Calcul de sommes II

Prérequis

Dans cette fiche, on utilisera la notation suivante : si $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}$, on note

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

- Pour une suite arithmétique $(u_n)_n$, on a
$$\sum_{n=n_0}^{n_1} u_n = (n_1 - n_0 + 1) \times \frac{(u_{n_0} + u_{n_1})}{2}.$$
- Pour $q \neq 1$, on a $$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 1.1

Développer, réduire et ordonner par puissances croissantes de x les expressions suivantes.

a) $(x+1)(x-2)$ ....

b) $(2-x)\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{5}{2}x\right)$ ....

c) $2(x-5)\left(\dfrac{3}{2} - x\right)$ ....

Calcul 1.2 — Quelques fractions.

Soit x un réel distinct de 1. Écrire les expressions suivantes sous forme d'une seule fraction simplifiée.

a) $x + 1 - \dfrac{1}{1-x}$ ....

b) $x - 4 - \dfrac{(x-5)(2+x)}{x-1}$ ....

Sommes et écritures littérales

Calcul 1.3

On considère deux réels a et b.

a) Combien y a-t-il de termes dans la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} a^k b^{4-k}$? ......

b) Écrire $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} a^k b^{4-k}$ sous sa forme développée ....

c) Calculer $(a-b)\displaystyle\sum_{k=0}^{4} a^k b^{4-k}$ ....

Calcul 1.4

On considère deux réels a et b.

a) Combien y a-t-il de termes dans la somme $\sum_{k=0}^{6}(-1)^k a^{6-k} b^k$? ....

b) Écrire $\sum_{k=0}^{6}(-1)^k a^{6-k} b^k$ sous sa forme développée ....

c) Calculer $(a+b)\sum_{k=0}^{6}(-1)^k a^{6-k} b^k$ ....

Calcul 1.5

On considère un réel a.

a) Combien y a-t-il de termes dans la somme $\sum_{k=0}^{6} a^k(-1)^{6-k}$? ......

b) Écrire $\sum_{k=0}^{6} a^k(-1)^{6-k}$ sous sa forme développée ....

c) Calculer $(a+1)\sum_{k=0}^{6} a^k(-1)^{6-k}$ ....

Calcul 1.6 — Une formule phare.

Calculer en fonction de b et n, $(1-b)\sum_{k=0}^{n} b^k$ ....

Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

Calcul 1.7

On considère une suite $(u_n)_n$, qui est arithmétique, de premier terme $u_0 = 1$ et dont la raison vaut $r = 2$.

Calculer :

a) $\sum_{n=1}^{10} u_n$ ....

b) $\sum_{n=5}^{15} u_n$ ....

c) Calculer $\sum_{n=0}^{N} u_n$ en fonction de N ....

Calcul 1.8

On considère une suite $(u_n)_n$, qui est arithmétique de premier terme $u_0 = -2$ et dont la raison vaut $r = \dfrac{3}{2}$.

Calculer :

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{5} u_n$ ....

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{15} u_n$ ....

c) Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{4N} u_n$ en fonction de N ....

Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Calcul 1.9 — Un QCM.

On considère une suite $(u_n)_n$, qui est une suite géométrique de raison q avec $q \neq 1$. On note $S = \displaystyle\sum_{k=5}^{10} u_k$.

Choisissez la bonne réponse :

(a) $S = u_5 \dfrac{1-q^{11}}{1-q}$ (b) $S = u_6 \dfrac{1-q^{6}}{1-q}$ (c) $S = u_5 \dfrac{1-q^{6}}{1-q}$ (d) $S = \dfrac{1-q^{11}}{1-q}$

....

Calcul 1.10 — Des sommes de termes d'une suite géométrique.

On considère une suite $(u_n)_n$, géométrique de premier terme u_0 et dont la raison vaut q.

Dans chacun des cas suivants, exprimer S en fonction de n.

a) $u_0 = \dfrac{1}{3}$, $q = -2$, $S = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k$ .....

b) $u_0 = 1$, $q = \sqrt{2}$, $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} u_k$ ....

c) $u_0 = 3$, $q = \dfrac{3}{2}$, $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} u_k$ ......

d) $u_0 = 1$, $q = 2^p$, $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ ......

