Chapitre 24

Formules de Taylor
Développements limités

$$f(a+t) \underset{t \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} t^k + \mathrm{o}(t^n)$$

Formule de Taylor-Young

$$f(\mathsf{but}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (\mathsf{but} - a)^k + \int_a^{\mathsf{but}} \frac{(\mathsf{but} - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Formule de Taylor avec reste intégral

L'analyse asymptotique consiste :

- *pour les* ***suites****, à estimer u_n quand $n \to +\infty$;*
- *pour les* ***fonctions****, à estimer $f(x)$ quand $x \to x_0$ (ou quand $x \to +\infty$ ou $-\infty$).*

Par exemple, si on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, alors H_n est très proche (en valeur relative) de $\ln(n)$ *lorsque $n \to +\infty$, ce qu'on note*

$$H_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n).$$

Les formules de Taylor constituent un outil très puissant pour obtenir des développements asymptotiques.

Lycée CHATEAUBRIAND
MPSI 3

Colas Bardavid

24

Formules de Taylor
Développements limités

plan de cours et principaux résultats

I. Polynôme de Taylor

30.2
30.3
30.4

1) Puissances divisées

a) définition

Notation 24.1 Ⓣ
Soit $a \in \mathbb{K}$ et soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$\Pi_{n,a} := \frac{(X-a)^n}{n!}.$$

b) la relation fondamentale des puissances divisées
c) une formule

Fait 24.2 Ⓣ
Soit $a \in \mathbb{K}$ et soit $k \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\Pi_{n,a}{}^{(k)}(a) = \begin{cases} 0 & si\ k \neq n \\ 1 & si\ k = n. \end{cases}$$

2) Polynôme de Taylor

a) définition

Définition 24.3 Ⓣ
Soit $f \in \mathscr{D}^n(I, \mathbb{K})$ et soit $a \in I$. On pose

$$\mathsf{T}_{f,n,a} := \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a) \frac{(X-a)^k}{k!}.$$

C'est le polynôme de Taylor de f, au point a, de degré n.

b) un exemple
c) la propriété fondamentale du polynôme de Taylor

Fait 24.4 Ⓣ
Soit $f \in \mathscr{D}^n(I, \mathbb{K})$ et soit $a \in I$. Alors

1) $\exists! P \in \mathbb{K}_n[X] : \ \big(\forall k \in [\![0, n]\!],\ P^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)\big)$;
2) *c'est* $\mathsf{T}_{f,n,a}$.

d) démonstration de l'existence

e) démonstration de l'unicité

Lemme 24.5
Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère

$$\Phi_n : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] \longrightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ P \longmapsto \big(P(a), P'(a), \dots, P^{(n)}(a)\big). \end{cases}$$

Alors,

1) *Φ_n est linéaire ;*
2) *Φ_n est injective.*

3) Formule de Taylor polynomiale

Théorème 24.6 Ⓣ
Soit $a \in \mathbb{K}$. Alors, pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, on a

$$P = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a) \frac{(X-a)^k}{k!}.$$

II. Formules de Taylor

30.8
30.10
30.11
30.17

1) Formule de Taylor avec reste intégral

a) énoncé

Théorème 24.7
Soit $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$ et soient $a, b \in I$. Alors,

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(b-a)^n}{n!} + \int_a^b f^{(n+1)}(t)\frac{(b-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t.$$

b) comment se rappeler de cette formule

2) Inégalité de Taylor-Lagrange

a) énoncé

Théorème 24.8
Soit $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$. Soit $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in I, \quad \left|f^{(n+1)}(x)\right| \leqslant M.$$

Alors, pour tout $a \in I$,

$$\forall x \in I, \quad \left|f(x) - \mathsf{T}_{f,n,a}(x)\right| \leqslant M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

b) applications

Proposition 24.9
Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\exp(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Proposition 24.10
Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors,

$$\exp(z) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}.$$

3) Formule de Taylor-Young

> **Théorème 24.11**
> *Soit $f \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{K})$ et soit $a_0 \in I$. Alors,*
> $$f(a_0 + t) = f(a_0) + f'(a_0)t + \cdots + \frac{f^{(n)}(a_0)}{n!}t^n + \mathrm{o}(t^n) \textit{ quand } t \to 0.$$

III. Développements limités

1) Définition

2) Unicité du DL

3) Troncature des DLs

a) exemple
b) énoncé

4) Cas particulier des $\mathbf{DL}_0$ et des $\mathbf{DL}_1$

5) Existence des DLs

a) une fonction qui n'a pas de DL
b) théorème de Taylor-Young

6) DLs et parité

7) DLs, partie réelle et partie imaginaire

IV. Opérations sur les DLs

1) Opérations usuelles

2) Composition

3) Primitivation des DLs

V. Développements limités usuels

32.6
32.9
<u>32.20</u>

1) Fonction inverse

2) Logarithme

3) Arctangente

4) Exponentielle

5) Sinus et cosinus

6) Sinus et cosinus hyperboliques

7) Fonctions puissance

8) Quotients de DLs : cas pratique

a) DL_4 de la fonction inverse en 2
b) Méthode pour calculer le $\mathrm{DL}_n(x_0)$ de f/g

9) Tangente

Ch 24

Formule de Taylor et DL

$\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I est intervalle de $\mathbb{R}$ tq $\ell(I)>0$

Intro :

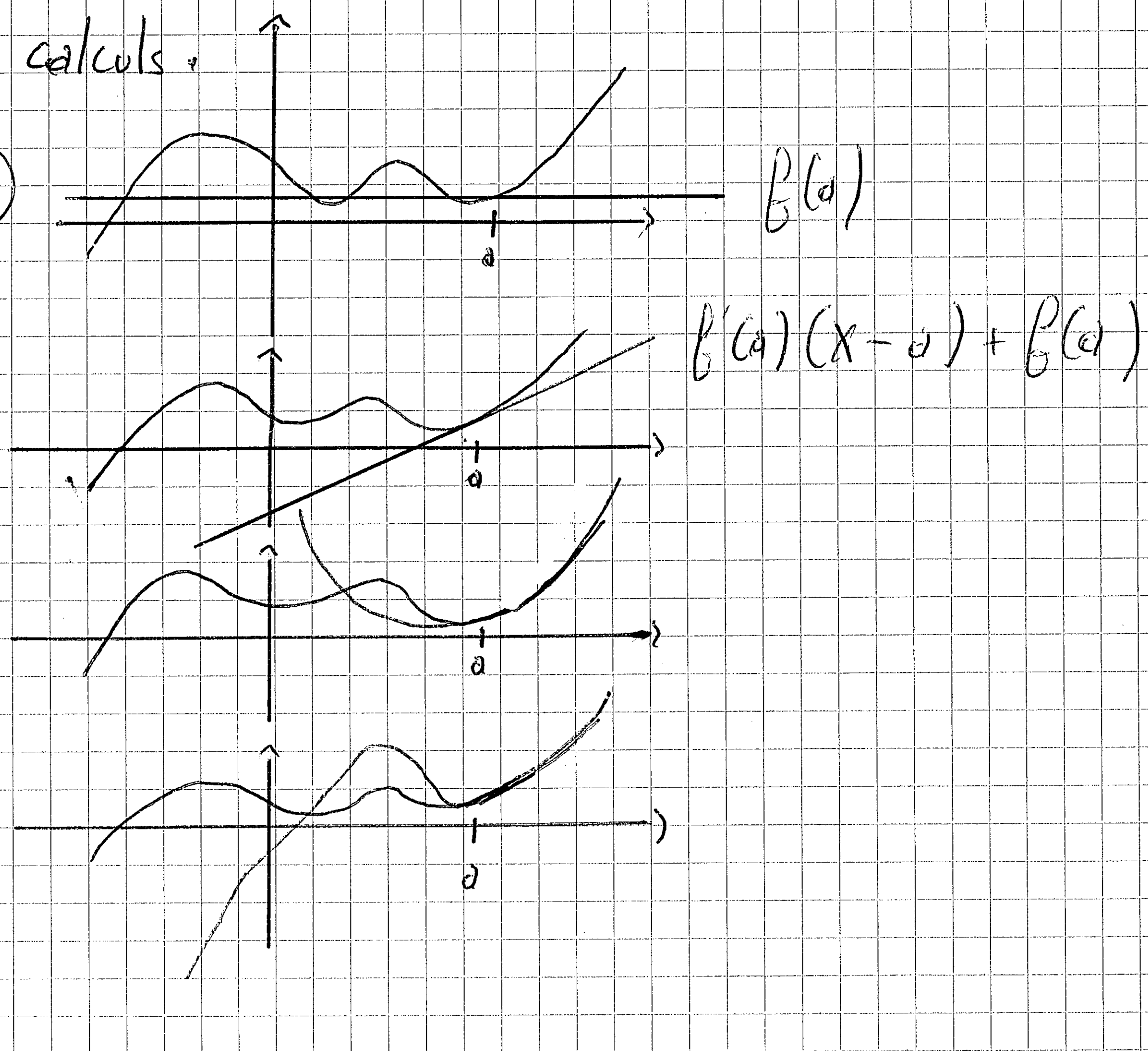
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $a \in I$

On veut "remplacer" f par un polynôme P

tq " $f(x) \simeq P(x)$ " au $\mathcal{V}(a)$

L'interêt de ce remplacement est de simplifier les calculs.

d^n



On donnera plusieurs significations à
"$f(x) \approx P(x)$"

I Polynômes de Taylor

1) Puissances divisées

a) déf°

Notat° : Soit $n \in \mathbb{N}$, Soit $a \in \mathbb{K}$ On note

$$\Pi_{n,a} := \frac{(x-a)^n}{n!} \in \mathbb{K}_n[X]$$

C'est une puissance divisée

b) RF des $\Pi_{n,a}$

Fait f^{dl} :

$$\Pi_{n,a}' = \Pi_{n-1,a}$$

(si $n \geq 1$)

D/ AF

Rq :

1) $\Pi_{n,a}(a) = 0$ si $n \geq 1$

2) $\Pi_{0,a}' = 1$

3) $\Pi_{0,a} \leftarrow \Pi_{1,a} \leftarrow \Pi_{2,a} \leftarrow \Pi_{3,a} \leftarrow \cdots$

Corollaire :

$$\int_a^x \frac{(t-a)^n}{n!}\,dt = \left[\frac{(t-a)}{(n+1)!}\right]_a^x$$

$$= \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

D/ AC

c) une f^{le}

Prop : 1) $\Pi_{n,a}^{(k)} = \Pi_{n-k,a}$ si $n-k \geq 0$, ie si $k \leq n$

2) $\Pi_{n,a}^{(k)}(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ 1 & \text{si } n = k \end{cases}$

Application

$(k \leq n)$ $\left[(X-a)^n\right]^{(k)} = \dfrac{(X-a)^{n-k}}{(n-k)!}\, n!$

2) Polynômes de Taylor

a) déf^{o}

Déf^{o} : Soit $f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$

Soit $a \in I$

Le polynôme de Taylor de f en a d'ordre n noté $T_{f,n,a}$, est l'élément de $\mathbb{K}_n[X]$ défini par :

$$T_{f,n,a} := \overbrace{f(a) + f'(a)(X-a)}^{\text{Ⓓ tangente}} + f''(a)\frac{(X-a)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(a)\frac{(X-a)^n}{n!}$$

i.e. $$T_{f,n,a} := \sum f^{(k)}(a)\frac{(X-a)^k}{k!}$$

$$\left(:= \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\, \Pi_{k,a} \right)$$

b) un exemple

On a $$T_{\exp,n,0} = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \dots + \frac{X^n}{n!}$$

$$T_{\exp,n,a} = e^a\left(1 + (X-a) + \frac{(X-a)^2}{2} + \dots + \frac{(X-a)^n}{n!}\right)$$

$$= e^a\, T_{\exp,n,0}(X-a)$$

c) La propriété f^{dle} de $T_{f,n,a}$

Fait - f^{al} :

1) $\exists!\ P \in \mathbb{K}_n[X] : \forall k \in [\![0,n]\!] : P^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$

2) C'est $T_{f,n,a}$

Rq : Ainsi, " $T_{f,n,a}$ est le polynôme $\in \mathbb{K}_n[X]$ qui copie f "ultralocalement" en a "

D/ Existence

Mq $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $T_{f,n,a}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$

Soit $k \in [\![0,n]\!]$

On a $T_{f,n,a} = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\, \Pi_{k,a}$

Donc $T_{f,n,a}^{(k)}(a) = \sum_{i=0}^{n} f^{(i)}(a)\, \Pi_{i,a}^{(k)}(a)$

Or $\Pi_{i,a}^{(k)}(a) = \delta_{i,k}$

$\dots = f^{(k)}(a)\, \Pi_{k,a}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$

d) Unicité Soit $a \in \mathbb{K}$ fixé

Ocsd $\Phi_n : \mathbb{K}_n[X] \longrightarrow \mathbb{K}^{n+1}$

$P \longmapsto (P(a), P'(a), \dots, P^{(n)}(a))$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Prop : } 1)\ \Phi_n \text{ est une AL} \\ \qquad\quad\ \ 2)\ \Phi_n \text{ est inj}\end{array}}$

Rq : Ainsi

$\forall P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$, ultra-loc$_n(P)$ = ultra-loc$_n(Q)$

$\Rightarrow P = Q$

D/ 1) ok.

