DS 6

Corrigé

Suites polygéométriques

Partie I – Étude d'une famille d'opérateurs.

1. Exemples.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $T(X^n)$ dans la base canonique de $\mathbb{C}_n[X]$.

On a

$$T(X^n) = (X+1)^n = \boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k}$$

d'après la formule du binôme de Newton.

(b) Exprimer $T_{i,1}(X^2 + X + 1)$ dans la base $\left(1, X, X^2\right)$ de $\mathbb{C}_2[X]$.

Après calcul, on trouve

$$\boxed{T_{i,1}(X^2 + X + 1) = (i+1)X^2 + (3i+1)X + (3i+1).}$$

2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer

$$\Big(\forall z \in \mathbb{C},\ P(z+1) = P(z)\Big) \implies P \text{ est constant.}$$

- On raisonne par l'absurde et on suppose P non constant.
- Fixons donc, d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $P(\alpha) = 0$.
- On a donc $P(\alpha + 1) = 0$.
- Par récurrence immédiate, on a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ P(\alpha + n) = 0$.
- Ainsi, P a une infinité de racines. Donc $P = 0$. C'est absurde.
- Ainsi, $\boxed{P \text{ est constant.}}$

3. Montrer que T est un isomorphisme.

- Déjà, d'après l'énoncé, T est linéaire.
- On considère l'application U définie par

$$U : \begin{cases} \mathbb{C}[X] \longrightarrow \mathbb{C}[X] \\ P \longmapsto P(X-1). \end{cases}$$

- On vérifie que T et U sont des applications réciproques l'une de l'autre.
- Ainsi, $\boxed{T \text{ est un isomorphisme.}}$

4. La famille des $T_{\alpha,\beta}$ commute.
Soient $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$T_{\alpha,\beta} \circ T_{a,b} = T_{a,b} \circ T_{\alpha,\beta}.$$

On calcule

$$\begin{aligned} T_{\alpha,\beta} \circ T_{a,b} &= (\alpha T + \beta \mathrm{Id}_{\mathbb{C}[X]}) \circ (aT + b\mathrm{Id}_{\mathbb{C}[X]}) \\ &= \alpha a T^2 + \alpha b T + \beta a T + \beta b \mathrm{Id}_{\mathbb{C}[X]} \\ &= \alpha a T^2 + (\alpha b + \beta a) T + \beta b \mathrm{Id}_{\mathbb{C}[X]}. \end{aligned}$$

Comme cette expression est identique quand on échange (a,b) et (α,β), on a bien

$$\boxed{T_{\alpha,\beta} \circ T_{a,b} = T_{a,b} \circ T_{\alpha,\beta}.}$$

5. Interaction des $T_{\alpha,\beta}$ avec le degré.
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'espace $\mathbb{C}_n[X]$ est stable par $T_{\alpha,\beta}$.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{C}_n[X]$.
- D'après le cours, on sait que $\deg P(X+1) = \deg P$. Donc, on a $T(P) \in \mathbb{C}_n[X]$.
- Donc, on a $\alpha T(P) + \beta P \in \mathbb{C}_n[X]$.
- Ainsi, $T_{\alpha,\beta}(P) \in \mathbb{C}_n[X]$ et $\boxed{\mathbb{C}_n[X] \text{ est stable par } T_{\alpha,\beta}.}$

(b) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul.
Exprimer $\deg T_{\alpha,\beta}(P)$ en fonction de $\deg(P)$ dans chacun des cas suivants :

(i) $(\alpha,\beta) = (0,0)$.

Si $\alpha = \beta = 0$, on a $\boxed{\deg T_{\alpha,\beta}(P) = -\infty.}$

(ii) $\alpha \neq -\beta$.

