Suites géométriques

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 1.1 — Des développements.

Développer les expressions suivantes.

a) $(2x-3)^2$ ....

b) $(7-8x)(8x+7)$ ....

c) $-3(-x+2)(6-5x)$ ....

d) $5\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ ....

Calcul 1.2 — Des factorisations.

Factoriser les expressions suivantes.

a) $4x^2-49$ ....

b) $(5-3x)^2-16$ ....

c) $-\dfrac{3}{2}x^2-6x$ ....

d) $\dfrac{4}{9}x^2-\dfrac{25}{4}$ ....

e) $121x^2-110x+25$ ....

f) $(3x-7)(x+5)-(3x-7)(-4x+3)$ ....

Calcul 1.3 — Images.

On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{5}$ pour tout réel x.

Calculer les images de :

a) $\dfrac{3}{4}$ ....

b) $-\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$ ....

Calcul 1.4 — Antécédents.

On considère la fonction f définie par $f(x)=-\dfrac{1}{4}x+5$ pour tout réel x.

Déterminer les antécédents de :

a) 0 ....

b) $-\dfrac{3}{2}$ ....

Calcul de termes

Calcul 1.5

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 3$.

a) Calculer u_4 ....

b) Calculer u_6 ....

Calcul 1.6

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \sqrt{3}$ et de premier terme $u_0 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

a) Exprimer u_n en fonction de n ....

b) Calculer u_{123} ....

Calcul 1.7

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de raison $q = \dfrac{3}{2}$ telle que $u_6 = 16$.

a) Donner l'expression de u_n en fonction de n ....

b) Combien vaut u_{10} ?

On donnera une expression sous forme de fractions de puissances.

....

Calcul de termes, avec des paramètres

Calcul 1.8

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de raison q telle que $u_7 = \sqrt{2}$ et $u_{10} = 27\sqrt{2}$.

a) Déterminer la valeur de la raison de la suite ....

b) Calculer u_0 ....

Calcul 1.9

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 telle que $u_6 = \dfrac{3}{4}$ et $u_8 = 12$.

a) Déterminer les deux valeurs possibles de la raison q ....

b) Calculer u_0 ....

Calcul 1.10

Soit a un nombre réel.

On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_{41} = a$, $u_{42} = a - 2$ et $u_{43} = a + 1$.

a) Déterminer la valeur de a pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit géométrique ....

b) Calculer dans ce cas u_0 ....

Calcul 1.11

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite numérique définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_1 = 5$ et $u_{n+1} = 3u_n + \dfrac{4}{3}$.

Soit x un nombre réel. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n + x$.

a) Déterminer la valeur de x pour que (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) on ait $v_{n+1} = 3v_n$ ....

b) Donner alors l'expression de v_n en fonction de n ....

c) Exprimer enfin u_n en fonction de n ....

Calculs plus avancés

Calcul 1.12

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q telle que $u_1 = \dfrac{1}{2}$.

a) Exprimer $u_1 - 8u_2 - 4u_3$ en fonction de la raison q ....

b) Déterminer la raison q pour que l'expression $u_1 - 8u_2 - 4u_3$ soit maximale ....

c) Avec la raison trouvée à la question précédente, calculer u_8 ....

Calcul 1.13

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = a$.

a) Combien vaut 2^{10} ? ....

b) Déterminer la valeur de a telle que $u_0 + u_1 + \cdots + u_9 = 341$ ....

Réponses mélangées

$\dfrac{1}{2} - 4q - 2q^2.$ $\quad \left(\dfrac{2x}{3} - \dfrac{5}{2}\right)\left(\dfrac{2x}{3} + \dfrac{5}{2}\right)$ $\quad \dfrac{\sqrt{2}}{2187}$ $\quad -3^{61}$ $\quad 3$ $\quad 3(1-3x)(3-x)$

$\dfrac{1}{3}$ $\quad x = 20$ $\quad 1024$ $\quad (11x-5)^2$ $\quad -\dfrac{1}{2}$ $\quad 26$ $\quad -\dfrac{9}{40}$ $\quad -\sqrt{3}^{n-1}$ $\quad 3^4$

$(3x-7)(5x+2)$ $\quad \dfrac{3}{16384}$ $\quad \dfrac{4}{5}$ $\quad 5 \times 3^{(n-1)}$ $\quad -15x^2 + 48x - 36$ $\quad -\dfrac{6}{5} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{41}$

$q = -1$ $\quad 192$ $\quad x = \dfrac{2}{3}$ $\quad 4x^2 - 12x + 9$ $\quad 5x^2 - 5x + 2$ $\quad 49 - 64x^2$ $\quad q = 4$ ou $q = -4$

