

Isomorphism / Transformations naturelles

• $F \times F \simeq F \times E$
 E, F ev

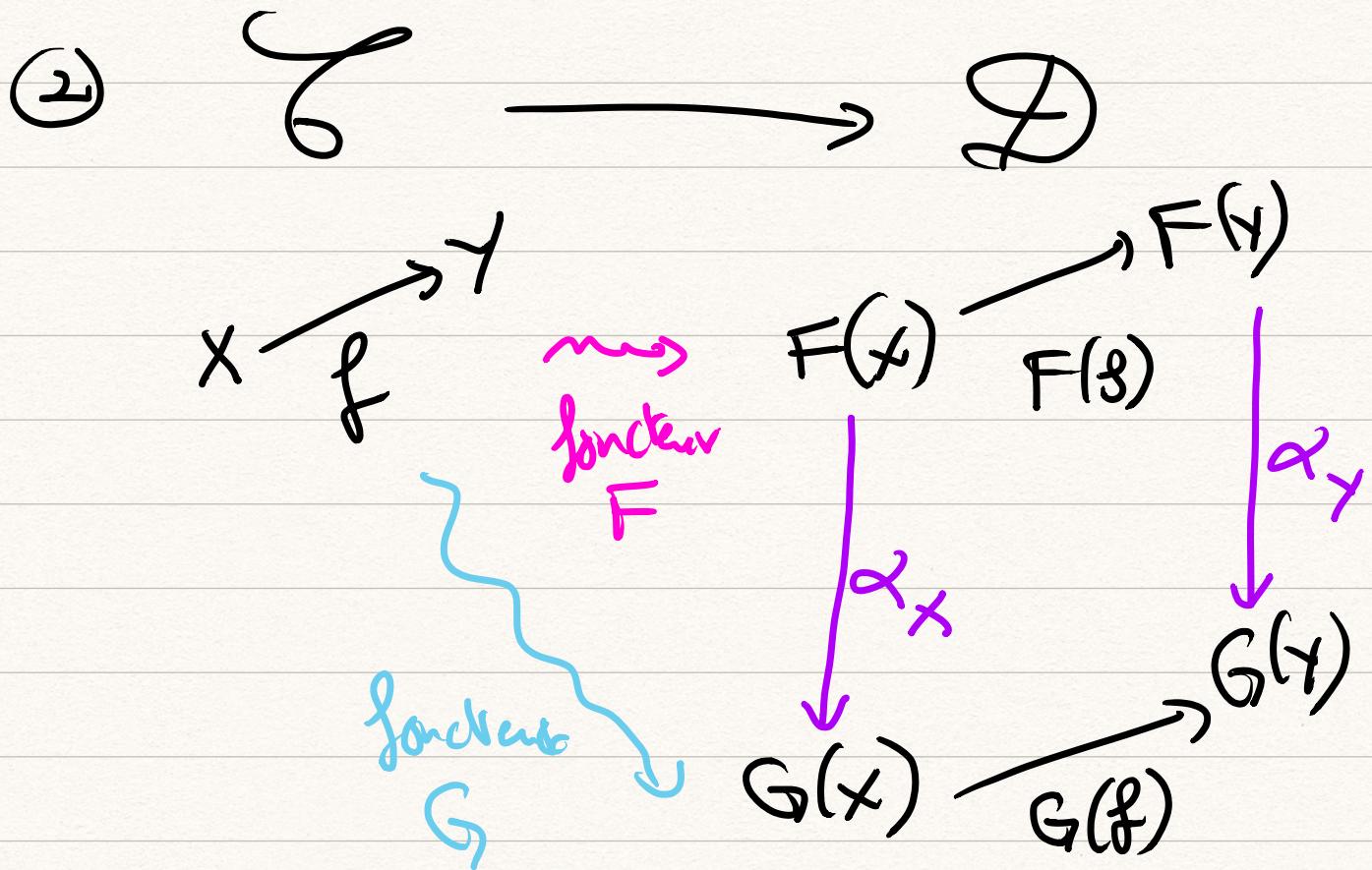
Def : Soient \mathcal{G}, \mathcal{D} catégories.
Soient $F, G: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{D}$

Une transformation naturelle α
de F vers G est "un
morphisme de F vers G "

