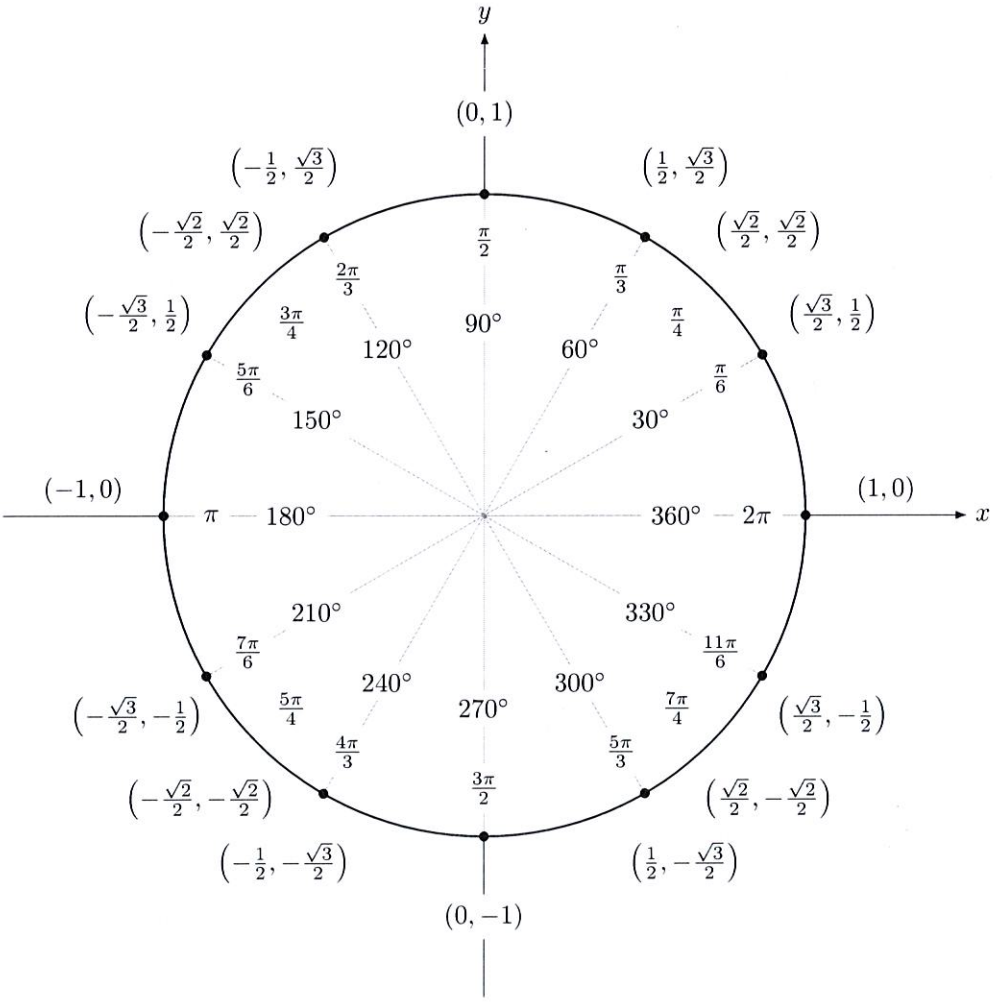
Intermède

Trigonométrie et nombres complexes

Méthodes et savoirs-faire



Le cercle trigonométrique

Trigonométrie

Compétences attendues

I. Techniques utilisant les nombres complexes

1. Linéarisation

$$\begin{aligned} \cos^3(t) &= \cdots \\ \sin^4(t) &= \cdots \\ \cos^2(x)\sin^2(x) &= \cdots \\ &\textit{etc.} \end{aligned}$$

2. Défactorisation

$$\begin{aligned} \cos(a)\sin(b) &= \frac{\sin(a+b)+\sin(b-a)}{2} \\ \cos(a)\cos(b) &= \cdots \\ \sin(a)\sin(b) &= \cdots \end{aligned}$$