2) H rec

$\mathcal{P}(n)$: " $\operatorname{Ker} \Phi_n = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$ "

si $n \in \mathbb{N}$

$n = 0$: Soit $P \in \mathbb{K}_0[X]$ tq $P(a) = 0$

polynôme cst.

On a bien $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$

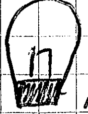
HE

Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $\mathcal{P}(n)$

Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$

Soit $P \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$ tq

$$\Phi_{n+1}(P) = 0_{\mathbb{K}^{n+2}}$$



Astuce :

- On a $P' \in \mathbb{K}_n[X]$
- Et $\Phi_n(P') = \left(P'(a), \dots, P^{(n+1)}(a)\right)$

$$= 0_{\mathbb{K}^{n+1}}$$

$\hat{C}$ $P(n)$ est V : On a $P' = 0$

Donc : P est cst

Or, $P(a) = 0$

Donc $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$

ccl : $\operatorname{Ker} \Phi_{n+1} = \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$

donc Φ_{n+1} est inj ∎

Rq : $\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \left(\left(X-a\right)^{n+1}\right)^{(k)}(a) = 0$

3) Formule de Taylor polynomiale

Thm : Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$ Alors, pour $a \in \mathbb{K}$,

$$P = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a) \frac{(X-a)^k}{k!}$$

Application : !

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ qu'on écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

Alors, on a : (Taylor polynomial avec $a=0$)

$$P = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0) \cdot \frac{X^k}{k!}$$

Donc $\oplus$! $a_k = \text{coeff}_k(P) = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$

D/ On utilise Φ_n. Notons $Q := \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a) \frac{(X-a)^k}{k!}$

Mq $P = Q$. Çà Φ_n inj, il suffit de mq $\Phi_n(P) = \Phi_n(Q)$

Ainsi, mq $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $P^{(k)}(a) = Q^{(k)}(a)$

- Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Calculons

$$Q^{(i)}(a) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a) \underbrace{\Pi_{k,a}^{(i)}(a)}_{= \delta_{i,k}}$$

$$= P^{(k)}(a) \times 1$$

On a bien $\Phi_n(P) = \Phi_n(Q)$. Donc $P = Q$

Rq* :

Ie, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et si $a \in \mathbb{R}$;

$$P = T_{\widetilde{P(\cdot)}, n, a}$$

II Formules de Taylor

1) Formule de Taylor avec reste intégral (FTI)

a) Énoncé

Th ♛ : Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$

Soit $a \in I$, Soit $b \in I$

Alors :

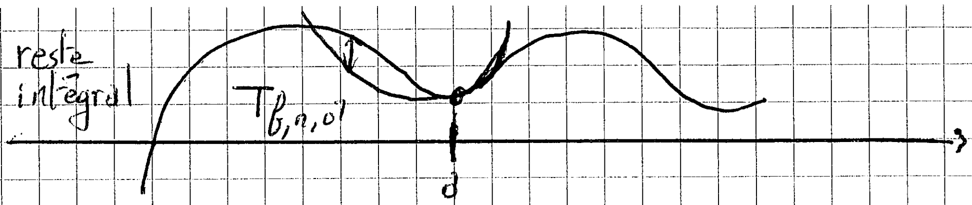
$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + f''(a)\frac{(b-a)^2}{2} + \dots + f^{(n)}(a)\frac{(b-a)^n}{n!} + \int_a^b f^{(n+1)}(t) \cdot \frac{(b-t)^n}{n!}\,dt$$

Rq : • FTI donne une expression intégrale de l'écart entre f et $T_{f,n,a}$ (son approximation polynomiale)

• Ie, on a

$$\forall x \in I,\ f(x) = T_{f,n,a}(x) + \underbrace{\int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt}_{\text{le reste intégral}}$$

e d^n



D/ idées : IPP + réc

$n=0$: Soit $f \in \mathcal{C}^1$. Mq

$$f(b) = T_{f,0,a}(b) + \int_a^b f'(t)\frac{(b-t)^0}{0!}\,dt$$

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt \text{ : ok}$$

Thm fond^{al} de l'analyse.

Hé : Soit $n \in \mathbb{N}$. Osq le resultat V à l'ordre n

Mq - P à l'ordre $(n+1)$

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+2}(I, \mathbb{K})$

Idée 1 : $\because f \in \mathcal{C}^{n+2}$, on a $f' \in \mathcal{C}^{n+1}$

Donc on peut appliquer $\underline{HR_n}$ à f'

D'où $$f'(b) = \underbrace{\left(f'(a) + f''(a)(b-a) + \cdots + f^{(n+1)}(a)\frac{(b-a)^n}{n!} \right)}_{T_{f',a,n}(b)}$$

$$\mathrm{FTI}_{f',n,a} \quad + \int_a^b f^{(n+2)}(t)\frac{(b-t)^n}{n!}\,dt$$

Idée : je relache b que j'appelle x ;

$$f'(x) \overset{(*)}{=} f'(a) + f''(a)(x-a) + \dots + f^{(n+1)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$
$$+ \int_a^x f^{(n+2)}(x)\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt$$

On intègre $(*)$ entre a et b

$$f(b) - f(a) = f'(a)(b-a) + f''(a)\frac{(b-a)^2}{2} + \dots$$
$$+ f^{(n+1)}(a)\int_a^b \frac{(x-a)^n}{n!}\,dx$$

$$\left(!! \quad \int_a^b \frac{(x-a)^n}{n!}\,dt = \left[\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^b = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right)$$

$$+ \int_a^b \left(\int_a^x f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt\right)dx$$

AF** Conclure

Idée 2 : $\hat{c}$ $f \in \mathcal{C}^{n+2}$, on a $f \in \mathcal{C}^{n+1}$

Donc on a par HR_n :

$$f(b) = T_{f,a,n}(b) + \underbrace{\int_a^b f^{(n+1)}(t)\frac{(b-t)^n}{n!}\,dt}_{I}$$

Par IPP, on a

$$I = \left[f^{(n+1)}(t) \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} (-1) \right]_a^b$$

$$- \int_a^b f^{(n+2)}(t) \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} (-1)\, dt$$

$$= f^{(n+1)}(a) \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$+ \int_a^b f^{(n+2)}(t) \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}\, dt \quad \blacksquare$$

b) Comment retenir cette f^{le} ?

1° On veut retenir le reste

2° Par $n=0$, FTI est $f(b)-f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt$.

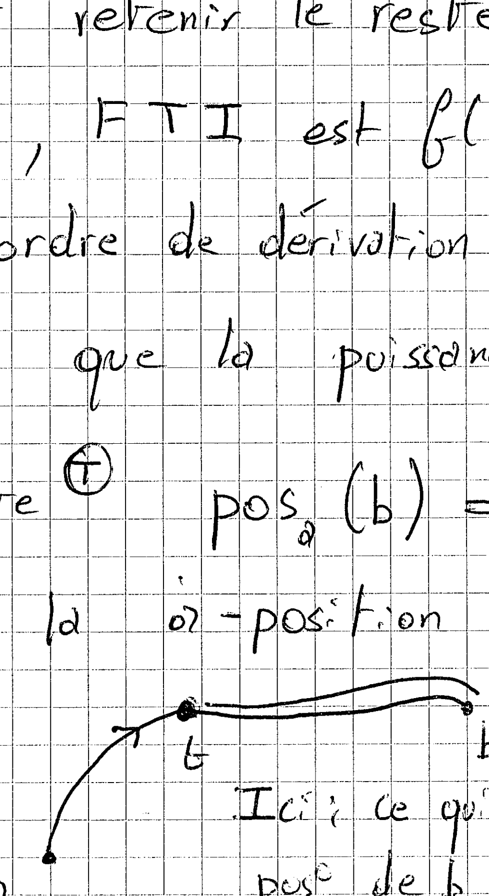
Donc l'ordre de dérivation de f vaut un de ⊕ que la puissance

3° On note ⊕ $\mathrm{pos}_a(b) = b-a$:

C'est la a-position de b.

Puis :

$\mathbb{R}$)



But : connaître $f_{|a}$ en b

Ici ; ce qui compte est pos° de b p/r à t ie

Je connais les données "ultralocales" de a : $f(a)$, $f'(a)$, … $f^{(n)}(a)$

2) Inégalité de Taylor – Lagrange

a) Énoncé

Th $\boxed{\text{M}}$:

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$
Soit $a \in I$
Soit $M \geq 0$ tq $\forall x \in I$, $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$

Alors :

$$\forall x \in I, \quad |f(x) - T_{f,n,a}(x)| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Rq : Cette f^{le} permet de dire que $T_{f,n,a}$ approxime très bien $f(\cdot)$

Ex : imaginons que $M = 10^3$

- prenons x proche de a :
  (on prend $|x-a| \leq 10^{-1}$)
- Prenons $T_{f,4,a} \in \mathbb{R}_4[X]$

On a $|f(x) - T_{f,4,a}(x)| \leq 10^3 \cdot \frac{(10^{-1})^5}{\underbrace{5!}_{\geq 10^2}}$

$\leq 10^3 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-2}$

$\leq 10^{-4} = 0{,}0001$

D/ • Soit $x \in I$

• On a $f(x) - T_{f,n,a}(x) = \int_a^x f^{(n+1)}(t) \cdot \frac{(x-t)^n}{n!} \, dt$

Osq $x \geq a$

On a alors : $|f(x) - T_{f,n,a}(x)| \leq \int_a^x |f^{(n+1)}(t)| \frac{|x-t|^n}{n!} \, dt$

$$|f(x) - T_{f,n,a}(x)| \leq \int_a^x \underbrace{|f^{(n+1)}(t)|}_{\leq M} \cdot \frac{|x-t|^n}{n!} \, dt$$

car on intègre dans le bons sens (DLBS)

on a $x \geq a$

et $a \leq t \leq x$

Donc $x \geq t$

Donc $|x-t| = (x-t)$

$$\leq M \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} \, dt$$

$$= M \left[\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} (-1) \right]_a^x$$

$$= M \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} = M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Si $x \leq a$:

On a $|f(x) - T_{f,n,a}| = \left| \int_a^x (\ldots) \right|$

$$= \left| \int_x^a \right| \leq \int_x^a |(\ldots)| = (\ldots) \blacksquare$$

b) applications

Prop : Soit $x \in \mathbb{R}$ Alors :

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

Rq : ie on a

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \cdots$$

Corollaire : Pour $x = 1$:

$$e = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

ie : $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$

D/ Rq : $T_{\exp, n, 0} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$

- On utilise l'inégalité de Taylor - Lagrange.
- Il nous faut une borne de $\exp^{(n+1)}$ ie $\exp$
- Pb : exp n'est pas bornée