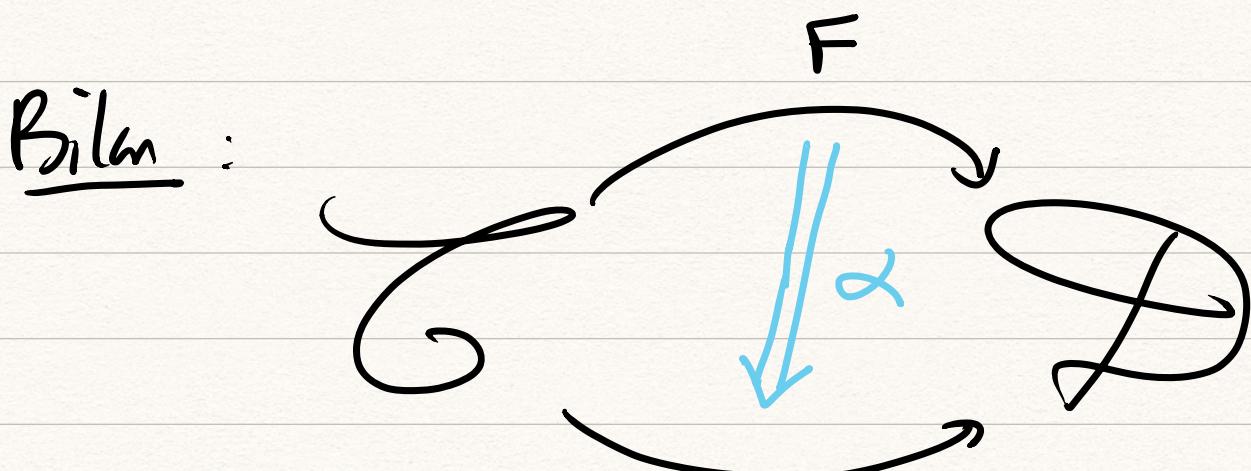
i.e. ① pour tout objet $x \in \text{ob}(\mathcal{G})$

on a un morphisme $\alpha_x: F(x) \rightarrow G(x)$

$(\alpha_x \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(x), G(x))$



on voit que ce diagramme
compte.



G

équation pour $F \circ G$:

F et G sont des familles d'objets
de \mathcal{P} paramétrées par \mathcal{C} .

C'est une famille de

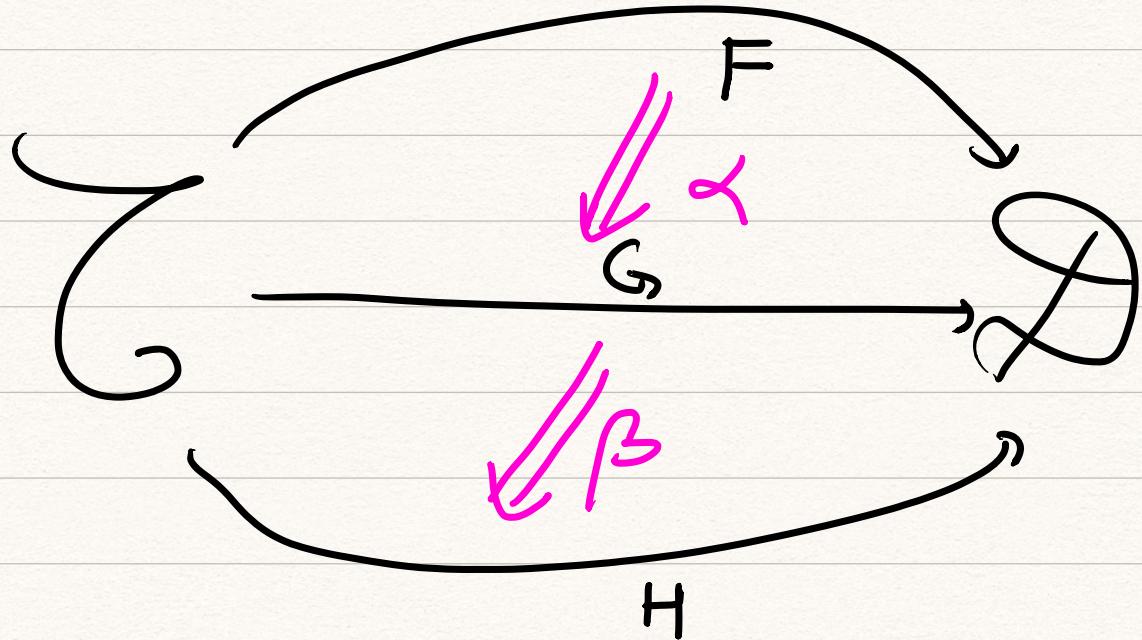
morphismes $\alpha_x : F(x) \longrightarrow G(x)$

permettant de combiner ce qu'il faut.