$16 \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-6}$ $\quad -3x\left(\dfrac{x}{2} + 2\right)$ $\quad (2x-7)(2x+7)$ $\quad \dfrac{\sqrt{2}-3}{5}$ $\quad 48$ $\quad 5 \times 3^n$

► Réponses et corrigés page 5

Fiche n° 1. Suites géométriques

Réponses

1.1 a) .... $\boxed{4x^2 - 12x + 9}$

1.1 b) .... $\boxed{49 - 64x^2}$

1.1 c) .... $\boxed{-15x^2 + 48x - 36}$

1.1 d) .... $\boxed{5x^2 - 5x + 2}$

1.2 a) .... $\boxed{(2x-7)(2x+7)}$

1.2 b) .... $\boxed{3(1-3x)(3-x)}$

1.2 c) .... $\boxed{-3x\left(\frac{x}{2}+2\right)}$

1.2 d) .... $\boxed{\left(\frac{2x}{3}-\frac{5}{2}\right)\left(\frac{2x}{3}+\frac{5}{2}\right)}$

1.2 e) .... $\boxed{(11x-5)^2}$

1.2 f) .... $\boxed{(3x-7)(5x+2)}$

1.3 a) .... $\boxed{-\frac{9}{40}}$

1.3 b) .... $\boxed{\frac{\sqrt{2}-3}{5}}$

1.4 a) .... $\boxed{x = 20}$

1.4 b) .... $\boxed{26}$

1.5 a) .... $\boxed{48}$

1.5 b) .... $\boxed{192}$

1.6 a) .... $\boxed{-\sqrt{3}^{n-1}}$

1.6 b) .... $\boxed{-3^{61}}$

1.7 a) .... $\boxed{16 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-6}}$

1.7 b) .... $\boxed{3^4}$

1.8 a) .... $\boxed{3}$

1.8 b) .... $\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2187}}$

1.9 a) .... $\boxed{q = 4 \quad \text{ou} \quad q = -4}$

1.9 b) .... $\boxed{\frac{3}{16384}}$

1.10 a) .... $\boxed{\frac{4}{5}}$

1.10 b) .... $\boxed{-\frac{6}{5} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{41}}$

1.11 a) .... $\boxed{x = \frac{2}{3}}$

1.11 b) .... $\boxed{5 \times 3^n}$

1.11 c) .... $\boxed{5 \times 3^{(n-1)}}$

1.12 a) .... $\boxed{\frac{1}{2} - 4q - 2q^2.}$

1.12 b) .... $\boxed{q = -1}$

1.12 c) .... $\boxed{-\frac{1}{2}}$

1.13 a) .... $\boxed{1024}$

1.13 b) .... $\boxed{\frac{1}{3}}$

Corrigés

1.1 a) On a $(2x-3)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$.

1.1 b) On a $(7-8x)(8x+7) = (7-8x)(7+8x) = 7^2 - (8x)^2 = 49 - 64x^2$.

1.1 c) On a

$$\begin{aligned} -3(-x+2)(6-5x) &= (3x-6)(6-5x) = 3x \times 6 - 3x \times 5x - 6 \times 6 + 6 \times 5x \\ &= 18x - 15x^2 - 36 + 30x = -15x^2 + 48x - 36. \end{aligned}$$

1.1 d) On a $5\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 5\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4} = 5x^2 - 5x + \frac{5}{4} + \frac{3}{4} = 5x^2 - 5x + 2$.

1.2 a) On a $4x^2 - 49 = (2x)^2 - 7^2 = (2x-7)(2x+7)$.

1.2 b) On a $(5-3x)^2 - 16 = (5-3x)^2 - 4^2 = (5-3x-4)(5-3x+4) = (1-3x)(9-3x) = 3(1-3x)(3-x)$.

1.2 c) On a $-\frac{3}{2}x^2 - 6x = -3x \times \frac{x}{2} - 3x \times 2 = -3x\left(\frac{x}{2} + 2\right)$.

1.2 d) On a $\frac{4}{9}x^2 - \frac{25}{4} = \left(\frac{2x}{3}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{2x}{3} - \frac{5}{2}\right)\left(\frac{2x}{3} + \frac{5}{2}\right)$.

1.2 e) On a $121x^2 - 110x + 25 = (11x)^2 - 2 \times 11x \times 5 + 5^2 = (11x - 5)^2$.

1.2 f) On a

$$\begin{aligned}(3x-7)(x+5) - (3x-7)(-4x+3) &= (3x-7)\big((x+5) - (-4x+3)\big) \\ &= (3x-7)(x+5+4x-3) = (3x-7)(5x+2).\end{aligned}$$

1.3 a) On a $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\frac{3}{4}}{2} - \frac{3}{5} = \frac{3}{8} - \frac{3}{5} = \frac{15}{40} - \frac{24}{40} = -\frac{9}{40}$.