Idée : Osq $x \geq 0$ et on se place sur

$$I := [0, x]$$

- On sait que $\sup_{t \in [0,x]} |\exp^{(n+1)}(t)| = \exp(x)$

- Posons $M := \exp(x)$
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a (IT L)

$$\left| \exp(x) - T_{\exp, 0, n}(x) \right| \leq M \frac{x^n}{n!}$$

- Notons pour $n \in \mathbb{N}$:

$$S_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!}$$

- On a $\left| e^x - S_n \right| \leq M \frac{x^n}{n!}$
- Or, on a vu (21.28) que $x^n \underset{n \to \infty}{=} o(n!)$
- Donc $M \frac{x^n}{n!} \longrightarrow 0$
- Donc par contrôle : $S_n \xrightarrow[n \to \infty]{} e^x$
- Ie $e^x = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

2^e cas : si $x \leq 0$, on bosse sur $[x, 0]$ où on

a $|\exp| \leq 1$ ■

Proposition ♛

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors

$$\exp(z) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$$

Rq : Si $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ est une algèbre normée tq

$$\forall a,b \in \mathcal{A}, \quad \|a \times b\| \leq \|a\| \times \|b\|$$

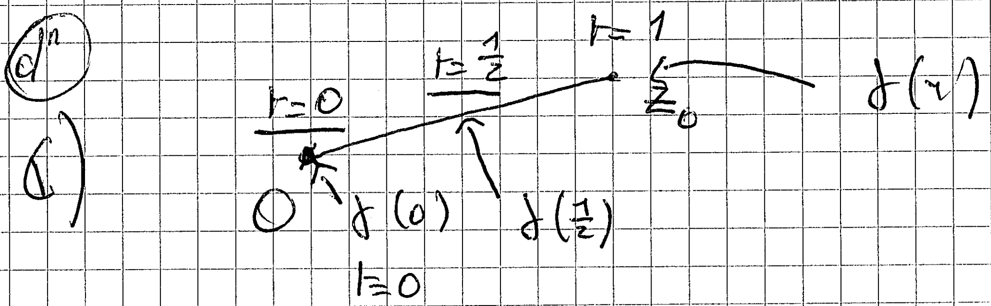
On peut définir : $\exp : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$
$$a \longmapsto \text{"} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \text{"}$$

<u>Applicat° : exponentielle de matrices</u>

D/ Soit $z_0 \in \mathbb{C}$

Ocsd $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$
$$t \longmapsto \exp(t z_0)$$

• <u>Mini-problème</u> : On a $[0,1] \xrightarrow{\gamma} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$
$$t \longmapsto t z_0$$



On a $\gamma(\cdot) \in \mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{C})$

Bug ! $\exp_{\mathbb{C}}$ vient de $\mathbb{C}$: c'est HR

(But : mq f est $\mathcal{C}^\infty$ puis appliq ITL à f)

Deux sol° pour le mini problème.

(*) Sol n°1 On a $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{C}$ d^1
alors $\exp \circ \varphi$ est d^1 et $(e^\varphi)' = \varphi' e^\varphi$

Ainsi, γ e

Ainsi, $\exp \circ \gamma$ est d^1 et

$$\left(e^{\gamma(\cdot)}\right)' = \gamma'(\cdot)\, e^{\gamma(\cdot)} = z_0\, e^{\gamma(\cdot)}$$

Ainsi : $\left(e^{\gamma(\cdot)}\right)'$ est d^1 Donc $e^{\gamma(\cdot)}$ est d^2

Donc $\left[e^{\gamma(\cdot)}\right]'$ est d^2, donc $e^{\gamma(\cdot)}$ est d^3 (...)

Ainsi $f \in \mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{C})$

<u>Solut° n°2</u>

<u>Idée</u> : On fait avec sin, cos, etc ...

On écrit $z_0 = \alpha + i\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

On a $\forall t$: $e^{z_0 t} = \underbrace{e^{\alpha t}}_{\mathcal{C}^\infty} \left(\underbrace{\cos(\beta t)}_{\mathcal{C}^\infty} + \underbrace{i \sin(\beta t)}_{\mathcal{C}^\infty}\right)$

<u>CCl</u> : $f(\cdot) \in \mathcal{C}^\infty$

- <u>Et</u> : $\forall t \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(t) = z_0^n e^{z_0 t}$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\forall t \in [0,1], \quad |f^{(n)}(t)| \leq |z_0|^n \cdot \underbrace{e^{\alpha}}_{e^{Re(z_0)}}$$

- ITL : en $x = 1$ (AC)

$$\Big|\underbrace{f(1)}_{e^{z_0}} - T_{f,0,n}(1)\Big| \leq |z_0|^n e^{\alpha} \frac{|1-0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= e^{\alpha} \frac{|z_0|^n}{(n+1)!} \longrightarrow 0$$

car $|z_0|^n = o(n!)$ (21.28)

$$T_{f,n,0}(1) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{f^{(k)}(0)}\ \frac{1-0}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{z_0^k}{k!}$$

$$= z_0^k\, f(0) = z_0^k \qquad \blacksquare$$

<u>Rq</u> : Ainsi on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{\cancel{2}3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

D'une certaine façon, exp est un "polynôme infini"

De $\overline{m}$ (Cf 30.8), si $x \in [-\frac{1}{2} ; 1]$, on a mq

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

Sur cet intervalle, c'est aussi un "<u>polynôme infini</u>"

(<u>HP</u>)
- Le vrai nom de ces fonctions, c'est : "fonctions analytiques"
- Ce sont les fonctions les + élémentaires après les polynômes.
- On note $\mathcal{C}^\omega(I,\mathbb{R})$ l'ens de ces fonctions
- On a la tour d'inclusion :

$$\mathbb{R} \subsetneq \mathbb{R}_1[X] \subsetneq \mathbb{R}_2[X] \subsetneq \mathbb{R}_3[X] \subsetneq \dots$$

$$\subsetneq \mathbb{R}[X] \subsetneq \mathcal{C}^\omega(I,\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$$

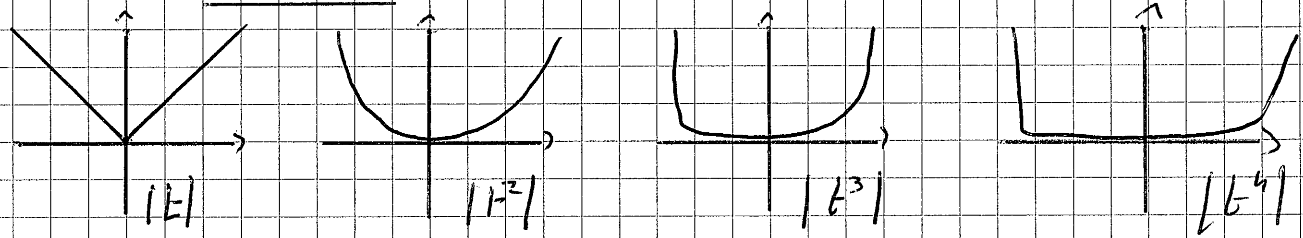
$\dots \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{D}^n(I,\mathbb{R}) \dots \subsetneq \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$
$\subsetneq \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$

3) Formule de Taylor Young

Th ♛ : Soit $f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{K})$. Soit $a_0 \in I$.
Alors, on a

$$f(a_0+t) = f(a_0) + f'(a_0)(t) + \frac{f''(a_0)}{2}(t)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a_0)}{n} t^n + o(t^n) \text{ qd } t \to 0$$

Idée :



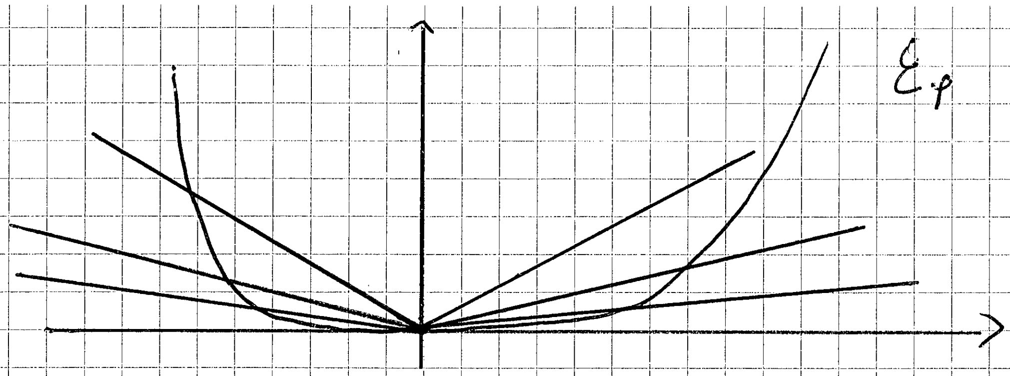
- On a $\varphi(t) \underset{t\to 0}{=} o(t) \iff \frac{\varphi(t)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$

On a donc : $\forall \varepsilon>0, \left|\frac{\varphi(t)}{t}\right| \leq \varepsilon$ au $\mathcal{V}(0)$

ie $\forall \varepsilon>0, |\varphi(t)| \leq \varepsilon|t|$ au $\mathcal{V}(0)$

On a don : $\forall p \in \mathbb{N}^*, |\varphi(t)| \leq \frac{1}{p}|t|$ au $\mathcal{V}(0)$

- Ainsi, si $\varphi(t) \underset{t\to 0}{=} o(t)$



Généralisation :

$$\varphi(t) \underset{t \to 0}{=} o(t^n) \iff \forall p \in \mathbb{N}^*, \ |\varphi(t)| \leq \frac{1}{p}|t|^n \text{ ou } \mathcal{V}(0)$$

Exemple :

On cherche $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ tq $\boxed{\forall n, \ \varphi(t) \underset{t \to 0}{=} o(t^n)}$

(avec $\varphi \nearrow\nearrow$)

Ocsd $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

C'est la f^o du DS5.

Fait : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \varphi(t) = o(t^n)$

D/ Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, si $t > 0$:

$$\frac{\varphi(t)}{t^n} = \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^n} = \left(\frac{1}{t}\right)^n e^{-\left(\frac{1}{t}\right)}$$

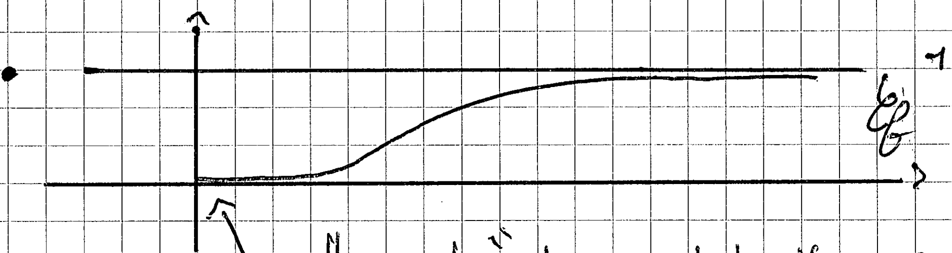
Or, par croiss. comparée : $X^n e^{-X} = \frac{X^n}{e^X} \xrightarrow[X \to +\infty]{} 0$

Ĉ $\frac{1}{t} \xrightarrow[t \to 0^+]{} \infty$, par comp° des limites :

$$\frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^n} \xrightarrow[t \to 0^+]{} 0$$