Fait : i) les transformations

naturelles se composent :

ie



2) S: $\mathcal{G} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$, ma

$$Id_F : F \Rightarrow F$$

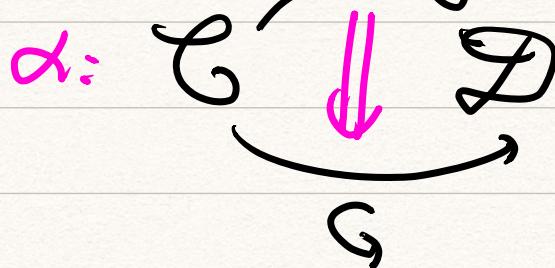
$$(x \in \mathcal{G} : F(x) \xrightarrow{Id_x} F(x))$$

Notation: on note

$\text{Nat}(F, G)$

la collection des

$\alpha : \mathcal{C}$



Notation :

- \mathcal{C}, \mathcal{D} : catégories .

On note $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ la
collection des fonctions $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$.

- On a $\text{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$
(Cat)

$$:= \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$$

Fait : • Si \mathcal{C} est une catégorie

et $X, Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$: par définition,

on a $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ est une
collection.

• Dans la catégorie (Cat) ,

si $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \text{ob}((\text{Cat}))$ i.e.

si \mathcal{C}, \mathcal{D} : catégories - alors

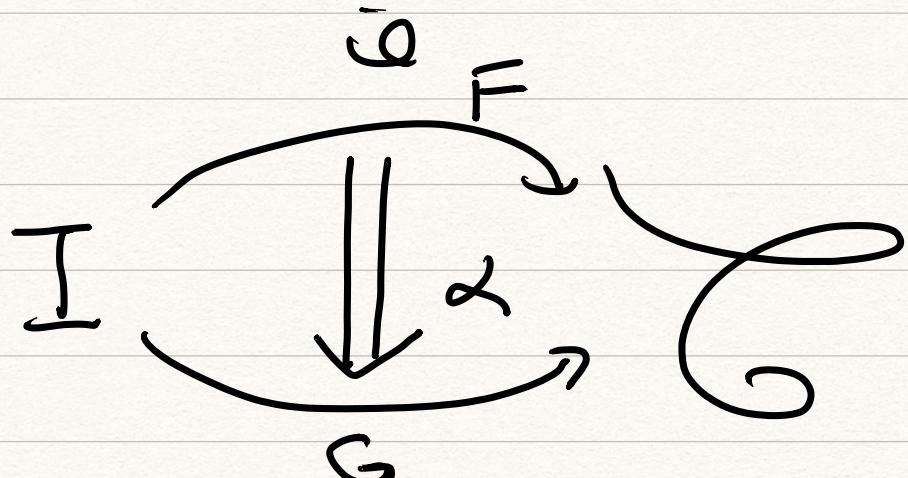
$\text{Hom}_{(\text{Cat})}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \in \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$

est elle-même une catégorie !!

où les objets sont les foncteurs
 $\text{de } \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$

• donc les morphismes sont
les transfomations entre
les objets.

Def: Un isomorphisme naturel
est une transformation qui
est un isomorphisme dans cette
catégorie



I, C catégories

$\alpha_i : H_i \in I, \alpha_i : F(H_i) \rightarrow G(H_i)$

est
en ISO

Exemple :

$\mathcal{P}(E)$ en bijets avec
naturelle

$\mathcal{F}(E, \{0, 1\})$

On a 2 fonctions :

(I) $\mathcal{P}(\cdot) : (\mathcal{E}_{ns})^{\text{op}} \longrightarrow (\mathcal{E}_{ns})$

