# Forme canonique

## Quelques calculs généraux pour commencer

### Calcul 1.1

Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $(2x+3)^2$ ..........

b) $(3y-4)^2$ ..........

c) $\left(-u+\sqrt{7}\right)^2$ .......

d) $(-\sqrt{3}t-\sqrt{15})^2$ ....

e) $\left(\dfrac{3}{2}z+2\right)^2$ ........

f) $\left(\dfrac{2}{5}v-\dfrac{2}{3}\right)^2$ .......

### Calcul 1.2 — Quelques factorisations.

Factoriser les expressions suivantes.

a) $x^2-25$ ............

b) $4t^2-9$ ............

c) $\dfrac{2}{9}y^2-\dfrac{4}{5}$ ..........

d) $u^2+6u+9$ ........

e) $9v^2-12v+4$ ......

f) $2z^2+10\sqrt{2}z+25$ ..

### Calcul 1.3 — Quelques équations.

Résoudre les équations suivantes.

*On donnera dans chaque cas l'ensemble des solutions.*

a) $x^2=0$ .............

b) $z^2=17$ ............

c) $(2t+10)^2=0$ .....

d) $\left(-\sqrt{3}y+\sqrt{6}\right)^2=0$

e) $2u^2-10=0$ ......

f) $-\dfrac{3}{4}v^2+\dfrac{4}{15}=0$ ....

# Changements de forme

**Calcul 1.4 — De la forme canonique à la forme développée.**

Développer et réduire :

a) $(X-3)^2+7$ ..........

b) $2(X+3)^2-5$ .........

c) $-\left(X+\sqrt{2}\right)^2+6$ .....

d) $\sqrt{3}(2X-1)^2-2\sqrt{3}$ ...

e) $\dfrac{3}{4}\left(X+\dfrac{1}{2}\right)^2+1$ ......

f) $\dfrac{5}{2}\left(-\dfrac{1}{3}X-\dfrac{2}{3}\right)^2-\dfrac{2}{9}$ ..

**Calcul 1.5 — Formes canoniques (I).**

Mettre les polynômes suivants sous forme canonique, c'est à dire sous la forme $a(X-\alpha)^2+\beta$.

a) $X^2+2X+2$ ..............................................

b) $X^2+4X-1$ ..............................................

**Calcul 1.6 — Formes canoniques (II).**

Mettre les polynômes suivants sous forme canonique, c'est à dire sous la forme $a(X-\alpha)^2+\beta$.

a) $-X^2+4X-5$ ........

b) $4X^2-8X-3$ ........

c) $-9X^2+36X+4$ .....

d) $-2X^2-20X-17$ ....

**Calcul 1.7 — Formes canoniques (III).**

Mettre les polynômes suivants sous forme canonique, c'est à dire sous la forme $a(X-\alpha)^2+\beta$.

a) $X^2+3X+\dfrac{1}{4}$ .........

b) $\dfrac{1}{4}X^2+X-1$ .........

c) $\dfrac{2}{9}X^2+8X+\dfrac{1}{7}$ .......

d) $-\dfrac{9}{8}X^2-\dfrac{1}{2}X-4$ .....

e) $\dfrac{1}{2}X^2+\dfrac{2}{3}X+\dfrac{3}{4}$ .......

f) $-\dfrac{4}{5}X^2-\dfrac{5}{6}X-\dfrac{6}{7}$ .....

**Calcul 1.8** — **Formes canoniques à paramètre (I).**

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Mettre les polynômes suivants sous forme canonique, c'est à dire sous la forme $a(X-\alpha)^2+\beta$.

a) $X^2+3X+\lambda$ ..........

b) $\dfrac{1}{4}X^2+\lambda X-2$ ..........

c) $\lambda X^2+8X+5$ ..........

**Calcul 1.9** — **Formes canoniques à paramètre (II).**

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Mettre les polynômes suivants sous forme canonique, c'est à dire sous la forme $a(X-\alpha)^2+\beta$.

a) $-3X^2-\lambda X+2$ ......

b) $\dfrac{1}{2}X^2+\dfrac{2\lambda}{3}X+\dfrac{3\lambda}{4}$ ....

