

## DS 1 d'informatique

2 heures

---

### Lisez attentivement les consignes ci-dessous

- *Les documents, calculatrices et autres appareils électroniques sont interdits.*
- *La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.*
- *La présentation de la copie sera prise en compte dans l'évaluation :*
  - ▷ *Encadrez les résultats principaux.*
  - ▷ *Soignez votre écriture.*
  - ▷ *Maintenez une marge dans vos copies et aérez vos copies.*
  - ▷ *Numérotez vos copies.*
- ***Vos programmes doivent être clairs.***
  - ▷ *Choisissez judicieusement les noms de vos variables ainsi que les noms de vos fonctions auxiliaires.*
  - ▷ *Aérez vos programmes.*
  - ▷ *Faites des indentations suffisamment grandes.*
  - ▷ ***Indiquez les indentations par des traits verticaux.***
  - ▷ *L'introduction de **fonctions auxiliaires** est recommandée lorsqu'elle permet d'écrire des programmes plus clairs.*
  - ▷ *Si nécessaire, commentez vos programmes en utilisant une couleur secondaire.*
- ***Sauf instruction explicite du contraire, une fonction ne doit pas modifier ses arguments.***
- *Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie en expliquant les initiatives que vous avez été amené à prendre.*

# Nombres entiers en informatique

## Codage et opérations

*Le but de ce problème est d'étudier comment les nombres entiers sont codés dans la mémoire d'un ordinateur et comment les opérations sur ces nombres sont effectuées. On distinguera à ce titre deux types d'entiers : d'abord les entiers naturels, puis les entiers relatifs. On s'intéressera en particulier aux opérations suivantes : somme, produit et puissance.*

## Préliminaire

1. Écrire une fonction `copie(l)` qui prend en argument une liste `l` (composée de nombres) et qui renvoie une copie de cette liste.

## Partie I – Codage des entiers naturels

2. Écrire une fonction `listeChiffresBase2(n)` qui prend en argument un entier  $n$  et qui renvoie la liste `l` des chiffres de son écriture en base 2, « écrite à l'envers ».  
Le chiffre de l'écriture de  $n$  correspondant à  $2^k$  sera ainsi dans `l[k]`.

► `listeChiffresBase2(16)` renverra `[0, 0, 0, 0, 1]`.  
► `listeChiffresBase2(1)` renverra `[1]`.  
► `listeChiffresBase2(0)` renverra `[]`.

3. Écrire une fonction `ecritureBase2(n)` qui prend en argument un entier  $n$  et qui renvoie une chaîne de caractères commençant par « `0b` » et suivie des chiffres de l'écriture en base 2 de  $n$  (dans le bon sens).

*Cette fonction utilisera la fonction `listeChiffresBase2(n)`.*

► `ecritureBase2(16)` renverra `'0b10000'`.  
► `ecritureBase2(1)` renverra `'0b1'`.  
► `ecritureBase2(0)` renverra `'0b0'`.

4. Écrire une fonction `dechiffre(l)` qui prend en argument une liste `l` de zéros et de uns, « écrite à l'envers », et qui renvoie l'entier dont cette liste est l'écriture en base 2.

► `dechiffre([])` renverra `0`.  
► `dechiffre([1, 1, 1])` renverra `7`.  
► `dechiffre([0, 0, 0, 1])` renverra `8`.

## Définitions et conventions

- Dans ce problème, on utilisera les définitions suivantes :
  - ▷ un 2-entier est une liste de zéros et de uns ;
  - ▷ un 2-entier sera dit de taille  $N$  ssi sa longueur (en tant que liste) vaut  $N$ .
- Voici des exemples de 2-entiers :

[0, 0, 1], [0, 1, 1, 0], [0, 0, 0, 0], [].

- Les 2-entiers correspondent aux entiers naturels via les fonctions

`listeChiffresBase2(n)` et `dechiffre(l)`.

On prendra donc la convention de l'écriture « à l'envers ».

- Par exemple, le 2-entier [0, 0, 0, 1] correspond à 8 ; il est de taille 4.
- On notera les 2-entiers : `nn`, `mm`, `pp`, etc.

## Partie II – Premières fonctions

5. Écrire une fonction `estNul(nn)` qui prend en argument un 2-entier `nn` et qui renvoie :

- `True` s'il est nul ;
- `False` sinon.

► `estNul([1, 0, 1])` renverra `False`.  
► `estNul([0, 0, 0])` renverra `True`.  
► `estNul([])` renverra `True`.

6. Écrire une fonction `entierAjuste(nn, N)` qui prend en argument un 2-entier `nn` et une taille  $N \in \mathbb{N}^*$  et renvoie un 2-entier de taille  $N$  tel que

- si la taille de `nn` est  $< N$ , il est construit à partir de `nn` en y ajoutant des zéros.
- si la taille de `nn` est  $\geq N$ , il est construit à partir de `nn` en ne gardant que les termes d'indices les plus petits.

► `entierAjuste([1, 0, 1], 5)` renverra [1, 0, 1, 0, 0].  
► `entierAjuste([1, 0, 1, 0, 1, 1], 4)` renverra [1, 0, 1, 0].

7. (a) Donner l'écriture en base 2 de 424.  
(b) On note `nn = listeChiffresBase2(424)`.  
Quel entier sera renvoyé par `entierAjuste(nn, 5)` ?  
On donnera la réponse sous la forme d'un entier écrit en base 10.

## Partie III – Comparaison des entiers naturels

8. Écrire une fonction `entierNettoye(nn)` qui prend en argument un 2-entier `nn` et qui renvoie un 2-entier correspondant au même entier que `nn` mais qui n'a pas de zéros inutiles.

