Chapitre 5

Trigonométrie

$$\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) = -\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{17}+\frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\frac{1}{8}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}$$

La valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)$, découverte par Gauss (à l'âge de 19 ans)

La trigonométrie (du grec trígonos, *« triangulaire », et* métron, *« mesure ») est une branche des mathématiques qui traite des relations entre distances et angles dans les triangles et des fonctions telles que sinus, cosinus et tangente.*

Ces fonctions possèdent de très nombreuses propriétés qui font d'elles des outils indispensables pour étudier certains problèmes de géométrie mais aussi dans d'autres branches des mathématiques.

Un peu d'histoire

Les origines de la trigonométrie remontent aux civilisations d'Égypte antique, de Mésopotamie et de la vallée de l'Indus, il y a plus de 4 000 ans. La première utilisation du sinus apparaît en Inde, dans les Śulba-Sūtras *en Inde (écrits entre* -800 *et* -500*), dans un problème de construction d'un cercle de même aire qu'un carré donné. Il y est démontré que le sinus de* $\frac{\pi}{4}$ *vaut* $1/\sqrt{2}$*, dans un problème de construction d'un cercle de même aire qu'un carré donné.*

Sommaire

I. Généralités

1) Congruences réelles

Soit $T \in \mathbb{R}^*$.

a) Définition

Définition TRG. **1**
Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On dit que x et y sont congrus modulo T et on note $x \equiv y\ [T]$ $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\exists k \in \mathbb{Z} : x - y = kT.$$

Exemples
On a :

- $1 \equiv 1 + 10\pi\ [2\pi]$ car $1 - (1 + 10\pi) = -5 \times 2\pi$;
- $15 \equiv 1\ [2]$;
- $15 \equiv 0\ [3]$;
- $15 \equiv 1\ [7]$.

b) Propriétés

Fait Ⓣ TRG. **2**

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv y\ [T] \\ x' \equiv y'\ [T] \end{array}\right\} \implies x + x' \equiv y + y'\ [T]$$

Démonstration. — Il suffit d'appliquer les définitions.
Supposons $x \equiv y\ [T]$ et $x' \equiv y'\ [T]$ et fixons donc $k, \ell \in \mathbb{Z}$ tels que

$$x - y = kT \quad \text{et} \quad x' - y' = \ell T.$$

On a alors

$$(x + x') - (y + y') = kT + \ell T = (k + \ell)T.$$

Comme $k + \ell \in \mathbb{Z}$, on a bien $x + x' \equiv y + y'\ [T]$, ce qu'on voulait démontrer. ∎

Proposition TRG. **3**
Soit $\lambda \neq 0$ et soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} x \equiv y\ [T] &\iff \frac{x}{\lambda} \equiv \frac{y}{\lambda} \left[\frac{T}{\lambda}\right] \\ &\iff \lambda x \equiv \lambda y\ [\lambda T]. \end{aligned}$$

Démonstration. — Elle est laissée au lecteur à titre d'entraînement. ∎

⚠ Attention
On n'a pas en général

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv y\ [T] \\ x' \equiv y'\ [T] \end{array}\right\} \implies xx' \equiv yy'\ [T].$$

C'est faux.

Exercice TRG. 4

Trouver un contre-exemple à la propriété fausse ci-dessus. C'est-à-dire, trouver $T > 0$ et $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} x \equiv y \; [T] \\ x' \equiv y' \; [T] \end{cases}$$

mais tels que $xx' \not\equiv yy' \; [T]$.

Remarque

Cette propriété est néanmoins vraie pour les congruences entre entiers, comme on le verra en arithmétique.

2) Le cercle trigonométrique

a) notations

- On se place dans $\mathbb{R}^2$, qu'on représente sous la forme d'un plan.
- Si $x, y \in \mathbb{R}$, on note $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ l'élément de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées (x, y).
- On note
$$\vec{i} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{j} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
- On note $\mathrm{O} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: c'est l'*origine du plan.*
- Enfin, on note $\mathrm{A} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: c'est l'*origine des mesures d'arc angulaire.*

b) le cercle trigonométrique

Définition TRG. 5

- Le cercle trigonométrique, *noté $\mathscr{C}_{\text{trigo}}$, est le cercle de centre* O *et de rayon 1.*
- *Autrement dit, on pose*
$$\mathscr{C}_{\text{trigo}} := \left\{ M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1 \right\}.$$

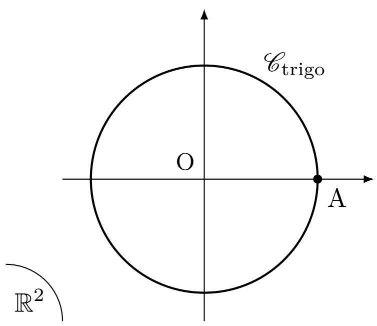


FIGURE 1 – Le cercle trigonométrique.

c) définition du point M_θ

Notation TRG.**6**
Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

- *Si $\theta \geqslant 0$, on note M_θ l'unique point de $\mathscr{C}_{\text{trigo}}$ tel que la longueur de l'arc de cercle $\widehat{\mathrm{AM}_\theta}$, mesurée dans le sens positif, soit égale à θ.*
- *Si $\theta < 0$, on note M_θ l'unique point de $\mathscr{C}_{\text{trigo}}$ tel que la longueur de l'arc de cercle $\widehat{\mathrm{AM}_\theta}$, mesurée dans le sens négatif, soit égale à $|\theta|$.*

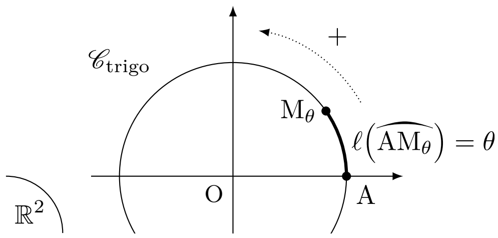
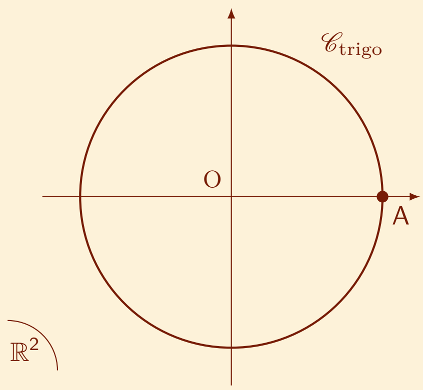


FIGURE 2 – Le point M_θ.