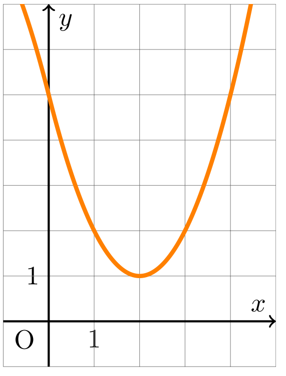
c) $-\dfrac{4}{5}X^2-\dfrac{5}{6}\lambda X$ ........

# Des représentations graphiques

**Calcul 1.10**

Voici la courbe représentative d'un polynôme du second degré.

Quelle est sa forme canonique ?



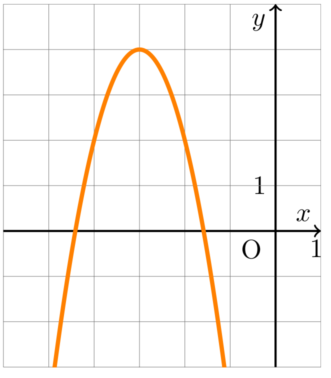

(a) $(X+2)^2-1$
(b) $(X-2)^2-1$
(c) $(X+2)^2+1$
(d) $(X-2)^2+1$

..........

**Calcul 1.11**

Voici la courbe représentative d'un polynôme du second degré.

Quelle est sa forme canonique ?




(a) $-2(X+3)^2-4$
(b) $-2(X-3)^2-4$
(c) $-2(X+3)^2+4$
(d) $-2(X-3)^2+4$

..........

## Calcul 1.12

On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = 3x^2 + 4x - 2$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Après avoir déterminé sa forme canonique, déterminer quelle est sa représentation graphique.

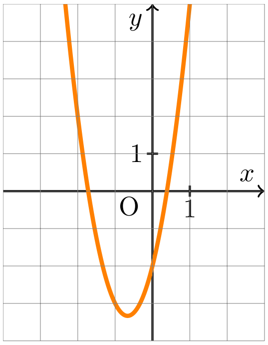


figure 1

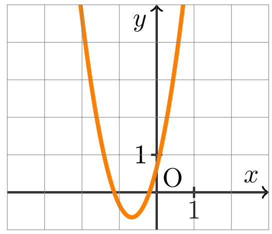


figure 2

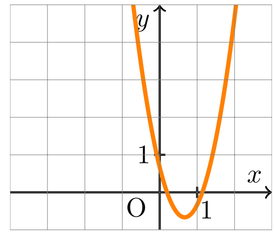


figure 3

Quelle est sa représentation graphique ?

(a) figure 1 (b) figure 2 (c) figure 3

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

## Calcul 1.13

On considère la fonction $g$ définie par $g(t) = -\dfrac{1}{2}t^2 + t - 1$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Après avoir déterminé sa forme canonique, déterminer quelle est sa représentation graphique.

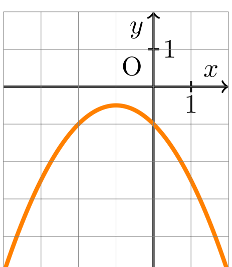


figure 1

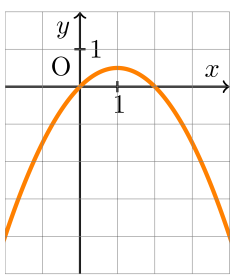


figure 2

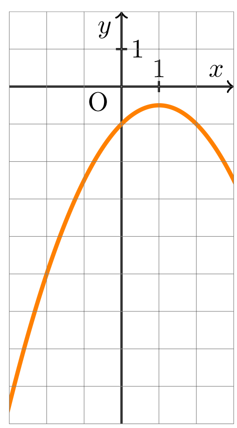


figure 3

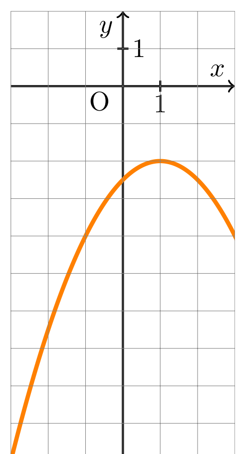


figure 4

Quelle est sa forme canonique ?