- On note $n := \deg(P)$.
  Dans un premier temps, on suppose que $n \geqslant 1$ et on écrit
  $$P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \text{qqch}$$
  où $a_n \neq 0$, $a_{n-1} \in \mathbb{C}$ et $\text{qqch} \in \mathbb{C}_{n-2}[X]$.
- On calcule
  $$\begin{aligned} P(X+1) &= a_n (X+1)^n + a_{n-1}(X+1)^{n-1} + \text{qqch}_1 \\ &= \Big(a_n X^n + n a_n X^{n-1} + \text{qqch}_2\Big) + \Big(a_{n-1} X^{n-1} + \text{qqch}_3\Big) + \text{qqch}_1 \\ &= a_n X^n + (n a_n + a_{n-1}) X^{n-1} + (\text{qqch}_1 + \text{qqch}_2 + \text{qqch}_3) \end{aligned}$$
  où $\text{qqch}_1, \text{qqch}_2, \text{qqch}_3 \in \mathbb{C}_{n-2}[X]$.
- On a donc
  $$\alpha T(P) + \beta P = (\alpha+\beta) a_n X^n + (\alpha n a_n + (\alpha+\beta) a_{n-1}) X^{n-1} + \text{qqch}_4 \tag{0}$$
  où $\text{qqch}_4 \in \mathbb{C}_{n-2}[X]$.
- Comme $(\alpha+\beta) a_n \neq 0$, on a donc
  $$\boxed{\deg T_{\alpha,\beta}(P) = \deg(P).}$$
- On vérifie que si $n = 0$, cette formule est encore vraie.

(iii) $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ et $\alpha = -\beta$.

- On garde les notations du calcul précédent. On suppose d'abord que $n \geqslant 1$.
- Comme $\alpha + \beta = 0$, la formule (0) s'écrit
  $$\alpha T(P) + \beta P = \alpha n a_n X^{n-1} + \text{qqch}_4$$
- On ne peut pas avoir $\alpha = 0$; en effet, sinon on aurait aussi $\beta = 0$.
- Donc, dans ce cas, on a $\boxed{\deg T_{\alpha,\beta}(P) = \deg(P) - 1.}$
- On vérifie que si $n = 0$, dans ce cas, on a $\deg T_{\alpha,\beta}(P) = -\infty$.

6. Noyaux des $T_{\alpha,\beta}$.

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Déterminer $\ker(T_{\alpha,\beta})$.

On distinguera différents cas pour les valeurs de (α, β).

- Déjà, si $\alpha = \beta = 0$, on a $T_{\alpha,\beta} = 0_{\mathrm{L}(\mathbb{C}[X])}$ et donc

$$\boxed{\alpha = \beta = 0 \implies \ker T_{\alpha,\beta} = \mathbb{C}[X].}$$

- Maintenant, supposons $\alpha = -\beta \neq 0$. Soit $P \in \ker T_{\alpha,\beta}$.
On a $P(X+1) - P = 0_{\mathbb{C}[X]}$. D'après la question **2.**, on a $P \in \mathbb{C}_0[X]$. Réciproquement, si $P \in \mathbb{C}_0[X]$, alors $T_{\alpha,-\alpha}(P) = 0$. Donc,

$$\boxed{\alpha = -\beta \neq 0 \implies \ker T_{\alpha,\beta} = \mathbb{C}_0[X].}$$

- Enfin, supposons $\alpha \neq -\beta$. Soit $P \in \ker T_{\alpha,\beta}$.
D'après la question **5.**(b), on a $\deg T_{\alpha,\beta}(P) = \deg(P)$. Donc $P = 0_{\mathbb{C}[X]}$. Donc,

$$\boxed{\alpha \neq \beta \implies \ker T_{\alpha,\beta} = \left\{0_{\mathbb{C}[X]}\right\}.}$$

Partie II – Suites polygéométriques.

7. Premières propriétés.

(a) L'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ \alpha & \longmapsto & \alpha^{\bullet} \end{array} \right.$$

est-elle linéaire ?

$\boxed{\text{Non, elle n'est pas linéaire.}}$ Si c'était le cas, on aurait

$$\varphi(2) = \varphi(2 \cdot 1) = 2 \cdot \varphi(1) \quad \text{et donc} \quad 2^{\bullet} = 2 \cdot 1^{\bullet}.$$

En particulier, en considérant les termes d'indice 2 de ces suites, on aurait $2^2 = 2 \cdot 1$, ce qui est faux.

(b) On note i l'application définie par

$$i : \begin{cases} \mathbb{C}[X] \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ P \longmapsto P(\bullet). \end{cases}$$

(i) L'application i est-elle linéaire ?