Calcul 1.11 — Des calculs de sommes.

Calculer les sommes suivantes en fonction de n.

a) $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{3^{k+1}}$ ....

b) $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{3n} \frac{3^{2k}}{2^k}$ ....

c) $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (3^k - 2^{k+1})$ ....

d) $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2}{3^k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k-1}}{3^k}$ ....

Cas des suites arithmético-géométriques

Calcul 1.12 — Une somme arithmético-géométrique (I).

On considère $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + 1,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Les différentes questions de ce calcul sont liées.

a) Déterminer le réel α tel que $\alpha = \dfrac{4}{5}\alpha + 1$ ....

On admet que la suite $(v_n)_n$ définie par $v_n = u_n - \alpha$ est géométrique de raison $\dfrac{4}{5}$.

b) Déterminer l'expression générale de v_n puis celle de u_n en fonction de n ....

c) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$ ....

d) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ ....

Calcul 1.13 — Une somme arithmético-géométrique (I).

On considère $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = -1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = 2u_n - 4,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Déterminer λ, tel que $(u_n - \lambda)_n$ soit une suite géométrique ....

b) Donner l'expression de u_n en fonction de n ....

c) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ ....

Calculs plus avancés

Calcul 1.14 — Une somme pour calculer le terme général d'une suite (I).

Soit $(u_n)_n$ une suite vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathsf{S}(n) = \sum_{k=0}^{n} u_k = 3n(n+2)$.

a) En considérant $\mathsf{S}(0)$, calculer u_0 ...

b) En considérant $\mathsf{S}(1)$, calculer u_1 ...

c) Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $n < p$. Exprimer $\mathsf{S}(p) - \mathsf{S}(n)$ à l'aide d'une seule somme .

d) Calculer l'expression générale de u_n en fonction de n lorsque $n \in \mathbb{N}^*$ ....

Calcul 1.15 — Une somme pour calculer le terme général d'une suite (II).

Soit une suite $(u_n)_n$ définie pour $n \geqslant 2$ et vérifiant $\mathsf{S}(n) = \sum_{k=2}^{n} u_k = \frac{n-1}{n}$.

a) Calculer $u_4 + u_5 + u_6$ ....

b) Calculer $\sum_{k=p}^{p^2} u_k$ en fonction de p, avec $p \geqslant 3$ ....

c) Donner l'expression générale de u_n en fonction de n ....

Calcul 1.16 — Une fonction pour calculer une somme.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on pose

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k \quad \text{et} \quad \mathsf{S}(x) = \sum_{k=1}^{n} k x^k.$$

a) Calculer l'expression de $f(x)$ sans symbole $\sum$ en fonction de x et de n ....

b) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Exprimer $f'(x)$ à l'aide d'une somme .

c) À l'aide du calcul fait en a), donner une autre expression de $f'(x)$ ....

d) En déduire une expression de $\mathsf{S}(x)$ en fonction de x et n ....

Calcul 1.17 — Une série alternée.

On considère la suite $(u_n)_n$ définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$, et les deux suites $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

a) Calculer u_3 ....

b) Calculer $v_{n+1} - v_n$ ....

c) Calculer $w_{n+1} - w_n$ ....

d) Calculer $w_n - v_n$ ....

e) La suite $(v_n)_n$ est-elle croissante ?

(a) oui (b) non

....

f) La suite $(w_n)_n$ est-elle croissante ?

(a) oui (b) non

....

Réponses mélangées

$\frac{9}{2} - \frac{1+2^n}{3^n}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$ $\frac{-1}{(2n+2)(2n+1)}$ 7 $\frac{2}{3} + \frac{14}{3}x - \frac{5}{2}x^2$

$a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6$ $20\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} - 20$ $1 - b^{n+1}$ $a^5 - b^5$ (a)

120 $-15 + 13x - 2x^2$ $f'(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$ $\frac{25}{2}$ (b) $4 - 5 \times 2^n$

$4n + 9 - 5 \times 2^{n+1}$ $u_1 = 9$ $6n + 3$ $9\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2n} - 1\right)$ $5n - 15 + 20\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