(a) figure 1 (b) figure 2 (c) figure 3 (d) figure 4

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

## Calculs plus avancés

**Calcul 1.14 — Forme canonique et inégalités.**

Dans chacun des cas, déterminer si la proposition est « vraie » ou « fausse » à l'aide de la forme canonique d'un polynôme du second degré.

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + x + 1 \geqslant \dfrac{1}{2}$ .....

b) $\forall t \in \mathbb{R},\ t^2 + 3t > -1$ ........

c) $\forall z \in \mathbb{R},\ 3z + z^2 < 2z^2 - 4$ ..

d) $\forall v \in \mathbb{R},\ \dfrac{4}{49}v^2 + \dfrac{61}{9} \geqslant \dfrac{20}{21}v$ ..

**Calcul 1.15 — Forme canonique et équations de cercles.**

Dans chacun des cas, reconnaître le cercle défini par l'équation cartésienne donnée.

*On donnera son centre $\Omega$ et son rayon $r$*

a) $x^2 - 2x + y^2 + 4y + 1 = 0$ ..............................................

b) $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 18 = 0$ ..............................................

c) $x^2 + y^2 - x - \dfrac{2}{3}y = \dfrac{23}{36}$ ..............................................

d) $x^2 + y^2 + \dfrac{5}{2}x + \dfrac{8}{3}y = -\dfrac{193}{144}$ ..............................................

## Réponses mélangées

$-2(X+5)^2+33$ $\quad -\frac{4}{5}\left(X+\frac{25}{48}\lambda\right)^2+\frac{125}{576}\lambda^2$ $\quad \Omega=(1,-2)$ et $r=2$ $\quad$ Vrai

$\left(\frac{\sqrt{2}}{3}y-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{3}y+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ $\quad 9y^2-24y+16$ $\quad (u+3)^2$ $\quad \frac{2}{9}(X+18)^2-\frac{503}{7}$ $\quad \{-5\}$

$(2t-3)(2t+3)$ $\quad \Omega=\left(-\frac{5}{4},-\frac{4}{3}\right)$ et $r=\sqrt{2}$ $\quad \left\{\sqrt{2}\right\}$ $\quad u^2-2\sqrt{7}u+7$ $\quad$ Vrai

$X^2-6X+16$ $\quad \Omega=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$ et $r=1$ $\quad -\frac{4}{5}\left(X+\frac{25}{48}\right)^2-\frac{2\,581}{4\,032}$ $\quad \left(X+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\lambda$

$\lambda\left(X+\frac{4}{\lambda}\right)^2-\frac{16}{\lambda}+5$ $\quad \frac{1}{2}\left(X+\frac{2\lambda}{3}\right)^2-\frac{2\lambda^2}{9}+\frac{3\lambda}{4}$ $\quad (X+1)^2+1$ $\quad -\frac{9}{8}\left(X+\frac{2}{9}\right)^2-\frac{73}{18}$

$\{0\}$ $\quad -X^2-2\sqrt{2}X+4$ $\quad \frac{1}{2}\left(X+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{21}{36}$ $\quad \frac{9}{4}z^2+6z+4$ $\quad -3\left(X+\frac{\lambda}{6}\right)^2+\frac{\lambda^2}{12}+2$

$\frac{4}{25}v^2-\frac{8}{15}v+\frac{4}{9}$ $\quad 2X^2+12X+13$ $\quad (X+2)^2-5$ $\quad$ c $\quad \left\{-\sqrt{5},\sqrt{5}\right\}$ $\quad$ Faux

$-9(X-2)^2+40$ $\quad 3t^2+6\sqrt{5}t+15$ $\quad$ d $\quad \left\{-\frac{4\sqrt{5}}{15},\frac{4\sqrt{5}}{15}\right\}$ $\quad \frac{1}{4}(X+2)^2-2$

