Suites arithmétiques

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 1.1 — Des fractions.

Écrire sous forme de fraction irréductible les nombres suivants.

a) $\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}$ .....

b) $\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{5}$ .....

c) $2+\dfrac{2}{7}$ ......

d) $2-\dfrac{2}{7}$ ......

Calcul 1.2 — Des petites équations.

Résoudre les équations suivantes, en donnant la valeur de leur unique solution.

a) $\dfrac{2}{3}x=6$ ....

b) $\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{5}x=4$ ....

c) $\dfrac{1}{3}-\dfrac{2x}{5}=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{x}{3}$ ..

Calcul 1.3

Résoudre les équations suivantes, en donnant l'ensemble de leurs solutions.

a) $\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2=2$ ....

b) $\left(2x-\dfrac{1}{2}\right)^2=4$ ....

c) $x^2-6x+9=0$ ....

d) $(x-1)^2=(x+2)^2$ ....

Premières suites

Calcul 1.4

Soit $(u_n)_n$ la suite arithmétique de raison 4 et de premier terme $u_0=6$.

a) $u_1=$ ....

b) $u_2=$ ....

c) $u_3=$ ....

d) $u_{100}=$ ....

Calcul 1.5

Soit $(u_n)_n$ la suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_1 = -5$.

a) $u_2 =$ ....

b) $u_3 =$ ....

c) $u_4 =$ ....

d) $u_{100} =$ ....

Calcul 1.6

Soit $(u_n)_n$ la suite arithmétique de raison -2 et de premier terme $u_1 = \dfrac{10}{3}$.

a) $u_2 =$ ....

b) $u_3 =$ ....

c) $u_4 =$ ....

d) $u_{10} =$ ....

Calcul 1.7

Soit $(u_n)_n$ la suite arithmétique de raison 3 telle que $u_5 = 8$.

a) $u_1 =$ ....

b) $u_{20} =$ ....

c) $u_{101} =$ ....

d) $u_{201} =$ ....

Secondes suites

Calcul 1.8

Soit $(u_n)_n$ la suite arithmétique de raison r telle que $u_3 = 23$ et $u_8 = 7$.

a) $r =$ ....

b) $u_5 =$ ....

c) $u_{10} =$ ....

d) $u_0 =$ ....

Calcul 1.9

Soit $(u_n)_n$ la suite arithmétique de raison r telle que $u_7 = \dfrac{4}{3}$ et $u_{13} = \dfrac{17}{9}$.

a) $r =$ ....

b) $u_0 =$ ....

Calcul 1.10

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère $(u_n)_n$ la suite arithmétique de raison a telle que $u_0 = a$.

Exprimer en fonction de a et de n :

a) $u_{10} =$ ....

b) $u_n =$ ....

Calcul 1.11

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite arithmétique de raison r définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$u_n = \frac{a^2 + (n-1)}{a}.$$

a) $r =$ ....

b) $u_1 =$ ....

Calcul 1.12

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère $(u_n)_n$ la suite définie, pout tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \dfrac{3 + 5an}{2}$.

Déterminer la valeur de a pour que la suite $(u_n)_n$ soit arithmétique de raison 2 ....

Calcul 1.13

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, par

$$u_{n+1} = \sqrt{3 + u_n^2}.$$

On admet que la suite $(u_n)_n$ a tous ses termes positifs.

Puis, pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n^2$. On admet que la suite $(v_n)_n$ est arithmétique.

a) Déterminer la raison de la suite $(v_n)_n$ ....

b) Exprimer v_n en fonction de n. ....

Calculs plus avancés

Calcul 1.14

Soit $(u_n)_n$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 1}{u_n + 3} \end{cases}$ et soit $(v_n)_n$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$. On admet que la suite $(v_n)_n$ est arithmétique.

a) Déterminer la raison de la suite arithmétique $(v_n)_n$ ....

b) Exprimer v_n en fonction de n ....

Calcul 1.15

On considère $(u_n)_n$ l'unique suite arithmétique de raison non nulle telle que $u_4 = 1$ et $\dfrac{1}{u_1 u_2} + \dfrac{1}{u_2 u_3} = 2$.

a) Déterminer la raison de la suite arithmétique $(u_n)_n$ ....

b) Exprimer u_n en fonction de n ....

