}{R_1C_1} \text{ et } \omega_2 = \dfrac{1}{R_2C_1}}$

**21.13** d) ..... $\boxed{\text{a}}$

## Corrigés

**21.1** a) La rétroaction est négative donc l'ALI fonctionne en régime linéaire.

.....

**21.1** b) La rétroaction est positive donc l'ALI fonctionne en régime saturé.

.....

**21.1** c) La rétroaction est négative donc l'ALI fonctionne en régime linéaire.

.....

**21.1** d) Il y a une double rétroaction donc on ne peut pas prédire le régime de fonctionnement de l'ALI.

.....

**21.2** a) La loi des nœuds en D s'écrit bien sûr $i_1 = i_2 + i_1'$.

.....

**21.2** b) La loi des nœuds en D s'écrit alors $\dfrac{u_1}{R_1} = \dfrac{u_2}{R_2} + C_1\dfrac{\mathrm{d}u_1'}{\mathrm{d}t}$.

.....

**21.2** c) L'intensité $i_+$ est nulle et $i_1 = -i_2'$.

.....

**21.2** d) On a ainsi : $\dfrac{V_\mathrm{D} - V_\mathrm{A}}{R_1} = i_2' = C_2\dfrac{\mathrm{d}V_\mathrm{A}}{\mathrm{d}t}$.

.....

**21.3** b) Dans le modèle de l'ALI idéal, les courants de polarisation sont nuls. Ainsi, $i_1 = i_3 = 0$.

.....

**21.3** d) Dans le modèle de l'ALI idéal, les courants de polarisation sont nuls. Ainsi, $i_7 = 0$.

.....

**21.3** e) La loi d'Ohm donne $\dfrac{V_\mathrm{C} - V_\mathrm{B}}{R} + \dfrac{V_\mathrm{C} - V_\mathrm{S}}{R} = 0$.

.....

**21.4** a) L'intensité est nulle à l'entrée non inverseuse et l'intensité du courant est donc identique dans $R_1$ et $R_2$. On reconnaît donc un pont diviseur de tension. La relation demandée est donc : $\dfrac{u_1}{R_1} = \dfrac{u_\mathrm{s}}{R_1 + R_2}$.

.....

**21.4** b) On a $i_1 = i_2 + i_3$.

.....

**21.4** c) Cette fois, on a $i_2 = \dfrac{u_e}{R}$.

**21.4** d) Ici, on a $i_3 = C\dfrac{du_e}{dt}$.

**21.4** g) La relation précédente fournit : $\dfrac{du_s}{dt} = R\dfrac{di_2 + i_3}{dt} + \dfrac{i_2 + i_3}{C} + \dfrac{du_e}{dt}$, dont on déduit :

$$\frac{du_s}{dt} = \frac{du_e}{dt} + RC\frac{d^2u_e}{dt^2} + \frac{1}{RC}u_e + \frac{du_e}{dt} + \frac{du_e}{dt}.$$

Finalement, on obtient : $\dfrac{du_s}{dt} = RC\dfrac{d^2u_e}{dt^2} + 3\dfrac{du_e}{dt} + \dfrac{1}{RC}u_e$.

**21.5** a) Le courant à l'entrée inverseuse étant nulle, la loi des nœuds en D s'écrit $i_1 + i_2 = i_3$.

**21.5** b) L'ALI étant idéal, le potentiel de l'entrée inverseuse est égal à celui de l'entrée non inverseuse, donc nul. Ainsi, la relation précédente s'écrit : $\dfrac{u_1}{R_1} + \dfrac{u_2}{R_2} = -\dfrac{u_s}{R_3}$.

**21.6** a) L'intensité entrant à la borne inverseuse étant nulle, on a $i_1 = i_3$.

**21.6** b) L'intensité entrant à la borne non-inverseuse étant nulle, on a $i_2 = i_4$.

**21.6** c) Le pont diviseur du bas permet d'écrire : $i_2 = \dfrac{u_2}{R_2 + R_4} = \dfrac{V_+ - 0}{R_4}$, soit $V_+ = \dfrac{R_4}{R_2 + R_4}u_2$.

**21.6** d) Le pont diviseur du haut permet d'écrire : $i_1 = \dfrac{u_1 - V_-}{R_1} = \dfrac{V_- - u_s}{R_3}$, soit $V_- = \dfrac{R_3}{R_1 + R_3}u_1 + \dfrac{R_1}{R_1 + R_3}u_s$.

**21.7** a) Les courants de polarisation sont nuls dans l'hypothèse de l'ALI idéal. Ainsi, $i_e + i_C + i_2 = 0$.

**21.7** b) Les courants de polarisation sont nuls dans l'hypothèse de l'ALI idéal. Ainsi, $i_C + i_1 = 0$.

**21.7** c) On a $-i_e + \dfrac{v_e - V_B}{R_2} + j\omega C_1(v_e - V_C) = 0$.

**21.7** d) La tension $v_s$ n'est pas connue ce qui élimine la (c) et comme on peut le voir en question suivante, la loi des nœuds en B ((a)) n'est pas utile.

**21.7** e) Le courant $i_3$ est inconnu.

**21.8** a) On sait que pour un ALI idéal en régime linéaire $V_- = V_+$.

Or $V_+ = 0$ car la borne positive est reliée directement à la masse. Donc $V_- = 0$.

**21.8** b) D'après la loi des nœuds appliqué au point A, on a : $\underline{i_\mathrm{e}} + \underline{i_C} = \underline{i_-}$ Comme $\underline{u_R} = \underline{u_\mathrm{e}}$, on en déduit

$$\underline{i_\mathrm{e}} = \frac{\underline{u_R}}{\underline{Z_R}} = \frac{\underline{u_\mathrm{e}} - \underline{V_\mathrm{A}}}{R} \qquad \text{et} \qquad \underline{i_C} = \frac{\underline{u_C}}{\underline{Z_C}} = \left(\underline{u_\mathrm{s}} - \underline{V_\mathrm{A}}\right)\mathrm{j}C\omega.$$

De plus, on sait que pour un ALI idéal $\underline{i_-} = 0$ et on a vu précédemment que $\underline{V_-} = 0 = \underline{V_\mathrm{A}}$. D'où $\dfrac{\underline{u_\mathrm{e}}}{R} + \mathrm{j}C\omega\underline{u_\mathrm{s}} = 0$.

.....

**21.8** c) Comme $\dfrac{\underline{u_\mathrm{e}}}{R} = -\mathrm{j}C\omega\underline{u_\mathrm{s}}$, on a $\underline{H} = \dfrac{\underline{u_\mathrm{s}}}{\underline{u_\mathrm{e}}} = -\dfrac{1}{\mathrm{j}RC\omega}$.

.....

**21.8** d) En utilisant la relation de la question 1.8 b) et en passant dans le domaine temporel, on obtient l'équation différentielle suivante : $u_\mathrm{e}(t) + RC\dfrac{\mathrm{d}u_\mathrm{s}}{\mathrm{d}t}(t) = 0$.

.....

**21.8** e) Le montage est un intégrateur. L'intégration d'un signal en créneau fournit un signal triangulaire : c'est le signal (b) qui est la bonne réponse.

.....

**21.8** f) D'après la loi d'Ohm, on a $u_\mathrm{e} = Ri_\mathrm{e}$. Donc $\underline{Z_\mathrm{e}} = R$.

.....

**21.9** a) On sait que pour un ALI idéal en régime linéaire $V_- = V_+$. De plus, l'ALI est idéal, donc $i_+ = 0$. Or $V_+ = Ri_+$ d'après la loi d'Ohm. Donc $V_+ = 0$ et $V_- = 0$.

.....

**21.9** b) D'après la loi des nœuds appliquée au point A, on a : $\underline{i_\mathrm{e}} + \underline{i_L} = \underline{i_-}$. Or, on a

$$\underline{i_\mathrm{e}} = \frac{\underline{u_C}}{\underline{Z_C}} = \left(\underline{u_\mathrm{e}} - \underline{V_\mathrm{A}}\right)\mathrm{j}C\omega \qquad \text{et} \qquad \underline{i_L} = \frac{\underline{u_L}}{\underline{Z_L}} = \frac{\underline{u_\mathrm{s}} - \underline{V_\mathrm{A}}}{\mathrm{j}L\omega}.$$

De plus, on sait que pour un ALI idéal $\underline{i_-} = 0$ et on a vu précédemment que $\underline{V_-} = 0 = \underline{V_\mathrm{A}}$. D'où, $\mathrm{j}C\omega\underline{u_\mathrm{e}} + \dfrac{\underline{u_\mathrm{s}}}{\mathrm{j}L\omega} = 0$.

.....

**21.9** c) Comme $\dfrac{\underline{u_\mathrm{s}}}{\mathrm{j}L\omega} = -\mathrm{j}C\omega\underline{u_\mathrm{e}}$, on a $\underline{H} = \dfrac{\underline{u_\mathrm{s}}}{\underline{u_\mathrm{e}}} = -\mathrm{j}^2LC\omega^2 = LC\omega^2$.

.....

**21.9** d) On a $\underline{u_\mathrm{s}} = -LC(\mathrm{j}\omega)^2\underline{u_\mathrm{e}}$. En passant en régime temporel, on obtient : $u_\mathrm{s}(t) = -LC\dfrac{\mathrm{d}^2u_\mathrm{e}}{\mathrm{d}t^2}$.

.....

**21.9** e) Le montage suivant est un double dérivateur. Or si on dérive une première fois le signal triangle, cela donne un signal créneau. Si on dérive un signal créneau cela donne un signal nul sauf aux points où le créneau avait des pentes non nulles. Cela correspond au signal (c).

.....

**21.9** f) D'après la définition de l'impédance, on a $\underline{Z_\mathrm{e}} = \dfrac{\underline{u_\mathrm{e}}}{\underline{i_\mathrm{e}}} = \underline{Z_C} = \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}$.

.....

**21.10** a) Le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert à basses fréquences. On en déduit donc que $i_C = i_1 = 0$, ainsi, le potentiel du point C est nul d'après la loi d'Ohm. L'ALI étant considéré idéal et étudié en régime linéaire, on en déduit que $V_\mathrm{B} = 0$. $R_2$ est donc parcourue par $i_\mathrm{e}$ et soumise à une tension $v_\mathrm{e}$. Le montage est donc équivalent à $R_2$.

.....

**21.10** b) Le condensateur est équivalent à un fil à basses fréquences. On en déduit donc que $V_C = v_e$. Ainsi, l'ALI étant considéré comme idéal et étudié en régime linéaire, $V_B = v_e$, la résistance $R_2$ est soumise à une tension nulle, elle n'est donc parcourue par aucun courant. Tout le courant $i_e$ passe dans $R_1$ qui est alors soumise à la tension $v_e$. Le montage est donc équivalent à $R_1$.

.....

**21.11** a) À basses fréquences, $C$ est équivalent à un interrupteur ouvert et n'est donc parcouru par aucun courant, on en déduit donc, par une loi des nœuds au point B que la résistance qui lui est reliée n'est parcourue par aucun courant non plus. On en déduit donc que $V_B = v_e$ et donc, l'ALI étant idéal et fonctionnant en régime linéaire, $V_A = v_e$ soit $v_s = v_e$, les courants circulant dans les résistances étant nuls.

.....

**21.11** b) À hautes fréquences, $C$ est équivalent à un fil. L'ALI étant idéal et fonctionnant en régime linéaire, on en déduit donc que $V_A = V_B$. On en déduit donc que $v_s = -v_e$.

.....

**21.12** a) À basses fréquences, la fonction de transfert devient $\underline{H}(\omega) = 1$.

.....

**21.12** b) À hautes fréquences, la fonction de transfert devient $\underline{H}(\omega) = \dfrac{-\mathrm{j}RC\omega}{\mathrm{j}RC\omega} = -1$.

.....

**21.12** c) Le gain est donné par le module de la fonction de transfert :

$$G(\omega) = |\underline{H}(\omega)| = \frac{|1 - \mathrm{j}RC\omega|}{|1 + \mathrm{j}RC\omega|} = \frac{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} = 1.$$

.....

**21.12** d) Le déphasage est donné par l'argument de la fonction de transfert :

$$\varphi(\omega) = \arg(\underline{H}(\omega)) = \arg(1 - \mathrm{j}RC\omega) - \arg(1 + \mathrm{j}RC\omega) = -2\arctan(RC\omega).$$

.....

**21.12** e) La pulsation du signal est $\omega = 1{,}3 \times 10^4\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$. À cette pulsation, le déphasage vaut :

$$\varphi(\omega) = -2\arctan(RC\omega) = -2\arctan(800\,\Omega \times 100\,\mathrm{nF} \times 1{,}3 \times 10^4\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}) = -\frac{\pi}{2}.$$

On en déduit donc l'expression : $v_s = E\cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right) = E\sin(\omega t)$.

.....

**21.13** a) À basses fréquences, l'impédance devient $\underline{Z}(\omega) = R_2\dfrac{1}{1} = R_2$.

.....

**21.13** b) À hautes fréquences, l'impédance devient $\underline{Z}(\omega) = R_2\dfrac{\mathrm{j}R_1C_1\omega}{\mathrm{j}R_2C_1\omega} = R_1$.

.....

**21.13** c) L'impédance peut se mettre sous la forme : $\underline{Z}(\omega) = R_2\dfrac{1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_1}}{1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_2}}$ avec $\omega_1 = \dfrac{1}{R_1C_1}$ et $\omega_2 = \dfrac{1}{R_2C_1}$.

.....

**21.13** d) On a $\omega \ll \omega_2$ donc l'impédance devient : $\underline{Z}(\omega) = R_2(1 + \mathrm{j}R_1C_1\omega) = R_2 + \mathrm{j}R_1R_2C_1\omega$. On identifie ainsi deux termes, l'impédance est une bobine d'inductance $R_1R_2C_1$ en série avec une résistance $R_2$.

.....

# Fiche n° 22. ALI saturé

## Réponses

**22.1** a) ..... oui

**22.1** b) ..... non

**22.1** c) ..... oui

**22.2** a) ..... $\dfrac{\mu_0}{1+\mathrm{j}\omega\tau}$

**22.2** b) ..... a

**22.2** c) ..... $\dfrac{1}{\tau}$

**22.2** d) ..... $\mu_0$

**22.2** e) ..... $\mu_0$

**22.2** f) ..... $-\mathrm{j}\mu_0\dfrac{\omega_c}{\omega}$

**22.2** g) ..... (1)

**22.3** a) ..... $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}+\dfrac{s}{\tau}=\dfrac{\mu_0 e}{\tau}$

**22.3** b) ..... c

**22.3** c) ..... non

**22.4** a) ..... a

**22.4** b) ..... $\dfrac{eR'+sR}{R+R'}$

**22.4** c) ..... $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}+\dfrac{R+R'-\mu_0 R}{R+R'}\dfrac{s}{\tau}=\mu_0\dfrac{R'}{R+R'}\dfrac{e}{\tau}$

**22.4** d) ..... non

**22.5** a) ..... c

**22.5** b) ..... a

**22.5** c) ..... $\varepsilon=\dfrac{3e-s}{6}$

**22.5** d) ..... $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}+\left(\dfrac{\mu_0}{6}+1\right)\dfrac{s}{\tau}=\mu_0\dfrac{e}{2\tau}$

**22.5** e) ..... oui

**22.6** a) ..... $v_+=e$

**22.6** b) ..... $e>0$

**22.6** c) ..... $e<0$

**22.6** d) ..... a

**22.7** a) ..... $v_+=\dfrac{R'e+Rs}{R+R'}$

**22.7** b) ..... $e>v_{\text{réf}}\dfrac{R+R'}{R'}-V_{\text{sat}}\dfrac{R}{R'}$

**22.7** c) ..... $e<v_{\text{réf}}\dfrac{R+R'}{R'}+V_{\text{sat}}\dfrac{R}{R'}$

**22.7** d) ..... b

**22.8** a) ..... (3)

**22.8** b) ..... (1)

**22.8** c) ..... (5)

**22.8** d) ..... (6)

**22.8** e) ..... (4)

**22.8** f) ..... (2)

**22.9** a) ..... 15 V

**22.9** b) ..... 2 V

**22.9** c) ..... 900 Ω

**22.9** d) ..... c

**22.10** a) ..... (2)

**22.10** b) ..... (2)

**22.10** c) ..... (1)

**22.10** d) ..... (3)

**22.10** e) ..... (2)

**22.10** f) ..... (1)

**22.10** g) ..... (3)

## Corrigés

**22.1** a) L'ALI n'est pas bouclé, la saturation s'impose.

**22.1** b) La rétroaction a lieu sur la borne inverseuse, l'ALI peut donc *a priori* fonctionner en régime linéaire (il s'agit d'un montage suiveur).

**22.1** c) La rétroaction a lieu sur la borne non-inverseuse, l'ALI fonctionne donc en régime saturé (il s'agit d'un montage comparateur à hystérésis non-inverseur).

**22.2** a) En régime harmonique, cela devient $\dfrac{\underline{s}}{(\underline{v}_+ - \underline{v}_-)} = \underline{\mu} = \dfrac{\mu_0}{1 + \mathrm{j}\omega\tau}$.

**22.2** b) La fonction de transfert canonique associée est $\underline{H} = \dfrac{H_0}{1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_c}}$ où $H_0$ et $\omega_c$ sont respectivement le gain statique et la pulsation de coupure du filtre. Le filtre est donc un passe-bas, la réponse correcte est la (a).

**22.2** c) On identifie $\omega_c = \dfrac{1}{\tau}$ la pulsation de coupure de ce filtre.

**22.2** d) On identifie $H_0 = \mu_0$.

**22.2** e) À basses-fréquences, la fonction de transfert est équivalente à $\underline{\mu}_{\mathrm{BF}} = \mu_0$.

**22.2** f) À hautes fréquences, la fonction de transfert est équivalente à $\underline{\mu}_{\mathrm{HF}} = -\mathrm{j}\mu_0 \dfrac{\omega_c}{\omega}$.

**22.2** g) À basses fréquences, le gain en décibels est constant et vaut $G_{\mathrm{dB,BF}} = 20\log(\mu_0)$. À hautes fréquences, il est de la forme $G_{\mathrm{dB,BF}} = 20\log(\mu_0) - 20\log\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)$, la courbe suit donc une droite de pente $-20\,\mathrm{dB}$ par décade. Le diagramme (2) est donc éliminé.

Enfin, le filtre étant du premier ordre, le gain réel à $\omega_c$ vaut $-3\,\mathrm{dB}$, le diagramme (3) est donc éliminé.

**22.3** a) La tension différentielle est donnée, en régime linéaire, par : $\underline{v_+} - \underline{v_-} = \underline{e}$. D'après l'expression de la fonction de transfert donnée dans l'énoncé, on obtient $(1 + \mathrm{j}\omega\tau)\underline{s} = \mu_0\underline{e}$. On en déduit donc $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \dfrac{s}{\tau} = \dfrac{\mu_0 e}{\tau}$ en régime linéaire.

**22.3** b) En régime permanent, la dérivée de $s(t)$ est nulle donc, l'équation différentielle donne :

$$\frac{s(t)}{\tau} = \frac{\mu_0 e(t)}{\tau} \quad \text{avec } e(t) = E_0 \text{ pour } t > 0.$$

La réponse correcte est la (c).

**22.3** c) La tension de sortie tend donc vers $\mu_0 E_0$ en régime permanent. Au vu de la valeur de $\mu_0$ donnée dans les prérequis, $s$ tend donc vers une valeur qui dépassera la tension de saturation. Le montage est stable mais il sature quelle que soit la valeur de $E_0$.

**22.4** a) L'ALI étant idéal, l'intensité du courant entrant dans la borne non-inverseuse est nulle. On en déduit donc, en appliquant la loi des nœuds et la loi d'Ohm $\dfrac{v_+ - e}{R} + \dfrac{v_+ - s}{R'} = 0$. La réponse correcte est donc la (a).

.....

**22.4** b) D'après la question précédente : $\dfrac{e - v_+}{R} + \dfrac{s - v_+}{R'} = 0$. Ainsi, on isole $v_+ = \dfrac{eR' + sR}{R + R'}$. Par définition, on a $\varepsilon = v_+ - v_-$ et l'entrée inverseuse est reliée à la masse. On a donc $\varepsilon = \dfrac{eR' + sR}{R + R'}$.

.....

**22.4** c) La fonction de transfert donnée dans l'énoncé permet d'écrire, en régime linéaire :

$$\frac{\underline{s}}{\dfrac{\underline{e}R' + \underline{s}R}{R + R'}} = \frac{\mu_0}{1 + \mathrm{j}\omega\tau}.$$

On en déduit ainsi : $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \dfrac{R + R' - \mu_0 R}{R + R'}\dfrac{s}{\tau} = \mu_0 \dfrac{R'}{R + R'}\dfrac{e}{\tau}$.

.....

**22.4** d) Le gain de l'ALI étant très élevé, les coefficients de l'équation différentielle homogène ne sont pas de même signe, le système étudié est donc instable, l'ALI fonctionne donc en régime saturé.

.....

**22.5** a) L'ALI étant idéal, l'intensité du courant entrant dans la borne inverseuse est nulle. On en déduit donc, en appliquant la loi des nœuds et la loi d'Ohm $\dfrac{v_+ - e}{R} + \dfrac{v_+ - s}{R} = 0$ donc $v_+ = \dfrac{e + s}{2}$.
La réponse correcte est la (c).

.....

**22.5** b) L'ALI étant idéal, l'intensité du courant entrant dans la borne non-inverseuse est nulle. On en déduit donc, en appliquant la loi des nœuds et la loi d'Ohm, $\dfrac{v_+ - s}{R} + \dfrac{v_+}{R/2} = 0$ donc $3v_+ = s$.
La réponse correcte est la (a).

.....

**22.5** c) Les deux questions précédentes permettent d'établir l'expression suivante pour la tension différentielle :

$$v_+ - v_- = \frac{s}{3} - \frac{e + s}{2} = \frac{3e - s}{6}.$$

.....

**22.5** d) La fonction de transfert donnée dans l'énoncé, permet d'écrire, en régime linéaire : $\dfrac{6\underline{s}}{3\underline{e} - \underline{s}} = \dfrac{\mu_0}{1 + \mathrm{j}\omega\tau}$.

Ainsi, l'équation différentielle décrivant le montage est, en régime linéaire : $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \left(\dfrac{\mu_0}{6} + 1\right)\dfrac{s}{\tau} = \mu_0 \dfrac{e}{2\tau}$.

.....

**22.5** e) Le montage est stable car tous les coefficients de l'équation différentielle homogène sont de même signe. De plus, en régime permanent, la tension de sortie tend vers $3e$, on en déduit donc que le régime linéaire est envisageable dès que la tension d'entrée ne dépasse pas $\dfrac{V_{\text{sat}}}{3}$.

.....

**22.6** a) On a directement $v_+ = e$.

.....

**22.6** b) Pour rester dans cet état, l'entrée différentielle $v_+ - v_-$ doit rester positive, soit : $e > 0$.

.....

**22.6** c) Pour rester dans cet état, l'entrée différentielle $v_+ - v_-$ doit rester négative, soit : $e < 0$.

.....

**22.6** d) La caractéristique (a) correspond au comparateur simple, la (b) correspond à un comparateur à hystérésis. Il s'agit donc de la (a).

.....

**22.7** a) Un pont-diviseur de tension donne $v_+ - e = \dfrac{R}{R+R'}(s-e)$ soit $v_+ = \dfrac{R'e+Rs}{R+R'}$.

.....

**22.7** b) Pour rester dans cet état, l'entrée différentielle $v_+ - v_-$ doit rester positive, soit : $\dfrac{R'e+Rs}{R+R'} - v_{\text{réf}} > 0$, soit, avec l'expression de $s$ :

$$e > v_{\text{réf}}\frac{R+R'}{R'} - V_{\text{sat}}\frac{R}{R'}.$$

.....

**22.7** c) Pour rester dans cet état, l'entrée différentielle $v_+ - v_-$ doit rester négative, soit : $\dfrac{R'e+Rs}{R+R'} - v_{\text{réf}} < 0$, soit, avec l'expression de $s$ :

$$e < v_{\text{réf}}\frac{R+R'}{R'} + V_{\text{sat}}\frac{R}{R'}.$$

.....

**22.7** d) La caractéristique (a) correspond au comparateur simple, la (b) correspond à un comparateur à hystérésis. Il s'agit donc de la (b).

.....

**22.8** a) Il n'y a qu'une tension de bascule non nulle, il s'agit donc d'un comparateur simple dont la tension de bascule est décalée par rapport à l'origine. Cela laisse le choix entre les caractéristiques (3) et (4).

Ici, $s$ est positive lorsque $e$ est supérieure à la tension de bascule, on en déduit donc que la caractéristique correspondante est la (3).

.....

**22.8** b) Il n'y a qu'une tension de bascule nulle, il s'agit donc d'un comparateur simple symétrique. Cela laisse le choix entre les caractéristiques (1) et (2).

Ici, $s$ est positive lorsque $e$ est supérieure à la tension de bascule, on en déduit donc que la caractéristique correspondante est la (1).

.....

**22.8** c) Il y a deux tensions de bascule, il s'agit donc d'un comparateur à hystérésis. Cela laisse le choix entre les caractéristiques (5) et (6).

Ici, $s$ devient positive lorsque $e$ atteint une tension de bascule positive en augmentant. On en déduit donc que la caractéristique correspondante est la (5).

.....

**22.8** d) Il y a deux tensions de bascule, il s'agit donc d'un comparateur à hystérésis. Cela laisse le choix entre les caractéristiques (5) et (6).

Ici, $s$ devient négative lorsque $e$ atteint une tension de bascule positive en augmentant. On en déduit donc que la caractéristique correspondante est la (6).

.....

**22.8** e) Il n'y a qu'une tension de bascule non-nulle, on en déduit donc que la caractéristique correspondante est la (4).

.....

**22.8** f) Il n'y a qu'une tension de bascule nulle, il s'agit donc d'un comparateur simple symétrique. La caractéristique correspondante est donc la (2).

.....

**22.9** a) On lit, pour la tension en tirets, une amplitude de 1 carreau. Cette tension sature donc à 15 V compte tenu de l'échelle.

.....

**22.9** b) On identifie une intersection entre les deux signaux lorsque $e(t)$ atteint une valeur correspondante à $\frac{2}{6}$ de carreau. Compte tenu de l'échelle, on en déduit donc que $V_{\text{lim}} = 1{,}7\,\text{V}$.

.....

**22.9** c) D'après l'énoncé, $V_{\text{lim}} = \frac{R}{R'} V_{\text{sat}}$, or $R$, $V_{\text{sat}}$ et $V_{\text{lim}}$ sont connues. On peut donc écrire $R' = \frac{V_{\text{sat}}}{V_{\text{lim}}} R$. L'application numérique donne : $R' = \frac{15\,\text{V}}{\frac{5\,\text{V}}{3}} \times 100\,\Omega = 900\,\Omega$.

.....

**22.9** d) La valeur de $V_{\text{lim}}$ est de 1,7 V soit 1,7 carreaux d'après l'échelle. Or, l'amplitude est inférieure à 1,7 carreaux, la valeur de bascule n'est donc pas atteinte pour la tension d'entrée. La réponse correcte est donc la (c).

.....

**22.10** a) Le signal (1) met en évidence une saturation en amplitude de tension de sortie et le signal (3) met en évidence une saturation en vitesse de balayage.

Le signal (2) est le seul qui présente une allure de sinusoïde.

.....

**22.10** b) Le montage (1) met en évidence une saturation en amplitude de tension de sortie et le montage (3) met en évidence une saturation en vitesse de balayage.
Le gain de l'amplificateur est de 10, on en déduit donc qu'une entrée d'amplitude 1 V conduit à une sortie d'amplitude 10 V. L'ALI ne sature donc pas.
De plus, la variation de tension de sortie sera donc de l'ordre de $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \approx 10\,\text{V} \times 2\,000\,\text{Hz} \approx 20\,\text{V/ms}$ en considérant une variation de 10 V sur une demi période. L'ALI ne sature donc pas en vitesse de balayage non plus.

.....

**22.10** c) Le gain de l'amplificateur conduit à une tension de sortie pouvant aller jusqu'à 20 V. L'ALI sature donc en amplitude de tension à $V_{\text{sat}} = 15\,\text{V}$ d'après les prérequis.

.....

**22.10** d) L'amplitude de sortie est de 10 V au vu du gain de l'amplificateur. Ainsi, la variation de tension de sortie sera donc de l'ordre de $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \approx 10\,\text{V} \times 2 \times 10^7\,\text{Hz} \approx 200\,\text{V/µs}$. L'ALI sature donc en vitesse de balayage.

.....

**22.10** e) Ce premier spectre ne comporte qu'une composante spectrale, il correspond donc à un signal sinusoïdal soit celui du chronogramme (2).

.....

**22.10** f) Ce spectre et le suivant comportent tous deux des harmoniques. Celui-ci est plus riche en hautes fréquences que le suivant, on en déduit donc qu'il correspond au signal présentant le plus de discontinuités de tension, cela correspond au chronogramme (1).

.....

**22.10** g) Par élimination, ce spectre correspond au chronogramme (3) qui présente une allure globale conservée par rapport au signal sinusoïdal et moins de discontinuités que le spectre précédent.

.....

# Fiche n° 23. Oscillateurs électroniques

## Réponses

**23.1** a) ..... $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u}{\tau} = 0}$

**23.1** b) ..... $\boxed{\dfrac{1}{\tau}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u + \dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} = 0}$

**23.1** c) ..... $\boxed{RC\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u - \dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} = A}$

**23.1** d) ..... $\boxed{\dfrac{1}{\tau}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u + \dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} = 0}$

**23.2** a) ..... $\boxed{\mathrm{j}\omega\underline{i} = -\dfrac{\underline{i}}{RC}}$

**23.2** b) ..... $\boxed{\dfrac{\mathrm{j}\omega}{\tau}\underline{i} + L^2C^2\underline{i} - (\mathrm{j}\omega)^2\underline{i} = A}$

**23.3** a) ..... c

**23.3** b) ..... e

**23.4** a) ..... a

**23.4** b) ..... b

**23.4** c) ..... a

**23.4** d) ..... b

**23.5** a) ..... b

**23.5** b) ..... a

**23.5** c) ..... c

**23.5** d) ..... b

**23.6** a) ..... Vrai

**23.6** b) ..... Faux

**23.6** c) ..... b

**23.7** a) ..... c

**23.7** b) ..... $\boxed{u_1 = \dfrac{u_\mathrm{s}}{A}}$

**23.7** c) ..... a

**23.7** d) ..... b

**23.7** e) ..... $\boxed{\dfrac{\left(R + \underline{Z_C}\right)^2 + R\underline{Z_C}}{R\underline{Z_C}}}$

**23.7** f) ..... d

**23.7** g) ..... $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2u_\mathrm{s}}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{3-A}{RC}\dfrac{\mathrm{d}u_\mathrm{s}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{R^2C^2}u_\mathrm{s} = 0}$

**23.8** a) ..... a

**23.8** b) ..... e

**23.8** c) ..... a

**23.8** d) ..... b

**23.9** a) ..... c

**23.9** b) ..... $\boxed{\dfrac{R_1}{R_1 + R_2}V_\mathrm{sat}}$

**23.9** c) ..... $\boxed{i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}}$

**23.9** d) ..... $\boxed{i = \dfrac{V_\mathrm{sat} - u_C}{R}}$

**23.9** e) ..... d

**23.9** f) ..... c

**23.9** g) ..... b

**23.9** h) ..... a

**23.9** i) ..... c

**23.9** j) ..... b

**23.10** a) ..... $\boxed{\dfrac{u_\mathrm{e}}{u_\mathrm{s}} = \dfrac{R_0}{R_0 + R_2}}$

**23.10** b) ..... $\boxed{u_e - u_s = R_1 i_e}$

**23.10** c) ..... $\boxed{u_e = -R_0 \dfrac{R_1}{R_2} i_e}$

**23.10** d) ..... (a)

**23.10** e) ..... (b)

**23.10** f) ..... $\boxed{u_e = R_1 i_e + V_{sat}}$

**23.10** g) ..... Caractéristique (1)

**23.10** h) ..... Caractéristique (3)

**23.10** i) ..... (c)

## Corrigés

**23.1** a) On remplace une multiplication par $j\omega$ par une dérivée temporelle. On obtient : $\dfrac{du}{dt} + \dfrac{u}{\tau} = 0$.

**23.1** b) De même, on a ici : $\dfrac{1}{\tau}\dfrac{du}{dt} + \omega_0^2 u + \dfrac{d^2u}{dt^2} = 0$.

**23.1** c) Avec $\omega^2 \underline{u} = -j^2\omega^2 \underline{u} = -(j\omega)^2 \underline{u}$, on obtient : $RC\dfrac{du}{dt} + \omega_0^2 u - \dfrac{d^2u}{dt^2} = A$.

**23.1** d) En multipliant par $j\omega\omega_0$, on obtient : $\dfrac{j\omega}{\tau}\underline{u} + \omega_0^2\underline{u} + (j\omega)^2\underline{u} = j\omega_0\omega A$. Il vient ensuite :

$$\frac{1}{\tau}\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u + \frac{d^2u}{dt^2} = \omega_0 \frac{dA}{dt} = 0.$$

**23.2** a) On remplace une dérivée temporelle par une multiplication par $j\omega$ : $j\omega\underline{i} = -\dfrac{\underline{i}}{RC}$.

**23.3** a) Seul le filtre passe-bande peut être utilisé.

**23.3** b) Le filtre passe-bande atténue, donc il faut amplifier le signal pour compenser.

**23.4** a) Les deux coefficients sont de même signe, donc le système est stable : solution en $\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$.

**23.4** b) Les deux coefficients sont de signes contraires, donc le système est instable : solution en $\exp\left(+\dfrac{t}{\tau}\right)$.

**23.4** c) Les trois coefficients sont de même signe, donc le système est stable.

**23.4** d) Les trois coefficients sont de signes différents, donc le système est instable.

**23.5** a) Si le système est stable, il y a amortissement, donc pas d'oscillations.

**23.5** b) Pour démarrer, il faut qu'il y ait amplification et non amortissement, ce qui impose que le deuxième coefficient de l'équation différentielle soit négatif.

**23.5** c) Les oscillations sinusoïdales sont décrites par l'équation différentielle $\dfrac{d^2u}{dt^2} + \omega_0^2 u = 0$ de pulsation $\omega_0$.

**23.5** d) Pour avoir des oscillations parfaitement sinusoïdales, il faut que le produit $\underline{H_\mathrm{a}H_\mathrm{f}}$ soit égal à 1, ce qui implique $AH_0 = 1 + \mathrm{j}Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)$, soit $H_0A = 1$ et $\omega = \omega_0$. C'est le critère de Barkhausen.

**23.6** c) Si le complexe $\underline{AB}$ vaut 1, son module vaut 1 et son argument vaut 0.

**23.7** a) Il y a rétroaction sur les deux bornes inverseuse et non inverseuse : l'ALI fonctionne alternativement en régime linéaire et en régime saturé.

**23.7** b) L'intensité est nulle à l'entrée non inverseuse et l'intensité du courant est donc identique dans $R_1$ et $R_2$. On reconnaît donc un pont diviseur de tension. La relation demandée est donc : $\dfrac{u_1}{R_1} = \dfrac{u_\mathrm{s}}{R_1 + R_2}$, soit $u_1 = \dfrac{u_\mathrm{s}}{A}$.

**23.7** c) On a $\underline{Z_1} = R + \underline{Z_C}$.

**23.7** d) Ici, $\dfrac{1}{\underline{Z_2}} = \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{\underline{Z_C}} = \dfrac{R + \underline{Z_C}}{R\underline{Z_C}}$, d'où : $\underline{Z_2} = \dfrac{R\underline{Z_C}}{R + \underline{Z_C}}$.

**23.7** e) Pour le bloc de droite, on peut appliquer la relation du pont diviseur de tension : on a

$$\frac{\underline{u_\mathrm{s}}}{\underline{u_\mathrm{e}}} = \frac{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}{\underline{Z_2}} = \frac{R + \underline{Z_C} + \dfrac{R\underline{Z_C}}{R + \underline{Z_C}}}{\dfrac{R\underline{Z_C}}{R + \underline{Z_C}}} = \frac{\left(R + \underline{Z_C}\right)^2 + R\underline{Z_C}}{R\underline{Z_C}}.$$

**23.7** f) La relation $\dfrac{\underline{u_\mathrm{s}}}{\underline{u_\mathrm{e}}} = \dfrac{\left(R + \underline{Z_C}\right)^2 + R\underline{Z_C}}{R\underline{Z_C}}$ s'écrit :

$$\frac{\underline{u_\mathrm{s}}}{\underline{u_\mathrm{e}}} = \frac{\left(R + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}\right)^2 + R\dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}}{R\dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}} = \frac{R^2 + \left(\dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}\right)^2 + 3\dfrac{R}{\mathrm{j}C\omega}}{R\dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}} = \frac{(\mathrm{j}\omega)^2R^2C^2 + 1 + 3\mathrm{j}\omega RC}{\mathrm{j}\omega RC}.$$

Comme $u_1 = u_\mathrm{e}$, on obtient :

$$\underline{u_\mathrm{s}} = \frac{(\mathrm{j}\omega)^2R^2C^2 + 1 + 3\mathrm{j}\omega RC}{\mathrm{j}\omega RC}\underline{u_\mathrm{e}} = \frac{(\mathrm{j}\omega)^2R^2C^2 + 1 + 3\mathrm{j}\omega RC}{\mathrm{j}\omega RC}\frac{1}{A}\underline{u_\mathrm{s}}.$$

D'où :

$$\underline{u_\mathrm{s}} = \frac{(\mathrm{j}\omega)^2R^2C^2 + 1 + 3\mathrm{j}\omega RC}{\mathrm{j}\omega RC}\frac{1}{A}\underline{u_\mathrm{s}} \quad \text{donc} \quad \left[(\mathrm{j}\omega)^2 + \frac{1}{R^2C^2} + \frac{\mathrm{j}\omega}{RC}(3 - A)\right]\underline{u_\mathrm{s}} = 0.$$

**23.7** g) En transposant en réels, on en déduit $\dfrac{\mathrm{d}^2u_\mathrm{s}}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{3 - A}{RC}\dfrac{\mathrm{d}u_\mathrm{s}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{R^2C^2}u_\mathrm{s} = 0$.

**23.8** a) Il faut supprimer l'amortissement, donc le premier ordre, d'où $A = 3$.

**23.8** b) On a alors $\dfrac{\mathrm{d}^2u_\mathrm{s}}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2u_\mathrm{s} = 0$, avec $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$, d'où $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi RC}$.

**23.8** c) Si $A < 3$, la tension va s'amortir lors d'un régime pseudo-périodique jusqu'à une valeur nulle.

**23.8** d) Si $A > 3$, la tension va s'amplifier jusqu'à saturation de l'ALI.

**23.9** a) Il y a rétroaction sur les deux bornes inverseuse et non inverseuse : on ne peut pas répondre.

**23.9** b) L'intensité à l'entrée de la borne non inverseuse étant nulle, le pont diviseur donne :

$$u_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u_\mathrm{s} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_\mathrm{sat}.$$

**23.9** c) On a : $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$.

**23.9** d) On a : $i = \dfrac{u_\mathrm{s} - u_C}{R} = \dfrac{V_\mathrm{sat} - u_C}{R}$.

**23.9** e) On a $i = \dfrac{V_\mathrm{sat} - u_C}{R} = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$. On en déduit : $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_C}{RC} = \dfrac{V_\mathrm{sat}}{RC}$.

**23.9** f) C'est la solution d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants.

**23.9** g) Le second membre étant constant, la solution particulière est constante.

**23.9** h) Le condensateur se charge sous la tension $V_\mathrm{sat}$.

**23.9** i) Lorsque le condensateur se charge, $V_-$ augmente, donc $\varepsilon$ diminue.

**23.9** j) La tension différentielle $\varepsilon$ diminue. Au moment où cette tension $\varepsilon$ devient négative, l'ALI bascule en saturation négative.

**23.10** a) On a $v_+ = v_- = u_\mathrm{e}$ car l'ALI est en régime linéaire. Le pont diviseur de tension en bas donne

$$v_+ = u_\mathrm{e} = u_\mathrm{s}\,\frac{R_0}{R_0 + R_2}.$$

**23.10** b) La relation est obtenue avec la loi d'Ohm aux bornes de $R_1$.

**23.10** c) Avec $i_\mathrm{e} = \dfrac{u_\mathrm{e} - u_\mathrm{s}}{R_1}$, il vient : $u_\mathrm{e} = -R_0\,\dfrac{R_1}{R_2} i_\mathrm{e}$.

**23.10** d) Pour éviter la saturation : $|u_\mathrm{s}| < V_\mathrm{sat}$.

**23.10** e) Les relations $|u_\mathrm{e}| = u_\mathrm{s}\,\dfrac{R_0}{R_0 + R_2}$ et $|u_\mathrm{s}| < V_\mathrm{sat}$ donnent $|u_\mathrm{e}| < \dfrac{R_0}{R_0 + R_2} V_\mathrm{sat}$.

**23.10** f) En prenant $u_\mathrm{s} = +V_\mathrm{sat}$, on a $u_\mathrm{e} = R_1 i_\mathrm{e} + V_\mathrm{sat}$.

**23.10** g) En régime linéaire, la pente est négative $\left(u_e = -\dfrac{R_0 R_1}{dR_2}\right)$ : toutes les caractéristiques sont possibles. En régime saturé, $u_e = R_1 i_e + V_{sat}$ : la pente est positive et l'ordonnée à l'origine vaut $V_{sat}$. Cela élimine la caractéristique 2.

En saturation haute, on a $V_+ > V_-$ ; donc $u_e = V_- < V_+ = \dfrac{R_0}{R_0 + R_2} V_{sat}$.

En saturation basse, on a $V_+ < V_-$ ; donc $u_e = V_- > V_+ = -\dfrac{R_0}{R_0 + R_2} V_{sat}$.

D'où la condition indiquée dans l'énoncé $u_e < \dfrac{R_0}{R_0 + R_2} V_{sat}$.

Ces conditions imposent la caractéristique 1.

.....

**23.10** h) On a toujours les propriétés suivantes :

- En saturation haute, $u_s = +V_{sat}$ et $V_+ > V_-$, donc $u_e = V_- < V_+ = \dfrac{R_0}{R_0 + R_2} V_{sat}$.

  Dans ce cas, $i_e = \dfrac{u_e - V_{sat}}{R_1}$ (ordonnée à l'origine négative) : cela correspond à

$$i_e < \frac{\dfrac{R_0}{R_0 + R_2} V_{sat} - V_{sat}}{R_1} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{V_{sat}}{R_0 + R_2}.$$

- En saturation basse, $u_s = -V_{sat}$ et $V_+ < V_-$, donc $u_e = V_- > V_+ = -\dfrac{R_0}{R_0 + R_2} V_{sat}$.

  Dans ce cas, $i_e = \dfrac{u_e + V_{sat}}{R_1}$ (ordonnée à l'origine positive) : cela correspond à

$$i_e > \frac{-\dfrac{R_0}{R_0 + R_2} V_{sat} + V_{sat}}{R_1} = +\frac{R_2}{R_1} \frac{V_{sat}}{R_0 + R_2}.$$

Ces conditions imposent la caractéristique 3.

Plus simplement, on peut également effectuer une symétrie de la caractéristique 1 de la question précédente.

.....

**23.10** i) C'est bien sûr dans la zone centrale que le dipôle se comporte comme une résistance négative.

.....

# Fiche n° 24. Circuits logiques

## Réponses

**24.1** a) ..... c

**24.1** b) ..... c

**24.1** c) ..... b

**24.2** a) ..... b

**24.2** b) ..... b

**24.2** c) ..... a

**24.2** d) ..... c

**24.2** e) ..... 256

**24.3** a) ..... b

**24.3** b) ..... c

**24.3** c) ..... a

**24.3** d) ..... b

**24.3** e) ..... 10101

**24.4** a) .. $1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 1 \times 10^0$

**24.4** b) .... $1 \times 3^2 + 2 \times 3^1 + 1 \times 3^0$

**24.4** c) ..... a c

**24.4** d) .... $1 \times b^2 + 2 \times b^1 + 1 \times b^0$

**24.4** e) ..... d

**24.5** a) ..... $1 - A \times B$

**24.5** b) .. $1 - (A + B) + A + B$

**24.5** c) ..... $\overline{A \cap B}$

**24.5** d) ..... $\overline{A \cup B}$

**24.5** e) ..... b d

**24.6** a) ..... 2

**24.6** b) ..... 4

**24.6** c) ..... 3

**24.6** d) ..... 1

**24.6** e) ..... c

**24.7** a) ..... 1 V

**24.7** b) ..... 0 V

**24.7** c) ..... 0 V

**24.7** d) ..... 0 V

**24.7** e) ..... NOR

**24.8** a) ..... 0 V

**24.8** b) ..... 0 V

**24.8** c) ..... 0 V

**24.8** d) ..... 1 V

**24.8** e) ..... AND

**24.9** a) ..... 0

**24.9** b) ..... 0

**24.9** c) ..... 1

**24.9** d) ..... 1

**24.9** e) ..... XOR

**24.10** a) ..... Vrai

**24.10** b) ..... Faux

**24.10** c) ..... Faux

**24.10** d) ..... Bistable

## Corrigés

**24.1** a) On a

$$3\,746\,\text{ko} = 3{,}746 \times 10^6\,\text{o}, \qquad 3\,221\,\text{Kio} = 3{,}298 \times 10^6\,\text{o} \qquad \text{et} \qquad 3{,}746\,\text{Mio} = 3{,}928 \times 10^3\,\text{o}.$$

Par comparaison, la valeur la plus faible est la réponse c.

.....

**24.1** b) On a

$$4{,}588\,\text{Gio} = 4{,}926 \times 10^9\,\text{o}, \qquad 2^{10} \times 4{,}482\,\text{Mio} = 2^{30} \times 4{,}482\,\text{o} = 4{,}813 \times 10^9\,\text{o} \qquad \text{et} \qquad 2^{10} \times 4{,}653\,\text{Mo} = 4{,}765 \times 10^3\,\text{o}.$$

Par comparaison, la valeur la plus faible est la réponse c.

.....

**24.1** c) On a

$$2^{32} \times 2{,}845\,\text{ko} = 1{,}222 \times 10^{13}\,\text{o} \qquad 2^{10} \times 1{,}368\,\text{Gio} = 2^{40} \times 1{,}368\,\text{o} = 1{,}504 \times 10^{9}\,\text{o}$$
$$2^{3} \times 0{,}158\,\text{To} = 2^{3} \times 0{,}158 \times 10^{12}\,\text{o} = 1{,}264 \times 10^{12}\,\text{o}.$$

Par comparaison, la valeur la plus faible est la réponse (b).

.....

**24.2** a) On a

$$12/2 \xrightarrow{\text{reste } 0} 6/2 \xrightarrow{\text{reste } 0} 3/2 \xrightarrow{\text{reste } 1} 1/2 \xrightarrow{\text{reste } 1} 0 \qquad \text{soit} \qquad 1100 \text{ (réponse (b))}.$$

.....

**24.2** b) On a

$$35/2 \xrightarrow{\text{reste } 1} 17/2 \xrightarrow{\text{reste } 1} 8/2 \xrightarrow{\text{reste } 0} 4/2 \xrightarrow{\text{reste } 0} 2/2 \xrightarrow{\text{reste } 0} 1/2 \xrightarrow{\text{reste } 1} 0 \qquad \text{soit} \qquad 100011 \text{ (réponse (b))}.$$

.....

**24.2** c) On a

$$123/2 \xrightarrow{\text{reste } 1} 61/2 \xrightarrow{\text{reste } 1} 30/2 \xrightarrow{\text{reste } 0} 15/2 \xrightarrow{\text{reste } 1} 7/2 \xrightarrow{\text{reste } 1} 3/2 \xrightarrow{\text{reste } 1} 1/2 \xrightarrow{\text{reste } 1} 0.$$

Donc, l'écriture en base 2 de 123 est 1111011 : la bonne réponse est (b).

.....

**24.2** d) On a

$$255/2 \xrightarrow{\text{reste } 1} 127/2 \xrightarrow{\text{reste } 1} 63/2 \xrightarrow{\text{reste } 1} 31/2 \xrightarrow{\text{reste } 1} 15/2 \xrightarrow{\text{reste } 1} 7/2 \xrightarrow{\text{reste } 1} 3/2 \xrightarrow{\text{reste } 1} 1/2 \xrightarrow{\text{reste } 1} 0.$$

Donc, l'écriture en base 2 de 255 est 11111111 : la bonne réponse est (c).

.....

**24.2** e) Le nombre binaire 11111111 correspond à 255 en décimal ; comme le nombre binaire 00000000 correspond à 0 en décimal, un nombre binaire composé de 8 chiffres peut donc prendre $255 - 0 + 1 = 256$ valeurs.

.....

**24.3** a) On a

$$1111 \to 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 15 \text{ (réponse (b))}.$$

.....

**24.3** b) On a

$$10101 \to 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 21 \text{ (réponse (c))}.$$

.....