$(x-5)(x+5)$ $\quad 4x^2+12x+9$ $\quad (3v-2)^2$ $\quad 4(X-1)^2-7$ $\quad$ a $\quad \frac{5}{18}X^2+\frac{10}{9}X+\frac{8}{9}$

$\frac{3}{4}X^2+\frac{3}{4}X+\frac{19}{16}$ $\quad \Omega=(-3,5)$ et $r=4$ $\quad \left(\sqrt{2}z+5\right)^2$ $\quad \frac{1}{4}(X+2\lambda)^2-\lambda^2-2$

$4\sqrt{3}X^2-4\sqrt{3}X-\sqrt{3}$ $\quad \left\{-\sqrt{17},\sqrt{17}\right\}$ $\quad$ c $\quad$ Faux $\quad -(X-2)^2-1$ $\quad \left(X+\frac{3}{2}\right)^2-2$

► Réponses et corrigés page 7

# Fiche n° 1. Forme canonique

## Réponses

**1.1** a) ........ $\boxed{4x^2+12x+9}$

**1.1** b) ........ $\boxed{9y^2-24y+16}$

**1.1** c) ........ $\boxed{u^2-2\sqrt{7}u+7}$

**1.1** d) ........ $\boxed{3t^2+6\sqrt{5}t+15}$

**1.1** e) ........ $\boxed{\dfrac{9}{4}z^2+6z+4}$

**1.1** f) ........ $\boxed{\dfrac{4}{25}v^2-\dfrac{8}{15}v+\dfrac{4}{9}}$

**1.2** a) ........ $\boxed{(x-5)(x+5)}$

**1.2** b) ........ $\boxed{(2t-3)(2t+3)}$

**1.2** c) ........ $\boxed{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}y-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}y+\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)}$