Réponses mélangées

$\frac{12}{7}$	3	4	-2	$\frac{4}{3}$	$\frac{163}{5}$	53	$\frac{37}{54}$	$11a$	$\left\{\frac{1}{3} - \sqrt{2}, \frac{1}{3} + \sqrt{2}\right\}$	9
406	1	a	$\frac{3}{5}$	$-\frac{16}{5}$	$\frac{83}{5}$	292	$1 + 3n$	$\left\{-\frac{1}{2}\right\}$	$\{3\}$	$\frac{5}{54}$	$\frac{1}{a}$
$\frac{4}{5}$	$-\frac{2}{3}$	$\left\{-\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right\}$	$\frac{4+n}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{16}{7}$	$-\frac{44}{3}$	10	$\frac{8}{11}$	$\frac{4}{3}$
$-\frac{55}{6}$	$-\frac{8}{3}$	596	-4	$\frac{4n-13}{3}$	$-\frac{1}{15}$	296	$(n+1)a$	18	14	

► Réponses et corrigés page 5

Fiche n° 1. Suites arithmétiques

Réponses

1.1 a) $\boxed{\dfrac{7}{6}}$

1.1 b) $\boxed{-\dfrac{1}{15}}$

1.1 c) $\boxed{\dfrac{16}{7}}$

1.1 d) $\boxed{\dfrac{12}{7}}$

1.2 a) $\boxed{9}$

1.2 b) $\boxed{-\dfrac{55}{6}}$

1.2 c) $\boxed{\dfrac{8}{11}}$

1.3 a) $\boxed{\left\{\dfrac{1}{3}-\sqrt{2}, \dfrac{1}{3}+\sqrt{2}\right\}}$

1.3 b) $\boxed{\left\{-\dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{4}\right\}}$

1.3 c) $\boxed{\{3\}}$

1.3 d) $\boxed{\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}}$

1.4 a) $\boxed{10}$

1.4 b) $\boxed{14}$

1.4 c) $\boxed{18}$

1.4 d) $\boxed{406}$

1.5 a) $\boxed{-2}$

1.5 b) $\boxed{1}$

1.5 c) $\boxed{4}$

1.5 d) $\boxed{292}$

1.6 a) $\boxed{\dfrac{4}{3}}$

1.6 b) $\boxed{-\dfrac{2}{3}}$

1.6 c) $\boxed{-\dfrac{8}{3}}$

1.6 d) $\boxed{-\dfrac{44}{3}}$

1.7 a) $\boxed{-4}$

1.7 b) $\boxed{53}$

1.7 c) $\boxed{296}$

1.7 d) $\boxed{596}$

1.8 a) $\boxed{-\dfrac{16}{5}}$

1.8 b) $\boxed{\dfrac{83}{5}}$

1.8 c) $\boxed{\dfrac{3}{5}}$

1.8 d) $\boxed{\dfrac{163}{5}}$

1.9 a) $\boxed{\dfrac{5}{54}}$

1.9 b) $\boxed{\dfrac{37}{54}}$

1.10 a) $\boxed{11a}$

1.10 b) $\boxed{(n+1)a}$

1.11 a) $\boxed{\dfrac{1}{a}}$

1.11 b) $\boxed{a}$

1.12 $\boxed{\dfrac{4}{5}}$

1.13 a) $\boxed{3}$

1.13 b) $\boxed{1+3n}$

1.14 a) $\boxed{\dfrac{1}{4}}$

1.14 b) $\boxed{\dfrac{4+n}{4}}$

1.15 a) $\boxed{\dfrac{4}{3}}$

1.15 b) $\boxed{\dfrac{4n-13}{3}}$

Corrigés

1.3 a) On a $\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2 = 2 \iff (x-\dfrac{1}{3}) = \pm\sqrt{2}$.

1.3 c) On a $x^2-6x+9=(x-3)^2$. Ainsi, on a $x^2-6x+9=0 \iff x=3$.

1.3 d) On a $(x-1)^2=(x+2)^2 \iff x^2-2x+1=x^2+4x+4 \iff -6x=3 \iff x=-\dfrac{1}{2}$.

1.8 a) On sait que $u_n = u_p + (n-p)\times r$. Donc $u_8 = u_3 + 5r$. D'où $5r = u_8 - u_3$. Ainsi $r = \dfrac{1}{5}(u_8-u_5) = -\dfrac{16}{5}$.

1.9 a) On a $u_{13} - u_7 = (13-7)r$. D'où $r = \dfrac{u_{13} - u_7}{6} = \dfrac{\frac{17}{9} - \frac{4}{3}}{6} = \dfrac{\frac{17}{9} - \frac{12}{9}}{6} = \dfrac{\frac{5}{9}}{6} = \dfrac{5}{54}$.