**24.3** c) On a

$$101010 \to 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 42 \text{ (réponse (a))}.$$

.....

**24.3** d) On a

$$10111101 \to 1 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 189 \text{ (réponse (b))}.$$

.....

**24.3** e) D'après l'énoncé et les réponses aux questions a) et c), ce calcul correspond en décimal à $\dfrac{42}{15-13}$, soit $21|_{10}$. D'après la question on a $21|_{10} = 10101|_2$.

.....

**24.4** a) La base étant 10, on peut s'appuyer sur l'exemple fourni dans l'énoncé.
On a $121|_{10} = 1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 1 \times 10^0$.

.....

**24.4** b) La décomposition est similaire à la question précédente, mais la base est désormais 3 et non 10.
On a $121|_3 = 1 \times 3^2 + 2 \times 3^1 + 1 \times 3^0$.

.....

**24.4** c)

- On a $121|_3 = 1 \times 3^2 + 2 \times 3^1 + 1 \times 3^0 = 9 + 6 + 1 = 16 \neq 121 = 121|_{10}$. La réponse (a) est vraie.
- Dans une même base, deux nombres d'écriture différentes sont forcément différents. La réponse (b) est fausse.
- On a $121|_3 = 1 \times 3^2 + 2 \times 3^1 + 1 \times 3^0 = 9 + 6 + 1 = 16$. La réponse (c) est vraie.
- Raisonnons par contre exemple : si $b = 10$ le résultat est faux (questions précédentes). La réponse (d) est fausse (sauf si $b = 3$ mais c'est un cas particulier).

.....

**24.4** d) La décomposition est similaire aux questions précédentes, mais la base est désormais $b$.
On a $121|_b = 1 \times b^2 + 2 \times b^1 + 1 \times b^0 = b^2 + 2b + 1$.

.....

**24.4** e) On a $121|_b = b^2 + 2b + 1 = (b+1)^2$ donc $121|_b$ est pour toute base le carré du nombre $b+1$. Ainsi, la bonne réponse est (d).

Vérifions ce résultat. Si $b = 10$ alors $b + 1 = 11|_{10}$ et effectivement $11^2 = 121|_{10}$ ; si $b = 3$ alors $b + 1 = 10|_3 = 9_{10}$ et effectivement $4^2 = 16 = 121|_3$.

.....

**24.5** a) On remplace $\overline{A}$, $\overline{B}$ par les formules correspondantes, soit $\overline{A} \cup \overline{B} = (1-A) \cup (1-B)$.

On remplace alors $\cup$ par la formule correspondante. On a

$$\begin{aligned}(1-A) \cup (1-B) &= (1-A) + (1-B) - (1-A) \times (1-B)\\ &= 1 - A + 1 - B - (1 - B - A + A \times B) = 1 - A \times B.\end{aligned}$$

.....

**24.5** b) On remplace $\overline{A}$, $\overline{B}$ par les formules correspondantes, soit $\overline{A} \cap \overline{B} = (1-A) \cap (1-B)$.

On remplace alors $\cap$ par la formule correspondante. On a

$$(1-A) \cap (1-B) = (1-A) \times (1-B) = 1 - B - A + A \times B = 1 - (A+B) + A \times B.$$

.....

**24.5** c) On constate que la formule $1 - A \times B$ correspond à une fonction NON appliquée à une fonction ET appliquée sur les deux entrées $A$ et $B$, soit $1 - A \times B = \overline{A \times B} = \overline{A \cap B}$.

.....

**24.5** d) On constate que la formule $1-(A+B)+A\times B$ correspond à une fonction NON appliquée à une fonction OU appliquée sur les deux entrées $A$ et $B$, soit $1 - (A+B) + A \times B = \overline{A + B - A \times B} = \overline{A \cup B}$.

.....

**24.5** e) En identifiant les énoncés de la première question de l'entraînement et les réponses obtenues à la deuxième, on constate que les propositions valides sont (a) (d).

.....

**24.7** a) Comme $V_A = V_B = 0$ V, les deux transistors de type 2 sont fermés et les deux transistors de type 1 sont ouverts. La sortie est donc directement liée à $V_E = 1$ V, donc $V_S = 1$ V.

.....

**24.7** b) Comme $V_A = 1$ V, un des transistors de type 2 est ouvert et un des transistors de type 1 est fermé. La sortie est donc directement liée à la masse, donc $V_S = 0$ V.

.....

**24.7** c) Comme $V_B = 1$ V, un des transistors de type 2 est ouvert et un des transistors de type 1 est fermé. La sortie est donc directement liée à la masse, donc $V_S = 0$ V.

.....

**24.7** d) Comme $V_1 = V_B = 1$ V, les deux transistors de type 2 sont ouverts et les deux transistors de type 1 sont fermés. La sortie est donc directement liée à la masse, donc $V_S = 0$ V.

.....

**24.7** e)

On constate que la table de vérité de ce circuit électrique correspond à celle d'une porte NOR. Réponse (c).

| $V_A$ | $V_B$ | $V_S$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |

.....

**24.8** a) Comme $V_1 = V_B = 0$ V, les deux transistors de type 2 sont fermés et les deux transistors de type 1 sont ouverts. La sortie est donc directement liée à la masse, donc $V_S = 0$ V.

.....

**24.8** b) Comme $V_B = 0$, un des transistors de type 1 est ouvert et un des transistors de type 2 est fermé. La sortie est donc directement liée à la masse, donc $V_S = 0$ V.

.....

**24.8** c) Comme $V_1 = 0$, un des transistors de type 1 est ouvert et un des transistors de type 2 est fermé. La sortie est donc directement liée à la masse, donc $V_S = 0$ V.

.....

**24.8** d) Comme $V_A = V_B = 1$ V, les deux transistors de type 2 sont ouverts et les deux transistors de type 1 sont fermés. La sortie est donc directement liée à $V_E = 1$ V, donc $V_S = 1$ V.

.....

**24.8** e)

On constate que la table de vérité de ce circuit électrique correspond à celle d'une porte AND. Réponse (b).

| $V_A$ | $V_B$ | $V_S$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

.....

**24.9** a) Si $A = B = 0$ alors les deux portes ET sont alimentées par une entrée 0 et une entrée 1, donc renvoient chacune 0. La porte OU est donc connectée à deux entrées 0 et renvoie donc 0.

.....

**24.9** b) Si $A = B = 1$ alors les deux portes ET sont alimentées par une entrée 0 et une 1, donc renvoient chacune 0. La porte OU est donc connectée à deux entrées 0 et renvoie donc 0.

.....

**24.9** c) Si $A = 0$ et $B = 1$ alors la porte ET en haut est alimentée par deux entrées 1 et renvoie 1, tandis que la porte ET en bas est alimentée par deux entrées 0 et renvoie 0. La porte OU est donc connectée à une entrée 0 et une entrée 1 : elle renvoie donc 1.

.....

**24.9** d) Si $A = 1$ et $B = 0$ alors la porte ET en haut est alimentée par deux entrées 0 et renvoie 0, tandis que la porte ET en bas est alimentée par deux entrées 1 et renvoie 1. La porte OU est donc connectée à une entrée 0 et une entrée 1 : elle renvoie donc 1.

.....

**24.9** e) Le signal en sortie sera nul si et seulement si les deux entrées sont de même niveau logique. Cela correspond à la fonction OU EXCLUSIF, aussi notée XOR.

.....

**24.10** a) Cette situation se produit notamment avant l'instant $t_1$ (on a $Q = 0$), entre les instants $t_4$ et $t_5$ (on a $Q = 1$) et après l'instant $t_8$ (on a $Q = 1$). On constate qu'alors la valeur de Q correspond à celle avant que la situation ne se produise : la sortie reste dans son état antérieur. L'affirmation est vraie.

.....

**24.10** b) Lorsque R passe du niveau logique 0 à 1 (aux instants $t_1$ et $t_5$), la sortie Q passe immédiatement de son état antérieur à 0, et non pas à l'état 1. La commande permet au contraire d'assurer que Q vaut 0 (on parle de commande *Reset* en anglais signifiant réinitialiser). L'affirmation est donc fausse.

.....

**24.10** c) Lorsque S passe du niveau logique 0 à 1 (aux instants $t_3$ et $t_7$) la sortie Q passe à 1 (on parle de commande *Set* en anglais signifiant initialiser), mais lorsque S repasse à 0 depuis l'état 1 (aux instants $t_4$ et $t_8$) on constate que la sortie Q reste à l'état 1 (elle ne passe pas mais reste !). L'affirmation est donc fausse.

.....

**24.10** d) Une fois la sortie Q dans un état, seule l'activation de l'une des commandes (R ou S) la fera changer de valeur. Autrement dit, les deux états logiques 0 et 1 de Q sont stables (quand un jeu de niveaux d'entrée la met dans un état de sortie, elle y reste) et l'on peut dire que la bascule RS est un circuit bistable.

.....

# Fiche n° 25. Physique statistique

## Réponses

**25.1** a) ..... (b)

**25.1** b) ..... (a)

**25.2** a) ..... $3{,}3 \times 10^{19}$

**25.2** b) ..... 0,31 nm

**25.3** a) ..... (d)

**25.3** b) ..... $29\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$

**25.4** ..... $5 \times 10^{18}\,\mathrm{kg}$

**25.5** a) ..... (a)

**25.5** b) ..... (a) et (b)

**25.5** c) ..... 8,4 km

**25.5** d) ..... 0,35 bar

**25.6** a) ..... (a)

**25.6** b) ..... (c)

**25.7** a) ..... (c)

**25.7** b) ..... $\dfrac{p_m}{p_n} = \exp\left(-\dfrac{E_m - E_n}{k_\mathrm{B}T}\right)$

**25.7** c) ..... (d)

**25.7** d) ..... (a)

**25.8** a) ..... (a)

**25.8** b) ..... (c)

**25.8** c) ..... (c)

**25.8** d) ..... (b)

**25.8** e) ..... $C = \dfrac{N\varepsilon^2}{k_\mathrm{B}T^2}\left(1 - \tanh^2\left(\dfrac{\varepsilon}{k_\mathrm{B}T}\right)\right)$

**25.9** a) ..... (b)

**25.9** b) ..... (a)

**25.10** ..... (a)

**25.11** a) ..... (c)

**25.11** b) ..... (a)

**25.11** c) ..... $5{,}1 \times 10^2\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

**25.12** a) ..... (c)

**25.12** b) ..... (c)

**25.12** c) ..... (b)

## Corrigés

**25.1** a) La densité volumique moléculaire est $N^* = \dfrac{P\mathcal{N}_A}{RT} = \dfrac{1 \times 10^5\,\mathrm{Pa} \times 6{,}02 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}}{8{,}31\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}} \times 373\,\mathrm{K}} = 1{,}9 \times 10^{25}\,\mathrm{m^{-3}}$. Reste à multiplier par le volume étudié $1\,\mathrm{mm^3} = 1 \times 10^{-9}\,\mathrm{m^3}$. On peut aussi écrire que $1\,\mathrm{mm^{-3}} = 1 \times 10^9\,\mathrm{m^{-3}}$.

.....

**25.1** b) On a $d = (N^*)^{-1/3}$ où $N^*$ est la densité volumique moléculaire. Donc

$$d = \left(1{,}9 \times 10^{25}\,\mathrm{m^{-3}}\right)^{-1/3} = 3{,}7 \times 10^{-9}\,\mathrm{m} d = 3{,}7\,\mathrm{nm}.$$

.....

**25.2** a) La densité volumique moléculaire est

$$N^* = \frac{\mu \mathcal{N}_A}{M} = \frac{1 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}} \times 6{,}02 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}}{18 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg \cdot mol^{-1}}} = 3{,}3 \times 10^{28}\,\mathrm{m^{-3}}.$$

Reste à multiplier par le volume étudié $1\,\mathrm{mm^3} = 1 \times 10^{-9}\,\mathrm{m^3}$. On peut aussi écrire que $1\,\mathrm{mm^{-3}} = 1 \times 10^9\,\mathrm{m^{-3}}$

.....

**25.2** b) On a $d = (N^*)^{-1/3}$ où $N^*$ est la densité volumique moléculaire. Donc

$$d = \left(3{,}3 \times 10^{28}\,\mathrm{m^{-3}}\right)^{-1/3} = 3{,}1 \times 10^{-10}\,\mathrm{m} = 0{,}31\,\mathrm{nm}.$$

.....

**25.3** b) On a $M(\mathrm{air}) \approx 0,2\mathrm{M}(\mathrm{O_2}) + 0,8\mathrm{M}(\mathrm{N_2}) \approx 29\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$.

.....

**25.4** La pression au sol est le rapport du poids de l'atmosphère sur la surface du sol terrestre.

Donc $M_{\mathrm{atm}} = \dfrac{P_{\mathrm{sol}}\,4\pi R_T^2}{g}$. On trouve $M_{\mathrm{atm}} = \dfrac{1 \times 10^5\,\mathrm{Pa} \times 4\pi \times \left(6{,}4 \times 10^6\,\mathrm{m}\right)^2}{10\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}} = 5 \times 10^{18}\,\mathrm{kg}$.

.....

**25.5** a) L'argument de la fonction exponentielle est sans dimension donc $H$ est une distance.

.....

**25.5** b) Une analyse dimensionnelle permet de trancher entre les quatre propositions. Le produit $RT$ est une énergie molaire (unité : $\mathrm{J \cdot mol^{-1}}$) et le produit $MgH$ est aussi une énergie molaire (avec $H$ une distance). Le rapport $\dfrac{MgH}{RT}$ est donc sans dimension.

Le produit $k_{\mathrm{B}}T$ est une énergie de même que $mgH$. Le rapport $\dfrac{mgH}{k_{\mathrm{B}}T}$ est donc sans dimension.

.....

**25.6** a) La fonction $z \mapsto P(z)$ est décroissante. Or $P_{\mathrm{A}} < P_{\mathrm{B}}$ donc le niveau A est plus haut que le niveau B.

.....

**25.6** b) On a $\dfrac{P_B}{P_A} = \exp\left(-\dfrac{z_B - z_A}{H}\right)$. À $T_0 = 293\,\mathrm{K}$, $H = 8{,}57\,\mathrm{km}$. On trouve $z_A - z_B = H \ln(P_B/P_A) = 3{,}1\,\mathrm{m}$.

.....

**25.7** a) Écrire la condition de normalisation $\displaystyle\sum_{i \geqslant 1} p_i = 1$.

.....

**25.7** c) Sachant que $\dfrac{p_{i_0}}{p_1}$ est le minimum de tous les $\dfrac{p_i}{p_1}$, si $\dfrac{p_{i_0}}{p_1} \approx 1$ alors $\dfrac{p_i}{p_1} \approx 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant i_0$.

Or $\dfrac{p_{i_0}}{p_1} = \exp\left(-\dfrac{E_{i_0} - E_1}{k_{\mathrm{B}}T}\right)$. Donc $\dfrac{p_{i_0}}{p_1} \approx 1$ si et seulement si $E_{i_0} - E_1 \ll k_{\mathrm{B}}T$. Dans ce cas, les différents états quantifiés sont équiprobables.

.....

**25.7** d) L'état le plus peuplé est celui de plus basse énergie. Si un seul état est très peuplé, c'est donc celui d'énergie $E_1$. La condition $p_2/p_1 \ll 1$ implique $p_i/p_1 \ll 1$ pour $2 \leqslant i \leqslant i_0$. Cette condition est vraie si et seulement si $E_2 - E_1 \gg k_{\mathrm{B}}T$.

.....

**25.8** e) On a $C = \dfrac{\mathrm{d}\langle E_{\text{système}}\rangle}{\mathrm{d}T} = \dfrac{\mathrm{d}\langle E_{\text{système}}\rangle}{\mathrm{d}\beta} \cdot \dfrac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}T}$ avec $\langle E_{\text{système}}\rangle = -N\varepsilon \tanh(\beta\varepsilon)$. D'une part, $\dfrac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}T} = -\dfrac{1}{k_{\mathrm{B}}T^2}$ et d'autre part $\dfrac{\mathrm{d}\tanh(x)}{\mathrm{d}x} = 1 - \tanh^2(x)$. On obtient $C = \dfrac{N\varepsilon^2}{k_{\mathrm{B}}T^2}\left(1 - \tanh^2\left(\dfrac{\varepsilon}{k_{\mathrm{B}}T}\right)\right)$.

.....

**25.11** a) On note $\vec{v} = \dot{x}\vec{e_x} + \dot{y}\vec{e_y} + \dot{z}\vec{e_z}$ la vitesse du centre de masse de la molécule. L'énergie cinétique de la molécule $E_c = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$ comporte trois termes quadratiques. Sa valeur moyenne $\langle E_c \rangle = \frac{1}{2}m\left\langle v^2 \right\rangle = \frac{1}{2}mv^{*2}$ est aussi égale à $\frac{3}{2}k_\mathrm{B}T$, en appliquant le théorème d'équipartition de l'énergie.

.....

**25.11** b) On note $\vec{v} = \dot{x}\vec{e_x} + \dot{y}\vec{e_y} + \dot{z}\vec{e_z}$ la vitesse du centre de masse de la molécule. La valeur moyenne de $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$(3 termes d'énergie quadratique) est $\frac{3}{2}k_\mathrm{B}T$ (théorème d'équipartition de l'énergie). La vitesse quadratique moyenne est donc $v^* = \sqrt{\frac{3k_\mathrm{B}T}{m}}$ que la molécule soit monoatomique, diatomique ou autre.

.....

**25.11** c) On a $v^* = \sqrt{\frac{3 \times 8{,}31\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}} \times 293\,\mathrm{K}}{28 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg \cdot mol^{-1}}}}$.

.....

**25.12** a) On note $\vec{v} = \dot{x}\vec{e_x} + \dot{y}\vec{e_y} + \dot{z}\vec{e_z}$ la vitesse du centre de masse de la molécule. L'énergie cinétique de la molécule $E_c = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$ comporte trois termes quadratiques.

.....

**25.12** b) L'énergie potentielle d'un oscillateur harmonique unidimensionnel s'écrit $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ où $x$ est l'écart à la position d'équilibre. Celle d'un oscillateur harmonique tridimensionnel comporte trois termes quadratiques de ce type.

.....

**25.12** c) L'énergie d'un oscillateur tridimensionnelle comporte donc six degrés de liberté énergétiques quadratiques. Sa valeur moyenne est donc $\langle E_1 \rangle = 6 \times \frac{k_\mathrm{B}T}{2} = 3k_\mathrm{B}T$. La valeur moyenne de l'énergie molaire est alors $\langle E_m \rangle = N_A \langle E_1 \rangle = 3k_\mathrm{B}N_AT = 3RT$. En dérivant $\langle E_m \rangle$ par rapport à $T$, on trouve la capacité thermique du solide dans le cadre de ce modèle : $C = 3R$ (loi de Dulong et Petit).

.....

# Fiche n° 26. Physique quantique

## Réponses

**26.1** a) ..... $1{,}9 \times 10^{-34}$ m

**26.1** b) ..... $7 \times 10^{-21}$ m

**26.1** c) ..... $8 \times 10^{-6}$ m

**26.1** d) ..... $2{,}5 \times 10^{-11}$ m

**26.1** e) ..... c et d

**26.2** a) ..... $\frac{1}{2}$

**26.2** b) ..... $\frac{3}{4}$

**26.2** c) ..... $\frac{5-2\sqrt{6}}{12}$

**26.2** d) ..... $\frac{11-2\sqrt{6}}{12}$

**26.3** a) ..... $A = \frac{1}{2a}$

**26.3** b) ..... $A = \frac{1}{\sqrt{b}}$

**26.3** c) ..... $A = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{a}}$

**26.4** a) ..... $A = \sqrt{\frac{2}{a}}$

**26.4** b) ..... $A = \frac{1}{2\sqrt{a}}$

**26.4** c) ..... $A = \sqrt{\frac{3}{b}}$

**26.5** ..... a et c

**26.6** a) ..... 0

**26.6** b) ..... $\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

**26.6** c) ..... a

**26.6** d) ..... b

**26.6** e) ..... $|\Psi(x,t)|^2 = A^2$

**26.6** f) ..... oui

**26.7** a) ..... $A = \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}$

**26.7** b) ..... $\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}$

**26.7** c) ..... 0

**26.8** a) ..... b

**26.8** b) ..... $A = 2\alpha^{3/2}$

**26.8** c) ..... $1 - 5\mathrm{e}^{-2}$

**26.9** a) ..... $-\frac{2m}{\hbar^2} E \varphi_{\mathrm{I}}(x)$

**26.9** b) .. $A_{\mathrm{I}} \cos\left(\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} E x\right) + B_{\mathrm{I}} \sin\left(\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} E x\right)$

**26.9** c) ..... $-\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_{\mathrm{II}})\varphi_{\mathrm{II}}(x)$

**26.9** d) ..... $A_{\mathrm{II}} \cos\left(\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_{\mathrm{II}})} x\right) + B_{\mathrm{II}} \sin\left(\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_{\mathrm{II}})} x\right)$

**26.9** e) ..... $\frac{2m}{\hbar^2}(V_{\mathrm{III}} - E)\varphi_{\mathrm{III}}(x)$

**26.9** f) ..... $A_{\mathrm{III}} \mathrm{e}^{\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_{\mathrm{III}} - E)} x} + B_{\mathrm{III}} \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_{\mathrm{III}} - E)} x}$

**26.9** g) ..... $B_{\mathrm{III}} \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_{\mathrm{III}} - E)} x}$

**26.10** a) ..... b

**26.10** b) ..... $A_{\mathrm{I}} \mathrm{e}^{-Qa} = A_{\mathrm{II}} \cos(Ka)$

**26.10** c) ..... $\boxed{QA_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{-Qa} = KA_{\mathrm{II}}\sin(Ka)}$

**26.10** d) ..... $\boxed{A_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{-Qa} = A_{\mathrm{II}}\cos(Ka)}$

**26.10** e) ..... $\boxed{QA_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{-Qa} = KA_{\mathrm{II}}\sin(Ka)}$

**26.10** f) ..... $\boxed{A_{\mathrm{I}} = A_{\mathrm{III}}}$

**26.10** g) ..... $\boxed{\dfrac{Q}{K} = \tan(Ka)}$

**26.11** a) ..... (c)

**26.11** b) ..... $\boxed{A_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{-Qa} = -A_{\mathrm{II}}\sin(Ka)}$

**26.11** c) ..... $\boxed{QA_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{-Qa} = KA_{\mathrm{II}}\cos(Ka)}$

**26.11** d) ..... $\boxed{A_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{-Qa} = A_{\mathrm{II}}\sin(Ka)}$

**26.11** e) ..... $\boxed{-QA_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{-Qa} = KA_{\mathrm{II}}\cos(Ka)}$

**26.11** f) ..... $\boxed{A_{\mathrm{I}} = -A_{\mathrm{III}}}$

**26.11** g) ..... $\boxed{-\dfrac{K}{Q} = \tan(Ka)}$

**26.12** a) ..... $\boxed{\dfrac{16E(V_0 - E)}{V_0^2}}$

**26.12** b) ..... (b)

**26.12** c) ..... (b)

**26.12** d) ..... (a)

**26.13** a) ..... $\boxed{1{,}4 \cdot 10^{-4}}$

**26.13** b) ..... $\boxed{1{,}4\,\mu\mathrm{A}}$

**26.13** c) ..... (b)

**26.13** d) ..... $\boxed{1{,}7 \times 10^{-193}\,\mathrm{A}}$

## Corrigés

**26.1** b) Attention à la conversion de la masse $m$ du grain de pollen : on a $m = 5 \times 10^{-12}$ kg.

.....

**26.1** c) On a $\lambda = \dfrac{h}{p} = \dfrac{h}{m \times v} = \dfrac{6{,}6 \times 10^{-34}\,\mathrm{kg \cdot m^2 \dot{s}^{-1}} \cdot 3\,600\,\mathrm{s \cdot h}}{3 \times 10^{-21}\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}1 \times 10^{-3}\,\mathrm{m \cdot h}} = 8 \times 10^{-6}$ m.

.....

**26.1** d) On a $\lambda = \dfrac{h}{p} = \dfrac{h \times \mathcal{N}_A}{M \times v} = \dfrac{6{,}6 \times 10^{-34}\,\mathrm{kg \cdot m^2 \dot{s}^{-1}} \times 6{,}0 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}} \times 3\,600\,\mathrm{s \cdot h}}{32{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg \cdot mol^{-1}} \times 1\,800 \times 10^3\,\mathrm{m \cdot h}} = 2{,}5 \times 10^{-11}$ m.

.....

**26.1** e) On a, pour (a) : $10 \times 10^{-3}\,\mathrm{m} > 1{,}9 \times 10^{-32}\,\mathrm{m}$ ; pour (b) : $5 \times 10^{-6}\,\mathrm{m} > 7 \times 10^{-19}\,\mathrm{m}$ ; pour (c) $4{,}2 \times 10^{-8}\,\mathrm{m} < 8 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}$ ; pour (d) $2{,}9 \times 10^{-10}\,\mathrm{m} < 2{,}5 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}$.
Le virus de l'hépatite B ainsi que la molécule de $O_2$ peuvent donc être qualifiés de quantiques.

.....

**26.2** a) On obtient $|\varphi_1(M)|^2 = \dfrac{1}{2}$.

.....

**26.2** b) Avec l'ouverture des fentes n° 1 et n° 2, on obtient

$$|\varphi_1 + \varphi_2|^2 = |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\varphi_1\varphi_2^*) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{-\mathrm{i}}{2}\right) = \frac{3}{4}.$$

Il est également possible de raisonner à l'aide de la définition du module d'un nombre complexe :

$$|\varphi_1 + \varphi_2|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}}{2}\right|^2 = \left(\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

.....

**26.2** c) Avec l'ouverture des fentes n° 2 et n° 3, on obtient

$$|\varphi_2+\varphi_3|^2=|\varphi_2|^2+|\varphi_3|^2+2\,\mathrm{Re}(\varphi_2\varphi_3^*)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\times\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}}{\sqrt{6}}\right)=\frac{5}{12}+2\left(-\frac{\sqrt{6}}{12}\right)=\frac{5-2\sqrt{6}}{12}.$$

En effet, on a $\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}=-1$ et $\dfrac{1}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

.....

**26.2** d) Avec l'ouverture de toutes les fentes, on obtient

$$\begin{aligned}|\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3|^2&=|\varphi_1|^2+|\varphi_2|^2+|\varphi_3|^2+2\,\mathrm{Re}(\varphi_1\varphi_2^*+\varphi_1\varphi_3^*+\varphi_2\varphi_3^*)\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+2\,\mathrm{Re}\left(\frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{8}}+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}}{\sqrt{12}}+\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}}{\sqrt{24}}\right)=\frac{11}{12}+2\left(\frac{-1}{\sqrt{24}}\right)=\frac{11-2\sqrt{6}}{12}.\end{aligned}$$

.....

**26.3** a) Calculons la probabilité de présence dans tout l'espace. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x)|^2\,\mathrm{d}x=A\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-|x|/a}\,\mathrm{d}x=2A\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x/a}\,\mathrm{d}x=2A\big[-a\mathrm{e}^{-x/a}\big]_0^{+\infty}=2Aa=1.$$

Donc, on a $A=\dfrac{1}{2a}$.

.....

**26.3** b) De même, calculons la probabilité de présence dans tout l'espace. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x)|^2\,\mathrm{d}x=A^2\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2|x|/b}\,\mathrm{d}x=2A^2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x/b}\,\mathrm{d}x=2A^2\left[-\frac{b}{2}\mathrm{e}^{-2x/a}\right]_0^{+\infty}=A^2b=1.$$

Donc, on a $A=\dfrac{1}{\sqrt{b}}$.

.....

**26.3** c) De même, calculons la probabilité de présence dans tout l'espace. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x)|^2\,\mathrm{d}x=A^2\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x=A^2\left[x-\frac{x^3}{3a^2}\right]_{-a}^{a}=\frac{4}{3}A^2a=1\quad\text{donc}\quad A=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{a}}.$$

.....

**26.4** a) De même, calculons la probabilité de présence dans tout l'espace. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x)|^2\,\mathrm{d}x=A^2\int_0^a\cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x=\frac{A^2}{2}\int_0^a\left(1+\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right)\mathrm{d}x=\frac{A^2}{2}\left[x+\frac{a}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right]_0^a=\frac{A^2a}{2}=1.$$

Donc, on a $A=\sqrt{\dfrac{2}{a}}$.

.....

**26.4** b) Tout d'abord, calculons la densité de probabilité de présence $|\varphi(x)|^2$ : on a

$$|\varphi(x)|^2=\varphi(x)\varphi^*(x)=A^2\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi x/a}+1\right)\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi x/a}+1\right)=2A^2\left(1+\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right).$$

Passons à la probabilité de présence dans tout l'espace. On a

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x)|^2\,\mathrm{d}x=2A^2\int_{-a}^{a}\left(1+\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right)\mathrm{d}x=2A^2\left[x+\frac{a}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right]_{-a}^{a}=4A^2a=1.$$

Ainsi, on a $A=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

.....

**26.4** c) Par décomposition, la probabilité de présence $P$ dans tout l'espace s'écrit

$$P = A^2 \int_0^a \frac{x^2}{a^2}\,\mathrm{d}x + A^2 \int_a^b \frac{(b-x)^2}{(b-a)^2}\,\mathrm{d}x = A^2 \left[\frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a + \frac{A^2}{(b-a)^2}\left[\frac{X^3}{3}\right]_0^{b-a} = \frac{A^2 a}{3} + \frac{A^2(b-a)}{3},$$

où on utilise le changement de variable $X = b - x$. La normalisation de la probabilité donne $A = \sqrt{\frac{3}{b}}$.

.....

**26.5** En mécanique quantique, un état stationnaire est représenté par une fonction d'onde dont la densité de probabilité de présence $|\Psi(x,t)|^2$ est indépendante du temps.

(a) $|\Psi(x,t)|^2 = A^2 \neq f(t)$.

(b) $|\Psi(x,t)|^2 = A^2 \cos^2(kx - \omega t) = f(x,t)$.

(c) $|\Psi(x,t)|^2 = A^2 \cos^2(kx) \neq f(t)$.

(d) $|\Psi(x,t)|^2 = A^2 \cos^2(kx)\cos^2(\omega t) = f(x,t)$.

(e) $|\Psi(x,t)|^2 = 2A^2(1 + \cos((\omega_2 - \omega_1)t)) = f(t)$.

Ainsi, les fonctions d'onde (a) et (c) représentent des états stationnaires.

.....

**26.6** a) La grandeur $V(x,t)$ représente l'énergie potentielle. Pour une particule libre, elle est nulle.

.....

**26.6** c) Seule la forme $\Psi(x,t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$ permet de retrouver, avec les bons signes, l'énergie totale d'une particule quantique : $\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V = \hbar\omega$, où $V = 0$ puisqu'il s'agit d'une particule libre.

.....

**26.6** d) La fonction d'onde s'exprime comme une fonction de la forme $f(x - ct)$, il s'agit d'une onde progressive suivant les $x$ croissants.

.....

**26.6** f) La densité de probabilité de présence $|\Psi(x,t)|^2$ ne dépend pas du temps alors l'état est stationnaire.

.....

**26.7** a) Calculons la probabilité de présence dans tout l'espace. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2\,\mathrm{d}x = A^2 \int_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}} \cos^2(\alpha x)\,\mathrm{d}x = A^2 \int_0^{\frac{\pi}{2\alpha}} (1 + \cos(2\alpha x))\,\mathrm{d}x = A^2 \left[x + \frac{1}{2\alpha}\sin(2\alpha x)\right]_0^{\frac{\pi}{2\alpha}} = \frac{A^2\pi}{2\alpha} = 1.$$

Donc, on a $A = \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}$.

.....

**26.7** b) Pour calculer cette probabilité, reprenons le calcul précédent en changeant les bornes d'intégration :

$$P = \int_0^{\frac{\pi}{4\alpha}} |\varphi(x)|^2\,\mathrm{d}x = \frac{A^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4\alpha}} (1 + \cos(2\alpha x))\,\mathrm{d}x = \frac{\alpha}{\pi}\left[x + \frac{1}{2\alpha}\sin(2\alpha x)\right]_0^{\frac{\pi}{4\alpha}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}.$$

.....

**26.7** c) Le calcul de la position moyenne n'est pas nécessaire. Il suffit de remarquer que la densité de probabilité de présence est paire dans l'intervalle. Par conséquent, la position moyenne est nulle : $\langle x \rangle = 0$.

.....

**26.8** a) Le calcul de la probabilité de présence dans tout l'espace s'écrit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2\,\mathrm{d}x = A^2 \int_0^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-2\alpha x}\,\mathrm{d}x.$$

Il s'agit donc de la réponse (b).

.....

**26.8** b) La normalisation de la fonction d'onde impose

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2 \, \mathrm{d}x = A^2 \int_0^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-2\alpha x} \, \mathrm{d}x = 1.$$

Calculons l'intégrale, à l'aide d'une intégration par parties : on a

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-2\alpha x} \, \mathrm{d}x &= \left[-\frac{x^2}{2\alpha}\mathrm{e}^{-2\alpha x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{x}{\alpha}\mathrm{e}^{-2\alpha x} \, \mathrm{d}x \\ &= 0 + \frac{1}{\alpha}\left(\left[-\frac{x}{2\alpha}\mathrm{e}^{-2\alpha x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\alpha}\mathrm{e}^{-2\alpha x} \, \mathrm{d}x\right) = 0 - \frac{1}{4\alpha^3}\left[\mathrm{e}^{-2\alpha x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{4\alpha^3}.\end{aligned}$$

Il vient, par normalisation, $A = 2\alpha^{3/2}$.

.....

**26.8** c) La probabilité de trouver la particule dans l'intervalle $[0, 1/\alpha]$ se détermine par

$$P = \int_0^{1/\alpha} |\Psi(x,t)|^2 = 4\alpha^3 \int_0^{1/\alpha} x^2 \mathrm{e}^{-2\alpha x} \, \mathrm{d}x.$$

Le calcul est similaire au cas précédent en remplaçant le borne supérieure. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_0^{1/\alpha} x^2 \mathrm{e}^{-2\alpha x} \, \mathrm{d}x &= \left[-\frac{x^2}{2\alpha}\mathrm{e}^{-2\alpha x}\right]_0^{1/\alpha} + \int_0^{1/\alpha} \frac{x}{\alpha}\mathrm{e}^{-2\alpha x} \, \mathrm{d}x \\ &= -\frac{\mathrm{e}^{-2}}{2\alpha^3} + \frac{1}{\alpha}\left(\left[-\frac{x}{2\alpha}\mathrm{e}^{-2\alpha x}\right]_0^{1/\alpha} + \int_0^{1/\alpha} \frac{1}{2\alpha}\mathrm{e}^{-2\alpha x} \, \mathrm{d}x\right) \\ &= -\frac{\mathrm{e}^{-2}}{2\alpha^3} - \frac{\mathrm{e}^{-2}}{2\alpha^3} - \frac{1}{4\alpha^2}\left[\mathrm{e}^{-2\alpha x}\right]_0^{1/\alpha} = \frac{1}{4\alpha^3}\left(1 - 5\mathrm{e}^{-2}\right).\end{aligned}$$

Finalement, $P = 1 - 5\mathrm{e}^{-2}$.

.....

**26.9** a) Dans la zone I, le potentiel est nul. Donc, d'après l'équation de Schrödinger indépendante du temps,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\varphi_{\mathrm{I}}(x)}{\mathrm{d}x^2} = E\varphi_{\mathrm{I}}(x) \qquad \text{donc} \qquad \frac{\mathrm{d}^2\varphi_{\mathrm{I}}(x)}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}E\varphi_{\mathrm{I}}(x).$$

.....

**26.9** b) Comme le coefficient $-\dfrac{2m}{\hbar^2}E < 0$, il vient que $\varphi_{\mathrm{I}}(x) = A_{\mathrm{I}}\cos\left(\sqrt{\dfrac{2m}{\hbar^2}E}x\right) + B_{\mathrm{I}}\sin\left(\sqrt{\dfrac{2m}{\hbar^2}E}x\right)$.

.....

**26.9** c) Dans la zone II, d'après l'équation de Schrödinger indépendante du temps, il vient que

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\varphi_{\mathrm{II}}(x)}{\mathrm{d}x^2} + V_{\mathrm{II}}\varphi_{\mathrm{II}}(x) = E\varphi_{\mathrm{II}}(x) \qquad \text{donc} \qquad \frac{\mathrm{d}^2\varphi_{\mathrm{II}}(x)}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_{\mathrm{II}})\varphi_{\mathrm{II}}(x).$$

.....

**26.9** d) Comme le coefficient $-\dfrac{2m}{\hbar^2}(E - V_{\mathrm{II}}) < 0$ il vient que

$$\varphi_{\mathrm{II}}(x) = A_{\mathrm{II}}\cos\left(\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_{\mathrm{II}})}x\right) + B_{\mathrm{II}}\sin\left(\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_{\mathrm{II}})}x\right).$$

.....

**26.9** e) Dans la zone III, d'après l'équation de Schrödinger indépendante du temps, il vient que

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\varphi_{\mathrm{III}}(x)}{\mathrm{d}x^2}+V_{\mathrm{III}}\varphi_{\mathrm{II}}(x)=E\varphi_{\mathrm{III}}(x)\quad\text{soit}\quad\frac{\mathrm{d}^2\varphi_{\mathrm{II}}(x)}{\mathrm{d}x^2}=\frac{2m}{\hbar^2}(V_{\mathrm{III}}-E)\varphi_{\mathrm{II}}(x).$$

.....

**26.9** f) Comme on a $\frac{2m}{\hbar^2}(V_{\mathrm{III}}-E)>0$, il vient que

$$\varphi_{\mathrm{III}}(x)=A_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_{\mathrm{III}}-E)}x}+B_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_{\mathrm{III}}-E)}x}.$$

.....

**26.9** g) Lorsque $x\to+\infty$ dans la zone III, le terme $A_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_{\mathrm{III}}-E)}x}\to+\infty$, il faut donc le supprimer afin que la fonction d'onde soit de carré sommable. Ainsi, on a $\varphi_{\mathrm{III}}(x)=B_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_{\mathrm{III}}-E)}x}$.

.....

**26.10** a) En dérivant par rapport à $x$ les expressions données pour les fonctions $\varphi_{\mathrm{I}}$, $\varphi_{\mathrm{II}}$ et $\varphi_{\mathrm{III}}$, on trouve directement $\gamma=A_{\mathrm{III}}$, $\alpha=A_{\mathrm{II}}$ et $\beta=A_{\mathrm{I}}$.

.....

**26.10** b) On a $A_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{-Qa}=A_{\mathrm{II}}\cos(-Ka)$ donc $A_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{-Qa}=A_{\mathrm{II}}\cos(Ka)$.

.....

**26.10** c) On a $QA_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{-Qa}=-KA_{\mathrm{II}}\sin(-Ka)$ donc $QA_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{-Qa}=KA_{\mathrm{II}}\sin(Ka)$.

.....

**26.10** e) On a $-QA_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{-Qa}=-KA_{\mathrm{II}}\sin(Ka)$ donc $QA_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{-Qa}=KA_{\mathrm{II}}\sin(Ka)$.

.....

**26.10** f) D'après les réponses aux questions b) et d), il vient que

$$A_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{-Qa}=A_{\mathrm{II}}\cos(Ka)\quad\text{et}\quad A_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{-Qa}=A_{\mathrm{II}}\cos(Ka)\quad\text{donc}\quad A_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{-Qa}=A_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{-Qa}\quad\text{soit}\quad A_{\mathrm{I}}=A_{\mathrm{III}}.$$

.....

**26.10** g) D'après les réponses des questions d) et e), il vient que

$$A_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{-Qa}=A_{\mathrm{II}}\cos(Ka)\qquad\text{et}\qquad QA_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{-Qa}=KA_{\mathrm{II}}\sin(Ka).$$

Donc, on a $QA_{\mathrm{II}}\cos(Ka)=KA_{\mathrm{II}}\sin(Ka)$ ; et donc $\frac{Q}{K}=\tan(Ka)$.

.....

**26.11** a) En dérivant par rapport à $x$ les expressions données pour les fonctions $\varphi_{\mathrm{I}}$, $\varphi_{\mathrm{II}}$ et $\varphi_{\mathrm{III}}$, on trouve directement $\alpha=A_{\mathrm{III}}$, $\beta=A_{\mathrm{II}}$ et $\delta=A_{\mathrm{I}}$.

.....

**26.11** b) On a $A_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{-Qa}=A_{\mathrm{II}}\sin(-Ka)$ donc $A_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{-Qa}=-A_{\mathrm{II}}\sin(Ka)$.

.....

**26.11** c) On a $QA_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{-Qa}=KA_{\mathrm{II}}\cos(-Ka)$ donc $QA_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{-Qa}=KA_{\mathrm{II}}\cos(Ka)$.

.....

**26.11** f) D'après les réponses des questions e) et g), il vient que

$$QA_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{-Qa}=KA_{\mathrm{II}}\cos(Ka)\qquad\text{et}\qquad-QA_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{-Qa}=KA_{\mathrm{II}}\cos(Ka).$$

Donc, on a $QA_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{-Qa}=-QA_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{-Qa}$ ; et donc $A_{\mathrm{I}}=-A_{\mathrm{III}}$.

.....

**26.11** g) D'après les réponses des questions f) et g), il vient que

$$A_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{-Qa} = A_{\mathrm{II}}\sin(Ka) \qquad \text{et} \qquad -QA_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{-Qa} = KA_{\mathrm{II}}\cos(Ka).$$

Donc, on a $-QA_{\mathrm{II}}\sin(Ka) = KA_{\mathrm{II}}\cos(Ka)$ ; et donc $-\dfrac{K}{Q} = \tan(Ka)$.

.....

**26.12** a) Grâce à l'approximation donnée dans l'énoncé, on peut écrire :

$$1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0-E)}\sinh^2(ka) \approx \frac{V_0^2}{4E(V_0-E)}\left(\frac{\mathrm{e}^{ka}}{2}\right)^2 = \frac{V_0^2\mathrm{e}^{2ka}}{16E(V_0-E)}.$$

Le coefficient $T$ s'écrit donc :

$$T = \frac{16E(V_0-E)}{V_0^2}\mathrm{e}^{-2ka} \quad \text{d'où} \quad T_0 = \frac{16E(V_0-E)}{V_0^2}.$$

.....

**26.12** b) Le coefficient de transmission est proportionnel à $\mathrm{e}^{-2ka}$. Ainsi, plus la barrière est épaisse (donc plus $a$ est grand), plus la probabilité de transmission diminue.

.....

**26.12** c) En explicitant la valeur de $k$, on voit que le coefficient de transmission est proportionnel à $\mathrm{e}^{-\sqrt{m}}$ : plus $m$ augmente, plus la probabilité de transmission diminue. Un proton a donc beaucoup moins de chances d'être transmis qu'un électron.

.....

**26.12** d) Si l'énergie $E$ de la particule augmente, $k$ diminue et ainsi, le coefficient de transmission $T = \mathrm{e}^{-2ka}$ augmente.

.....

**26.13** a) Dans le cas d'un électron, de masse $m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$, on trouve $k = 5{,}2 \times 10^9\,\mathrm{m}^{-1}$, ce qui conduit à $T = 1{,}4 \cdot 10^{-4}$.

.....

**26.13** b) L'intensité transmise $I_t$ est donnée par $I_t = T \times I = 1,4 \times 10^{-4} \times 10\,\mathrm{mA} = 1{,}4 \times 10^{-6}\,\mathrm{A} = 1{,}4\,\mu\mathrm{A}$.

.....

**26.13** c) Même justification que pour la question c) de l'exercice précédent.

.....

**26.13** d) En remplaçant par des protons, on obtient $k = 4{,}2 \times 10^{11}\,\mathrm{m}^{-1}$ et $T' = 1,7 \times 10^{-191}$ : la probabilité de transmission est extrêmement faible. Par conséquent, $I'_t = T' \times I = 11{,}7 \times 10^{-193}\,\mathrm{A}$.

On peut considérer le courant transmis $I'_t$ nul.

.....

# Fiche n° 27. Physique du laser

## Réponses

**27.1** a) ..... $\boxed{84{,}6\,\mu\text{m}}$

**27.1** b) ..... $\boxed{0{,}411\,\text{mm}}$

**27.2** a) ..... $\boxed{\dfrac{z_\text{R}^2}{z}}$

**27.2** b) ..... $\boxed{w_0}$

**27.2** c) ..... $\boxed{\left(k - \dfrac{1}{z_\text{R}}\right)z}$

**27.2** d) ..... $\boxed{\exp\left[\text{j}(\omega t - \left(k - \dfrac{1}{z_\text{R}}\right)z)\right]}$

**27.2** e) ..... $\boxed{\text{a}}$

**27.3** a) ..... $\boxed{z}$

**27.3** b) ..... $\boxed{w_0 \dfrac{z}{z_\text{R}}}$

**27.3** c) ..... $\boxed{kz - \dfrac{\pi}{2}}$

**27.3** d) ..... $\boxed{\dfrac{z_\text{R}}{z}\exp\left[\text{j}\left(\omega t - kz + \dfrac{\pi}{2}\right)\right]}$

**27.3** e) ..... $\boxed{\text{b}}$

**27.4** a) ..... $\boxed{\dfrac{w_0}{z_\text{R}}}$

**27.4** b) ..... $\boxed{\text{b}}$

**27.5** a) ..... $\boxed{k\dfrac{zr^2}{2(z^2 + z_\text{R}^2)}}$

**27.5** b) ..... $\boxed{\dfrac{2z_\text{R}}{k}\left(1 + \dfrac{z^2}{z_\text{R}^2}\right)}$

**27.5** c) ..... $\boxed{\sqrt{\dfrac{\lambda z_\text{R}}{\pi}}}$

**27.5** d) ..... $\boxed{E_0 w_0}$

**27.6** a) ..... $\boxed{\text{c}}$

**27.6** b) ..... $\boxed{\text{d}}$

**27.7** a) ..... $\boxed{-A_{21}N_2(t)\,\text{d}t}$

**27.7** b) ..... $\boxed{N_2^0 \exp(-A_{21}t)}$

**27.7** c) ..... $\boxed{\tau \ln(2)}$

**27.8** a) ..... $\boxed{u_0 \Delta\nu}$

**27.8** b) ..... $\boxed{\dfrac{\mathcal{J}h\nu}{c\Delta\nu}}$

**27.9** a) ..... $\boxed{h\nu\mathcal{J}}$

**27.9** b) ..... $\boxed{T^{-1}}$

**27.9** c) ..... $\boxed{L^2}$

**27.10** a) ..... $\boxed{\sigma\mathcal{J}(N_1(t) - N_2(t))}$

**27.10** b) ..... $\boxed{-2\sigma\mathcal{J}D(t)}$

**27.10** c) ..... $\boxed{Sc\sigma\mathcal{J}(N_2(t) - N_1(t))\,\text{d}t}$

**27.10** d) ..... $\boxed{c\sigma\mathcal{J}D(t)}$

**27.10** e) ..... $\boxed{\text{c}}$

**27.11** a) ..... $\boxed{\dfrac{1}{\Delta t}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \mathcal{E}_0 \dfrac{D^2}{8}\text{e}^{-x}\,\text{d}x\,\text{d}\theta}$

**27.11** b) ..... $\boxed{\mathcal{E}_0 \dfrac{\pi D^2}{4\Delta t}}$

**27.11** c) ..... $\boxed{P\left(1 - \text{e}^{-d^2/D^2}\right)}$

**27.11** d) ..... $\boxed{d\sqrt{\dfrac{-1}{\ln\left(1 - \frac{P'}{P}\right)}}}$

**27.11** e) ..... $\boxed{1{,}50\,\text{cm}}$

**27.12** a) ..... $\boxed{\dfrac{P}{f}}$

**27.12** b) ..... $\boxed{\dfrac{P}{f\Delta t}}$

**27.12** c) ..... $\boxed{\text{b}; \text{c}; \text{d}; \text{a}}$

**27.13** a) ..... $\boxed{\dfrac{S_0 t_1 t_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi/2}}{1 - r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}}}$

**27.13** b) ..... $\boxed{\dfrac{S_0^2 t_1^2 t_2^2}{(1 - r_1 r_2)^2 + 4 r_1 r_2 \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}}$

**27.13** c) ..... $\boxed{\dfrac{S_0^2 t_1^2 t_2^2}{(1 - r_1 r_2)^2}}$

**27.13** d) ..... $\boxed{\dfrac{4 r_1 r_2}{(1 - r_1 r_2)^2}}$

**27.14** a) ..... (b)

**27.14** b) ..... (a)

**27.14** c) ..... (b)

**27.14** d) ..... (d)

**27.14** e) ..... (d)

**27.14** f) ..... (c)

**27.15** a) ..... $\boxed{I(\nu) = \dfrac{I_{\max}}{1 + m\left(2\pi \frac{nL}{c} \nu\right)^2}}$

**27.15** b) ..... $\boxed{\dfrac{c}{2\pi n L \sqrt{m}}}$

**27.15** c) ..... $\boxed{\dfrac{c}{\pi n L \sqrt{m}}}$

**27.15** d) ..... $\boxed{\dfrac{\pi\sqrt{m}}{2}}$

## Corrigés

**27.1** a) On écrit $w_0 = \sqrt{\dfrac{\lambda z_{\mathrm{R}}}{\pi}}$ ; cela donne : $w_0 = \sqrt{\dfrac{450 \times 10^{-9}\,\mathrm{m} \times 5 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}}{\pi}} = 84{,}6\,\mu\mathrm{m}$.