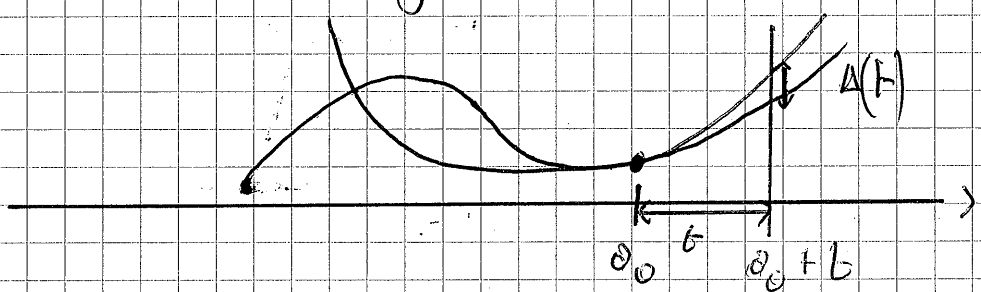
Ainsi : $\varphi(t) \underset{t \to 0}{=} o(t^n)$ ∎

d^n •

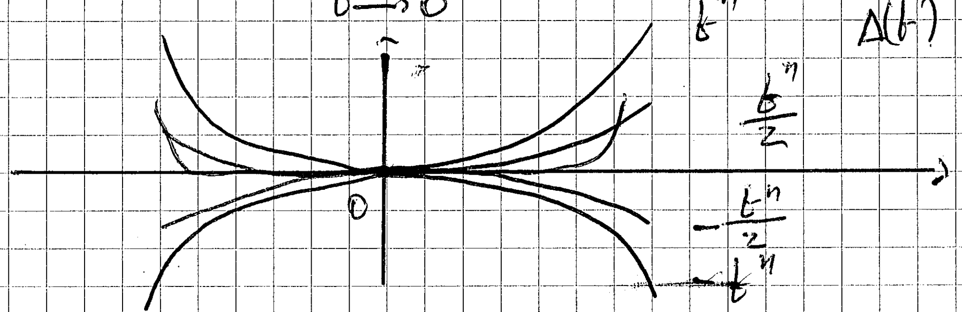


elle est " très plate " en 0

• Thm de Taylor



On a $\Delta(t) \underset{t \to 0}{=} o(t^n)$ ie



D/ Déjà, č $f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{K})$, on a d'après

$FTI_{f,n-1,a_0}(b)$

$$f(b) = f(a_0) + f'(a_0)(b-a_0) + f''(a_0)\frac{(b-a_0)^2}{2!} + \dots + f^{(n+1)}(a_0)\frac{(b-a_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \int_{a_0}^{b} f^{(n)}(t)\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt$$

- Soit t suffisamment petit ie tq $\underline{a_0+t \in I}$

(si a_0 est une borne de I, il faut ajouter une hypothèse "$t \geq 0$" ou "$t \leq 0$")

On a
$$f(a_0+t) = f(a_0) + f'(a_0)\,t + \frac{f''(a_0)t^2}{2} + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a_0)}{n!}t^n + \int_{a_0}^{a_0+t} f^{(n)}(\theta)\frac{(a_0+t-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}\,d\theta$$

- Notons $\Delta(t) = f(a_0+t) - \left(f(a_0) + f'(a_0)t + \dots + \frac{f^{(n)}(a_0)}{n!}t^n\right)$

- On a donc $\Delta(t) = \left(\int_{a_0}^{a_0+t} f^{(n)}(\theta)\frac{(a_0+t-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}\,d\theta\right) - \frac{f^{(n)}(a_0)}{n!}t^n$

Rq : Si f avait été supposée $\mathcal{C}^{n+1}$, on aurait pu écrire :

① Soit $\delta > 0$ suffisament petit (Osq $a_0 \in \mathring{I}$)

Alors, sur le segment $[a_0 - \delta, a_0 + \delta]$, la fonction $f^{(n+1)}$ (qui est continue) est BORNÉE par $M \geq 0$

② ITL :

$$\left| f(a_0 + t) - \left(f(a_0) + f'(a_0)t + \dots + f^{(n)}(a_0)\frac{t^n}{n!} \right) \right| \leq M \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!}$$

③ Donc :

$$\frac{\left| f(t) - \left(f(a_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(a_0)}{n!} t^n \right) \right|}{(|t|^n)} \leq \frac{M}{(n+1)!} |t| \xrightarrow[t \to 0]{} 0$$

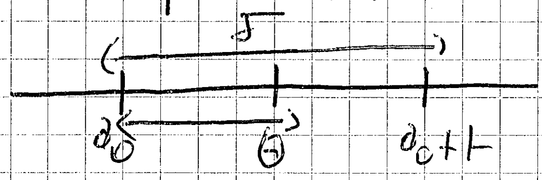
④ CCl : $\Delta(t) \underset{t \to 0}{=} o(t^n)$

• Soit $t \in]-\delta, \delta[$: (Osq $t \geq 0$)

• Si $\theta \in [a_0, a_0+t]$, on a $|a_0-\theta| \leq \ell([a_0, a_0+t])$
$\leq t \leq \delta$

donc d'après $(*)$:

d^n



• Donc

$$|\Delta(t)| = \left|\int_{a_0}^{a_0+t} (\dots)\right| \underset{\text{car on intègre ds le bon sens.}}{\leq} \int_{a_0}^{a_0+t} \underbrace{\left|f^{(n)}(\theta) - f^{(n)}(a_0)\right|}_{\leq \varepsilon} \frac{\overbrace{|a_0+t-\theta|^{n-1}}^{= (a_0+t-\theta)^{n-1}}}{(n-1)!} d\theta$$

$$\leq \varepsilon \boxed{\int_{a_0}^{a_0+t} \frac{(a_0+t-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} d\theta} = \frac{t^n}{n!}$$

car $t \geq 0$

AF

• si $t \leq 0$, de m,

D'où le résultat ■

III Développements limités

1) Définition

Soit I un intervalle

Soit $x_0 \in \bar{I} \cap \mathbb{R}$ (ex : $I =]0, +\infty[$
$x_0 = 0$)

Déf° : Soit $f : I \to \mathbb{K}$. Soit $n \in \mathbb{N}$

- On dit que <u>f admet un développement limité à l'ordre n, au voisinage de x_0,</u>

("f a un $DL_n(x_0)$") $\underset{ssi}{\Delta}$

$\exists (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$

$$f(x_0+t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n + o(t^n)$$

qd $t \longrightarrow 0$

- L'expression "$a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$" est appelé <u>partie régulière du DL.</u>

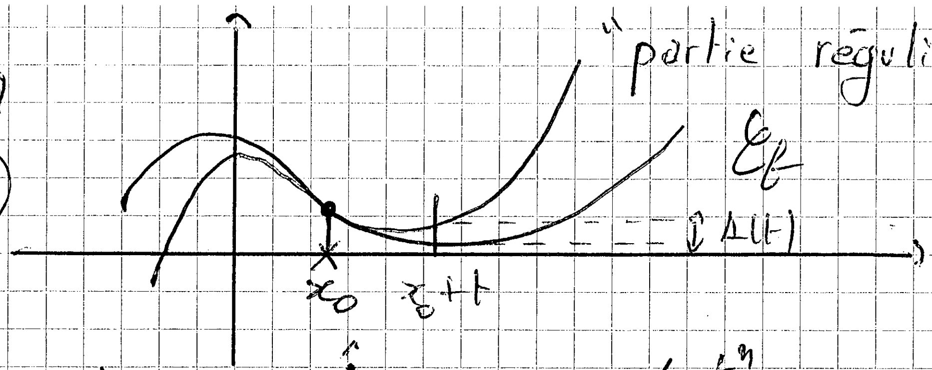
- <u>Dessin</u> : Osq f a un $DL_n(x_0)$

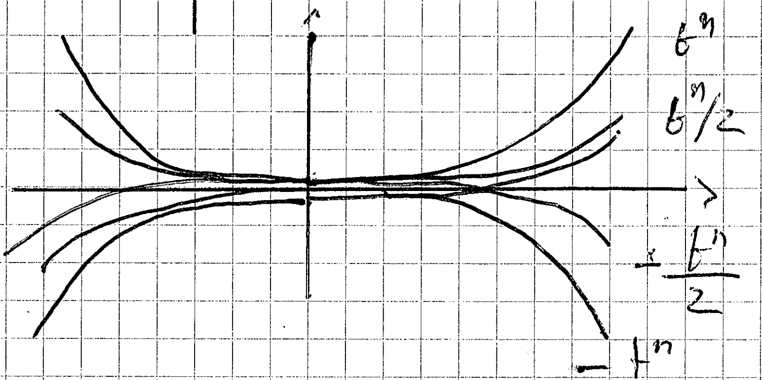
(Osq $x_0 \in \mathring{I}$)

Fixons $(a_i)_i \in \mathbb{R}^{n+1}$ tq $f(x_0+t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$
$+ o(t^n)$

On a

(d^n)





Rq : • En g^{al} : On fera les DL en 0 quitte à faire une transl^{o}

• L'écriture $f(x_0+t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n + o(t^n)$

qd $t \to 0$

peut être remplacée par (B^{o}) ("$x = x_0 + t$"; $t = x - x_0$; $t \to 0$ donc $x \to x_0$)

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) \quad \text{qd } x \to x_0$$

2) Unicité du DL

Prop$^{(T)}$: Osq f a un $DL_n(x_0)$

Soient $(a_0, \dots, a_n), (b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tq

$$f(x_0+t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k + o(t^n) = \sum_{k=0}^{n} b_k t^k$$

2) Unicité du DL

Prop: Osq f a un $DL_n(x_0)$. Soient $(a_0, \dots, a_n)$, $(b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tq

$$f(x_0+t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k + o(t^n) = \sum_{k=0}^{n} b_k t^k + o(t^k)$$

alors $\forall k,\ a_k = b_k$

D/ Idée : on fait un absurde minimal

ORPA et Osq $\exists k \in [\![0,n]\!] : a_k \neq b_k$

Fixons $k_0 \in [\![0,n]\!]$ un tel k, qui soit minimal.

- On a $\forall p < k_0,\ a_p = b_p$
- On a $\underbrace{(a_{k_0} - b_{k_0})}_{\neq 0} t^{k_0} + \underbrace{(a_{k_0+1} - b_{k_0+1}) t^{k_0+1}}_{o(t^{k_0})} \dots + \underbrace{(a_n - b_n) t^n}_{o(t^{k_0})}$

$$= o(t^n) \longrightarrow o(t^{k_0})$$

- Donc $(a_{k_0} - b_{k_0}) t^{k_0} + o(t^{k_0}) = o(t^{k_0})$
- Donc $(a_{k_0} - b_{k_0}) t^{k_0} = o(t^{k_0})$ Idée :

$(a_{k_0} - b_{k_0}) t^{k_0}$ est "comparable" à t^{k_0} : ce n'est pas un $o(t^{k_0})$.

- Donc $\dfrac{(a_{k_0} - b_{k_0}) t^{k_0}}{t^{k_0}} \xrightarrow[t \to 0]{\neq} 0$

Ie $a_{k_0} - b_{k_0} \xrightarrow[t \to 0]{} 0$! (Abs)

3) Troncature des DLs

a) Exemple :

On se donne un $DL_5(0)$ de f et on écrit

$$f(t) = 3 - 2t + 5t^2 + 8t^3 - 700t^4 + 500t^5 + o(t^5)$$

Rq : • Cela implique $f(t) \xrightarrow[t \to 0]{} 3$

• Rien n'empêche que $f(0,\underbrace{000 \cdots 0}_{70 \text{ zéros}}1) = 750\,000$

• Alors, on a en particulier $f(t) = 3 - 2t + 5t^2 + o(t^2)$

b) Énoncé

Prop (T) : Osq $m \leq n$, Alors :

$$f(x_0 + t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n + o(t^n) \text{ qd } t \to 0$$

$$\Rightarrow \underset{t \to 0}{f(t)} = a_0 + a_1 t + \cdots + a_m t^m + o(t^m)$$

D/ (T) • Si $k \geq m+1$, on a $a_k t^k = o(t^m)$

• " " $o(t^n) = o(t^m)$ ■

h) Cas particulier des DL_0 et des DL_1 (Osq $x_0 \in I$ i.e f définie en x_0)

a) DL_0

Prop : f a un $DL_0(x_0) \iff f$ est C^0 en x_0

D/ On a les équivalences suivantes (OALES) :