**1.2** d) ........ $\boxed{(u+3)^2}$

**1.2** e) ........ $\boxed{(3v-2)^2}$

**1.2** f) ........ $\boxed{\left(\sqrt{2}z+5\right)^2}$

**1.3** a) ........ $\boxed{\{0\}}$

**1.3** b) ........ $\boxed{\left\{-\sqrt{17},\sqrt{17}\right\}}$

**1.3** c) ........ $\boxed{\{-5\}}$

**1.3** d) ........ $\boxed{\left\{\sqrt{2}\right\}}$

**1.3** e) ........ $\boxed{\left\{-\sqrt{5},\sqrt{5}\right\}}$

**1.3** f) ........ $\boxed{\left\{-\dfrac{4\sqrt{5}}{15},\dfrac{4\sqrt{5}}{15}\right\}}$

**1.4** a) ........ $\boxed{X^2-6X+16}$

**1.4** b) ........ $\boxed{2X^2+12X+13}$

**1.4** c) ........ $\boxed{-X^2-2\sqrt{2}X+4}$

**1.4** d) ........ $\boxed{4\sqrt{3}X^2-4\sqrt{3}X-\sqrt{3}}$

**1.4** e) ........ $\boxed{\dfrac{3}{4}X^2+\dfrac{3}{4}X+\dfrac{19}{16}}$

**1.4** f) ........ $\boxed{\dfrac{5}{18}X^2+\dfrac{10}{9}X+\dfrac{8}{9}}$

**1.5** a) ........ $\boxed{(X+1)^2+1}$

**1.5** b) ........ $\boxed{(X+2)^2-5}$

**1.6** a) ........ $\boxed{-(X-2)^2-1}$

**1.6** b) ........ $\boxed{4(X-1)^2-7}$

**1.6** c) ........ $\boxed{-9(X-2)^2+40}$

**1.6** d) ........ $\boxed{-2(X+5)^2+33}$

**1.7** a) ........ $\boxed{\left(X+\dfrac{3}{2}\right)^2-2}$

**1.7** b) ........ $\boxed{\dfrac{1}{4}(X+2)^2-2}$

**1.7** c) ........ $\boxed{\dfrac{2}{9}(X+18)^2-\dfrac{503}{7}}$

**1.7** d) ........ $\boxed{-\dfrac{9}{8}\left(X+\dfrac{2}{9}\right)^2-\dfrac{73}{18}}$

**1.7** e) ........ $\boxed{\dfrac{1}{2}\left(X+\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{21}{36}}$

**1.7** f) ........ $\boxed{-\dfrac{4}{5}\left(X+\dfrac{25}{48}\right)^2-\dfrac{2\ 581}{4\ 032}}$

**1.8** a) ........ $\boxed{\left(X+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}+\lambda}$

**1.8** b) ........ $\boxed{\dfrac{1}{4}(X+2\lambda)^2-\lambda^2-2}$

**1.8** c) ........ $\boxed{\lambda\left(X+\dfrac{4}{\lambda}\right)^2-\dfrac{16}{\lambda}+5}$

1.9 a) ........ $\boxed{-3\left(X+\dfrac{\lambda}{6}\right)^2+\dfrac{\lambda^2}{12}+2}$

1.9 b) ........ $\boxed{\dfrac{1}{2}\left(X+\dfrac{2\lambda}{3}\right)^2-\dfrac{2\lambda^2}{9}+\dfrac{3\lambda}{4}}$

1.9 c) ........ $\boxed{-\dfrac{4}{5}\left(X+\dfrac{25}{48}\lambda\right)^2+\dfrac{125}{576}\lambda^2}$

1.10 ........ d

1.11 ........ c

1.12 ........ a

1.13 ........ c

1.14 a) ........ Vrai

1.14 b) ........ Faux

1.14 c) ........ Faux

1.14 d) ........ Vrai

1.15 a) ........ $\boxed{\Omega=(1,-2) \text{ et } r=2}$

1.15 b) ........ $\boxed{\Omega=(-3,5) \text{ et } r=4}$

1.15 c) ........ $\boxed{\Omega=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right) \text{ et } r=1}$

1.15 d) ........ $\boxed{\Omega=\left(-\dfrac{5}{4},-\dfrac{4}{3}\right) \text{ et } r=\sqrt{2}}$

## Corrigés

**1.1 a)** On a $(2x+3)^2=(2x)^2+2\times 2x\times 3+3^3=4x^2+12x+9$.

**1.1 b)** On a $(3y-4)^2=(3y)^2-2\times 3y\times 4+4^2=9y^2-24y+16$.

**1.1 c)** On a $\left(-u+\sqrt{7}\right)^2=(-u)^2+2\times(-u)\times\sqrt{7}+\left(\sqrt{7}\right)^2=u^2-2\sqrt{7}u+7$.

**1.1 d)** On a $\left(-\sqrt{3}t-\sqrt{15}\right)^2=\left(-\sqrt{3}\right)^2-2\times\left(-\sqrt{3}t\right)\times\sqrt{15}+\left(\sqrt{15}\right)^2=3t^2+6\sqrt{5}t+15$.

**1.1 e)** On a $\left(\dfrac{3}{2}z+2\right)^2=\left(\dfrac{3}{2}z\right)^2+2\times\dfrac{3}{2}z\times 2+2^2=\dfrac{9}{4}z^2+6z+4$.

**1.1 f)** On a $\left(\dfrac{2}{5}v-\dfrac{2}{30}\right)^2=\left(\dfrac{2}{5}v\right)^2-2\times\dfrac{2}{5}v\times\dfrac{2}{3}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{25}v^2-\dfrac{8}{15}v+\dfrac{4}{9}$.