.....

**27.1** b) On a cette fois $w_0 = \sqrt{\dfrac{10{,}6 \times 10^{-6}\,\mathrm{m} \times 5 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}}{\pi}} = 0{,}411\,\mathrm{mm}$.

.....

**27.2** a) Quand $z \ll z_{\mathrm{R}}$, on a $\dfrac{z_{\mathrm{R}}}{z} \gg 1$ ; donc, on a $R(z) \approx \dfrac{z_{\mathrm{R}}^2}{z}$.

.....

**27.2** b) Quand $z \ll z_{\mathrm{R}}$, on a $\dfrac{z}{z_{\mathrm{R}}} \ll 1$ ; il vient $w(z) \approx w_0$.

.....

**27.2** c) Quand $z \ll z_{\mathrm{R}}$, on a $\arctan\left(\dfrac{z}{z_{\mathrm{R}}}\right) \approx \dfrac{z}{z_{\mathrm{R}}}$, on obtient alors

$$\phi(r,z) \approx \left(k - \frac{1}{z_{\mathrm{R}}}\right) z + \frac{k r^2 z}{2 z_{\mathrm{R}}^2} \approx \left(k - \frac{1}{z_{\mathrm{R}}}\right) z \qquad \text{car } \frac{k r^2}{z_{\mathrm{R}}^2} \ll \frac{1}{z_{\mathrm{R}}}.$$

.....

**27.2** d) Pour $z \ll z_{\mathrm{R}}$, on a montré que $w(z) \approx w_0$. Si $r \ll w_0$, on a $\exp\left(-\dfrac{r^2}{w_0^2}\right) \approx 1$. Comme on a montré à la question c) que $\phi \approx \left(k - \dfrac{1}{z_{\mathrm{R}}}\right) z$, il vient dès lors :

$$\psi(r,z,t) = \psi(z,t) \approx \exp\left[\mathrm{j}\left(\omega t - \left(k - \frac{1}{z_{\mathrm{R}}}\right) z\right)\right].$$

.....

**27.2** e) L'expression de $\psi(z,t)$ établie à la question d) est caractéristique de celle d'une onde plane progressive harmonique. D'où la réponse (a).

.....

**27.3** a) Quand $z \gg z_{\mathrm{R}}$, on a $\dfrac{z_{\mathrm{R}}}{z} \ll 1$ ; donc, on a $R(z) \approx z$.

**27.3** b) Quand $z \gg z_{\mathrm{R}}$, on a $w(z) \approx w_0 \dfrac{z}{z_{\mathrm{R}}}$.

**27.3** c) Quand $z \gg z_{\mathrm{R}}$, on a $\dfrac{z}{z_{\mathrm{R}}} \gg 1$ et $\arctan\left(\dfrac{z}{z_{\mathrm{R}}}\right) \approx \dfrac{\pi}{2}$. On obtient ainsi $\phi(r,z) \approx kz - \dfrac{\pi}{2}$ car $\dfrac{kr^2}{2z} \ll 1$.

**27.3** d) Quand $z \gg z_{\mathrm{R}}$, $r \ll w_0$ et $z \gg kr^2$, la vibration scalaire s'écrit :

$$\psi(r,z,t) \approx \psi(z,t) \approx \frac{z_{\mathrm{R}}}{z} \exp\left[\mathrm{j}\left(\omega t - kz + \frac{\pi}{2}\right)\right].$$

**27.3** e) Dans l'expression de la vibration scalaire $\psi(z,t) \approx \dfrac{z_{\mathrm{R}}}{z} \exp\left[\mathrm{j}\left(\omega t - kz + \dfrac{\pi}{2}\right)\right]$, on reconnaît la forme caractéristique d'une onde progressive harmonique sphérique, dont l'amplitude décroît comme l'inverse de la distance au point source (ici en $z = 0$). D'où la réponse (b).

**27.4** a) La divergence angulaire du faisceau est donnée par la relation : $\tan(\theta) = \dfrac{w(z)}{z} \approx \dfrac{w_0}{z_{\mathrm{R}}}$.

**27.4** b) On a montré que $\tan(\theta) \approx \dfrac{w_0}{z_{\mathrm{R}}}$. La fonction tangente étant croissante sur $[0, \pi/2]$, $\theta$ croît quand $z_{\mathrm{R}}$ diminue, d'où la réponse (b).

**27.5** a) On écrit $-\mathrm{j}k\dfrac{r^2}{2(z+\mathrm{j}z_{\mathrm{R}})} = -\mathrm{j}k\dfrac{r^2}{2(z^2+z_{\mathrm{R}}^2)}(z - \mathrm{j}z_{\mathrm{R}})$. En remarquant que $(-\mathrm{j}) \times (-\mathrm{j}) = -1$, il vient :

$$-\mathrm{j}k\frac{r^2(z-\mathrm{j}z_{\mathrm{R}})}{2(z+\mathrm{j}z_{\mathrm{R}})} = \frac{-kr^2}{2(z^2+z_{\mathrm{R}}^2)}(z_{\mathrm{R}} + \mathrm{j}z) \qquad \text{donc} \qquad \theta = k\frac{zr^2}{2(z^2+z_{\mathrm{R}}^2)}.$$

**27.5** b) On réécrit $\exp\left(-\mathrm{j}k\dfrac{r^2}{2(z+\mathrm{j}z_{\mathrm{R}})}\right) = \exp\left(-k\dfrac{r^2 z_{\mathrm{R}}}{2(z^2+z_{\mathrm{R}}^2)}\right)\exp(-j\theta)$. On sait que $|\mathrm{e}^{-j\theta}| = 1$.

On forme le module carré de $\exp\left(-\mathrm{j}k\dfrac{r^2}{2(z+\mathrm{j}z_{\mathrm{R}})}\right)$ qui donne

$$\left|\exp\left(-\mathrm{j}k\frac{r^2}{2(z+\mathrm{j}z_{\mathrm{R}})}\right)\right|^2 = \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2(z)}\right) \quad \text{avec} \quad w^2(z) = \frac{2\left(z^2+z_{\mathrm{R}}^2\right)}{kz_{\mathrm{R}}} = \frac{2z_{\mathrm{R}}}{k}\left(1 + \frac{z^2}{z_{\mathrm{R}}^2}\right).$$

**27.5** c) On a montré à la question précédente que $w^2(z) = \dfrac{2z_{\mathrm{R}}}{k}\left(1 + \dfrac{z^2}{z_{\mathrm{R}}^2}\right)$. Comme on a $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, on en déduit que $w^2(z) = \dfrac{\lambda z_{\mathrm{R}}}{\pi}\dfrac{(z^2+z_{\mathrm{R}}^2)}{z_{\mathrm{R}}^2}$. On en déduit $w(z) = w_0\sqrt{1 + z^2/z_{\mathrm{R}}^2}$ en posant $w_0 = \sqrt{\dfrac{\lambda z_{\mathrm{R}}}{\pi}}$.

**27.5** d) On calcule : $A(z) = E_0\dfrac{z_{\mathrm{R}}}{\sqrt{(z^2+z_{\mathrm{R}}^2)}} = \dfrac{E_0}{\sqrt{1+z^2/z_{\mathrm{R}}^2}}$. On en déduit, compte tenu de l'expression proposée pour $w(z)$, que $A(z)w(z) = E_0 w_0$.

**27.6** a) On calcule : $\displaystyle\int_0^\infty \exp(-\alpha t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\alpha}[\exp(-\alpha t)]_0^\infty = \frac{1}{\alpha}$, soit la réponse (c).

**27.6** b) Une intégration par parties donne $\displaystyle\int_0^\infty t \times \exp(-\alpha t)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{t}{\alpha}\exp(-\alpha t)\right]_0^\infty + \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty \exp(-\alpha t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha^2}$.

**27.7** a) Entre les dates $t$ et $t + \mathrm{d}t$, la variation du nombre d'atomes par unité de volume sur le niveau 2 vaut : $\mathrm{d}N_2 = -A_{21} N_2(t)\,\mathrm{d}t$ (avec un signe « $-$ » car le niveau 2 se dépeuple).

.....

**27.7** b) En utilisant le résultat de la question précédente, on obtient l'équation différentielle à variables séparées : $\dfrac{\mathrm{d}N_2}{N_2} = -A_{21}\,\mathrm{d}t$. En intégrant entre $t = 0$ et une date $t$ quelconque, on obtient : $\ln\left(\dfrac{N_2(t)}{N_2(0)}\right) = -A_{21}t$.

Ainsi, on a $N_2(t) = N_2^0 \exp(-A_{21}t)$.

.....

**27.7** c) On a immédiatement : $N_2\big(T_{1/2}\big) = N_2^0 \exp(-A_{21}T_{1/2}) = \dfrac{N_2^0}{2}$, d'où $\exp(-A_{21}T_{1/2}) = \dfrac{1}{2}$, qui donne $-A_{21}T_{1/2} = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$, soit encore $-A_{21}T_{1/2} = -\ln(2)$. On obtient finalement : $T_{1/2} = \dfrac{\ln(2)}{A_{21}} = \tau \ln(2)$.

.....

**27.8** a) La densité spectrale d'énergie, c'est-à-dire l'énergie électromagnétique par unité de volume et par unité de fréquence étant constante pour les fréquences comprises entre $\nu - \Delta\nu/2$ et $\nu + \Delta\nu/2$ et nulle partout ailleurs, l'énergie volumique s'écrit simplement $\varpi = u_0 \Delta\nu$.

.....

**27.8** b) Pour répondre, raisonnons pendant la durée $\mathrm{d}t$ au cours de laquelle les photons parcourent dans le milieu la distance $\mathrm{d}\ell = c\,\mathrm{d}t$.

La quantité $\varpi = u_0 \Delta\nu$ représente l'énergie volumique du rayonnement.

L'énergie contenue dans le volume $\mathrm{d}V = cS\,\mathrm{d}t$ peut s'écrire sous les deux formes égales

$$\mathrm{d}E = (u_0 \Delta\nu) Sc\,\mathrm{d}t = \mathcal{P}\,\mathrm{d}t,$$

où $\mathcal{P}$ est la puissance du faisceau, reliée à son éclairement par $\mathcal{E} = \dfrac{\mathcal{P}}{S}$. On obtient ainsi : $(u_0 \Delta\nu) Sc\,\mathrm{d}t = \mathcal{E} S\,\mathrm{d}t$, soit $(u_0 \Delta\nu)c = \mathcal{E}$. En utilisant la relation $\mathcal{E} = h\nu\mathcal{J}$, on aboutit à : $u_0 = \dfrac{h\nu\mathcal{J}}{c\Delta\nu}$.

.....

**27.9** a) L'éclairement du faisceau, c'est-à-dire sa puissance surfacique, est le produit de l'énergie d'un photon par le nombre de photons par unité de temps et unité de surface qui traversent le faisceau, soit $\mathcal{E} = \mathcal{J}h\nu$.

.....

**27.9** b) Les grandeurs $\dfrac{\mathrm{d}P_{12}}{\mathrm{d}t}$ ou $\dfrac{\mathrm{d}P_{21}}{\mathrm{d}t}$ représentent une probabilité (terme sans dimension) par atome et par unité de temps. Ces termes sont donc homogènes à l'inverse d'un temps, soit $\left[\dfrac{\mathrm{d}P_{12}}{\mathrm{d}t}\right] = \left[\dfrac{\mathrm{d}P_{21}}{\mathrm{d}t}\right] = T^{-1}$.

.....

**27.9** c) En raisonnant avec les dimensions, on a

$$[\sigma_{12}] = \frac{\left[\dfrac{\mathrm{d}P_{12}}{\mathrm{d}t}\right]}{[\mathcal{J}]} \qquad \text{donc} \qquad [\sigma_{12}] = \frac{T^{-1}}{L^{-2}.T^{-1}} = L^2.$$

Même raisonnement pour $\sigma_{21}$ : les grandeurs $\sigma_{12}$ et $\sigma_{21}$ sont homogènes à une surface.

*On appelle généralement $\sigma_{12}$ la section efficace d'absorption et $\sigma_{21}$ la section efficace d'émission stimulée.*

.....

**27.10** a) En négligeant les pertes par émission spontanée, la population d'atomes sur le niveau 2 diminue, par unité de temps, de $\sigma\mathcal{J}N_2(t)$ du fait du processus d'émission stimulée et augmente, toujours par unité de temps de $\sigma\mathcal{J}N_1(t)$ du fait du processus d'absorption du rayonnement. D'où le bilan : $\dfrac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = \sigma\mathcal{J}(N_1(t) - N_2(t))$.

.....

**27.10** b) Puisque $N_1(t)+N_2(t)=\mathrm{C}^{\mathrm{ste}}$, on aura dans le milieu, $\dfrac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t}$, d'où $\dfrac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}=2\dfrac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t}$, qui donne avec la question précédente : $\dfrac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}=-2\sigma\mathcal{J}D(t)$.

.....

**27.10** c) Pendant la durée $\mathrm{d}t$, le rayonnement parcourt dans la cavité une distance égale à $c\,\mathrm{d}t$ et balaie le volume égal à $\mathrm{d}V=Sc\,\mathrm{d}t$.

Dans ce volume, $N_2(t)\sigma\mathcal{J}\,\mathrm{d}V$ photons sont produits par émission stimulée et $N_1(t)\sigma\mathcal{J}\,\mathrm{d}V$ photons sont absorbés par le milieu traversé par le rayonnement. La production nette de photons dans le volume $\mathrm{d}V$ pendant $\mathrm{d}t$ vaut donc : $\mathrm{d}\mathcal{N}(t)=\sigma\mathcal{J}(N_2(t)-N_1(t))\,\mathrm{d}V=\sigma\mathcal{J}D(t)\,\mathrm{d}V=Sc\sigma\mathcal{J}D(t)\,\mathrm{d}t$.

.....

**27.10** d) En reprenant le résultat de la question précédente, on a immédiatement : $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{J}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{S}\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{N}}{\mathrm{d}t}=c\sigma\mathcal{J}D(t)$.

*La quantité* $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{J}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{S}\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{N}}{\mathrm{d}t}$ *est le flux surfacique de photons.*

.....

**27.10** e) Les équations d'évolution de $D(t)$ et $\mathcal{J}$ établies en b) et d), s'écrivent en régime stationnaire :

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}=0=-2\sigma\mathcal{J}D\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}\mathcal{J}}{\mathrm{d}t}=\sigma\mathcal{J}D.\end{cases}$$

Puisque $D(t)<0$, la seule solution possible est $\mathcal{J}=0$, soit la réponse (c).

Ce résultat montre qu'il est impossible d'obtenir un effet laser avec un système à deux niveaux seulement.

.....

**27.11** a) Si on différencie de chaque côté de l'équation $x=4\dfrac{\rho^2}{D^2}$, il vient que $\mathrm{d}x=8\dfrac{\rho\,\mathrm{d}\rho}{D^2}$ donc que $\rho\,\mathrm{d}\rho=\dfrac{D^2}{8}\,\mathrm{d}x$.

Si on étudie les bornes de l'intégrale, pour $\rho=0$ il vient que $x=0$, et pour $\rho\to\infty$ il vient que $x\to\infty$. Ainsi, on a

$$P=\frac{1}{\Delta t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\mathcal{E}_0\mathrm{e}^{-4\frac{\rho^2}{D^2}}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{\Delta t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\mathcal{E}_0\frac{D^2}{8}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta.$$

.....

**27.11** b) On calcule l'intégrale précédente :

$$\begin{aligned}P&=\frac{1}{\Delta t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\mathcal{E}_0\frac{D^2}{8}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta=\mathcal{E}_0\frac{D^2}{8\Delta t}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\\&=\mathcal{E}_0\frac{D^2}{8\Delta t}\times\big[\theta\big]_0^{2\pi}\times\Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^{\infty}=\mathcal{E}_0\frac{D^2}{8\Delta t}\times2\pi\times1=\mathcal{E}_0\frac{\pi D^2}{4\Delta t}.\end{aligned}$$

.....

**27.11** c) On utilise le même changement de variable que précédemment, en faisant garde à la nouvelle borne de l'intégrale : pour $\rho=d/2$ il vient que $x=\dfrac{4(d/2)^2}{D^2}=\dfrac{d^2}{D^2}$. D'où

$$\begin{aligned}P'&=\frac{1}{\Delta t}\int_0^{2\pi}\int_0^{d^2/D^2}\mathcal{E}_0\frac{D^2}{8}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta=\mathcal{E}_0\frac{D^2}{8\Delta t}\times\big[\theta\big]_0^{2\pi}\times\Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^{d^2/D^2}=\mathcal{E}_0\frac{D^2}{8\Delta t}\times2\pi\times\Big(1-\mathrm{e}^{-d^2/D^2}\Big)\\&=\mathcal{E}_0\frac{\pi D^2}{4\Delta t}\Big(1-\mathrm{e}^{-d^2/D^2}\Big)=P\Big(1-\mathrm{e}^{-d^2/D^2}\Big).\end{aligned}$$

.....

**27.11** d) À partir de l'expression de $P'$, il vient

$$P' = P\left(1 - \mathrm{e}^{-d^2/D^2}\right) \quad \text{donc} \quad \frac{P'}{P} = 1 - \mathrm{e}^{-d^2/D^2} \quad \text{donc} \quad \mathrm{e}^{-d^2/D^2} = 1 - \frac{P'}{P}.$$

Donc,

$$-\frac{d^2}{D^2} = \ln\left(1 - \frac{P'}{P}\right) \quad \text{donc} \quad D = d\sqrt{\frac{-1}{\ln\left(1 - \frac{P'}{P}\right)}}.$$

.....

**27.11** e) À partir de l'expression de $D$, il vient que

$$D = d\sqrt{\frac{-1}{\ln\left(1 - \frac{P'}{P}\right)}} = 2{,}00\,\mathrm{cm}\sqrt{\frac{-1}{\ln\left(1 - \frac{4{,}15\,\mathrm{mW}}{5{,}00\,\mathrm{mW}}\right)}} = 1{,}50\,\mathrm{cm}.$$

.....

**27.12** a) Soit $E$ l'énergie délivrée par la source durant une seconde, il vient que $E = \overline{P} \times 1\,\mathrm{s}$. Le nombre d'impulsions émises par la source durant une seconde $N$ est donnée par la cadence $f$, soit $N = f \times 1\,\mathrm{s}$. Ainsi, l'énergie contenue dans une impulsion est telle que

$$E_{\text{pulse}} = \frac{E}{N} = \frac{\overline{P} \times 1\,\mathrm{s}}{f \times 1\,\mathrm{s}} = \frac{\overline{P}}{f}.$$

.....

**27.12** b) La puissance d'une impulsion $P_{\text{pulse}}$ correspond à la quantité d'énergie fournie pendant la durée $\Delta t$ de l'impulsion, soit

$$P_{\text{pulse}} = \frac{E_{\text{pulse}}}{\Delta t} = \frac{\overline{P}}{f\Delta t}.$$

.....

**27.12** c) On a :

(a) $P_{\text{pulse},a} = \dfrac{\overline{P}_a}{f_a \Delta t_a} = \dfrac{20\,\mathrm{W}}{20 \times 10^3\,\mathrm{Hz} \times 10 \times 10^{-9}\,\mathrm{s}} = 1{,}0 \times 10^5\,\mathrm{W}$

(b) $P_{\text{pulse},b} = \dfrac{\overline{P}_b}{f_b \Delta t_b} = \dfrac{8{,}0\,\mathrm{W}}{10 \times 10^3\,\mathrm{Hz} \times 2{,}0 \times 10^{-9}\,\mathrm{s}} = 4{,}0 \times 10^5\,\mathrm{W}$

(c) $P_{\text{pulse},c} = \dfrac{\overline{P}_c}{f_c \Delta t_c} = \dfrac{1{,}8\,\mathrm{W}}{10 \times 10^3\,\mathrm{Hz} \times 700 \times 10^{-12}\,\mathrm{s}} = 2{,}6 \times 10^5\,\mathrm{W}$

(d) $P_{\text{pulse},d} = \dfrac{\overline{P}_d}{f_d \Delta t_d} = \dfrac{1{,}5\,\mathrm{W}}{80 \times 10^6\,\mathrm{Hz} \times 140 \times 10^{-15}\,\mathrm{s}} = 1{,}3 \times 10^5\,\mathrm{W}.$

.....

**27.13** a) D'après la formule il vient $S = S_0 t_1 t_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi/2} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}\right)^k = S_0 t_1 t_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi/2} \frac{1}{1 - r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}} = \frac{S_0 t_1 t_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi/2}}{1 - r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}}.$

.....

**27.13** b) On a

$$\begin{aligned}
I = |S|^2 &= \frac{\left|S_0 t_1 t_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi/2}\right|^2}{\left|1 - r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}\right|^2} = \frac{S_0^2 t_1^2 t_2^2}{\left(1 - r_1 r_2 \cos(\phi)\right)^2 + r_1^2 r_2^2 \sin^2(\phi)} \\
&= \frac{S_0^2 t_1^2 t_2^2}{1 - 2 r_1 r_2 \cos(\phi) + r_1^2 r_2^2 \cos^2(\phi) + r_1^2 r_2^2 \sin^2(\phi)} \\
&= \frac{S_0^2 t_1^2 t_2^2}{1 + r_1^2 r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos(\phi)} = \frac{S_0^2 t_1^2 t_2^2}{1 - 2 r_1 r_2 + r_1^2 r_2^2 + 4 r_1 r_2 \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)} \\
&= \frac{S_0^2 t_1^2 t_2^2}{\left(1 - r_1 r_2\right)^2 + 4 r_1 r_2 \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

.....

**27.13** c) En divisant $I$ par $(1-r_1r_2)^2$, il vient que

$$I = \frac{1}{(1-r_1r_2)^2} \times \frac{S_0^2t_1^2t_2^2}{(1-r_1r_2)^2 + 4r_1r_2\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)} = \frac{\frac{S_0^2t_1^2t_2^2}{(1-r_1r_2)^2}}{1+\frac{4r_1r_2}{(1-r_1r_2)^2}\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)} = \frac{I_{\max}}{1+m\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}.$$

On peut alors identifier $I_{\max} = \dfrac{S_0^2t_1^2t_2^2}{(1-r_1r_2)^2}$ et également le coefficient $m = \dfrac{4r_1r_2}{(1-r_1r_2)^2}$.

.....

**27.15** a) Au voisinage de 0, on a au premier ordre $\sin(x) \sim x$. D'où $I(\nu) \approx \dfrac{I_{\max}}{1+m\left(2\pi\frac{nL}{c}\nu\right)^2}$.

.....

**27.15** b) On cherche $\nu_1 > 0$, tel que $I(\nu_1) = \dfrac{I_{\max}}{2}$. On s'attend à avoir $2\pi\dfrac{nL}{c}\nu_1 \ll 1$, ce qui permet d'utiliser le développement limité de $I(\nu)$ établi à la question précédente.

On résout $\dfrac{I_{\max}}{1+m\left(2\pi\frac{nL}{c}\nu_1\right)^2} = \dfrac{I_{\max}}{2}$, qui donne $m\left(2\pi\dfrac{nL}{c}\nu_1\right)^2 = 1$, soit $\nu_1 = \dfrac{c}{2\pi nL\sqrt{m}}$.

.....

**27.15** c) La fonction $I(\nu)$ étant paire, la largeur à mi-hauteur demandée vaut $\delta\nu = 2\nu_1$ soit $\delta\nu = \dfrac{c}{\pi nL\sqrt{m}}$.

.....

**27.15** d) La finesse de la cavité est $F = \dfrac{c}{2nL}\dfrac{\pi nL\sqrt{m}}{c}$ soit $F = \dfrac{\pi}{2}\sqrt{m}$.

.....

# Fiche n° 28. Puissance en régime sinusoïdal

## Réponses

**28.1** a) ..... $10\,\Omega$
**28.1** b) ..... 1
**28.1** c) ..... $22\,\Omega$
**28.1** d) ..... 0,45
**28.1** e) ..... $14\,\Omega$
**28.1** f) ..... 0,71
**28.2** a) ..... b
**28.2** b) ..... $8{,}9\,\Omega$
**28.2** c) ..... 0,89
**28.2** d) ..... a
**28.2** e) ..... $8{,}9\,\Omega$
**28.2** f) ..... 0,89
**28.3** a) ..... c
**28.3** b) ..... $16\,\Omega$
**28.3** c) ..... 0,95
**28.3** d) ..... b
**28.3** e) ..... $7{,}9\,\Omega$
**28.3** f) ..... 0,95
**28.4** a) ..... (2)
**28.4** b) ..... (1)
**28.4** c) ..... (3)
**28.4** d) ..... (4)
**28.5** a) ..... b
**28.5** b) ..... d
**28.5** c) ..... a
**28.6** a) ..... b
**28.6** b) ..... d
**28.7** a) ..... 0,71
**28.7** b) ..... b
**28.7** c) ..... 0,45
**28.7** d) ..... a
**28.8** a) ..... b
**28.8** b) ..... $50\,\Omega$
**28.8** c) ..... 0,87
**28.8** d) ..... $43\,\Omega$
**28.8** e) ..... 2,5 mH
**28.9** a) ..... $\pm\varphi$
**28.9** b) .... $\sqrt{I_{R,\text{eff}}^2 + I_{D,\text{eff}}^2 + 2I_{R,\text{eff}}I_{D,\text{eff}}\cos(\varphi)}$
**28.9** c) ..... 6,6 A
**28.9** d) ..... $15\,\Omega$
**28.10** a) ..... $1{,}0 \times 10^3$ W
**28.10** b) ..... $2{,}0 \times 10^2$ W
**28.10** c) ..... $5{,}0 \times 10^2$ W
**28.11** a) ..... $1{,}0 \times 10^3$ W
**28.11** b) ..... $1{,}0 \times 10^3$ W

## Corrigés

**28.1** a) L'impédance est celle de la résistance seule $\underline{Z}_R = R = 10\,\Omega$.

**28.1** b) Le dipôle est purement résistif donc $\varphi = 0$.

**28.1** c) On a $\underline{Z} = R + jL\omega = 10 + 20j$ (en $\Omega$). L'application numérique donne $|\underline{Z}| = 22\,\Omega$.

**28.1** d) Le facteur de puissance est donné par : $\cos(\varphi) = \dfrac{\mathsf{Re}(\underline{Z})}{|\underline{Z}|}$. L'application numérique donne $\cos(\varphi) = 0{,}45$.

**28.1** e) On a $\underline{Z} = R + \mathrm{j}L\omega + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega} = 10 + 10\mathrm{j}$ (en $\Omega$). L'application numérique donne $|\underline{Z}| = 14\,\Omega$.

**28.1** f) Le facteur de puissance est donné par : $\cos(\varphi) = \dfrac{\mathsf{Re}(\underline{Z})}{|\underline{Z}|}$. L'application numérique donne $\cos(\varphi) = 0{,}71$.

**28.2** a) On a $\underline{Z} = \dfrac{\mathrm{j}RL\omega}{R + \mathrm{j}L\omega} = \dfrac{20\mathrm{j}}{1{,}0 + 2{,}0\mathrm{j}}$ (en $\Omega$). La bonne réponse est donc la (b).

**28.2** b) L'application numérique donne $|\underline{Z}| = 8{,}9\,\Omega$.

**28.2** c) Le facteur de puissance est donné par : $\cos(\varphi) = \dfrac{\mathsf{Re}(\underline{Z})}{|\underline{Z}|}$. L'application numérique donne $\cos(\varphi) = 0{,}89$.

**28.2** d) On a $\underline{Z} = \dfrac{\mathrm{j}RC\omega}{R + \mathrm{j}L\omega - RLC\omega^2} = \dfrac{20\mathrm{j}}{2{,}0 + 1{,}0\mathrm{j}}$ (en $\Omega$). La bonne réponse est donc la (a).

**28.2** e) L'application numérique donne $|\underline{Z}| = 8{,}9\,\Omega$.

**28.2** f) Le facteur de puissance est donné par : $\cos(\varphi) = \dfrac{\mathsf{Re}(\underline{Z})}{|\underline{Z}|}$. L'application numérique donne $\cos(\varphi) = 0{,}89$.

**28.3** a) Le condensateur et la résistance forment un dipôle équivalent d'impédance $\underline{Z}_{RC} = \dfrac{R}{1 + \mathrm{j}\omega RC}$, en série avec la résistance, on obtient donc : $\underline{Z} = R\left(\dfrac{2 + \mathrm{j}\omega RC}{1 + \mathrm{j}\omega RC}\right) = 10 \times \left(\dfrac{2{,}0 + 1{,}0\mathrm{j}}{1{,}0 + 1{,}0\mathrm{j}}\right)$.

**28.3** b) L'application numérique donne $|\underline{Z}| = 16\,\Omega$.

**28.3** c) Le facteur de puissance est donné par : $\cos(\varphi) = \dfrac{\mathsf{Re}(\underline{Z})}{|\underline{Z}|}$. L'application numérique donne $\cos(\varphi) = 0{,}95$.

**28.3** d) La résistance et la bobine forment un dipôle équivalent d'impédance $\underline{Z}_{RL} = R + \mathrm{j}\omega L$, en parallèle avec la résistance, on obtient donc : $\underline{Z} = R\left(\dfrac{\mathrm{j}\omega L + R}{2R + \mathrm{j}\omega L}\right) = 5 \times \left(\dfrac{1{,}0 + 2{,}0\mathrm{j}}{1{,}0 + 1{,}0\mathrm{j}}\right)$.

**28.3** e) L'application numérique donne $|\underline{Z}| = 7{,}9\,\Omega$.

**28.3** f) Le facteur de puissance est donné par : $\cos(\varphi) = \dfrac{\mathsf{Re}(\underline{Z})}{|\underline{Z}|}$. L'application numérique donne $\cos(\varphi) = 0{,}95$.

.....

**28.4** a) La tension $U_1$ est proportionnelle à $i$, c'est donc la tension aux bornes d'une résistance. $\vec{U}_2$ fait un angle $+\dfrac{\pi}{2}$ avec $\vec{I}$, on en déduit donc que $U_2$ est la tension aux bornes d'une bobine. Il s'agit du dipôle (2).

.....

**28.4** b) La tension $U_2$ est proportionnelle à $i$, c'est donc la tension aux bornes d'une résistance. $\vec{U}_1$ fait un angle $-\dfrac{\pi}{2}$ avec $\vec{I}$, on en déduit donc que $U_1$ est la tension aux bornes d'un condensateur. Il s'agit du dipôle (1).

.....

**28.4** c) L'intensité $i_2$ est proportionnelle à $U$, c'est donc l'intensité circulant dans une résistance. $\vec{I}_1$ fait un angle $-\dfrac{\pi}{2}$ avec $\vec{U}$, on en déduit donc que $i_1$ est l'intensité circulant dans une bobine. Il s'agit du dipôle (3).

.....

**28.4** d) L'intensité $i_1$ est proportionnelle à $U$, c'est donc l'intensité circulant dans une résistance. $\vec{I}_2$ fait un angle $+\dfrac{\pi}{2}$ avec $\vec{U}$, on en déduit donc que $i_2$ est l'intensité circulant dans un condensateur. Il s'agit du dipôle (4).

.....

**28.5** a) La résistance $R$ est le seul dipôle donc $U = U_R = RI = 10\,\mathrm{V}$. La réponse correcte est donc la (b).

.....

**28.5** b) La tension $U$ est maintenant la somme de $U_R$ et $U_L$. Le courant vaut $U/|Z| \approx 4{,}5\,\mathrm{A}$ donc $U_R = 45\,\mathrm{V}$ et $U_L$ est déphasé de $+\pi/2$ et $U_L = 90\,\mathrm{V}$. La réponse correcte est donc la (d).

.....

**28.5** c) La tension $U$ est maintenant la somme de trois vecteurs. Le courant vaut $U/|Z| \approx 7{,}1\,\mathrm{A}$ donc $U_R = 71\,\mathrm{V}$, $U_L = 142\,\mathrm{V}$, $U_C$ est déphasé de $-\pi/2$ et $U_C = 71\,\mathrm{V}$. La réponse correcte est donc la (a).

.....

**28.6** a) L'intensité $I_R$ est en phase avec $U$ et a une valeur de $10\,\mathrm{A}$. L'intensité $I_L$ vaut $5{,}0\,\mathrm{A}$ est déphasée de $-\pi/2$ par rapport à $U$. La réponse correcte est donc la (b).

.....

**28.6** b) Au schéma précédent, il faut rajouter $I_C$ d'intensité égale à $10\,\mathrm{A}$ et déphasé de $+\pi/2$ par rapport à $U$. La réponse correcte est donc la (d).

.....

**28.7** a) Le condensateur et la résistance forment un dipôle équivalent d'impédance $\underline{Z}_{RC} = \dfrac{R}{1+\mathrm{j}\omega RC} = \dfrac{10}{1+1\mathrm{j}}$. On en déduit donc que $|\underline{Z}_{RC}| = 7{,}1\,\Omega$ et $\cos(\varphi_1) = \dfrac{\mathsf{Re}(\underline{Z}_{RC})}{|\underline{Z}_{RC}|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. L'application numérique donne $\cos(\varphi_1) = 0{,}71$.

.....

**28.7** b) D'après les données, le courant vaut $I = |U|/|\underline{Z}_{\text{éq}}| = 12{,}7\,\mathrm{A}$. De plus, la loi des mailles donne : $U = U_R + U_{RC}$. Séparément, on obtient $U_R = RI = 127\,\mathrm{V}$ et $U_{RC} = |\underline{Z}_{RC}|I = 89{,}8\,\mathrm{V}$. Enfin, $U_{RC}$ est déphasé de l'angle $\varphi_1 = 45°$. La réponse correcte est donc la (b).

.....

**28.7** c) La bobine et la résistance forment un dipôle équivalent d'impédance $\underline{Z}_{RL} = R + \mathrm{j}\omega L = 10(1+2\mathrm{j})$. On en déduit donc que $|\underline{Z}_{RL}| = 22\,\Omega$ et donc, finalement $\cos(\varphi_2) = \dfrac{\mathsf{Re}(\underline{Z}_{RL})}{|\underline{Z}_{RL}|} = 0{,}45$.

.....

**28.7** d) La loi des nœuds donne : $I = I_R + I_{RL}$. De plus, on obtient, séparément, $I_R = U/R = 10\,\mathrm{A}$ et $U_{RL} = U/|\underline{Z}_{RL} = 4{,}5\,\mathrm{A}$. Enfin, $I_{RL}$ est déphasé de l'angle $\varphi_2 = 63°$. La réponse correcte est donc la (a).

.....

**28.8** a) L'angle $\varphi$ est positif, l'association de dipôles est donc inductive, ce qui élimine les réponses (a) et (d). De plus, cette association n'est pas purement réactive, ce qui élimine la réponse (c). La bonne réponse est (b).

**28.8** b) Le module de l'impédance est donné par $|\underline{Z}| = \dfrac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \dfrac{100}{2} = 50\,\Omega$.

**28.8** c) Notons $U_1$ la tension aux bornes de la résistance. Sur le diagramme, on retrouve son vecteur de Fresnel associé en projetant $\vec{U}$ sur l'horizontale. Le rapport de leurs normes donne le facteur de puissance. L'application numérique donne $\cos(\varphi) = 0,87$.

**28.8** d) Le facteur de puissance est donné par : $\cos(\varphi) = \dfrac{R}{|\underline{Z}|}$. L'application numérique donne $\cos(\varphi) = 43\,\Omega$.

**28.8** e) Le module de l'impédance est donné par : $|\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$. En isolant $L$ on obtient $L = 2{,}5\,\text{mH}$.

**28.9** a) L'intensité $i_R$ est en phase avec $u$ et $i_D$ est déphasé de $\pm\varphi$ par rapport à $u$.

**28.9** b) La loi des nœuds donne $i = i_R + i_D$, soit en l'élevant au carré $i^2 = i_R^2 + i_D^2 + 2i_R i_D$. Le passage à la valeur moyenne donne : $I_{\text{eff}}^2 = I_{R,\text{eff}}^2 + I_{D,\text{eff}}^2 + 2I_{R,\text{eff}}I_{D,\text{eff}}\cos(\varphi)$.

**28.9** d) Le module de cette impédance totale est donnée par : $|\underline{Z}| = \dfrac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}}$ avec $U_{\text{eff}} = 100\,\text{V}$ la tension efficace de $u$. L'application numérique donne $|\underline{Z}| = 15\,\Omega$.

**28.10** a) Le dipôle est résistif, son impédance est $\underline{Z} = R$ donc $P_{\text{moy}} = U_{\text{eff}}^2/R$. L'application numérique donne $P_{\text{moy}} = 1{,}0 \times 10^3\,\text{W}$.

**28.10** b) La valeur efficace de l'intensité est donnée par $I_{\text{eff}} = \dfrac{U_{\text{eff}}}{|\underline{Z}|} = \dfrac{100\,\text{V}}{22\,\Omega} = 4{,}5\,\text{A}$ donc $P_{\text{moy}} = U_{\text{eff}}I_{\text{eff}}\cos(\varphi)$. L'application numérique donne $P_{\text{moy}} = 2{,}0 \times 10^2\,\text{W}$.

**28.10** c) La valeur efficace de l'intensité est donnée par $I_{\text{eff}} = \dfrac{U_{\text{eff}}}{|\underline{Z}|} = \dfrac{100\,\text{V}}{14\,\Omega} = 7{,}1\,\text{A}$ donc $P_{\text{moy}} = U_{\text{eff}}I_{\text{eff}}\cos(\varphi)$. L'application numérique donne $P_{\text{moy}} = 5{,}0 \times 10^2\,\text{W}$.

**28.11** a) La puissance moyenne s'obtient directement avec l'admittance $P_{\text{moy}} = \mathsf{Re}(\underline{Y})U_{\text{eff}}^2$. Or, l'admittance du dipôle est $\underline{Y} = \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega L}$. On en déduit que $P_{\text{moy}} = U_{\text{eff}}^2/R$. L'application numérique donne $P_{\text{moy}} = 1{,}0 \times 10^3\,\text{W}$.

**28.11** b) La puissance moyenne s'obtient directement avec l'admittance $P_{\text{moy}} = \mathsf{Re}(\underline{Y})U_{\text{eff}}^2$. Or, l'admittance du dipôle est $\underline{Y} = \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega L} + \mathrm{j}\omega C$. On en déduit que $P_{\text{moy}} = U_{\text{eff}}^2/R$. L'application numérique donne $P_{\text{moy}} = 1{,}0 \times 10^3\,\text{W}$.

# Fiche n° 29. Transformateurs

## Réponses

**29.1** a) ..... $mE\cos(2\pi ft)$

**29.1** b) ..... $-\dfrac{mE}{R}\cos(2\pi ft)$

**29.1** c) ..... $\dfrac{m^2E}{R}\cos(2\pi ft)$

**29.2** a) ..... $-m$

**29.2** b) ..... $-\dfrac{1}{m}$

**29.2** c) ..... $m$

**29.2** d) ..... $\dfrac{1}{m}$

**29.3** a) ..... 375

**29.3** b) ..... 250

**29.3** c) ..... 92 V et 2,5 A

**29.3** d) ..... 230 W

**29.3** e) ..... 230 W

**29.4** a) ..... vrai

**29.4** b) ..... faux

**29.4** c) ..... vrai

**29.4** d) ..... faux

**29.4** e) ..... faux

**29.4** f) ..... vrai

**29.5** a) ..... $m^2R_1 + jL\omega m^2$

**29.5** b) ..... $\dfrac{R_2}{m^2} + \dfrac{1}{jC\omega m^2}$

**29.5** c) ..... $me$

**29.6** a) ..... $\dfrac{R}{m^2} + \dfrac{\mathrm{j}L\omega}{m^2}$

**29.6** b) ..... 0,73

**29.6** c) ..... b

**29.6** d) ..... 0,98

**29.7** a) ..... $\dfrac{Z}{m^2}$

**29.7** b) ..... 0,80

**29.7** c) ..... c

**29.7** d) ..... 2,3 A

**29.7** e) ..... 9,2 A

**29.7** f) ..... 0,87

**29.8** a) ..... (2) et (3)

**29.8** b) ..... aucun

**29.8** c) ..... (2)

**29.8** d) ..... (1), (2) et (3)

**29.8** e) ..... (1)

**29.8** f) ..... (2) et (3)

**29.8** g) ..... (2)

**29.8** h) ..... (3)

**29.9** a) ..... 100 spires

**29.9** b) ..... 50 V

**29.9** c) ..... 20 A

**29.9** d) ..... 2 A

**29.10** a) ..... $R_\ell I_0^2$

**29.10** b) ..... $U_0 I_0 \cos(\varphi)$

**29.10** c) ..... $3{,}0 \times 10^6$

**29.11** a) ..... $2{,}6 \times 10^{-2}$

**29.11** b) ..... 0 A

**29.11** c) ..... 0 A

**29.11** d) ..... 180 kΩ

**29.11** e) ..... 9,5 MJ

**29.11** f) ..... 2,6 kWh

## Corrigés

**29.1** a) La loi des tensions permet d'écrire $\dfrac{u_2(t)}{e(t)} = m$. Donc $u_2(t) = mE\cos(2\pi ft)$.

**29.1** b) Ici $u_2(t)$ et $i_2(t)$ ne sont pas en convention récepteur donc $i_2(t) = -\dfrac{u_2(t)}{R} = -\dfrac{mE}{R}\cos(2\pi ft)$.

**29.1** c) La loi des courants permet d'écrire $\dfrac{i_2(t)}{i_1(t)} = -\dfrac{1}{m}$ donc $i_1(t) = -m \times i_2(t) = \dfrac{m^2E}{R}\cos(2\pi ft)$.

**29.2** a) La tension $u_1$ n'est pas dirigée vers la borne homologue donc $\dfrac{u_2}{u_1} = -m$.

**29.2** b) Ni $i_1$ ni $i_2$ ne sont dirigés vers les bornes homologues donc $\dfrac{i_2}{i_1} = -\dfrac{1}{m}$.

**29.2** c) Cette fois $u_1$ et $u_2$ sont dirigées vers les bornes homologues donc on respecte les conventions et $\dfrac{u_2}{u_1} = m$.

**29.2** d) L'intensité $i_2$ a la bonne convention mais pas $i_1$, on a donc $\dfrac{i_2}{i_1} = \dfrac{1}{m}$.

**29.3** a) Rapport de transformation : $m = \dfrac{0,750 \times 230\,\text{V}}{230\,\text{V}} = 0{,}750 = \dfrac{N_2}{N_1}$ donc $N_2 = 0{,}75 \times N_1 = 0{,}75 \times 500 = 375$.

**29.3** b) Rapport de transformation : $m = \dfrac{I_{2,\text{eff}}}{I_{1,\text{eff}}} = \dfrac{1}{m}$ donc $\dfrac{2}{1} = \dfrac{N_1}{N_2}$ donc $N_2 = \dfrac{N_1}{2} = \dfrac{500}{2} = 250$. On ne tient pas compte du signe ici car on ne connaît pas l'orientation des courants. On choisit une orientation positive.

**29.3** c) Le rapport de transformation est $m = \dfrac{200}{500} = \dfrac{U_{2,\text{eff}}}{U_{1,\text{eff}}}$. Donc, on a $U_{2,\text{eff}} = 230\,\text{V} \times \dfrac{2}{5} = 92\,\text{V}$ et $\dfrac{I_{2,\text{eff}}}{I_{1,\text{eff}}} = \dfrac{1}{m}$. Donc, on a $I_{2,\text{eff}} = 1{,}0\,\text{A} \times \dfrac{5}{2} = 2{,}5\,\text{A}$.

**29.3** d) Le secondaire étant constitué d'une charge purement résistive, son facteur de puissance vaut 1 et la puissance moyenne fournie par la charge $\mathcal{P}_2 = U_{2,\text{eff}} I_{2,\text{eff}} = 92\,\text{V} \times 2{,}5\,\text{A} = 230\,\text{W}$.

**29.3** e) Le transformateur étant parfait, la même puissance est absorbée en sortie.

**29.4** a) Une loi des mailles dans le circuit primaire donne $u_1 = e - R_1 i_1$. La proposition est donc vraie.

**29.4** b) Vu du secondaire, le primaire est équivalent à un générateur parfait de tension $me$ en série avec une résistance $m^2 R_1$ mais il faut faire attention au sens de $i_2$ qui n'est pas en convention générateur par rapport à $me$ donc la proposition est fausse. La bonne relation est $u_2 = me + m^2 R_1 i_2$.

**29.4** c) Vu du primaire, le secondaire est équivalent à une résistance égale à $\dfrac{R_2}{m^2}$. La proposition est donc vraie.

**29.4** d) La loi d'Ohm donne directement $u_2 = -R_2 i_2$. La proposition est donc fausse.

**29.4** e) Le primaire ramené au secondaire est équivalent à un générateur de tension $me(t)$ en série avec une résistance $m^2 R_1$. Une loi des mailles donne alors $me + m^2 R_1 i_2 + R_2 i_2 = 0$. Une factorisation donne la relation : $i_2 = \dfrac{-me}{R_2 + m^2 R_1}$. La proposition est donc fausse.

**29.4** f) Le secondaire ramené au primaire est équivalent à $\dfrac{R_2}{m^2}$. Une loi des mailles donne $e = R_1 i_1 + \dfrac{R_2}{m^2} i_1$. Une factorisation donne la relation. La proposition est donc vraie.

**29.5** a) La position des bornes homologues n'a aucune importance pour les impédances ramenées. Il faut multiplier l'impédance par $m^2$ pour ramener une impédance du primaire au secondaire donc $\underline{Z} = m^2 R_1 + jL\omega m^2$.

**29.5** b) On divise l'impédance par $m^2$ pour la ramener du primaire au secondaire ; d'où $\underline{Z} = \dfrac{R_2}{m^2} + \dfrac{1}{jC\omega m^2}$.

**29.5** c) Il faut multiplier la tension par $m$ pour transférer la tension du primaire au secondaire donc on a $me$.

**29.6** a) On a $\underline{Z_1} = \dfrac{R}{m^2} + \dfrac{\mathrm{j}L\omega}{m^2}$.

**29.6** b) On a

$$\cos(\varphi) = \cos\left[\arg\left(\frac{R+\mathrm{j}L\omega}{m^2}\right)\right] = \cos[\arg(R+\mathrm{j}L\omega)] = \frac{R}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}} = \frac{100\,\Omega}{\sqrt{(100\,\Omega)^2+(0{,}30\,\mathrm{H}\times 2\pi\times 50\,\mathrm{Hz})^2}} = 0{,}73.$$

**29.6** c) La Loi des mailles donne $\underline{e} = \underline{u_\mathrm{e}} + \underline{u_R}$ et loi d'Ohm en complexe : $\underline{e} = R_0\underline{i} + \dfrac{R}{m^2} + \dfrac{\mathrm{j}L\omega}{m^2}\underline{i}$ avec $\underline{i}$ l'intensité circulant dans le primaire. Les tensions $u_R$ et $R_0 i$ sont donc en phase et déphasés de $\pi/2$ par rapport à $L\omega i$.

**29.6** d) À l'aide du diagramme de Fresnel, on a :

$$\cos(\varphi_\mathrm{tot}) = \frac{\frac{R}{m^2}+R_0}{\sqrt{(\frac{R}{m^2}+R_0)^2+(\frac{L}{m^2})^2\omega^2}} = \frac{\frac{100\,\Omega}{2^2}+100\,\Omega}{\sqrt{(\frac{100\,\Omega}{2^2}+100\,\Omega)^2+(\frac{0{,}30\,\mathrm{H}}{2^2})^2\times(2\pi\times 50\,\mathrm{Hz})^2}} = 0{,}98.$$

**29.7** a) On a directement $\underline{Z_2} = \dfrac{\underline{Z}}{m^2}$.

**29.7** b) On a $\cos(\varphi) = \cos\left(\arg\left(\dfrac{\underline{Z}}{m^2}\right)\right) = \cos(\arg(\underline{Z})) = \cos(\varphi) = 0{,}80$.

**29.7** c) Loi des nœuds : $\underline{i} = \underline{i_\mathrm{e}} + \underline{i_0}$ et loi d'Ohm en complexe : $\underline{i} = \dfrac{\underline{u}}{R_0} + \dfrac{\underline{e}m^2}{\underline{Z}}$. Donc la bonne réponse est (c).

**29.7** d) On a $I_0 = \dfrac{E}{R_0} = \dfrac{230\,\mathrm{V}}{100\,\Omega} = 2{,}3\,\mathrm{A}$.

**29.7** e) On a $I_\mathrm{e} = \dfrac{Em^2}{|\underline{Z}|} = \dfrac{230\,\mathrm{V}\times 2^2}{100\,\Omega} = 9{,}2\,\mathrm{A}$.

