Formule du binôme

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 1.1 — Fractions numériques.

Simplifier, en donnant le résultat sous forme de fraction irréductible.

a) $\dfrac{3\times2\times1}{4\times3\times2}+\dfrac{5\times4\times3}{6\times5\times4}$ ....

b) $\dfrac{4\times3\times2}{5\times4\times3}-\dfrac{6\times5\times4}{7\times6\times5}$ ....

c) $\dfrac{4\times3\times2\times1}{5\times4\times3\times2}+\dfrac{6\times5\times4\times3}{7\times6\times5\times4}$ ..

d) $\dfrac{5\times4\times3\times2}{6\times5\times4\times3}-\dfrac{7\times6\times5\times4}{8\times7\times6\times5}$ ..

Calcul 1.2 — Fractions littérales.

Soit n un entier relatif quelconque, tel que dans chaque cas, les expressions considérées soient bien définies. Simplifier, en donnant le résultat aussi simplifié que possible.

a) $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n-1}$ ....

b) $\dfrac{n-1}{n(n+1)}-\dfrac{n+1}{n(n-1)}$ ....

c) $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{(n+1)n(n-1)}+\dfrac{(n+2)(n+1)n}{(n+3)(n+2)(n+1)}$ ....

d) $\dfrac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{(n+2)(n+1)n(n-1)}-\dfrac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}$ ....

Premiers calculs

Calcul 1.3 — Coefficients binomiaux (I).

Calculer :

a) $\dbinom{3}{0}$ ....

b) $\dbinom{3}{1}$ ....

c) $\dbinom{3}{2}$ ....

d) $\dbinom{3}{3}$ ....

e) $\dbinom{4}{0}$ ....

f) $\dbinom{4}{1}$ ....

g) $\dbinom{4}{2}$ ....

h) $\dbinom{4}{3}$ ....

i) $\dbinom{4}{4}$ ....

Calcul 1.4 — Simplification de factorielles numériques.

Écrire les expressions suivantes sous forme d'un entier ou d'une fraction irréductible :

a) $\dfrac{5!}{3!}$ ....

b) $\dfrac{10!}{7!}$ ....

c) $\dfrac{12! \times 6!}{8! \times 4!}$ ....

d) $\dfrac{(6!)^2}{10! \times 8!}$ ....

Calcul 1.5 — Coefficients binomiaux (II).

Déterminer la valeur des coefficients binomiaux suivants sous forme d'un nombre entier :

a) $\dbinom{10}{3}$ ....

b) $\dbinom{10}{7}$ ....

c) $\dbinom{12}{4}$ ....

d) $\dbinom{12}{8}$ ....

Calcul 1.6 — Simplification de factorielles littérales.

Soit n un entier naturel. Écrire les expressions suivantes sous la forme la plus simplifiée possible :

a) $\dfrac{n!}{(n-2)!}$ ....

b) $\dfrac{(n+1)!}{(n-2)!}$ ....

c) $\dfrac{(n^2-1) \times n!}{(n+1)!}$ ....

d) $\dfrac{(n-1)!}{(n+1)!} + \dfrac{(n-2)!}{n!}$ ....

Calcul 1.7 — Coefficients binomiaux (III).

Soit n un entier supérieur ou égal à 3.

Déterminer la valeur des coefficients binomiaux suivants sous forme d'une fraction, aussi simplifiée que possible :

a) $\dbinom{n}{0}$ ....

b) $\dbinom{n}{1}$ ....

c) $\dbinom{n}{2}$ ....

d) $\dbinom{n}{3}$ ....

e) $\dbinom{n}{n-3}$ ....

f) $\dbinom{n}{n-2}$ ....

g) $\dbinom{n}{n-1}$ ....

h) $\dbinom{n}{n}$ ....

Calcul 1.8 — Quelques développements.

Soit x un réel. À l'aide de la formule du binôme, développer les expressions suivantes :

a) $(1+x)^3$ ....

b) $(2-x)^4$ ....

c) $(x+3)^5$ ....

d) $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^6$ ....

Calcul 1.9 — Sommes binomiales (I).

Déterminer la valeur de chacune des sommes :

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}\times 1^k\times 2^{5-k}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}\times 3^{6-k}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}\times\frac{1}{2^{7-k}}$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}$ ....

Calcul 1.10 — Sommes binomiales (II).