**1.2 a)** On a $x^2-25=x^2-5^2=(x-5)(x+5)$.

**1.2 b)** On a $4t^2-9=(2t)^2-3^2=(2t-3)(2t+3)$.

**1.2 c)** On a $\dfrac{2}{9}y^2-\dfrac{4}{5}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^2-\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}y-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}y+\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

**1.2 d)** On a $u^2+6u+9=u^2+2\times u\times 3+3^2=(u+3)^2$.

**1.2 e)** On a $9v^2-12v+4=(3v)^2-2\times 3v\times 2+2^2=(3v-2)^2$.

**1.2 f)** On a $2z^2+10\sqrt{2}z+25=\left(\sqrt{2}z\right)^2+2\times\sqrt{2}z\times 5+5^2=\left(\sqrt{2}z+5\right)^2$.

**1.3** a) On a $x^2 = 0 \iff x = 0$.

**1.3** b) On a $x^2 = 17 \iff x = -\sqrt{17}$ ou $x = \sqrt{17}$.

**1.3** c) On a $(2t+10)^2 = 0 \iff 2t+10 = 0 \iff 2t = -10 \iff t = -5$.

**1.3** d) On a $\left(-\sqrt{3}y + \sqrt{6}\right)^2 = 0 \iff -\sqrt{3}y + \sqrt{6} = 0 \iff -\sqrt{3}y = -\sqrt{6} \iff y = \sqrt{2}$.

**1.3** e) On a $2u^2 - 10 = 0 \iff 2u^2 = 10 \iff u^2 = 5 \iff u = -\sqrt{5}$ ou $u = \sqrt{5}$.

**1.3** f) On a $-\dfrac{3}{4}v^2 + \dfrac{4}{15} = 0 \iff -\dfrac{3}{4}v^2 = -\dfrac{4}{15} \iff v^2 = \dfrac{16}{45} \iff v = -\dfrac{4}{3\sqrt{5}}$ ou $v = \dfrac{4}{3\sqrt{5}}$.

**1.4** a) On a $(X-3)^2 + 7 = X^2 - 6X + 9 + 7 = X^2 - 6X + 16$.

**1.4** b) On a $2(X+3)^2 - 5 = 2(X^2 + 6X + 9) - 5 = 2X^2 + 12X + 13$.

**1.4** c) On a $-\left(X + \sqrt{2}\right)^2 + 6 = -\left(X^2 + 2\sqrt{2}X + 2\right) + 6 = -X^2 - 2\sqrt{2}X + 4$.

**1.4** d) On a $\sqrt{3}(2X-1)^2 - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}(4X^2 - 4X + 1) - 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}X^2 - 4\sqrt{3}X - \sqrt{3}$.

**1.4** e) On a $\dfrac{3}{4}\left(X + \dfrac{1}{2}\right)^2 + 1 = \dfrac{3}{4}\left(X^2 + X + \dfrac{1}{4}\right) + 1 = \dfrac{3}{4}X^2 + \dfrac{3}{4}X + \dfrac{19}{16}$.

**1.4** f) On a $\dfrac{5}{2}\left(-\dfrac{1}{3}X - \dfrac{2}{3}\right)^2 - \dfrac{2}{9} = \dfrac{5}{2}\left(\dfrac{1}{9}X^2 + \dfrac{4}{9}X + \dfrac{4}{9}\right) = \dfrac{5}{18}X^2 + \dfrac{10}{9}X + \dfrac{8}{9}$.

**1.5** a) On a $X^2 + 2X + 2 = X^2 + 2X + 1 + 1 = (X+1)^2 + 1$.

**1.5** b) On a $X^2 + 4X - 1 = (X+2)^2 - 4 - 1 = (X+2)^2 - 5$.

**1.6** a) On a $-X^2 + 4X - 5 = -(X^2 - 4X) - 5 = -(X-2)^2 + 4 - 5 = -(X-2)^2 - 1$.

**1.6** b) On a $4X^2 - 8X - 3 = 4(X^2 - 2X) - 3 = 4(X-1)^2 - 4 - 3 = 4(X-1)^2 - 7$.

**1.6** c) On a $-9X^2 + 36X + 4 = -9(X^2 - 4X) + 4 = -9(X-2)^2 + 36 + 4 = -9(X-2)^2 + 40$.

**1.6** d) On a $-2X^2 - 20X - 17 = -2(X^2 + 10X) - 17 = -2(X+5)^2 + 50 - 17 = -2(X+5)^2 + 33$.

**1.7** a) On a $X^2 + 3X + \dfrac{1}{4} = X^2 + 2 \times \dfrac{3}{2}X + \dfrac{1}{4} = \left(X + \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{9}{4} + \dfrac{1}{4} = \left(X + \dfrac{3}{2}\right)^2 - 2$.