$a^6 - a^5 + a^4 - a^3 + a^2 - a + 1$ $12N^2 - 5N - 2$ 4 $\frac{14-2x}{x-1}$ $\sum_{k=n+1}^{p} u_k$ 5 148

$\frac{2^p(1-2^{np})}{1-2^p}$ $f'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ 231 $u_3 = -\frac{5}{6}$ $\frac{3}{2} + \frac{3^{n+1}}{2} - 2^{n+2}$ $\frac{x^2}{x-1}$

$\frac{p^2-p+1}{p^2(p-1)}$ $(N+1)^2$ $5 - 4 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$ $b^4 + ab^3 + a^2b^2 + a^3b + a^4$ $-2 - x + x^2$

$a^7 + b^7$ $\frac{9}{7}\left(\left(\frac{9}{2}\right)^{3n} - 1\right)$ $\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ $\frac{1-2^{n+1}}{1-\sqrt{2}}$ $\frac{4}{9} - \frac{1}{9}(-2)^{n+1}$ $\frac{-1}{2n+1}$ 7

$u_0 = 0$ (c) $a^7 + 1$ $\frac{1}{n(n-1)}$ $\mathsf{S}(x) = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2}$ $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ 5

▶ Réponses et corrigés page 7

Fiche n° 1. Calcul de sommes II

Réponses

1.1 a) .... $\boxed{-2-x+x^2}$

1.1 b) .... $\boxed{\frac{2}{3}+\frac{14}{3}x-\frac{5}{2}x^2}$

1.1 c) .... $\boxed{-15+13x-2x^2}$

1.2 a) .... $\boxed{\frac{x^2}{x-1}}$

1.2 b) .... $\boxed{\frac{14-2x}{x-1}}$

1.3 a) .... $\boxed{5}$

1.3 b) .... $\boxed{b^4+ab^3+a^2b^2+a^3b+a^4}$

1.3 c) .... $\boxed{a^5-b^5}$

1.4 a) .... $\boxed{7}$

1.4 b) .... $\boxed{a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6}$

1.4 c) .... $\boxed{a^7+b^7}$

1.5 a) .... $\boxed{7}$

1.5 b) .... $\boxed{a^6-a^5+a^4-a^3+a^2-a+1}$

1.5 c) .... $\boxed{a^7+1}$

1.6 .... $\boxed{1-b^{n+1}}$

1.7 a) .... $\boxed{120}$

1.7 b) .... $\boxed{231}$

1.7 c) .... $\boxed{(N+1)^2}$

1.8 a) .... $\boxed{\frac{25}{2}}$

1.8 b) .... $\boxed{148}$

1.8 c) .... $\boxed{12N^2-5N-2}$

1.9 .... $\boxed{\text{c}}$

1.10 a) .... $\boxed{\frac{4}{9}-\frac{1}{9}(-2)^{n+1}}$

1.10 b) .... $\boxed{\frac{1-2^{n+1}}{1-\sqrt{2}}}$

1.10 c) .... $\boxed{9\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2n}-1\right)}$

1.10 d) .... $\boxed{\frac{2^p(1-2^{np})}{1-2^p}}$

1.11 a) .... $\boxed{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}$

1.11 b) .... $\boxed{\frac{9}{7}\left(\left(\frac{9}{2}\right)^{3n}-1\right)}$

1.11 c) .... $\boxed{\frac{3}{2}+\frac{3^{n+1}}{2}-2^{n+2}}$

1.11 d) .... $\boxed{\frac{9}{2}-\frac{1+2^n}{3^n}}$

1.12 a) .... $\boxed{5}$

1.12 b) .... $\boxed{5-4\times\left(\frac{4}{5}\right)^n}$

1.12 c) .... $\boxed{20\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}-20}$

1.12 d) .... $\boxed{5n-15+20\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}}$

