DS 1

2 heures

- *Tout résultat ou raisonnement doit être clairement justifié, sauf mention du contraire.*
- *La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.*
- *La présentation de la copie sera prise en compte dans l'évaluation :*
  - ▷ *encadrez les résultats principaux ;*
  - ▷ *soulignez les résultats et arguments intermédiaires importants ;*
  - ▷ *soignez votre écriture ;*
  - ▷ *maintenez une marge dans vos copies, aérez vos copies ;*
  - ▷ *enfin, numérotez vos copies (et non vos pages).*
- *Les documents, calculatrices et autres appareils électroniques sont interdits.*
- *Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie en expliquant les initiatives que vous avez été amené à prendre.*

Ce sujet est composé de trois exercices, qui sont indépendants.

Exercice 1 : Étude des systèmes $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$

Notations

- *Dans tout ce problème, on considère deux parties de $\mathbb{R}$, notées $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$, vérifiant les axiomes suivants :*
  - (H1) $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \mathbb{R}$
  - (H2) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{0\}$
  - (H3) $\forall a, b \in \mathbf{A},\ a + b \in \mathbf{A}$
  - (H4) $\forall a, b \in \mathbf{A},\ ab \in \mathbf{A}$
  - (H5) $\forall a \in \mathbb{R},\ a \in \mathbf{B} \iff -a \in \mathbf{A}$
- *Si $a, b \in \mathbb{R}$, on note « $a \dashv b$ »* $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $b - a \in \mathbf{A}$.
- *Si E est une partie de $\mathbb{R}$ et si $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction, on dira que :*
  - « f est de type C » $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\forall x, y \in E,\ \big(x \dashv y \implies f(x) \dashv f(y)\big)$;
  - « f est de type D » $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\forall x, y \in E,\ \big(x \dashv y \implies f(y) \dashv f(x)\big)$.

1. Montrer que $\forall a \in \mathbf{A},\ -a \in \mathbf{B}$.

2. (a) Montrer que $1 \in \mathbf{A}$.

(b) En déduire que $-1 \in \mathbf{B}$.

3. (a) Montrer que $\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ (a \dashv b \text{ et } b \dashv c) \implies a \dashv c$.

(b) Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{R},\ (a \dashv b \text{ et } b \dashv a) \implies a = b$.

4. (a) Montrer que $\forall a, b \in \mathbf{B},\ ab \in \mathbf{A}$.

(b) Montrer que $\forall a \in \mathbf{A}, \forall b \in \mathbf{B},\ ab \in \mathbf{B}$.

(c) Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}^*,\ a \in \mathbf{A} \implies \dfrac{1}{a} \in \mathbf{A}$.

5. (a) Soit $m \in \mathbf{A}$. On considère la fonction $\varphi_m : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi_m : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto mx. \end{array} \right.$$

Montrer que φ_m est de type C.

(b) Montrer que

$$\forall a, b, c, d \in \mathbf{A},\quad \begin{cases} a \dashv b \\ c \dashv d \end{cases} \implies ac \dashv bd.$$

6. On considère la fonction $f : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2. \end{array} \right.$$

Montrer que f est de type C.

7. On considère la fonction $g : \mathbf{A} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g : \begin{cases} \mathbf{A} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \longmapsto \dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

Montrer que g est de type D.

8. On note $h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction racine carrée.

(a) Montrer que $\forall a \in \mathbb{R},\ a^2 \in \mathbf{A}$.

(b) Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}_+,\ h(a) \in \mathbf{A}$.

(c) Montrer que h est de type C.

9. Montrer que $\mathbf{A} = \mathbb{R}_+$.

Exercice 2 : Une première inégalité

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

Exercice 3 : Une seconde inégalité

Soient $a, b > 0$ tels que $a \leqslant b$.

Montrer que

$$\frac{(b-a)^2}{8b} \leqslant \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leqslant \frac{(b-a)^2}{8a}.$$

FIN DU SUJET.