Exemples



d) quelques faits

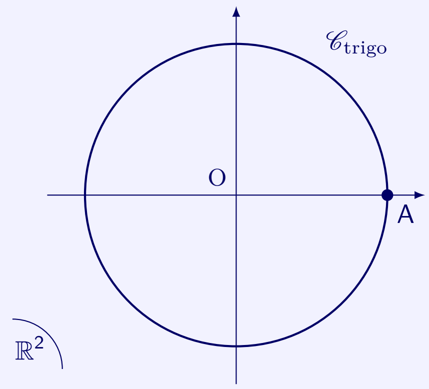
Fait TRG.**7**
On a :

1) $\mathrm{M}_0 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ *et* $\mathrm{M}_{2\pi} = \mathrm{M}_0$;
2) $\mathrm{M}_{\pi/2} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\mathrm{M}_\pi = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ *et* $\mathrm{M}_{-\pi/2} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$;
3) *si* $\theta \in \mathbb{R}$, $\mathrm{M}_{\theta+2\pi} = \mathrm{M}_\theta$;
4) *si* $\theta \in \mathbb{R}$,
   - $\mathrm{M}_{-\theta}$ *est le symétrique de* M_θ *par rapport à la droite* (OA) ;
   - $\mathrm{M}_{\theta+\pi}$ *est le symétrique de* M_θ *par rapport au point* O.

Démonstration. — Cela découle des propriétés des longueurs et du cercle. ■

Dessin

Ces propriétés se représentent bien graphiquement.



e) mesure angulaire d'un point

Définition TRG. **8**
Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{C}_{\text{trigo}}$ *et soit* $\theta \in \mathbb{R}$. *On dit que* θ est une mesure angulaire de M $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $\mathrm{M} = \mathrm{M}_\theta$.

Fait TRG. **9**
Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{C}_{\text{trigo}}$ *et soient* $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$.

1) θ *mesure angulaire de* M $\implies \forall k \in \mathbb{Z},\ \theta$ *mesure angulaire de* M ;
2)
$$\left.\begin{array}{l}\theta \text{ mesure angulaire de M}\\ \theta' \text{ mesure angulaire de M}\end{array}\right\} \implies \theta \equiv \theta' \ [2\pi].$$

Démonstration. — Cela découle des propriétés des longueurs et du cercle. ∎

3) Cosinus et sinus

a) définition

Définition TRG. **10**
Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

- *On appelle* cosinus de θ *et on note* $\cos(\theta)$ *l'abscisse de* M_θ.
- *De même, on appelle* sinus de θ *et on note* $\sin(\theta)$ *l'ordonnée de* M_θ.

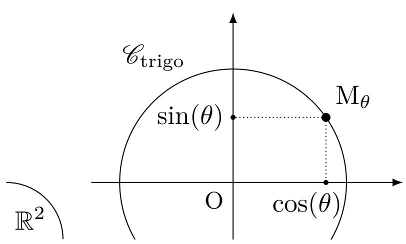


FIGURE 3 – Définition de $\cos(\theta)$ et de $\sin(\theta)$.

On a ainsi défini deux fonctions

$$\boxed{\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.}$$

Fait TRG. **11**
On a

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OM}_\theta} = \cos(\theta)\,\vec{i} + \sin(\theta)\,\vec{j}.$$

Démonstration. — Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

- Déjà, par définition, on a

$$\boxed{\mathrm{M}_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}}$$

  donc, on a

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}_\theta} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

- De plus, on a

$$\begin{aligned} \cos(\theta)\,\vec{i} + \sin(\theta)\,\vec{j} &= \cos(\theta)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin(\theta)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

b) premières propriétés

Proposition TRG. **12**

1) *On a*

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.}$$

2) *Les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques.*
3) *La fonction cosinus est paire,* ie $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(-\theta) = \cos(\theta)$.
4) *La fonction sinus est impaire,* ie $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \sin(-\theta) = -\sin(\theta)$.

Démonstration. —

1) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a $\mathrm{M}_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$. De plus, on a $\mathrm{M}_\theta \in \mathscr{C}_{\text{trigo}}$. Donc, par définition de $\mathscr{C}_{\text{trigo}}$, on a

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

2) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a vu que $\mathrm{M}_{\theta+2\pi} = \mathrm{M}_\theta$. Donc, par définition de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$, on a

$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta) \quad \text{et} \quad \sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta).$$

3) et 4) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a vu que $\mathrm{M}_{-\theta}$ est le symétrique de M_θ par rapport à la droite (OA). Or, le symétrique par rapport à la droite (OA) du point $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$. Donc, on a

$$\mathrm{M}_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

D'où le résultat.