- f C^0 en x_0 $\iff f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$

$$\iff f(x_0+t) \xrightarrow[t \to 0]{} f(x_0)$$

$$\iff f(x_0+t) - f(x_0) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$$

R^x $\iff f(x_0+t) - f(x_0) = o(1)$ qd $t \to 0$

$o(1)$ $\iff f(x_0+t) = f(x_0) + o(1)$ qd $t \to 0$

$$\implies f \text{ a un } DL_0(x_0)$$

- Osq f a un $DL_0(x_0)$ qu'on écrit $f(x_0+t) = a_0 + o(1)$ avec $a_0 \in \mathbb{K}$. Donc on a $f(x_0+t) \xrightarrow[t \to 0]{} a_0$

- DALC, on sait que $a_0 = f(x_0)$. On a donc

$$f(x_0+t) \xrightarrow[t \to 0]{} f(x_0)$$

- Donc f est C^0 en x_0

b) DL_1

$\boxed{\text{Prop : } f \text{ a un } DL_1(x_0) \iff f \text{ dérivable en } x_0}$

D/ DALC, on a :

f dérivable en $x_0 \iff$ " D_2 " $\iff$

$\exists\, \ell \in \mathbb{K},\ \exists\, \varepsilon(\cdot) : I \to \mathbb{K} :$

$$\begin{cases} f(x_0+t) = f(x_0) + \ell t + \varepsilon(t)\cdot t \\ \varepsilon(t) \longrightarrow 0 \end{cases}$$

- Si f est d^1 en x_0, on a donc (T) :

$$f(x_0+t) = f(x_0) + \ell \cdot t + o(t)$$

Ainsi f a un $DL_1(x_0)$

- Rcpq^t : Osq f a un $DL_1(x_0)$ qu'on écrit :

$$f(x_0+t) = a_0 + a_1 t + o(t)$$

- On a : $f(x_0+t) = a_0 + o(1)$. Donc a un $DL_0(x_0)$

donc f est C^0 en x_0 et $\underline{a_0 = f(x_0)}$

- On a $f(x_0+t) = f(x_0) + a_1 \cdot t + o(t)$
- On pose $\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{f(x_0+t) - f(x_0) - a_1 t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$
- $\hat{C}$ $f(x_0+t) - f(x_0) - a_1 t = o(t)$, on a $\varepsilon(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ ∎

D'où D_2

2) Cas général

Prop : Soit $n \geq 2$. Alors :

$$f \text{ a un } DL_n(x_0) \cancel{\Longleftrightarrow} \text{"} f \text{ est } n \text{ fois dérivable en } x_0 \text{"}$$

est F en g^{al}

Rq : On va mq

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^n \text{ au } \mathcal{V}(x_0) \Longrightarrow f \text{ a un } DL_n(x_0)$$

$$(\exists \delta > 0 : f \in \mathcal{C}^n(I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, \mathbb{K}))$$

D/ $n = 2$

On cherche f ayant un $DL_2(0)$ mais qui n'est $\mathcal{D}^2$ sur aucun voisinage de 0.

- "Arnaque" : $\forall \alpha > 2, \; t^\alpha = o(t^2)$
- Ocsd : $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^{5/2}$
- On a $f(x) = o(x^2)$ qd $x \longrightarrow 0$
- Donc f a un $DL_2(0)$.
- Sur $\mathbb{R}_+^*$, f est $\mathcal{C}^\infty$
- On a $f'(x) = \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

- D'après le thm de la limite de la dérivée :

On a donc : f dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

- Puis ⓣ : $f''(x) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{x}$ si $x > 0 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

- Donc par le thm de la limite de la dérivée :

f' est dérivable en 0 et $f''(0) = 0$

<u>échec</u>

$(\alpha > 0)$

<u>Prop :</u> La f° $\begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^\alpha \end{array}$ est dérivable en 0

$\iff \alpha \geq 1$

<u>D/</u> exo

<u>D/</u>$^{n=2}$ Ocsd $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \begin{cases} x^{5/2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

On a $|\sin(\cdot)| \leq 1$

Donc $x^{5/2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \to 0}{=} O\left(x^{5/2}\right)$

Or, $x^{5/2} = o(x^2)$ qd $x \to 0$

Donc $x^{5/2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = o(x^2)$; donc

f a un $DL_2(0)$

· On a $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$

· De (1), AF : f est dérivable en 0 et

$f'(0) = 0$

· Soit $x > 0$: on a

$$f'(x) = \frac{5}{2} x^{3/2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^{5/2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \times \frac{-1}{x^2}$$

$$= \frac{5}{2} x^{3/2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \sqrt{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

· Mq f' n'est pas dérivable en 0.

· Soit $x > 0$, On a

$$T_{f',0}(x) = \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \frac{f'(x)}{x}$$

$$= \underbrace{\frac{5}{2}\sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\xrightarrow[x \to 0]{} 0} - \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}$$

n'a pas de limite finie qd $x \to 0$

(Mq $\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}$ n'a pas de limite qd $x \not\to 0$

ORPA et on fixe $l \in \mathbb{R}$ tq $\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} \longrightarrow l$

OCsd (T) $x_n := \frac{1}{2n\pi}$

On a $x_n \longrightarrow 0$

et $\frac{\cos\left(\frac{1}{x_n}\right)}{\sqrt{x_n}} = \sqrt{2n\pi} \longrightarrow +\infty$ ABS

$\frac{\cos\left(\frac{1}{x_n}\right)}{\sqrt{x_n}} \longrightarrow l$)

Ccl : Si f' est dérivable en 0, alors

$\exists\, l \in \mathbb{R} : T_{f',0}(x) \longrightarrow l$

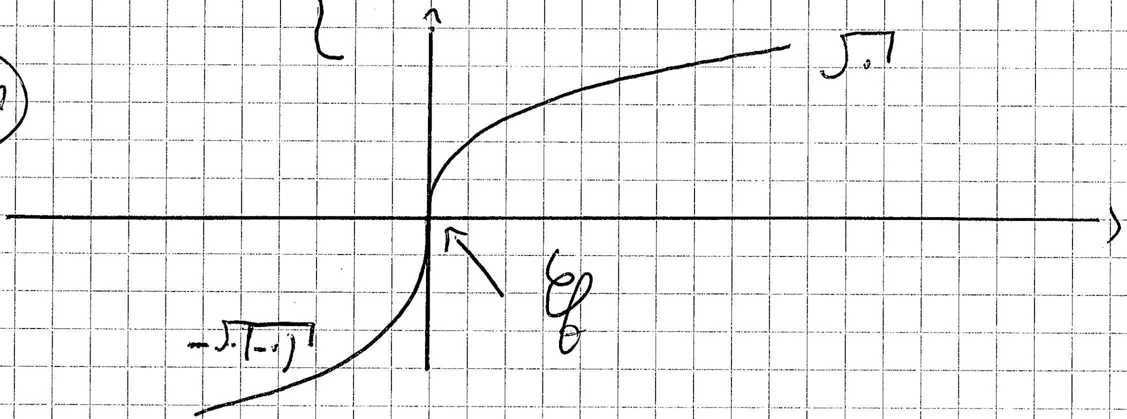
On a alors $\exists\, l' \in \mathbb{R} : \dfrac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} \longrightarrow l$: ABS

5) Existence des DLs :

a) une fonction sans $DL_{\geq 1}$

Ocsd $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

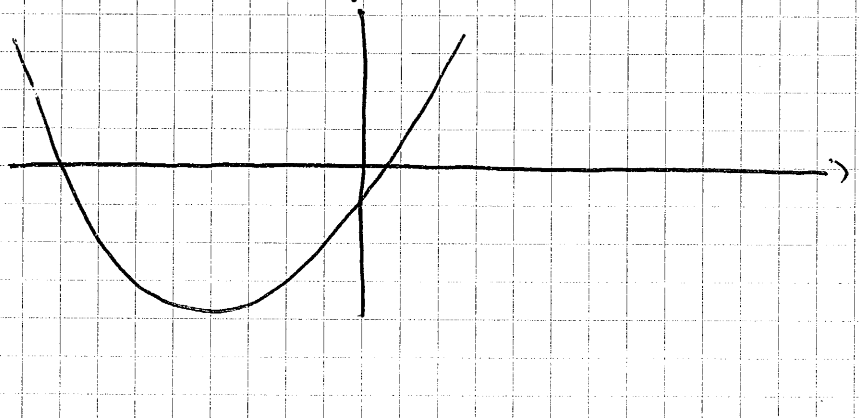
d^n



On a f pas d^1 en 0 (AF)

Donc $\forall n \geq 1$, f n'a pas de $DL_n(0)$

d^n



b) Th Taylor Young

Th : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$. Osq $x_0 \in I$

Alors :

$$\left(f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})\right) \Rightarrow \boxed{f \text{ est } \mathcal{C}^n \text{ au } \mathcal{V}(x_0) \Rightarrow f \text{ a un } DL_n(x_0)}$$

D/ (T) On a alors

$$f(x_0+t) \underset{t \to 0}{=} f(x_0) + f'(x_0)t + \frac{f''(x_0)}{2}t^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}t^n$$
$$+ o(t^n)$$

Corollaire :

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K})$.

Alors :

$\forall x_0 \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}$, f a un $DL_n(x_0)$

6) DLs et parité

Prop : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$. Soit $n \in \mathbb{N}$

Osq f a un $DL_n(0)$. Alors

1) f paire $\Longrightarrow$ "le $DL_n(0)$ de f est pair"

2) f impaire $\Longrightarrow$ "le $DL_n(0)$ de f est impair".

Rq :

- "le $DL_n(0)$ de f est paire : cela signifie que les termes de degré impair du DL sont nuls"

- De m̄ pour "impair".

Ex : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ paire.

On ne peut pas avoir

$$f(t) = 3 \cancel{+ t} - 5t^2 \cancel{+ 8t^3} + \frac{t^4}{8} + o(t^4)$$

D/ 1) • Osq f paire

• Ĉ f a un $DL_n(0)$, on écrit :

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n + o(t^n)$$

avec $\forall i, a_i \in \mathbb{R}$ quand $\boxed{t \longrightarrow 0}$

• Si $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tq $\phi(t) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$,

On peut écrire

$$f(\phi(t)) = a_0 + a_1 \phi(t) + \dots + a_n \phi^n(t) + o\left(\phi(t)^n\right) \quad \text{qd } t \to 0$$

D/ • $\boxed{M^d \text{ PLS}}$ Je remplace $o(t^n)$ par $\varepsilon(t) t^n$ avec $\varepsilon(t) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$

• On a $\oplus$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n + \varepsilon(t) t^n$$

• Donc : $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(\varphi(t)) = a_0 + a_1 \varphi(t) + \dots + a_n \varphi(t)^n + \boxed{\varepsilon(\varphi(t)) \, \varphi(t)^n}$

noté $\delta(t)$

• Par compo° des limites

$$\delta(t) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$$

• Donc :

$$f(\varphi(t)) = a_0 + a_1 \varphi(t) + \dots + a_n \varphi(t)^n + o(\varphi(t)^n) \quad \blacksquare$$

(Composition des DA)

Ex : On prend $\varphi(t) = t^2$ ou $-t$

• Retour à la preuve :

$\hat{C}$ $(-t) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$, on a :

$$f(-t) = a_0 + a_1(-t) + \dots + a_n(-t)^n + o((-t)^n)$$

• $\hat{C}$ f paire : on a $f(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k t^k + o(t^n)$

• $\hat{C}$ de ⊕ $f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k + o(t^n)$

• Par unicité du DL : si $k \in [\![0,n]\!]$ est impair, on a $(-1)^k a_k = -a_k = a_k$ et donc $2a_k = 0$

donc $a_k = 0$

■ 1)

2) Dem ■

7) DLs, Re(·) et Im(·)

Prop ⊕ : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ tq f a un $DL_n(x_0)$

Alors :

1) $Re(f)$ a un $DL_n(x_0)$ qui est la partie réelle du $DL_n(x_0)$ de f

2) Dem pour $Im(f)$

Ex :

Si $f(t) = (2+i) - it + (4-2i)t^2 + o(t^2)$

alors $\mathrm{Re}(f)(t) = 2 + 4t^2 + o(t^2)$

D/ 1) On écrit $f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k + O(t^n)$ avec $\forall k,\ a_k \in \mathbb{C}$