3. Technique de l'angle-moitié

$$\begin{aligned} e^{i\theta}+e^{i\theta'} &= \cdots \\ e^{i\theta}-e^{i\theta'} &= \cdots \\ 1+e^{i\theta} &= \cdots \\ 1-e^{i\theta} &= \cdots \end{aligned}$$

4. Formules de factorisation

$$\begin{aligned} \cos(p)+\cos(q) &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \cos(p)-\cos(q) &= \cdots \\ \sin(p)+\sin(q) &= \cdots \\ \sin(p)-\sin(q) &= \cdots \end{aligned}$$

5. Délinéarisation

$$\begin{aligned} \cos(3t) &= \cos^3(t)-3\cos(t)\sin^2(t) \\ \cos(5t) &= \cdots \\ \sin(3t) &= \cdots \\ &\textit{etc.} \end{aligned}$$

6. Sommation

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n}\cos(kt) &= \cdots \\ \sum_{k=0}^{n}\sin(kt) &= \cdots \end{aligned}$$

II. Techniques utilisant ou non les nombres complexes

1. Formules d'addition

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cdots \\ \sin(a+b) &= \cdots \\ \cos(a-b) &= \cdots \\ \sin(a-b) &= \cdots \end{aligned}$$

2. Formules pour tangente

$$\begin{aligned} \tan(a+b) &= \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} \\ \tan(a-b) &= \cdots \end{aligned}$$

3. Formules de duplication

$$\begin{aligned} \cos(2a) &= 2\cos^2(a)-1 \\ \sin(2a) &= 2\sin(a)\cos(a) \end{aligned}$$

III. Techniques sans les complexes

1. Valeurs remarquables

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cdots$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cdots$$

etc.

2. Angles associés

$$\cos(\pi - x) = \cdots$$
$$\sin(-x) = \cdots$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cdots$$

etc.

3. Trouver la phase et l'amplitude

Transformer $A\cos(t) + B\sin(t)$ en $C\sin(t + \varphi)$

4. Graphes de $\sin$, $\cos$ et $\tan$

À connaître absolument !

5. Dérivées

$$\cos' = \cdots$$
$$\sin' = \cdots$$
$$\tan' = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$$

intermède

Trigonométrie et $\mathbb{C}$

I, 1) Linearisation

C'est transformer une expression c $\sin^5(x)$ ou $\cos^3(x)$ (ou $\sin^8(x)\cos^5(x)$) en des expressions faisant intervenir $\sin(5x)$, $\sin(4x)$, $\sin(3x)$, $\sin(2x)$, $\sin(x)$ et $\cos(x)$, $\cos(2x)$, $\cos(3x)$ ...

Méthode :

$$\sin^5(x) \xrightarrow[\text{Euler}]{} \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^5 \xrightarrow[\text{Newton}]{} \frac{(e^{ix})^5 - 5(e^{ix})^4 e^{-ix} \dots}{(2i)^5}$$

euler à l'envers

ok

Faisons-le

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sin^5(x) = \frac{1}{32i}\Big((e^{ix})^5 - 5(e^{ix})^4 e^{-ix} + 10(e^{ix})^3 e^{-2ix} - 10(e^{ix})^2(e^{-ix})^3 + 5(e^{ix})^1(e^{-ix})^4 - (e^{ix})^5\Big)$$

$$= \frac{1}{32i}\Big((e^{i5x}-e^{-i5x}) - 5(e^{i3x}-e^{-i3x}) + 10(e^{ix}-e^{-ix})\Big)$$

$$= \frac{1}{16}\left(\frac{e^{i5x}-e^{-i5x}}{2i} - 5\frac{e^{i3x}-e^{-i3x}}{2i} + 10\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\big(\sin(5x) - 5\sin(3x) + 10\sin(x)\big)$$