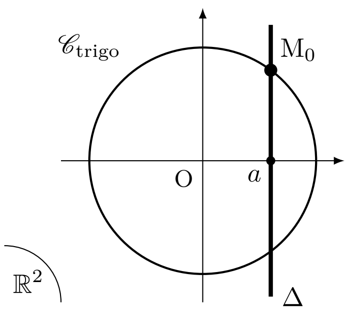
■

Proposition TRG.**13**

1) *On a* $\forall\theta \in \mathbb{R}, -1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$.
2) *De même, on a* $\forall\theta \in \mathbb{R}, -1 \leqslant \sin\theta \leqslant 1$.
3) *La fonction* $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1]$ *est surjective,* ie *on a*
$$\forall y \in [-1,1],\ \exists x \in \mathbb{R} : \cos(x) = y.$$
4) *De même, la fonction* $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1]$ *est surjective,* ie *on a*
$$\forall y \in [-1,1],\ \exists x \in \mathbb{R} : \sin(x) = y.$$

Démonstration. —

1) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Notons $x \coloneqq \cos(\theta)$ et $y \coloneqq \cos(\theta)$. On a $x^2 + y^2 = 1$. Donc, $x^2 = 1 - y^2 \leqslant 1$. Comme $x^2 \geqslant 0$ et comme la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a $\sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{1}$. Autrement dit, on a $|x| \leqslant 1$. Ainsi, on a
$$-1 \leqslant \cos(\theta) \leqslant 1.$$
2) On raisonne de même.
3) Soit $a \in [-1,1]$. On note Δ la droite d'équation $x = a$. On affirme que $\Delta \cap \mathscr{C}_{\text{trigo}} \neq \varnothing$ et on fixe $\mathrm{M}_0 \in \Delta \cap \mathscr{C}_{\text{trigo}}$, ce qu'on représente ci-dessous.



Fixons $\theta \in \mathbb{R}$ une mesure angulaire de M_0. On a alors, par définition, $\cos(\theta) = a$.

4) On raisonne de même avec la droite d'équation $y = a$.

■

c) de $\pi/12$ en $\pi/12$

On vérifie que
$$\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.$$
On en déduit la répartition régulières des angles suivants :

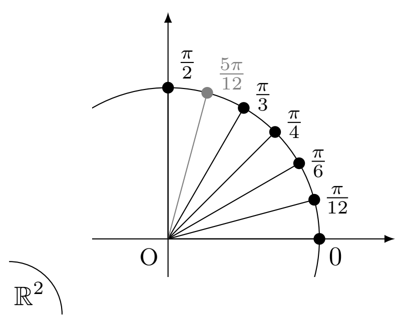


FIGURE 4 – Équidistribution d'une suite d'angles

II. Formules entre angles associés

1) Introduction

Dans cette partie, on cherche des formules pour :

$$\cos(\pm x \pm \pi), \quad \cos\left(\pm x \pm \frac{\pi}{2}\right), \quad \sin(\pm x \pm \pi) \quad \text{et} \quad \sin\left(\pm x \pm \frac{\pi}{2}\right).$$

Cela fait $4 \times 2^4 = 16$ formules. Comme on sait que $\sin(\cdot)$ est impaire et que $\cos(\cdot)$ est paire, il suffit de donner la moitié des formules. En effet, par exemple, si on a une formule pour $\sin(x+\pi)$, on en déduira une formule pour $\sin(-x-\pi)$.

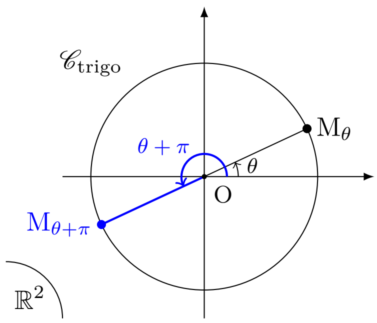
Ainsi, on a 8 formules à donner.

En pratique, ces formules se retrouvent facilement sur un dessin bien fait, en prenant une valeur de θ assez petite (par exemple $\frac{\pi}{6}$).

Entraînez-vous à les retrouver !

2) Premier lot

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors, $\mathrm{M}_{\theta+\pi}$ est le symétrique de M_θ par rapport à O, comme on l'a vu dans le fait TRG.7 et comme on le voit sur le dessin ci-dessous :



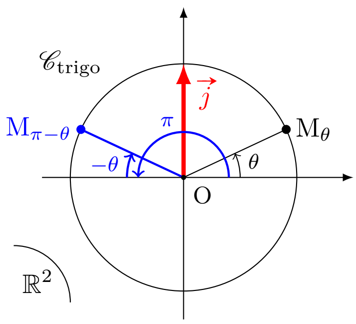
On en déduit :

Proposition TRG.14
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{cases} \cos(\theta+\pi) = -\cos(\theta) \\ \sin(\theta+\pi) = -\sin(\theta). \end{cases}$$

3) Deuxième lot

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors, $\mathrm{M}_{\pi-\theta}$ est le symétrique de M_θ par rapport à la droite passant par O et dirigée par le vecteur $\vec{j}$, comme on le voit sur le dessin ci-dessous :



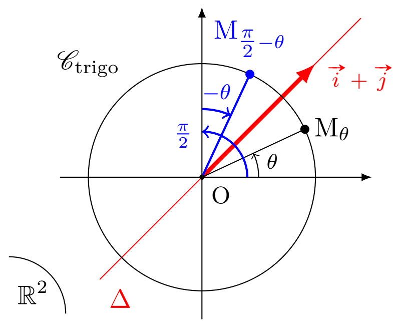
On en déduit :

Proposition TRG. **15**
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{cases} \cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta) \\ \sin(\pi - \theta) = \sin(\theta). \end{cases}$$

4) Troisième lot

On note Δ la première bissectrice du plan, *ie* la droite passant par O et dirigée par le vecteur $\vec{\imath} + \vec{\jmath}$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors, $\mathrm{M}_{\frac{\pi}{2}-\theta}$ est le symétrique de M_θ par rapport à Δ, comme on le voit sur le dessin ci-dessous :



On en déduit :

Proposition TRG. **16**
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta). \end{cases}$$

Autrement dit, la transformation $\theta \longmapsto \frac{\pi}{2} - \theta$ échange sinus et cosinus.

5) Dernier lot

a) résolution

Pour le dernier lot, *ie* pour les formules pour $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ et $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, on va procéder différemment. On pourrait raisonner géométriquement mais on va simplement utiliser les formules précédentes.

Proposition TRG. **17**
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{cases} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\theta) \\ \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\theta). \end{cases}$$

Démonstration. — Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
On considère $\theta + \frac{\pi}{2}$ qu'on va essayer d'exprimer à l'aide des autres transformations que sont $t \longmapsto t - \frac{\pi}{2}$, $t \longmapsto \pi + t$ et $t \longmapsto \pi - t$.
Il y a plusieurs façons de le faire.

