PCSI 3 Lycée Sainte-Geneviève
2020/2021 Samedi 22 mai 2021

DS 7

4 heures

- *Tout résultat ou raisonnement doit être clairement justifié, sauf mention du contraire.*
- *La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.*
- *La présentation de la copie sera prise en compte dans l'évaluation :*
  - ▷ *encadrez les résultats principaux ;*
  - ▷ *soulignez les résultats et arguments intermédiaires importants ;*
  - ▷ *soignez votre écriture ;*
  - ▷ *maintenez une marge dans vos copies, aérez vos copies ;*
  - ▷ *enfin, numérotez vos copies (et non vos pages).*
- *Les documents, calculatrices et autres appareils électroniques sont interdits.*
- *Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie en expliquant les initiatives que vous avez été amené à prendre.*

Autour de ℓ^2

Les ensembles de parties $\{\mathrm{I}\}$, $\{\mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{IV}\}$, et $\{\mathrm{V}, \mathrm{VI}, \mathrm{VII}\}$ sont largement indépendants.

Partie I – Dualités.

Notations

▷ *Si E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(\cdot\,|\,\cdot)$, on note*

$$\begin{aligned} & E^* := \mathrm{L}(E, \mathbb{R}) \\ \textit{et} \quad & E' := \left\{ f \in E^* \;\middle|\; \exists C \in \mathbb{R}_+ : \forall x \in E,\, |f(x)| \leqslant C\,\|x\| \right\}, \end{aligned}$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme associée à $(\cdot\,|\,\cdot)$.

▷ *Si de plus $a \in E$, on note*

$$q_a : \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (x\,|\,a)\,. \end{cases}$$

Dans cette partie, on fixe E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(\cdot\,|\,\cdot)$.

1. Montrer que E' est un sous-espace vectoriel de E^*.

2. Soit $a \in E$. Montrer que $q_a \in E'$.

3. Montrer que

$$E \text{ de dimension finie} \implies E' = E^*.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(e_1, \ldots, e_n) \in E^n$.

(a) Montrer que

$$(e_1, \ldots, e_n) \text{ base de } E \implies (q_{e_1}, \ldots, q_{e_n}) \text{ base de } E'.$$

(b) On suppose que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E.
Soit $f \in \mathrm{L}(E)$. On note

$$f^* : \begin{cases} E^* \longrightarrow E^* \\ \varphi \longmapsto \varphi \circ f. \end{cases}$$

Montrer que

$$\mathrm{Mat}_{(q_{e_1}, \ldots, q_{e_n})}(f^*) = \mathrm{Mat}_{(e_1, \ldots, e_n)}(f)^{\mathsf{T}}.$$

5. On note

$$\Phi_E : \begin{cases} E \longrightarrow E' \\ a \longmapsto q_a. \end{cases}$$

On admet que Φ_E est linéaire.
Montrer que Φ_E est injective.

Partie II – Premières propriétés de ℓ^2.

Notations

- *On rappelle que si $a, b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on note $a \times b$ la suite définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (a \times b)_n = a_n \times b_n.$$

- *On note*

$$\ell^1 := \left\{ (a_n)_{n \geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \textit{la série } \sum_n |a_n| \textit{ est convergente} \right\}$$
$$\ell^2 := \left\{ (a_n)_{n \geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \textit{la série } \sum_n {a_n}^2 \textit{ est convergente} \right\}.$$

- *On admet que ℓ^1 est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

6. Trouver une suite $a \in \ell^2 \setminus \ell^1$.

7. Montrer que $\ell^1 \subset \ell^2$.

8. Une propriété de transfert.
Soient $a, b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrer que

$$\left. \begin{array}{l} a \in \ell^2 \\ b \in \ell^2 \end{array} \right\} \implies a \times b \in \ell^1.$$

On passera par les sommes partielles et on pourra utiliser des inégalités classiques.