1.13 a) .... $\boxed{4}$

1.13 b) .... $\boxed{4-5\times 2^n}$

1.13 c) .... $\boxed{4n+9-5\times 2^{n+1}}$

1.14 a) .... $\boxed{u_0=0}$

1.14 b) .... $\boxed{u_1=9}$

1.14 c) .... $\boxed{\sum_{k=n+1}^{p} u_k}$

1.14 d) .... $\boxed{6n+3}$

1.15 a) .... $\boxed{\frac{1}{6}}$

1.15 b) .... $\boxed{\frac{p^2-p+1}{p^2(p-1)}}$

1.15 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{n(n-1)}}$

1.16 a) .... $\boxed{\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}}$

1.16 b) .... $\boxed{f'(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}}$

1.16 c) .... $\boxed{f'(x)=\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}}$

1.16 d) .... $\boxed{\mathsf{S}(x)=\dfrac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2}}$

1.17 a) .... $\boxed{u_3=-\dfrac{5}{6}}$

1.17 b) .... $\boxed{\dfrac{-1}{(2n+2)(2n+1)}}$

1.17 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{(2n+2)(2n+3)}}$

1.17 d) .... $\boxed{\dfrac{-1}{2n+1}}$

1.17 e) .... $\boxed{\text{b}}$

1.17 f) .... $\boxed{\text{a}}$

Corrigés

1.1 a) On a $(x+1)(x-2)=x^2-2x+x-2=-2-x+x^2$.

....

1.1 b) On a $(2-x)(\frac{1}{3}+\frac{5}{2}x)=\frac{2}{3}+5x-\frac{1}{3}x-\frac{5}{2}x^2=\frac{2}{3}+\frac{15-1}{3}x-\frac{5}{2}x^2=\frac{2}{3}+\frac{14}{3}x-\frac{5}{2}x^2$.

....

1.1 c) On a $2(x-5)(\frac{3}{2}-x)=(x-5)(3-2x)=3x-2x^2-15+10x=-15+13x-2x^2$.

....

1.2 a) On a $x+1-\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{(x+1)(1-x)}{1-x}-\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{1-x^2}{1-x}-\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{-x^2}{1-x}=\dfrac{x^2}{x-1}$.

....

1.2 b) On a

$$\begin{aligned}x-4-\frac{(x-5)(2+x)}{x-1}=\frac{(x-4)(x-1)}{x-1}-\frac{(x-5)(2+x)}{x-1}&=\frac{x^2-4x-x+4-(2x-10+x^2-5x)}{x-1}\\&=\frac{x^2-5x+4-(x^2-3x-10)}{x-1}\\&=\frac{-2x+14}{x-1}=\frac{14-2x}{x-1}.\end{aligned}$$

....

1.3 b) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} a^kb^{4-k}=a^0b^4+a^1b^3+a^2b^2+a^3b^1+a^4b^0=b^4+ab^3+a^2b^2+a^3b+a^4$.

....

1.3 c) On a

$$\begin{aligned}(a-b)\sum_{k=0}^{4} a^kb^{4-k}&=(a-b)(b^4+ab^3+a^2b^2+a^3b+a^4)\\&=ab^4+a^2b^3+a^3b^2+a^4b+a^5-b^5-ab^4-a^2b^3-a^3b^2-a^4b\\&=a^5-b^5.\end{aligned}$$

....

1.4 b) On a

$$\sum_{k=0}^{6}(-1)^k a^{6-k}b^k = (-1)^0a^6b^0 + (-1)^1a^5b^1 + (-1)^2a^4b^2 + (-1)^3a^3b^3 + (-1)^4a^2b^4 + (-1)^5a^1b^5 + (-1)^6a^0b^6$$
$$= a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6.$$

1.4 c) On a

$$(a+b)\sum_{k=0}^{6}(-1)^k a^{6-k}b^k = (a-b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6)$$
$$= a^7 - a^6b + a^5b^2 - a^4b^3 + a^3b^4 - a^2b^5 + ab^6 + a^6b - a^5b^2 + a^4b^3 - a^3b^4 + a^2b^5 - ab^6 + b^7$$
$$= a^7 + b^7.$$

1.5 b) On a

$$\sum_{k=0}^{6} a^k(-1)^{6-k} = a^0(-1)^6 + a^1(-1)^5 + a^2(-1)^4 + a^3(-1)^3 + a^4(-1)^2 + a^5(-1)^1 + a^6(-1)^0$$
$$= 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + a^6.$$