Soit n un entier naturel. Déterminer la valeur de chacune des sommes :

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times 1^k\times 2^{n-k}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times 3^{n-k}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times\frac{1}{2^{n-k}}$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ ....

Calcul 1.11 — Sommes binomiales (III).

Soit n un entier naturel. Déterminer la valeur de chacune des sommes :

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}\times(-1)^k$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}\times(-1)^{-k}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}\times 2^{-k}$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}\times(-3)^{8-k}$ ....

Calcul 1.12 — Sommes binomiales (IV).

Soit n un entier naturel non nul. Déterminer la valeur de chacune des sommes :

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times(-1)^k$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times(-1)^{-k}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times 2^{-k}$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times(-3)^{n-k}$ ....

Calcul 1.13 — Sommes binomiales (V).

Soit n un entier naturel et soient a et b deux réels.

Déterminer une expression factorisée et réduite de chacune des sommes suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times a^k$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times b^n$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{-k}$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times a^k b^n$ ....

Calculs plus avancés

Calcul 1.14 — Une formule bien utile.

Soient $n\in\mathbb{N}$ et $k\in[\![1,n]\!]$.

Calculer $\displaystyle\binom{n+1}{k+1}-\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$ ....

Calcul 1.15 — Sommes binomiales d'indices pairs et impairs.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On note

$$\mathcal{P}=\sum_{\substack{k=0\\ k\text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}\quad\text{et}\quad\mathcal{I}=\sum_{\substack{k=0\\ k\text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}.$$

a) Exprimer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ à l'aide de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ ....

b) Exprimer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$ à l'aide de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ ....

c) En déduire les valeurs de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{I}$ ....

Calcul 1.16 — Une somme binomiale classique.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (1+x)^n. \end{cases}$

a) La fonction f est dérivable. Calculer $f'(x)$, pour $x \in \mathbb{R}$ ....

b) Exprimer $f(x)$, pour $x \in \mathbb{R}$, sous la forme d'une somme ....

c) En déduire une expression sous forme de somme de $f'(x)$ ....

d) En évaluant en $x = 1$ les deux expressions obtenues pour $f'(x)$, en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

....

Calcul 1.17 — Une formule binomiale.

Soient $N, k \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leqslant k \leqslant N$. On note $\mathsf{S}(k,N) = \displaystyle\sum_{n=k}^{N} \binom{n}{k}$.

Combien valent les valeurs particulières suivantes ? On attend une réponse aussi simple que possible.

a) $\mathsf{S}(N,N)$ ....

b) $\mathsf{S}(0,N)$ ....

c) $\mathsf{S}(N-1,N)$ ....

d) $\mathsf{S}(N-2,N)$ ....

e) Exprimer $\mathsf{S}(k,N+1)$ en fonction de $\mathsf{S}(k,N)$ ....

On note maintenant $\mathsf{T}(k,N) = \mathsf{S}(k,N) - \dbinom{N+1}{k+1}$.

f) Combien vaut, d'après la relation de Pascal, $\dbinom{N+1}{k} + \dbinom{N+1}{k+1}$?

(a) $\dbinom{N+1}{k+2}$ (b) $\dbinom{N+2}{k}$ (c) $\dbinom{N+2}{k+1}$ (d) $\dbinom{N+2}{k+2}$

....

g) Calculer $\mathsf{T}(k,N+1) - \mathsf{T}(k,N)$ ....

h) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=k}^{N} \binom{n}{k}$ ....

▶ Réponses et corrigés page ??