9. En déduire que ℓ^2 est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

10. Si $a, b \in \ell^2$, on note

$$(a \,|\, b) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n.$$

Justifier cette définition.
On admet que $(\cdot \,|\, \cdot)$ définit un produit scalaire sur ℓ^2.

Partie III – Un lemme sur les séries divergentes.

Hypothèses et notations

- ▷ *Dans cette partie, on considère une suite* $(u_n)_n \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ *telle que* $\sum_n u_n$ *diverge.*
- ▷ *Pour* $n \in \mathbb{N}$, *on note* $S_n \coloneqq \sum_{k=0}^{n} u_k$.

11. Montrer que $\sum_n \frac{u_n}{(S_n)^2}$ converge.

On pourra utiliser que $(S_n)^2 \geqslant S_n S_{n-1}$ *et exprimer* u_n *en fonction de* S_n.

12. On veut montrer que $\sum_n \frac{u_n}{S_n}$ diverge.

(a) On suppose que $\frac{u_n}{S_n} \not\longrightarrow 0$. Conclure.

(b) On suppose que $\frac{u_n}{S_n} \longrightarrow 0$.

(i) Montrer que la série $\sum_n \ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right)$ diverge.

On passera par les sommes partielles et on utilisera les propriétés du logarithme.

(ii) Conclure.

Partie IV – Trois belles propriétés de ℓ^2.

Bilan et notations

- ▷ *D'après ce qui précède, on sait que* ℓ^2 *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel muni d'un produit scalaire* $(\cdot \mid \cdot)$ *défini par*

$$(a \mid b) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n \qquad \text{si } a, b \in \ell^2.$$

- ▷ *Dans la suite, si* $a \in \ell^2$, *on notera* $\|a\|_2 \coloneqq \sqrt{(a \mid a)}$.
- ▷ *On pourra utiliser librement dans la suite que*

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad a, b \in \ell^2 \implies a \times b \in \ell^1.$$

13. Réciproque de la propriété de transfert.

(a) Soit $a \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. Montrer que

$$\left(\forall b \in \ell^2,\ a \times b \in \ell^1\right) \implies a \in \ell^2.$$

On raisonnera par l'absurde et on utilisera les résultats de la partie **III**.

(b) Montrer que le résultat est encore valable si $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

14. L'espace ℓ^2 n'a pas de borne supérieure.

Dans cette question, on veut montrer qu'il n'existe pas de suite $(M_n)_n$ telle que

$$\forall u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad \Big(u \in \ell^2 \iff u_n = \mathrm{o}(M_n) \text{ quand } n \to \infty\Big).$$

On suppose l'existence d'une telle suite $(M_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, qu'on fixe.
En utilisant la question **13.**(b), aboutir à une contradiction et conclure.

15. L'espace $(\ell^2)'$ est isomorphe à ℓ^2.

Montrer que

$$\Phi : \begin{cases} \ell^2 \longrightarrow (\ell^2)' \\ a \longmapsto q_a \end{cases}$$

est un isomorphisme.

Partie V – Un critère pour être ℓ^2.

Notations

Dans cette partie, on fixe :

▷ *une fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que*

$$f(0) = 0 \quad \textit{et} \quad \forall x > 0,\ f(x) > 0\ ;$$

▷ *une suite $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que*

$$u_0 \neq 0 \quad \textit{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \Big(u_n \geqslant 0 \ \textit{ et } \ u_{n+1} = f(u_n)\Big).$$

16. On suppose que

$$\exists \delta > 0 :\ \forall x \in [0, \delta[,\ f(x) \geqslant x.$$

Montrer que $u_n \not\longrightarrow 0$.

17. Le critère pour être ℓ^2.

Dans cette question, on suppose que

$$f(x) = x - Cx^\alpha + \mathrm{o}(x^\alpha) \text{ quand } x \to 0,$$

où $C \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha > 1$.

(a) Montrer que $C < 0 \implies u_n \not\longrightarrow 0$.