$$E \xrightarrow{\quad} \mathcal{P}(E)$$

Action sur les flèches

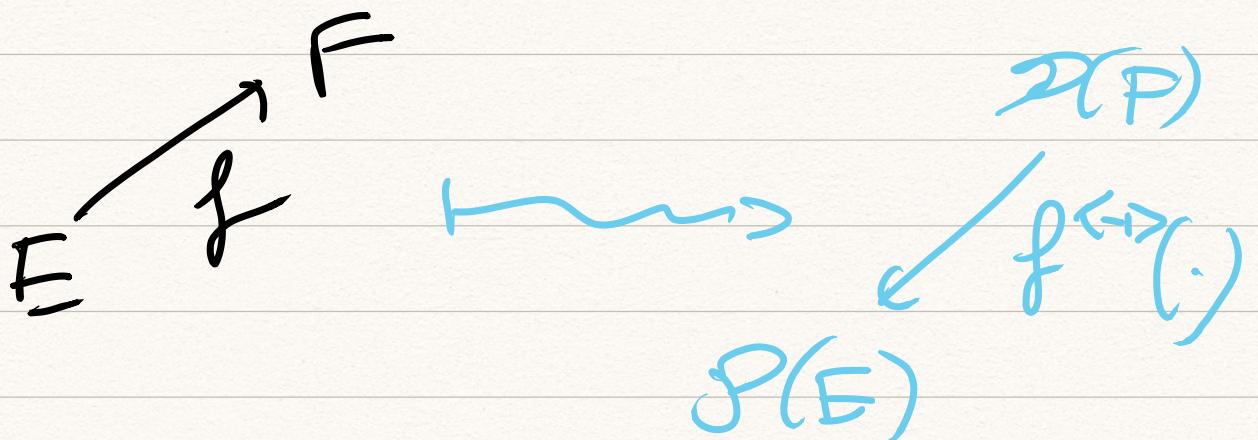
$$E \xrightarrow{f} F$$

(\mathcal{E}_{ns})

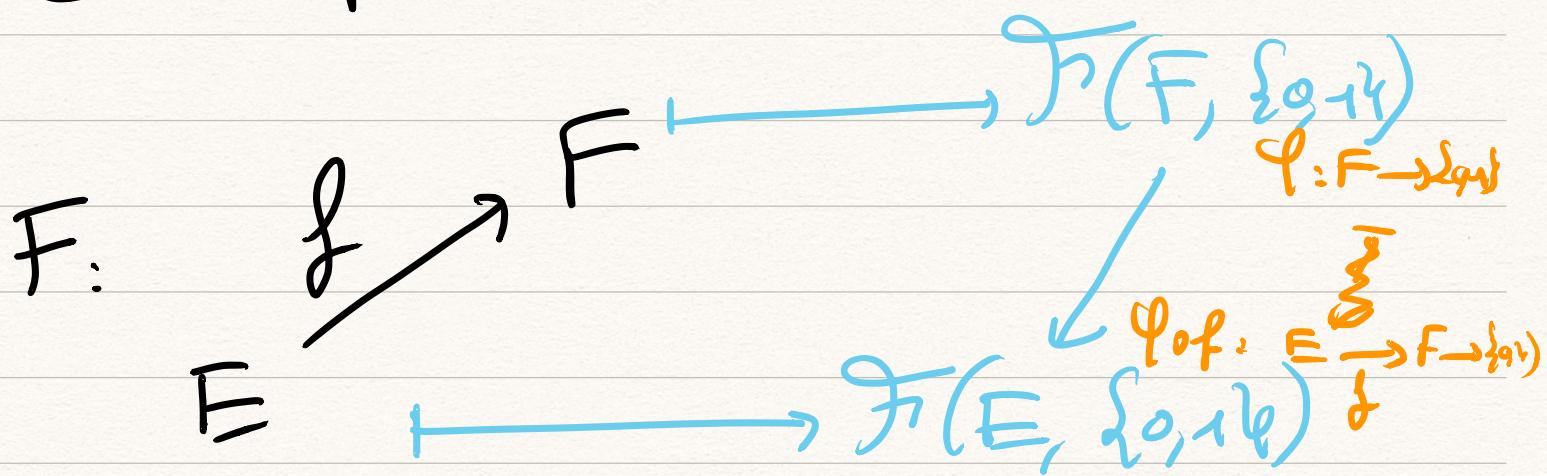
$$\begin{array}{ccc} & f^{\leftarrow \rightarrow} & \\ \mathcal{P}(E) & \xleftarrow{f^{\leftarrow \rightarrow}} & B \\ & f^{\leftarrow \rightarrow} (B) & \end{array}$$

Bild

$$(E_{\text{us}})^{\circ P} \longrightarrow (E_{\text{us}})$$



① Definition :



Ahme

if E eu.:

$$\alpha_E : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{T}(E, \text{dom})$$
$$A \longmapsto \mathcal{M}_A$$