1.9 b) On a $u_7 = u_0 + 7r$. D'où $u_0 = u_7 - 7r = \dfrac{4}{3} - 7 \times \dfrac{5}{54} = \dfrac{4 \times 18}{3 \times 18} - \dfrac{35}{54} = \dfrac{72}{18} - \dfrac{35}{54} = \dfrac{37}{54}$.

1.10 a) On a $u_{10} = u_0 + 10 \times a = a + 10a = 11a$.

1.10 b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_n = a + n \times a = (n+1)a$.

1.11 a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{a^2 + (n+1-1)}{a} - \dfrac{a^2 + (n-1)}{a} = \dfrac{a^2 + n - a^2 - n + 1}{a} = \dfrac{1}{a}$.

1.11 b) On a $u_1 = \dfrac{a^2 + (1-1)}{a} = \dfrac{a^2}{a} = a$.

1.12 Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3 + 5a(n+1)}{2} - \dfrac{3 + 5an}{2} = \dfrac{5a}{2}$. De plus, $\dfrac{5a}{2} = 2 \iff 5a = 4 \iff a = \dfrac{4}{5}$.

1.13 a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $v_{n+1} - v_n = u_{n+1}^2 - u_n^2 = 3 + u_n^2 - u_n^2 = 3$. Ainsi, $(v_n)_n$ est arithmétique de raison 3.

1.13 b) On a $v_0 = u_0^2 = 1$. Donc pour tout entier n, on a $v_n = 1 + 3n$.

1.14 a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{\frac{5u_n - 1}{u_n + 3} - \frac{u_n + 3}{u_n + 3}} - \frac{1}{u_n - 1} \\ &= \frac{1}{\frac{4(u_n - 1)}{u_n + 3}} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{u_n + 3}{4(u_n - 1)} - \frac{4}{4(u_n - 1)} = \frac{u_n - 1}{4(u_n - 1)} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

1.14 b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $v_n = v_0 + n \times r = \dfrac{1}{u_0 - 1} + \dfrac{1}{4}n = \dfrac{1}{2-1} + \dfrac{1}{4}n = 1 + \dfrac{1}{4}n = \dfrac{4+n}{4}$.

1.15 a) Notons r la raison de la suite arithmétique $(u_n)_n$. On a $u_4 = 1$, $u_3 = 1 - r$, $u_2 = 1 - 2r$ et $u_1 = 1 - 3r$. Donc, $\dfrac{1}{u_1 u_2} + \dfrac{1}{u_2 u_3} = \dfrac{1}{(1-3r)(1-2r)} + \dfrac{1}{(1-2r)(1-r)} = 2$. En multipliant par $(1-3r)(1-2r)(1-r)$, on obtient $(1-r) + (1-3r) = 2(1-3r)(1-2r)(1-r)$.

Or, on a $(1-r) + (1-3r) - 2(1-3r)(1-2r)(1-r) = 12r^3 - 22r^2 + 8r = 2r(6r^2 - 11r + 4)$. Ainsi, on a $r = 0$ ou $6r^2 - 11r + 4 = 0$. On ne peut pas avoir $r = 0$ car la raison est supposée non nulle dans l'énoncé.

Le trinôme $6X^2 - 11X + 4$ a pour discriminant $(-11)^2 - 4 \times 6 \times 4 = 25$.

Ses deux racines sont $\dfrac{11-5}{2 \times 6} = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{11+5}{2 \times 6} = \dfrac{4}{3}$.

Si $r = \dfrac{1}{2}$, on a $u_3 = \dfrac{1}{2}$, puis $u_2 = 0$; c'est impossible car on doit avoir $u_2 \neq 0$.

Si $r = \dfrac{4}{3}$, $u_3 = 1 - \dfrac{4}{3} = -\dfrac{1}{3}$, puis $u_2 = -\dfrac{5}{3}$ et $u_1 = -3$. Et la relation est bien vérifiée car : $\dfrac{1}{3 \times \frac{5}{3}} + \dfrac{1}{\frac{5}{3} \times \frac{1}{3}} = 2$.

1.15 b) On a $u_n = u_0 + n \times r$. Or $u_0 = u_4 - 4r = 1 - 4 \times \dfrac{4}{3} = \dfrac{3}{3} - \dfrac{16}{3} = -\dfrac{13}{3}$. Donc $u_n = -\dfrac{13}{3} + \dfrac{4}{3}n = \dfrac{4n - 13}{3}$.