Fiche n° 1. Formule du binôme

Réponses

1.1 a) $\boxed{\dfrac{3}{4}}$

1.1 b) $\boxed{-\dfrac{6}{35}}$

1.1 c) $\boxed{\dfrac{22}{35}}$

1.1 d) $\boxed{-\dfrac{1}{6}}$

1.2 a) $\boxed{-\dfrac{1}{n(n-1)}}$

1.2 b) $\boxed{-\dfrac{4}{(n+1)(n-1)}}$

1.2 c) $\boxed{\dfrac{2n^2+2n-6}{(n+1)(n+3)}}$

1.2 d) $\boxed{-\dfrac{8}{(n+2)(n+4)}}$

1.3 a) $\boxed{1}$

1.3 b) $\boxed{3}$

1.3 c) $\boxed{3}$

1.3 d) $\boxed{1}$

1.3 e) $\boxed{1}$

1.3 f) $\boxed{4}$

1.3 g) $\boxed{6}$

1.3 h) $\boxed{4}$

1.3 i) $\boxed{1}$

1.4 a) $\boxed{20}$

1.4 b) $\boxed{720}$

1.4 c) $\boxed{356\,400}$

1.4 d) $\boxed{\dfrac{1}{282\,240}}$

1.5 a) $\boxed{120}$

1.5 b) $\boxed{120}$

1.5 c) $\boxed{495}$

1.5 d) $\boxed{495}$

1.6 a) $\boxed{n^2-n}$

1.6 b) $\boxed{n^3-n}$

1.6 c) $\boxed{n-1}$

1.6 d) $\boxed{\dfrac{2}{n^2-1}}$

1.7 a) $\boxed{1}$

1.7 b) $\boxed{n}$

1.7 c) $\boxed{\dfrac{n(n-1)}{2}}$

1.7 d) $\boxed{\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}}$

1.7 e) $\boxed{\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}}$

1.7 f) $\boxed{\dfrac{n(n-1)}{2}}$

1.7 g) $\boxed{n}$

1.7 h) $\boxed{1}$

1.8 a) $\boxed{x^3+3x^2+3x+1}$

1.8 b) $\boxed{\begin{array}{r} x^4-8x^3+24x^2 \\ -32x+16 \end{array}}$

1.8 c) $\boxed{\begin{array}{r} x^5+15x^4+90x^3 \\ +270x^2+405x+243 \end{array}}$

1.8 d) $\boxed{\begin{array}{r} x^6-3x^5+\frac{15}{4}x^4-\frac{5}{2}x^3 \\ +\frac{15}{16}x^2-\frac{3}{16}x+\frac{1}{64} \end{array}}$

1.9 a) $\boxed{3^5}$

1.9 b) $\boxed{4^6}$

1.9 c) $\boxed{\left(\dfrac{3}{2}\right)^7}$

1.9 d) $\boxed{2^8}$

1.10 a) $\boxed{3^n}$

1.10 b) $\boxed{4^n}$

1.10 c) $\boxed{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n}$

1.10 d) $\boxed{2^n}$

1.11 a) $\boxed{0}$

1.11 b) $\boxed{0}$

1.11 c) $\boxed{\left(\dfrac{3}{2}\right)^7}$

1.11 d) $\boxed{256}$

1.12 a) $\boxed{0}$

1.12 b) $\boxed{0}$

1.12 c) $\boxed{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n}$

1.12 d) $\boxed{(-2)^n}$

1.13 a) $\boxed{(a+1)^n}$

1.13 b) $\boxed{(2b)^n}$

1.13 c) $\boxed{\left(\dfrac{1}{a}+1\right)^n}$

1.13 d) $\boxed{(ab+b)^n}$

1.14 $\boxed{0}$

1.15 a) $\boxed{\mathcal{P}+\mathcal{I}}$

1.15 b) $\boxed{\mathcal{P}-\mathcal{I}}$

1.15 c) $\boxed{\begin{array}{c} \mathcal{P}=2^{n-1} \\ \mathcal{I}=2^{n-1} \end{array}}$

1.16 a) $\boxed{n(1+x)^{n-1}}$

1.16 b) $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k}$

1.16 c) .... $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1}}$

1.16 d) .... $\boxed{n2^{n-1}}$

1.17 a) .... $\boxed{1}$

1.17 b) .... $\boxed{N+1}$

1.17 c) .... $\boxed{N+1}$

1.17 d) .... $\boxed{\dfrac{N(N+1)}{2}}$

1.17 e) .. $\boxed{\mathsf{S}(k,N) + \binom{N+1}{k}}$

1.17 f) .... $\boxed{c}$

1.17 g) .... $\boxed{0}$

1.17 h) .... $\boxed{\binom{N+1}{k+1}}$

Corrigés

1.1 a) On a $\dfrac{3\times 2\times 1}{4\times 3\times 2} + \dfrac{5\times 4\times 3}{6\times 5\times 4} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4}$.

1.1 b) On a $\dfrac{4\times 3\times 2}{5\times 4\times 3} - \dfrac{6\times 5\times 4}{7\times 6\times 5} = \dfrac{2}{5} - \dfrac{4}{7} = \dfrac{14}{35} - \dfrac{20}{35} = \dfrac{-6}{35}$.