Mieux on écrit :

$$\forall t,\ f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k \overset{\in \mathbb{R}}{t^k} + \varepsilon(t) \cdot \overset{\in \mathbb{R}}{t^n} \quad (*)$$ avec $\varepsilon(\cdot) : I \to \mathbb{C}$, $t \in I \subset \mathbb{R}$

tq $\varepsilon(t) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$

On écrit $\varepsilon(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$ avec $\alpha(\cdot), \beta(\cdot) : I \to \mathbb{R}$

On a $\alpha(t) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$ et $\beta(t) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$

On fait $\mathrm{Re}(*)$:

$$\forall t \in I,\ \mathrm{Re}(f(t)) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}(a_k) t^k + \alpha(t) t^n$$

On a $\mathrm{Re}(f(t)) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}(a_k) t^k + o(t^n)$ ■

2) Dem

IV Opérations sur les DLs

Idée : comprendre concrètement comment calculer des DLs

1) Opérations usuelles

a) CL

Prop : 1) f, g ont des $DL_n(x_0) \Rightarrow f + \lambda g$ aussi

2) Le $DL_n(x_0)$ de $f+\lambda g$ est égal à $(\dots)$

D/ AF

Ex : Si $\begin{cases} f(t) = 3 - t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) \\ g(t) = 5 + t + t^2 + o(t^2) \end{cases}$

Alors $f(t) + 10g(t) = 53 + 9t + \frac{21}{2}t^2 + o(t^2)$

b) produit

Prop (T)

1) Si f et g ont des $DL_n(x_0)$, $f \cdot g$ aussi

2) Pour calculer le $DL_n(x_0)$ de $f \times g$, on fait le produit des parties régulières des $DL_n(x_0)$ de f et g en ne gardant q les termes de degré $\leq n$

D/ $(AF)^+$

Ex : Osq $f(t) = 3 - t + 5t^2 + t^3 + o(t^3)$

$g(t) = 1 - t + 2t^2 + 5t^3 + o(t^3)$

On a $f(t)\,g(t) = g(t) \times f(t)$

$= \left(1 - t + 2t^2 + 5t^3 + o(t^3)\right)\left(3 - t + 5t^2 + t^3 + o(t^3)\right)$

$= 3 - t + 5t^2 + t^3 + o(t^3)$ → (R) c'est $o(t^4)$

$-3t + t^2 - 15t^3 \; [\; - \; t^4 \; + \boxed{t \cdot o(t^3)}$ $= o(t^3)$

$+ \; 6t^2 - 2t^3 \; [\; + 10t^4 + 2t^5 + o(t^5)$ $= o(t^3)$

$+ \; 15t^3 \; \underset{\overset{\parallel}{o(t^3)}}{[}\; - 5t^4 + 25t^5 + 5t^6 + o(t^6)$

En pratique

On a $g(t) \times f(t) = \left(1 - t + 2t^2 + 5t^3 + o(t^3)\right)\left(3 - t + 5t^2 + t^3 + o(t^3)\right)$

$= 3 - t + 5t^2 + t^3 + o(t^3)$
$\quad -3t + t^2 - 5t^3$
$\quad + 6t^2 - 2t^3$
$\quad + 15t^3$

$= \boxed{3 - 4t + 12t^2 + 9t^3 + o(t^3)}$

c) !! Puissances

En pratique

On a $f(t) = 1 - t + 2t^2 + 3t^3 + o(t^3)$

Je veux calculer le $DL_3(0)$ de f^{17}

On utilise l'algorithme d'exponentiation rapide

On a $f(t)^2 = \left(1 - t + 2t^2 + 3t^3 + o(t^3)\right)^2$

$(a + b + c + \dots)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \dots + 2ab + 2ac + 2bc + \dots$

$$\begin{aligned} = \; & 1 + t^2 \cancel{+} + o(t^3) \\ & -2t + 4t^2 + 6t^3 \\ & -4t^3 + o(t^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \; & 1 + t^2 \\ & -2t + 4t^2 + 6t^3 \\ & -4t^3 + o(t^3) \end{aligned}$$

$$= 1 - 2t + 5t^3 + 2t^3 + o(t^3)$$

Donc

$$f(t)^4 = \left(f(t)^2\right)^2 = \left(1 - 2t + 5t^2 + 2t^3 + o(t^3)\right)^2$$

$$\begin{aligned} = \; & 1 + 4t^2 + \\ & -4t + 10t^2 + 4t^3 \\ & -20t^3 = 1 - 4t + 14t^2 - 16t^3 + (o(t^3)) \end{aligned}$$

$(\dots) \quad f^{17}(t) = 1 - 17t + 170t^2 - 1173t^3 + o(t^3)$

d) quotient

Prop : (T)

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ a un } DL_n(x_0) \\ g \text{ a un } DL_n(x_0) \\ g(x_0) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{f}{g} \text{ a un } DL_n(x_0)$$

D/ et ex : (T) loin

2) Composition $\circ$

Ocsd

$$\begin{array}{ccccc} I & \xrightarrow{f} & J & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ \in & & \in & & \\ x_0 & \longmapsto & y_0 = f(x_0) & & \end{array}$$

Prop :

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ a un } DL_n(x_0) \\ g \text{ a un } DL_n(y_0) \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f \text{ a un } DL_n(x_0)$$

D/ (T) On écrit (*) $f(x_0 + t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n + o(t^n)$

$g(y_0 + h) = b_0 + b_1 h + \dots + a_n h^n + o(h^n)$

quand $t \to 0$

$h \to 0$

R^x : Dans $(**)$, je peux remplacer h par n'importe quelle quantité qui tend vers 0

Plus précisement si $\Psi : K \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\Psi(\theta) \underset{\theta \to c}{\longrightarrow} 0$

alors, on aura $g(y_0 + \Psi(\theta)) = \cdots$

$$b_0 + b_1 \Psi(\theta) + b_2 \Psi(\theta)^2 + \cdots + b_n \Psi(\theta)^n + o(\Psi(\theta)^n)$$

qd $\theta \longrightarrow c$

Rq: de m̄ si $\varepsilon_p \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} 0$ on a

$$g(y_0 + \varepsilon_p) = b_0 + b_1 \varepsilon_p + b_2 \varepsilon_p^2 + \cdots + b_n \varepsilon_p^n + o(\varepsilon_p^n)$$

qd $p \longrightarrow \infty$

- !! On a $f(x_0) = y_0$
- Et !! $\begin{cases} a_0 \text{ (le 1}^{\text{er}} \text{ terme du DL de } f\text{) est } f(x_0) \\ b_0 = g(y_0) \end{cases}$
- Final^{nt} :

$$(g \circ f)(x_0 + t) = g(\boxed{f(x_0+t)}) = g(a_0 + \underbrace{\boxed{a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + o(t^n)}}_{= h(t)})$$

On a $h(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$

$$= g(y_0 + h(t))$$

$A(t)$

$$= \boxed{b_0 + b_1 h(t) + b_2 h(t)^2 + \cdots + b_n h(t)^n + o(h(t)^n)}$$

qd $t \to 0$

On a $h(\cdot)$ a un $DL_n(0)$.

Donc $h^2, h^3, \dots, h^n$ aussi

Donc, on peut écrire :

$$A(t) = c_0 + c_1 t + \dots + c_n t^n + o(t^n)$$

• Gérons $o(h(t)^n)$:

On le note (PLS) $\varepsilon(t)\, h(t)^n$

Mq $\varepsilon(t)\, h(t)^n = o(t^n)$ qd $t \to 0$

D/[1] On a $h(t) = O(t)$ qd $t \to 0$

(Mieux : si $a_1 \neq 0$, $h(t) \sim a_1 t$
$a_1 = 0$, $h(t) = o(t)$)

Donc $h(t)^n = O(t^n)$

Donc $\varepsilon(t)\, h(t)^n = o(t^n)$ ■

ou $o(h(t)^n) = o(t^n)$

D[2]/ Mq $\varepsilon(t) \cdot h(t)^n = o(t^n)$

On a $\dfrac{\varepsilon(t) \cdot h(t)^n}{t^n} = \varepsilon(t) \left(\dfrac{h(t)}{t}\right)^n$

$$= \underbrace{\varepsilon(t)}_{\to 0} \underbrace{\left(a_1 + a_2 t + \dots + a_n t^{n-1} + o(t^{n-1})\right)}_{\text{borné (Osq } n \geq 0\text{) au } \mathcal{V}(0)}$$

Ainsi $\varepsilon(t)\left(a_1 + a_2 t + \dots + a_n t^{n-1} + o(t^{n-1})\right)^n \to 0$

<u>CCl</u> : On a écrit $g(y_0 + h(t)) = $ $(g\circ f)(x_0+t)$

$$c_0 + c_1 t + \dots + c_n t^n + o(t^n) \quad \blacksquare$$

<u>Ex</u> : $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

Osq $f(0) = 2$; Osq $f(t) = 2 - t + t^2 + 2t^3 + o(t^3)$

et Osq $g(2+h) = 10 - h - h^2 + 40h^3 + o(h^3)$

- <u>Modèle de rédact°</u>

On pose $h := -t + t^2 + 2t^3 + o(t^3)$

On a $h^2 = t^2 - 2t^3 + o(t^3)$

$h^3 = \left(t^2 - 2t^3 + o(t^3)\right)\left(-t + 2t^2 + 2t^3 + o(t^3)\right)$

$= -t^3 + o(t^3)$

Ainsi $g(f(t)) = g(2 + h(t))$

$= 10 - h(t) - h(t)^2 + 40\, h(t)^3 + o(h(t)^3)$

on a $h(t) \sim -t^3$

c'est un $o(t^3)$

$$= 10 + t - t^2 - 2t^3$$
$$\quad - t^2 + 2t^3$$
$$\quad - 10t^3 + o(t^3)$$

$$= 10 + t - 2t^2 - 10t^3 + o(t^3)$$

3) Primitivation des DLs

a) un lemme de primitivation des relations de comparaison

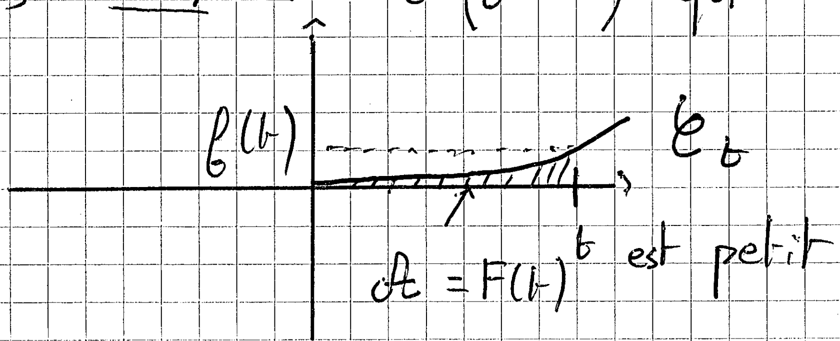
<u>Lemme</u> : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continue $(N \in \mathbb{N})$

Osq $f(t) = o(t^N)$ qd $t \longrightarrow 0$

Notons $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(\theta)\, d\theta$

Alors $\underline{F(t)} = o(t^{N+1})$ qd $t \longrightarrow 0$

d^n



D/ Mq $\dfrac{F(t)}{t^{N+1}} \longrightarrow 0$

ie mq $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall t \in]-\delta ; \delta[, \cancel{|F(t)| \leqslant \varepsilon |t|}$

$|F(t)| \leqslant \varepsilon |t|^{N+1}$

Soit $\varepsilon > 0$. $\mathcal{E}$ $f(t) = o(t^N)$, fixons $\delta > 0$

tq $\forall t \in]-\delta, \delta[, \ |f(t)| \leqslant \varepsilon |t|^N$

Soit $t \in]-\delta, \delta[$ Osq $t \geqslant 0$

On calcule :

$$|F(t)| \leqslant \int_0^t |f(\theta)| \, d\theta \leqslant \varepsilon \int_0^t \theta^N d\theta = \frac{\varepsilon t^{N+1}}{N+1}$$

car on intègre ds le bon sens (car on intègre DLBS)

$$\leqslant \varepsilon t^{N+1}$$

b) primitivation des DLs

Prop : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continue

Soit $x_0 \in I$

Ocsd $F : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une primitive de f

1) f a un $DL_n(x_0) \Rightarrow F$ a un $DL_{n+1}(x_0)$

2) Mieux :