- On peut écrire
$$\theta + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - (-\theta).$$
On a donc
$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-\theta)\right) = \cos(-\theta) = \cos(\theta).$$
et, de même, $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\theta)$.

- On aurait aussi pu écrire

$$\theta + \tfrac{\pi}{2} = \pi - \left(\pi - \tfrac{\pi}{2} + \theta\right) = \pi - \left(\tfrac{\pi}{2} - \theta\right)$$

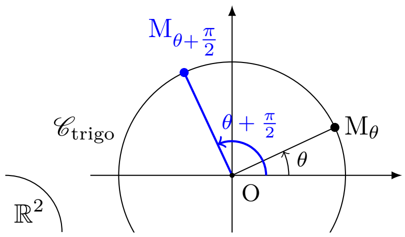
et en déduire

$$\begin{aligned}
\cos\left(\theta + \tfrac{\pi}{2}\right) &= \cos\left(\pi - \left(\tfrac{\pi}{2} - \theta\right)\right) \\
&= -\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \theta\right) = -\sin(\theta) \\
\text{et } \sin\left(\theta + \tfrac{\pi}{2}\right) &= \sin\left(\pi - \left(\tfrac{\pi}{2} - \theta\right)\right) \\
&= \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta).
\end{aligned}$$

■

b) figure

Ce qui précède peut être représenté comme ci-dessous :



6) valeurs remarquables de sinus et cosinus

a) deux lemmes d'association

Lemme TRG. **18**
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors, on a

1) $\sin\theta = \dfrac{1}{2} \implies \cos\theta = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
2) $\cos\theta = \dfrac{1}{2} \implies \sin\theta = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

Démonstration. — On va utiliser le fait que $\forall\theta \in \mathbb{R},\ \sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2 = 1$.

1) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$. Alors, on a

$$\cos(\theta)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

Donc, on a $\cos\theta = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2) On raisonne de même.

■

Lemme Ⓣ TRG. **19**
On a $\cos\theta = \sin\theta \implies \cos\theta = \sin\theta = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Démonstration. — Elle est laissée au lecteur à titre d'entraînement. ■

b) le sinus de $\dfrac{\pi}{6}$

Lemme TRG. **20**
On a $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

Démonstration. — ....

....

....

....

....

....

.... ■

c) les valeurs remarquables

Proposition TRG. **21**
On a

θ	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0
$\sin(\theta)$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1

Démonstration. —

- Déjà, les cosinus et sinus de 0 et $\dfrac{\pi}{2}$ sont évidents géométriquement.
- Commençons par $\theta_0 \coloneqq \dfrac{\pi}{4}$. Comme on a $\dfrac{\pi}{2} - \theta_0 = \theta_0$, on a
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) = \sin(\theta_0) = \cos(\theta_0).$$
Par propriétés des longueurs, on a $\sin(\theta_0) > 0$ et $\cos(\theta_0) > 0$; on en déduit grâce au lemme TRG. 19
$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$
- Maintenant, considérons par $\theta_1 \coloneqq \dfrac{\pi}{6}$ et $\theta_2 \coloneqq \dfrac{\pi}{3}$. On a $\theta_2 = \dfrac{\pi}{2} - \theta_1$. Donc, on a
$$\sin(\theta_2) = \cos(\theta_1) \quad \text{et} \quad \cos(\theta_2) = \sin(\theta_1).$$
- Or, d'après le lemme TRG. 20, on a $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$. De plus, par propriétés des longueurs, on a $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) \geqslant 0$.
Donc, grâce au lemme TRG. 18, on obtient $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
- Cela conclut la démonstration.

■

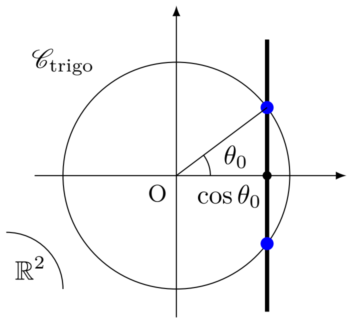
III. Équations et inéquations trigonométriques

Pour résoudre des équations et inéquations trigonométriques, on procèdera de la façon suivante :
- on regarde ce qui se passe sur $\mathscr{C}_{\text{trigo}}$;
- tout simplement, on affirme ce qu'on voit.

Entraînez-vous !

Regardons quelques exemples.

1) Soit $\theta_0 \in \mathbb{R}$ fixé. On veut résoudre l'équation $\cos\theta = \cos\theta_0$ d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$. Sur le dessin



on voit que

$$\boxed{\cos\theta = \cos\theta_0 \quad\Longleftrightarrow\quad \Big(\theta \equiv \theta_0\ [2\pi] \ \text{ ou } \ \theta \equiv -\theta_0\ [2\pi]\Big)}$$

quand $\theta \in \mathbb{R}$.

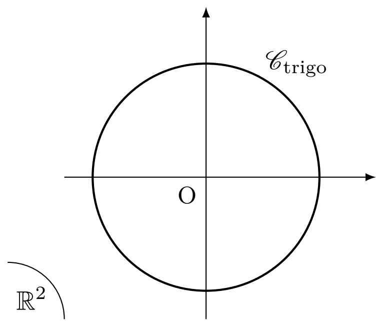
2) De même, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\boxed{\sin\theta = \sin\theta_0 \quad\Longleftrightarrow\quad \Big(\theta \equiv \theta_0\ [2\pi] \ \text{ ou } \ \pi - \theta \equiv \theta_0\ [2\pi]\Big).}$$

3) Résolvons maintenant une inéquation trigonométrique. Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. Alors (comme on le voit graphiquement), on a

$$\sin\theta \geqslant \frac{1}{2} \iff \theta \in \left[\frac{\pi}{6}, \pi - \frac{\pi}{6}\right].$$

On le voit sur le dessin :