Rq* : la f^{o} $x \longmapsto \sin^4(x)$ est paire ≠ $\cos(\cdot)$

La linéarisation aurait fait apparaître des cos (AF)

Application

Calculons $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^5(x)\,dx$

$$= \frac{1}{16}\left(\int_0^{\pi/2} \sin(5x)\,dx - 5\int_0^{\pi/2} \sin(3x)\,dx + 10\int_0^{\pi/2} \sin(x)\,dx\right)$$

Astuce : le + général est le plus simple

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ On note $I_p := \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(px)\,dx$

On a $I_p = \left[-\frac{\cos(px)}{p}\right]_0^{\pi/2}$

Rappel !! : si $g(x) = f(ax)$

alors $g'(x) = a f'(ax)$

$$= \frac{1}{p}\left[\cos(px)\right]_{\pi/2}^{0} = \frac{1}{p}\left(\cos(0) - \cos\left(p\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{p}\left(1 - \cos\left(p\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

1, 0, -1, 0, 1 ...

$$= \frac{1}{16}\left(\frac{1}{5}\left(1-\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right)\right) - \frac{5}{3}\left(1-\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) + 10\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\right)$$

Remarque :

si p impair, on a $\cos\left(p\frac{\pi}{2}\right) = 0$

On a $I_p = \frac{1}{p}$

CCl $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^5(x)\,dx = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{5} - \frac{5}{3} + 10\right)$

$$= \frac{1}{16}\left(\frac{3 - 25 + 150}{15}\right)$$

$$= \frac{8}{15}$$

2) Défactorisation (T)

On a $\cos(a)\cdot\sin(b) \overset{\text{Euler}}{=} \dfrac{e^{ia}+e^{ia}}{2}\cdot\dfrac{e^{ib}-e^{-ib}}{2i}$

Dével. $= \dfrac{1}{4i}\left(e^{i(a+b)} - e^{i(a-b)} + e^{-i(a-b)} - e^{-i(a+b)}\right)$

Reconnaît $= \dfrac{1}{2}\left(\sin(a+b) - \sin(a-b)\right)$

3) Technique de l'angle-moitié !!!

Elle permet de factoriser des sommes d'exponentielles complexes

Exemple : Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. On a $e^{i\theta}+e^{i\theta'} =$

$$e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\left(e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} + e^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}}\right)$$

$$= 2e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)$$

Bilan : $e^{i\theta}+e^{i\theta'} = 2e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)$

AF $\quad \underset{e^{i0}}{1} + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}(\dots + \dots)$

$e^{i\theta} - e^{i\theta'}$

4) Formules de factorisation (T)

$$\sin(p)+\sin(q) \underset{\substack{\text{Astuce} \\ \operatorname{Im}(\cdot)}}{=} \operatorname{Im}\left(e^{ip}+e^{iq}\right)$$

Or $e^{ip}+e^{iq} = 2e^{i\frac{p+q}{2}}\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

or $\operatorname{Im}\left(2e^{i\frac{p+q}{2}}\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\right) = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\operatorname{Im}\left(e^{i\frac{p+q}{2}}\right)$

$$= 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

exo Resoudre $\cos x + \cos 2x = \cos 0 + \cos 3x$

5) Délinéarisation

On veut transformer une expression du type $\cos(3x)$ ou $\sin(8x)$ en une expression faisant intervenir $\cos(x)$, $\cos^2(x)$, $\cos^3(x)$, ... et $\sin(x)$, $\sin^2(x)$ ...

Exemple : Soit $x \in \mathbb{R}$

On a $\sin(3x) = \mathrm{Im}(e^{i3x})$ Astuce $\mathrm{Im}(\cdot)$

Or $e^{i3x} = (e^{ix})^3 = (\cos x + i\sin x)^3$

$= \cos^3(x) + 3i\cos^2(x)\sin(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) + (-i\sin^3(x))$

donc $\mathrm{Im}(e^{i3x}) = 3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x)$

CCl : $\sin(3x) = 3(1-\sin^2(x))\sin(x) - \sin^3(x)$

$= -4\sin^3(x) + 3\sin(x)$

Application : Polynômes de Tchebytchev !!