**1.7 b)** On a $\frac{1}{4}X^2 + X - 1 = \frac{1}{4}(X^2 + 4X) - 1 = \frac{1}{4}(X+2)^2 - 1 - 1 = \frac{1}{4}(X+2)^2 - 2$.

**1.7 c)** On a $\frac{2}{9}X^2 + 8X + \frac{1}{7} = \frac{2}{9}(X^2 + 36X) + \frac{1}{7} = \frac{2}{9}(X+18)^2 - 72 + \frac{1}{7} = \frac{2}{9}(X+18)^2 - \frac{503}{7}$.

**1.7 d)** On a $-\frac{9}{8}X^2 - \frac{1}{2}X - 4 = -\frac{9}{8}\left(X^2 + \frac{4}{9}X\right) - 4 = -\frac{9}{8}\left(X + \frac{2}{9}\right)^2 + \frac{1}{18} - 4 = -\frac{9}{8}\left(X + \frac{2}{9}\right)^2 - \frac{71}{18}$.

**1.7 e)** On a $\frac{1}{2}X^2 + \frac{2}{3}X + \frac{3}{4} = \frac{1}{2}\left(X^2 + \frac{4}{3}X\right) + \frac{3}{4} = \frac{1}{2}\left(X + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2}{9} + \frac{3}{4} = \frac{1}{2}\left(X + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{19}{36}$.

**1.7 f)** On a $-\frac{4}{5}X^2 - \frac{5}{6}X - \frac{6}{7} = -\frac{4}{5}\left(X^2 + \frac{25}{24}X\right) - \frac{6}{7} = -\frac{4}{5}\left(X + \frac{25}{48}\right)^2 + \frac{125}{576} - \frac{6}{7}$. On obtient

$$-\frac{4}{5}\left(X + \frac{25}{48}\right)^2 - \frac{2\,581}{4\,032}.$$

**1.8 a)** On a $X^2 + 3X + \lambda = \left(X + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \lambda$.

**1.8 b)** On a $\frac{1}{4}X^2 + \lambda X - 2 = \frac{1}{4}(X^2 + 4\lambda X) - 2 = \frac{1}{4}(X + 2\lambda)^2 - \lambda^2 - 2$.

**1.8 c)** On a $\lambda X^2 + 8X + 5 = \lambda\left(X^2 + \frac{8}{\lambda}\right) + 5 = \lambda\left(X + \frac{4}{\lambda}\right)^2 - \frac{16}{\lambda} + 5$.

**1.9 a)** On a $-3X^2 - \lambda X + 2 = -3\left(X^2 + \frac{\lambda}{3}X\right) + 2 = -3\left(X + \frac{\lambda}{6}\right)^2 + \frac{\lambda^2}{12} + 2$.

**1.9 b)** On a $\frac{1}{2}X^2 + \frac{2\lambda}{3}X + \frac{3\lambda}{4} = \frac{1}{2}\left(X^2 + \frac{4\lambda}{3}\right) + \frac{3\lambda}{4} = \frac{1}{2}\left(X + \frac{2\lambda}{3}\right)^2 - \frac{2\lambda^2}{9} + \frac{3\lambda}{4}$.

**1.9 c)** On a $-\frac{4}{5}X^2 - \frac{5}{6}\lambda X = -\frac{4}{5}\left(X^2 + \frac{25}{24}\lambda X\right) = -\frac{4}{5}\left(X + \frac{25}{48}\lambda\right)^2 + \frac{125}{576}\lambda^2$.

**1.10** Le sommet de la parabole a pour coordonnées $(\alpha, \beta)$, qui sont les « paramètres » de la forme canonique. Sur le graphique, on peut lire que le sommet a pour coordonnées $(2, 1)$. Ainsi, seule la réponse (d) peut convenir.