4) Enfin, résolvons une équation plus subtile. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors, on a

$$\cos(\theta) = \cos(2\theta) \iff \Big(\theta \equiv 2\theta\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad \theta \equiv -2\theta\ [2\pi]\Big).$$

Or, on a

$$\theta \equiv 2\theta\ [2\pi] \qquad \iff \qquad \theta \equiv 0\ [2\pi].$$

Et, on a

$$\begin{aligned} \theta \equiv -2\theta\ [2\pi] &\iff 3\theta \equiv 0\ [2\pi] \\ &\iff \theta \equiv 0 \left[\frac{2\pi}{3}\right]. \end{aligned}$$

Comme par ailleurs, on a $\theta \equiv 0\ [2\pi] \implies \theta \equiv 0 \left[\frac{2\pi}{3}\right]$, on en déduit

$$\boxed{\cos(\theta) = \cos(2\theta) \iff \theta \equiv 0 \left[\frac{2\pi}{3}\right].}$$

IV. Formules d'addition et applications

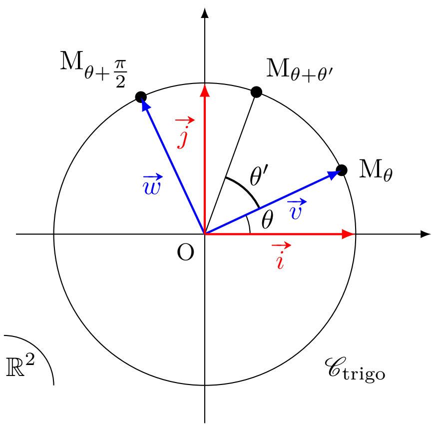
Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$.
On pose

$$\vec{v} := \overrightarrow{\mathrm{OM}_\theta} \quad \text{et} \quad \vec{w} := \overrightarrow{\mathrm{OM}_{\theta+\frac{\pi}{2}}}.$$

1) La démonstration

a) le dessin fondamental

On dessine :



On considère le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}_{\theta+\theta'}}$.
On l'exprime de deux façons.

b) une première expression *via* la base $(\vec{u}, \vec{v})$

- On commence par décomposer le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}_{\theta+\theta'}}$ dans la base $(\vec{v}, \vec{w})$. D'après le fait TRG.11, appliqué à la base $(\vec{v}, \vec{w})$, pour l'angle θ', on a

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}_{\theta+\theta'}} = \cos(\theta')\vec{v} + \sin(\theta')\vec{w}.$$

- Or, on a

$$\begin{cases} \vec{v} = \cos(\theta)\,\vec{i} + \sin(\theta)\,\vec{j} \\ \vec{w} = -\sin(\theta)\,\vec{i} + \cos(\theta)\,\vec{j}\,. \end{cases}$$

- Donc, on a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OM}_{\theta+\theta'}} &= \cos(\theta')\big(\cos(\theta)\vec{i}+\sin(\theta)\vec{j}\big)+\sin(\theta')\big(-\sin(\theta)\vec{i}+\cos(\theta)\vec{j}\big)\\ &= \Big(\cos(\theta')\cos(\theta)-\sin(\theta')\sin(\theta)\Big)\vec{i}+\Big(\cos(\theta')\sin(\theta)-\sin(\theta')\cos(\theta)\Big)\vec{j}.\end{aligned}$$

c) une deuxième expression expression, dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$

- Mais, d'après le fait TRG.11, appliqué à la base $(\vec{i}, \vec{j})$, pour l'angle $\theta+\theta'$, on a

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}_{\theta+\theta'}} = \cos(\theta+\theta')\vec{i}+\sin(\theta+\theta')\vec{j}.$$

2) Les formules d'addition

On en déduit :

♛ Proposition TRG.**22**

On a

$$\begin{aligned}\cos(\theta+\theta') &= \cos(\theta)\cos(\theta')-\sin(\theta)\sin(\theta')\\ \sin(\theta+\theta') &= \cos(\theta)\sin(\theta')+\sin(\theta)\cos(\theta').\end{aligned}$$

En utilisant le caractère paire de cosinus et impair de sinus, on en déduit :

Corollaire TRG.**23**

On a

$$\begin{aligned}\cos(\theta-\theta') &= \cos(\theta)\cos(\theta')+\sin(\theta)\sin(\theta')\\ \sin(\theta-\theta') &= \cos(\theta)\sin(\theta')-\sin(\theta)\cos(\theta').\end{aligned}$$

3) Formules de duplication

On en déduit :

♛ Proposition Ⓣ TRG.**24**

On a

$$\boxed{\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta)-1 = 1-2\sin^2(\theta)}$$
$$\sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta).$$

4) Formules de défactorisation

On veut défactoriser $\cos(\theta)\cos(\theta')$. On remarque que cette expression est présente dans plusieurs formules d'addition. On en déduit :

$$\cos(\theta)\cos(\theta') = \frac{\cos(\theta+\theta')+\cos(\theta-\theta')}{2}.$$

Exercice TRG.**25**

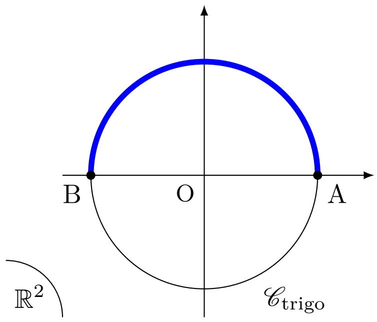
De même, trouver les formules pour $\cos(\theta)\sin(\theta')$ *et* $\sin(\theta)\sin(\theta')$.

V. Étude des fonctions cosinus et sinus

1) Une inégalité accessoire

Lemme TRG. **26**
On a $\pi \geqslant 2$.

Démonstration. — Par propriétés sur les longueurs, le plus court chemin entre deux points est le segment de droite qui les relie. Considérons la figure :



Donc, on a

$$\ell\big([\mathrm{AB}]\big) \leqslant \ell\big(\widehat{\mathrm{AB}}\big), \quad ie \quad 2 \leqslant \pi.$$

■

2) Une inégalité fondamentale

Proposition TRG. **27**
On a $\forall \theta \in \mathbb{R},\ |\sin\theta| \leqslant |\theta|$.