1.3 b) On a $f\left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\right) = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{5}}{2} - \frac{3}{5} = \frac{\sqrt{2}}{5} - \frac{3}{5} = \frac{\sqrt{2} - 3}{5}$.

1.4 a) On a $-\frac{1}{4}x + 5 = 0 \iff \frac{1}{4}x = 5 \iff x = 5 \times 4 = 20$. L'antécédent de 0 par la fonction f est 20.

1.4 b) On a $-\frac{1}{4}x + 5 = -\frac{3}{2} \iff \frac{1}{4}x = 5 + \frac{3}{2} \iff x = \frac{13}{2} \times 4 = 26$. L'antécédent de $-\frac{3}{2}$ par la fonction f est 26.

1.5 a) On a $u_4 = u_0 \times q^4 = 3 \times 2^4 = 48$.

1.5 b) On a $u_6 = u_0 \times q^6 = 3 \times 2^6 = 192$.

1.6 a) On a $u_n = -\frac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{3}^n = -\sqrt{3}^{n-1}$.

1.6 b) On a $u_{123} = u_0 \times q^{123}$. Donc, $u_{123} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{3}^{123} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}^{122}$. Donc, $u_{123} = -3^{61}$.

1.7 a) On a $u_n = u_6 \times q^{n-6} = 16 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-6}$.

1.7 b) On a $u_{10} = 16 \times \left(\frac{3}{2}\right)^4 = 3^4$.

1.8 a) On a $u_{10} = u_7 \times q^3 \iff q^3 = \frac{u_{10}}{u_7} = 27 \iff q = 3$.

1.8 b) On a $u_0 = u_7 \times q^{-7} = 3^{-7} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3^7} = \frac{\sqrt{2}}{2187}$.

1.9 a) On a $q^2 = \frac{u_8}{u_6} = \frac{12}{\frac{3}{4}} = 16 \iff q = 4$ ou $q = -4$.

1.9 b) On a $u_0 = u_6 \times q^{-6}$. Donc, on a $u_0 = \frac{3}{4^7} = \frac{3}{16384}$.

1.10 a) On a $u_{42}^2 = u_{41} \times u_{43} \iff (a-2)^2 = a(a+1) \iff a^2 - 4a + 4 = a^2 + a \iff 5a = 4 \iff a = \dfrac{4}{5}$.

1.10 b) On a $q = \dfrac{u_{42}}{u_{41}} = \dfrac{a-2}{a} = -\dfrac{3}{2}$. Donc $u_0 = u_{41} \times q^{-41} = -\dfrac{6}{5} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{41}$.

1.11 a) On a $v_{n+1} = u_{n+1} + x = 3u_n + \dfrac{4}{3} + x$, et $3v_n = 3(u_n + x) = 3u_n + 3x$. Donc, on a

$$v_{n+1} = 3v_n \iff 3u_n + \frac{4}{3} + x = 3u_n + 3x \iff \frac{4}{3} + x = 3x \iff x = \frac{2}{3}.$$

1.11 b) La suite $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $v_1 = u_1 + \dfrac{2}{3} = 5 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{17}{3}$. Donc, on a $v_n = v_1 \times q^{(n-1)} = \dfrac{17}{3} \times 3^{(n-1)} = 17 \times 3^{(n-2)}$.

1.11 c) On a $u_n = \dfrac{v_n}{3} = \dfrac{17 \times 3^{(n-2)}}{3} = 17 \times 3^{(n-3)}$.

1.12 a) On a $u_1 = \dfrac{1}{2}$, $u_2 = u_1 \times q = \dfrac{q}{2}$ et $u_3 = u_2 \times q = \dfrac{q^2}{2}$. Donc, on a $u_1 - 8u_2 - 4u_3 = \dfrac{1}{2} - 4q - 2q^2$.

1.12 b) On a $u_1 - 8u_2 - 4u_3 = -2(q+1)^2 + \dfrac{5}{2} \leqslant \dfrac{5}{2}$, pour tout q. Donc, l'expression $u_1 - 8u_2 - 4u_3$ est maximale si, et seulement si, $q = -1$.

1.12 c) On a $u_8 = u_1 \times q^7 = \dfrac{1}{2} \times (-1)^7 = -\dfrac{1}{2}$.

1.13 a) On a $2^{10} = 1024$.

1.13 b) On a $u_0 + u_1 + \cdots + u_9 = u_0 \times \dfrac{1-q^{10}}{1-q}$. En plus $u_0 + u_1 + \cdots + u_9 = 341$ et $q = 2$.

Donc $a = u_0 = \dfrac{341 \times (1-2)}{1-2^{10}} = \dfrac{341}{1023} = \dfrac{1}{3}$.