1.1 c) On a $\dfrac{4\times 3\times 2\times 1}{5\times 4\times 3\times 2} + \dfrac{6\times 5\times 4\times 3}{7\times 6\times 5\times 4} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{7} = \dfrac{7}{35} + \dfrac{15}{35} = \dfrac{22}{35}$.

1.1 d) On a $\dfrac{5\times 4\times 3\times 2}{6\times 5\times 4\times 3} - \dfrac{7\times 6\times 5\times 4}{8\times 7\times 6\times 5} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{6} - \dfrac{3}{6} = -\dfrac{1}{6}$.

1.2 a) On a $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n-1} = \dfrac{n-1}{n(n-1)} - \dfrac{n}{n(n-1)} = \dfrac{-1}{n(n-1)}$

1.2 b) On a

$$\begin{aligned}\frac{n-1}{n(n+1)} - \frac{n+1}{n(n-1)} &= \frac{(n-1)^2}{n(n+1)(n-1)} - \frac{(n+1)^2}{n(n+1)(n-1)} = \frac{((n-1)-(n+1))((n-1)+(n+1))}{n(n+1)(n-1)} \\ &= \frac{-2\times 2n}{n(n+1)(n-1)} = \frac{-4}{(n+1)(n-1)}.\end{aligned}$$

1.2 c) On a

$$\begin{aligned}\frac{n(n-1)(n-2)}{(n+1)n(n-1)} + \frac{(n+2)(n+1)n}{(n+3)(n+2)(n+1)} = \frac{n-2}{n+1} + \frac{n}{n+3} &= \frac{(n-2)(n+3)}{(n+1)(n+3)} + \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+3)} \\ &= \frac{n^2+3n-2n-6+n^2+n}{(n+1)(n+3)} = \frac{2n^2+2n-6}{(n+1)(n+3)}.\end{aligned}$$

1.2 d) On a

$$\begin{aligned}\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{(n+2)(n+1)n(n-1)} - \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)} &= \frac{n-2}{n+2} - \frac{n}{n+4} \\ &= \frac{(n-2)(n+4)}{(n+2)(n+4)} - \frac{n(n+2)}{(n+2)(n+4)} \\ &= \frac{n^2+4n-2n-8-n^2-2n}{(n+2)(n+4)} = \frac{-8}{(n+2)(n+4)}.\end{aligned}$$

1.3 g) On a $\dbinom{4}{2} = \dfrac{4\times 3}{2!} = 6$.

1.4 a) On a $\dfrac{5!}{3!} = \dfrac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 20.$

1.4 b) On a $\dfrac{10!}{7!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 720.$

1.4 c) On a $\dfrac{12! \times 6!}{8! \times 4!} = \dfrac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8! \times 6 \times 5 \times 4!}{8! \times 4!} = 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 6 \times 5 = 356\ 400.$

1.4 d) On a $\dfrac{(6!)^2}{10! \times 8!} = \dfrac{6! \times 6!}{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6! \times 8 \times 7 \times 6!} = \dfrac{1}{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 8 \times 7} = \dfrac{1}{282\ 240}.$

1.5 a) On a $\dbinom{10}{3} = \dfrac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 10 \times 3 \times 4 = 120.$

1.5 b) On a $\dbinom{10}{7} = \dbinom{10}{10-7} = \dbinom{10}{3} = 120.$

1.5 c) On a $\dbinom{12}{4} = \dfrac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 11 \times 5 \times 9 = 495.$

1.5 d) $\dbinom{12}{8} = \dbinom{12}{12-8} = \dbinom{12}{4} = 495.$

1.6 a) On a $\dfrac{n!}{(n-2)!} = \dfrac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{(n-2)!} = n(n-1) = n^2 - n.$

1.6 b) On a $\dfrac{(n+1)!}{(n-2)!} = \dfrac{(n+1)n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = (n+1)n(n-1) = n^3 - n.$

1.6 c) On a $\dfrac{(n^2-1) \times n!}{(n+1)!} = \dfrac{(n-1)(n+1)n!}{(n+1)n!} = n - 1.$