1.5 c) On a

$$(a+1)\sum_{k=0}^{6} a^k(-1)^{6-k} = (a+1)(1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + a^6)$$
$$= a - a^2 + a^3 - a^4 + a^5 - a^6 + a^7 + 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + a^6 = a^7 + 1.$$

1.6 On écrit

$$(1-b)\sum_{k=0}^{n} b^k = \sum_{k=0}^{n} b^k - b\sum_{k=0}^{n} b^k = \sum_{k=0}^{n} b^k - \sum_{k=0}^{n} b^{k+1}$$
$$= \left(1 + b + b^2 + \cdots + b^n\right) - \left(b + b^2 + \cdots + b^n + b^{n+1}\right)$$
$$= 1 - b^{n+1}.$$

1.7 a) Pour commencer, on a $u_1 = u_0 + r = 1 + 2 = 3$ et $u_{10} = u_0 + 10 \times 2 = 1 + 20 = 21$. Donc, on a

$$\sum_{n=1}^{10} u_n = \frac{(3+21)\times 10}{2} = \frac{240}{2} = 120.$$

1.7 b) Pour commencer, on a $u_5 = 1 + 5 \times 2 = 11$ et $u_{15} = 1 + 15 \times 2 = 31$. Donc, on a

$$\sum_{n=5}^{15} u_n = \frac{(11+31)\times 11}{2} = \frac{462}{2} = 231.$$

1.7 c) Pour commencer, on a $u_N = 1 + N \times 2 = 2N + 1$. Donc, on a

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \frac{(u_0 + u_N)(N+1)}{2} = \frac{(1 + 2N + 1)(N+1)}{2} = \frac{(2N+2)(N+1)}{2} = (N+1)^2.$$

....

1.8 a) Pour commencer, on a $u_1 = -2 + \frac{3}{2} = \frac{-1}{2}$ et $u_5 = -2 + 5 \times \frac{3}{2} = \frac{-4+15}{2} = \frac{11}{2}$. Donc, on a

$$\sum_{n=1}^{5} u_n = \frac{(\frac{-1}{2} + \frac{11}{2}) \times 5}{2} = \frac{25}{2}.$$

....

1.8 b) On a $\displaystyle\sum_{n=0}^{15} u_n = \frac{(u_0 + u_{15}) \times 16}{2} = (-2 + (-2) + 15 \times \frac{3}{2}) \times 8 = (-4 + \frac{45}{2}) \times 8 = 148.$

....

1.8 c) On a

$$\sum_{n=0}^{4N} u_n = \frac{(-2 - 2 + 4N \times \frac{3}{2}) \times (4N+1)}{2} = \frac{(-4 + 6N)(4N+1)}{2} = (3N-2)(4N+1)$$

$$= 12N^2 - 5N - 2.$$

....

1.9 On a $\displaystyle S = \sum_{k=5}^{10} u_k = u_5 + q\,u_5 + q^2 u_5 + q^3 u_5 + q^4 u_5 + q^5 u_5 = u_5 \sum_{k=0}^{5} q^k = u_5 \frac{1-q^6}{1-q}.$

....

1.10 a) On a

$$S = \sum_{k=2}^{n} u_k = u_2 \sum_{k=0}^{n-2} u_k = \left(\frac{1}{3} \times (-2)^2\right) \frac{1 - (-2)^{n-2+1}}{1 - (-2))} = \frac{4}{3} \times \frac{1 - (-2)^{n-1}}{3} = \frac{4}{9} - \frac{1}{9}(-2)^{n-1+2}$$

$$= \frac{4}{9} - \frac{1}{9}(-2)^{n+1}.$$

....

1.10 b) On a $\displaystyle S = \sum_{k=0}^{2n+1} u_k = u_0 \frac{1 - q^{2n+2}}{1-q} = 1 \times \frac{1 - \sqrt{2}^{2n+2}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - \sqrt{2}}.$

....

1.10 c) On a $\displaystyle S = \sum_{k=1}^{2n} u_k = u_1 \sum_{k=0}^{2n-1} = 3 \times \frac{3}{2} \frac{1 - (\frac{3}{2})^{2n-1+1}}{1 - \frac{3}{2}} = \frac{9}{2} \times \frac{1 - (\frac{3}{2})^{2n}}{-\frac{1}{2}} = -9\left(1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{2n}\right) = 9\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2n} - 1\right).$

....