**29.7** f) Graphiquement, on lit :

$$\cos(\varphi_\mathrm{tot}) = \frac{I_0 + I_\mathrm{e}\cos(\varphi)}{\sqrt{(I_0+I_\mathrm{e}\cos(\varphi))^2+(I_\mathrm{e}\sin(\varphi))^2}} = \frac{2{,}3\,\mathrm{A}+9{,}2\,\mathrm{A}\times 0{,}8}{\sqrt{(2{,}3\,\mathrm{A}+9{,}2\,\mathrm{A}\times 0{,}8)^2+(9{,}2\,\mathrm{A}\times\sqrt{1-0{,}8^2})^2}} = 0{,}87.$$

**29.8** a) Dans le circuit (1), l'orientation du contour $\Gamma$ ne respecte pas la règle de la main droite par rapport aux enroulements. La relation est vraie pour les circuits (2) et (3).

**29.8** b) Pour le circuit (1), on a $\oint_\Gamma \vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = -N_1 i_1 + N_2 i_2$ et les circuits (2) et (3) obéissent à la relation précédente. Donc aucune bonne réponse.

**29.8** c) Pour le circuit (1), on a $\Phi_1 = -N_1\dfrac{S}{2}B_1$ à cause de l'orientation du contour $\Gamma$ et pour le circuit (3), on a $\Phi_1 = N_1 S B_1$. Seul le circuit (2) obéit à cette relation.

**29.8** d) Tous les circuits secondaires comportent $N_2$ spires et ont une section $S$ donc tous vérifient la relation.

**29.8** e) Les champs magnétiques sont orientés selon $\Gamma$ donc pas de problème de signe ici et toutes les lignes de champ du primaire passent au secondaire pour le circuit (1), ce qui n'est pas le cas pour les circuits (2) et (3).

.....

**29.8** f) Pour les circuits (2) et (3), le flux du secondaire est partagé entre les deux circuits primaires.

On a donc $B_2\dfrac{S}{2} = \times B_1\dfrac{S}{2}$.

.....

**29.8** g) Les forces électromotrices induites s'écrivent $e_1 = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} = -u_1$ et $e_2 = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} = -u_2$.

On a donc $u_1 = \dfrac{N_1}{2}\dfrac{\mathrm{d}B_1S}{\mathrm{d}t}$ et $u_2 = N_2\dfrac{\mathrm{d}B_2S}{\mathrm{d}t}$. Or $B_1S = B_2S$.

.....

**29.8** h) Pour le circuit (1), on a bien $u_1 = -e_1$ mais $e_1 = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} = -N_1\dfrac{\mathrm{d}B_1S}{\mathrm{d}t}$, on a alors $\dfrac{u_2}{u_1} = -\dfrac{N_2}{N_1}$.

.....

**29.9** a) On a $N_2 = m \times N_1 = 0{,}10 \times 1000 = 100$.

.....

**29.9** b) On a $\dfrac{U_2}{U_1} = m$ donc $U_2 = 0{,}10 \times 500\,\mathrm{V} = 50\,\mathrm{V}$.

.....

**29.9** c) On a $I_2 = \dfrac{\mathcal{P}}{U_2\cos(\varphi)} = \dfrac{500\,\mathrm{W}}{50\,\mathrm{V} \times 0{,}50} = 20\,\mathrm{A}$.

.....

**29.9** d) On a $I_1 = mI_2 = 0{,}50 \times 20\,\mathrm{A} = 2\,\mathrm{A}$.

.....

**29.10** a) On a une simple résistance donc $\mathcal{P} = R_\ell I_0^2$.

.....

**29.10** b) On rappelle qu'une puissance moyenne se calcule avec la formule $P_{\mathrm{moy}} = U_{\mathrm{eff}}I_{\mathrm{eff}}\cos(\varphi)$. Donc avec les notations de l'énoncé on a $\mathcal{P}_i = U_0I_0\cos(\varphi)$.

.....

**29.10** c) On a $\dfrac{\mathcal{P}_{\text{élevée}}}{\mathcal{P}_{230}} = \dfrac{230^2}{400 \times 10^{3\,2}} = \dfrac{1}{3{,}0 \times 10^6}$. La puissance est donc réduite d'un facteur $3{,}0 \times 10^6$.

.....

**29.11** a) On a $m = \dfrac{6{,}0\,\mathrm{V}}{230\,\mathrm{V}} = 2{,}6 \times 10^{-2}$.

.....

**29.11** b) Si le téléphone n'est pas branché, alors le circuit secondaire est ouvert donc $i_2 = 0\,\mathrm{A}$.

.....

**29.11** c) Si $i_2$ est nul alors $i_1$ aussi.

.....

**29.11** d) La bobine ne consomme pas de puissance. $\mathcal{P} = \dfrac{U^2}{R_\ell}$ donc $R_\ell = \dfrac{U^2}{\mathcal{P}} = \dfrac{230\,\mathrm{V}^2}{0{,}30\,\mathrm{W}} = 180\,\mathrm{k\Omega}$.

.....

**29.11** e) On a $E = \mathcal{P}\Delta t = 0{,}30\,\mathrm{W} \times 365,25 \times 24 \times 3600 = 9{,}5\,\mathrm{MJ}$.

.....

**29.11** f) On a $1\,\mathrm{kWh} = 1 \times 10^3 \times 3600\mathrm{J} = 3{,}6 \times 10^6\,\mathrm{J}$ donc $9{,}5\,\mathrm{MJ}$ correspond à $\dfrac{9{,}5 \times 10^6}{3{,}6 \times 10^6} = 2{,}6\,\mathrm{kWh}$.

.....

# Fiche n° 30. Conversion électro-magnéto-mécanique

## Réponses

**30.1** a) .....

**30.1** b) .....

**30.1** c) .....

**30.1** d) .....

**30.2** a) ..... (a) et (c)

**30.2** b) ..... $\|\overrightarrow{B_1}\| = \|\overrightarrow{B_2}\| = \|\overrightarrow{B_3}\| = \|\overrightarrow{B_4}\|$

**30.2** c) ..... $I = \dfrac{-l_C H_4 + eH_1 + l_I H_3 - eH_2}{N}$

**30.2** d) ..... $\dfrac{\mu_0 N I}{\frac{l_C + l_I}{\mu_r} + 2e}$

**30.3** a) ..... symétrie

**30.3** b) ..... antisymétrie

**30.3** c) ..... $B(r, -\theta) = B(r, \theta)$

**30.3** d) ..... $B(r, \pi - \theta) = -B(r, \theta)$

**30.3** e) ..... $0$

**30.3** f) ..... $H = \dfrac{I}{2e}$

**30.3** g) ..... $\dfrac{\mu_0 I}{2e}$

**30.3** h) ..... $-\dfrac{\mu_0 I}{2e}$

**30.4** a) ..... $4 \times 10^2\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$

**30.4** b) ..... $3\,000\,\mathrm{tour \cdot min^{-1}}$

**30.4** c) ..... $100\,\mathrm{Hz}$

**30.4** d) ..... $150\,\mathrm{Hz}$

**30.5** a) ..... $B\sin(\omega t - \theta_r)$

**30.5** b) ..... $\dfrac{-AC}{(B + Cx)^2}$

**30.5** c) ..... $Bk\sin(\omega t - kx)$

**30.6** a) ..... $0$

**30.6** b) ..... $B\sin(\phi)$

**30.6** c) ..... $\begin{cases} 0 \text{ si } \omega \neq kV \\ B\sin(\phi) \text{ si } \omega = kV \end{cases}$

**30.7** a) ..... $\dfrac{\mu_0 \mu_r N^2 S i^2}{2(l_1 + l_2 + 2\mu_r x)}$

**30.7** b) ..... $-\dfrac{\mu_0 \mu_r^2 N^2 S i^2}{(l_1 + l_2 + 2\mu_r x)^2}$

**30.8** a) ..... $\dfrac{\sqrt{2} k k' \pi I I_e V}{\mu_0} \sin(\omega t - \theta_r)$

**30.8** b) ..... $\omega = \Omega$

**30.8** c) ..... $\dfrac{\sqrt{2} k k' \pi I I_e V}{\mu_0} \sin(\alpha)$

**30.9** a) ..... $\sqrt{2} K K' I I_e k \sin(\omega t - kx)$

**30.9** b) ..... $\boxed{\begin{cases} 0 \text{ si } \omega \neq kV \\ \sqrt{2}KK'II_e k\sin(\alpha) \text{ sinon} \end{cases}}$

**30.10** a) ..... (d)

**30.10** b) ..... (c)

**30.10** c) ..... (a)

**30.10** d) ..... (b)

**30.11** a) ..... (a)

**30.11** b) ..... (d)

**30.11** c) ..... (c)

**30.11** d) ..... (e)

**30.11** e) ..... (b)

**30.12** a) ..... $\boxed{\Omega = \dfrac{U - ri - L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}{\Phi_0}}$

**30.12** b) ..... $\boxed{\Omega = \dfrac{U}{\Phi_0} - r\dfrac{\Gamma}{\Phi_0^2} - \dfrac{L}{\Phi_0^2}\dfrac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t}}$

**30.12** c) ..... $\boxed{v = \Omega\rho}$

**30.12** d) ..... $\boxed{F = \dfrac{\Gamma}{\rho}}$

**30.12** e) ..... $\boxed{v = \dfrac{\rho U}{\Phi_0} + \dfrac{r\rho^2}{\Phi_0^2}F + \dfrac{L\rho^2}{\Phi_0^2}\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}}$

**30.12** f) ..... $\boxed{F = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + mg}$

**30.12** g) .. $\boxed{\dfrac{mL\rho^2}{\Phi_0^2}\dfrac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{mr\rho^2}{\Phi_0^2}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v = \dfrac{\rho U}{\Phi_0} - \dfrac{mr\rho^2 g}{\Phi_0^2}}$

**30.13** a) ..... (d)

**30.13** b) ..... (b)

**30.13** c) ..... (a)

**30.13** d) ..... (e)

**30.13** e) ..... (c)

## Corrigés

**30.1** a)

Les lignes de champ sont guidées par le matériau ferromagnétique, elles n'en sortent que dans l'entrefer.

Les lignes de champ sortent dans l'entrefer perpendiculairement à l'interface, elles sont donc horizontales dans l'entrefer.

.....

**30.1** b)

Les lignes de champ sont guidées par le matériau ferromagnétique, elles n'en sortent que dans l'entrefer.

Les lignes de champ sortent dans l'entrefer perpendiculairement à l'interface, elles sont donc radiales dans l'entrefer.

.....

**30.1** c)

Les lignes de champ sont guidées par le matériau ferromagnétique, elles n'en sortent que dans l'entrefer.

Les lignes de champ sortent dans l'entrefer perpendiculairement à l'interface.

.....

**30.1** d)

Les lignes de champ sont guidées par le matériau ferromagnétique qui n'a pas d'entrefer, elles n'en sortent donc pas.

.....

**30.2** a) D'après la règle de la main droite, les lignes de champ sont orientées dans le sens trigonométrique. Les vecteurs $\overrightarrow{B_1}$ et $\overrightarrow{B_3}$ sont donc dans le sens de la main droite.

.....

**30.2** b) La section du matériau ferromagnétique est constante, donc par conservation du flux magnétique, la norme $\|\vec{B}\|$ est la même partout dans le circuit magnétique.

.....

**30.2** c) Le théorème d'Ampère s'écrit $-l_C H_4 + eH_1 + l_I H_3 - eH_2 = NI$.

.....

**30.2** d) En remplaçant dans le théorème d'Ampère les excitations par leur expression en fonction des champs magnétiques, on obtient $-l_U \dfrac{B_4}{\mu} + e\dfrac{B_1}{\mu_0} + l_I \dfrac{B_3}{\mu} - e\dfrac{B_2}{\mu_0} = NI$. En remplaçant tous les $B_i$ en fonction de $B_1$, on obtient

$$l_U \frac{B_1}{\mu} + e\frac{B_1}{\mu_0} + l_I \frac{B_1}{\mu} + e\frac{B_1}{\mu_0} = NI.$$

Finalement avec $\mu = \mu_0 \mu_r$, on trouve

$$B_1 = \frac{\mu_0 NI}{\frac{l_C + l_I}{\mu_r} + 2e}.$$

.....

**30.3** a) Le plan (O$xz$) est un plan d'antisymétrie pour la distribution de courant, c'est donc un plan de symétrie pour le champ $\vec{B}$.

.....

**30.3** b) Le plan (O$yz$) est un plan de symétrie pour la distribution de courant, c'est donc un plan d'antisymétrie pour le champ $\vec{B}$.

.....

**30.3** c)

Comme (O$xz$) est un plan de symétrie, on a $B(r, \theta) = B(r, -\theta)$.

.....

**30.3** d) Comme $(Oyz)$ est un plan d'antisymétrie, on a $B(r,\theta) = -B(r,\pi-\theta)$.

**30.3** e) On a $H_{\text{ferro}} = \dfrac{B_{\text{ferro}}}{\mu} = \dfrac{B_{\text{ferro}}}{\infty} = 0$.

**30.3** f) On considère une ligne de champ. Si on note $l_{\text{stator}}$ et $l_{\text{rotor}}$ respectivement la longueur de cette ligne de champ dans le stator et dans le rotor, le théorème d'Ampère appliqué sur cette ligne de champ s'écrit

$$H_{\text{ferro}} l_{\text{stator}} - H_{\text{entrefer}}(\pi-\theta)e + H_{\text{ferro}} l_{\text{rotor}} + H_{\text{entrefer}} e = I.$$

Or, on a

$$H_{\text{entrefer}}(\pi-\theta) = \frac{B_{\text{entrefer}}(\pi-\theta)}{\mu} = -\frac{B_{\text{entrefer}}(\theta)}{\mu} = -H_{\text{entrefer}}(\theta).$$

Ainsi, on a $H_{\text{entrefer}}(\theta) = \dfrac{I}{2e}$.

**30.3** g) Dans l'entrefer (constitué d'air), on a $B_{\text{entrefer}} = \mu_0 H_{\text{entrefer}}$, d'où $B_{\text{entrefer}} = \dfrac{\mu_0 I}{2e}$.

**30.3** h) D'après la question d), on a $B(\theta) = -B(\pi-\theta)$. Or si $\theta \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, alors $\pi-\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

On a donc $B(\theta) = -B(\pi-\theta) = -\dfrac{\mu_0 I}{2e}$ d'après la question g).

**30.4** a) On a $\Omega = \omega = 2\pi f = 4\times 10^2\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

**30.4** b) On a $\Omega = \omega = 50\,\text{tour}\cdot\text{s}^{-1} = 3\,000\,\text{tour}\cdot\text{min}^{-1}$.

**30.4** c) On a $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{\Omega}{2\pi} = 100\,\text{Hz}$.

**30.4** d) La vitesse angulaire est $\Omega = \dfrac{2\pi 9000}{60} = 2\pi\times 150\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$. On a $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{\Omega}{2\pi} = 150\,\text{Hz}$.

**30.5** a) On a $\dfrac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial \theta_r} = 0 - (-B\sin(\omega t - \theta_r)) = B\sin(\omega t - \theta_r)$.

**30.5** b) On a $\dfrac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial x} = -A\dfrac{(B+Cx)^2}{C} = \dfrac{-AC}{(B+Cx)^2}$.

**30.5** c) On a $\dfrac{\partial \mathcal{E}_3}{\partial x} = 0 - (-k)B\sin(\omega t - kx) = Bk\sin(\omega t - kx)$.

**30.6** a) Le couple $\Gamma$ a pour période $T = \dfrac{2\pi}{\omega-\Omega}$. On a

$$\langle\Gamma\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \Gamma\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\left[-B\frac{1}{\omega-\Omega}\cos((\omega-\Omega)t+\phi)\right]_0^T = 0.$$

**30.6** b) On a $\Gamma = B\sin(\phi)$ qui est une constante. Ainsi, $\langle\Gamma\rangle = \Gamma = B\sin(\phi)$.

**30.6** c) Si $\omega \neq kV$, $F$ a pour période $T = \dfrac{2\pi}{\omega - kV}$. On a alors :

$$\langle F \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T F\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\left[-B\frac{1}{\omega - kV}\cos((\omega - kV)t + \phi)\right]_0^T = 0.$$

Si $\omega = 0$, $F$ est constant, on a donc $\langle F \rangle = F = Bk\sin(\phi)$.

.....

**30.7** a) On a $\mathcal{E}_{\text{mag}} = \dfrac{1}{2}Li^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mu_0\mu_r N^2 S}{l_1 + l_2 + 2\mu_r x}i^2$.

.....

**30.7** b) On a $F = \left.\dfrac{\partial \mathcal{E}_{\text{mag}}}{\partial x}\right)_i = -\dfrac{\mu_0\mu_r^2 N^2 S i^2}{(l_1 + l_2 + 2\mu_r x)^2}$.

.....

**30.8** a) On a $\Gamma = \left.\dfrac{\partial \mathcal{E}_{\text{mag}}}{\partial \theta_r}\right)_i = \dfrac{\sqrt{2}kk'\pi I I_e V}{\mu_0}\sin(\omega t - \theta_r)$.

.....

**30.8** b) La valeur moyenne d'un sinus est nulle si celui-ci n'est pas constant.

.....

**30.8** c) Dans ce cas, $\Gamma$ est constant, on a donc $\langle \Gamma \rangle = \Gamma = \dfrac{\sqrt{2}kk'\pi I I_e V}{\mu_0}\sin(\alpha)$.

.....

**30.9** a) On a $F = \left.\dfrac{\partial \mathcal{E}_{\text{mag}}}{\partial x}\right)_i = \sqrt{2}KK'II_e k\sin(\omega t - kx)$.

.....

**30.9** b) En remplaçant $x$ dans $F$, on obtient $\sqrt{2}KK'II_e k\sin((\omega - kV)t - \alpha)$.

- Si $\omega \neq kV$, on a $\langle F \rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T F\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{T}\left[-\dfrac{\sqrt{2}KK'II_e k}{\omega - kV}\cos((\omega - k)t - \alpha)\right]_0^T = 0$.
- Si $\omega = kV$, $F$ est constant et on a donc $\langle F \rangle = F = \sqrt{2}KK'II_e k\sin(\alpha)$.

.....

**30.10** a) La présence d'une force électromotrice suggère un fonctionnement générateur. La machine est court-circuitée, c'est donc la réponse (d).

.....

**30.10** b) La présence d'une force électromotrice suggère un fonctionnement générateur. La machine est laissée en circuit ouvert, c'est donc la réponse (c).

.....

**30.10** c) La présence d'une force électromotrice suggère un fonctionnement générateur. La machine est connectée à un résistor de résistance $R$, c'est donc la réponse (a).

.....

**30.10** d) La présence d'une force contre-électromotrice suggère un fonctionnement moteur. La machine est alimentée par une source de tension $U$, c'est donc la réponse (c).

.....

**30.11** a) La présence d'une force électromotrice suggère un fonctionnement générateur. La machine est connectée à une impédance $\underline{Z}$, c'est donc la réponse (a).

.....

**30.11** b) La présence d'une force électromotrice suggère un fonctionnement générateur. La machine est n'est connectée à rien (circuit ouvert) et le courant est nul, c'est donc la réponse (d).

.....

**30.11** c) La présence d'une force contre-électromotrice suggère un fonctionnement moteur. La machine est connectée à une source de tension $\underline{U}$, c'est donc la réponse (c).

**30.11** d) La présence d'une force électromotrice suggère un fonctionnement générateur. La machine est court-circuitée, c'est donc la réponse (e).

**30.11** e) La présence d'une force électromotrice suggère un fonctionnement générateur. La machine est connectée à une résistance $R$, c'est donc la réponse (b).

**30.12** a) La loi des mailles s'écrit $U = ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + E_{\mathrm{cem}}$ avec $E_{\mathrm{cem}} = \Phi_0\Omega$. En isolant $\Omega$, on obtient

$$\Omega = \frac{U - ri - L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}{\Phi_0}.$$

**30.12** b) On a $\Gamma = \Phi_0 i$, donc $i = \dfrac{\Gamma}{\Phi_0}$, d'où $\Omega = \dfrac{U}{\Phi_0} - r\dfrac{\Gamma}{\Phi_0^2} - \dfrac{L}{\Phi_0^2}\dfrac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t}$.

**30.12** c) La corde ne glisse pas sur la poulie donc on a $v = \Omega\rho$.

**30.12** d) Le bras de levier de la force $F$ est $\rho$ donc la force exercée sur la masse par la poulie est $\dfrac{\Gamma}{\rho}$.

**30.12** e) En remplaçant $\Gamma$ par $-\rho F$ et $\Omega$ par $\dfrac{v}{\rho}$ dans l'équation de la question b), on obtient

$$v = \frac{\rho U}{\Phi_0} + \frac{r\rho^2}{\Phi_0^2}F + \frac{L\rho^2}{\Phi_0^2}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}.$$

**30.12** f) Le principe fondamental de la dynamique s'écrit $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F - mg$ d'où $F = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + mg$.

**30.12** g) En remplaçant $F$ par $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + mg$ dans l'équation de la question e), on obtient

$$\frac{mL\rho^2}{\Phi_0^2}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} + \frac{mr\rho^2}{\Phi_0^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v = \frac{\rho U}{\Phi_0} - \frac{mr\rho^2 g}{\Phi_0^2}.$$

**30.13** a) La loi des nœuds s'écrit $\underline{E}_{\mathrm{em}} - r\underline{I} - jL\omega\underline{I} = \underline{U}$ soit $\underline{E}_{\mathrm{em}} = \underline{U}$ car $\underline{I} = 0$ donc (d).

**30.13** b) La loi des nœuds s'écrit $\underline{E}_{\mathrm{em}} - r\underline{I} - jL\omega\underline{I} = \underline{U}$ soit $\underline{E}_{\mathrm{em}} = \underline{U} + r\underline{I} + jL\omega\underline{I}$. Ici $\underline{U} = R\underline{I}$ donc $\underline{U}$ et $\underline{I}$ sont colinéaires sur le diagramme de Fresnel donc (b).

**30.13** c) La loi des nœuds s'écrit $\underline{E}_{\mathrm{em}} - r\underline{I} - jL\omega\underline{I} = \underline{U}$ soit $\underline{E}_{\mathrm{em}} = \underline{U} + r\underline{I} + jL\omega\underline{I}$ donc (a).

**30.13** d) La loi des nœuds s'écrit $\underline{E}_{\mathrm{em}} - r\underline{I} - jL\omega\underline{I} = \underline{U} = 0$ soit $\underline{E}_{\mathrm{em}} = r\underline{I} + jL\omega\underline{I}$ donc (e).

**30.13** e) La loi des nœuds s'écrit $\underline{U} - jL\omega\underline{I} - r\underline{I} = \underline{E}_{\mathrm{em}}$ soit $\underline{U} = \underline{E}_{\mathrm{em}} + r\underline{I} + jL\omega\underline{I}$ donc (c).

# Fiche n° 31. Conversion électronique statique

## Réponses

**31.1** a) ..... $0{,}3\,\mathrm{cm}^2$

**31.1** b) ..... $6 \times 10^{-2}\,\mathrm{cm}^2$

**31.1** c) ..... $0{,}1\,\mathrm{cm}^2$

**31.1** d) ..... $0{,}2\,\mathrm{cm}^2$

**31.1** e) ..... $0{,}5\,\mathrm{cm}^2$

**31.2** a) ..... $\alpha E$

**31.2** b) ..... $0$

**31.2** c) ..... $\dfrac{I}{2}$

**31.2** d) ..... $\dfrac{I_1 + I_2}{2}$

**31.3** a) ..... $\alpha E_1 + (1-\alpha)E_2$

**31.3** b) ..... $\dfrac{I}{2}$

**31.4** a) ..... $B$

**31.4** b) ..... $\dfrac{C}{2}$

**31.5** a) ..... $\dfrac{T}{2}$

**31.5** b) ..... $\left[0, \dfrac{T}{2}\right]$

**31.5** c) ..... $\dfrac{2}{\pi}$

**31.6** a) ..... c

**31.6** b) ..... $E' = E\dfrac{\alpha}{1-\alpha}$

**31.7** a) ..... $-E$

**31.7** b) ..... $E$

**31.7** c) ..... $0$

**31.7** d) ..... $0$

**31.7** e) ..... $0$

**31.7** f) ..... $0$

**31.8** a) ..... c

**31.8** b) ..... c

**31.9** a) ..... b

**31.9** b) ..... a

**31.9** c) ..... a

**31.9** d) ..... c

**31.10** ..... $4$

**31.11** a) ..... a

**31.11** b) ..... a

**31.11** c) ..... a

**31.11** d) ..... a

**31.12** a) ..... $i \in \mathbb{R}_+,\ u \in \mathbb{R}_+$

**31.12** b) ..... $i \in \mathbb{R},\ u \in \mathbb{R}_-$

**31.12** c) ..... $i \in \{0\},\ u \in \mathbb{R}_-$

**31.12** d) ..... $i \in \mathbb{R},\ u \in \{0\}$

**31.13** a) ..... $L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = -E$

**31.13** b) ..... $L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = E$

**31.14** a) ..... $L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = E$

**31.14** b) ..... $i(t) = \dfrac{E}{L}t + C$

**31.14** c) ..... $L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -E'$

**31.14** d) ... $i(t) = -\dfrac{E'}{L}t + C'$

**31.14** e) ..... $\dfrac{E}{L}\alpha T$

**31.15** a) ..... a

**31.15** b) ..... c

**31.15** c) ..... b

## Corrigés

**31.1** a) L'aire du rectangle se calcule selon $4 \times 8 = 32 \approx 3 \times 10^1\,\mathrm{mm}^2 = 3 \times 10^{-1}\,\mathrm{cm}^2$.

.....

**31.1** b) L'aire du triangle vaut $\dfrac{4 \times 3}{2} = 6\,\mathrm{mm}^2 = 6 \times 10^{-2}\,\mathrm{cm}^2$.

.....

**31.1** c) L'aire du disque est $\pi \times 2^2 \approx 3 \times 4 \approx 1 \times 10^1\,\mathrm{mm} = 1 \times 10^{-1}\,\mathrm{cm}^2$.

.....

**31.1** d) L'aire du triangle vaut $\dfrac{5\times 8}{2} = 2\times 10^1\ \mathrm{mm}^2 = 2\times 10^{-1}\ \mathrm{cm}^2$.

**31.1** e) La sphère a pour aire $4\times\pi\times 2^2 \approx 4\times 3\times 4 \approx 5\times 10^1\ \mathrm{mm}^2 = 5\times 10^{-1}\ \mathrm{cm}^2$.

**31.2** a) On a $\langle u(t)\rangle = \dfrac{\mathcal{A}}{T} = \dfrac{E\alpha T}{T} = \alpha E$.

**31.2** b) On a $\langle v(t)\rangle = \dfrac{\mathcal{A}}{T} = \dfrac{(1-\alpha)E\alpha T + (-\alpha E)(T-\alpha T)}{T} = \dfrac{\alpha ET - \alpha^2 ET - \alpha ET + \alpha^2 ET}{T} = 0$.

**31.2** c) On a $\langle i(t)\rangle = \dfrac{\mathcal{A}}{T} = \dfrac{\frac{I\alpha T}{2} + \frac{I(T-\alpha T)}{2}}{T} = \dfrac{I\alpha T + IT - I\alpha T}{2T} = \dfrac{I}{2}$.

**31.2** d) On a

$$\begin{aligned}\langle j(t)\rangle = \frac{\mathcal{A}}{T} &= \frac{I_2T + \frac{(I_1-I_2)\alpha T}{2} + \frac{(I_1-I_2)(T-\alpha T)}{2}}{T}\\ &= I_2 + \frac{1}{2}I_1\alpha - \frac{1}{2}I_2\alpha + \frac{1}{2}I_1 - \frac{1}{2}I_1\alpha - \frac{1}{2}I_2 + \frac{1}{2}I_2\alpha\\ &= \frac{1}{2}I_1 + \frac{1}{2}I_2 = \frac{I_1+I_2}{2}.\end{aligned}$$

**31.3** a)

Le chronogramme de $u$ est représenté ci-contre.

On en déduit que $\langle u(t)\rangle = \dfrac{E_1\alpha T + E_2(T-\alpha T)}{T} = \alpha E_1 + (1-\alpha)E_2$.

**31.3** b)

Le chronogramme de $i$ est représenté ci-contre.

On en déduit que $\langle i(t)\rangle = \dfrac{\frac{I\alpha T}{2} + \frac{I(T-\alpha T)}{2}}{T} = \dfrac{I}{2}$.

**31.4** a) On a

$$\begin{aligned}\langle v(t)\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + B\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\left[\frac{AT}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + Bt\right]_0^T\\ &= \frac{1}{T}\left(\frac{AT}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{T}T\right) + BT - \frac{AT}{2\pi}\sin(0) - 0\right) = \frac{1}{T}(0 + BT - 0 - 0) = B.\end{aligned}$$

**31.4** b) On a $\sin^2\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right) = C\dfrac{1-\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)}{2}$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}\langle p(t)\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T C\sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T C\frac{1-\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\left[\frac{C}{2}t - \frac{C}{2}\frac{T}{4\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right]_0^T\\ &= \frac{1}{T}\left(\frac{C}{2}T + \frac{CT}{8\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{T}T\right) - 0 + \frac{CT}{8\pi}\sin(0)\right) = \frac{1}{T}\left(\frac{C}{2}T + 0 - 0 - 0\right) = \frac{C}{2}.\end{aligned}$$

**31.5** a) On a $u(x+\frac{T}{2}) = \left|\sin\left(\frac{2\pi}{T}(x+\frac{T}{2})\right)\right| = \left|\sin\left(\frac{2\pi}{T}x+\pi\right)\right| = \left|-\sin\left(\frac{2\pi}{T}x\right)\right| = \left|\sin\left(\frac{2\pi}{T}x\right)\right| = u(x)$.

La période de $u$ est donc $\frac{T}{2}$.

.....

**31.5** b) La fonction sinus est positive entre 0 et $\pi$ donc $\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ est positif pour $t$ entre 0 et $\frac{T}{2}$.

.....

**31.5** c) On a $\langle u(t)\rangle = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\left[\frac{-T}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{-1}{\pi}(\cos(\pi)-\cos(0)) = \frac{-1}{\pi}(-1-1) = \frac{2}{\pi}$.

.....

**31.6** a) La valeur moyenne de la tension aux bornes d'une bobine est nulle. Seule la courbe (c) vérifie cette condition.

.....

**31.6** b) On a $\langle u_L(t)\rangle = \frac{\alpha TE + (T-\alpha T)(-E')}{T} = \alpha E - (1-\alpha)E'$. Comme $\langle u_L(t)\rangle = 0$, on a $E' = \frac{\alpha}{1-\alpha}E$.

.....

**31.7** a) Comme $K_1$ et $K_3$ sont fermés, la loi des mailles s'écrit $E+u=0$ donc $u=-E$.

.....

**31.7** b) Comme $K_2$ et $K_4$ sont fermés, la loi des mailles s'écrit $E-u=0$ donc $u=E$.

.....

**31.7** c) Entre 0 et $\frac{T}{2}$ on a $u=-E$ et entre $\frac{T}{2}$ et $T$, $u=E$. Ainsi on a $\langle u(t)\rangle = 0$.

.....

**31.7** d) La tension $u_L$ est la tension aux bornes d'une bobine donc sa valeur moyenne est nulle.

.....

**31.7** e) On a $u = u_R + u_L$ donc $\langle u_R\rangle = \langle u\rangle - \langle u_L\rangle = 0$.

.....

**31.7** f) On a $\langle i\rangle = \frac{\langle u_R\rangle}{R} = 0$.

.....

**31.8** a) Les interrupteurs $K_1$ et $K_2$ ne peuvent pas être ouverts en même temps car la bobine, considérée comme une source de courant, serait en circuit ouvert, ce qui est interdit.

Les interrupteurs $K_1$ et $K_2$ ne peuvent pas être fermés en même temps car les sources de tensions seraient en parallèle, ce qui est interdit.

Il reste l'états $K_1$ ouvert et $K_2$ fermé (ainsi que $K_1$ fermé et $K_2$ ouvert mais qui ne figure pas dans les propositions).

.....

**31.8** b) Les interrupteurs $K_1$ et $K_2$ ne peuvent pas être ouverts en même temps car la source de courant serait en circuit ouvert, ce qui est interdit.

Les interrupteurs $K_1$ et $K_2$ ne peuvent pas être fermés en même temps car la source de tension serait court-circuitée, ce qui est interdit.

Il reste l'état $K_1$ fermé et $K_2$ ouvert (ainsi que $K_1$ ouvert et $K_2$ fermé mais qui ne figure pas dans les propositions).

.....

**31.9** a) On a $u \geqslant 0$ et $i \geqslant 0$, il faut donc un transistor.

.....

**31.9** b) On a $u \geqslant 0$ et $i \leqslant 0$, il faut donc une diode (en convention inverse).

.....

**31.9** c) On a $u \leqslant 0$ et $i \geqslant 0$, il faut donc une diode (en convention directe).

**31.9** d) On a $u \geqslant 0$ et $i$ peut être positif et négatif, il faut donc un interrupteur bidirectionnel.

**31.10**

$K_1$ et $K_4$ ne peuvent pas être ouverts en même temps car la source de courant serait en circuit ouvert, ce qui est interdit.

$K_1$ et $K_4$ ne peuvent pas être fermés en même temps car la source de tension serait court-circuitée, ce qui est interdit.

$K_2$ et $K_3$ ne peuvent pas être ouverts en même temps car la source de courant serait en circuit ouvert, ce qui est interdit.

$K_2$ et $K_3$ ne peuvent pas être fermés en même temps car la source de tension serait court-circuitée, ce qui est interdit.

Il reste 4 états.

| $K_1$ | $K_2$ | $K_3$ | $K_4$ |
|---|---|---|---|
| ~~Ouvert~~ | ~~Ouvert~~ | ~~Ouvert~~ | ~~Ouvert~~ |
| ~~Ouvert~~ | ~~Ouvert~~ | ~~Ouvert~~ | ~~Fermé~~ |
| ~~Ouvert~~ | ~~Ouvert~~ | ~~Fermé~~ | ~~Ouvert~~ |
| Ouvert | Ouvert | Fermé | Fermé |
| ~~Ouvert~~ | ~~Fermé~~ | ~~Ouvert~~ | ~~Ouvert~~ |
| Ouvert | Fermé | Ouvert | Fermé |
| ~~Ouvert~~ | ~~Fermé~~ | ~~Fermé~~ | ~~Ouvert~~ |
| ~~Ouvert~~ | ~~Fermé~~ | ~~Fermé~~ | ~~Fermé~~ |
| ~~Fermé~~ | ~~Ouvert~~ | ~~Ouvert~~ | ~~Ouvert~~ |
| ~~Fermé~~ | ~~Ouvert~~ | ~~Ouvert~~ | ~~Fermé~~ |
| Fermé | Ouvert | Fermé | Ouvert |
| ~~Fermé~~ | ~~Ouvert~~ | ~~Fermé~~ | ~~Fermé~~ |
| Fermé | Fermé | Ouvert | Ouvert |
| ~~Fermé~~ | ~~Fermé~~ | ~~Ouvert~~ | ~~Fermé~~ |
| ~~Fermé~~ | ~~Fermé~~ | ~~Fermé~~ | ~~Ouvert~~ |
| ~~Fermé~~ | ~~Fermé~~ | ~~Fermé~~ | ~~Fermé~~ |

**31.11** a) On a $u_1 \leqslant 0$ et $i_1 \geqslant 0$, il faut donc une diode (en convention directe).

**31.11** b) Attention, l'interrupteur 2 n'est pas en convention récepteur. Si on pose $u_2' = -u_2$, on a $u_2' \leqslant 0$ et $i_2 \geqslant 0$, il faut donc une diode (en convention directe).

**31.11** c) Attention, l'interrupteur 3 n'est pas en convention récepteur. Si on pose $u_3' = -u_3$, on a $u_3' \geqslant 0$ et $i_3 \leqslant 0$, il faut donc une diode (en convention inverse).

**31.11** d) On a $u_4 \geqslant 0$ et $i_4 \leqslant 0$, il faut donc une diode (en convention inverse).

**31.12** a) On pose $u' = -u$ pour avoir une diode en convention directe.

On a $i \geqslant 0$ et $u' \leqslant 0$ donc $u \geqslant 0$.

**31.12** b) On pose $u' = -u$ pour avoir un interrupteur bidirectionnel en convention directe.

On a $i \in \mathbb{R}$ et $u' \geqslant 0$ donc $u \leqslant 0$.

**31.12** c) On pose $u' = -u$ et $i' = -i$ pour avoir un transistor en convention directe. On a $u' \geqslant 0$ donc $u \leqslant 0$.

Le transistor est bloqué donc $i'$ est nul, donc $i$ est nul également.

**31.12** d) On pose $u' = -u$ pour avoir un interrupteur bidirectionnel en convention directe.

Le transistor est passant, on a donc $u' = 0$ et donc $u = 0$.

Pour un interrupteur bidirectionnel avec un transistor passant, on a $i \in \mathbb{R}$.

**31.13** a) Entre 0 et $\frac{T}{2}$, on a $-E = u = u_L + u_R = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri$.

.....

**31.13** b) Entre $\frac{T}{2}$ et $T$, on a $E = u = u_L + u_R = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri$.

.....

**31.14** a) Entre 0 et $\alpha T$, on a $E = u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.

.....

**31.14** b) On a $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{E}{L}$, d'où $i(t) = \frac{E}{L}t + C$.

.....

**31.14** c) Entre $\alpha T$ et $T$, on a $-E' = u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.

.....

**31.14** d) On a $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{-E'}{L}$, d'où $i(t) = -\frac{E'}{L}t + C'$.

.....

**31.14** e) On a $\Delta i = i(\alpha T) - i(0) = \frac{E}{L}\alpha T + C - C = \frac{E}{L}\alpha T$.

.....

**31.15** a) Le courant traversant une bobine est continu donc $u_R$ l'est également.

La courbe (a) correspond donc à $u_R$.

.....

**31.15** b) La tension $u$ est égale soit à $E$ (lorsque $K_2$ et $K_4$ sont fermés), soit à $-E$ (lorsque $K_1$ et $K_3$ sont fermés), il s'agit donc de la courbe (c).

.....

**31.15** c) On a $u_L = u - u_R$, il s'agit donc de la courbe (b).

.....

# Fiche n° 32. Propagation des ondes et interfaces

## Réponses

**32.1** a) ..... $\boxed{0{,}78}$

**32.1** b) ..... $\boxed{0{,}96}$

**32.1** c) ..... $\boxed{2{,}1}$

**32.2** a) ..... $\boxed{70{,}4\,\mathrm{dB}}$

**32.2** b) ..... $\boxed{7\,\mathrm{dB}}$

**32.2** c) ..... $\boxed{10^6}$

**32.3** a) ..... Dans l'eau.

**32.3** b) ..... Par 4

**32.3** c) ..... Dans l'acier

**32.4** a) .. $\boxed{-p_1\cos(\omega t - k_x x - k_y y)(k_x\overrightarrow{e_x} + k_y\overrightarrow{e_y})}$

**32.4** b) .. $\boxed{\dfrac{p_1}{\rho_0\omega}(k_x\overrightarrow{e_x} + k_y\overrightarrow{e_y})\sin(\omega t - k_x x - k_y y)}$

**32.5** a) ..... $\boxed{\dfrac{kp_1}{\omega\rho_0}\cos(kx - \omega t)\overrightarrow{e_x}}$

**32.5** b) ..... $\boxed{\dfrac{kp_1}{\omega\rho_0}\sin(kx)\sin(\omega t)\overrightarrow{e_x}}$

**32.5** c) ..... $\boxed{\dfrac{A}{\rho_0\omega r}\Big[-\dfrac{1}{r}\sin(kr - \omega t) + k\cos(kr - \omega t)\Big]\overrightarrow{e_r}}$

**32.6** a) ..... $\boxed{\phi = \pi/2 \text{ et } k = n\pi/L}$

**32.6** b) ..... $\boxed{\phi = \pi/2 \text{ et } k = (n + 1/2)\pi/L}$

**32.6** c) ..... $\boxed{\phi = 0 \text{ et } k = n\pi/L}$

**32.7** a) ..... $\boxed{\rho_0\dfrac{\partial\overrightarrow{v_1}}{\partial t}}$

**32.7** b) ..... $\boxed{\rho_0\,\mathrm{div}\,\overrightarrow{v_1}}$

**32.7** c) ..... $\boxed{\rho_0\dfrac{\partial p_1}{\partial t}}$

**32.8** a) ..... c

**32.8** b) ..... $\boxed{k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}}$

**32.8** c) ..... $\boxed{c^2\dfrac{f''}{f} = \dfrac{\ddot{g}}{g}}$

**32.9** a) ..... b

**32.9** b) ..... $\boxed{3{,}14\times10^{-3}\,\mathrm{m^3/s}}$

**32.9** c) ..... 106 minutes

**32.10** a) ..... $\boxed{\rho S v(x,t)\,\mathrm{d}t}$

**32.10** b) ..... $\boxed{\rho v(x + \mathrm{d}x, t)S\,\mathrm{d}t}$

**32.10** c) ..... $\boxed{-\rho S\,\mathrm{d}t[v(x + \mathrm{d}x, t) - v(x,t)]}$

**32.10** d) ..... $\boxed{-\rho S\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t}$

**32.11** a) ..... a

**32.11** b) ..... c

**32.11** c) ..... d

**32.11** d) ..... b

**32.12** a) ..... $\boxed{\dfrac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}}$

**32.12** b) ..... $\boxed{\dfrac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}}$

**32.12** c) ..... oui

**32.12** d) ..... $\boxed{\pi}$

**32.13** a) ..... a

**32.13** b) ..... b

## Corrigés

**32.1** a) On a $\log(6) = \log(3 \times 2) = \log(3) + \log(2) \approx 0{,}78$.

**32.1** b) On a $\log(4+5) = \log(9) = \log\left(3^2\right) = 2\log(3) \approx 0{,}96$.

**32.1** c) On a $\log(125) = \log\left(5^3\right) = 3\log(5) \approx 2{,}1$.

**32.2** a) En notant les intensités sonores en décibel $I_{1,\mathrm{dB}}$ et $I_{2,\mathrm{dB}}$ et les intensités linéaires $I_1$ et $I_2$, on a

$$I_{\mathrm{dB}} = 10\log\left(\frac{I_1+I_2}{I_0}\right) \quad \text{avec} \quad I_1 = I_0 \times 10^{I_{1,\mathrm{dB}}/10} \quad \text{et} \quad I_2 = I_0 \times 10^{I_{2,\mathrm{dB}}/10}.$$

**32.2** b) On peut écrire

$$I_{\mathrm{dB}} = 10\log\left(\frac{5I}{I_0}\right) = 10\log 5 + 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 7 + 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right).$$

L'intensité acoustique augmente de 7 dB.

**32.2** c) On cherche un entier $n$ tel que

$$I_{\mathrm{dB}} = 10\log\left(\frac{nI}{I_0}\right) \geqslant 120 \qquad \text{donc tel que} \qquad n \geqslant \frac{I_0}{I} \times 10^{12} \quad \text{avec} \quad I = I_0 \times 10^{60/10}.$$

On trouve $n \geqslant 10^6$.

**32.3** a) Le rapport des deux vitesses au carré s'exprime $\rho_a\chi_a/\rho_e\chi_e = 1,3 \times 10^2$. Les ondes acoustiques se propagent plus rapidement dans l'eau.

**32.3** b) En multipliant la température par 4, on multiplie la vitesse par $\sqrt{4} = 2$.

**32.3** c) Le rapport des deux vitesses au carré s'exprime $E\rho_e\chi_e/\rho_a = 20/7,8 > 1$. L'onde acoustique se propage plus rapidement dans l'acier.

**32.4** a) On a $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p = \dfrac{\partial p}{\partial x}\vec{e_x} + \dfrac{\partial p}{\partial y}\vec{e_y}$.

**32.4** b) En utilisant le résultat de la question précédente, on peut écrire que

$$\vec{v} = \frac{p_1}{\rho_0\omega}(k_x\vec{e_x} + k_y\vec{e_y})\sin(\omega t - k_x x - k_y y) + \vec{A},$$

où $\vec{A}$ est une constante d'intégration supposée nulle.

**32.5** a) On peut écrire $-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p = p_1 k \sin(\omega t - kx)\vec{e}_x$ donc $\vec{v_1} = \dfrac{kp_1}{\omega\rho_0}\cos(kx - \omega t)\vec{e}_x + \vec{A}$, où $\vec{A}$ est une constante d'intégration supposée nulle.

**32.5** b) On peut écrire $-\overrightarrow{\text{grad}}\,p = p_1 k \sin(kx)\cos(\omega t)\vec{e}_x$ donc $\vec{v_1} = \dfrac{kp_1}{\omega\rho_0}\sin(kx)\sin(\omega t)\vec{e_x} + \vec{A}$, où $\vec{A}$ est une constante d'intégration supposée nulle.

.....

**32.5** c) On peut écrire $-\overrightarrow{\text{grad}}\,p = \dfrac{A}{r}\left[\dfrac{1}{r}\cos(kr-\omega t) + k\sin(kr-\omega t)\right]\vec{e}_r$.

On a alors en intégrant et en divisant par $\rho_0$

$$\vec{v_1} = \frac{A}{\rho_0\omega r}\left[-\frac{1}{r}\sin(kr-\omega t) + k\cos(kr-\omega t)\right]\vec{e_r} + \vec{A},$$

où $\vec{A}$ est une constante d'intégration supposée nulle.

.....

**32.6** a) À tout instant $t$, on a $p(0,t) = 0$ donc $\cos(\phi) = 0$. On déduit $\phi = \pi/2$. À tout instant $t$, $p(L,t) = 0$ donc $\cos(kL + \pi/2) = \sin(kL) = 0$. On en déduit $k = n\pi/L$.

.....

**32.6** b) Les conditions aux limites imposent $v(L,t) = 0$ et $p(0,t) = 0$.

.....

**32.6** c) Les conditions aux limites imposent $v(L,t) = 0$ et $v(0,t) = 0$.

.....

**32.7** a) On écrit $\rho\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} = (\rho_0 + \rho_1)\dfrac{\partial\vec{v_1}}{\partial t} \approx \rho_0\dfrac{\partial\vec{v_1}}{\partial t}$ en ne gardant que les termes d'ordre 1.

.....

**32.7** b) On a $\rho\,\text{div}\,\vec{v} = (\rho_0 + \rho_1)\,\text{div}\,\vec{v_1} \approx \rho_0\,\text{div}\,\vec{v_1}$ en ne gardant que les termes d'ordre 1.

.....

**32.7** c) La pression $p_0$ ne dépend ni du point M d'observation ni de $t$. Donc, à l'ordre 1, on a

$$\rho\left(\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\,p\right) \approx \rho_0\frac{\partial p_1}{\partial t}.$$

.....

**32.8** a) Le terme $\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2}$ est homogène à une pression divisée par une surface tandis que $\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2}$ est homogène à une pression divisée par un temps au carré.

.....

**32.8** b) On injecte la solution proposée dans l'équation de d'Alembert. On obtient

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \quad \text{donc} \quad -p_0\omega^2\cos(\omega t - kx) = -c^2 p_0 k^2\cos(\omega t - kx)$$
$$\text{donc} \quad \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\cos(\omega t - kx) = 0 \quad \text{donc} \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

.....

**32.8** c) On injecte la solution proposée dans l'équation de d'Alembert. On obtient

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \quad \text{donc} \quad f(x)\ddot{g}(t) = c^2 f''(x)g(t).$$

.....

**32.9** a) Un débit de volume s'exprime en $\text{m}^3$ par intervalle de temps $\text{d}t$ en s.

.....

**32.9** b) Le débit de volume s'exprime $D_v = \pi R^2 v$. L'application numérique donne $D_v = 3{,}14\times10^{-3}\,\text{m}^3/\text{s}$.

.....

**32.9** c) Le volume d'eau dans la piscine s'exprime $V = hL\ell$. Le temps nécessaire à la remplir s'écrit donc $\tau = V/D_v = hL\ell/D_v$. L'application numérique donne $\tau = 106$ minutes.

.....

**32.10** a) La masse de fluide $\delta m_x$ traversant $S_x$ entre $t$ et $t + \mathrm{d}t$ s'exprime : $D_{m,x}\,\mathrm{d}t = \rho S v(x,t)\,\mathrm{d}t$.

.....

**32.10** b) La masse de fluide $\delta m_{x+\mathrm{d}x}$ traversant $S_{x+\mathrm{d}x}$ entre $t$ et $t+\mathrm{d}t$ s'expriment $D_{m,x+\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}t = \rho S v(x+\mathrm{d}x,t)\,\mathrm{d}t$.

.....

**32.10** c) La masse de fluide entrant dans le volume s'exprime $\delta m = \delta m_x - \delta m_{x+\mathrm{d}x} = -\rho S\,\mathrm{d}t[v(x+\mathrm{d}x,t) - v(x,t)]$.

.....

