PCSI 3 Lycée Sainte-Geneviève
2020/2021 9 novembre 2020

Devoir à la maison 6
Six contrôles des racines

À rendre pour le lundi 23 novembre 2020

En travaillant ce DM, vous vous entraînerez à chercher et à aller jusqu'au bout des choses.
Ce DM étant relativement facile, il est encore plus important que d'habitude de le faire de façon autonome, même si au final vous ne trouvez pas autant de questions que vous ne l'auriez voulu.
Par ce biais, vous progresserez vraiment.

Je suis organisé dans mon travail.
Je ne repousse pas au dernier moment ce que je dois faire.

Je me libère des plages de travail où je peux me consacrer au DM,
où je peux vraiment me concentrer — et chercher.

Six contrôles des racines

- *Dans ce problème, $P \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme complexe, unitaire, qu'on écrit*
$$P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0,$$
où $n \in \mathbb{N}$ est le degré de P et où $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $a_i \in \mathbb{C}$.
- *On fixe $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine complexe de P, quelconque.*
- *Le but de ce problème est de majorer $|\alpha|$ en fonction des coefficients de P.*

I. Préliminaires

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et soit $x \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que
$$x \geqslant \max(a, b) \iff \begin{cases} x \geqslant a \\ x \geqslant b \end{cases}$$

(b) Montrer que
$$x \leqslant \max(a, b) \iff (x > a \implies x \leqslant b).$$

II. Six contrôles des racines

2. Une majoration par le maximum.
Montrer que
$$|\alpha| \leqslant 1 + \max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} |a_k|. \tag{1}$$
On pourra procéder par l'absurde.

3. Une majoration par la somme.

(a) (i) On suppose que $|\alpha| > 1$. Montrer que
$$|\alpha| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|.$$

(ii) En déduire que
$$|\alpha| \leqslant \max\left(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right). \tag{2}$$

(b) Trouver un n-uplet $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que
$$\max\left(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right) < 1 + \max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} |a_k|.$$

4. Un lemme de contrôle.

Soit $r > 0$.

(a) On considère la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \dfrac{|a_{n-1}|}{t} + \dfrac{|a_{n-2}|}{t^2} + \cdots + \dfrac{|a_1|}{t^{n-1}} + \dfrac{|a_0|}{t^n}. \end{cases}$$

Étudier les variations de f.

(b) Montrer que

$$r^n \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| r^k \implies |\alpha| \leqslant r.$$

5. Majoration par la somme : une autre preuve.

Dans cette question, on pose $r_0 := \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$.

(a) On suppose que $|\alpha| > 1$.

(i) On suppose que $r_0 \geqslant 1$. Montrer, en utilisant la question **4.** (b), que $|\alpha| \leqslant r_0$.

(ii) On suppose que $r_0 < 1$. De même, en utilisant la question **4.** (b), montrer que $|\alpha| \leqslant 1$.

(b) En déduire que

$$|\alpha| \leqslant \max\left(1,\ \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right).$$

6. Une majoration par le maximum des quotients successifs.

On suppose que $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ a_k \neq 0$.

(a) Soit $r \in \mathbb{R}$ tel que

$$r \geqslant 2|a_{n-1}|, \quad r \geqslant 2\left|\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}\right|, \quad r \geqslant 2\left|\frac{a_{n-3}}{a_{n-2}}\right|, \quad \cdots, \quad r \geqslant 2\left|\frac{a_2}{a_1}\right|, \quad r \geqslant \left|\frac{a_0}{a_1}\right|.$$

(i) Montrer que

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \ r^n \geqslant 2^{n-k} |a_k| r^k.$$

(ii) En déduire que

$$r^n \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| r^k.$$

(b) Montrer que

$$|\alpha| \leqslant \max\left(2|a_{n-1}|,\ 2\left|\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}\right|,\ 2\left|\frac{a_{n-3}}{a_{n-2}}\right|,\ \ldots,\ 2\left|\frac{a_1}{a_2}\right|,\ \left|\frac{a_0}{a_1}\right|\right). \tag{3}$$

7. Une majoration par la somme des différences successives.

(a) En considérant le polynôme $(X-1)P$, montrer que

$$|\alpha| \leqslant |a_{n-1} - 1| + |a_{n-2} - a_{n-1}| + \cdots + |a_0 - a_1| + |a_0|. \tag{4}$$

(b) (i) Montrer que

$$|a_{n-1} - 1| + |a_{n-2} - a_{n-1}| + \cdots + |a_0 - a_1| + |a_0| \geqslant 1.$$

(ii) Trouver un n-uplet $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$\begin{cases} |a_{n-1} - 1| + |a_{n-2} - a_{n-1}| + \cdots + |a_0 - a_1| + |a_0| < \max\left(1,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right) \\ |a_{n-1} - 1| + |a_{n-2} - a_{n-1}| + \cdots + |a_0 - a_1| + |a_0| < 1 + \displaystyle\max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} |a_k|. \end{cases}$$

8. Une meilleure majoration par le maximum des quotients successifs.

On suppose que $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ a_k \in \mathbb{R}_+^*$.

On pose

$$c := \max\left(a_{n-1}, \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}, \frac{a_{n-3}}{a_{n-2}}, \dots, \frac{a_1}{a_2}, \frac{a_0}{a_1}\right) \quad \text{et} \quad Q := \frac{1}{c^n} P(cX).$$

À l'aide de la question **7.** (a), montrer que

$$|\alpha| \leqslant \max\left(a_{n-1}, \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}, \frac{a_{n-3}}{a_{n-2}}, \dots, \frac{a_1}{a_2}, \frac{a_0}{a_1}\right). \tag{5}$$

9. Une dernière majoration.

Soit $(\lambda_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ telle que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k} = 1$.

On pose

$$r := \max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} (\lambda_k |a_k|)^{1/(n-k)}.$$

(a) Montrer que

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \frac{r^n}{\lambda_k} \geqslant |a_k| r^k.$$

On distinguera le cas où $a_k = 0$ du cas où $a_k \neq 0$.

(b) Montrer que

$$|\alpha| \leqslant \max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} (\lambda_k |a_k|)^{1/(n-k)}. \tag{6}$$

On pourra utiliser la question **4.** (b).