1.6 d) On a

$$\begin{aligned}\frac{(n-1)!}{(n+1)!} + \frac{(n-2)!}{n!} &= \frac{(n-1)!}{(n+1)!} + \frac{(n+1)(n-2)!}{(n+1) \times n!} = \frac{(n-1)! + (n+1)(n-2)!}{(n+1)!} \\ &= \frac{(n-2)!(n-1+n+1)}{(n+1) \times n \times (n-1) \times (n-2)!} = \frac{2n}{(n+1) \times n \times (n-1)} = \frac{2}{n^2-1}.\end{aligned}$$

1.7 d) On a $\dbinom{n}{3} = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}.$

1.7 e) On a $\dbinom{n}{n-3} = \dbinom{n}{3} = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}.$

1.8 a) On a $(1+x)^3 = \displaystyle\sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} 1^{3-k} \times x^k = x^3 + 3x^2 + 3x + 1.$

1.8 b) On a $(2-x)^4 = \displaystyle\sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} 2^{4-k} \times (-x)^k = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16.$

1.8 c) On a $(x+3)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} 3^{5-k} \times x^k = x^5 + 15x^4 + 90x^3 + 270x^2 + 405x + 243.$

1.8 d) On a $\left(x - \frac{1}{2}\right)^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{6-k} \times x^k = x^6 - 3x^5 + \frac{15}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^3 + \frac{15}{16}x^2 - \frac{3}{16}x + \frac{1}{64}.$

1.9 a) On a $\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} \times 1^k \times 2^{5-k} = (1+2)^5 = 3^5.$

1.9 b) On a $\sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} \times 3^{6-k} = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} \times 3^{6-k} \times 1^k = (3+1)^6 = 4^6.$

1.9 c) On a $\sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} \times \frac{1}{2^{7-k}} = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{7-k} \times 1^k = \left(\frac{1}{2} + 1\right)^7 = \left(\frac{3}{2}\right)^7.$

1.9 d) On a $\sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} = \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} \times 1^k \times 1^{8-k} = 2^8.$

1.10 a) On a $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times 1^k \times 2^{n-k} = (1+2)^n = 3^n.$

1.10 b) On a $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times 3^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times 3^{n-k} \times 1^k = (3+1)^n = 4^n$

1.10 c) On a $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{2^{n-k}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \times 1^k = \left(\frac{1}{2} + 1\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^n.$

1.10 d) On a $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times 1^k \times 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n.$

1.11 a) On a $\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} \times (-1)^k = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} \times (-1)^k \times 1^{5-k} = (-1+1)^5 = 0.$

1.11 b) On a $\sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} \times (-1)^{-k} = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} \times \left(\frac{1}{-1}\right)^k \times 1^{6-k} = (-1+1)^6 = 0.$

1.11 c) On a $\sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} \times 2^{-k} = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k \times 1^{7-k} = \left(\frac{1}{2} + 1\right)^7 = \left(\frac{3}{2}\right)^7.$

1.11 d) On a $\sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} \times (-3)^{8-k} = \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} \times (-3)^{8-k} \times 1^k = (-3+1)^8 = (-2)^8 = 2^8 = 256.$

1.12 a) On a $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times (-1)^k \times 1^{n-k} = (-1+1)^n = 0.$

1.12 b) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times(-1)^{-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times\left(\frac{1}{-1}\right)^{-k}\times 1^{n-k}=(-1+1)^n=0.$

....

1.12 c) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times 2^{-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\times 1^{n-k}=\left(\frac{1}{2}+1\right)^n=\left(\frac{3}{2}\right)^n.$

....

1.12 d) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times(-3)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times(-3)^{n-k}\times 1^{k}=(-3+1)^n=(-2)^n.$

....

1.13 a) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times a^{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times a^{k}\times 1^{n-k}=(a+1)^n.$

....

1.13 b) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times b^{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b^{n-k}\times b^{k}=(b+b)^n=(2b)^n.$

....

1.13 c) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{a}\right)^{k}\times 1^{n-k}=\left(\frac{1}{a}+1\right)^n.$

....

1.13 d) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times a^{k}b^{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times(ab)^{k}b^{n-k}=(ab+b)^n.$

....

1.14 On a $\displaystyle\binom{n+1}{k+1}-\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{(n+1)!}{(k+1)!\times(n+1-(k+1))!}-\frac{n+1}{k+1}\times\frac{n!}{k!\times(n-k)!}=0.$

....