6) Sommation

Soit $t \in \mathbb{R}$

On a $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}(e^{ikt})$

Astuce $\mathrm{Re}(\cdot)$

$$= Re\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikt}\right)$$

On pose $S := \sum_{k=0}^{n} e^{ikt}$

On a $S = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{it}\right)^{k} \underset{\substack{SG \\ \text{car } e^{it} \neq 1}}{=} \dfrac{1-\left(e^{it}\right)^{n+1}}{1-e^{it}}$

or $1-e^{i(n+1)t} = e^{i\left(\frac{n+1}{2}\right)t}\left(e^{-i\left(\frac{n+1}{2}\right)t} - e^{i\left(\frac{n+1}{2}\right)t}\right)$

$$= -2i\, e^{i\left(\frac{n+1}{2}\right)t} \sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)$$

$$= -2i\, e^{i\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

donc $S = \dfrac{e^{i\left(\frac{n+1}{2}\right)t}}{e^{i\frac{t}{2}}} \dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$

$$= e^{i\frac{nt}{2}} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

CCL : $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt) = \cos\left(\frac{nt}{2}\right) \dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$

II

1) F^{le} d'addition

$\hat{C}$ $e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$

On a $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta')$

$= \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')$

Donc $\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta'$

$= \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')$

En passant à $Re(\cdot)$, on obtien

$$\cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta' = \cos(\theta+\theta')$$

De $\hat{m}$ avec $Im(\cdot)$, $(\cdot\cdot)$

2) → voir poly, ok

3) De $\hat{m}$, $e^{i2a} = (e^{ia})^2 = (\cos a + i\sin a)^2$

donc Re$(e^{i2a}) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = \cos(2a)$

III

1)
2) voir poly, ok

3) Trouver la phase et l'amplitude.

Prop : la somme de deux sinusoïdes est encore une sinusoïde

1) Soient $a, b \in \mathbb{R}$
alors $\exists\, c \in \mathbb{R}$ et $\exists\, \varphi \in [0, 2\pi[$:
$\forall\, t \in \mathbb{R}$, $A\cos(t) + B\sin(t) = C\sin(t+\varphi)$

2) Plus $gén^{nt}$; Ⓣ " $A\cos(t+\varphi_1) + B\sin(t+\varphi_2)$
$= C\sin(t+\varphi)$

D/ 1) Soit $t \in \mathbb{R}$

Osq $(A,B) \neq (0,0)$

Ⓡ On a donc $A^2+B^2>0$ Ⓐ OFAA

On écrit que $A\cos(t) + B\sin(t) = \sqrt{A^2+B^2}\left(\overbrace{\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}}^{\alpha}\cos(t)\right.$

$\left.+ \underbrace{\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}}_{\beta}\sin(t)\right)$

On a $\alpha^2+\beta^2=1$

Donc $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} \in \mathcal{C}_{trigo}$

Fixons donc $\varphi \in \mathbb{R}$ tq $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = M_\varphi = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$

On a alors

$A\cos(t) + B\sin(t) = \overbrace{\sqrt{A^2+B^2}}^{C}\left(\overbrace{\cos\varphi\cos t + \sin\varphi\sin t}^{\cos(t-\varphi)}\right)$

1) ■

2) $A\cos(t+\varphi_1) + B\sin(t+\varphi_2)$

$= A\cos t\cos\varphi_1 - A\sin t\sin\varphi_1$

$+ B\cos t\sin\varphi_2 + B\sin t\cos\varphi_2$

$= (A\cos\varphi_1 + B\sin\varphi_2)\cos(t) + (B\cos\varphi_2 - A\sin\varphi_1)\sin(t)$

$=$ ok ■