Si on a $f(x_0+t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n + o(t^n)$

Alors on a

$$F(x_0+t) = F(x_0) + a_0 t + \frac{a_1}{2} t^2 + \dots + \frac{a_n}{n+1} t^{n+1}$$
$$+ o(t^{n+1})$$

<u>D/</u> 2) Ocsd g : "$I - x_0$" $\longrightarrow \mathbb{R}$

$\{x - x_0, x \in I\}$

$t \longmapsto f(x_0+t)$

On a $g(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n + o(t^n)$

Ocsd φ : "$I - x_0$" $\longrightarrow \mathbb{R}$

$\{x - x_0 ; x \in I\}$

$t \longmapsto f(x_0+t) - (a_0 + a_1 t + \dots)$

On a φ C^0 et on a $\varphi(t) = o(t^n)$

Posons Φ : "$I - x_0$" $\longrightarrow \mathbb{R}$

$t \longmapsto \int_0^t \varphi(\theta)\,d\theta$

Si $t \in$ "$I - x_0$", on a

$\Phi(t) = F(x_0+t) - F(x_0+0) + \dots$

car $t \longmapsto F(x_0+t)$ a pour dérivée "$F'(x_0+t) = f(x_0+t)$"

$$\boxed{(R^*) \quad \int_0^x t^k \, dt = \frac{x^{k+1}}{k+1}}$$

$$\Phi(t) = F(x_0+t) - F(x_0) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} t^{k+1}$$

D'après le lemme, on a $\Phi(t) = o(t^{n+1})$

<u>CCl</u> : $F(x_0+t) = F(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} t^{k+1} + o(t^{n+1})$ ■

V DLs usuels

<u>Idée :</u> On va mq avec 2 DLs "racines", on trouve tous les autres DLs

1) Fonction inverse (DL racine) DL1*

<u>C'est SG</u>

<u>Prop :</u> DL1* : $\frac{1}{1-h} = 1 + h + h^2 + \dots + h^n + o(h^n)$

<u>D/</u> Soit $h \in]-1,1[$.

On a $\sum_{k=0}^{n} h^k = \frac{h^{n+1}-1}{h-1} = \frac{1-h^{n+1}}{1-h}$

Donc $\frac{1}{1-h} = \sum_{k=0}^{n} h^k = \frac{h^{n+1}}{1-h}$

• Mq $\dfrac{h^{n+1}}{1-h} = o(h^n)$ qd $h \longrightarrow 0$

D/ On a $1-h \underset{h\to 0}{\sim} 1$. Donc $\dfrac{h^{n+1}}{1-h} \sim h^{n+1}$

$= o(h^n)$ ∎

Prop (DL2)

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 + \dots + o(t^n)$$

D/ on remplace t par $(-t)$ dans $(DL1^*)$

C'est légitime car $-t \longrightarrow 0$ qd $t \longrightarrow 0$

2) Log

Prop :

DL_3 : $\ln(1-t) = -t - \dfrac{t^2}{2} - \dfrac{t^3}{3} - \dfrac{t^4}{4} - \dots + o(t^n)$

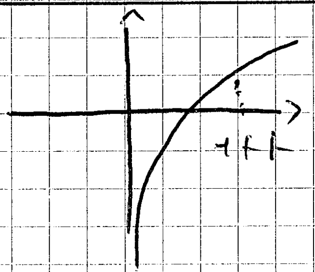
DL_4 $\ln(1+t) = t - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{3} - \dfrac{t^4}{4} + \dots + o(t^n)$

Rq :

• Ĉ $\ln(1+0) = 0$: les termes c^{sts} des DL

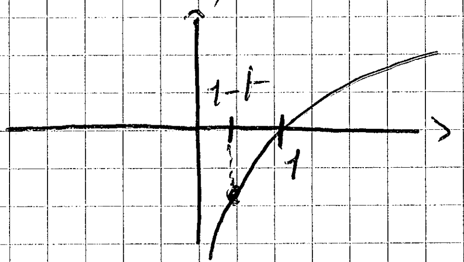
sont $= 0$

• !! Une f^o est du signe de son équivalent localement

(*) 

$\ln(1+t) > 0$ si $t > 0$

(*) De (f), on sait que $\ln(1+t) \sim t$

(*) 

$\ln(1-t) < 0$ si $t > 0$

"<u>Donc</u>" $\ln(1-t) = -t + \dots$

D/1) Notons $f :]-1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$t \longmapsto \dfrac{1}{1-t}$

⚠ <u>Piège</u> : une primitive de "$\dfrac{1}{1-t}$"

c'est $(-1)\ln(1-t)$

Č $\dfrac{1}{1-t} = 1 + t + \dots + t^n + o(t^n)$

en primitivant, on obtient :

$$-\ln(1-t) = -\ln(1-0) + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \dots +$$
$$+ o(t^{n+1})$$

2) De $\overline{m}$; <u>ou</u> : en faisant DL_3 pour $-t$

3) Arctan

Idée : $\dfrac{1}{1+t} \xrightarrow{t=t^2} \dfrac{1}{1+t^2} \xrightarrow{\text{primitive}} \arctan(t)$.

Prop : (DL_5)

$$\mathrm{Arctan}(t) = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + \dots + o(t^n)$$

D/ AF

4) exp

Prop (DL_6)

$$\exp(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots + \frac{t^n}{n!}$$
$$+ o(t^n)$$

D/ $\hat{C}$ exp(.) est $\mathcal{C}^\infty$, d'après le théorème de Taylor Young.

Je sais que $\forall n$, f a un $DL_n(0)$ qui est

$$\exp(t) = \exp(0) + \exp'(0)\,t + \exp''(0)\frac{t^2}{2} + \dots$$
$$+ \exp^{(n)}(0)\frac{t^n}{n!} + o(t^n)$$

Or, $\forall k$, $\exp^{(k)} = \exp$

donc $\forall k$, $\exp^{(k)}(0) = 1$ ∎

5) Sinus et cosinus

Prop (T) :

$$DL_7 : \sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \frac{t^9}{9!} + \dots + o(t^n)$$

$$DL_8 : \cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \frac{t^8}{8!} + \dots + o(t^n)$$

D^{fausse} / $\mathbb{C}^1$ $\quad e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + o(t^n)$

Je remplace t par it

$$e^{it} = 1 + it + \frac{(it)^2}{2} + \frac{(it)^3}{3!} + \dots + \frac{(it)^n}{n!} + o(t^n)$$

- Je passe à $\mathrm{Re}(\cdot)$:

$$\cos(t) = 1 + \frac{(it)^2}{2!} + \frac{(it)^4}{4!} + \dots + \frac{(it)^{2n}}{(2n)!} + o(t^{2n})$$

$$= 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} + o(t^{2n})$$

- De $\overline{m}$ pour $\sin(\cdot)$ ∎

Je regarde $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$
$t \longmapsto e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$

- On a $\forall n,\ f^{(n)} = i^n f$
- Donc : $\forall n,\ f^{(n)}(0) = i^n f(0) = i^n$
- Donc, puisque f est $\mathcal{C}^\infty$, TY donne

$$f(t) = 1 + it + \frac{(it)^2}{2!} + \dots + \frac{(it)^n}{n!} + o(t^n)$$ ■

D/ (rec) $\mathcal{P}(k)$: " $\sin^{(2k)} = (-1)^k \sin$
$\sin^{(2k+1)} = (-1)^k \cos$
$\cos^{(2k)} = (-1)^k \cos$
$\cos^{(2k+1)} = (-1)^{k+1} \sin$ "

- On a $\forall k,\ \mathcal{P}(k)$ (AF)
- Puis on évalue en 0
- Puis $\mathcal{C}$ sin, cos sont $\mathcal{C}^\infty$: (TY) ■

6) Sinh et cosh

Prop (T) DL_9 : $\sinh(t) = t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots + o(t^{2n+1})$

DL_{10} $\cosh(t) = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^6}{6!} + \dots + o(t^{2n})$

D/ $\frac{e^t + e^{-t}}{2} = \cosh(t) = \dots$ (AF) ■

7) Fonction puissance

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$

Ocsd $f_\alpha :]-1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
$t \longmapsto (1+t)^\alpha$

Ex : $\alpha = \frac{1}{2}$ $\quad \sqrt{1+t}$

$\alpha = -1$ $\quad \frac{1}{1+t}$

Fait : $f_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(]-1; +\infty[, \mathbb{R})$

D/ f_α : $]-1, +\infty[\xrightarrow[\mathcal{C}^\infty]{t \mapsto t+1} \mathbb{R}_+^* \xrightarrow[\mathcal{C}^\infty]{y \mapsto \ln(y)} \mathbb{R} \xrightarrow[\mathcal{C}^\infty]{z \mapsto \alpha z} \mathbb{R} \xrightarrow[\mathcal{C}^\infty]{\theta \mapsto e^\theta} \mathbb{R}_+^*$

$(1+t)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+t)}$

$t \longmapsto 1+t \longrightarrow \ln(1+t) \longrightarrow \alpha \ln(1+t) \longrightarrow e^{\alpha \ln(1+t)}$

Corollaire :

1) f_α a un $DL_n(0)$.

2) $\boxed{DL_n}$:

$$(1+t)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1} t + \binom{\alpha}{2} t^2 + \binom{\alpha}{3} t^3 + \dots + \binom{\alpha}{n} t^n + o(t^n)$$

où $\binom{\alpha}{k} := \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha- \quad)}{k!}$ si $k \in \mathbb{N}$

Rq : $\binom{X}{k} := \dfrac{X(X-1)(X-2)\cdots(X-(k-1))}{k!} \in \mathbb{Q}_k[X]$

Rq^{Rq} : $\left.\begin{array}{l} P \in \mathbb{C}[X] \\ \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Longrightarrow P \in \mathbb{R}[X]$

18.19

• De (F), on a : $\left.\begin{array}{l} P \in \mathbb{R}[X] \\ \forall r \in \mathbb{Q},\ P(r) \in \mathbb{Q} \end{array}\right\} \Longrightarrow P \in \mathbb{Q}[X]$

18.21

• Question : $\left.\begin{array}{l} P \in \mathbb{Q}[X] \\ \forall n \in \mathbb{Z},\ P(n) \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \Longrightarrow P \in \mathbb{Z}[X]$?