1.10 d) On a $\displaystyle S = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0\, q \frac{1 - q^{n-1+1}}{1-q} = 2^p \frac{1 - (2^p)^n}{1 - 2^p} = \frac{2^p(1 - 2^{np})}{1 - 2^p}.$

....

1.11 a) On a $\displaystyle S = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{3^{k+1}} = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{3} \frac{1 - (\frac{2}{3})^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \times 3 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}.$

....

1.11 b) On a

$$S = \sum_{k=1}^{3n} \frac{3^{2k}}{2^k} = \sum_{k=1}^{3n} \left(\frac{3^2}{2}\right)^k = \frac{9}{2} \sum_{k=0}^{3n-1} \left(\frac{9}{2}\right)^k = \frac{9}{2} \times \frac{1 - (\frac{9}{2})^{3n-1+1}}{1 - \frac{9}{2}} = \frac{9}{2} \times \frac{-2}{7}\left(1 - \left(\frac{9}{2}\right)^{3n}\right)$$

$$= \frac{-9}{7}\left(1 - \left(\frac{9}{2}\right)^{3n}\right) = \frac{9}{7}\left(\left(\frac{9}{2}\right)^{3n} - 1\right).$$

1.11 c) On a

$$S = \sum_{k=0}^{n}(3^k - 2^{k+1}) = \sum_{k=0}^{n} 3^k - 2\sum_{k=0}^{n} 2^k = \frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} - 2 \times \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = \frac{-1}{2}(1 - 3^{n+1}) + 2(1 - 2^{n+1})$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{3^{n+1}}{2} - 2^{n+2}.$$

1.11 d) On a

$$S = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{3^k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k-1}}{3^k} = 2\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 2 \times \frac{1 - (\frac{1}{3})^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{1}{2} \times \frac{1 - (\frac{2}{3})^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$= 2 \times \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) + \frac{3}{2}\left(1 - \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}\right)$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{1}{3^n} - \frac{2^n}{3^n} = \frac{9}{2} - \frac{1 + 2^n}{3^n}.$$

1.12 a) On a $\alpha = \frac{4}{5}\alpha + 1 \iff \left(1 - \frac{4}{5}\right)\alpha = 1 \iff \frac{1}{5}\alpha = 1 \iff \alpha = 5.$

1.12 b) Pour commencer, on a $v_0 = u_0 - \alpha = 1 - 5 = -4$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n = -4 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$.

Puis, on a $u_n = v_n + \alpha = -4 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n + 5 = 5 - 4 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$.

1.12 c) On a

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n}\left(-4 \times \left(\frac{4}{5}\right)^k\right) = -4\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{4}{5}\right)^k = -4 \times \frac{1 - (\frac{4}{5})^{n+1}}{1 - \frac{4}{5}} = -4 \times 5\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right)$$

$$= 20\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} - 20.$$

1.12 d) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}(5 + v_k) = \sum_{k=0}^{n} 5 + \sum_{k=0}^{n} v_k = 5(n+1) + 20\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} - 20 = 5n - 15 + 20\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$.

1.13 a) On a $\lambda = 2\lambda - 4 \iff (1-2)\lambda = -4 \iff \lambda = 4.$

1.13 b) Pour commencer on vérifie que la suite $(v_n)_n$ définie par $v_n = u_n - 4$ est géométrique : on a

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = 2u_n - 4 - 4 = 2(u_n - 4) = 2v_n.$$

La suite $(v_n)_n$ est donc géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 4 = -1 - 4 = -5$.

On a donc $u_n = v_n + 4 = v_0 \times 2^n + 4 = -5 \times 2^n + 4 = 4 - 5 \times 2^n$.

1.13 c) On a

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \left(4 - 5 \times 2^k\right) = \sum_{k=0}^{n} 4 - 5 \sum_{k=0}^{n} 2^k = 4(n+1) - 5 \times \frac{1 - 2^{n+1}}{1-2} = 4n + 4 + 5(1 - 2^{n+1})$$
$$= 4n + 9 - 5 \times 2^{n+1}.$$

....

