DS 6

4 heures

- *Tout résultat ou raisonnement doit être clairement justifié, sauf mention du contraire.*
- *La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.*
- *La présentation de la copie sera prise en compte dans l'évaluation :*
  - ▷ *encadrez les résultats principaux ;*
  - ▷ *soulignez les résultats et arguments intermédiaires importants ;*
  - ▷ *soignez votre écriture ;*
  - ▷ *maintenez une marge dans vos copies, aérez vos copies ;*
  - ▷ *enfin, numérotez vos copies (et non vos pages).*
- *Les documents, calculatrices et autres appareils électroniques sont interdits.*
- *Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie en expliquant les initiatives que vous avez été amené à prendre.*
- *Ne rendez pas le sujet avec vos copies.*

Notations générales

Dans tout le sujet, $\mathbb{K}$ *désigne* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*, et* E *désigne un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*
On rappelle que E^* *désigne l'espace vectoriel* $\mathrm{L}(E, \mathbb{K})$ *des formes linéaires sur* E*.*

Définitions et propriétés admises

Soit $f \in \mathrm{L}(E)$*.*

- *On dit que* f est nilpotent $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$
$$\exists k \in \mathbb{N} : f^k = 0_{\mathrm{L}(E)}.$$
  On note $\mathrm{Nil}(E)$ *l'ensemble des endomorphismes nilpotents de* E*.*
- *Si* f *est nilpotent, il existe un plus petit entier naturel* k *tel que* $f^k = 0_{\mathrm{L}(E)}$*.*
  On l'appelle indice de nilpotence de f*.*

Autour de la nilpotence

Deux résultats

Les parties I, II et IV sont indépendantes.
La partie III utilise des résultats de la partie II.

Partie I – Réduction des endomorphismes nilpotents.

Hypothèse

- *Dans cette partie, on suppose E de dimension finie et on pose $n \coloneqq \dim E$.*

Données et notations

- *On fixe $f \in \mathrm{L}(E)$.*
- *Dans cette partie, on fixe $a \in E$ et $p \in \mathbb{N}^*$, et on suppose que*

$$\begin{aligned} &\left(a, f(a), \ldots, f^{p-1}(a)\right) \text{ est libre} \\ &\left(\mathrm{Id}_E, f, \ldots, f^{p-1}, f^p\right) \text{ est liée.} \end{aligned}$$

- *On fixe $\Phi \in E^*$ telle que*

$$\forall i \in [\![0, p-2]\!],\ \Phi\big(f^i(a)\big) = 0 \qquad \text{et} \qquad \Phi\big(f^{p-1}(a)\big) = 1.$$

- *On pose*

$$F \coloneqq \mathrm{Vect}\big(a, f(a), \ldots, f^{p-1}(a)\big) \quad \text{et} \quad G \coloneqq \Big\{x \in E \;\Big|\; \forall i \in \mathbb{N},\ \Phi\big(f^i(x)\big) = 0\Big\}.$$

1. Existence de Φ.
Justifier l'existence de Φ.

2. (a) Montrer que $\left(\mathrm{Id}_E, f, \ldots, f^{p-1}\right)$ est libre.
(b) Montrer que F est stable par f.
(c) Montrer que G est stable par f.
(d) Montrer que F et G sont en somme directe.

3. Pour $i \in \mathbb{N}$, on note $\Phi_i \coloneqq \Phi \circ f^i$.
(a) Montrer que $\forall i \in \mathbb{N},\ \Phi_i \in E^*$.
(b) Montrer que

$$G = \bigcap_{i=0}^{p-1} \ker \Phi_i.$$

(c) Montrer que $\big(\Phi_0, \ldots, \Phi_{p-1}\big)$ est une famille libre.

4. *On admet que $\dim G = n - p$, ce qui sera démontré dans la partie* **IV**.
Montrer que $E = F \oplus G$.

5. **Étude du cas nilpotent.**
On suppose $E \neq \{0_E\}$. Soit $g \in \mathrm{Nil}(E)$, dont on note q l'indice de nilpotence.
On admet qu'il existe $b \in E$ tel que

$$\big(b, g(b), \dots, g^{q-1}(b)\big) \text{ est libre}$$

et on fixe un tel b.
On pose $H \coloneqq \mathrm{Vect}\big(b, g(b), \dots, g^{q-1}(b)\big)$; on admet que H est stable par g.
On note $g_{\|H}$ l'endomorphisme induit par g sur H.
Donner la matrice de $g_{\|H}$ dans la base $\big(g^{p-1}(b), g^{p-2}(b), \dots, g(b), b\big)$ de H.

6. **Bilan.**
Soit $g \in \mathrm{Nil}(E)$. En raisonnant par récurrence sur la dimension de E, montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} \boxed{J_{k_1}} & & & (0) \\ & \boxed{J_{k_2}} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \boxed{J_{k_q}} \end{pmatrix}$$

où $\forall i \in [\![1, q]\!]$, $k_i \in \mathbb{N}^*$ et où, pour $k \in \mathbb{N}^*$, la matrice $J_k \in \mathrm{M}_k(\mathbb{K})$ est définie par

$$J_k \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Partie II – Algébrisation des développements limités.

Une notation

Pour $n \in \mathbb{N}$ et pour $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, on note $P \equiv_n Q$ $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\exists R \in \mathbb{K}[X] : P - Q = X^{n+1}R.$$

7. **Compatibilité aux opérations algébriques.**
Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $P_1, Q_1, P_2, Q_2 \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$P_1 \equiv_n Q_1 \quad \text{et} \quad P_2 \equiv_n Q_2.$$

(a) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que $P_1 + \lambda P_2 \equiv_n Q_1 + \lambda Q_2$.
(b) Montrer que $P_1 \times P_2 \equiv_n Q_1 \times Q_2$.