**32.10** d) La masse $\delta m$ s'exprime $\delta m = -\rho S\,\mathrm{d}t[v(x+\mathrm{d}x,t) - v(x,t)] = -\rho S\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$.

.....

**32.11** a) Le coefficient de proportionnalité entre $\underline{a}$ et $\underline{b}$ est un réel positif $2 = 2\exp[0\mathrm{j}]$.

.....

**32.11** b) Le coefficient de proportionnalité entre $\underline{a}$ et $\underline{b}$ est un imaginaire pur $\mathrm{j} = \exp[\mathrm{j}\pi/2]$.

.....

**32.11** c) On a $1 + \mathrm{j} = \sqrt{2}\exp(\mathrm{j}\pi/4)$.

.....

**32.11** d) Le coefficient de proportionnalité entre $\underline{a}$ et $\underline{b}$ est un réel négatif $-5 = 5\exp[\pi\mathrm{j}]$.

.....

**32.12** a) Les continuités de la vitesse et de la surpression en $x = 0$ permettent d'écrire

$$1 + \underline{r} = \underline{t} \quad \text{et} \quad \frac{1}{Z_1}(1 - \underline{r}) = \frac{\underline{t}}{Z_2} \quad \text{donc} \quad \underline{r} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}.$$

.....

**32.12** b) À la question précédente, on a établi l'expression de $\underline{r}$ et sachant que $1 + \underline{r} = \underline{t}$, on en déduit

$$\underline{t} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

.....

**32.12** c) Le coefficient de transmission $\underline{t}$ est réel et positif, la surpression de l'onde transmise est donc en phase avec celle de l'onde incidente.

.....

**32.12** d) Le coefficient de réflexion est réel et négatif, le déphasage entre la surpression de l'onde réfléchie et celle de l'onde incidente est donc de $\pi$.

.....

**32.13** a) La force de pression s'exprime

$$\overrightarrow{F_{P,g}} = -\iint_{\mathcal{S}} P(0^-,t)\overrightarrow{\mathrm{d}S_g} = \iint_{\mathcal{S}} P(0^-,t)\overrightarrow{\mathrm{d}S}\overrightarrow{e_x} = [P_0 + p_{i0}\cos(\omega t) + p_{r0}\cos(\omega t + \phi_r)]S\overrightarrow{e_x}.$$

.....

**32.13** b) La force de pression s'exprime

$$\overrightarrow{F_{P,d}} = -\iint_{\mathcal{S}} P(0^+,t)\overrightarrow{\mathrm{d}S_d} = -\iint_{\mathcal{S}} P(0^+,t)\,\mathrm{d}S\overrightarrow{e_x} = -[P_0 + p_{t0}\cos(\omega t + \phi_t)]S\overrightarrow{e_x}.$$

.....

# Fiche n° 33. Propagation des ondes et dispersion

## Réponses

**33.1** a) ..... $\boxed{\underline{u}(x,t) = U_0 \mathrm{e}^{-x/\delta} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(t-x/c)}}$

**33.1** b) ..... $\boxed{k' = \omega/c}$

**33.1** c) ..... $\boxed{k'' = 1/\delta}$

**33.2** a) ..... (b)

**33.2** b) ..... (a)

**33.2** c) ..... (b)(c)(d)

**33.2** d) ..... (a)(c)

**33.2** e) ..... (a)

**33.3** ..... (b)

**33.4** a) ..... (c)

**33.4** b) ..... $\boxed{k = \omega/c}$

**33.4** c) ..... $\boxed{c^2 \dfrac{f''}{f} = \dfrac{g''}{g}}$

**33.5** ..... (c)

**33.6** a) ..... Pas de dispersion ni d'absorption

**33.6** b) ..... Absorption sans dispersion

**33.6** c) ..... Dispersion sans absorption

**33.6** d) ..... Absorption et dispersion

**33.7** a) ..... $\boxed{\underline{k} = k = \dfrac{\omega}{c}}$

**33.7** b) ..... $\boxed{\underline{k} = \dfrac{\omega}{c}(1 + \mathrm{j}\omega \dfrac{\eta}{\mu_0 c^2})^{-1/2}}$

**33.7** c) ..... $\boxed{\omega^2 = \underline{k}^2 c^2 + \mathrm{j} m c^2 \underline{k}}$

**33.7** d) ..... $\boxed{\underline{k} = k = \dfrac{\omega}{u \pm c}}$

**33.8** a) ..... $\boxed{\sqrt{\dfrac{\gamma k^2 h}{\mu}}}$

**33.8** b) ..... $\boxed{\sqrt{\dfrac{\gamma k}{\mu}}}$

**33.8** c) ..... $\boxed{\sqrt{gh}}$

**33.8** d) ..... $\boxed{\sqrt{\dfrac{g}{k}} = \dfrac{g}{\omega}}$

**33.9** a) ..... (a)

**33.9** b) ..... $\boxed{\dfrac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}}$

**33.9** c) ..... $\boxed{c\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$

**33.10** a) ..... $\boxed{2\dfrac{\omega}{k}}$

**33.10** b) ..... $\boxed{v_\mathrm{g} = \dfrac{3\omega}{2k}}$

**33.10** c) ..... $\boxed{\sqrt{gh}}$

**33.10** d) ..... $\boxed{\dfrac{g}{2\omega}}$

**33.11** a) ..... (e)

**33.11** b) ..... $\boxed{0 \text{ ou } +\infty}$

**33.11** c) ..... $\boxed{Z_\mathrm{c}}$

**33.11** d) ..... $\boxed{1}$

**33.11** e) ..... $\boxed{\dfrac{4 Z Z_\mathrm{c}}{(Z + Z_\mathrm{c})^2}}$

**33.12** a) ..... $\boxed{0{,}99}$

**33.12** b) ..... $\boxed{0{,}99}$

**33.12** c) ..... $\boxed{2{,}4 \times 10^{-4}}$

**33.13** a) ..... $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2 E}{\mathrm{d}z^2}(z) = (k^2 - \dfrac{\omega^2}{c^2})E}$

**33.13** b) ..... $\boxed{\dfrac{p\pi}{L}}$

**33.13** c) ..... $\boxed{E_0 \sin(\frac{n\pi}{L} z) \cos(\omega t - kx)\overrightarrow{u_y}}$

**33.13** d) ..... $\boxed{5\,\text{GHz}}$

**33.14** a) ..... $\boxed{\text{b}}$

**33.14** b) ..... $\boxed{9{,}2\,\text{mm}}$

**33.15** a) ..... $\boxed{\text{f}}$

**33.15** b) ..... $\boxed{161\,\text{Hz}}$

**33.16** a) ..... $\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}) = -\Delta\vec{E}}$

**33.16** b) ..... $\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}) = -\mu_0\gamma\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E})}$

**33.16** c) ..... $\boxed{\Delta\vec{E} = \mu_0\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$

## Corrigés

**33.1** a) En notation complexe usuelle, on a $\underline{u}(x,t) = U_0 \mathrm{e}^{-x/\delta}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(t-x/c)} = U_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-(\omega/c)x+\mathrm{j}x/\delta)}$.

.....

**33.1** b) En notation complexe usuelle, on a $\underline{u}(x,t) = U_0 \mathrm{e}^{-x/\delta}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(t-x/c)} = U_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-(\omega/c)x+\mathrm{j}x/\delta)} = U_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\underline{k}x)}$ et on identifie $k' = \omega/c$.

.....

**33.1** c) En notation complexe usuelle, on a $\underline{u}(x,t) = U_0 \mathrm{e}^{-x/\delta}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(t-x/c)} = U_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-(\omega/c)x+\mathrm{j}x/\delta)} = U_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\underline{k}x)}$ et on identifie $k'' = 1/\delta$.

.....

**33.2** a) Les variables spatiales et temporelles sont découplées et l'onde est de la forme $f(z) \times g(t)$ : il n'y a pas de propagation. De plus $f$ et $g$ sont périodiques : l'onde est stationnaire. Par ailleurs, l'amplitude est constante, donc il n'y a aucun amortissement. Réponse (b).

.....

**33.2** b) Les variables spatiales et temporelles sont couplées de la forme $\omega t - kz$. Il y a propagation selon les $z$ croissants. Par ailleurs l'amplitude est constante, donc il n'y a aucun amortissement. Réponse (a).

.....

**33.2** c) Les variables spatiales et temporelles sont découplées de la forme $f(z)\times g(t)$ : il n'y a pas de propagation. De plus $f$ et une exponentielle décroissante : l'onde est immédiatemment amortie, c'est donc une onde évanescente. Réponses (b), (c), (d).

.....

**33.2** d) Les variables spatiales et temporelles sont couplées de la forme $\omega t - kz$ : il y a propagation. De plus l'amplitude de l'onde est de la forme $A\exp(-kz)$, elle est donc amortie (en l'occurrence exponentiellement). Comme il y a propagation, on ne parle pas d'onde évanescente. Réponses (a), (c).

.....

**33.2** e) Les variables spatiales et temporelles sont couplées de la forme $\omega t - kz$. Il y a propagation selon les $z$ décroissants. Par ailleurs l'amplitude est constante, donc il n'y a aucun amortissement. Réponse (a).

.....

**33.3** On réalise l'application numérique dans chaque cas, dans la même unité afin de pouvoir comparer les valeurs obtenues.

(a) : $c_s = \sqrt{\dfrac{\frac{7}{5} \times 8{,}314\,\mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}} \times 250\,\mathrm{K}}{2{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg/mol}}} = 1\,206\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

(b) : $c_s = \sqrt{\dfrac{\frac{5}{3} \times 8{,}314\,\mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}} \times 350\,\mathrm{K}}{4{,}0 \times 10^{-2}\,\mathrm{kg/mol}}} = 348\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

(c) : $c_s = \sqrt{\dfrac{\frac{7}{5} \times 8{,}314\,\mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}} \times 293\,\mathrm{K}}{16 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg/mol}}} = 462\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

(d) : $c_s = \sqrt{\dfrac{\frac{7}{5} \times 8{,}314\,\mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}} \times 273\,\mathrm{K}}{14 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg/mol}}} = 476\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

La situation où la vitesse du son est la plus faible est la (b).

.....

**33.4** b) On injecte la solution proposée dans l'équation de la question précédente. On a

$$\omega^2 p_0 \cos(\omega t - kx) = c^2 k^2 p_0 \cos(\omega t - kx) \qquad \text{donc} \qquad \omega^2 = c^2 k^2.$$

Fréquence et norme du vecteur d'onde étant des grandeurs strictement positives, on a $\omega = ck$.

.....

**33.4** c) On injecte la solution proposée dans l'équation de la question précédente.

On a $f(x)g''(t) = c^2 f''(x)g(t)$, ou encore $c^2 \dfrac{f''}{f} = \dfrac{g''}{g}$ (en admettant que $f$ et $g$ ne s'annulent pas sur le domaine considéré).

.....

**33.5** Seules les équations de d'Alembert témoignent d'une propagation idéale, ce qui exclut les réponses (a), (b) et (c) dans lesquelles sont présents des termes d'ordre 0 ou 1. La réponse (c) fait apparaître la forme du laplacien scalaire dans un système de coordonnées cartésiennes et peut se réécrire : $\Delta \vec{E} = \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$, qui est bien une équation de d'Alembert. (c).

.....

**33.6** a) C'est la relation de dispersion associée à l'équation d'onde de d'Alembert.

Elle témoigne d'une propagation idéale.

.....

**33.6** b) La partie imaginaire du vecteur d'onde n'est pas nulle, et sa partie réelle est proportionnelle à la pulsation.

.....

**33.6** c) Le vecteur d'onde est réel et il n'est pas proportionnel à la pulsation.

.....

**33.6** d) La partie imaginaire du vecteur d'onde n'est pas nulle, et sa partie réelle n'est pas proportionnelle à la pulsation.

.....

**33.7** a) Dans chaque cas, on injecte la solution $p$ de l'énoncé dans l'équation proposée. Une dérivée spatiale conduit à un préfacteur $-k$ et une dérivée temporelle à un préfacteur $\omega$. Dans le cas d'une dérivée croisée $\partial x \partial t$ on pourra vérifier que l'ordre de dérivation n'importe pas (le théorème de Schwarz s'applique).

.....

**33.8** a) On a $\omega^2 = \dfrac{\gamma h}{\mu} \times k^4$ donc $\dfrac{\omega^2}{k^2} = \dfrac{\gamma k^2 h}{\mu}$. En prenant la racine on obtient : $v_\phi = \sqrt{\dfrac{\gamma k^2 h}{\mu}}$.

La vitesse de phase dépend de la norme du vecteur d'onde $k$, donc de la pulsation $\omega$.

.....

**33.8** b) On a $\omega^2 = \dfrac{\gamma k^3}{\mu}$ donc $\dfrac{\omega^2}{k^2} = \dfrac{\gamma k h}{\mu}$. En prenant la racine on obtient : $v_\phi = \sqrt{\dfrac{\gamma k h}{\mu}}$.

.....

**33.8** c) On a $\omega^2 = ghk^2$ donc $\dfrac{\omega^2}{k^2} = gh$. En prenant la racine on obtient : $v_\phi = \sqrt{gh}$.

.....

**33.8** d) On a $\omega^2 = gk$ donc $\dfrac{\omega^2}{k^2} = \dfrac{g}{k}$. En prenant la racine on obtient : $v_\phi = \sqrt{\dfrac{g}{k}}$.

On peut aussi exprimer la vitesse via la pulsation $\omega$, soit en injectant $k = \omega^2/g$ (énoncé) soit en l'identifiant dès le départ. Quelque soit la méthode, on a finalement : $v_\phi = \dfrac{g}{\omega}$.

.....

**33.9** a) La fonction $k(\omega)$ proposée tend asymptotiquement vers la droite d'équation $k = \omega$ en $+\infty$, ce qui exclut la réponse (c). Par ailleurs, la fonction $k(\omega)$ proposée n'est pas définie si $\omega < \omega_p$, donc elle ne peut pas être continue sur $\mathbb{R}$, ce qui exclut la réponse (b). La fonction doit donc être non définie sur l'intervalle $[-\omega_p, \omega_p]$, ce qui est bien le cas de la réponse (a).

.....

**33.9** b) On a $\omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2$. On divise membre à membre par $\omega^2$, il vient : $1 = \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2} + c^2\dfrac{k^2}{\omega^2}$.

En isolant $\dfrac{k}{\omega}$, on obtient : $\dfrac{k^2}{\omega^2} = \dfrac{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}{c^2}$. En prenant la racine, on obtient $v_\phi = \dfrac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$.

Le résultat est bien homogène à une vitesse et est exprimé en fonction de la pulsation $\omega$ et non de la norme du vecteur d'onde $k$.

.....

**33.9** c) On a $\omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2$, donc $\omega = \sqrt{(kc)^2 + \omega_p^2}$. On calcule la dérivée : $\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \dfrac{c^2k}{\sqrt{(kc)^2 + \omega_p^2}}$.

En remarquant que $(kc)^2 + \omega_p^2 = \omega^2$ et en injectant la vitesse de phase $v_\phi$ obtenue précédemment, il vient :

$$v_g(\omega) = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{c^2k}{\omega} = \frac{c^2}{v_\phi} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}}.$$

.....

**33.10** a) On exprime $\omega = f(k)$ puis on réalise le calcul de dérivation.

Ici $\omega = \sqrt{\dfrac{\gamma h}{\mu}}k^2$ donc $v_g = 2k\sqrt{\dfrac{\gamma h}{\mu}} = 2v_\phi = 2\dfrac{\omega}{k}$ (en identifiant la vitesse de phase $v_\phi$ de l'entraînement précédent).

.....

**33.10** b) Ici $\omega = \sqrt{\dfrac{\gamma k^3 h}{\mu}}$ donc $v_g = \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{\gamma k h}{\mu}} = \dfrac{3}{2}v_\phi = \dfrac{3\omega}{2k}$ (en identifiant au $v_\phi$ de l'entraînement précédent).

.....

**33.10** c) Ici $\omega = \sqrt{gh}k$ donc $v_g = \sqrt{gh} = v_\phi = \dfrac{\omega}{k}$. Dans ce cas, la vitesse de groupe coïncide avec la vitesse de phase.

.....

**33.10** d) Ici $\omega = \sqrt{gk}$ donc $v_g = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{g}{k}} = \dfrac{v_\phi}{2} = \dfrac{g}{2\omega}$.

.....

**33.11** a) La dimension d'une impédance est celle d'une résistance, dont l'unité est le ohm ($\omega$). De nombreuses méthodes sont possibles, comme par exemple l'exploitation de la formule du facteur de qualité (sans dimension) dans un circuit RLC :

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad \text{donc} \qquad \dim(R) = \dim\left(\sqrt{\frac{L}{C}}\right) = \dim\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}\right)$$

On identifie que la bonne réponse est la réponse (e).

.....

**33.11** b) Si $R = 1$ c'est que l'onde électrique est totalement réfléchie, autrement dit le câble est court-circuité ($Z = 0$) ou coupe-circuité ($Z \to +\infty$).

.....

**33.11** c) S'il y a adaptation dimpédance, c'est que toute la puissance électrique est absorbée par la charge, autrement dit l'impédance vaut celle du câble ($Z = Z_\mathrm{c}$).

.....

**33.11** d) Le condensateur ou la bobine ne consomme pas de puissance moyenne, l'onde électrique est totalement réfléchie ($R = 1$).

.....

**33.11** e) La conservation de la puissance au point de jonction assure que $R+T = 1$, donc $T = 1-R = \dfrac{4ZZ_\mathrm{c}}{(Z+Z_\mathrm{c})^2}$.

.....

**33.12** a) On calcule les impédances de l'air et de l'eau. Les application numériques donnent $Z_\mathrm{air} = 442\,\mathrm{USI}$ et $Z_\mathrm{eau} = 1{,}5 \times 10^6\,\mathrm{USI}$. En injectant dans l'expression de $R$ fournie, on trouve $R \approx 1$, autrement dit l'onde sonore est totalement réfléchie à l'interface air/eau.

.....

**33.12** b) Permuter $Z_1$ et $Z_2$ dans l'expression du coefficient de réflexion en puissance $R$ ne modifie pas sa valeur. On trouve comme précédemment $R \simeq 1$.

.....

**33.12** c) On calcule les impédances de l'air et du béton. Les application numériques donnent $Z_\mathrm{air} = 442\,\mathrm{USI}$ et $Z_\mathrm{béton} = 7{,}4 \times 10^6\,\mathrm{USI}$. En injectant dans l'expression de $T$ fournie, on trouve $T \ll 1$, autrement dit l'onde est totalement réfléchie.

.....

**33.13** a) En projection sur (O$y$) on a $\dfrac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}z^2}(z)\cos(\omega t - kx) - E(z)k^2\cos(\omega t - kx) + \dfrac{1}{c^2}E(z)\omega^2\cos(\omega t - kx) = 0$, avec $\cos(\omega t - kx) \neq 0$.

.....

**33.13** b) Comme $E(z = L) = 0$ alors $E_0 \sin KL = 0$ donc $KL = p\pi$ où $p \in \mathbb{Z}$ car $L > 0$.

.....

**33.13** c) En injectant l'expression de l'amplitude dans celle du champ, on a $\vec{E} = E_0 \sin(\dfrac{n\pi}{L}z)\cos(\omega t - kx)\vec{u_y}$.

.....

**33.13** d) Pour le fondamental ($p = 1$), on a $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{\pi^2}{L^2}$. Par identification, on a $\omega_\mathrm{c1} = \dfrac{\pi c}{L}$. De plus, par définition, on sait que $\omega_\mathrm{c1} = 2\pi f_\mathrm{c1}$, donc $f_\mathrm{c1} = \dfrac{c}{2L}$. L'application numérique donne $f_\mathrm{c1} = 5\,\mathrm{GHz}$.

.....

**33.14** a) L'équation d'onde est ici une équation de diffusion dont le coefficient de diffusion est $\dfrac{1}{\mu_0\gamma}$. Il s'exprime en $\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$, il est donc homogène au produit d'une fréquence par le carré d'une longueur.

.....

**33.14** b) On réalise l'application numérique, la précision étant de deux chiffres significatifs :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{kg\cdot m\cdot A^{-2}\cdot s^{-2}} \times 5{,}96 \times 10^{7}\,\mathrm{S\cdot m^{-1}} \times 2\pi \times 50\,\mathrm{Hz}}} = 9{,}2\,\mathrm{mm}.$$

.....

**33.15** a) Une fréquence étant attendue, son unité est en hertz ou en inverse d'un temps. Seule la vitesse faisant apparaître un temps (unité : m/s), celle-ci doit forcément être au numérateur et hors de la racine (ou à une puissance 2 sous la racine). Cela exclut les réponses (a), (b), (c), (e). Parmi les deux options restantes, on constate que l'argument de la racine est sans dimension pour la réponse (d), autrement dit $f_0$ est de la même dimension qu'une vitesse : cela exclut la réponse (d). Par élimination on choisit donc la réponse (f), mais on peut facilement la confirmer en constatant que la dimension de l'argument sous la racine est l'inverse d'une surface, donc la vitesse est multipliée par l'inverse d'une longueur une fois la racine prise en compte : $f_0$ est bien homogène à une fréquence, donc réponse (f).

.....

**33.15** b) On réalise l'application numérique, la précision étant de trois chiffres significatifs :

$$f_0 = \frac{320\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}{2\pi}\sqrt{\frac{10{,}0 \times 10^{-4}\,\mathrm{m^2}}{1{,}00 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^3} \times 100 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}}} = 161\,\mathrm{Hz}.$$

.....

**33.16** a) Le résultat est immédiat en injectant $\operatorname{div}\vec{E} = 0$ dans l'expression fournie.

.....

**33.16** b) On injecte (MF) : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\dfrac{\partial\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}}{\partial t}$.

On injecte (MA) : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}) = -\dfrac{\partial}{\partial t}(\mu_0\gamma\vec{E}) = -\mu_0\gamma\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$.

.....

**33.16** c) En combinant les réponses aux questions précédentes, on obtient une équation de diffusion :

$$\Delta\vec{E} = \mu_0\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$$

.....

# Fiche n° 34. Cinématique des fluides

## Réponses

**34.1** a) ..... $\boxed{2{,}59 \times 10^{-1}\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{h}^{-1}}$

**34.1** b) ..... $\boxed{2{,}59 \times 10^{2}\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{h}^{-1}}$

**34.2** ..... b

**34.3** ..... c

**34.4** a) ..... $\boxed{8{,}7\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}}$

**34.4** b) ..... $\boxed{22\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}}$

**34.5** a) ..... b

**34.5** b) ..... $\boxed{\frac{\pi}{2}\rho V_0 R^2}$

**34.6** ..... c

**34.7** a) ..... $\boxed{0}$

**34.7** b) ..... oui

**34.7** c) ..... non

**34.7** d) ..... oui

**34.8** a) ..... $\boxed{\vec{0}}$

**34.8** b) ..... oui

**34.8** c) ..... $\boxed{-v_0 y + \phi_0}$

**34.9** a) ..... $\boxed{\vec{0}}$

**34.9** b) ..... $\boxed{-\frac{k}{2}x^2 - \frac{k}{2}y^2 + \phi_0}$

**34.9** c) ..... non

**34.9** d) ..... impossible

**34.10** a) ..... $\boxed{\vec{0}}$

**34.10** b) ..... $\boxed{\vec{0}}$

**34.10** c) ..... $\boxed{\vec{0}}$

**34.11** a) ..... $\boxed{-\omega x \vec{e_z}}$

**34.11** b) ..... oui

**34.12** a) ..... d

**34.12** b) ..... b

**34.12** c) ..... $\boxed{\vec{0}}$

**34.13** a) ..... $\boxed{\frac{x}{\tau}\vec{e_x}}$

**34.13** b) ..... $\boxed{\vec{0}}$

**34.13** c) ..... non

**34.13** d) ..... $\boxed{\frac{x}{\tau^2}\vec{e_x}}$

**34.14** a) ..... $\boxed{\omega a^2}$

**34.14** b) ..... oui

**34.14** c) ..... oui

**34.14** d) ..... $\boxed{\omega \vec{e_z}}$

**34.15** .... $\boxed{\begin{pmatrix} \frac{3z-2x}{\tau} - 5xK\exp(-t/\tau) \\ 0 \\ \frac{2z-3x}{\tau} - 5zK\exp(-t/\tau) \end{pmatrix} K\exp(-t/\tau)}$

**34.16** a) ..... oui

**34.16** b) ..... oui

**34.16** c) ..... $\boxed{\beta\ln(r) - \frac{\alpha}{r}\theta}$

**34.16** d) ..... $\boxed{-\frac{\beta^2+\alpha^2}{r^3}\vec{e_r}}$

## Corrigés

**34.1** a) On convertit le volume en $m^3$ et la durée en heures : on a

$$D_v = \frac{15{,}4 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3}{(3 \times 60 + 14) \times \dfrac{1}{3600}\ \mathrm{h}} = 2{,}59 \times 10^{-1}\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{h}^{-1}.$$

**34.1** b) Cette fois, on convertit le volume en masse grâce à la masse volumique de l'eau, en gardant la même durée : on a

$$D_v = \frac{1{,}00 \times 10^3\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3} \times 15{,}4 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3}{214 \times \dfrac{1}{3600}\ \mathrm{h}} = 2{,}59 \times 10^2\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{h}^{-1}.$$

**34.2** Calculons le débit pour chaque cas donné :

- 100 kg d'eau pendant 50 min correspond à un débit volumique égal à

$$\frac{100\,\mathrm{kg}}{1{,}0 \times 10^3\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3} \times 50\,\mathrm{min} \times 60\,\mathrm{s/min}} = 3{,}3 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-1}.$$

- 0,2 mol d'eau pendant 3 ms correspond à un débit volumique égal à

$$\frac{0{,}2\,\mathrm{mol} \times 18{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{mol}^{-1}}{1{,}00 \times 10^3\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3} \times 3{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}} = 1{,}2 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-1}.$$

- 18 $m^3$ d'eau pendant 2 jours correspond à un débit volumique égal à

$$\frac{18\,\mathrm{m}^3}{2\,\mathrm{jours} \times 24\,\mathrm{h/jour} \times 3\,600\,\mathrm{s/h}} = 1{,}0 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-1}.$$

C'est par conséquent l'écoulement (b) qui possède le débit volumique le plus important.

**34.3** On exprime d'abord la masse volumique du fluide en fonction des données du problème : $\rho = \dfrac{D_m}{Sv}$. On réalise ensuite les applications numériques pour les deux valeurs extrêmes de débit massique afin d'obtenir un encadrement de la valeur de masse volumique. On prend soin de convertir les grandeurs dans le système d'unités internationales et de calculer correctement la surface de la section circulaire ($S = \pi r^2 = \pi \dfrac{d^2}{4}$). Ainsi, on a

$$\rho_{\min} = \frac{70\,\mathrm{g} \cdot \mathrm{s}^{-1}}{\pi(\frac{6\,\mathrm{mm}}{2})^2 \times 2\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}} = \frac{6 \times 10^{-2}\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-1}}{\pi(3 \times 10^{-3}\,\mathrm{m})^2 \times 2\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}} = 1{,}2 \times 10^3\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3} = 1{,}2\,\mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$$

$$\text{et} \quad \rho_{\max} = \frac{80\,\mathrm{g} \cdot \mathrm{s}^{-1}}{\pi(\frac{6\,\mathrm{mm}}{2})^2 \times 2\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}} = \frac{6 \times 10^{-2}\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-1}}{\pi(3 \times 10^{-3}\,\mathrm{m})^2 \times 2\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}} = 1{,}4 \times 10^3\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3} = 1{,}4\,\mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^{-3}.$$

En conclusion on a $\rho = (1{,}3 \pm 0{,}1)\,\mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$, les fluides potentiels sont donc le miel et la glycérine. Réponse (c).

**34.4** a) Dans le cas d'un écoulement uniforme, on a $D_{v1} = v_1 S_1$. Ici, on a

$$S_1 = h_1 \times l_1 = 1{,}5 \times 10^3\,\mathrm{cm}^2 = 1{,}5 \times 10^{-1}\,\mathrm{m}^2 \quad \text{et} \quad D_{v1} = \frac{4\,700\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{h}^{-1}}{3\,600\,\mathrm{s} \cdot \mathrm{h}^{-1}} = 1{,}306\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-1}.$$

On en déduit la vitesse moyenne : $v_1 = \dfrac{D_{v1}}{S_1} = \dfrac{1{,}306\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-1}}{1{,}5 \times 10^{-1}\,\mathrm{m}^2} = 8{,}7\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

**34.4** b) Par conservation du débit (écoulement incompressible), on a $D_{v1} = D_{v2}$ donc $v_1 S_1 = v_2 S_2$. D'où,

$$v_2 = v_1 \frac{S_1}{S_2} = 8{,}7\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \times \frac{1{,}5\times 10^{-1}\,\mathrm{m}^2}{6{,}0\times 10^{-2}\,\mathrm{m}^2} = 22\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

**34.5** a) La formule (a) n'est pas homogène : le produit $r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ est homogène à un volume, et non une surface. De plus, il faut intégrer de 0 à $2\pi$ et non de 0 à $\pi$ : la formule (c) est donc également incorrecte.

**34.5** b) Par définition, $D_m = \iint \rho\vec{v}\cdot\vec{\mathrm{d}S}$. En coordonnées cylindriques, on obtient ainsi

$$D_m = \rho V_0 \iint \left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \rho V_0 \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \int_0^R \left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) r\,\mathrm{d}r = \rho V_0 \times 2\pi \times \left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4R^2}\right]_0^R = 2\pi\rho V_0\left(\frac{R^2}{2}-\frac{R^2}{4}\right).$$

Ainsi, $D_m = \dfrac{\pi}{2}\rho V_0 R^2$.

**34.6** On a $\dfrac{\partial}{\partial t}(v_0\sin(\omega t)\vec{e_y}) = \omega v_0\cos(\omega t)\vec{e_y} \neq \vec{0}$.

**34.7** a) On a $\mathrm{div}(\vec{v}) = \mathrm{div}(v_0\vec{e_z}) = 0$.

**34.7** b) On a $\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$ ; ainsi, l'écoulement est incompressible.

**34.7** c) On a $\mathrm{div}(\vec{v}) = \mathrm{div}(kx\vec{e_x} + ky\vec{e_y}) = 2k \neq 0$ ; ainsi, l'écoulement est compressible.

**34.7** d) On a $\mathrm{div}(\vec{v}) = \mathrm{div}(kz\vec{e_x}) = 0$ ; ainsi, l'écoulement est incompressible.

**34.8** a) On a $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}(v_0\vec{e_y}) = \vec{0}$.

**34.8** b) On a $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}) = \vec{0}$ ; ainsi, l'écoulement est irrotationnel.

**34.8** c) On a $\vec{v} = v_0\vec{e_y} = -\dfrac{\mathrm{d}\phi(y)}{\mathrm{d}y}\vec{e_y}$ donc $\phi(y) = -v_0 y + \phi_0$.

**34.9** a) On a $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}(kx\vec{e_x} + ky\vec{e_y}) = \vec{0}$.

**34.9** b) On a

$$\vec{v} = kx\vec{e_x} + ky\vec{e_y} = -\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}\vec{e_x} - \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y}\vec{e_y} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}\phi = \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}y = -kx\,\mathrm{d}x - ky\,\mathrm{d}y.$$

Donc, $\phi - \phi_0 = -\displaystyle\int_0^x kx\,\mathrm{d}x - \int_0^y ky\,\mathrm{d}y$ et donc $\phi(x,y) = -\dfrac{k}{2}x^2 - \dfrac{k}{2}y^2 + \phi_0$.

**34.9** c) On a $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}(kz\vec{e_x}) = k\vec{e_y} \neq \vec{0}$ : l'écoulement n'est pas irrotationnel mais tourbillonnaire.

**34.10** a) On a $\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \dfrac{\partial(v_0\vec{e_y})}{\partial t} = \vec{0}$.

**34.10** b) On a $\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v} = \left(v_0\dfrac{\partial}{\partial y}\right)v_0\vec{e_y} = \vec{0}$.

.....

**34.10** c) On a $\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v} = \vec{0}$.

.....

**34.11** a) On a

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}(x)) = -\frac{\partial v_z(x)}{\partial x}\vec{e_y} + \frac{\partial v_y(x)}{\partial x}\vec{e_z} = \omega\vec{e_y} \qquad \text{donc} \qquad v_y(x) = A \text{ et } v_z(x) = -\omega x + B,$$

avec $A$ et $B$ des constantes d'intégration.

Comme on a $\vec{v}(x=0) = \vec{0}$, on en déduit $0 = v_y(0) = A$ et $0 = v_z(0) = B$. Donc, $\vec{v}(x) = -\omega x\vec{e_z}$.

.....

**34.11** b) On a $\text{div}(\vec{v}(x)) = \text{div}(-\omega x\vec{e_z}) = \dfrac{\partial v_z(x)}{\partial z} = 0$ ; ainsi, l'écoulement est incompressible.

.....

**34.12** a) On a

$$\vec{v}^2(z) = v_0^2\left(1-\left(\frac{z}{L}\right)^2\right)^2 \qquad \text{donc} \qquad \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\vec{v}^2(z)}{2}\right) = \frac{\text{d}}{\text{d}z}\left(v_0^2\left(1-\left(\frac{z}{L}\right)^2\right)\right)\vec{e_z} = -v_0^2\frac{2z}{L^2}\left(1-\left(\frac{z}{L}^2\right)\right)\vec{e_z}.$$

.....

**34.12** b) On a

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}(z)) = \frac{\text{d}}{\text{d}z}\left(v_0\left(1-\left(\frac{z}{L}\right)^2\right)\right)\vec{e_y} = -v_0\frac{2z}{L^2}\vec{e_y}$$

$$\text{donc} \qquad \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}(z)) \wedge \vec{v}(z) = -v_0\frac{2z}{L^2}\left(v_0\left(1-\left(\frac{z}{L}\right)^2\right)\right)\vec{e_y}\wedge\vec{e_x} = v_0^2\frac{2z}{L^2}\left(1-\left(\frac{z}{L}\right)^2\right)\vec{e_z}.$$

.....

**34.12** c) On a $\left(\vec{v}(z)\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}(z) = -v_0^2\dfrac{2z}{L^2}\left(1-\left(\dfrac{z}{L}\right)^2\right)\vec{e_z} + v_0^2\dfrac{2z}{L^2}\left(1-\left(\dfrac{z}{L}\right)^2\right)\vec{e_z} = \vec{0}$.

.....

**34.13** a) On a $\vec{v}(x) = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\phi(x) = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(-\dfrac{x^2}{2\tau}+\phi_0\right) = \dfrac{x}{\tau}\vec{e_x}$.

.....

**34.13** b) On a $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}(x,y,z,t) = \overrightarrow{\text{rot}}\left(\dfrac{x}{\tau}\vec{e_x}\right) = \dfrac{\text{d}v_x(x)}{\text{d}z}\vec{e_y} - \dfrac{\text{d}v_x(x)}{\text{d}y}\vec{e_z} = \vec{0}$.

.....

**34.13** c) On a $\text{div}\,\vec{v}(x,y,z,t) = \text{div}\left(\dfrac{x}{\tau}\vec{e_x}\right) = \dfrac{\text{d}\left(\frac{x}{\tau}\right)}{\text{d}x} = \dfrac{1}{\tau} \neq 0$. Donc, l'écoulement n'est pas incompressible.

.....

**34.13** d) On a $\overrightarrow{a_{\text{M}}}(t) = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{x}{\tau}\vec{e_x}\right) + \left[\dfrac{x}{\tau}\vec{e_x}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right]\left(\dfrac{x}{\tau}\vec{e_x}\right) = \vec{0} + \left[\dfrac{x}{\tau}\dfrac{\partial}{\partial x}\right]\left(\dfrac{x}{\tau}\vec{e_x}\right) = \dfrac{x}{\tau^2}\vec{e_x}$.

.....

**34.14** a) Il y a continuité de la vitesse en $r = a$, ce qui se traduit par $\omega a = \dfrac{K}{a}$ d'où $K = \omega a^2$.

.....

**34.14** b) On voit que $v_r = 0$ : ainsi, la divergence de la vitesse est nulle, ce qui correspond à un écoulement incompressible.

.....

**34.14** c) Pour $r \geqslant a$, on a $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\text{d}K}{\text{d}r}\vec{e_z} = \vec{0}$. L'écoulement est donc irrotationnel hors du coeur.

.....

**34.14** d) Pour $r \leqslant a$, le vecteur tourbillon s'écrit $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(\omega r^2)}{\mathrm{d}r}\vec{e_z} = \frac{1}{2r} \times 2r\omega\vec{e_z} = \omega\vec{e_z}$.

.....

**34.15** La dérivée particulaire à calculer porte sur le champ de vitesse $\vec{v}$ :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v}$$

Le champ à dériver est exprimé dans un système de coordonnées cartésiennes. En projetant cette équation vectorielle sur une base $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ et en développant l'expression du gradient en coordonnées cartésiennes on obtient trois équations scalaires qui sont les composantes $a_x$, $a_y$ et $a_z$ :

$$\begin{aligned}
a_x &= \frac{\mathrm{D}v_x}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\\
a_y &= \frac{\mathrm{D}v_y}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\\
a_z &= \frac{\mathrm{D}v_z}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Calculons les différentes composantes. On a

$$\begin{aligned}
a_x &= \frac{3z-2x}{\tau}K\exp(-t/\tau) + \big(2\times(2x-3z) - 3\times(3x-2z)\big)K^2\exp(-2t/\tau)\\
&= \left(\frac{3z-2x}{\tau} - 5xK\exp(-t/\tau)\right)K\exp(-t/\tau)\\
\text{et}\quad a_y &= 0\\
\text{et}\quad a_z &= \frac{2z-3x}{\tau}K\exp(-t/\tau) + \big(3\times(2x-3z) - 2\times(3x-2z)\big)K^2\exp(-2t/\tau)\\
&= \left(\frac{2z-3x}{\tau} - 5zK\exp(-t/\tau)\right)K\exp(-t/\tau).
\end{aligned}$$

Finalement, en écrivant la solution $\vec{a} = a_x\vec{e_x} + a_y\vec{e_y} + a_z\vec{e_z}$ sous forme matricielle (vecteur colonne) on a :

$$\vec{a}(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} \dfrac{3z-2x}{\tau} - 5xK\exp(-t/\tau)\\ 0\\ \dfrac{2z-3x}{\tau} - 5zK\exp(-t/\tau)\end{pmatrix}K\exp(-t/\tau).$$

.....

**34.16** a) On a $\operatorname{div}\vec{v} = \operatorname{div}\left(-\frac{\beta}{r}\vec{e_r} + \frac{\alpha}{r}\vec{e_\theta}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\beta}{r}\vec{e_r}\right) = 0$ ; ainsi, l'écoulement est incompressible.

.....

**34.16** b) On a $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{v} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(-\frac{\beta}{r}\vec{e_r} + \frac{\alpha}{r}\vec{e_\theta}\right) = \vec{0} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\alpha}{r}\right)\vec{e_z} = \vec{0}$ ; ainsi, l'écoulement est irrotationnel.

.....

**34.16** c) On a

$$\vec{v} = -\frac{\beta}{r}\vec{e_r} + \frac{\alpha}{r}\vec{e_\theta} = -\frac{\partial\Phi}{\partial r}\vec{e_r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\vec{e_\theta} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}\Phi = \frac{\partial\Phi(r,\theta)}{\partial r}\,\mathrm{d}r + \frac{\partial\Phi(r,\theta)}{\partial\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\beta}{r}\,\mathrm{d}r - \alpha\,\mathrm{d}\theta.$$

Donc,

$$\Phi(r,\theta) - \Phi(1,0) = \int_1^r \frac{\beta}{r}\,\mathrm{d}r - \int_0^\theta \alpha\,\mathrm{d}\theta \qquad \text{et donc} \qquad \Phi(r,\theta) = \beta\ln(r) - \alpha\theta.$$

.....

**34.16** d) L'écoulement est stationnaire et irrotationnel. Donc, on a

$$\vec{a_p} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\left(\frac{\vec{v}^2}{2}\right) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\left(\frac{\beta^2+\alpha^2}{2r^2}\right) = -\frac{\beta^2+\alpha^2}{r^3}\vec{e_r}.$$

.....

# Fiche n° 35. Dynamique des fluides (PSI)

## Réponses

**35.1** a) ..... b

**35.1** b) ..... $32\,\mathrm{nm}$

**35.2** ..... c

**35.3** a) ..... $10^5\,\mathrm{Pa}$

**35.3** b) ..... $10\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{cm}^{-2}$

**35.3** c) ..... $100\,\mathrm{N}$

**35.4** a) ..... a

**35.4** b) ..... a

**35.4** c) ..... $2{,}5\times10^{13}$

**35.5** a) ..... $p_0hL\overrightarrow{e_x}$

**35.5** b) ..... $-\left(p_0+\dfrac{\mu gh}{2}\right)hL\overrightarrow{e_x}$

**35.5** c) ..... $-\dfrac{\mu gh^2}{2}L\overrightarrow{e_x}$

**35.6** a) ..... $p_0+\mu g(h(x,t)-z)$

**35.6** b) ..... $(h(x,t)-f(x))L\,\mathrm{d}x$

**35.6** c) ..... $-\mu g\dfrac{\partial h}{\partial x}\times(h(x,t)-f(x))\times L\,\mathrm{d}x$

**35.7** a) ..... $\dfrac{M_{\mathrm{air}}\delta n}{\mathrm{d}V}$

**35.7** b) ..... $\dfrac{M_{\mathrm{air}}p}{RT_0}$

**35.7** c) ..... $1{,}2\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$

**35.8** a) ..... $1\times10^3\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$

**35.8** b) ..... $p_0-\rho gz$

**35.8** c) ..... $\dfrac{p(z)M}{RT_0}$

**35.8** d) ..... $p_0\exp\left(-\dfrac{Mgz}{RT_0}\right)$

**35.8** e) ..... $p_0\left(\dfrac{T_0-\alpha z}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{\alpha R}}$

**35.9** a) ..... $5{,}8\,\mathrm{km}$

**35.9** b) ..... $p_0(1-\dfrac{z}{H})$

**35.9** c) ..... $2\times10^{-2}\%$

**35.10** a) ..... $v(r)\times\mathrm{d}S$

**35.10** b) ..... $2\pi r\,\mathrm{d}r$

**35.10** c) ..... $\pi R^2U$

**35.10** d) ..... $\pi\dfrac{R^2}{2}v_0$

**35.11** a) ..... b

**35.11** b) ..... $2\pi r_0L$

**35.11** c) ..... $-4\pi r_0^2AL\eta$

**35.11** d) ..... $4\pi R^2AL\eta$

**35.12** a) ..... $\overrightarrow{u_3}$

**35.12** b) ..... $A_2$

**35.12** c) ..... $A_1$

**35.12** d) ..... $A_4$

**35.12** e) ..... $A_3$

**35.12** f) ..... $i+\alpha_0=\phi+\varepsilon$

**35.13** a) ..... $\overrightarrow{F_{\mathrm{p}}}+\overrightarrow{F_{\mathrm{t}}}+\overrightarrow{P}+\overrightarrow{F_{\mathrm{m}}}=\overrightarrow{0}$

**35.13** b) ..... $\dfrac{1}{2}\mu SC_{\mathrm{p}}v^2=mg$

**35.13** c) ..... $\dfrac{1}{2}\mu SC_tv^2=F_{\mathrm{m}}$

**35.14** a) ..... $\overrightarrow{F_{\mathrm{p}}}+\overrightarrow{F_{\mathrm{t}}}+\overrightarrow{P}=\overrightarrow{0}$

**35.14** b) ..... $F_{\mathrm{t}}=mg\sin(\alpha_0)$

**35.14** c) ..... $\boxed{F_\mathrm{p} = mg\cos(\alpha_0)}$

**35.14** d) ..... $\boxed{\tan\alpha_0 = \dfrac{C_t}{C_\mathrm{p}}}$

**35.14** e) ..... $\boxed{\mathrm{C}}$

## Corrigés

**35.1** a) On a $n_a^* = \dfrac{p\mathcal{N}_A}{RT} = \dfrac{3\times10^5\,\mathrm{Pa}\times6{,}02\times10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}}{8{,}314\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}\times280\,\mathrm{K}} = 7{,}8\times10^{25}\,\mathrm{m}^{-3}$.

De la même façon, on trouve : $n_b^* = 4{,}5\times10^{25}\,\mathrm{m}^{-3}$. Notons que $n_b^* < n_a^*$ ; ainsi $\ell_b > \ell_a$.

.....

**35.1** b) D'après la relation, on a $\ell_a = \dfrac{1}{\sqrt{2}\pi(3\times10^{-10}\,\mathrm{m})^2\times7{,}8\times10^{25}\,\mathrm{m}^{-3}} = 32\,\mathrm{nm}$.

.....

**35.2**

(a) On reconnaît ici le poids divisé par un volume. La relation est donc le poids volumique.

(b) La force de Lorentz est : $\vec{F} = Q(\vec{E}+\vec{v}\wedge\vec{B})$. De plus $\rho$ est homogène à une charge sur un volume. Ainsi, $\rho(\vec{E}+\vec{v}\wedge\vec{B})$ est homogène à une force volumique.

(c) Notons que $Q\vec{E}$ est homogène à une force. On a $[\vec{j}\wedge\vec{E}] = \dfrac{[i]}{L^2}[\vec{E}] = \dfrac{[Q]}{T\times L^2}[\vec{E}] \neq \dfrac{[Q]}{L^3}[\vec{E}]$. Ainsi, $\vec{j}\wedge\vec{E}$ n'est pas une force volumique.

(d) Notons que $[Q\vec{v}\wedge\vec{B}]$ est homogène à une force. On a $[Q\vec{v}\wedge\vec{B}] = [Q]\dfrac{L}{T}[\vec{B}]$. Donc,

$$[\vec{j}\wedge\vec{B}] = \frac{[i]}{L^2}[\vec{B}] = \frac{[Q]}{T\times L^2}[\vec{B}] = \frac{[Q\vec{v}\wedge\vec{B}]}{L^3}.$$

Ainsi, l'expression proposée est homogène à une force volumique.

(e) La force de pression agissant sur une surface s'écrit : $\vec{F} = PS\vec{u}$ ; ainsi $[\vec{F}] = [P]\times L^2$. On a

$$\left[\overrightarrow{\mathrm{grad}}(P)\right] = \frac{[P]}{L} = \frac{[P]\times L^2}{L^3}.$$

L'expression proposée est donc homogène à une force volumique.

.....

**35.3** a) La pression au niveau de la mer, dans les conditions usuelles, vaut sensiblement $1\,\mathrm{bar} = 10^5\,\mathrm{Pa}$.

.....

**35.3** b) La pression est une force surfacique donc $1\,\mathrm{Pa} = 1\,\mathrm{N\cdot m^{-2}}$ avec $1\,\mathrm{m}^2 = 10^4\,\mathrm{cm}^2$.

On a donc une pression de $10\,\mathrm{N\cdot cm^{-2}}$.

.....

**35.3** c) Une pression de $1\,\mathrm{bar} = 10\,\mathrm{N\cdot cm^{-2}}$, sur une surface de $10\,\mathrm{cm}^2$ donne une force qui vaut

$$10\,\mathrm{N\cdot cm^{-2}}\times10\,\mathrm{cm}^2. = 100\,\mathrm{N}.$$

.....

**35.4** a) La densité volumique vérifie $n^* = \dfrac{p\mathcal{N}_A}{RT} = \dfrac{10^5\,\mathrm{Pa}\times6{,}02\times10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}}{8{,}314\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}\times288{,}15\,\mathrm{K}}$.

.....

**35.4** b) Le nombre de particules vérifie $N_0 = n^*\times V = 2{,}5\times10^{25}\,\mathrm{m}^{-3}\times1\times10^{-3}\,\mathrm{m}$.

.....

**35.4** c) Le nombre de particules vérifie $N_0 = n^* \times d^3 = 2{,}5 \times 10^{25}\,\mathrm{m}^{-3} \times 1 \times 10^{-12}\,\mathrm{m}^3$.

**35.5** a) Pour l'air, $\vec{u} = \vec{e_x}$ et le champ de pression est uniforme, égale à $p_0$. On a $\vec{F_1} = p_0 S\vec{e_x} = p_0 hL\vec{e_x}$.

**35.5** b) Pour l'eau, $\vec{u} = -\vec{e_x}$. On a

$$F_2 = \int_{y=0}^{L} \mathrm{d}y \int_{z=-h}^{0} (p_0 - \mu g z)\,\mathrm{d}z = L \times \left[p_0 z - \mu g \frac{z^2}{2}\right]_{-h}^{0} \quad \text{donc} \quad \vec{F_2} = -\left(p_0 + \frac{\mu g h}{2}\right) hL\vec{e_x}.$$

**35.5** c) La résultante des forces s'écrit $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$.

**35.6** a) La hauteur de la colonne de fluide $\Delta H$ vaut $h(x,z,t) - z$. Ainsi $p(x,z,t) = p_0 + \mu g(h(x,t) - z)$.

**35.6** b) La section de ce volume vaut $(h(x,t) - f(x)) \times L$. Ainsi, on a $\mathrm{d}V = (h(x,t) - f(x))L\,\mathrm{d}x$.