Démonstration. — ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

.... ■

3) Une limite fondamentale

Proposition TRG. **28**
On a

$$\frac{\sin\theta}{\theta} \xrightarrow[\theta\to 0]{} 1.$$

Remarque
Écrire « $\frac{\sin\theta}{\theta} \xrightarrow[\theta\to 0]{} 1$ » est une autre manière d'écrire que la fonction $\theta \longmapsto \frac{\sin\theta}{\theta}$ admet une limite quand $\theta \to 0$ et

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1.$$

Démonstration. — ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Corollaire TRG. **29**
On a

$$\frac{\cos\theta - 1}{\theta} \xrightarrow[\theta\to 0]{} 0.$$

Démonstration. — ■

■

4) Dérivabilité

a) réinterprétation des limites précédentes

Les formules du paragraphe précédent correspondent à des taux d'accroissement.

- Ainsi, on a
$$\frac{\sin\theta - \sin 0}{\theta - 0} = \frac{\sin\theta}{\theta} \underset{\theta\to 0}{\longrightarrow} 1.$$
Autrement dit, le taux d'accroissement en 0 de la fonction sinus admet une limite ; autrement dit, la fonction sinus est dérivable en 0.
- De même pour la fonction cosinus.

Ainsi, on a :

Lemme TRG. **30**
Les fonction sinus et cosinus sont dérivables en 0 *et*
$$\sin'(0) = 1 \quad \textit{et} \quad \cos'(0) = 1.$$

b) dérivation de cosinus et sinus

Théorème TRG. **31**
Les fonction sinus et cosinus sont dérivables et on a
$$\sin' = \cos \quad \textit{et} \quad \cos' = -\sin.$$

Remarque
On en déduit que $\sin(\cdot)$ et $\cos(\cdot)$ sont infiniment dérivables et que
$$\begin{cases} \sin'' = \cos' = -\sin \\ \cos'' = (-\sin)' = -\cos. \end{cases}$$
Autrement dit, les fonctions cosinus et sinus sont solutions de l'équation différentielle $y'' = -y'$.

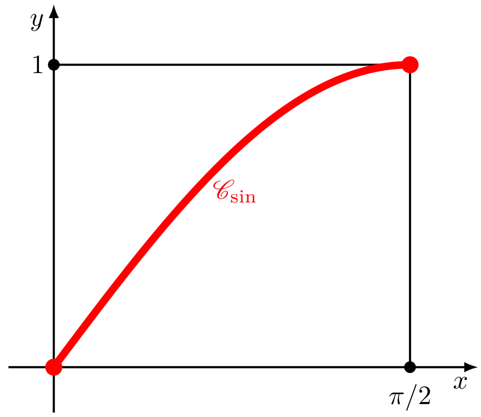
5) Graphes des fonctions sinus et cosinus

a) sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

De ce qui précède, on déduit que, sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

- $\sin \geqslant 0$;
- comme $\sin' = \cos$ et comme $\cos \geqslant 0$: sin est croissante ;
- comme $\sin'' = -\sin$ et comme $\sin \geqslant 0$: sin est concave ;
- $\sin'(0) = 1$, $\sin(0) = 0$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$;
- $\sin'(\frac{\pi}{2}) = 0$.

On en déduit l'allure de la courbe de sinus sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

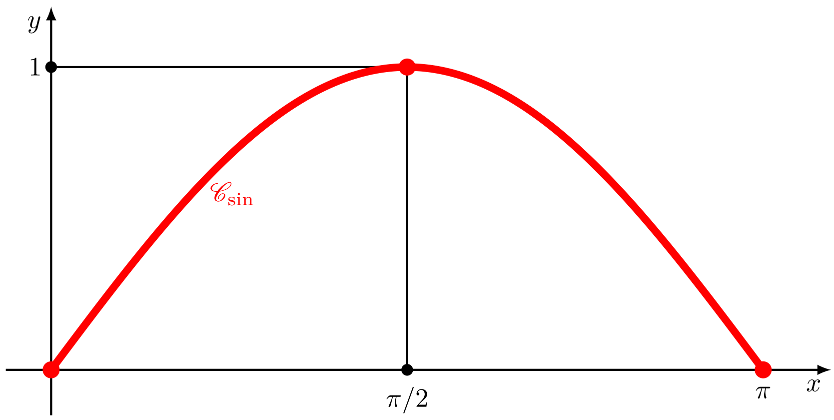


b) sur $[0, \pi]$

Comme, de plus, on a

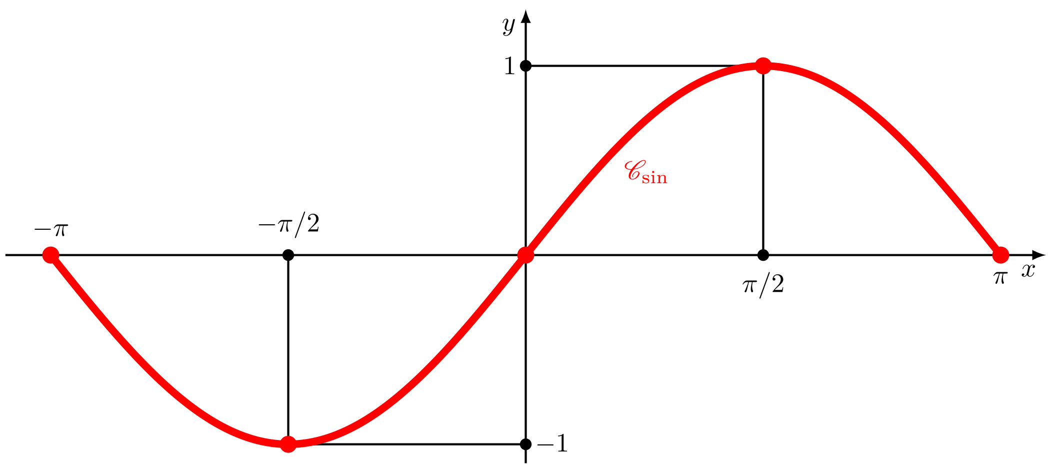
$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

on en déduit que $\mathscr{C}_{\sin}$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \pi/2$. On en déduit l'allure de la courbe de sinus sur $[0, \pi]$:



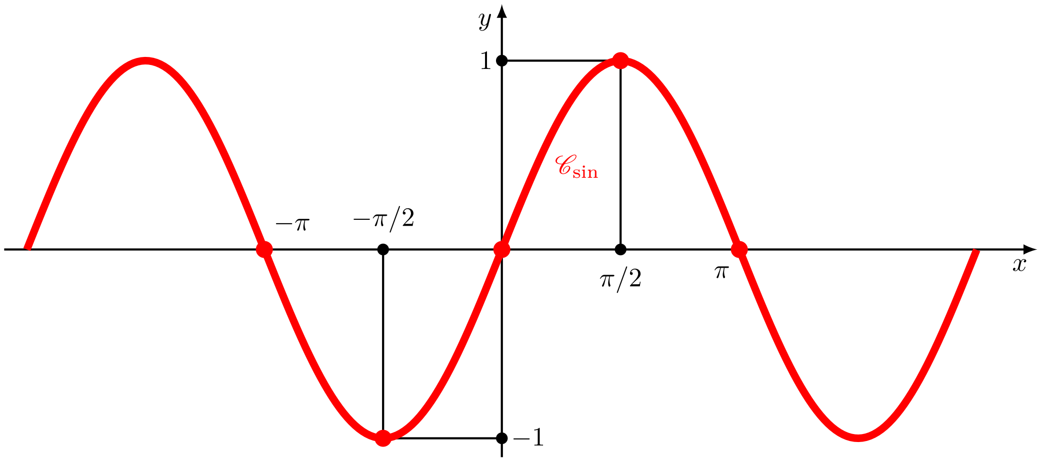
c) sur $[-\pi, \pi]$

Comme, de plus, la fonction sin est impaire, on en déduit l'allure de la courbe de sinus sur $[0, \pi]$:



d) sur $\mathbb{R}$

Comme la fonction sinus est 2π-périodique, on en déduit l'allure de la courbe de sinus :

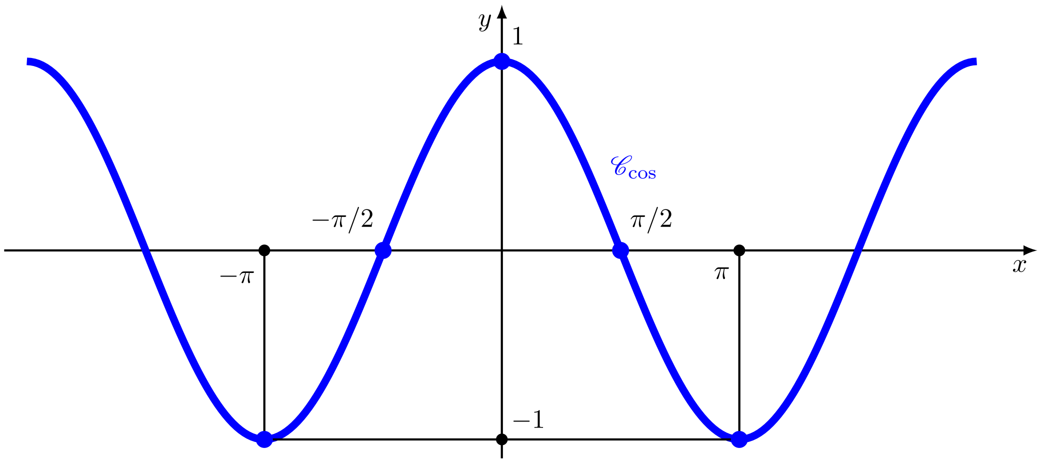


e) graphe de cosinus sur $\mathbb{R}$

Comme on a

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\theta)$$

on en déduit l'allure de la courbe de cosinus :



VI. Fonction tangente

1) Définition

a) définition

Définition TRG. 32
Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(\theta) \neq 0$. La tangente de θ, notée $\tan(\theta)$, est le nombre réel défini par

$$\boxed{\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}.}$$

b) étude du domaine de définition

Notons $\mathsf{D}_{\tan}$ l'ensemble de définition de la fonction tangente.

Fait TRG. 33
On a

$$\begin{aligned} D_{\tan} &= \left\{\theta \in \mathbb{R} \mid \theta \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]\right\} \\ &= \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\right\}. \end{aligned}$$

Démonstration. — Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

- Déjà, d'après les techniques de résolution d'équations trigonométriques, on a
$$\begin{aligned} \cos(\theta) = 0 &\iff \cos(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &\iff \theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad \theta \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{aligned}$$
- De plus, comme on laisse le lecteur s'en convaincre, on a
$$\theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \quad \Longrightarrow \quad \theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$$
et on a
$$\theta \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \quad \Longrightarrow \quad \theta \equiv -\frac{\pi}{2}\ [\pi].$$
Comme on a $\frac{\pi}{2} \equiv -\frac{\pi}{2}\ [\pi]$, on en déduit
$$\left(\theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \ \text{ ou } \ \theta \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\right) \quad \Longrightarrow \quad \theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi].$$
- Montrons pour terminer que
$$\theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \quad \Longrightarrow \quad \left(\theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \ \text{ ou } \ \theta \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\right).$$
Supposons $\theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ et fixons $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = k\pi + \frac{\pi}{2}$. On distingue deux cas.
  - ▷ On suppose k pair. Fixons donc $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que $k = 2\ell$. On a alors $\theta = 2\ell\pi + \frac{\pi}{2}$ et donc $\theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
  - ▷ On suppose k impair. Fixons donc $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que $k = 2\ell - 1$. On a alors $\theta = 2\ell\pi - \pi + \frac{\pi}{2}$, donc $\theta = 2\ell\pi - \frac{\pi}{2}$, donc $\theta \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
- Ainsi, on a montré que
$$\left(\theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \ \text{ ou } \ \theta \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\right) \quad \iff \quad \theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi].$$
Le résultat annoncé en découle.