$\boxed{\text{Oui, elle est linéaire.}}$ En effet, soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrons que

$$(P + \lambda \cdot Q)(\bullet) = P(\bullet) + \lambda \cdot Q(\bullet).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On calcule

$$\begin{aligned} \Big((P + \lambda \cdot Q)(\bullet)\Big)_n &= (P + \lambda \cdot Q)(n) \\ &= P(n) + \lambda \cdot Q(n) \\ &= P(\bullet)_n + \lambda \cdot Q(\bullet)_n \\ &= \Big(P(\bullet) + \lambda \cdot Q(\bullet)\Big)_n. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

(ii) Montrer que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}[X] \arrow[r, "i"] \arrow[d, "T"'] & \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \arrow[d, "\mathsf{S}"] \\ \mathbb{C}[X] \arrow[r, "i"] & \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \end{tikzcd}$$

est commutatif.

- On veut montrer que $i \circ T = \mathsf{S} \circ i$.
- Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On calcule

$$(\mathsf{S} \circ i)(P) = \mathsf{S}(P(\bullet)) = \big(P(n+1)\big)_n.$$

- On a aussi

$$(i \circ T)(P) = i(P(X+1)) = \big(P(n+1)\big)_n.$$

- Ainsi, $i \circ T = \mathsf{S} \circ i$: $\boxed{\text{le diagramme est commutatif.}}$

8. Stabilité.

(a) Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$\mathsf{S}(P(\bullet) \times \alpha^\bullet) = \alpha \cdot T(P)(\bullet) \times \alpha^\bullet.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On calcule

$$\begin{aligned}\Big(\mathsf{S}(P(\bullet) \times \alpha^\bullet)\Big)_n &= P(n+1)\alpha^{n+1} \\ &= \alpha \cdot T(P)(n)\alpha^n \\ &= \alpha \cdot \big(T(P)(\bullet) \times \alpha^\bullet\big)_n.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{D'où le résultat.}}$

(b) En déduire que $\mathrm{PG}(\mathbb{C})$ est stable par S.

Soit $u \in \mathrm{PG}(\mathbb{C})$ qu'on écrit

$$u = \sum_{k=1}^{p} P_k(\bullet) \times \alpha_k^\bullet$$

où $p \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{C}^p$ et $(P_1, \ldots, P_p) \in \mathbb{C}[X]^p$. D'après la question précédente, on a

$$\mathsf{S}(u) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \cdot T(P_k)(\bullet) \times \alpha_k^\bullet = \sum_{k=1}^{p} (\alpha_k T(P_k))(\bullet) \times \alpha_k^\bullet.$$

Donc, $\mathsf{S}(u) \in \mathrm{PG}(\mathbb{C})$. Ainsi, $\boxed{\mathrm{PG}(\mathbb{C}) \text{ est stable par } \mathsf{S}.}$

9. Exemple et non-exemple.

(a) Montrer que la suite $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas polygéométrique.

- On raisonne par l'absurde et on suppose que $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ est polygéométrique.
- On fixe $p \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{C}^p$ et $(P_1, \ldots, P_p) \in \mathbb{C}[X]^p$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n! = \sum_{k=1}^{p} P_k(n) \times {\alpha_k}^n.$$

- Or, on sait que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ et tout $\alpha \in \mathbb{C}$, on a $\dfrac{P(n)\alpha^n}{n!} \longrightarrow 0$.
- Donc, comme on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 = \sum_{k=1}^{p} \frac{P_k(n){\alpha_k}^n}{n!},$$

on en déduit que $1 \longrightarrow 0$, ce qui est absurde.
- Ainsi, $\boxed{(n!)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'est pas polygéométrique.}}$

(b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles la suite $\big(\cos(n\theta)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est polygéométrique.

On a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \cos(n\theta) = \frac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2} = \frac{1}{2}\Big(\big(e^{i\theta}\big)^n + \big(e^{-i\theta}\big)^n\Big).$$

Donc, la suite $\boxed{\big(\cos(n\theta)\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est polygéométrique quel que soit } \theta.}$

Partie III – Une preuve de liberté.