**35.6** c) La force élémentaire selon $(\mathrm{O}x)$ vaut $\mathrm{d}F_x = -\mu g \dfrac{\partial h}{\partial x} \times (h(x,t) - f(x)) \times L\,\mathrm{d}x$.

**35.7** a) La masse volumique vaut $\rho = \dfrac{\delta m}{\mathrm{d}V} = \dfrac{M_{\mathrm{air}}\delta n}{\mathrm{d}V}$.

**35.7** b) Si on assimile l'air de l'atmosphère à un gaz parfait, on a $\rho = \dfrac{M_{\mathrm{air}}\delta n}{dV} = \dfrac{M_{\mathrm{air}} p}{RT_0}$.

**35.7** c) Au niveau de l'océan, la pression est de 1 bar soit $1 \times 10^5$ Pa. La masse volumique vaut

$$\rho = \frac{29 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg \cdot mol^{-1}} \times 10^5\,\mathrm{Pa}}{8{,}314\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}} \times 288\,\mathrm{K}} = 1{,}2\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}.$$

**35.8** a) La masse volumique de l'eau est $\rho_0 = \dfrac{1\,\mathrm{kg}}{1\,\mathrm{L}} = \dfrac{1\,\mathrm{kg}}{1 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3}$.

**35.8** b) La masse volumique $\rho$ est constante. On a $\displaystyle\int_{p(z)}^{p(0)=p_0} \mathrm{d}p = \int_z^0 -\rho_0 g\,\mathrm{d}z$ donc $p(z) = p_0 - \rho_0 g z$.

**35.8** c) On a $pV = nRT_0 = \dfrac{m}{M}RT_0$ donne $\rho(z) = \dfrac{m}{V} = \dfrac{p(z)M}{RT_0}$.

**35.8** d) L'équation différentielle est $\dfrac{dp}{dz} + \dfrac{Mg}{RT_0}p(z) = 0$ avec la condition initiale $p(z=0) = p_0$.

On calcule : $\displaystyle\int_{p(z)}^{p(0)=p_0} \frac{\mathrm{d}p}{p} = \int_z^0 -\frac{Mg}{RT_0}\,\mathrm{d}z$, ce qui conduit à $p(z) = p_0 \exp\left(-\dfrac{Mgz}{RT_0}\right)$.

**35.8** e) On utilise $\rho(z) = \dfrac{m}{V} = \dfrac{p(z)M}{RT(z)}$ ce qui donne l'équation $\dfrac{dp}{p} = -\dfrac{Mg}{R(T_0 - \alpha z)}\,\mathrm{d}z$. On calcule :

$$\int_{p(z)}^{p(0)=p_0} \frac{\mathrm{d}p}{p} = \int_z^0 -\frac{Mg}{R(T_0 - \alpha z)}\,\mathrm{d}z,$$

ce qui conduit à $\ln\left(\dfrac{p(z)}{p_0}\right) = \dfrac{Mg}{R\alpha} \times \ln\left(\dfrac{T_0 - \alpha z}{T_0}\right)$ et donc $p(z) = p_0\left(\dfrac{T_0 - \alpha z}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{\alpha R}}$.

**35.9** a) L'altitude $z_0$ est telle que $p(z = z_0) = \dfrac{p_0}{2} = p_0 \mathrm{e}^{-z_0/H}$ et vaut donc $z_0 = H \ln(2)$.

**35.9** b) On fait un développement limité de $p(z)$ à l'ordre 1 et l'on obtient $p(z) \approx p_0 \left(1 - \dfrac{z}{H}\right)$.

**35.9** c) La diminution de pression vérifie $\Delta p = p_0 \dfrac{\Delta z}{H}$ où $\Delta z \approx 1{,}7\,\mathrm{m}$ est la différence d'altitude entre les pieds et la tête. Ainsi $\dfrac{\Delta p}{p_0} \approx 2 \times 10^{-2}\%$.

**35.10** a) Les vecteurs $\vec{v} = v(r)\vec{e_z}$ et $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \mathrm{d}S\vec{e_z}$ sont colinéaires.

**35.10** b) On écrit que $\mathrm{d}S = \displaystyle\int_{\theta=0}^{2\pi} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$. Soit $\mathrm{d}S = 2\pi r\,\mathrm{d}r$.

**35.10** c) On écrit que $Q_v = \displaystyle\int_{r=0}^{R} 2\pi U r\,\mathrm{d}r$. Nous obtenons $Q_v = \pi R^2 U$.

**35.10** d) On écrit que $Q_v = \displaystyle\int_{r=0}^{R} 2\pi r v(r)\,\mathrm{d}r$. Nous obtenons $Q_v = \pi \dfrac{R^2}{2} v_0$.

**35.11** a) Le fluide étant visqueux, il y a continuité de la vitesse au niveau d'une paroi. Comme celle-ci est immobile, on en déduit que $v(r = R) = 0$.

**35.11** b) Il s'agit de la surface latérale d'un cylindre de longueur $L$ et de rayon $r_0$ ainsi $S = 2\pi r_0 L$.

**35.11** c) On utilise le fait qu'ici, $\left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)_{r=r_0} = -2Ar_0$. L'expression de la force est donc : $F(r_0) = -4\pi r_0^2 AL\eta$.

**35.11** d) La force $F_0$ correspond à $-F(r_0 = R)$. Ainsi $F_0 = 4\pi R^2 AL\eta$.

**35.12** a) En l'absence de vent, le vent relatif a la direction de la trajectoire de l'aéronef.

**35.13** a) Il s'agit du principe fondamental de la dynamique, dans le cas où l'accélération est nulle.

**35.13** b) On projette le principe fondamental de la dynamique selon l'axe vertical.

**35.13** c) On projette le principe fondamental de la dynamique selon l'axe horizontal.

**35.14** a) Il s'agit du principe fondamental de la dynamique, dans le cas où l'accélération est nulle.

**35.14** e) On construit la droite qui passe par l'origine et qui est tangente à la polaire. Le point de tangence correspond au choix optimale, c'est donc qualitativement le point C.

# Fiche n° 36. Dynamique des fluides (PC)

## Réponses

**36.1** a) ..... $\boxed{v(y) = \frac{v_0}{a}y}$

**36.1** b) ..... $\boxed{v(y) = \frac{v_0}{a}y - \frac{K}{2}ay\left(1 - \frac{y}{a}\right)}$

**36.1** c) ..... $\boxed{v(r) = -\frac{KR^2}{4}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)}$

**36.2** a) ..... $\boxed{D_v = v_0 ab}$

**36.2** b) ..... $\boxed{D_v = A\pi\frac{R^4}{2}}$

**36.3** a) ..... b

**36.3** b) ..... c

**36.3** c) ..... a

**36.4** a) ..... $\boxed{\frac{\rho V L}{\eta}}$

**36.4** b) ..... $\boxed{\frac{V}{\Omega L}}$

**36.4** c) ..... $\boxed{\frac{\eta}{\rho\Omega L^2}}$

**36.5** a) ..... $\boxed{M.L^{-1}.T^{-1}}$

**36.5** b) ..... $\boxed{L^2.T^{-1}}$

**36.5** c) ..... d

**36.6** a) ..... $\boxed{\mu g\overrightarrow{e_z}}$

**36.6** b) ..... $\boxed{L\left(P_0 h - \mu g\frac{h^2}{2}\right)\overrightarrow{e_z}}$

**36.7** a) ..... $\boxed{\frac{P_2 - P_1}{L}\overrightarrow{e_x}}$

**36.7** b) ..... $\boxed{\frac{P_2 - P_1}{L}(x - x_1) + P_1}$

**36.7** c) ..... $\boxed{\left[\frac{P_1 - P_2}{L}(L - x_1) + P_1\right]S\overrightarrow{e_x}}$

**36.8** a) ..... $\boxed{2A\eta\overrightarrow{e_x}}$

**36.8** b) ..... $\boxed{2A\eta hL^2\overrightarrow{e_x}}$

**36.9** a) ..... $\boxed{5{,}2 \times 10^{-3}}$

**36.9** b) ..... $\boxed{3{,}4 \times 10^{-5}\,\mathrm{N}}$

**36.9** c) ..... $\boxed{6{,}7 \times 10^{-6}\,\mathrm{N}}$

**36.9** d) ..... $\boxed{4{,}0 \times 10^{-5}\,\mathrm{N}}$

**36.9** e) ..... $\boxed{\frac{2\mu_\mathrm{a}R^2}{9\eta}}$

**36.9** f) ..... $\boxed{0{,}5\,\mathrm{ms}}$

**36.10** a) ..... $\boxed{P(x, y, z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\overrightarrow{e_x}}$

**36.10** b) ..... $\boxed{-P(x + \mathrm{d}x, y, z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\overrightarrow{e_x}}$

**36.10** c) ..... $\boxed{-\frac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}\tau}$

**36.10** d) ..... $\boxed{-\frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}\tau}$

**36.10** e) ..... $\boxed{-\frac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}\tau}$

**36.10** f) ..... $\boxed{-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P}$

**36.11** a) ..... $\boxed{\vec{0}}$

**36.11** b) ..... b

**36.11** c) ..... d

**36.12** a) ..... d

**36.12** b) ..... $\boxed{\eta\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\,\mathrm{d}\tau\,\overrightarrow{e_x}}$

**36.12** c) ..... a

**36.13** a) ..... d

**36.13** b) ..... a

**36.13** c) ..... $\boxed{\vec{0}}$

**36.14** a) ..... $\boxed{\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P(\text{M}, t) + \vec{F}_{\text{V,a}}}$

**36.14** b) ..... d

**36.14** c) ..... c

**36.15** a) ..... $\boxed{\vec{0}}$

**36.15** b) ..... b

**36.15** c) ..... $\boxed{U\dfrac{z}{a}}$

**36.15** d) ..... c

**36.16** a) ..... b

**36.16** b) ..... a

**36.16** c) ..... b

**36.16** d) ..... d

**36.17** a) .... $\boxed{\mu\left(\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P + \mu\vec{g}}$

**36.17** b) ..... $\boxed{\dfrac{2\Delta P}{\mu}}$

**36.17** c) ..... $\boxed{D_V = v_{\text{B}} s = Ss\sqrt{\dfrac{2\Delta P}{\mu(S^2 - s^2)}}}$

**36.18** a) ..... $\boxed{\vec{0}}$

**36.18** b) ... $\boxed{\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P(x, z) + \eta\Delta\vec{v}(z) + \mu\vec{g}}$

**36.18** c) ..... $\boxed{\dfrac{\partial P(x, z)}{\partial x} = \eta\dfrac{\partial^2 v(z)}{\partial z^2}}$

**36.18** d) ..... $\boxed{v(z) = v_0\left(1 - \dfrac{z^2}{h^2}\right)}$

**36.18** e) ..... $\boxed{P(x) = P_0 - \dfrac{2\eta v_0}{h^2}x}$

**36.19** a) .... $\boxed{\begin{aligned}\mu\dfrac{\partial \vec{v}(z, t)}{\partial t} &= \\ -\overrightarrow{\text{grad}}\, P(z, t) + \eta\Delta\vec{v}(z, t) + \mu\vec{g}\end{aligned}}$

**36.19** b) ..... $\boxed{\mu\dfrac{\partial v(z, t)}{\partial t} = \eta\dfrac{\partial^2 v(z, t)}{\partial z^2}}$

**36.19** c) ..... $\boxed{\dfrac{\mu}{\eta}h^2}$

**36.19** d) ..... $\boxed{2\text{ h }46\text{ min }40\text{ s}}$

**36.19** e) ..... $\boxed{\dfrac{\text{d}^2 v(z)}{\text{d}z^2} = 0}$

**36.19** f) ..... $\boxed{v(z) = \dfrac{v_p}{h}z}$

**36.19** g) ..... $\boxed{-\eta\dfrac{v_p}{h}S\vec{e_x}}$

**36.20** a) ..... a

**36.20** b) ..... c

**36.21** a) ..... $\boxed{v_{\text{B}}^2 = v_{\text{A}}^2 + 2gh}$

**36.21** b) ..... $\boxed{\dfrac{R^2}{a^2}v_{\text{A}}}$

**36.21** c) ..... $\boxed{\sqrt{2gh}}$

**36.22** a) ..... c

**36.22** b) ..... c

**36.22** c) ..... c

**36.23** a) ..... $\boxed{\dfrac{U}{T}\dfrac{\partial \vec{v^*}}{\partial t^*}}$

**36.23** b) ..... $\boxed{\dfrac{U^2}{L}\left(\vec{v^*} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}^*\right)(\vec{v^*})}$

**36.23** c) ..... $\boxed{\dfrac{U}{L^2}\Delta^*(\vec{v^*})}$

**36.23** d) ..... $\boxed{\rho U^2}$

**36.23** e) ..... $\boxed{\dfrac{L}{UT}}$

**36.23** f) ..... $\boxed{\dfrac{U^2}{gL}}$

**36.23** g) ..... $\boxed{\dfrac{\rho LU}{\eta}}$

## Corrigés

**36.1** a) On a $\dfrac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}y^2} = 0$ donc $v(y) = A + By$. Les conditions aux limites permettent d'écrire $A = 0$ et $B = \dfrac{v_0}{a}$.

**36.1** b) On a $v(y) = A + By + \dfrac{K}{2}y^2$. Les conditions aux limites permettent d'écrire $A = 0$ et $B = \dfrac{v_0}{a} - \dfrac{K}{2}a$.

**36.1** c) On a $v(r) = \dfrac{Kr^2}{4} + B\ln(r) + A$. La constante $B$ doit être nulle pour éviter la divergence de $v$ en $r = 0$. La condition aux limites $v(0) = 0$ permet de trouver $A = -\dfrac{KR^2}{4}$.

**36.2** b) On peut écrire

$$D_v = 2\pi A\left[R^2\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R = A\left[\int_{\theta=0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right] \times \left[\int_{r=0}^{R}\left(R^2 - r^2\right)r\,\mathrm{d}r\right] = A\pi\frac{R^4}{2}.$$

**36.3** a) Un dauphin peut être modélisé par un cylindre dont le rayon est de 50 cm environ. La vitesse doit de plus être exprimée en mètre par seconde : $20\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1} = 20/3{,}6\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. On a donc $\mathrm{Re} = \dfrac{20 \times 0,50}{3,6 \times 10^{-6}}$.

**36.3** b) Une balle de tennis a un diamètre de l'ordre de 6 cm.

**36.3** c) Un moucheron a une taille caractéristique de l'ordre de 1 mm.

**36.4** a) On a $\|\rho(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v}\| \sim \rho V^2/L$ et $\|\Delta\vec{v}\| \sim v/L^2$.

**36.5** a)

- La dimension du laplacien du champ des vitesses est : $[\Delta(\vec{v})] = \dfrac{[\text{vitesse}]}{[\text{longueur}]^2} = L^{-1}.T^{-1}$.
- La dimension de la force volumique visqueuse est $[f_{\text{vis}}] = \dfrac{[\text{force}]}{[\text{volume}]} = \dfrac{M.L.T^{-2}}{L^3} = M.L^{-2}.T^{-2}$.
- La dimension de la viscosité dynamique est : $[\eta] = \dfrac{M.L^{-2}.T^{-2}}{L^{-1}.T^{-1}}$ soit $[\eta] = M.L^{-1}.T^{-1}$.

**36.5** b) La dimension de la viscosité cinématique se déduit du résultat précédent sur la viscosité dynamique

$$[\nu] = \frac{M.L^{-1}.T^{-1}}{M.L^{-3}} = L^2.T^{-1}.$$

**36.5** c) On calcule en unités du système international avec $\rho = 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$ : on a $\nu = \dfrac{10^{-3}\,\text{usi}}{10^3} = 10^{-6}\,\text{usi}$.

**36.6** a) On a $-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P(z) = -\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\vec{e_z} = \mu g\vec{e_z}$.

**36.6** b) On écrit $\delta\overrightarrow{F_P} = P(z)\,\mathrm{d}\overrightarrow{S} = P(z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\overrightarrow{e_x} = (P_0 - \mu g z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\overrightarrow{e_x}$. En intégrant sur toute la surface, on a :

$$\overrightarrow{F_P} = \iint_{(S)} P(z)\,\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \int_{y=0}^{L}\int_{z=0}^{h}(P_0 - \mu g z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\overrightarrow{e_x} = L\overrightarrow{e_x}\left[P_0 z - \frac{\mu g}{2}z^2\right]_0^h = L\left(P_0 h - \mu g\frac{h^2}{2}\right)\overrightarrow{e_x}.$$

**36.7** a) Comme le gradient est constant, on a $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P(x) = \dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\overrightarrow{e_x} = \dfrac{P(x_2) - P(x_1)}{x_2 - x_1}\overrightarrow{e_x}$. Avec les conditions données, on obtient

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P(x) = \frac{P_2 - P_1}{L}\overrightarrow{e_x}.$$

**36.7** b) En primitivant la composante selon (O$x$) et en utilisant les conditions aux limites, on obtient :

$$\frac{P_2 - P_1}{L}(x - x_1) + P_1.$$

**36.7** c) On a

$$\delta\overrightarrow{F_P} = P(L)\,\mathrm{d}\overrightarrow{S} = -\left[\frac{P_2 - P_1}{L}(L - x_1) + P_1\right]\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\overrightarrow{e_x}.$$

Sachant que $P(x)$ ne dépend ni de $y$, ni de $z$, on obtient par intégration : $\overrightarrow{F_P} = \left[\dfrac{P_1 - P_2}{L}(L - x_1) + P_1\right]S\overrightarrow{e_x}$.

**36.8** a) On écrit $\eta\Delta(\overrightarrow{v}(z)) = \eta\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{v}(z)}{\mathrm{d}z^2} = \eta\dfrac{\mathrm{d}^2\left(Az^2\right)}{\mathrm{d}z^2}\overrightarrow{e_x} = 2A\eta\overrightarrow{e_x}$.

**36.8** b) On écrit $\delta\overrightarrow{F_\mathrm{v}} = \eta\dfrac{\partial Az^2}{\partial z}\,\mathrm{d}S\overrightarrow{e_x} = 2A\eta z\,\mathrm{d}S\overrightarrow{e_x}$.

En sommant sur toute la surface, sachant $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ et $z = h$, on obtient :

$$\overrightarrow{F_\mathrm{v}} = \iint_S \delta\overrightarrow{F_\mathrm{v}} = \int_{x=0}^{L}\int_{y=0}^{L} 2A\eta h\overrightarrow{e_x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2A\eta h L^2\overrightarrow{e_x}.$$

**36.9** a) On a $\mathrm{Re} = \dfrac{\mu_\mathrm{g}\,\mathrm{d}v_\ell}{\eta} = \dfrac{1{,}3\times10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}\times1{,}0\times10^{-3}\,\mathrm{m}\times3{,}8\,\mathrm{mm\cdot s^{-1}}}{0{,}94\,\mathrm{Pa\cdot s}} = 5{,}3\times10^{-3}$.

**36.9** b) On a $\|\overrightarrow{F_\mathrm{t}}\| = 6\pi\eta R v_\ell = 6\pi 0{,}94\,\mathrm{Pa\cdot s}\,\dfrac{1{,}0\times10^{-3}\,\mathrm{m}}{2}\,3{,}8\,\mathrm{mm\cdot s^{-1}} = 3{,}4\times10^{-5}\,\mathrm{N}$.

**36.9** c) La bille étant entièrement immergé, $V_{\mathrm{s,i}} = \dfrac{4}{3}\pi R^3$, d'où la norme de la poussée d'Archimède :

$$\|\overrightarrow{\Pi}\| = \mu_\mathrm{g}\frac{4}{3}\pi R^3 g = 1{,}3\times10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1{,}0\times10^{-3}\,\mathrm{m}}{2}\right)^3 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} = 6{,}7\times10^{-6}\,\mathrm{N}.$$

**36.9** d) Sachant que la masse de la bille est $m = \mu_\mathrm{a}V$ avec le volume $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ de la bille, on a :

$$\|\overrightarrow{P}\| = \mu_\mathrm{a}\frac{4}{3}\pi R^3 g = 7{,}8\times10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1{,}0\times10^{-3}\,\mathrm{m}}{2}\right)^3 9{,}81\,\mathrm{m/s^{-2}} = 4{,}0\times10^{-5}\,\mathrm{N}.$$

**36.9** e) La seconde loi de Newton dans un référentiel galiléen donne :

$$m\vec{a}_{\mathrm{M}}(t) = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t}(t) = \vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{F}_t.$$

En projetant selon l'axe vertical, on obtient :

$$\mu_{\mathrm{a}}\frac{4}{3}\pi R^3\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \mu_{\mathrm{a}}\frac{4}{3}\pi R^3 g - \mu_{\mathrm{g}}\frac{4}{3}\pi R^3 g - 6\pi\eta R v(t) \qquad \text{donc} \qquad \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{v(t)}{\tau} = \left(1 - \frac{\mu_{\mathrm{g}}}{\mu_{\mathrm{a}}}\right)g,$$

avec $\tau = \dfrac{2\mu_{\mathrm{a}}R^2}{9\eta}$.

.....

**36.9** f) On écrit $\tau = \dfrac{2\times 7{,}8\times 10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}\left(5\times 10^{-4}\,\mathrm{m}\right)^2}{9\times 0{,}94\,\mathrm{Pa\cdot s}} = 4{,}6\times 10^{-4}\,\mathrm{s} \approx 0{,}5\,\mathrm{ms}$.

.....

**36.10** c) La résultante des forces de pression suivant $(\mathrm{O}x)$ est la somme algébrique de la force pressante qui s'exerce sur la surface $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ à la cote $x$ et sur la surface $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ à la cote $x+\mathrm{d}x$. La surface faisant déjà intervenir le produit $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, on peut considérer la pression comme égale à $P(x,y,z)$ en tout point de la surface en $x$ et à $P(x+\mathrm{d}x,y,z)$ sur la surface en $x+\mathrm{d}x$.

Il vient en projection sur $(\mathrm{O}x)$ : $\mathrm{d}F_{Px} = [+P(x,y,z) - P(x+\mathrm{d}x,y,z)]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

Par un développement de Taylor-Young limité au premier ordre en $\mathrm{d}x$, on obtient :

$$\mathrm{d}F_{Px} = \left[-\frac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{d}F_{Px} = -\frac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}\tau.$$

.....

**36.10** d) La résultante des forces de pression suivant $(\mathrm{O}y)$ est la somme algébrique de la force pressante qui s'exerce sur la surface $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$ à la cote $y$ et sur la surface $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$ à la cote $y+\mathrm{d}y$.

Comme précédemment, il vient en projection sur $(\mathrm{O}y)$ : $\mathrm{d}F_{Py} = [+P(x,y,z) - P(x,y+\mathrm{d}y,z)]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

Un développement de Taylor-Young limité au premier ordre en $\mathrm{d}y$ donne :

$$\mathrm{d}F_{Py} = \left[-\frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{d}F_{Py} = -\frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}\tau.$$

.....

**36.10** e) La résultante des forces de pression suivant $(\mathrm{O}z)$ est la somme algébrique de la force pressante qui s'exerce sur la surface $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ à la cote $z$ et sur la surface $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ à la cote $z+\mathrm{d}z$.

On a : $\mathrm{d}F_{Pz} = [+P(x,y,z) - P(x,y,z+\mathrm{d}z)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, qui donne par le même raisonnement que précédemment :

$$\mathrm{d}F_{Pz} = \left[-\frac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{d}F_{Pz} = -\frac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}\tau.$$

.....

**36.10** f) En reprenant les résultats précédents, la résultante des forces pressantes exercée sur le volume particulaire $\mathrm{d}\tau$ s'écrit : $\mathrm{d}\overrightarrow{F_P} = -\left[\dfrac{\partial P}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \dfrac{\partial P}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \dfrac{\partial P}{\partial z}\overrightarrow{e_z}\right]\mathrm{d}\tau$, d'où $\overrightarrow{f_P} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{F_P}}{\mathrm{d}\tau} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P$.

.....

**36.11** a) La résultante des forces de pression s'écrit $\overrightarrow{F_P} = -\oiint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}\overrightarrow{S_{\mathrm{ext}}} = -\iiint_V \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P\,\mathrm{d}\tau$. Si la pression est uniforme, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P = \vec{0}$ d'où $\overrightarrow{F_P} = \vec{0}$.

.....

**36.11** b) Pour que la distribution initiale des pressions, avec $P_2$ sur $S_2$ soit la même que la superposition de $P_1$ uniforme partout et de $P'$ extérieure sur $S_2$, il faut que $P' = P_2 - P_1$.

.....

**36.11** c) On calcule la résultante des forces de pression sur $\Sigma$ en utilisant la superposition des deux distributions précédentes. La contribution pour $P_1$ uniforme donne une résultante nulle (voir question a).
La contribution pour $P'$ donne : $\overrightarrow{F_P} = -P' S_2 \overrightarrow{e_z}$, soit $\overrightarrow{F_P} = (P_1 - P_2) S_2 \overrightarrow{e_z}$.

.....

**36.12** a) Compte tenu de la définition prise pour $\mathrm{d}\overrightarrow{f_{\text{vis}}}$, la force extérieure au volume particulaire $\mathrm{d}\tau$ qui s'exerce sur la surface $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$ située à la cote $y$ est directement $\mathrm{d}\overrightarrow{F_1}(y,t) = +\overrightarrow{f_{\text{vis}}}(y,t) = -\eta \dfrac{\partial v_x}{\partial y}(y,t)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_x}$. La force visqueuse extérieure exercée sur la surface $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$ en $y + \mathrm{d}y$ est celle due aux couches fluides situées en $y' \geqslant y + \mathrm{d}y$, donc, en vertu du principe des actions réciproques, l'opposée de celle exercée par les couches situées en $y' \leqslant y + \mathrm{d}y$. On aura donc $\mathrm{d}\overrightarrow{F_2}(y+\mathrm{d}y,t) = -\overrightarrow{f_{\text{vis}}}(y+\mathrm{d}y,t) = +\eta \dfrac{\partial v_x}{\partial y}(y+\mathrm{d}y,t)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_x}$. La bonne réponse est la réponse (d).

.....

**36.12** b) On reprend l'expression de $\mathrm{d}\overrightarrow{F}$ de la question précédente et on forme un développement de Taylor-Young de $v_x(y,t)$ par rapport à $y$ limité au premier ordre en $\mathrm{d}y$, soit :

$$\frac{\partial v_x}{\partial y}(y+\mathrm{d}y,t) \approx \frac{\partial v_x}{\partial y}(y,t) + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}(y,t)\ \mathrm{d}y.$$

Il vient $\mathrm{d}\overrightarrow{F} = +\eta \left[\dfrac{\partial v_x}{\partial y}(y+\mathrm{d}y,t) - \dfrac{\partial v_x}{\partial y}(y,t)\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_x}$ soit $\mathrm{d}\overrightarrow{F} = +\eta\ \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}(y,t)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_x}$.

.....

**36.12** c) On sait que pour un fluide incompressible, le champ des vitesses vérifie l'équation locale $\mathrm{div}(\overrightarrow{v}) = 0$ : la réponse (c) n'est donc pas pertinente. On a montré à la question précédente que pour un champ de vitesses du type $\overrightarrow{v}(\mathrm{M},t) = v_x(y,t)\ \overrightarrow{e_x}$, la force volumique de viscosité au sein du fluide s'écrit $\overrightarrow{f_{\text{visc}}}(\mathrm{M},t) = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{F}}{\mathrm{d}\tau} = +\eta \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\overrightarrow{e_x}$, dont la généralisation à un champ de vitesses quelconque conduit à $\overrightarrow{f_{\text{visc}}}(\mathrm{M},t) = \eta \Delta(\overrightarrow{v})$, soit la réponse (a).

.....

**36.13** a) La dimension de $\dfrac{\mathrm{D}\overrightarrow{v}}{\mathrm{D}t}$ est : $[\dfrac{\mathrm{D}\overrightarrow{v}}{\mathrm{D}t}] = \dfrac{[\text{vitesse}]}{[\text{temps}]} = L.T^{-2}$.

La dimension de $\rho \dfrac{\mathrm{D}\overrightarrow{v}}{\mathrm{D}t}$ est donc : $\left[\rho \dfrac{\mathrm{D}\overrightarrow{v}}{\mathrm{D}t}\right] = M.L^{-3}.L.T^{-2} = \dfrac{[\text{force}]}{[\text{volume}]}$. La bonne réponse est la réponse (d).

.....

**36.13** b) On rappelle que $\dfrac{\mathrm{D}\overrightarrow{v}}{\mathrm{D}t} = \dfrac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)(\overrightarrow{v})$. Pour un écoulement stationnaire, on a $\dfrac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = \overrightarrow{0}$. Pour un écoulement uniforme, $\overrightarrow{v}$ ne dépend pas du point choisi, donc $\left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$.
La bonne réponse est donc la réponse (a).

.....

**36.13** c) Si les lignes de courant sont rectilignes et parallèles, le champ eulérien des vitesses est du type

$$\overrightarrow{v}(\mathrm{M},t) = v_x(\mathrm{M},t)\,\overrightarrow{e_x}$$

en choisissant l'axe des $x$ suivant la direction de $\overrightarrow{v}$. Pour un écoulement incompressible et homogène, on a $\mathrm{div}(\overrightarrow{v}) = 0$, soit ici $\dfrac{\partial v_x}{\partial x} = 0$. Comme l'écoulement est stationnaire : $\dfrac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = \overrightarrow{0}$.
L'accélération convective vaut ici : $\left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)(\overrightarrow{v}) = \left(v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x}\right)(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$. D'où $\dfrac{\mathrm{D}\overrightarrow{v}}{\mathrm{D}t} = \overrightarrow{0}$.

.....

**36.14** a) On a $\overrightarrow{v}(\mathrm{M},t) = \overrightarrow{0}$ donc $\overrightarrow{0} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P(\mathrm{M},t) + \overrightarrow{F}_{\mathrm{V,a}}$.

.....

**36.14** b) Une particule d'eau de masse $m$ subit une force d'inertie d'entraînement $-m\vec{a}_{\mathrm{M}}(t)$ donc

$$\vec{F}_{\mathrm{V,a}} = \vec{P}_V + \vec{F}_{V,\mathrm{ie}} = -\mu g\vec{e_z} - \mu a\vec{e_x}.$$

.....

**36.14** c) Une particule d'eau de masse $m$ se trouvant à une distance $r$ de l'axe $(\mathrm{O}z)$ subit une force d'inertie d'entraînement $-mr\omega^2\vec{e_r}$ donc

$$\vec{F}_{\mathrm{V,a}} = \vec{P_V} + \vec{F}_{V,\mathrm{ie}} = -\mu g\vec{e_z} + \mu\omega r^2\vec{e_r}.$$

.....

**36.15** a) L'accélération locale $\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t}$ est nulle car l'écoulement est stationnaire. L'accélération convective se réduit ici à : $\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)(\vec{v}) = v(z)\dfrac{\partial v(z)}{\partial x}\vec{e_x}$. L'écoulement étant supposé incompressible, le champ des vitesses vérifie l'équation locale $\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$, soit ici $\dfrac{\partial v(z)}{\partial x} = 0$. On obtient ainsi : $\dfrac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{0}$.

.....

**36.15** b) On rappelle qu'en coordonnées cartésiennes et en cartésiennes seulement, les composantes du laplacien vectoriel sont le laplacien des composantes, soit ici : $\Delta(\vec{v}) = \Delta(v_x)\vec{e_x}$ (les autres composantes de $\vec{v}$ sont nulles).

Or, on a $\Delta(v_x) = \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}$. Comme $v_x = v(z)$ ne dépend que de $z$, il reste $\Delta(\vec{v}) = \dfrac{\mathrm{d}^2 v(z)}{\mathrm{d}z^2}\vec{e_x}$.

La bonne réponse est la réponse (b).

.....

**36.15** c) La projection de l'équation de Navier-Stokes suivant $(\mathrm{O}x)$ donne ici : $\dfrac{\mathrm{d}^2 v(z)}{\mathrm{d}z^2} = 0$, qui s'intègre en $v(z) = Az + B$.

Les conditions aux limites donnent ici, en $z = \pm a$ : $\begin{cases} +U = Aa + B \\ -U = -Aa + B \end{cases}$ On en déduit $B = 0$ et $A = \dfrac{U}{a}$.

Finalement, on a $v(z) = U\dfrac{z}{a}$.

.....

**36.15** d) On écrit que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}) = \vec{\nabla}\wedge\vec{v}$, soit ici $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \frac{U}{a}z \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{U}{a} \\ 0 \end{vmatrix} = \dfrac{U}{a}\vec{e_y}$ : la réponse (c) est la bonne.

.....

**36.16** a) L'équation de conservation de la masse avec $\rho = C^{\mathrm{ste}}$ conduit à $\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$, soit ici $\dfrac{\partial v(r,z)}{\partial z} = 0$ : la composante axiale $v_z$ de $\vec{v}$ ne dépend que de $r$.

.....

**36.16** b) La projection de l'équation de Navier-Stokes suivant la direction radiale $\vec{e_r}$ donne : $0 = -\dfrac{\partial P}{\partial r} + 0$ : la bonne réponse est la réponse (a).

.....

**36.16** c) La projection de l'équation de Navier-Stokes suivant la direction axiale $(\mathrm{O}z)$ donne : $\dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\eta}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial v(r)}{\partial r}\right)$.

Le membre de gauche de cette équation aux dérivées partielles ne dépend que de $z$ (on a montré à la question précédente que $P$ ne dépendait pas de $r$), tandis que le membre de droite ne dépend que de $r$ : ces deux membres de l'équation ne peuvent qu'être égaux à une constante numérique $C$. La bonne réponse est la réponse (a).

.....

**36.16** d) Puisque $\dfrac{\partial P}{\partial z} = C^{\text{ste}}$, et que $P$ ne dépend que de $z$, la loi $P(z)$ est une loi affine et $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \dfrac{P(L)-P(0)}{L-0}$.

L'équation de Navier-Stokes donne en projection sur $(\mathrm{O}z)$, avec ce qui a été déjà vu :

$$\frac{\eta}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v(r)}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{[P(L)-P(0)]}{L} \qquad \text{donc} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v(r)}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{[P(L)-P(0)]}{\eta L}r,$$

qui s'intègre entre 0 et $r$ en :

$$r\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r} - 0 = \frac{[P(L)-P(0)]}{2\eta L}r^2 \qquad \text{donc} \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = \frac{[P(L)-P(0)]}{2\eta L}r.$$

Une seconde intégration par rapport à $r$ entre 0 et $r$ conduit à : $v(r) - v(0) = \dfrac{[P(L)-P(0)]}{4\eta L}r^2$.

Il reste à déterminer $v(0)$, en utilisant la condition aux limites en $r = R$ où $v(R) = 0$. On obtient ainsi :

$$0 - v(0) = \frac{[P(L)-P(0)]}{4\eta L}R^2.$$

Finalement, le champ des vitesses d'un écoulement de Poiseuille cylindrique s'écrit :

$$v(r) = \frac{[P(0)-P(L)]}{4\eta L}(R^2 - r^2).$$

.....

**36.17** a) On a $\mu\left(\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}(\mathrm{M},t) + \left(\vec{v}(\mathrm{M},t)\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}(\mathrm{M},t)\right) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P(\mathrm{M},t) + \mu\vec{g}$.

.....

**36.17** b) On écrit $\mu\dfrac{v_\mathrm{A}^2}{2} + \mu g(R-r) + P_\mathrm{A} - P_\mathrm{B} = \mu\dfrac{v_\mathrm{B}^2}{2} = \mu\dfrac{v_\mathrm{A}^2}{2} + \Delta P$ donc $v_\mathrm{B}^2 - v_\mathrm{A}^2 = \dfrac{2\Delta P}{\mu}$.

.....

**36.17** c) On a $v_\mathrm{B}^2 = v_\mathrm{A}^2 + \dfrac{2\Delta P}{\mu}$ et $v_\mathrm{A} = \dfrac{s}{S}v_B$ donc $v_\mathrm{B}^2\left(1 - \left(\dfrac{s}{S}\right)^2\right) = \dfrac{2\Delta P}{\mu}$ et $v_B = S\sqrt{\dfrac{2\Delta P}{\mu(S^2-s^2)}}$.

On en déduit :

$$D_V = v_\mathrm{B}s = Ss\sqrt{\frac{2\Delta P}{\mu(S^2-s^2)}}.$$

.....

**36.18** a) On écrit $\dfrac{\partial \vec{v}(z)}{\partial t} + (\vec{v}(z)\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v}(z) = \vec{0} + v(z)\dfrac{\partial v(z)}{\partial x}\vec{e_x} = \vec{0}$.

.....

**36.18** b) En régime permanent, l'accélération d'une particule de fluide étant nulle et la seule autre force volumique est celle de pesanteur :

$$\vec{0} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P(x,z) + \eta\Delta(\vec{v}(z)) + \mu\vec{g}.$$

.....

**36.18** c) On a

$$\frac{\partial P(x,z)}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial P(x,z)}{\partial z}\vec{e_z} = \eta\frac{\partial^2 v(z)}{\partial z^2}\vec{e_x} - \mu g\vec{e_z}.$$

Donc la projection selon l'axe $(\mathrm{O}x)$ donne : $\dfrac{\partial P(x,z)}{\partial x} = \eta\dfrac{\partial^2 v(z)}{\partial z^2}$.

.....

**36.18** d) La primitive par rapport à $z$ donne : $\eta\dfrac{\mathrm{d}v(z)}{\mathrm{d}z} = -Az + C$ et la seconde primitive conduit à

$$\eta v(z) = -\frac{A}{2}z^2 + Cz + D.$$

Avec les trois conditions, on trouve $D = \eta v_0$, $C = 0$ et $A = \dfrac{2\eta v_0}{h^2}$ d'où en éliminant $\eta$, $v(z) = v_0\left(1 - \dfrac{z^2}{h^2}\right)$.

.....

**36.18** e) Comme $A = \dfrac{2\eta v_0}{h^2}$, la primitive par rapport à $x$ donne : $P(x) = -Ax + B$ et avec la condition $P(0) = P_0$, on a $B = P_0$ d'où $P(x) = P_0 - Ax$.

.....

**36.19** a) L'accélération convective est nulle : on a $(\vec{v}(z,t) \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}(z,t) = v(z)\dfrac{\partial \overrightarrow{v(z)}}{\partial x} = \vec{0}$.
Il n'y a pas de gradient de pression dans le sens de l'écoulement donc la pression ne dépend que de $z$ et de $t$. On a

$$\mu \frac{\partial \vec{v}(z,t)}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P(z,t) + \eta \Delta(\vec{v}(z,t)) + \mu \vec{g}.$$

.....

**36.19** b) On a

$$\mu \frac{\partial v(z,t)}{\partial t}\vec{e_x} = -\frac{\partial P(z,t)}{\partial z}\vec{e_z} + \eta \frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2}\vec{e_x} - \mu g \vec{e_z}.$$

Donc selon (O$x$), on a $\mu \dfrac{\partial v(z,t)}{\partial t} = \eta \dfrac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2}$. On reconnaît l'équation de diffusion.

.....

**36.19** c) L'équation précédente est une équation de diffusion donc en ordre de grandeur $\mu \dfrac{v}{\tau} \approx \eta \dfrac{v}{h^2}$ d'où $\tau \approx \dfrac{\mu}{\eta} h^2$.

.....

**36.19** d) On calcule $\tau \approx \dfrac{h^2}{\nu} = \dfrac{(1 \times 10^{-1}\,\text{m})^2}{1{,}0 \times 10^{-6}\,\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}} = 1{,}0 \times 10^4\,\text{s}$ soit environ 2 h 46 min 40 s.

.....

**36.19** e) On a $0 = \eta \dfrac{\partial^2 v(z)}{\partial z^2}$ donc $\dfrac{\text{d}^2 v(z)}{\text{d}z^2} = 0$ ; c'est l'équation de Laplace.

.....

**36.19** f) On a $\dfrac{\text{d}v(z)}{\text{d}z} = A$ puis $v(z) = Az + B$ avec $A$ et $B$ des constantes d'intégration. D'après les conditions aux limites, on a $0 = v(0) = B$ et $v_p = v(h) = Ah$ d'où $A = \dfrac{v_p}{h}$ et donc $v(z) = \dfrac{v_p}{h} z$.

.....

**36.19** g) On a $\vec{F_\text{v}} = -\eta \dfrac{\text{d}}{\text{d}z}\left(\dfrac{v_p}{h} z\right)_{z=h} S\vec{e_x} = -\eta \dfrac{v_p}{h} S\vec{e_x}$.

.....

**36.20** a) En notant $\vec{g} = -\overrightarrow{\text{grad}}(gz)$, l'équation qui régit l'écoulement peut se mettre sous la forme :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz\right) = \vec{0}.$$

qui montre que la charge $C = \dfrac{\vec{v}^2}{2} + \dfrac{P}{\rho} + gz$ est constante dans tout le volume de l'écoulement irrotationnel. La bonne réponse est la réponse (a).

.....

**36.20** b) En considérant l'air à l'extérieur d'un cyclone en écoulement stationnaire, incompressible, parfait et irrotationnel, la forme étendue de la relation de Bernoulli, donne entre le bord du cyclone où $v = 200\,\text{km/h}$ et le centre où la vitesse est nulle $\rho \dfrac{v^2}{2} + P_\text{min} = P_\text{max}$ donc $P_\text{max} - P_\text{min} = \dfrac{1{,}2\,\text{kg/m}^3 \times (200\,\text{km} \cdot \text{h}^{-1}/3{,}6)^2}{2} \approx 20\,\text{mbar}$.

.....

**36.21** a) La relation de Bernoulli sur une l.d.c. entre un point A de la surface libre à la pression atmosphérique $P_0$ et un point du jet de sortie en B, lui aussi au contact de l'atmosphère, donc à la pression $P_0$ donne :

$$P_0 + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v_\text{A}^2 = P_0 + 0 + \frac{1}{2}\rho v_B^2.$$

D'où $v_\text{B}^2 = v_\text{A}^2 + 2gh$.

.....

**36.21** b) L'incompressibilité du fluide entraîne la conservation du débit-volume : on a $S_\mathrm{A} v_\mathrm{A} = S_\mathrm{B} v_\mathrm{A}$. Comme on a aussi $S_\mathrm{A} = \pi R^2$ et $S_\mathrm{B} = \pi a^2$, on en déduit $v_\mathrm{B} = \dfrac{R^2}{a^2} v_\mathrm{A}$.

.....

**36.21** c) Comme $a \ll R$, on aura $v_\mathrm{A} \ll v_\mathrm{B}$, d'où $v_\mathrm{B} \simeq \sqrt{2gh}$.

.....

**36.22** a) Avec $(\mathrm{O}z)$ suivant la verticale ascendante, on a $\vec{g} = -g\vec{e_z}$. On en déduit $\vec{g} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(gz)$. La bonne réponse est la réponse (c).

.....

**36.22** b) En faisant circuler l'équation d'Euler le long d'une ligne de courant, on a $\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}) \wedge \vec{v}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 0$ car $\mathrm{d}\vec{\ell}$ est colinéaire à $\vec{v}$ et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}) \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{v}$. Il reste $\displaystyle\int_\mathrm{A}^\mathrm{B} \frac{D\vec{v}}{Dt} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_\mathrm{A}^\mathrm{B} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{\vec{v}^2}{2}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \frac{\vec{v_\mathrm{A}}^2 - \vec{v_\mathrm{A}}^2}{2}$.

Pour le terme de droite, on a $\displaystyle -\int_\mathrm{A}^\mathrm{B} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{P}{\rho} + g\right) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \frac{P_\mathrm{A} - P_\mathrm{A}}{\rho} - g(z_\mathrm{A} - z_\mathrm{A})$.

.....

**36.22** c) Le calcul mené à la question b) montre que $P_\mathrm{A} + \dfrac{\rho \vec{v_\mathrm{A}}^2}{2} + \rho g z_\mathrm{A} = P_\mathrm{A} + \dfrac{\rho \vec{v_\mathrm{A}}^2}{2} + \rho g z_\mathrm{A}$, donc constante, à condition de rester sur une même ligne de courant liant A et B. La bonne réponse est donc la réponse (c).

.....

**36.23** a) On a $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \dfrac{U \partial \vec{v^*}}{T \partial t^*} = \dfrac{U}{T} \dfrac{\partial \vec{v^*}}{\partial t^*}$.

.....

**36.23** b) On trouve $\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)(\vec{v}) = \left(U\vec{v^*} \cdot \dfrac{1}{L} \overrightarrow{\mathrm{grad}}^*\right)(U\vec{v^*}) = \dfrac{U^2}{L}\left(\vec{v^*} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}^*\right)(\vec{v^*})$.

.....

**36.23** c) On a $\Delta(\vec{v}) = \dfrac{1}{L^2} \Delta^*(U\vec{v^*}) = \dfrac{U}{L^2} \Delta^*(\vec{v^*})$.

.....

**36.23** d) Compte tenu des résultats précédents, l'équation de Navier-Stokes se réécrit, en divisant par $\rho = C^\mathrm{ste}$ :

$$\frac{U}{T} \frac{\partial \vec{v^*}}{\partial t^*} + \frac{U^2}{L}\left(\vec{v^*} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}^*\right)(\vec{v^*}) = -\frac{\overrightarrow{\mathrm{grad}}^*(P)}{L} - g\vec{e_z} + \frac{\eta U}{\rho L^2} \Delta^*(\vec{v^*}).$$

En multipliant chaque terme par $\dfrac{L}{U^2}$, il vient :

$$\frac{L}{UT} \frac{\partial \vec{v^*}}{\partial t^*} + \left(\vec{v^*} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}^*\right)(\vec{v^*}) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}^*\left(\frac{P}{\rho U^2}\right) - \frac{gL}{U^2}\vec{e_z} + \frac{\eta}{\rho L U} \Delta^*(\vec{v^*}).$$

Par identification, il vient $P^* = \rho U^2$.

.....

**36.23** e) L'expression obtenue à la question précédente donne immédiatement $\mathcal{S}_\mathrm{tr} = \dfrac{L}{UT}$.

.....

**36.23** f) Le nombre de Froude est tel que $\dfrac{1}{\mathcal{F}_\mathrm{r}} = \dfrac{gL}{U^2}$, d'où $\mathcal{F}_\mathrm{r} = \dfrac{U^2}{gL}$.

.....

**36.23** g) On identifie $\dfrac{1}{\mathrm{Re}} = \dfrac{\eta}{\rho L U}$ qui donne $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho L U}{\eta}$.

.....

# Fiche n° 37. Bilans en mécanique des fluides

## Réponses

**37.1** a) ..... non homogène

**37.1** b) ..... homogène

**37.1** c) ..... non homogène

**37.1** d) ..... homogène

**37.2** a) ..... $5{,}9 \times 10^4\,\mathrm{Pa}$

**37.2** b) ..... $1{,}3 \times 10^2\,\mathrm{J/kg}$

**37.3** a) ..... oui

**37.3** b) ..... oui

**37.3** c) ..... oui

**37.3** d) ..... oui

**37.4** a) ..... c

**37.4** b) ..... b

**37.4** c) ..... b

**37.4** d) ..... c

**37.4** e) ..... b

**37.5** a) ..... $\dfrac{v^2}{2} + \dfrac{P}{\mu} = \mathrm{cte}$

**37.5** b) ..... $gz + \dfrac{P}{\mu} = \mathrm{cte}$

**37.5** c) ..... $v = 0{,}99\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

**37.6** a) ..... $D_v = 0{,}55\,\mathrm{L \cdot s^{-1}}$

**37.6** b) ..... c

**37.6** c) ..... b

**37.6** d) ..... $\mathcal{P} = 3{,}6 \times 10^2\,\mathrm{W}$

**37.6** e) ..... c

**37.7** a) ..... $\xi = 0{,}05$

**37.7** b) ..... $3{,}1 \times 10^2\,\mathrm{Pa}$

**37.7** c) ..... $2 \times 10^{-4}$

**37.7** d) ..... $60\,\mu\mathrm{m}$

**37.8** a) ..... $U_1 = U_2 = 3{,}2\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

**37.8** b) ..... $3{,}0\,\mathrm{bar}$

**37.9** a) ..... c

**37.9** b) ..... c

**37.9** c) ..... $-\mathcal{P}$

**37.9** d) ..... $\dfrac{1}{2} D_\mathrm{m} v_2^2\,\mathrm{d}t$

**37.9** e) ..... $\dfrac{1}{2} D_\mathrm{m} v_1^2\,\mathrm{d}t$

**37.9** f) ..... $\mathcal{P} = \dfrac{1}{2} D_\mathrm{m}(v_1^2 - v_2^2)$

**37.9** g) ..... $\mathcal{P} = 100\,\mathrm{W}$

**37.10** a) ..... $\mathrm{d}m_1 = D_{m1}\,\mathrm{d}t$

**37.10** b) ..... $\mathrm{d}m_2 = D_{m2}\,\mathrm{d}t$

**37.10** c) ..... $\mathrm{d}m = \mathrm{d}m_1 - \mathrm{d}m_2$

**37.10** d) ..... $D_{m1} = D_{m2}$

**37.11** a) ..... $m^*(t) = m(t) + \mathrm{d}m_1$

**37.11** b) ..... $m^*(t + \mathrm{d}t) = m(t + \mathrm{d}t) + \mathrm{d}m_2$

**37.11** c) ..... $\mathrm{d}m^* = 0$

**37.11** d) ..... $\mathrm{d}m_1 = \mathrm{d}m_2$

**37.12** a) ..... $m\vec{g}$

**37.12** b) ..... $-\lambda\vec{v}$ où $\lambda \in \mathbb{R}^+$

**37.12** c) ..... $\vec{0}$

**37.12** d) ..... $\vec{dp} = D_\mathrm{m}\vec{u}\,\mathrm{d}t$

**37.12** e) ..... $\vec{F_\mathrm{P}} = -D_\mathrm{m}\vec{u}$

**37.13** a) ..... $\boxed{Sc\,\mathrm{d}t}$

**37.13** b) ..... $\boxed{\vec{p}(t) = \frac{h}{\lambda} nSc\,\mathrm{d}t\vec{e_x}}$

**37.13** c) ..... $\boxed{\vec{p}(t+\mathrm{d}t) = -\frac{h}{\lambda} nSc\,\mathrm{d}t\vec{e_x}}$

**37.13** d) ..... $\boxed{\vec{F}_{\text{photons}\to\text{voile}} = 2\frac{h}{\lambda} nSc\vec{e_x}}$

**37.14** a) ..... $\boxed{P_1S_1\vec{u}_x}$

**37.14** b) ..... $\boxed{-P_2S_2\vec{u}_x}$

**37.14** c) ..... $\boxed{-\vec{F}}$

**37.14** d) ..... $\boxed{D_\mathrm{m}\vec{v_2}\,\mathrm{d}t}$

**37.14** e) ..... $\boxed{D_\mathrm{m}\vec{v_1}\,\mathrm{d}t}$

**37.14** f) ..... $\boxed{\vec{F} = (P_1S_1 - P_2S_2)\vec{u}_x}$

**37.14** g) ..... $\boxed{F = 200\,\mathrm{N}}$

**37.15** a) ..... $\boxed{\vec{0}}$

**37.15** b) ..... $\boxed{-\lambda\omega\vec{u}_z \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}^+}$

**37.15** c) ..... $\boxed{-\vec{\Gamma}}$

**37.15** d) ..... $\boxed{\text{a}}$

## Corrigés

**37.1** a) Comme le membre de gauche est homogène à une énergie massique, on voit que le terme $\rho$ est en trop dans le membre de droite.