**1.11** Sur le graphique, on peut lire ici que le sommet a pour coordonnées $(-3, 4)$. Ainsi, seule la réponse (c) peut convenir.

**1.12** On a $f(x) = 3x^2 + 4x - 2 = 3\left(x^2 + \frac{4}{3}x\right) - 2 = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} - 2 = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{10}{3}$. Ainsi, la parabole a pour sommet le point de coordonnées $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{10}{3}\right)$. La bonne réponse est donc (a).

**1.13** On a $g(t) = -\frac{1}{2}t^2 + t - 1 = -\frac{1}{2}(t^2 - 2t) - 1 = -\frac{1}{2}(t-1)^2 + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}(t-1)^2 - \frac{1}{2}$. Ainsi, a parabole a donc pour sommet le point de coordonnées $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$. La bonne réponse est donc (c).

**1.14 a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x^2 + x + 1 \geqslant \frac{1}{2} \iff \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 \geqslant \frac{1}{2} \iff \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \geqslant 0$.

Le premier membre est la somme de deux termes positifs, donc l'inégalité est vraie pour tout réel $x$. La proposition est donc vraie.

.......................................................................................................................................................

**1.14 b)** Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $t^2 + 3t > -1 \iff \left(t + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} > -1 \iff \left(t + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} > 0$.

Cette inégalité est fausse en particulier pour $t = -\frac{3}{2}$. La proposition est donc fausse.

.......................................................................................................................................................

**1.14 c)** Soit $z \in \mathbb{R}$. On a $3z + z^2 < 2z^2 - 4 \iff z^2 - 3z - 4 > 0 \iff \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 4 > 0$.

Cette proposition est équivalente à $\left(z - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} > 0$.

Cette inégalité est fausse en particulier pour $z = \frac{3}{2}$. La proposition est donc fausse.

.......................................................................................................................................................

**1.14 d)** Soit $v \in \mathbb{R}$. On a $\frac{4}{49}v^2 + \frac{61}{9} \geqslant \frac{20}{21}v \iff \frac{4}{49}\left(v^2 - \frac{35}{3}v\right) + \frac{61}{9} \geqslant 0 \iff \frac{4}{49}\left(v - \frac{35}{6}\right)^2 - \frac{25}{9} + \frac{61}{9} \geqslant 0$

Cette proposition est équivalente à $\frac{4}{49}\left(v - \frac{35}{6}\right)^2 + 4 \geqslant 0$.

Le premier membre est la somme de deux termes positifs, donc l'inégalité est vraie pour tout réel $v$. La proposition est donc vraie.

.......................................................................................................................................................

**1.15 a)** On a $x^2 - 2x + y^2 + 4y + 1 = 0 \iff (x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 + 1 = 0 \iff (x-1)^2 + (y+2)^2 = 2^2$.

On reconnaît le cercle de centre le point de coordonnées $(1, -2)$ et de rayon 2.

.......................................................................................................................................................

**1.15 b)** On a $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 18 = 0 \iff (x+3)^2 - 9 + (y-5)^2 - 25 + 18 = 0 \iff (x+3)^2 + (y-5)^2 = 4^2$.

On reconnaît le cercle de centre le point de coordonnées $(-3, 5)$ et de rayon 4.

.......................................................................................................................................................

**1.15 c)** On a $x^2 + y^2 - x - \frac{2}{3}y = \frac{23}{36} \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} = \frac{23}{36} \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = 1^2$.

On reconnaît le cercle de centre le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ et de rayon 1.

.......................................................................................................................................................

**1.15 d)** On a $x^2 + y^2 + \frac{5}{2}x + \frac{8}{3}y = \frac{-193}{144} \iff \left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} + \left(y + \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{16}{9} = -\frac{193}{144}$.

On obtient $\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{4}{3}\right)^2 = \sqrt{2}^2$.

On reconnaît le cercle de centre le point de coordonnées $\left(-\frac{5}{4}, -\frac{4}{3}\right)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

.......................................................................................................................................................