1.15 a) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{\substack{k=0\\k\text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}+\sum_{\substack{k=0\\k\text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}=\mathcal{P}+\mathcal{I}.$

....

1.15 b) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k}=\sum_{\substack{k=0\\k\text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k}+\sum_{\substack{k=0\\k\text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k}=\sum_{\substack{k=0\\k\text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}-\sum_{\substack{k=0\\k\text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}=\mathcal{P}-\mathcal{I}.$

....

1.15 c) Pour commencer, remarquons, d'après la formule de Newton, que

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{k}\times 1^{n-k}=(1+1)^n=2^n$$

$$\text{et}\quad\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k}\times 1^{n-k}=(-1+1)^n=0.$$

Les sommes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont donc les solutions du système : $\begin{cases}\mathcal{P}+\mathcal{I}=2^n\\\mathcal{P}-\mathcal{I}=0.\end{cases}$

Or, on a

$$\begin{cases}\mathcal{P}+\mathcal{I}=2^n\\\mathcal{P}-\mathcal{I}=0\end{cases}\iff\begin{cases}2\mathcal{P}=2^n\\\mathcal{P}=\mathcal{I}\end{cases}\iff\mathcal{P}=\mathcal{I}=2^{n-1}.$$

D'où le résultat.

....

1.16 b) Pour $x \in \mathbb{R}$, la formule de Newton donne $f(x) = (1+x)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times x^k \times 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

1.16 c) Pour $x \in \mathbb{R}$, on a donc $f'(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1}$.

1.16 d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Des calculs précédents, on déduit que $n(1+x)^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1}$. Pour $x = 1$, on obtient $n(1+1)^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k \times 1^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k 1^{k-1}$. D'où la formule : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}$.

1.17 a) On a $\mathsf{S}(N,N) = \displaystyle\sum_{n=N}^{N} \binom{n}{N} = \binom{N}{N} = 1$.

1.17 b) On a $\mathsf{S}(0,N) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \binom{n}{0} = \sum_{n=0}^{N} 1 = N+1$.

1.17 c) On a $\mathsf{S}(N-1,N) = \dbinom{N-1}{N-1} + \dbinom{N-1}{N} = N+1$.

1.17 d) On a $\mathsf{S}(N-2,N) = \dbinom{N-2}{N-2} + \dbinom{N-2}{N-1} + \dbinom{N-2}{N} = 1 + N - 1 + \dfrac{N(N-1)}{2} = \dfrac{N(N+1)}{2}$.

1.17 e) On a $\mathsf{S}(k,N+1) = \displaystyle\sum_{n=k}^{N+1} \binom{n}{k} = \sum_{n=k}^{N} \binom{n}{k} + \binom{N+1}{k} = \mathsf{S}(k,N) + \binom{N+1}{k}$.

1.17 g) On a

$$\begin{aligned}\mathsf{T}(k,N+1) - \mathsf{T}(k,N) &= \left(\mathsf{S}(k,N+1) - \binom{N+2}{k+1}\right) - \left(\mathsf{S}(k,N) - \binom{N+1}{k+1}\right)\\ &= \Big(\mathsf{S}(k,N+1) - \mathsf{S}(k,N)\Big) - \left(\binom{N+2}{k+1} - \binom{N+1}{k+1}\right).\end{aligned}$$

On a $\mathsf{S}(k,N+1) - \mathsf{S}(k,N) = \dbinom{N+1}{k}$. Mais, d'après la formule de Pascal : $\dbinom{N+2}{k+1} - \dbinom{N+1}{k+1} = \dbinom{N+1}{k}$.

Donc,

$$\mathsf{T}(k,N+1) - \mathsf{T}(k,N) = \binom{N+1}{k} - \binom{N+1}{k} = 0.$$

1.17 h) La suite $(\mathsf{T}(k,N))_{N \geqslant k}$ est constante, d'après ce qui précède. Or, on a

$$\mathsf{T}(k,k) = \binom{k}{k} - \binom{k+1}{k+1} = 0.$$

Donc, on a $\mathsf{T}(k,N) = 0$, pour $N \geqslant k$. Donc, on a $\mathsf{S}(k,N) = \displaystyle\sum_{n=k}^{N} \binom{n}{k} = \binom{N+1}{k+1}$.