Fait : Non

D/ $P := \dfrac{X(X-1)}{2}$

$P(n)$ → si impair $(n = 2p)$ $p(2p-1) \in \mathbb{Z}$

→ si pair $(n = 2p+1)$ $(2p+1)2p \in \mathbb{Z}$

Prop : $\left(\begin{array}{c}\mathbb{C}_N[X] \\ \mathbb{R}_N[X]\end{array}\right)$

Soit $P \in \mathbb{Q}_N[X]$ tq $\forall n \in \mathbb{Z},\ P(n) \in \mathbb{Z}$

Alors,
$$\exists!\ (a_0, \dots, a_N) \in \mathbb{Z}^{N+1} : P = \sum_{k=0}^{N} a_k \binom{X}{k}$$

polynômes de Hilbert

D/ exo * $\blacksquare$

Ex : Calculons $\binom{1/2}{k}$

Fait : $\binom{\alpha}{0} = 1$; $\binom{\alpha}{1} = \alpha$ $\blacksquare$ AF

$\binom{1/2}{0} = 0 \qquad \binom{1/2}{1} = \frac{1}{2} \qquad \binom{1/2}{2}$

idée : $\binom{\alpha}{k+1} = \frac{(\alpha - k)}{k+1} \binom{\alpha}{k}$

$$\binom{1/2}{2} = \frac{\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{2} \binom{1/2}{1} = \frac{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{8}$$

$$\binom{1/2}{3} = \frac{\left(-\frac{1}{2} - 1\right)}{3} \cdot \frac{-1}{8} = \frac{1}{16}$$

$$\binom{1/2}{4} = \frac{\left(-3/2 - 1\right)}{4} \frac{1}{16} = \frac{-5/2}{4 \cdot 16} = \frac{-5}{128}$$

AF :

$$\binom{1/2}{0} = 1$$

$$\binom{1/2}{1} = \frac{1/2}{1!}$$

$$\binom{1/2}{2} = \frac{1/2\left(1/2 - 1\right)}{2!}$$

$$\binom{1/2}{3} = \frac{1/2\left(1/2 - 1\right)\left(1/2 - 2\right)}{3!} = \dots$$

$$\binom{1/2}{n} = \frac{1/2\left(1/2 - 1\right)\left(1/2 - 2\right)\left(1/2 - 3\right)}{n!} = \dots$$

AF $\blacksquare$

<u>Rq</u> : La suite des signes de $\left(\binom{\alpha}{k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ alterne APCR

qd $\alpha \notin \mathbb{N}$

<u>D/</u> exo AC $\blacksquare$

<u>Application</u> :

$$\boxed{\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t + \left(-\frac{1}{8}t^2\right) + \frac{1}{16}t^3 - \frac{5}{128}t^4 + o\left(t^4\right)}$$

<u>Rq</u> : $\frac{1}{1+t} = (1+t)^{-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{-1}{k} t^k + o\left(t^n\right)$

D/ 1) TY car $f_\alpha \in \mathcal{C}^\infty$

2) On calcule $f_\alpha^{(k)}$ pour $k \in \mathbb{N}$

$\boxed{n}$ Idée : $f_\alpha' = \alpha f_{\alpha-1}$

(rec) • $f_\alpha^{(k)} = \underbrace{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-?)}_{k \text{ fois}} f_{\alpha-k}$

• $f_\alpha^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))\, \underbrace{f_{\alpha-k}(0)}_{= (1+0)^{\alpha-k} = 1}$

TY : $f_\alpha(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} \underbrace{\dfrac{f_\alpha^{(k)}(0)}{k!}}_{\binom{\alpha}{k}} t^k + o(t^n)$

8) Quotient de DLs : en pratique

a) un ex : le DL_4 de $t \mapsto \frac{1}{t}$ en 2

Soit t "petit". On a :

$$\frac{1}{2+t} = \frac{1}{2}\, \frac{1}{1+\frac{t}{2}} = \frac{1}{2}\left[1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + o(u^4)\right]$$

$\boxed{n}$ OFAA $\dfrac{1}{1+\text{qqch}}$ avec $u = \frac{t}{2}$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4} - \frac{t^3}{8} + \frac{t^4}{16} + o(t^4)\right)$$

ccl : $\dfrac{1}{2+t} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{t}{4} + \dfrac{t^2}{8} - \dfrac{t^3}{16} + \dfrac{t^4}{32} + o(t^4)$

b) $DL_n(x_0)$ de $\frac{f}{g}$

- Déjà, on est ramené au calcul d'un $DL_n(x_0)$ de $\frac{1}{g}$

- Osq $g(x_0) \neq 0$ (Osq $g(x_0) > 0$)

- On note $inv : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, $x \longmapsto \frac{1}{x}$

- On a : $\frac{1}{g} = inv \circ g$

- Donc, on est ramené au cas des f° composées (avec 1°) un $DL_n(x_0)$ de g

  2°) un $DL_n(y_0)$ de inv où $y_0 := f(x_0)$

Ex :

Osq $f(t) = 3 - t + t^2 + o(t^2)$

$g(t) = 5 + t + 2t^2 + o(t^2)$

But : $DL_2(0)$ de $\frac{f}{g}$

Methode de R°

Soit t petit. On a

$$\frac{1}{g(t)} = \frac{1}{5+t+2t^2+o(t^2)} = \frac{1}{5+u} \quad \text{où} \quad u = t+2t^2+o(t^2)$$

$$\frac{1}{1+h} = 1-h+h^2+o(h^2)$$

$$= \frac{1}{5}\frac{1}{1+\frac{u}{5}} = \frac{1}{5}\left(1-\frac{u}{5}+\left(\frac{u}{5}\right)^2+\boxed{o(u^2)}\right)$$

$\boxed{o(u^2)} = o(t^2)$ car $u \sim t$

R° $u^2 = \dots$ = puissance de DL

$u \sim t$ donc $u^2 \sim t^2$ ie $u^2 = t^2 + o(t^2)$

dico

$$= \frac{1}{5}\left(1 - \underbrace{\frac{t}{5} + \frac{2}{5}t^2}_{=\frac{u}{5}} + \frac{1}{25}t^2 + o(t^2)\right)$$

Bilan : $$\frac{1}{g(t)} = \frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5}t-\frac{9}{25}t^2\right)+o(t^2)$$

$$= \frac{1}{5}-\frac{1}{25}t-\frac{9}{125}t^2+o(t^2)$$

CCl $$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{1}{5}\left(3-t+t^2+o(t^2)\right)\left(1-\frac{1}{5}t+\frac{9}{25}t^2+o(t^2)\right)$$

$$= \frac{1}{5}\Big(3-\frac{3}{5}t+\frac{27}{25}t^2$$
$$-t+\frac{1}{5}t^2$$
$$+t^2$$

$$= \frac{1}{5}\left(3-\frac{8}{5}t+\frac{3}{25}t^2+o(t^2)\right.$$

VI Gain d'ordre *

Dans certains cas, on peut accélérer les calculs.
C'est pour les produits, qd un des DL (ou les deux) n'ont pas de termes c^{st}

Ex : • $f(t) = t - 3t^2 + o(t^2)$

• $f(t) = 3t^3 - 10t^4 + o(t^4) \longrightarrow$ Gros gain d'ordre

1) Valuation

Qd la partie regulière d'un DL_n est $\neq 0$, on appelle valuation la 1ère puissance ayant un coeff $\neq 0$

ie $f(t) = a_p t^p + \dots + a_n t^n + o(t^n)$

avec $a_p \neq 0$

2) Gain d'ordre

Je peux avoir un $DL_n(0)$ de f de valuation $p>0$

Je peux avoir un $DL_n(0)$ de g

Je veux un $DL_n(0)$ de $f \times g$

En fait, pour avoir un $DL_n(0)$ de $f \times g$, il me suffit d'avoir un $DL_{n-p}(0)$ de $g(t)$

Explicat° :

Si on a un $DL_{n-p}(0)$ de g

On écrit : $g(t) = b_0 + b_1 t + \dots + b_{n-p} t^{n-p}$

et $f(t) = t^p (a_p + a_{p+1} t + \dots + a_n t^{n-p} + o(t^{n-p}))$

En faisant

$$g(t) \cdot h(t) = (b_0 + \dots + b_{n-p} t^{n-p} + o(t^{n-p}))$$
$$\times (a_p + a_{p+1} t + \dots + a_n t^{n-p} + o(t^{n-p}))$$

J'obtiens un $DL_{n-p}(0)$ que j'écris

$$g(t)\, h(t) = c_0 + \dots + c_{n-p} t^{n-p} + o(t^{n-p})$$

Puis :

$$\boxed{f(t)g(t) = t^p h(t) g(t) = c_0 t^p + \dots + c_{n-p} t^n + o(t^n)}$$

J'ai obtenu un $DL_n(0)$ de $f \times g$

Rq : Si en (f) g a aussi de la val°, c'est encore mieux

AF*

3) $DL_6(0)$ de tangente

a) Une astuce classique

Déjà, ĉ $\tan(\cdot) \in \mathcal{C}^\infty(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \mathbb{R})$, je sais

que $\tan(\cdot)$ a un $DL_6(0)$ ~~en~~ que j'écris

$$\tan(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots + a_6 t^6 + o(t^6)$$

Ĉ $\tan(\cdot)$ est impaire, je sais que $a_6 = 0$

Par troncature des DL : le $DL_5(0)$ de tan

est $\tan(t) = a_0 + \dots + a_5 t^5 + o(t^5)$

b) Le calcul :

On a $\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)} = \frac{t\left(1 - \frac{t^2}{6} + \dots\right)}{\cos(t)}$

Je veux un DL_5 de $\tan(\cdot)$

D'après 2) : un DL_4 de $\frac{1}{\cos(t)}$ me suffira.

Calculs :

- $\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^4)$

$u = \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{24} + o(t^4)$

- Donc : $\frac{1}{\cos(t)} = \frac{1}{1-u}$

$u \sim \frac{t^2}{2}$

Donc $u^2 \sim \frac{t^4}{4}$

Donc $u^2 = \frac{t^4}{4} + o(t^4)$

Rq : $u^3 = o(t^4)$ et u^4 aussi

Donc $\frac{1}{\cos(t)} = \frac{1}{1-u}$

$= 1 + u + u^2 + o(u^2) \quad o(u^2) = o(t^4)$

$= 1 + \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{24} + o(t^4)$

$+ \frac{t^4}{4}$

$= 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{5}{24}t^4 + o(t^4)$

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} + o(t^5)$$

$$= t\left(1 - \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{120} + o(t^4)\right)$$

On calcule

$$\left(1 - \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{120} + o(t^4)\right)\left(1 + \frac{t^2}{2} + \frac{5}{24}t^4 + o(t^4)\right)$$

$$= 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{5}{24}t^4$$
$$- \frac{t^2}{6} - \frac{1}{12}t^4$$
$$+ \frac{1}{120}t^4 + o(t^4)$$

$$= 1 + \frac{1}{3}t^2 + \frac{2}{15}t^4 + o(t^4)$$

B° $\frac{5}{24} = \frac{25}{120}$

$\frac{5}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{120} =$

$\frac{25}{120} - \frac{10}{120} + \frac{1}{120} = \frac{16}{120}$

$= \frac{2}{15}$

Bilan : $\tan(t) = t + \frac{t^3}{3} + \frac{2}{15}t^5 + o(t^5)$

CCl : $\tan(t) = t + \frac{t^3}{3} + \frac{2}{15}t^5 + o(t^6)$

Colas Bardavid

Développements limités usuels

Tous les développements limités suivants sont donnés pour $n \in \mathbb{N}$ et pour $h \longrightarrow 0$.

Fonction inverse

$$\frac{1}{1-h} = 1 + h + h^2 + h^3 + \cdots + h^n + \mathrm{o}(h^n)$$
$$\frac{1}{1+h} = 1 - h + h^2 - h^3 + \cdots + (-1)^n h^n + \mathrm{o}(h^n)$$

Fonctions puissances

$$(1+h)^\alpha = 1 + \alpha h + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}h^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}h^n + \mathrm{o}(h^n)$$

où on peut aussi utiliser $\binom{\alpha}{n} := \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$.

où $\alpha \in \mathbb{R}^*$

$$\sqrt{1+h} = 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{16}h^3 - \frac{5}{128}h^4 + \mathrm{o}(h^4)$$

Logarithme

$$\ln(1-h) = -h - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} - \cdots - \frac{h^n}{n} + \mathrm{o}(h^n)$$
$$\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{h^n}{n} + \mathrm{o}(h^n)$$

Exponentielle et consorts

$$\exp(h) = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \cdots + \frac{h^n}{n!} + \mathrm{o}(h^n)$$
$$\cos(h) = 1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{h^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}(h^{2n+1})$$
$$\sin(h) = h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}(h^{2n+2})$$
$$\cosh(h) = 1 + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} + \cdots + \frac{h^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}(h^{2n+1})$$
$$\sinh(h) = h + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} + \cdots + \frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}(h^{2n+2})$$

Autres

$$\arctan(h) = h - \frac{h^3}{3} + \frac{h^5}{5} - \frac{h^7}{7} + \cdots + (-1)^n\frac{h^{2n+1}}{2n+1} + \mathrm{o}(h^{2n+2})$$
$$\tan(h) = h + \frac{1}{3}h^3 + \frac{2}{15}h^5 + \frac{17}{315}h^7 + \mathrm{o}(h^8)$$