(b) On suppose que $C > 0$ et $u_n \longrightarrow 0$.

(i) Montrer que ${u_n}^{1-\alpha} \sim C(\alpha - 1)n$.
On pourra utiliser le théorème de Cesàro.

(ii) En déduire que

$$(u_n)_n \in \ell^2 \iff \alpha < 3.$$

Partie VI – Application à une suite récurrente.

Rappels et notations

▷ *On pourra utiliser le résultat suivant, légère généralisation de la question* **17.** *:*

> **Proposition.**
> *Soit I un intervalle de longueur non nulle contenant 0 et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $C > 0$ et soit $\alpha > 1$ tels que*
>
> $$f(x) = x - Cx^\alpha + \mathrm{o}(x^\alpha) \text{ quand } x \to 0.$$
>
> *Soit $(u_n)_n \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors,*
>
> $$u_n \longrightarrow 0 \implies \Big((u_n)_n \in \ell^2 \iff \alpha < 3\Big).$$

▷ *Dans cette partie, on considère $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable qui est solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' = y^2 - t + 1 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

18. Montrer que f est $\mathscr{C}^\infty$.

19. Montrer que $f \geqslant 0$ et que f est croissante sur $[0, 1]$.

20. On veut montrer que $\forall x \in]0, 1]$, $f(x) < x$. On pose

$$A := \Big\{x \in]0, 1] \;\Big|\; f(x) \geqslant x\Big\}.$$

On raisonne par l'absurde et on suppose $A \neq \varnothing$. On pose $a := \inf A$.

(a) Montrer que $f(a) \geqslant a$.

(b) Montrer que $a > 0$.

(c) En utilisant le théorème des accroissements finis, aboutir à une contradiction.

21. On considère la suite $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

(a) Montrer que $(u_n)_n$ est bien définie.

(b) Montrer que $u_n \longrightarrow 0$ et $(u_n)_n \in \ell^2$.

Partie VII – Application à une intégrale imbriquée à l'infini.

▷ *On fixe $\alpha > 0$ et on considère la fonction*

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \dfrac{e^{1-2\cosh(t)}}{2}. \end{cases}$$

▷ *On considère la suite $(x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par*

$$x_0 := 1,$$

$$x_1 := \int_{-1}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$x_2 := \int_{-\int_{-1}^{1} g(\theta)\,\mathrm{d}\theta}^{\int_{-1}^{1} g(\theta)\,\mathrm{d}\theta} g(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$x_3 := \int_{-\int_{-\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x}^{\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x} g(\theta)\,\mathrm{d}\theta}^{\int_{-\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x}^{\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x} g(\theta)\,\mathrm{d}\theta} g(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$x_4 := \int_{-\int_{-\int_{-\int_{-1}^{1} g(u)\,\mathrm{d}u}^{\int_{-1}^{1} g(u)\,\mathrm{d}u} g(x)\,\mathrm{d}x}^{\int_{-\int_{-1}^{1} g(u)\,\mathrm{d}u}^{\int_{-1}^{1} g(u)\,\mathrm{d}u} g(x)\,\mathrm{d}x} g(\theta)\,\mathrm{d}\theta}^{\int_{-\int_{-\int_{-1}^{1} g(u)\,\mathrm{d}u}^{\int_{-1}^{1} g(u)\,\mathrm{d}u} g(x)\,\mathrm{d}x}^{\int_{-\int_{-1}^{1} g(u)\,\mathrm{d}u}^{\int_{-1}^{1} g(u)\,\mathrm{d}u} g(x)\,\mathrm{d}x} g(\theta)\,\mathrm{d}\theta} g(t)\,\mathrm{d}t,$$

etc.

22. Montrer que $(x_n)_n$ est décroissante.

23. Montrer que $x_n \longrightarrow 0$.

24. (a) Montrer que $(x_n)_n \notin \ell^2$.

(b) Donner un équivalent de x_n.

FIN DU SUJET.