► `entierNettoye([1, 0, 1, 0, 0]) renverra [1, 0, 1].`

► `entierNettoye([0, 0]) renverra [].`

9. Écrire une fonction `comparaison(nn, pp)` qui prend en argument deux 2-entiers `nn` et `pp` et qui renvoie :

- 1 si  $n > p$ ,
- 0 si  $n = p$ ,
- -1 si  $n < p$ ,

où  $n$  et  $p$  sont les entiers naturels représentés par `nn` et `pp`.

Votre fonction ne devra utiliser aucun des opérateurs « < », « > », « <= », « >= » de Python.

► `comparaison([1, 0, 0], [1, 1]) renverra -1.`

► `comparaison([0, 0, 1], [1, 1]) renverra 1.`

► `comparaison([0, 0, 1], [0, 0, 1, 0]) renverra 0.`

## Partie IV – Codage des entiers relatifs

### Complément à deux

On fixe  $N \in \mathbb{N}^*$ .

On souhaite coder les nombres entiers relatifs dans  $\llbracket -2^{N-1}, 2^{N-1} - 1 \rrbracket$  à l'aide des 2-entiers de taille  $N$ .

Si  $n \in \llbracket -2^{N-1}, 2^{N-1} - 1 \rrbracket$ , on procède comme suit :

- si l'entier  $n$  est  $\geq 0$ , on le code à l'aide de `listeChiffresBase2(n)` qu'on complète éventuellement de zéros ;
- si l'entier  $n$  est  $< 0$ , on part de l'écriture de  $-n$  en tant que 2-entier de taille  $N$  ; on transforme les zéros en uns et vice versa dans cette écriture ; enfin, on ajoute 1 à ce 2-entier.

Le résultat est appelé écriture en base 2 de  $n$ , avec  $N$  bits, suivant la convention du complément à 2.

10. Donner l'écriture en base 2 de  $-1$  avec 4 bits, suivant la convention du complément à 2.
11. Écrire une fonction `miroir(nn)` qui prend en argument un 2-entier `nn` et qui renvoie le 2-entier de même taille déduit de `nn` en échangeant les zéros et les uns.

► `miroir([1, 1, 1, 1]) renverra [0, 0, 0, 0].`

► `miroir([1, 0, 1, 0]) renverra [0, 1, 0, 1].`

12. Écrire une fonction `increment(nn)` qui prend en argument un 2-entier `nn` et qui renvoie le 2-entier déduit de `nn` en lui ajoutant 1.

Votre fonction ne devra pas utiliser l'opérateur « + » de Python.

► `increment([1, 1, 1, 1]) renverra [0, 0, 0, 0, 0, 1].`

► `increment([1, 0, 1, 0]) renverra [0, 1, 1, 0, 1].`

13. Écrire une fonction `codage(n, N)`, qui prend en argument deux entiers `n` et `N`, qu'on supposera tels que  $n \in \llbracket -2^{N-1}, 2^{N-1} - 1 \rrbracket$  et qui renvoie le 2-entier correspondant à l'écriture en base 2 de `n`, avec `N` bits, suivant la convention du complément à 2.
14. Écrire une fonction `signe(nn, N)`, qui prend en argument un 2-entier `nn` et un entier `N`, et qui détermine son signe, en supposant que `nn` a été obtenu à partir d'un entier `n` dans  $\llbracket -2^{N-1}, 2^{N-1} - 1 \rrbracket$ .  
 Cette fonction renverra 1 si  $n > 0$ , 0 si  $n = 0$  et  $-1$  si  $n < 0$ .

## Partie V – Somme des entiers naturels

*Dans cette partie, on suppose que les 2-entiers codent des nombres entiers naturels.*

15. Écrire une fonction `somme(nn, pp)`, qui prend en argument deux 2-entiers `nn` et `pp`, et qui renvoie leur somme (sous forme de 2-entier).  
 Votre fonction ne devra pas utiliser l'opérateur « + » de Python.

► `somme([0, 1, 1, 0], [1])` renverra `[1, 1, 1, 0]`.  
 ► `somme([0, 1, 1, 0], [0, 1])` renverra `[0, 0, 0, 1]`.

## Partie VI – Produit des entiers naturels

*Dans cette partie, on suppose que les 2-entiers codent des nombres entiers naturels.*

16. Écrire une fonction `decremente(nn)` qui prend en argument un 2-entier `nn` et qui fait ce qui suit :
- si  $n \geq 1$ , elle soustrait 1 à `nn`, elle supprime les zéros finaux de `nn` et elle renvoie `True` ;
  - sinon, elle supprime les zéros finaux de `nn` et elle renvoie `False`.
- où  $n$  est l'entier correspondant à `nn`.  
 Votre fonction ne devra pas utiliser l'opérateur « - » de Python.
17. Écrire une fonction `produit(nn, mm)`, qui prend en argument deux 2-entiers `nn` et `mm`, et qui renvoie leur produit (sous forme de 2-entier).  
 Votre fonction ne devra pas utiliser l'opérateur « + » ni l'opérateur « \* » de Python.

## Partie VII – Puissance entre entiers naturels

*Dans cette partie, on suppose que les 2-entiers codent des nombres entiers naturels.*

18. Écrire une fonction `puissance(nn, pp)`, qui prend en argument deux 2-entiers `nn` et `pp`, et qui renvoie le 2-entier correspondant à `nnpp`.  
 Votre fonction ne devra pas utiliser l'opérateur « \*\* » de Python.  
 Votre fonction devra implémenter l'algorithme d'exponentiation rapide.

FIN DU SUJET.