.....

**37.1** b) Le membre de gauche est homogène à un débit massique (en $\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$) fois une énergie massique (en $\mathrm{J\cdot kg^{-1}}$), ce qui revient à une puissance. Le terme de droite étant également une puissance, l'équation est homogène.

.....

**37.1** c) Il manque un $\rho$ au dénominateur dans le terme de droite : $-D_\mathrm{m}\dfrac{\Delta P}{\rho}$.

.....

**37.1** d) Le terme de gauche est homogène à une longueur : il mesure directement la perte de charge en hauteur. L'équation est homogène.

.....

**37.2** a) La perte de charge correspond au terme $gh_\mathrm{pc}$ sauf qu'en l'état, elle correspond à une perte d'énergie massique. Pour obtenir une perte de pression, il faut multiplier par $\mu_0$. Ainsi, $\Delta P_\mathrm{pc} = \mu_0 g h_\mathrm{pc}$.

.....

**37.2** b) Sans variation de pression et de vitesse, la relation de Bernoulli généralisée s'écrit :

$$g\Delta z = w_u - gh_\mathrm{pc} \qquad \text{donc} \qquad w_u = g(\Delta z + h_\mathrm{pc}).$$

.....

**37.3** a) Le fluide est ici un liquide. C'est un fluide incompressible donc l'écoulement est également incompressible.

.....

**37.3** b) Le fait que $s \ll S$ permet de qualifier l'écoulement de quasi-stationnaire car, par conservation du débit volumique, la vitesse de la surface libre de l'eau dans le réservoir est très faible devant la vitesse de sortie ; autrement dit, on a $\dot{h} \ll v_B$.

.....

**37.3** c) On néglige toute perte de charge, ce qui revient à dire que l'écoulement est parfait.

.....

**37.3** d) Le fluide est de l'eau liquide, qu'on peut considérer comme une phase condensée incompressible et indilatable, c'est à dire de masse volumique constante.

.....

**37.4** a) Le récipient est ouvert sur l'extérieur en A et en B, la pression est donc égale à la pression atmosphérique en ces deux points.

.....

**37.4** b) Le débit volumique est défini comme $D_v = \iint_S \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$. La réponse (b) est donc la seule correcte.

.....

**37.4** d) À partir de l'égalité des deux débits volumiques, on peut écrire $v_\mathrm{A} = \dfrac{s v_\mathrm{B}}{S}$. Comme $s \ll S$, on en déduit que $v_\mathrm{A} \ll v_\mathrm{B}$.

.....

**37.4** e) Avec les résultats des questions précédentes (égalité des pressions et vitesse négligeable en A), la relation de Bernoulli devient :

$$g z_\mathrm{A} = \frac{v_\mathrm{B}^2}{2} + g z_\mathrm{B}.$$

On obtient donc la réponse (a) avec $h(t) = z_\mathrm{A} - z_\mathrm{B}$.

.....

**37.5** a) La cote $z$ reste constante, les contributions de pesanteur $gz$ se compensent.

.....

**37.5** b) La vitesse $v$ est faible, les contributions cinétiques $\dfrac{v^2}{2}$ sont négligées.

.....

**37.5** c) On obtient $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}} \times 5 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}} = 0{,}99\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

.....

**37.6** a) Le débit volumique s'écrit : $D_v = SU$ avec $S$ la section de la canalisation. Soit $D_v = U\pi\dfrac{D^2}{4}$ d'où $D_v = 7{,}0\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \times \pi \times \dfrac{(10 \times 10^{-3}\,\mathrm{m})^2}{4} = 5{,}5 \times 10^{-4}\,\mathrm{m^3/s} = 0{,}55\,\mathrm{L \cdot s^{-1}}$

.....

**37.6** b) La vitesse en A avant la pompe étant négligeable et celle en B valant $U$, on a $\Delta v^2 = U^2$.

Avant la pompe et après le robinet, la pression vaut $P_0$, pression atmosphérique donc $\Delta P = 0$.

Le point B est situé à la distance $L$ au-dessus de A donc $\Delta z = L$. Dans le terme de droite, $w_u$ est le travail massique fourni par la pompe et $gh_\mathrm{pc} = \Delta e_\mathrm{pcr}$ est la perte d'énergie massique due aux pertes régulières le long du tuyau de longueur $L$.

La relation de Bernoulli s'écrit donc : $\dfrac{1}{2}U^2 + gL = w_u - \Delta e_\mathrm{pcr} = w_u - \dfrac{1}{2}\xi\dfrac{L}{D}U^2$.

.....

**37.6** c) La relation de Bernoulli donnée est un bilan d'énergie massique il faut le multiplier par une masse et le diviser par un temps pour obtenir une puissance c'est à dire multiplier par un débit massique.

.....

**37.6** d) On déduit de la première question : $w_u = \dfrac{1}{2}U^2 + gL + \dfrac{1}{2}\xi\dfrac{L}{D}U^2 = gL + \dfrac{1}{2}U^2\left(1 + \xi\dfrac{L}{D}\right)$.

Or, on a $\mathcal{P} = D_\mathrm{m} w_u = \mu D_v w_u$. Donc

$$\mathcal{P} = \mu D_v\left[\frac{1}{2}U^2 + gL + \frac{1}{2}\xi\frac{L}{D}U^2\right] = \mu D_v\left[gL + \frac{1}{2}U^2\left(1 + \xi\frac{L}{D}\right)\right].$$

L'application numérique donne $\mathcal{P} = 3{,}6 \times 10^2\,\mathrm{W}$.

.....

**37.6** e) Il faut que la puissance soit supérieure à $\mathcal{P} = 3{,}6 \times 10^2$ W, on prend donc la pompe ayant une puissance immédiatement supérieure.

.....

**37.7** a) On calcule la rugosité relative $\dfrac{\varepsilon}{D} = 0{,}02$ et on lit sur l'axe des ordonnées la valeur de $\xi$.

.....

**37.7** b) On a $\Delta P = \dfrac{1}{2}\rho U^2 \xi \dfrac{\ell}{D} = \dfrac{1}{2} \times 1 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}} \times \left(0{,}5\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}\right)^2 \times 0{,}05 \times \dfrac{10\,\mathrm{m}}{20 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}} = 3{,}1 \times 10^2\,\mathrm{Pa}$.

.....

**37.8** a) Comme le diamètre de tout le circuit est constant, on a : $U_1 = U_2 = \dfrac{D_v}{S} = \dfrac{4D_v}{\pi D^2}$.

.....

**37.8** b) Réécrivons la relation de Bernoulli entre le début du tuyau vertical et un point en aval du robinet en la rendant homogène à une pression :

$$\frac{1}{2}\mu\left(U^2 - U^2\right) + P_0 - P_i + g\mu(L - 0) = -\frac{1}{2}\mu U^2(k_1 + k_2).$$

Donc, on a $P_i = P_0 + g\mu L + \dfrac{1}{2}\mu U^2(k_1 + k_2)$.

.....

**37.9** a) La force volumique associée à la résultante des forces de pression s'écrit $\vec{f_p} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P$. La pression étant uniforme, la résultante des forces pressantes est nulle.

.....

**37.9** b) Les forces pressantes étant nulles, elles ne travaillent pas.

.....

**37.9** c) D'un point de vue énergétique, ce qui est fourni par un système est reçu par un autre.

.....

**37.9** d) La masse élémentaire $D_\mathrm{m}\,\mathrm{d}t$ sort à la vitesse $\vec{v_2}$ en aval pendant la durée $\mathrm{d}t$.

.....

**37.9** e) La masse élémentaire $D_\mathrm{m}\,\mathrm{d}t$ entre à la vitesse $\vec{v_1}$ en amont pendant la durée $\mathrm{d}t$.

.....

**37.9** f) En régime stationnaire la variation d'énergie cinétique est $\dfrac{1}{2}D_m(v_2^2 - v_1^2)\,\mathrm{d}t$. Le théorème de la puissance cinétique donne alors $\dfrac{1}{2}D_m(v_2^2 - v_1^2) = -\mathcal{P}$.

.....

**37.11** c) Le système (S*) étant fermé, sa masse ne varie pas, donc $\mathrm{d}m^* = 0$.

.....

**37.11** d) On a $\mathrm{d}m^* = m^*(t + dt) - m^*(t) = m(t + dt) + \mathrm{d}m_2 - m(t) - \mathrm{d}m_1 = 0$.

Comme $m(t + dt) = m(t)$ en régime stationnaire, il reste $\mathrm{d}m_1 = \mathrm{d}m_2$.

.....

**37.12** d) Dans le référentiel de la fusée, les gaz éjectés ont une vitesse nulle lorsqu'ils sont encore dans la fusée. Durant $\mathrm{d}t$, une masse $D_\mathrm{m}\,\mathrm{d}t$ est éjectée de la fusée à une vitesse $\vec{u}$. Ainsi, $\mathrm{d}\vec{p} = D_\mathrm{m}\,\mathrm{d}t\,\vec{u}$.

.....

**37.12** e) Les gaz éjectés subissent une force $-\vec{F}_P$ opposée à celle $\vec{F}_P$ de poussée subie par la fusée (troisième loi de Newton ou principe de l'action et de la réaction).

Le bilan de quantité de mouvement pour les gaz éjectés dans le référentiel de la fusée s'écrit : $\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = -\vec{F}_P$ avec

$\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = D_\mathrm{m}\vec{u}$. On obtient donc $\vec{F}_P = -D_\mathrm{m}\vec{u}$.

.....

**37.13** b) La quantité de mouvement de l'ensemble des photons est $N\vec{p}_{1\ \mathrm{photon}}$ où $N$ est le nombre de photons qui vont heurter la voile durant $\mathrm{d}t$.

.....

**37.13** d) Par application de la loi de la quantité de mouvement appliquée aux photons, on a

$$\vec{p}(t+\mathrm{d}t) - \vec{p}(t) = \vec{F}_{\mathrm{voile}\to\mathrm{photons}}\,\mathrm{d}t \qquad \text{donc} \qquad \vec{F}_{\mathrm{voile}\to\mathrm{photons}} = \frac{\vec{p}(t+\mathrm{d}t) - \vec{p}(t)}{\mathrm{d}t} = -2\frac{h}{\lambda}nSc\vec{e_x}.$$

Par application du principe des actions réciproques, on a $\vec{F}_{\mathrm{voile}\to\mathrm{photons}} = 2\dfrac{h}{\lambda}nSc\vec{e_x}$.

.....

**37.14** a) L'écoulement est unidimensionnel, la pression est donc uniforme sur toute section droite de la canalisation. En amont la force pressante est motrice.

.....

**37.14** b) L'écoulement est unidimensionnel, la pression est donc uniforme sur toute section droite de la canalisation. En aval la force pressante est résistante.

.....

**37.14** c) Il suffit d'invoquer le principe des actions réciproques (la troisième loi de Newton).

.....

**37.14** d) La masse élémentaire $D_\mathrm{m}\,\mathrm{d}t$ sort à la vitesse $\vec{v_2}$ en aval pendant la durée $\mathrm{d}t$.

.....

**37.14** e) La masse élémentaire $D_\mathrm{m}\,\mathrm{d}t$ entre à la vitesse $\vec{v_1}$ en amont pendant la durée $\mathrm{d}t$.

.....

**37.14** f) En régime stationnaire la variation de quantité de mouvement est $D_\mathrm{m}(\vec{v_2} - \vec{v_1})\,\mathrm{d}t$.

Le théorème de la quantité de mouvement donne alors $D_\mathrm{m}(\vec{v_2} - \vec{v_1}) = P_1S_1\vec{u}_x - P_2S_2\vec{u}_x - \vec{F}$ puisque $v_1$ et $v_2$ peuvent être négligées.

.....

# Fiche n° 38. Transformations chimiques

## Réponses

**38.1** a) ..... $-250\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$

**38.1** b) ..... $-130\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$

**38.1** c) ..... $-915\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$

**38.2** a) ..... $\alpha = -2$ et $\beta = 1$

**38.2** b) ..... $50{,}0\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$

**38.3** a) ..... $-44{,}5\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$

**38.3** b) ..... $-124\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$

**38.3** c) ..... $236\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$

**38.4** a) ..... $-236{,}7\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$

**38.4** b) ..... $3{,}15\cdot 10^{41}$

**38.4** c) ..... $-93{,}0\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$

**38.4** d) ..... $2{,}04\cdot 10^{16}$

**38.4** e) ..... $-911\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$

**38.4** f) ..... $4{,}89\cdot 10^{159}$

**38.5** a) ..... $-78\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$

**38.5** b) ..... $-123{,}5\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$

**38.6** a) ..... $-28\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$

**38.6** b) ..... $-99\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$

**38.6** c) ..... (d) et (e)

**38.6** d) ..... $-99\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$

**38.6** e) ..... $28\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$

**38.7** ..... (a), (c) et (d)

**38.8** a) ..... $-46{,}1\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$

**38.8** b) ..... $\ln\left(\dfrac{K_2^\circ}{K_1^\circ}\right) = \dfrac{\Delta_\mathrm{r}H^\circ}{R}\left(\dfrac{1}{T_1} - \dfrac{1}{T_2}\right)$

**38.8** c) ..... 0,42

**38.9** a) ..... (a), (b) et (d)

**38.9** b) .... $2\,\mathrm{C(s)} + 3\,\mathrm{H_2(g)} + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{O_2(g)} \rightarrow \mathrm{C_6H_5OH(\ell)}$

**38.9** c) .....

**38.9** d) .....

| C–C | C–H | C–O | O–H |
|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 1 | 1 |

**38.9** e) ..... $\Delta_\mathrm{f}H^\circ(\mathrm{C_2H_5OH}(\ell)) = -1{,}66\times 10^3\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$

**38.10** a) ..... (a), (c) et (d)

**38.10** b) ..... (d)

**38.10** c) ..... $-65\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$

**38.11** a) ..... (c) et (d)

**38.11** b) ..... $\Delta H_\mathrm{chi}$ pour (1)
$\Delta H_\mathrm{phy}$ pour (2)

**38.11** c) ..... $\Delta H_\mathrm{chi} = \Delta_\mathrm{r}H^\circ \times n_0$

**38.11** d) .. $\Delta H_\mathrm{phy} = (3C^\circ_{\mathrm{p,m,H_2O}} + 2C^\circ_{\mathrm{p,m,CO_2}})n_0(T_\mathrm{f} - T_\mathrm{i})$

**38.11** e) ..... $\Delta H = \Delta H_\mathrm{phy} + \Delta H_\mathrm{chi}$

**38.11** f) ..... 7 088 °C

**38.12** a) ..... (b)

**38.12** b) ..... (a)

**38.12** c) ..... (c)

**38.12** d) ..... (a)

**38.12** e) ..... (c)

**38.12** f) ..... $\boxed{\text{b}}$

**38.12** g) ..... $\boxed{\text{b}}$

**38.13** ..... $\boxed{\text{a}, \text{c}, \text{e} \text{ et } \text{f}}$

**38.14** a) ..... $\boxed{\alpha = -2 \text{ et } \beta = 2}$

**38.14** b) ..... $\boxed{-182\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}}$

**38.15** a) ..... $\boxed{\text{e}}$

**38.15** b) ..... $\boxed{-568\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}}$

**38.16** a) ..... $\boxed{-92\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}}$

**38.16** b) ..... $\boxed{\text{a}}$

**38.16** c) ..... $\boxed{-196\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}}$

**38.16** d) ..... $\boxed{-34\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}}$

**38.16** e) ..... $\boxed{7{,}7 \cdot 10^5}$

**38.16** f) ..... $\boxed{\text{a}}$

## Corrigés

**38.1** a) On applique la loi de Hess à l'enthalpie de réaction : on a

$$\begin{aligned}\Delta_\mathrm{r}H^\circ &= \Delta_\mathrm{f}H^\circ(\mathrm{H_2O\,(g)}) - \frac{1}{2} \times \Delta_\mathrm{f}H^\circ(\mathrm{O_2(g)}) - \Delta_\mathrm{f}H^\circ(\mathrm{H_2(g)})\\ &= -250\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}} - \frac{1}{2} \times 0\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}} = -250\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}.\end{aligned}$$

.....

**38.1** b) On applique la loi de Hess à l'enthalpie de réaction : on a

$$\begin{aligned}\Delta_\mathrm{r}H^\circ &= \Delta_\mathrm{f}H^\circ(\mathrm{CH_4(g)}) + \Delta_\mathrm{f}H^\circ(\mathrm{H_2O(\ell)}) - \Delta_\mathrm{f}H^\circ(\mathrm{CH_3OH(\ell)}) - \Delta_\mathrm{f}H^\circ(\mathrm{H_2(g)})\\ &= 1 \times \left(-70\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}\right) + 1 \times \left(-300\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}\right) - 1 \times \left(-240\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}\right) - 1 \times 0\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}\\ &= -130\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}.\end{aligned}$$

.....

**38.1** c) On applique la loi de Hess à l'enthalpie de réaction : on a

$$\begin{aligned}\Delta_\mathrm{r}H^\circ &= 2 \times \Delta_\mathrm{f}H^\circ(\mathrm{CO_2(g)}) + 2 \times \Delta_\mathrm{f}H^\circ(\mathrm{H_2O(\ell)}) - \Delta_\mathrm{f}H^\circ(\mathrm{CH_3COOH(\ell)}) - 2\Delta_\mathrm{f}H^\circ(\mathrm{O_2(g)})\\ &= 2 \times (-400\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}) + 2 \times (-300\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}) - (-485\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}})\\ &= -915\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}.\end{aligned}$$

.....

**38.2** a) La réaction (3) s'écrit comme combinaison linéaire des réactions (1) et (2) selon la relation

$$(3) = 1 \times (2) - 2 \times (1).$$

On a donc $\alpha = -2$ et $\beta = 1$.

.....

**38.2** b) On a $\Delta_\mathrm{r}H_3^\circ = -2 \times \Delta_\mathrm{r}H_1^\circ + \Delta_\mathrm{r}H_2^\circ$. Donc,

$$\Delta_\mathrm{r}H_3^\circ = -2 \times (-562{,}6\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}) + (-1\,075{,}2\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}) = 50{,}0\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}.$$

.....

**38.3** a) On applique la relation donnée à l'entropie : $\Delta_\mathrm{r}S^\circ = S_\mathrm{m}^\circ(\mathrm{H_2O\,(g)}) - S_\mathrm{m}^\circ(\mathrm{H_2(g)}) - \frac{1}{2}S_\mathrm{m}^\circ(\mathrm{O_2(g)})$. D'où

$$\Delta_\mathrm{r}S^\circ = 189\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}} - 131\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}} - \frac{205\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}}{2} = -44{,}5\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}.$$

.....

**38.3** b) On applique la relation donnée à l'entropie : on a

$$\Delta_r S^\circ = S^\circ_m(H_2O(\ell)) + S^\circ_m(CH_4(g)) - S^\circ_m(H_2(g)) - S^\circ_m(CH_3OH(\ell)).$$

Donc,

$$\Delta_r S^\circ = 65\,J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1} + 70\,J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1} - 131\,J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1} - 128\,J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1} = -124\,J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}.$$

---

**38.3** c) On applique la relation donnée à l'entropie : on a

$$\Delta_r S^\circ = 2\times S^\circ_m(H_2O(\ell)) + 2\times S^\circ_m(CO_2(g)) - S^\circ_m(CH_3COOH(\ell)) - 2\times S^\circ_m(O_2(g)).$$

Donc,

$$\begin{aligned}\Delta_r S^\circ &= 2\times 65\,J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1} + 2\times 214\,J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1} - 160\,J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1} - 2\times 205\,J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}\\ &= -12\,J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}.\end{aligned}$$

---

**38.4** a) On applique la relation donnée, avec $\Delta_r H^\circ_1 = -250\,kJ\cdot mol^{-1}$ et $\Delta_r S^\circ_1 = -44{,}5\,J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}$. On a

$$\Delta_r G^\circ_1 = \Delta_r H^\circ_1 - T\times\Delta_r S^\circ_1 = -250\,kJ\cdot mol^{-1} - 298\,K\times(-44{,}5\times10^{-3}\,kJ\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}) = -236{,}7\,kJ\cdot mol^{-1}.$$

---

**38.4** b) La constante d'équilibre s'exprime par la relation $\Delta_r G^\circ_1 = -RT\ln K^\circ_1$. Donc,

$$K^\circ_1 = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^\circ_1}{RT}\right) = \exp\left(\frac{236{,}7\times10^3\,J\cdot mol^{-1}}{8{,}314\,J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}\times298\,K}\right) = 3{,}15\cdot10^{41}.$$

---

**38.4** c) On applique la relation donnée, avec $\Delta_r H^\circ_2 = -130\,kJ\cdot mol^{-1}$ et $\Delta_r S^\circ_2 = -124\,J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}$. On a

$$\Delta_r G^\circ_2 = \Delta_r H^\circ_2 - T\times\Delta_r S^\circ_2 = -130\,kJ\cdot mol^{-1} - 298\,K\times(-124\times10^{-3}\,kJ\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}) = -93{,}0\,kJ\cdot mol^{-1}.$$

---

**38.4** d) La constante d'équilibre s'exprime par la relation $\Delta_r G^\circ_2 = -RT\ln K^\circ_2$. Donc,

$$K^\circ_2 = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^\circ_2}{RT}\right) = \exp\left(\frac{93{,}0\times10^3\,J\cdot mol^{-1}}{8{,}314\,J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}\times298\,K}\right) = 2{,}04\cdot10^{16}.$$

---

**38.4** e) On applique la relation donnée, avec $\Delta_r H^\circ_3 = -915\,kJ\cdot mol^{-1}$ et $\Delta_r S^\circ_3 = -12\,J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}$. On a

$$\Delta_r G^\circ_3 = \Delta_r H^\circ_3 - T\times\Delta_r S^\circ_3 = -915\,kJ\cdot mol^{-1} + 298\,K\times12\times10^{-3}\,kJ\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1} = -911\,kJ\cdot mol^{-1}.$$

---

**38.4** f) La constante d'équilibre s'exprime par la relation $\Delta_r G^\circ_3 = -RT\ln K^\circ_3$. Donc,

$$K^\circ_3 = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^\circ_3}{RT}\right) = \exp\left(\frac{911\times10^3\,J\cdot mol^{-1}}{8{,}314\,J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}\times298\,K}\right) = 4{,}89\cdot10^{159}.$$

---

**38.5** a) La loi de Hess généralisée appliquée à l'enthalpie libre donne la relation :

$$\Delta_r G^\circ = 2\times\Delta_f G^\circ(H_2O) + 2\times\Delta_f G^\circ(C\ell_2) - \Delta_f G^\circ(O_2) - 4\times\Delta_f G^\circ(HC\ell).$$

Donc,

$$\Delta_r G^\circ = 2\times-229\,kJ\cdot mol^{-1} + 2\times0\,kJ\cdot mol^{-1} - 0\,kJ\cdot mol^{-1} - 4\times(-95\,kJ\cdot mol^{-1}) = -78\,kJ\cdot mol^{-1}.$$

---

**38.5** b) On a $\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T\Delta_r S^\circ$. Donc,

$$\Delta_r S^\circ = \frac{\Delta_r H^\circ - \Delta_r G^\circ}{T} = \frac{-114{,}8\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}} + 78{,}0\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}}{298\,\mathrm{K}} = -123{,}5\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}.$$

.....

**38.6** a) On détermine graphiquement le coefficient directeur $a$ en prenant deux points, par exemple le point A(600 ; −115, 5) et le point B(300 ; −107). Ainsi, on a

$$a = \frac{\Delta_r G^\circ(\mathrm{A}) - \Delta_r G^\circ(\mathrm{B})}{T(\mathrm{A}) - T(\mathrm{B})} = \frac{(-115,5 + 107)\times 10^3\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}}{600 - 300\,\mathrm{K}} = -28\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}.$$

.....

**38.6** b) L'équation est de la forme $y = ax + b$, avec $a = -28\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$. On détermine graphiquement l'ordonnée à l'origine $b$ en choisissant un point particulier, par exemple le point B(300 ; −107).

On a donc $b = \Delta_r G^\circ(\mathrm{B}) - a\cdot T(\mathrm{B})$. Donc,

$$b = -107\times 10^3\,\mathrm{J\cdot mol^{-1}} + 28\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}\times 300\,\mathrm{K} = -99\times 10^3\,\mathrm{J\cdot mol^{-1}}.$$

.....

**38.6** c) On a $\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T\Delta_r S^\circ$ et on suppose l'approximation d'Ellingham vérifiée. Donc, le coefficient directeur de la droite représentant $\Delta_r G^\circ$ en fonction de $T$ est $-\Delta_r S^\circ$ et l'ordonnée à l'origine est $\Delta_r H^\circ$.

.....

**38.6** d) D'après les questions précédentes, on a $\Delta_r H^\circ = b = -99\times 10^3\,\mathrm{J\cdot mol^{-1}} = -99\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$.

.....

**38.6** e) D'après les questions précédentes, on a $a = -\Delta_r S^\circ$ donc $\Delta_r S^\circ = -a = 28\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$.

.....

**38.7** Une constante d'équilibre est sans dimension, les enthalpies libres standard de réaction et les enthalpies standard de réaction s'expriment en $\mathrm{J\cdot mol^{-1}}$, les entropies standard de réaction s'expriment en $\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$, $T$ s'exprime en K et $R$ en $\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$. Les expressions homogènes sont donc (a), (c) et (d).

.....

**38.8** a) On a $\Delta_r H^\circ = \Delta_f H^\circ(\mathrm{NH_3(g)}) = -46{,}1\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$.

.....

**38.8** b) Par intégration de la relation de van 't Hoff, on obtient $\ln K_2^\circ - \ln K_1^\circ = -\dfrac{\Delta_r H^\circ}{RT_2} - \left(-\dfrac{\Delta_r H^\circ}{RT_1}\right)$, ou encore $\ln\left(\dfrac{K_2^\circ}{K_1^\circ}\right) = \dfrac{\Delta_r H^\circ}{R}\left(\dfrac{1}{T_1} - \dfrac{1}{T_2}\right)$.

.....

**38.8** c) D'après l'expression intégrée de la relation de van 't Hoff, $\ln\left(\dfrac{K_2^\circ}{K_1^\circ}\right) = \dfrac{\Delta_r H^\circ}{R}\left(\dfrac{1}{T_1} - \dfrac{1}{T_2}\right)$, on en déduit donc $K_2^\circ = K_1^\circ \times \exp\left(\dfrac{\Delta_r H^\circ}{R}\left(\dfrac{1}{T_1} - \dfrac{1}{T_2}\right)\right) = 6{,}8\times\exp\left(\dfrac{-46{,}1\times 10^3\,\mathrm{J\cdot mol^{-1}}}{8{,}314\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}}\left(\dfrac{1}{400\,\mathrm{K}} - \dfrac{1}{500\,\mathrm{K}}\right)\right) = 0{,}42.$

.....

**38.9** a) La réaction de formation d'un corps est définie à partir de ses éléments pris dans leur état standard sous forme de corps simples (constitués d'un seul élément). L'éthanol étant constitué de carbone, d'hydrogène et d'oxygène, sont impliqués dans sa formation le carbone C(s), le dihydrogène $\mathrm{H_2(g)}$ et le dioxygène $\mathrm{O_2(g)}$.

.....

**38.9** b) On considère la formation d'une mole d'éthanol $\mathrm{C_2H_5OH}(\ell)$, constitué de 2 atomes de carbone, 6 atomes d'hydrogène et 1 atome de carbone. Pour ce faire, il faut donc 2 moles de carbone C(s), 3 moles de dihydrogène $\mathrm{H_2(g)}$ et $\dfrac{1}{2}$ mole de dioxygène $\mathrm{O_2(g)}$.

La réaction de formation de l'éthanol est donc : $2\,\mathrm{C(s)} + 3\,\mathrm{H_2(g)} + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{O_2(g)} \longrightarrow \mathrm{C_6H_5OH}(\ell)$.

.....

**38.9** c) Le schéma de Lewis de l'éthanol est : .

**38.9** d) Le schéma de Lewis précédent montre que l'éthanol est constitué de cinq liaisons C−H, une liaison C−C, une liaison C−O et une liaison O−H.

**38.9** e) On exprime l'enthalpie standard de formation de l'éthanol liquide en sommant les énergies des liaisons rompues et en retranchant les énergies des liaisons formées : on a

$$\begin{aligned}\Delta_\mathrm{f}H^\circ(\mathrm{C_2H_5OH}(\ell)) &= 3\times E_{\mathrm{H-H}} + \frac{1}{2}\times E_{\mathrm{O=O}} - (5\times E_{\mathrm{C-H}} + E_{\mathrm{C-C}} + E_{\mathrm{C-O}} + E_{\mathrm{O-H}})\\ &= 3\times 435 + \frac{1}{2}\times 502 - (5\times 411 + 346 + 358 + 459) = -1{,}66\times 10^3\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}.\end{aligned}$$

**38.10** a) Par définition, l'énergie de liaison est l'énergie à fournir pour rompre une liaison donnée (ou une mole de cette liaison) : (a). La réponse (b) est fausse car la formation d'une mole de $N_2$(g) à partir de deux moles de N (g) libère une énergie égale à $\mathcal{E}(\mathrm{N{\equiv}N})$. Les réponses (c) et (d) sont exactes d'après la définition donnée.

**38.10** b) Lors de l'étape (1), on forme deux moles d'ammoniac liquide donc $(1) = 2\times\Delta_\mathrm{f}H^\circ(\mathrm{NH_3}(\ell))$.

Lors de l'étape (2), on forme deux moles d'ammoniac liquide à partir d'ammoniac gazeux donc cette liquéfaction (inverse de la vaporisation) libère une énergie égale à $-2\times\Delta_\mathrm{vap}H^\circ(\mathrm{NH_3}(\ell))$ : $(2) = -2\times\Delta_\mathrm{vap}H^\circ(\mathrm{NH_3}(\ell))$. C'est donc la réponse (d) qui est correcte.

**38.10** c) On utilise le cycle pour écrire une égalité entre l'énergie du chemin (1) et celle du chemin (2)→(3)→(4) : on a ainsi

$$\begin{aligned}2\times\Delta_\mathrm{f}H^\circ(\mathrm{NH_3}(\ell)) &= \mathcal{E}(\mathrm{N{\equiv}N}) + 3\times\mathcal{E}(\mathrm{H{-}H}) - 6\times\mathcal{E}(\mathrm{N{-}H}) - 2\times\Delta_\mathrm{vap}H^\circ(\mathrm{NH_3}(\ell))\\ &= 960 + 3\times 450 - 6\times 400 - 2\times 20 = -130\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}.\end{aligned}$$

Donc, $\Delta_\mathrm{f}H^\circ(\mathrm{NH_3}(\ell)) = -65\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$.

**38.11** a) Lors d'une transformation monobare, la pression initiale du système est égale à la pression finale mais elle peut varier durant la transformation : la réponse (a) est donc fausse. Lors d'une transformation adiabatique, le système n'échange de chaleur avec l'extérieur mais la température peut tout de même varier : la réponse (b) est donc fausse mais la réponse (c) est exacte. Enfin, pour une transformation adiabatique et monobare, la variation d'enthalpie du système est nulle : la réponse (d) est exacte.

**38.11** b) L'étape (1) correspond au passage des réactifs aux produits mais sans variation de température : c'est donc une transformation chimique isotherme, dont la variation d'enthalpie est $\Delta H_\mathrm{chi}$. L'étape (2) correspond à l'évolution de la température du système de la température $T_\mathrm{i}$ à la température $T_\mathrm{f}$, sans modification de l'avancement. La variation d'enthalpie est donc $\Delta H_\mathrm{phy}$.

**38.11** c) On a $\Delta H_\mathrm{chi} = \displaystyle\int_0^{n_0} \Delta_\mathrm{r}H\,\mathrm{d}\xi \approx \Delta_\mathrm{r}H^\circ\times n_0$.

**38.11** d) On a $\Delta H_\mathrm{phy} = \displaystyle\int_{T_\mathrm{i}}^{T_\mathrm{f}} C_\mathrm{p}\,\mathrm{d}T$ avec $C_\mathrm{p} = \displaystyle\sum_k n_k\times C^\circ_{\mathrm{p,m},k} = 3n_0\times C^\circ_{\mathrm{p,m,H_2O(g)}} + 2n_0\times C^\circ_{\mathrm{p,m,CO_2(g)}}$.

On obtient donc

$$\Delta H_\mathrm{phy} = \int_{T_\mathrm{i}}^{T_\mathrm{f}} (3n_0\times C^\circ_{\mathrm{p,m,H_2O(g)}} + 2n_0\times C^\circ_{\mathrm{p,m,CO_2(g)}})\,\mathrm{d}T = (3C^\circ_{\mathrm{p,m,H_2O(g)}} + 2C^\circ_{\mathrm{p,m,CO_2(g)}})\times n_0\times(T_\mathrm{f} - T_\mathrm{i}).$$

**38.11** e) On a $\Delta H = \Delta H_{\text{phy}} + \Delta H_{\text{chi}}$.

.....

**38.11** f) On a $\Delta H = \Delta H_{\text{phy}} + \Delta H_{\text{chi}} = (3C^\circ_{\text{p,m,H}_2\text{O(g)}} + 2C^\circ_{\text{p,m,CO}_2\text{(g)}})n_0(T_\text{f} - T_\text{i}) + \Delta_\text{r}H^\circ \times n_0 = 0$. On en déduit que $T_\text{f} - T_\text{i} = -\dfrac{\Delta_\text{r}H^\circ}{3C^\circ_{\text{p,m,H}_2\text{O(g)}} + 2C^\circ_{\text{p,m,CO}_2\text{(g)}}}$, soit $T_\text{f} = T_\text{i} - \dfrac{\Delta_\text{r}H^\circ}{3C^\circ_{\text{p,m,H}_2\text{O(g)}} + 2C^\circ_{\text{p,m,CO}_2\text{(g)}}}$.

L'application numérique donne $T_\text{f} = 25\,°\text{C} + \dfrac{1\,236 \times 10^3\ \text{J}\cdot\text{mol}^{-1}}{3 \times 33{,}6\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1} + 2 \times 37{,}1\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}} = 7\,088\,°\text{C}$.

.....

**38.12** a) Une transformation endothermique est favorisée par une augmentation de la température : (b).

.....

**38.12** b) Par définition du quotient de réaction pour des espèces chimiques en phase gazeuse : on a

$$Q = \frac{P^3_{\text{H}_2} \times P_\text{CO}}{P_{\text{CH}_4} \times P_{\text{H}_2\text{O}} \times (P^\circ)^2} = \frac{x^3_{\text{H}_2} \times x_\text{CO}}{x_{\text{CH}_4} \times x_{\text{H}_2\text{O}}} \times \left(\frac{P_\text{tot}}{P^\circ}\right)^2.$$

Ainsi, seule l'expression de la réponse (a) est correcte.

.....

**38.12** c) Une augmentation isotherme de la pression totale entraîne une augmentation de la valeur du quotient de réaction $Q$. Pour retrouver l'état d'équilibre, $Q$ doit diminuer, la réaction évolue donc dans le sens de la diminution de la quantité de matière de gaz, soit le sens inverse : (c).

.....

**38.12** d) Par définition du quotient de réaction pour des espèces chimiques en phase gazeuse : on a

$$Q = \frac{P^3_{\text{H}_2} \times P_\text{CO}}{P_{\text{CH}_4} \times P_{\text{H}_2\text{O}} \times (P^\circ)^2} = \frac{x^3_{\text{H}_2} \times x_\text{CO}}{x_{\text{CH}_4} \times x_{\text{H}_2\text{O}}} \times \left(\frac{P_\text{tot}}{P^\circ}\right)^2.$$

En remplaçant pour chaque constituant la fraction molaire $x_i$ par $\dfrac{n_i}{n_\text{tot}}$, on obtient

$$Q = \frac{n^3_{\text{H}_2} \times n_\text{CO}}{n_{\text{CH}_4} \times n_{\text{H}_2\text{O}} \times n^2_\text{tot}} \times \left(\frac{P_\text{tot}}{P^\circ}\right)^2.$$

Seule l'expression de la réponse (a) est correcte.

.....

**38.12** e) D'après l'expression du quotient de réaction, l'ajout de dihydrogène fait augmenter $n_{\text{H}_2}$ mais aussi $n_\text{tot}$. L'augmentation de $n_{\text{H}_2}$ étant plus importante que celle de $n_\text{tot}$, cela mène à une augmentation du quotient de réaction. Le retour à l'état d'équilibre implique que le quotient de réaction diminue, l'évolution se fait donc dans le sens inverse : (c).

.....

**38.12** f) D'après l'expression du quotient de réaction, l'ajout d'eau fait augmenter $n_{\text{H}_2\text{O}}$ et $n_\text{tot}$, qui apparaissent tous les deux au dénominateur, donc cela mène à une diminution du quotient de réaction. le retour à l'état d'équilibre implique que le quotient de réaction augmente, l'évolution se fait dans le sens direct : (b).

.....

**38.12** g) Le diazote est spectateur donc son ajout ne participe qu'à l'augmentation de la quantité de matière totale d'espèces gazeuses $n_\text{tot}$ : cela mène à une diminution du quotient de réaction. Le retour à l'état d'équilibre implique que le quotient de réaction augmente, l'évolution se fait dans le sens direct : (b).

.....

**38.13** Un corps simple est une substance chimique qui n'est composée que d'un type d'élément chimique : c'est le cas de $O_2(g)$, $H_2(\ell)$, $N_2(g)$, $Fe(\ell)$, $C(s)$ et $I_2(s)$. L'état standard de référence d'un élément est l'état standard du corps simple le plus stable, dans son état le plus stable à la température considérée et à la pression standard. Ce n'est pas le cas pour $H_2(\ell)$ et $Fe(\ell)$.

.....

**38.14** a) On a $(3) = 2 \times (2) - 2 \times (1)$ donc $\alpha = -2$ et $\beta = 1$.

.....

**38.14** b) On a $\Delta_r H_3^\circ = -2 \times \Delta_r H_1^\circ + 2 \times \Delta_r H_2^\circ$ donc

$$\Delta_r H_3^\circ = -2 \times (-191\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}) + 2 \times (-282\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}) = -182\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}.$$

.....

**38.15** a) D'après l'équation de la réaction, deux molécules d'eau sont formées. L'enthalpie standard de la réaction de synthèse de l'eau est donc égale à $\Delta_r H^\circ = 2 \times \Delta_r H^\circ(H_2O(\ell)) = 2 \times (-285\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}) = -570\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}$.
La réponse (e) est correcte.

.....

**38.15** b) D'après la loi de Kirchhoff, on a

$$\begin{aligned}\Delta_r H^\circ(323\,\mathrm{K}) &= \Delta_r H^\circ(298\,\mathrm{K}) + \int_{298\,\mathrm{K}}^{323\,\mathrm{K}} \big(2 \times C_{p,m}^\circ(H_2O(\ell)) - 2 \times C_{p,m}^\circ(H_2(g)) - C_{p,m}^\circ(O_2(g))\big)\mathrm{d}T \\ &= -570\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}} + (2 \times 75{,}3 - 2 \times 28{,}8 - 29{,}4) \times 10^{-3}\,\mathrm{kJ \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}} \times (323 - 298)\mathrm{K} \\ &= -568\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}.\end{aligned}$$

.....

**38.16** a) D'après la loi de Hess, on a $\Delta_r H^\circ = 2 \times \Delta_f H^\circ(NH_3(g)) - \Delta_f H^\circ(N_2(g)) - 3 \times \Delta_f H^\circ(H_2(g))$.

Donc, $\Delta_r H^\circ = 2 \times -46\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}} - 0\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}} = -92\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}$.

.....

**38.16** b) On a $\Delta_r H^\circ < 0$ donc la transformation est exothermique : réponse (a).

.....

**38.16** c) On calcule l'entropie standard de réaction à partir des entropies molaires : on a

$$\begin{aligned}\Delta_r S^\circ &= 2 \times S_m^\circ(NH_3(g)) - S_m^\circ(N_2(g)) - 3 \times S_m^\circ(H_2(g)) \\ &= 2 \times 192\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}} - 190\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}} - 3 \times 130\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}} \\ &= -196\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}.\end{aligned}$$

.....

**38.16** d) L'enthalpie libre standard de la réaction $\Delta_r G^\circ$ est définie par : $\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T \times \Delta_r S^\circ$.

Donc, $\Delta_r G^\circ = -92\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}} + 298\,\mathrm{K} \times 196 \times 10^{-3}\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}} = -34\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}$.

.....

**38.16** e) La constante d'équilibre $K^\circ$ de la réaction est définie par rapport à l'enthalpie libre standard selon la relation $\Delta_r G^\circ = -RT \ln K^\circ$, soit $K^\circ = \exp\left(-\dfrac{\Delta_r G^\circ}{RT}\right) = \exp\left(\dfrac{34 \times 10^3\,\mathrm{J \cdot mol^{-1}}}{8{,}314\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}} \times 298\,\mathrm{K}}\right) = 7{,}7 \cdot 10^5$.

.....

**38.16** f) Une augmentation de pression isotherme déplace l'équilibre dans le sens de la diminution du nombre de moles de gaz. Il y en a 4 moles dans les réactifs, 2 moles dans les produits, donc la réaction est bien déplacée dans le sens direct : la réponse (a) est exacte. Une augmentation de température isobare déplace l'équilibre dans le sens endothermique, donc le sens inverse : la réponse (b) est fausse.

.....

# Fiche n° 39. Courbes intensité-potentiel

## Réponses

**39.1** a) ..... $10^{-3}$ mol/L

**39.1** b) ..... 0 V

**39.2** a) ..... a

**39.2** b) ..... b

**39.2** c) ..... Cu

**39.2** d) ..... $Cu^{2+}$

**39.3** a) ..... Oxydation

**39.3** b) ..... a

**39.3** c) ..... Réduction

**39.3** d) ..... b

**39.4** ..... a

**39.5** a) ..... 0,4 V

**39.5** b) ..... −0,3 V

**39.5** c) ..... 0,2 V

**39.5** d) ..... −0,1 V

**39.6** a) ..... lent

**39.6** b) ... $HSO_4^- + 3\,H^+ + 2\,e^- = SO_2 + 2\,H_2O$

**39.6** c) ..... −0,14 V

**39.6** d) ..... 0,34 V

**39.6** e) ..... −0,36 V

**39.7** a) ..... a

**39.7** b) ..... d

**39.7** c) ..... c

**39.7** d) ..... a et b

**39.7** e) ..... a

**39.8** a) ..... c

**39.8** b) ..... −0,3 mA

**39.8** c) ..... −0,03 mA

**39.9** a) ..... $2\,Cl^- \rightarrow Cl_2 + 2\,e^-$

**39.9** b) ..... $2\,H_2O \rightarrow O_2 + 4\,H^+ + 4\,e^-$

**39.10** a) ... $2\,IO_3^- + 12\,H^+ + 10\,e^- = I_2 + 6\,H_2O$

**39.10** b) ..... 3

**39.10** c) ..... 6

**39.10** d) ..... 2 et 7

**39.10** e) ..... 0,15 V

**39.10** f) ..... −0,26 V

**39.10** g) ..... a et c

## Corrigés

**39.1** a) La demi-équation électronique du couple rédox $Cu^{2+}/Cu$ s'écrit $Cu^{2+} + 2\,e^- = Cu$. Le potentiel de l'électrode de travail à courant nul s'identifie au potentiel de Nernst à savoir :

$$E_{ab} = E^\circ_{Cu^{2+}/Cu} + \frac{0,06}{2}\log\left(\frac{[Cu^{2+}]}{C^\circ}\right) = E^\circ_{Cu^{2+}/Cu} + \frac{0,06}{2}\log\left(\frac{C}{C^\circ}\right).$$

Sur le graphique, nous lisons $E_{ab} = 0,25$ V. Nous obtenons donc :

$$C = C^\circ \times 10^{\frac{2(E_{ab}-E^\circ)}{0,06}} = 1\,\text{mol/L} \times 10^{\frac{2(0,25\,\text{V}-0,34\,\text{V})}{0,06\,\text{V}}} = 10^{-3}\,\text{mol/L}.$$

.....

**39.1** b) La tension lue au voltmètre est $U = E_{Cu^{2+}/Cu} - E_{ECS} = 0{,}25\,V - 0{,}25\,V = 0\,V$.

**39.2** a) Plus le potentiel est faible plus le milieu est réducteur. Le domaine ① est le domaine du réducteur.

**39.2** b) Plus le potentiel est élevé, plus le milieu est oxydant. Le domaine ② est le domaine de l'oxydant.

**39.2** c) Dans $Cu^{2+}/Cu$, Cu est le réducteur. L'espèce $A$ appartient au domaine du réducteur : c'est Cu.

**39.2** d) Dans $Cu^{2+}/Cu$, $Cu^{2+}$ est l'oxydant. L'espèce $B$ appartient au domaine de l'oxydant : c'est $Cu^{2+}$.

**39.3** a) Au niveau de l'anode se produit une oxydation. La réaction est alors : $Fe \rightarrow Fe^{2+} + 2\,e^-$.

**39.3** c) Au niveau de la cathode se produit une réduction. La réaction est alors : $Fe^{2+} + 2\,e^- \rightarrow Fe$.

**39.4** On considère la réaction $Fe^{3+} + e^- \rightarrow Fe^{2+}$.

Comme $Fe^{2+}$ est le réducteur, il est à droite de la courbe ; comme $Fe^{3+}$ est l'oxydant, il est à gauche de la courbe.

Au niveau de la partie anodique de la courbe ($i > 0$), une oxydation est observée. La flèche va donc du réducteur vers l'oxydant. Au niveau de la partie cathodique de la courbe ($i < 0$), une réduction est observée. La flèche va donc de l'oxydant vers le réducteur. Seule la figure ⓐ convient.

**39.5** a) On a $E(20\,mA) = 0{,}6\,V$ et $E_{ab} = 0{,}2\,V$. Nous avons donc $\eta_a = E(20\,mA) - E_{ab} = 0{,}4\,V$.

**39.5** b) On a $E(-20\,mA) = -0{,}1\,V$ et $E_{ab} = 0{,}2\,V$. Nous avons donc $\eta_c = E(-20\,mA) - E_{ab} = -0{,}3\,V$.

**39.5** c) On a $\lim\limits_{i_0 \to 0^+} E(i_0) = 0{,}4\,V$ et $E_{ab} = 0{,}2\,V$. Nous avons donc $\eta_a = 0{,}2\,V$.

**39.5** d) On a $\lim\limits_{i'_0 \to 0^-} E(i'_0) = 0{,}1\,V$ et $E_{ab} = 0{,}2\,V$. Nous avons donc $\eta_c = -0{,}1\,V$.