1.14 a) On a $\mathsf{S}(0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{0} u_k = 3 \times 0 \times (0+2)$, donc $u_0 = 0$.

....

1.14 b) On a $\mathsf{S}(1) = u_0 + u_1 = 3 \times 1 \times (1+2)$. Donc $0 + u_1 = 9$ et donc $u_1 = 9$.

....

1.14 c) On a $\mathsf{S}(p) - \mathsf{S}(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{p} u_k$.

....

1.14 d) Pour commencer, remarquons que $\mathsf{S}(n) - \mathsf{S}(n-1) = u_n$. On a donc

$$u_n = 3n(n+2) - 3(n-1)(n-1+2) = 3n^2 + 6n - 3(n^2 - 1) = 6n + 3.$$

....

1.15 a) On a $u_4 + u_5 + u_6 = \displaystyle\sum_{k=4}^{6} u_k = \mathsf{S}(6) - \mathsf{S}(3) = \frac{6-1}{6} - \frac{3-1}{3} = \frac{5}{6} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$.

....

1.15 b) On a

$$\sum_{k=p}^{p^2} u_k = \sum_{k=2}^{p^2} u_k - \sum_{k=2}^{p-1} u_k = \mathsf{S}(p^2) - \mathsf{S}(p-1) = \frac{p^2-1}{p^2} - \frac{p-2}{p-1} = \frac{(p^2-1)(p-1) - p^2(p-2)}{p^2(p-1)}$$
$$= \frac{p^3 - p^2 - p + 1 - p^3 + 2p^2}{p^2(p-1)}$$
$$= \frac{p^2 - p + 1}{p^2(p-1)}.$$

....

1.15 c) Pour commencer, on a $u_2 = \mathsf{S}(2) = \dfrac{2-1}{2} = \dfrac{1}{2}$. Soit $n \geqslant 3$, on a

$$u_n = \mathsf{S}(n) - \mathsf{S}(n-1) = \frac{n-1}{n} - \frac{n-2}{n-1} = \frac{(n-1)^2 - n(n-2)}{n(n-1)} = \frac{n^2 - 2n + 1 - (n^2 - 2n)}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)}.$$

L'expression trouvée est valable pour $n = 2$ car $\dfrac{1}{2 \times 1} = \dfrac{1}{2} = u_2$.

....

1.16 a) On a $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$.

....

1.16 b) Pour commencer, écrivons $f(x) = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k$. On a $f'(x) = 0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1}$.

....

1.16 c) On a

$$f'(x) = \frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1}-1) \times 1}{(x-1)^2} = \frac{(n+1)(x^{n+1}-x^n) - x^{n+1} + 1}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

1.16 d) Pour commencer, remarquons que $\mathsf{S}(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^k = x \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = xf'(x)$. On a alors

$$\mathsf{S}(x) = x\frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2}.$$

1.17 a) On a $u_3 = \sum_{k=1}^{3} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{(-1)^1}{1} + \frac{(-1)^2}{2} + \frac{(-1)^3}{3} = \frac{-1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{-1}{3} = \frac{-6+3-2}{6} = \frac{-5}{6}$.

1.17 b) On a

$$v_{n+1} - v_n = u_{2(n+1)} - u_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n}$$
$$= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=2n+1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k}$$
$$= \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2}$$
$$= \frac{-1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} = \frac{-(2n+2)+2n+1}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{-1}{(2n+1)(2n+2)}.$$

1.17 c) On a

$$w_{n+1} - w_n = u_{2(n+1)+1} - u_{2n+1} = u_{2n+3} - u_{2n+1}$$
$$= \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=2n+2}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k}$$
$$= \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3}$$
$$= \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} = \frac{2n+3-(2n+2)}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{1}{(2n+2)(2n+3)}.$$

1.17 d) On a $w_n - v_n = u_{2n+1} - u_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{-1}{2n+1}$.

1.17 e) On a $v_{n+1} - v_n = \frac{-1}{(2n+1)(2n+2)} < 0$. La bonne réponse est b.

1.17 f) On a $w_{n+1} - w_n = \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} > 0$. La bonne réponse est a.