■

2) Représentation de la tangente sur le cercle trigonométrique

Soit $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. La tangente de θ peut se représenter sur le cercle trigonométrique de la façon suivante :

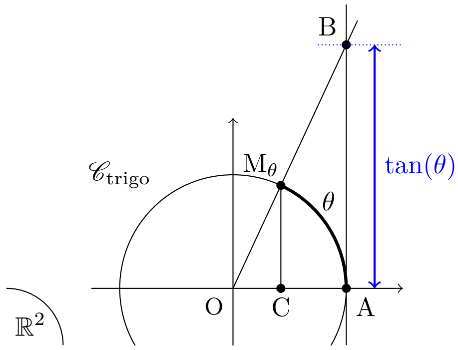


FIGURE 5 – Représentation graphique de $\tan(\theta)$.

Démonstration de cette représentation graphique. — C'est une conséquence du théorème de Thalès. En effet, d'après ce théorème on a

$$\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{CM}_\theta}{\mathrm{AB}}.$$

Donc,

$$\mathrm{AB} = \mathrm{CM}_\theta \times \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OC}} = \sin(\theta) \times \frac{1}{\cos(\theta)} = \tan(\theta).$$

■

3) Premières propriétés de la fonction tangente

a) elle est impaire

Proposition TRG. **34**
La fonction tangente est impaire.

Démonstration. — C'est un simple calcul.
Soit $\theta \in \mathsf{D}_{\tan}$. Déjà, on remarque que $-\theta \in \mathsf{D}_{\tan}$. On a

$$\tan(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = -\tan(\theta).$$

■

b) elle est π-périodique

Proposition TRG. **35**
La fonction tangente est π-périodique.

Démonstration. — C'est un simple calcul.
Soit $\theta \in \mathsf{D}_{\tan}$. Déjà, on remarque que $\theta + \pi \in \mathsf{D}_{\tan}$. On a

$$\tan(\theta + \pi) = \frac{\sin(\theta + \pi)}{\cos(\theta + \pi)} = \frac{-\sin(\theta)}{-\cos(\theta)} = \tan(\theta).$$

■

4) Valeurs remarquables

Proposition TRG. **36**
On a

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan(\theta)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	*non définie*

Démonstration. — C'est un simple calcul. ■

Remarques

- On verra plus loin que la fonction tangente est croissante.
- Il suffit donc retenir que les tangentes de $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{3}$ sont ou bien $\sqrt{3}$ ou bien $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

5) Formule d'addition

Proposition TRG. **37**
Soient $\theta, \theta' \in D_{\tan}$. Alors, on a

$$\theta + \theta' \in D_{\tan} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\tan(\theta + \theta') = \frac{\tan(\theta) + \tan(\theta')}{1 - \tan(\theta)\tan(\theta')}.}$$

Démonstration. — ....

....

....

....

....

.... ■

Remarque

Si $\theta = \theta' = \frac{\pi}{4}$, alors :

- $\theta + \theta' = \frac{\pi}{4} \notin \mathrm{D}_{\tan}$;
- $\tan(\theta) = \tan(\theta') = 1$ donc $1 - \tan(\theta)\tan(\theta') = 0$;
- l'expression $\frac{\tan(\theta) + \tan(\theta')}{1 - \tan(\theta)\tan(\theta')}$ n'est pas définie.

Cela peut aider à retenir la formule.

6) Étude de la fonction tangente

Proposition TRG. **38**

1) *La fonction tangente est dérivable sur* $D_{\tan}$.
2) *Pour tout* $\theta \in D_{\tan}$, *on a*

$$\boxed{\tan'(\theta) = 1 + \tan^2(\theta) = \frac{1}{\cos^2(\theta)}.}$$

Démonstration. —

1) En tant que quotient de fonctions dérivables ne s'annulant pas, la fonction tangente est dérivable.
2) Soit $\theta \in \mathrm{D}_{\tan}$.
   - D'après la formule de dérivation d'un quotient, on a

$$\begin{aligned} \tan'(\theta) &= \frac{\sin'(\theta)\cos(\theta) - \sin(\theta)\cos'(\theta)}{\cos^2(\theta)} \\ &= \frac{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} \\ &= \frac{1}{\cos^2(\theta)}. \end{aligned}$$

   - De plus, on a

$$1 + \tan^2(\theta) = 1 + \frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} = \frac{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} = \frac{1}{\cos^2(\theta)}.$$

■

Corollaire TRG. **39**

1) *Sur* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, *la fonction tangente est strictement croissante.*
2) *Mieux, on a* $\forall \theta \in D_{\tan}$, $\tan'(\theta) \geqslant 1$.

Remarque

Ainsi, la fonction tangente est strictement croissante, « de vitesse toujours $\geqslant 1$ ».

7) Graphe de tangente

a) une limite

Fait TRG. **40**

On a

$$\tan(\theta) \xrightarrow[\theta \to \frac{\pi}{2}^-]{} +\infty.$$

Démonstration. —

- On a

$$\cos(\theta) \xrightarrow[\theta \to \frac{\pi}{2}^-]{} 0 \quad \text{et} \quad \sin(\theta) \xrightarrow[\theta \to \frac{\pi}{2}^-]{} 1 > 0.$$

  De plus, $\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \cos(\theta) > 0$.
- On est dans le cas d'une limite de type « $\frac{1}{0^+}$ ».
- Donc, on a bien $\tan(\theta) \xrightarrow[\theta \to \frac{\pi}{2}^-]{} +\infty$.

■

b) le graphe

À l'aide de calculs simples, on pourrait étudier la convexité de tangente.

De tout cela, on déduit :