**39.6** a) On a $V_{ox} \neq V_{red}$ ; le couple est donc lent.

**39.6** c) On a $E(HSO_4{}^-/SO_2) = E^\circ(HSO_4{}^-/SO_2) + \dfrac{0{,}06}{2}\log\left(\dfrac{[HSO_4{}^-][H^+]^3}{[SO_2].C^{\circ\,3}}\right)$. Ainsi,

$$E(HSO_4{}^-/SO_2) = 0{,}16\,V + 0{,}03\,V \cdot \log\left(\frac{10^{-1}\,mol/L \cdot (10^{-4}\,mol/L)^3}{10^{-3}\,mol/L \cdot (1\,mol/L)^3}\right) = -0{,}14\,V.$$

**39.6** d) Le surpotentiel anodique s'écrit $\eta_a = V_{ox} - E(HSO_4{}^-/SO_2) = 0{,}2\,V - (-0{,}14\,V) = 0{,}34\,V$.

**39.6** e) Le surpotentiel cathodique s'écrit : $\eta_c = V_{red} - E(HSO_4{}^-/SO_2) = -0{,}5\,V - (-0{,}14\,V) = -0{,}36\,V$.

**39.7** a) Le courant est non nul donc on a réaction. Il est négatif donc on a une réduction. La seule réduction proposée est $H^+ \longrightarrow H_2$.

**39.7** b) Le courant est nul donc absence de réaction. Pour un palier, la cinétique est limitée toutefois une réaction est observée. Le courant est donc non nul.

**39.7** c) Le courant est non nul donc une réaction se déroule. Il est positif donc on a une oxydation. La seule réduction proposée est $H_2O \longrightarrow O_2$.

.....

**39.7** d) On ne peut observer que les couples dont les potentiels que l'on suppose voisin du potentiel standard se trouve entre les « murs du solvant » donc entre $-0{,}25\,\mathrm{V}$ et $1{,}5\,\mathrm{V}$.

.....

**39.7** e) D'après la question précédente, on ne peut pas observer les couples (c) et (d). Le couple est visiblement rapide et on n'observe pas de palier de diffusion en oxydation. C'est donc un métal qui s'oxyde. La seule réponse possible est donc (a).

.....

**39.8** a) Les seules espèces qui ne sont pas soumises au phénomène de diffusion sont le solvant ($H_2O$ et $H^+$) et le métal constituant l'électrode. Dans la liste seul $Cu^{2+}$ peut être soumis au phénomène de diffusion.

.....

**39.8** b) Le courant de diffusion est lu au niveau du palier horizontal sur la courbe $i$-$E$ : $i_{\mathrm{diff}} = -0{,}3\,\mathrm{mA}$.

.....

**39.8** c) Si on dilue la solution d'un facteur 10 alors [réactif] est divisé par 10 donc $i_{\mathrm{diff}}$ également d'après la relation $i_{\mathrm{diff}} = nKS[\text{réactif}]$.

.....

**39.9** a) Le courant est positif donc on a une oxydation. De plus, on a un palier de diffusion donc ce ne peut pas être l'oxydation du solvant. La réponse est $2\,Cl^- \rightarrow Cl_2 + 2\,e^-$.

.....

**39.9** b) L'autre oxydation possible est l'oxydation de l'eau qui est le solvant. De plus, on n'observe pas de palier de diffusion. La réponse est $2\,H_2O \rightarrow O_2 + 4\,H^+ + 4\,e^-$.

.....

**39.10** b) La flèche $IO_3{}^- \longrightarrow I_2$ correspond à la réaction de réduction de $IO_3{}^-$ en $I_2$. Cette réaction s'observe sur la partie cathodique de la courbe. En partant du potentiel à l'abandon $E_{\mathrm{ab}} = E(IO_3{}^-/I_2) = 1{,}19\,\mathrm{V}$, le courant cathodique devient non nul pour $E < 0{,}93\,\mathrm{V}$ . La partie de la courbe correspondant à la réduction de $IO_3{}^-$ en $I_2$ est donc la partie ③.

.....

**39.10** c) La flèche $I_2 \longrightarrow IO_3{}^-$ correspond à la réaction d'oxydation de $I_2$ en $IO_3{}^-$. Cette réaction s'observe sur la partie anodique de la courbe. En partant du potentiel à l'abandon $E_{\mathrm{ab}} = E(IO_3{}^-/I_2) = 1{,}19\,\mathrm{V}$, le courant anodique devient non nul pour $E > 1{,}34\,\mathrm{V}$ . La partie de la courbe correspondant à l'oxydation de $I_2$ en $IO_3{}^-$ est donc la partie ⑥.

.....

**39.10** d) Les paliers de diffusion s'observent sur les parties ② et ⑦.

.....

**39.10** e) Sans information, on fait l'approximation $E = E^\circ$ pour le couple $IO_3{}^-/I_2$. Le surpotentiel (ou surtension) anodique est égal à $1{,}34\,\mathrm{V} - 1{,}19\,\mathrm{V} = 0{,}15\,\mathrm{V}$.

.....

**39.10** f) Sans information, on fait l'approximation $E = E^\circ$ pour le couple $IO_3{}^-/I_2$. Le surpotentiel (ou surtension) cathodique est égal à $0{,}93\,\mathrm{V} - 1{,}19\,\mathrm{V} = -0{,}26\,\mathrm{V}$.

.....

**39.10** g) Ce sont les murs du solvant ou fronts du solvant. Les deux expressions sont couramment utilisées. Le solvant est ici l'eau.

.....

# Fiche n° 40. Phénomène de corrosion

## Réponses

**40.1** a) ..... b

**40.1** b) ..... b

**40.1** c) ..... a

**40.1** d) ..... 60 mC

**40.1** e) ..... 0,20 µg

**40.2** a) ..... $O_2/H_2O$

**40.2** b) ..... a

**40.2** c) ..... e

**40.2** d) ..... 0,99 V

**40.2** e) ..... 0,36 V

**40.3** a) ..... c

**40.3** b) ..... $5 \times 10^{-6}$ mol

**40.3** c) ..... d

**40.3** d) ..... 1,9 C

**40.4** a) ..... b

**40.4** b) ..... b

**40.4** c) ..... c

**40.4** d) ..... b, d

**40.5** a) ..... Zn

**40.5** b) ..... $O_2$

**40.5** c) .... $2\,Zn + O_2 + 2\,H_2O = 2\,Zn^{2+} + 4\,HO^-$

**40.5** d) ..... a

**40.5** e) ..... a

**40.6** a) ..... $E^\circ_{Mg^{2+}/Mg} + 0{,}03 \log\left(\frac{[Mg^{2+}]}{C^\circ}\right)$

**40.6** b) ..... $-2{,}55$ V

**40.6** c) ..... $E^\circ_{H^+/H_2} - 0{,}06\,\mathrm{pH} - 0{,}03 \log \frac{p_{H_2}}{p^\circ}$

**40.6** d) ..... $-0{,}24$ V

**40.6** e) ..... a

**40.6** f) ..... oui

**40.7** a) ..... Le zinc

**40.7** b) ..... a

**40.7** c) ..... b

**40.7** d) ..... Le fer

**40.7** e) ..... d

**40.8** a) ..... $Mg + 2\,H^+ = Mg^{2+} + H_2$

**40.8** b) ..... $-1$ V

**40.8** c) ..... $2n\mathcal{F}$

**40.8** d) ..... 7,8 C

**40.8** e) ..... 13 mA

**40.9** a) ..... 2

**40.9** b) ..... $2M_{Fe}\frac{d\xi}{dt}$

**40.9** c) ..... d

**40.10** a) ..... $\frac{2\mathcal{F}m_0}{i_{corr}M_{Cu}}$

**40.10** b) ..... b

**40.10** c) ..... non

## Corrigés

**40.1** a) Le courant circule de l'électrode de cuivre vers l'électrode de zinc. Les électrons sont donc produits au niveau de l'électrode de zinc et migrent vers l'électrode de cuivre pour y être consommés.

**40.1** b) La cathode est donc l'électrode de cuivre, lieu de la réduction : on a $Cu^{2+} + 2\ e^- = Cu$.

**40.1** c) Le sens du courant permet de comprendre que le zinc s'oxyde. Nous observerons la réaction suivante : $Zn = Zn^{2+} + 2\ e^-$.

**40.1** d) D'après la définition du courant, on a $I = \dfrac{Q}{\tau}$ et donc $Q = I \times \tau = 100 \times 10^{-6}\,\mathrm{A} \times 10 \times 60\,\mathrm{s} = 60\,\mathrm{mC}$.

**40.1** e) La seule réaction se produisant est $Zn + Cu^{2+} = Zn^{2+} + Cu$.

Au cours de cette réaction, lorsque deux moles d'électrons sont échangées entre les deux couples rédox, une mole de zinc est consommée.
Durant le temps $\tau$, $n = \dfrac{Q}{\mathcal{F}}$ moles d'électrons sont échangés. Donc la masse de zinc consommée est : $m = M_{Zn}\dfrac{Q}{2\mathcal{F}}$.
On trouve finalement : $m = 65{,}4\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}} \times \dfrac{60 \times 10^{-3}\,\mathrm{C}}{2 \times 96\,500\,\mathrm{C \cdot mol^{-1}}} = 0{,}20\,\mu\mathrm{g}$.

**40.2** a) Il s'agit d'une courbe à courant positif, donc d'une oxydation. Le couple à considérer est donc celui dans lequel l'eau est le réducteur, c'est-à-dire $O_2/H_2O$.

**40.2** c) La demi-équation du couple s'écrit : $O_2 + H^+ + 4\,e^- = 2\,H_2O$. On déduit

$$E_N = E^\circ + \frac{0{,}06}{4}\log\frac{(p_{O_2}/p^\circ)\,([H^+]/c^\circ)^4}{1^2}.$$

**40.2** d) Le calcul conduit à $E_N = 0{,}99\,\mathrm{V}$.

**40.2** e) On a $\eta_a = 1{,}35\,\mathrm{V} - E_{N,O_2/H_2O} = 0{,}36\,\mathrm{V}$.

**40.3** b) Dressons le tableau d'avancement pour la réaction d'oxydoréduction considérée :

| | $2\ Fe$ + | $O_2$ + | $4\ H^+$ = | $2\ Fe^{2+}$ + | $2\ H_2O$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **État initial** | $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ | 0 | / |
| **après un temps $\tau$** | $n_1 - 2\xi$ | $n_2 - \xi$ | $n_3 - 4\xi$ | $2\xi$ | / |

où $n_1$, $n_2$ et $n_3$ sont des quantités de matière à l'instant initial.
Au bout du temps $\tau$, la masse restante de Fe est $m_1' = \dfrac{45}{100}m_1$.
À la lecture du tableau d'avancement, nous avons : $n_1' = n_1 - 2\xi$ ce qui peut s'écrire sous la forme :

$$m_1' = M_{Fe}n_1' = M_{Fe}(n_1 - 2\xi) = m_1 - 2M_{Fe}\xi.$$

Nous obtenons ainsi : $2M_{Fe}\xi = \dfrac{100-45}{100}m_1$. Finalement $\xi = \dfrac{55}{200}\dfrac{m_1}{M_{Fe}} = \dfrac{55 \times 1 \times 10^{-3}\,\mathrm{g}}{200 \times 55{,}8\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}} = 5 \times 10^{-6}\,\mathrm{mol}$.

**40.3** c) On a $Fe = Fe^{2+} + 2\ e^-$. Au bout d'un temps $\tau$, $2\xi$ moles de fer sont consommées. Il y a donc $4\xi$ moles d'électrons échangées.

.....

**40.3** d) D'après les questions précédentes, $Q = 4\xi\mathcal{N}_A e = 4\xi\mathcal{F} = 4 \times 5 \times 10^{-6}\,\text{mol} \times 96\,500\,\text{C} \cdot \text{mol}^{-1} = 1{,}9\,\text{C}$.

.....

**40.4** a) Il n'existe aucun domaine commun entre Al et $H_2O$, donc Al n'est jamais stable dans l'eau.

.....

**40.4** b) La passivation se fait toujours sous forme d'oxyde solide, les ions ne sont pas des espèces passivantes car ils ne peuvent pas rester accrochés en surface du métal et le protéger de la corrosion.

.....

**40.4** c) En milieu acide, l'espèce stable est l'ion $Al^{3+}$. L'aluminium passe en solution, la plaque va donc se dissoudre progressivement.

.....

**40.4** d) En milieu neutre ou légèrement basique, l'espèce stable est le solide $Al_2O_3$, qui peut rester accroché en surface et protéger la plaque : c'est la passivation. Une partie de l'aluminium est néanmoins consommée pour former l'oxyde.

.....

**40.5** a) Le zinc s'oxyde sous l'action du dihydrogène. Il va donc se corroder.

.....

**40.5** b) Le dioxygène se réduit en $HO^-$.

.....

**40.5** c) La réaction de réduction du dioxygène s'écrit : $O_2 + 2\,H_2O + 4\,e^- = 4\,HO^-$.
La réaction d'oxydation du zinc s'écrit : $Zn = Zn^{2+} + 2\,e^-$.
La réaction d'oxydoréduction est donc : $2\,Zn + O_2 + 2\,H_2O = 2\,Zn^{2+} + 4\,HO^-$.

.....

**40.5** d) La production de $HO^-$ assure une augmentation du pH.

.....

**40.6** a) Il y a deux électrons échangés, donc la loi de Nernst s'écrit $E_{Mg^{2+}/Mg} = E^\circ_{Mg^{2+}/Mg} + \dfrac{0{,}06}{2}\log\left(\dfrac{[Mg^{2+}]}{c^\circ}\right)$.

.....

**40.6** c) La loi de Nernst s'écrit

$$E_{H^+/H_2} = E^\circ_{H^+/H_2} + \frac{0{,}06}{2}\log\frac{[H^+]^2/(c^\circ)^2}{p_{H_2}/p^\circ} = E^\circ_{H^+/H_2} - 0{,}06\,\text{pH} - 0{,}03\log\frac{p_{H_2}}{p^\circ}.$$

.....

**40.6** e) Le couple $Mg^{2+}/Mg$ est rapide alors que le couple $H^+/H_2$ est lent, c'est donc sur la courbe de ce dernier que doit se retrouver le surpotentiel, ce qui élimine la proposition (b). L'intensité est toujours une fonction croissante du potentiel, ce qui élimine la proposition (c). Un courant d'oxydation (courant anodique) est toujours positif. Notons que dans notre cas, le magnésium est oxydé ($E_{H^+/H_2} > E_{Mg^{2+}/Mg}$), ce qui élimine la proposition (d). Le bon diagramme est donc celui de la proposition (a).

.....

**40.6** f)

**40.7** a) Le métal le plus facilement corrodable (c'est-à-dire susceptible d'être oxydé) d'un point de vue thermodynamique est le réducteur le plus fort, donc celui de potentiel standard le plus faible, soit ici le zinc.

**40.7** b) Dans cette question, les courbes à considérer sont d'une part Zn ⟶ $Zn^{2+}$ et d'autre part $H_2O$ ⟶ $H_2$ sur Zn, les seules représentées en trait plein sur la figure ci-contre.

On lit graphiquement

$$E_c \approx -0{,}85\,\text{V} \quad \text{et} \quad i_c \approx 2\,\text{mA}.$$

**40.7** c) Les courbes à considérer sont cette fois d'une part Zn ⟶ $Zn^{2+}$ et d'autre part $H_2O$ ⟶ $H_2$ sur Fe, comme indiqué sur la figure ci-contre.

On lit graphiquement

$$E_c \approx -0{,}65\,\text{V} \quad \text{et} \quad i_c \approx 18\,\text{mA}.$$

**40.7** d) La réduction de l'eau est beaucoup plus rapide sur le fer, c'est donc là qu'elle a (majoritairement) lieu.

**40.7** e) Les électrons sont libérés du côté zinc de la jonction, car c'est Zn qui est oxydé, et consommés du côté fer, car c'est là que $H_2O$ est réduite. Ainsi, ils se déplacent globalement du zinc vers le fer.

**40.8** b) Le potentiel pour lequel les courants sont égaux en valeur absolue est $E_c = -1\,\mathrm{V}$.

**40.8** c) La demi-équation électronique s'écrit $2\,H^+ + 2\,e^- = H_2$, il faut donc échanger 2 moles d'électrons pour former 1 moles de dihydrogène. Ainsi, pour la formation de $n$ moles de $H_2$ il faut $2n$ moles d'électrons d'où une charge totale $2n\mathcal{F}$.

**40.8** d) D'après l'équation d'état des gaz parfaits, la quantité de matière de dihydrogène formée est

$$n = \frac{PV}{RT} = \frac{1 \times 10^5\,\mathrm{Pa} \times 1 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^3}{8{,}3\,\mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}} \times 298\,\mathrm{K}} = 4{,}0 \times 10^{-5}\,\mathrm{mol}\,,$$

ce qui donne une charge échangée : $Q = 2n\mathcal{F} = 2 \times 4{,}0 \times 10^{-5}\,\mathrm{mol} \times 9{,}65 \times 10^4\,\mathrm{C \cdot mol^{-1}} = 7{,}8\,\mathrm{C}$.

**40.8** e) Nous obtenons : $i = \dfrac{Q}{\Delta t} = \dfrac{7{,}8\,\mathrm{C}}{600\,\mathrm{s}} = 13\,\mathrm{mA}$.

**40.9** a) Le nombre d'oxydation du fer sous sa forme réduite Fe est nul. Celui du fer sous sa forme d'oxyde $Fe(OH)_2$ est +II. Nous en déduisons : $\alpha = 2$.

**40.9** b) Dressons le tableau d'avancement pour la réaction d'oxydoréduction considérée :

| | Fe + | $\frac{1}{2}O_2$ + | $H_2O$ = | $Fe(OH)_2$ |
|---|---|---|---|---|
| **État initial** | $n_1$ | $n_2$ | / | 0 |
| **À l'instant** $t$ | $n_1 - \xi$ | $n_2 - \frac{\xi}{2}$ | / | $\xi$ |

où $n_1$ et $n_2$ sont les quantités de matière à l'instant initial.

On a $n_1 = \dfrac{m_0}{M_{\mathrm{Fe}}}$ et à l'instant $t$ : $n_1' = \dfrac{m(t)}{M_{\mathrm{Fe}}} = n_1 - \xi$. On a donc $m(t) = M_{\mathrm{Fe}}(n_1 - \xi) = m_0 - M_{\mathrm{Fe}}\xi$. Ainsi,

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -M_{\mathrm{Fe}}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}.$$

**40.10** a) À l'aide de la définition du courant de corrosion, on a $\displaystyle\int_0^\tau \mathrm{d}t = \int_0^{\xi_f} \frac{2\mathcal{F}}{i_{\mathrm{corr}}}\,\mathrm{d}\xi$, ce qui conduit à : $\tau = \dfrac{2\mathcal{F}}{i_{\mathrm{corr}}}\xi_f$.

Au bout du temps $\tau$, une masse $m_0$ de cuivre est consommée. On a donc $\xi_f = \dfrac{m_0}{M_{\mathrm{Cu}}}$ et donc $\tau = \dfrac{2\mathcal{F}m_0}{i_{\mathrm{corr}}M_{\mathrm{Cu}}}$.

**40.10** b) La masse de cuivre corrodé est $m_0 = \rho_{\mathrm{Cu}} S(e_1 - e_2)$. Le temps $\tau$ vérifie :

$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{2\mathcal{F}}{i_{\mathrm{corr}} M_{\mathrm{Cu}}} \rho_{\mathrm{Cu}} S(e_2 - e_1) \\
&= \frac{2 \times 96\,500\,\mathrm{C \cdot mol^{-1}}}{65 \times 10^{-6}\,\mathrm{A} \times 63{,}5\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}} \times 8{,}96\,\mathrm{g \cdot cm^{-3}} \times 2\,\mathrm{cm^2} \times (0{,}500\,\mathrm{cm} - 0{,}498\,\mathrm{cm}) \\
&= 16{,}75 \times 10^5\,\mathrm{s}.
\end{aligned}$$

Le temps $\tau$ correspond donc à 19 jours et 10 heures.

.....

**40.10** c) On a $\tau = 1 \times 3\,600\,\mathrm{s} + 45 \times 60\,\mathrm{s} = 6\,300\,\mathrm{s}$

$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{2\mathcal{F}}{i_{\mathrm{corr}} M_{\mathrm{Cu}}} m_0 \\
M_{\mathrm{Cu}} &= \frac{2\mathcal{F}}{i_{\mathrm{corr}} \tau} m_0 \\
M_{\mathrm{Cu}} &= \frac{2 \times 96\,500\,\mathrm{C \cdot mol^{-1}}}{55 \times 10^{-6}\,\mathrm{A} \times 6\,300\,\mathrm{s}} \times 0{,}1 \times 10^{-3}\,\mathrm{g} \\
&= 55{,}8\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}} \neq 63{,}5\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}
\end{aligned}$$

L'électrode n'est donc pas en cuivre.

.....

# Fiche n° 41. Piles et accumulateurs

## Réponses

**41.1** a) ..... b et d

**41.1** b) ..... a

**41.1** c) ..... $Q = 0{,}52\,\mathrm{A \cdot h}$

**41.2** a) ..... $Q = I\Delta t$

**41.2** b) ..... d

**41.2** c) ..... $n_{\mathrm{Ag^+}} = n_{\mathrm{e}}$

**41.2** d) ..... $n_{\mathrm{Pb^{2+}}} = \dfrac{n_{\mathrm{e}}}{2}$

**41.2** e) ..... $\left[\mathrm{Ag^+}\right]_{\mathrm{f}} = 75{,}8\,\mathrm{mmol \cdot L^{-1}}$

**41.2** f) ..... $\left[\mathrm{Pb^{2+}}\right]_{\mathrm{f}} = 112\,\mathrm{mmol \cdot L^{-1}}$

**41.3** a) ..... $\mathrm{Zn^{2+} + 2\,e^- = Zn}$

**41.3** b) ..... $\mathrm{Ag^+ + e^- = Ag}$

**41.3** c) ..... $\mathrm{Zn + 2\,Ag \longrightarrow Zn^{2+} + 2\,Ag}$

**41.3** d) ..... a et d

**41.4** a) ..... $E_{\mathrm{Zn}} = -0{,}79\,\mathrm{V}$

**41.4** b) ..... $E_{\mathrm{Cu}} = 0{,}32\,\mathrm{V}$

**41.4** c) ..... $+$ : Cu et $-$ : Zn

**41.4** d) ..... $+$ (cathode) : Cu ; $-$ (anode) : Zn

**41.4** e) ..... b et c

**41.4** f) ..... $U_{\mathrm{co}} = 1{,}11\,\mathrm{V}$

**41.4** g) ..... $\Delta_{\mathrm{r}}G = -2{,}12 \times 10^2\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}$

**41.5** a) ..... $K^\circ = \dfrac{a(\mathrm{Cu})_{\text{éq}} \times a(\mathrm{Zn^{2+}})_{\text{éq}}}{a(\mathrm{Zn})_{\text{éq}} \times a(\mathrm{Cu^{2+}})_{\text{éq}}}$

**41.5** b) ..... $K^\circ = \dfrac{[\mathrm{Zn^{2+}}]_{\text{éq}}}{[\mathrm{Cu^{2+}}]_{\text{éq}}}$

**41.5** c) ... $E = E^\circ(\mathrm{Zn^{2+}/Zn}) + \dfrac{0{,}059}{2}\log\left(\dfrac{[\mathrm{Zn^{2+}}]}{C^\circ}\right)$

**41.5** d) .. $E = E^\circ(\mathrm{Cu^{2+}/Cu}) + \dfrac{0{,}059}{2}\log\left(\dfrac{[\mathrm{Cu^{2+}}]}{C^\circ}\right)$

**41.5** e) ..... a et d

**41.5** f) ..... a

**41.5** g) ..... $K^\circ = 10^{37} > 1$

**41.6** a) ..... $\mathrm{Cu^{2+} + 2\,e^- = Cu}$

**41.6** b) ..... $\mathrm{Cu^{2+} + e^- = Cu^+}$

**41.6** c) ..... $\mathrm{Cu^+ + e^- = Cu}$

**41.6** d) ..... a

**41.6** e) ..... a

**41.6** f) ..... b

**41.7** a) ..... $\mathrm{2\,Cl^- \longrightarrow Cl_2 + 2\,e^-}$

**41.7** b) ..... $\mathrm{2\,H_2O + 2\,e^- \longrightarrow H_2 + 2\,HO^-}$

**41.7** c) .. $\mathrm{2\,H_2O + 2\,Cl^- \longrightarrow Cl_2 + H_2 + 2\,HO^-}$

**41.8** a) ..... $2{,}16 \times 10^9\,\mathrm{C}$

**41.8** b) ..... $1{,}12 \times 10^4\,\mathrm{mol}$

**41.8** c) ..... $254\,\mathrm{m^3}$

**41.8** d) ..... $91{,}7\,\%$

**41.9** a) ..... $6{,}48 \times 10^9\,\mathrm{J}$

**41.9** b) ..... $2{,}78 \times 10^7\,\mathrm{J \cdot m^{-3}}$

**41.10** a) ..... $\mathrm{Au(CN)_2{}^- + e^- = Au + 2\,CN^-}$

**41.10** b) ..... b

**41.10** c) ..... a

**41.10** d) ..... $\boxed{4\,HO^- = 2\,H_2O + O_2 + 4\,e^-}$

**41.10** e) ..... $\boxed{E(O_2\,/\,H_2O) = 0{,}39\,V}$

**41.10** f) ..... (c)

**41.10** g) ..... (b)

**41.11** a) ..... (c)

**41.11** b) ..... (a)

**41.12** a) ..... (b)

**41.12** b) ..... (d)

**41.12** c) . $\boxed{4\,Ag^+ + 2\,H_2O \longrightarrow 4\,Ag + O_2 + 4\,H^+}$

**41.12** d) ..... (b)

**41.13** a) .... $\boxed{Sn^{4+} + 2\,H_2O \longrightarrow Sn + O_2 + 4\,H^+}$

**41.13** b) ..... (c)

**41.13** c) ..... (d)

**41.13** d) ..... (b) et (c)

**41.14** a) ..... $\boxed{n(Cu^{2+}) = 2{,}5 \times 10^{-2}\,mol}$

**41.14** b) ..... $\boxed{n(Zn) = 0{,}46\,mol}$

**41.14** c) ..... $\boxed{Cu^{2+}}$

**41.14** d) ..... $\boxed{n(e^-) = 5{,}0 \times 10^{-2}\,mol}$

**41.14** e) ..... $\boxed{Q = 4{,}8 \times 10^3\,C = 1{,}3\,A \cdot h}$

## Corrigés

**41.1** a) Lorsque les valeurs maximales sont atteintes pour $u$ et $i$, la loi d'Ohm donne : $I = \dfrac{U}{R} = \dfrac{0{,}40\,V}{15\,\Omega} = 27\,mA$.

.....

**41.1** b) La quantité d'électricité $Q$ correspond à la charge électrique échangée entre les électrodes pendant la durée $\Delta t$. Pour une intensité constante $I = \dfrac{U}{R}$, il vient : $Q = I\Delta t = \dfrac{U\Delta t}{R}$.

.....

**41.1** c) On a $Q = \dfrac{0{,}40\,V \times 70 \times 10^3\,s}{15\,\Omega} = 1{,}9 \times 10^3\,C = 0{,}52\,A \cdot h$ puisque $1\,A \cdot h = 3\,600\,C$.

.....

**41.2** a) La quantité d'électricité $Q$ correspond à la charge électrique échangée entre les électrodes pendant la durée $\Delta t$. Pour une intensité constante $I$, il vient : $Q = I\Delta t$.

.....

**41.2** b) Chaque électron porte, en valeur absolue, la charge $e$, d'où la charge électrique échangée : $Q = n_e \times \mathcal{N}_A \times e$. Il vient : $n_e = \dfrac{Q}{\mathcal{N}_A e}$ ou encore $n_e = \dfrac{Q}{\mathcal{F}}$ ou encore $n_e = \dfrac{I\Delta t}{\mathcal{F}}$.

.....

**41.2** c) D'après la demi-équation à la cathode : $n_{Ag^+} = n_e$.

.....

**41.2** d) D'après la demi-équation à l'anode : $n_{Pb^{2+}} = \dfrac{n_e}{2}$.

.....

**41.2** e) Dans le bécher (1), les ions argent sont consommés : $\left[Ag^+\right]_f = C_1 - \dfrac{n_{Ag^+}}{V_1}$, soit $\left[Ag^+\right]_f = C_1 - \dfrac{I\Delta t}{V_1\mathcal{F}}$. Il vient :

$$\left[Ag^+\right]_f = 0{,}100\,mol \cdot L^{-1} - \frac{65{,}0 \times 10^{-3}\,A \times 1{,}00 \times 3\,600\,s}{100{,}0 \times 10^{-3}\,L \times 96\,500\,C \cdot mol^{-1}} = 7{,}58 \times 10^{-2}\,mol \cdot L^{-1}.$$

.....

**41.2** f) Dans le bécher (2), les ions plomb sont formés : $\left[Pb^{2+}\right]_f = C_2 + \frac{n_{Pb^{2+}}}{V_2}$, soit $\left[Pb^{2+}\right]_f = C_2 + \frac{I\Delta t}{2V_2\mathcal{F}}$. Il vient :

$$\left[Pb^{2+}\right]_f = 0{,}100\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1} + \frac{65{,}0\times10^{-3}\,\text{A}\times1{,}00\times3\,600\,\text{s}}{2\times100{,}0\times10^{-3}\,\text{L}\times96\,500\,\text{C}\cdot\text{mol}^{-1}} = 1{,}12\times10^{-1}\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}.$$

.....

**41.3** a) Dans le sens de la réduction : $Zn^{2+} + 2\,e^- = Zn$.

.....

**41.3** b) Dans le sens de la réduction : $Ag^+ + e^- = Ag$.

.....

**41.3** c) La première demi-équation fait intervenir deux électrons alors que la deuxième n'en fait intervenir qu'un : il faut multiplier cette dernière par deux, soit $2\,Ag^+ + 2\,e^- = 2\,Ag$. Il suffit ensuite de sommer les deux équations en prenant garde de placer les réactifs à gauche (Zn et $Ag^+$) pour tenir compte du sens de la réaction. En précisant les états physico-chimiques, cela donne : $Zn(s) + 2\,Ag^+(aq) \longrightarrow Zn^{2+}(aq) + 2\,Ag(s)$. Les électrons n'apparaissent pas dans l'équation de la réaction.

.....

**41.3** d) D'après l'équation précédente, le zinc est consommé alors que de l'argent est formé. C'est donc l'électrode de zinc qui s'amincit et celle d'argent qui s'épaissit.

.....

**41.4** a) On note $E_{Zn}$ le potentiel de la demi-pile de zinc. Avec l'approximation $\frac{RT\ln(10)}{\mathcal{F}} \approx 0{,}059\,\text{V}$ à 25 °C, la loi de Nernst donne : $E_{Zn} = E^\circ(Zn^{2+}/Zn) + \frac{0{,}059}{2}\log\left(\frac{[Zn^{2+}]}{C^\circ}\right) = -0{,}76\,\text{V} + \frac{0{,}059\,\text{V}}{2}\log\left(\frac{0{,}1\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}}{1\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}}\right) = -0{,}79\,\text{V}$.

.....

**41.4** b) On note $E_{Cu}$ le potentiel de la demi-pile de cuivre. Avec l'approximation $\frac{RT\ln(10)}{\mathcal{F}} \approx 0{,}059\,\text{V}$, la loi de Nernst donne : $E_{Cu} = E^\circ(Cu^{2+}/Cu) + \frac{0{,}059}{2}\log\left(\frac{[Cu^{2+}]}{C^\circ}\right) = 0{,}34\,\text{V} + \frac{0{,}059\,\text{V}}{2}\log\left(\frac{0{,}25\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}}{1\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}}\right) = 0{,}32\,\text{V}$.

.....

**41.4** c) On a $E_{Zn} = -0{,}79\,\text{V}$ et $E_{Cu} = 0{,}32\,\text{V}$ donc $E_{Zn} < E_{Cu}$. On en déduit que le pôle + est à droite (cuivre) et que le pôle − est à gauche (zinc).

.....

**41.4** d) Le pôle + est à droite (cuivre) et correspond à la cathode (siège de la réduction). Le pôle − est à gauche (zinc) et correspond à l'anode (siège de l'oxydation).

.....

**41.4** e) Dans les fils, les électrons se déplacent de l'électrode de zinc (anode) vers l'électrode de cuivre (cathode). Dans le pont salin, les cations (ions ammonium $NH_4{}^+$) se déplacent du compartiment de gauche (zinc) vers le compartiment de droite (cuivre) alors que les anions (ions nitrate $NO_3{}^-$) se déplacent du compartiment de droite (cuivre) vers le compartiment de gauche (zinc).

.....

**41.4** f) La tension à vide, choisie positive, est $U_{co} = E_{Cu} - E_{Zn} = 0{,}32\,\text{V} + 0{,}79\,\text{V} = 1{,}11\,\text{V}$.

.....

**41.4** g) On a $\Delta_r G = -2\mathcal{F}e = -2\times96\,500\,\text{C}\cdot\text{mol}^{-1}\times1{,}11\,\text{V} = -2{,}1\times10^2\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$.

.....

**41.5** a) Par définition, on a $K^\circ = \frac{a(Cu)_{éq}\times a(Zn^{2+})_{éq}}{a(Zn)_{éq}\times a(Cu^{2+})_{éq}}$.

.....

**41.5** b) On a $K^\circ = \dfrac{a(\mathrm{Cu})_{\text{éq}} \times a(\mathrm{Zn}^{2+})_{\text{éq}}}{a(\mathrm{Zn})_{\text{éq}} \times a(\mathrm{Cu}^{2+})_{\text{éq}}}$, avec $a(\mathrm{Zn})_{\text{éq}} = a(\mathrm{Cu})_{\text{éq}} = 1$ (solide pur), $a(\mathrm{Zn}^{2+})_{\text{éq}} = \dfrac{[\mathrm{Zn}^{2+}]_{\text{éq}}}{C^\circ}$ et $a(\mathrm{Cu}^{2+})_{\text{éq}} = \dfrac{[\mathrm{Cu}^{2+}]_{\text{éq}}}{C^\circ}$ (solutés), où $C^\circ = 1\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$ est la concentration standard. Il vient : $K^\circ = \dfrac{[\mathrm{Zn}^{2+}]_{\text{éq}}}{[\mathrm{Cu}^{2+}]_{\text{éq}}}$.

.....

**41.5** c) D'après la relation de Nernst : $E = E^\circ(\mathrm{Zn}^{2+}/\mathrm{Zn}) + \dfrac{0{,}059}{2}\log\left(\dfrac{[\mathrm{Zn}^{2+}]}{C^\circ}\right)$.

.....

**41.5** d) D'après la relation de Nernst : $E = E^\circ(\mathrm{Cu}^{2+}/\mathrm{Cu}) + \dfrac{0{,}059}{2}\log\left(\dfrac{[\mathrm{Cu}^{2+}]}{C^\circ}\right)$.

.....

**41.5** e) On a

$$E_{\text{éq}} = E^\circ(\mathrm{Zn}^{2+}/\mathrm{Zn}) + \frac{0{,}059}{2}\log\left(\frac{[\mathrm{Zn}^{2+}]_{\text{éq}}}{C^\circ}\right) = E^\circ(\mathrm{Cu}^{2+}/\mathrm{Cu}) + \frac{0{,}059}{2}\log\left(\frac{[\mathrm{Cu}^{2+}]_{\text{éq}}}{C^\circ}\right).$$

Donc, on a

$$E^\circ(\mathrm{Cu}^{2+}/\mathrm{Cu}) - E^\circ(\mathrm{Zn}^{2+}/\mathrm{Zn}) = \frac{0{,}059}{2}\log\left(\frac{[\mathrm{Zn}^{2+}]_{\text{éq}}}{C^\circ}\right) - \frac{0,059}{2}\log\left(\frac{[\mathrm{Cu}^{2+}]_{\text{éq}}}{C^\circ}\right) = \frac{0{,}059}{2}\log\frac{[\mathrm{Zn}^{2+}]_{\text{éq}}}{[\mathrm{Cu}^{2+}]_{\text{éq}}}.$$

On peut également écrire cette égalité

$$E^\circ(\mathrm{Zn}^{2+}/\mathrm{Zn}) - E^\circ(\mathrm{Cu}^{2+}/\mathrm{Cu}) = \frac{0{,}059}{2}\log\left(\frac{[\mathrm{Cu}^{2+}]_{\text{éq}}}{C^\circ}\right) - \frac{0{,}059}{2}\log\left(\frac{[\mathrm{Zn}^{2+}]_{\text{éq}}}{C^\circ}\right) = \frac{0{,}059}{2}\log\frac{[\mathrm{Cu}^{2+}]_{\text{éq}}}{[\mathrm{Zn}^{2+}]_{\text{éq}}}.$$

.....

**41.5** f) On a $E^\circ(\mathrm{Cu}^{2+}/\mathrm{Cu}) - E^\circ(\mathrm{Zn}^{2+}/\mathrm{Zn}) = \dfrac{0{,}059}{2}\log\dfrac{[\mathrm{Zn}^{2+}]_{\text{éq}}}{[\mathrm{Cu}^{2+}]_{\text{éq}}} = \dfrac{0{,}059}{2}\log K^\circ$. On en déduit

$$K^\circ = 10^{\frac{2}{0{,}059}(E^\circ(\mathrm{Cu}^{2+}/\mathrm{Cu}) - E^\circ(\mathrm{Zn}^{2+}/\mathrm{Zn}))}.$$

.....

**41.5** g) On a $K^\circ = 10^{\frac{2}{0{,}059}(0{,}34+0{,}76)} = 10^{37}$.

La constante d'équilibre est supérieure à 1 donc la réaction est favorisée thermodynamiquement.

.....

**41.6** a) L'équation (1) est $\mathrm{Cu}^{2+} + 2\,\mathrm{e}^- = \mathrm{Cu}$.

.....

**41.6** b) L'équation (2) est $\mathrm{Cu}^{2+} + \mathrm{e}^- = \mathrm{Cu}^+$.

.....

**41.6** c) L'équation (3) est $\mathrm{Cu}^+ + \mathrm{e}^- = \mathrm{Cu}$.

.....

**41.6** d) On a (1) = (2) + (3).

.....

**41.6** e) D'après la loi de Hess : (1) = (2) + (3), soit $\Delta_{1/2}G_1^\circ = \Delta_{1/2}G_2^\circ + \Delta_{1/2}G_3^\circ$.

.....

**41.6** f) Dans la relation précédente, on remplace $\Delta_{1/2}G^\circ$ par $-n \times \mathcal{F} \times E^\circ$, où $n$ est le nombre d'électrons échangés pour chaque demi-équation. On obtient alors l'égalité suivante : $-2 \times \mathcal{F} \times E_1^\circ = -\mathcal{F} \times E_2^\circ - \mathcal{F} \times E_3^\circ$, soit $2E_1^\circ = E_2^\circ + E_3^\circ$, ou encore $E_3^\circ = 2E_1^\circ - E_2^\circ = 0{,}52\,\mathrm{V}$.

.....

**41.7** b) La nature fortement basique du milieu complexifie légèrement l'écriture de la réaction : le plus simple est alors de commencer par l'écrire en milieu acide, puis d'ajouter autant de $\mathrm{HO}^-$ que nécessaire à droite et à gauche pour faire disparaître les $\mathrm{H}^+$.

.....

**41.7** c) Il suffit de sommer les deux demi-équations précédentes. En précisant les états physico-chimiques, cela donne : $2\,H_2O\,(\ell) + 2\,Cl^-\,(aq) \longrightarrow Cl_2(g) + H_2(g) + 2\,HO^-\,(aq)$.

**41.8** a) On a $Q_{\text{éch}} = jS\Delta t = 6{,}00 \times 10^3\,\text{A}\cdot\text{m}^{-2} \times 100\,\text{m}^2 \times 3\,600\,\text{s} = 2{,}16 \times 10^9\,\text{C}$.

**41.8** b) D'après l'équation de réaction électrochimique, il faut deux moles d'électrons pour former une mole de dichlore. Autrement dit, une mole d'électrons échangés permet de former une demi mole de dichlore. La charge utile à la réaction est par hypothèse égale à la charge échangée donc $n_{Cl_2} = 0{,}5 \times \dfrac{Q_{\text{éch}}}{\mathcal{F}}$, avec $\mathcal{F}$ la charge portée, en valeur absolue, par une mole d'électrons (constante de Faraday). Il vient : $n_{Cl_2} = 0{,}5 \times \dfrac{2{,}16 \times 10^9\,\text{C}}{96\,500\,\text{C}\cdot\text{mol}^{-1}} = 1{,}12 \times 10^4\,\text{mol}$.

**41.8** c) L'équation d'état des gaz parfaits donne :

$$V_{Cl_2} = \frac{1{,}12 \times 10^4\,\text{mol} \times 8{,}314\,\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1} \times 273\,\text{K}}{1{,}00 \times 10^5\,\text{Pa}} = 254\,\text{m}^3.$$

**41.8** d) Le rendement faradique est le rapport entre la charge utile et la charge échangée, et donc également le rapport entre les quantités de matière réelle et maximale formées et de même entre les volumes.

**41.9** a) On a $\mathcal{E} = 3{,}00\,\text{V} \times 6{,}00 \times 10^3\,\text{A}\cdot\text{m}^{-2} \times 100\,\text{m}^2 \times 3\,600\,\text{s} = 6{,}48 \times 10^9\,\text{J}$.

**41.9** b) En raisonnant sur une heure d'électrolyse, on trouve $\dfrac{6{,}48 \times 10^9\,\text{J}}{233\,\text{m}^3} = 2{,}78 \times 10^7\,\text{J}\cdot\text{m}^{-3}$.

**41.10** a) À la cathode, la réduction des ions aurocyanure mène à la production d'or et des ions cyanure : $Au(CN)_2{}^- + e^- = Au + 2\,CN^-$. Il suffit de bien lire l'énoncé et d'équilibrer la demi-équation.

**41.10** b) Les électrons sont « consommés » au niveau de l'électrode (1), là où ils permettent aux ions aurocyanure d'être réduits : les électrons se déplacent réellement de l'électrode (2) vers l'électrode (1).

**41.10** c) Le sens conventionnel du courant est opposé au sens réel de déplacement des électrons donc, en tenant compte de l'orientation choisie pour $I$, on en déduit que $I < 0$. On retrouve bien le fait que sur une courbe intensité-potentiel, le fonctionnement cathodique correspond à $I < 0$.

**41.10** d) La demi-équation électronique de l'oxydation de l'eau est : $2\,H_2O = 4\,H^+ + O_2 + 4\,e^-$. Le pH étant ici fixé à 14, la demi-équation doit être équilibrée en milieu basique : $4\,HO^- = 2\,H_2O + O_2 + 4\,e^-$.

**41.10** e) Chaque potentiel standard est donné à pH = 0, donc il faut commencer par écrire la demi-équation associée au couple de l'eau à l'anode en milieu acide : $2\,H_2O = 4\,H^+ + O_2 + 4\,e^-$. Il vient :

$$E(O_2\,/\,H_2O) = E^\circ(O_2\,/\,H_2O) - 0{,}059\,\text{pH} = 1{,}23\,\text{V} - 0{,}059\,\text{V} \times 14 = 0{,}40\,\text{V}.$$

**41.10** f) La tension minimale à imposer est la différence de potentiel entre celui du couple de l'eau en oxydation et celui du couple de l'or en réduction : $(0{,}40\,\text{V} + 0{,}60\,\text{V}) - (-0{,}60\,\text{V}) = 1{,}60\,\text{V}$.

**41.10** g) Au-delà d'une certaine valeur, le solvant pourrait être réduit.

**41.11** a) Il s'agit d'une courbe à courant négatif, donc de réduction. Pour le couple $H^+/H_2$, le surpotentiel égal à $-0{,}30\,V$ doit être ajouté au potentiel d'équilibre valant $-0{,}20\,V$. Il y a donc un décalage de la courbe vers la gauche, par rapport au potentiel d'équilibre.

.....

**41.11** b) Initialement, seuls les cations sont présents dans la solution. Au cours de l'électrolyse, certains métaux au moins vont se déposer à la cathode, mais ils ne pourront alors pas s'oxyder. En revanche, compte tenu du potentiel de Nernst, l'oxydation de l'argent serait parfaitement envisageable... s'il y en avait. Le raisonnement serait le même pour les autres métaux.

.....

**41.12** a) Puisqu'il s'agit de l'anode, la réaction électrochimique est forcément une oxydation... or la seule oxydation possible ici est celle de l'eau en dioxygène.

.....

**41.12** b) Puisqu'il s'agit de la cathode, la réaction électrochimique est forcément une réduction, si bien qu'ici les quatre processus proposés sont théoriquement possibles et entrent en compétition. Celui qui a lieu en pratique est celui pour lequel la tension seuil d'électrolyse, c'est-à-dire la tension pour laquelle les réactions ont lieu avec un courant non nul, est la plus faible. On constate graphiquement qu'il s'agit ici de la réduction de $Ag^+$ en Ag.

.....

**41.12** c) En précisant les états physico-chimiques : $4\,Ag^+(aq) + 2\,H_2O(\ell) \longrightarrow 4\,Ag(s) + O_2(g) + 4\,H^+(aq)$.

.....

**41.12** d) La réaction est observée si la tension appliquée est supérieure à la tension seuil discutée précédemment : $U_{s,Ag} = 1{,}05\,V + 0{,}70\,V - 0{,}6\,V = 1{,}15\,V$.

.....

**41.13** a) La réaction électrochimique qui doit forcément avoir lieu à la cathode est la réduction de $Sn^{4+}$ pour que de l'étain métallique s'y dépose ; la réaction anodique n'est en revanche pas modifiée. En précisant les états physico-chimiques, cela donne : $Sn^{4+}(aq) + 2\,H_2O(\ell) \longrightarrow Sn(s) + O_2(g) + 4\,H^+(aq)$.

.....

**41.13** b) Comme discuté dans l'entraînement précédent, le dépôt d'argent se forme pour une tension plus faible que le dépôt d'étain : s'il reste des impuretés d'argent dans la solution, alors elles se déposeront avant l'étain et il faut donc les éliminer. En revanche, le plomb se dépose à la cathode pour une tension supérieure à l'étain, ces impuretés ne sont donc pas gênantes pour réaliser l'électrolyse.

.....

**41.13** c) La réaction est observée si la tension appliquée est supérieure à la tension seuil discutée précédemment : $U_{s,Sn} = 1{,}05\,V + 0{,}70\,V - 0{,}05\,V = 1{,}70\,V$.

.....

**41.13** d) La tension seuil est celle pour laquelle le courant est (quasi) nul, donc la vitesse de réaction aussi. Comme on peut le voir sur l'allure des courbes courant-potentiel, obtenir un courant plus élevé nécessite une tension plus élevée. À ce phénomène s'ajoute la chute ohmique, liée à la conductivité électrique imparfaite de la solution. En revanche, les réactions parasites affectent le rendement de l'électrolyse mais ne modifient pas la tension à imposer.

.....

**41.14** a) On a $n(\mathrm{Cu}^{2+}) = C_2 \times V_2 = 0{,}25\,\mathrm{mol \cdot L^{-1}} \times 100 \times 10^{-3}\,\mathrm{L} = 2{,}5 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol}$.

.....

**41.14** b) On a $n(\mathrm{Zn}) = \dfrac{m}{M(\mathrm{Zn})} = \dfrac{30\,\mathrm{g}}{65{,}4\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}} = 0{,}46\,\mathrm{mol}$.

.....

**41.14** c) La stœchiométrie de chacun des réactifs (Zn et $\mathrm{Cu}^{2+}$) est de 1. On constate que $\dfrac{n(\mathrm{Cu}^{2+})}{1} < \dfrac{n(\mathrm{Zn})}{1}$ donc $\mathrm{Cu}^{2+}$ est le réactif limitant.

.....

**41.14** d) Les ions cuivre(II) $\mathrm{Cu}^{2+}$ sont limitants. La demi-équation associée au couple $\mathrm{Cu}^{2+}/\mathrm{Cu}$ est :

$$\mathrm{Cu}^{2+} + 2\,\mathrm{e}^- = \mathrm{Cu}.$$

Ainsi, pour chaque ion cuivre $\mathrm{Cu}^{2+}$ consommé, deux électrons traversent le circuit. Par conséquent, on a

$$n(\mathrm{e}^-) = 2 \times n(\mathrm{Cu}^{2+}) = 5{,}0 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol}.$$

.....

**41.14** e) La charge totale que la pile peut débiter est

$$Q = n(\mathrm{e}^-) \times \mathcal{F} = 5{,}0 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol} \times 96\,500\,\mathrm{C \cdot mol^{-1}} = 4{,}8 \times 10^3\,\mathrm{C}.$$

Pour obtenir la valeur en ampèreheures, il suffit de diviser le résultat précédent par 3 600. Il vient : $Q = 1{,}3\,\mathrm{A \cdot h}$.

.....