8. **Une caractérisation analytique.**
Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que

$$P \equiv_n 0_{\mathbb{K}[X]} \iff \Big(P(t) = \mathrm{o}(t^n) \text{ quand } t \to 0\Big).$$

Notation

Si $f \in \mathscr{C}^\infty(]-1,1[,\mathbb{K})$ et si $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\mathsf{T}_{f,n} \coloneqq \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{X^k}{k!} \in \mathbb{K}[X].$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $f, g \in \mathscr{C}^\infty(]-1,1[,\mathbb{K})$.

(a) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que $\mathsf{T}_{f+\lambda g,n} = \mathsf{T}_{f,n} + \lambda \mathsf{T}_{g,n}$.

(b) Montrer que $\mathsf{T}_{f\times g,n} \equiv_n \mathsf{T}_{f,n} \times \mathsf{T}_{g,n}$.

Partie III – Existence d'une racine p-ième pour les unipotents.

Notations

- *Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et si $k \in \mathbb{N}$, on note* $\displaystyle\binom{\alpha}{k} \coloneqq \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$.
- *Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on note*

$$\mathsf{R}_{\alpha,n} \coloneqq \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} X^k.$$

Polynômes d'endomorphismes

- *Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et qu'on écrit*

$$P = a_0 + a_1X + \cdots + a_dX^d$$

(où $d \in \mathbb{N}$ et où $\forall i,\ a_i \in \mathbb{K}$), et si $f \in \mathrm{L}(E)$, alors on pose

$$P(f) \coloneqq a_0\mathrm{Id}_E + a_1 f + \cdots + a_d f^d.$$

- *On admet que, pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a alors*

$$(P+\lambda Q)(f) = P(f) + \lambda Q(f) \quad \text{et} \quad (PQ)(f) = P(f)\circ Q(f).$$

10. (a) Calculer $\mathsf{R}_{1/2,3}$.

(b) Calculer $(\mathsf{R}_{1/2,3})^2$.

11. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\mathsf{R}_{1/p,n})^p \equiv_n 1 + X$.

12. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\forall f \in \mathrm{Nil}(E),\ \exists g \in \mathrm{L}(E) : g^p = \mathrm{Id}_E + f$.

Remarque

Les endomorphismes qui s'écrivent $\mathrm{Id}_E + f$ où $f \in \mathrm{Nil}(E)$ sont appelés unipotents.
On a ainsi démontré, dans cette partie, que les endomorphismes unipotents admettent des racines p-ièmes pour tout $p \geqslant 1$.

Partie IV – Un peu de dualité.

Hypothèse

- *Dans cette partie, on suppose E de dimension finie et on pose $n \coloneqq \dim E$.*

Notations et propriétés admises

- *Si $\mathscr{F} \in E^n$ et qu'on écrit $\mathscr{F} = (x_1, \dots, x_n)$, où $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \in E$, on pose*

$$\mathrm{CL}_{\mathscr{F}} : \begin{cases} \mathbb{K}^n \longrightarrow E \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \longmapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i. \end{cases}$$

- *On pose également*

$$\mathrm{CL} : \begin{cases} E^n \longrightarrow \mathrm{L}(\mathbb{K}^n, E) \\ \mathscr{F} \longmapsto \mathrm{CL}_{\mathscr{F}}. \end{cases}$$

  On admet que CL *est linéaire.*

- *Si $\mathscr{B} \in E^n$, on admet que*

$$\mathscr{B} \text{ base de } E \implies \mathrm{CL}_{\mathscr{B}} \text{ isomorphisme}\,;$$

  dans ce cas, on note $\mathrm{Coords}_{\mathscr{B}} \coloneqq (\mathrm{CL}_{\mathscr{B}})^{-1}$.

- *Si $\mathscr{G} \in (E^*)^n$ et qu'on écrit $\mathscr{G} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, où $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\varphi_i \in E^*$, on pose*

$$\mathrm{EV}_{\mathscr{G}} : \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ x \longmapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

13. Soit $\mathscr{F} \in E^n$. Montrer que

$$\mathrm{CL}_{\mathscr{F}} \text{ isomorphisme} \implies \mathscr{F} \text{ base de } E.$$

14. Montrer que CL est un isomorphisme.

15. Soit $\mathscr{G}$ une base de E^*. Montrer que $\mathrm{EV}_{\mathscr{G}}$ est un isomorphisme.

16. Soit $\mathscr{G}$ une base de E^*.

(a) Montrer qu'il existe $\mathscr{B}$ une base de E telle que $\mathrm{Coords}_{\mathscr{B}} = \mathrm{EV}_{\mathscr{G}}$.

(b) On écrit $\mathscr{G} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ et on considère une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $\mathrm{Coords}_{\mathscr{B}} = \mathrm{EV}_{\mathscr{G}}$.

Montrer que, pour tout $p \in [\![1, n]\!]$,

$$\bigcap_{i=1}^{p} \ker \varphi_i = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n).$$

17. Une formule de dualité.

Soit $p \in \mathbb{N}$ et soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p) \in (E^*)^p$ une famille libre de formes linéaires de E.
Montrer que
$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{p} \ker \varphi_i\right) = n - p.$$

FIN DU SUJET.