10. Un premier cas.

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}^*$ des nombres complexes deux à deux distincts et tous non nuls.

Montrer que la famille

$$(\alpha^\bullet, \beta^\bullet, \gamma^\bullet)$$

est libre.

- Commençons par traiter le cas de deux nombres complexes et montrons que $(\alpha^\bullet, \beta^\bullet)$ est libre. Soient donc $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \lambda\alpha^n + \mu\beta^n = 0. \tag{$*$}$$

- En spécialisant $(*)$ en $n = 0$ et en $n = 1$, on obtient

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda\alpha + \mu\beta = 0. \end{cases}$$

- Donc, on a $\alpha(\lambda+\mu) - (\lambda\alpha + \mu\beta) = 0$. Donc, on a $(\alpha-\beta)\mu = 0$. Comme $\alpha \neq \beta$, on a $\mu = 0$. Donc, on a également $\lambda = 0$.
- Ainsi, $\boxed{(\alpha^\bullet, \beta^\bullet) \text{ est libre.}}$
- Montrons maintenant que $(\alpha^\bullet, \beta^\bullet, \gamma^\bullet)$ est libre. Soient donc $\lambda, \mu, \theta \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \lambda\alpha^n + \mu\beta^n + \theta\gamma^n = 0. \tag{$**$}$$

- En spécialisant $(**)$ en $n = 0$, en $n = 1$ et en $n = 2$, on obtient

$$\begin{cases} (L_1) : \lambda + \mu + \theta = 0 \\ (L_2) : \lambda\alpha + \mu\beta + \theta\gamma = 0 \\ (L_3) : \lambda\alpha^2 + \mu\beta^2 + \theta\gamma^2 = 0. \end{cases}$$

- En calculant $\gamma^2 L_1 - 2\gamma L_2 + L_3$, on obtient $(L_4) : (\gamma-\alpha)^2\lambda + (\gamma-\beta)^2\mu = 0$.
- De même, en calculant $\alpha^2 L_1 - 2\alpha L_2 + L_3$, on obtient $(L_5) : (\alpha-\beta)^2\mu + (\alpha-\gamma)^2\theta = 0$.

- Puis, en calculant $(\alpha-\gamma)^2 L_1 - L_4 - L_5$, on obtient
$$((\alpha-\gamma)^2 - (\alpha-\beta)^2 - (\gamma-\beta)^2)\mu = 0.$$
Comme
$$(\alpha-\gamma)^2 - (\alpha-\beta)^2 - (\gamma-\beta)^2 = 2(\beta-\alpha)(\gamma-\beta),$$
et comme α, β et γ sont deux à deux distincts, on en déduit que $\mu = 0$. Ainsi, on est ramené au cas de deux suites.
- Donc, d'après le premier cas traité, on a $\lambda = \theta = 0$.
- Ainsi, on a montré que $\boxed{\text{la famille } (\alpha^\bullet, \beta^\bullet, \gamma^\bullet) \text{ est libre.}}$

11. On note
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{p-1} & \alpha_2^{p-1} & \cdots & \alpha_p^{p-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_p(\mathbb{C}).$$
Montrer que
$$(\alpha_1^\bullet, \dots, \alpha_p^\bullet) \text{ liée} \implies A \notin \mathrm{GL}_p(\mathbb{C}).$$

Supposons $(\alpha_1^\bullet, \dots, \alpha_p^\bullet)$ liée. On fixe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{C}^p$ non tous nuls tels que
$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \alpha_p^\bullet = 0_{\mathbb{C}^\mathbb{N}}.$$
En particulier, on a
$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \\ {\alpha_1}^2 \\ \vdots \\ {\alpha_1}^{p-1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \\ {\alpha_2}^2 \\ \vdots \\ {\alpha_2}^{p-1} \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_p \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_p \\ {\alpha_p}^2 \\ \vdots \\ {\alpha_p}^{p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Ainsi, les colonnes de la matrice A sont liées. Donc, A n'est pas inversible.
On a bien montré que
$$\boxed{(\alpha_1^\bullet, \dots, \alpha_p^\bullet) \text{ liée} \implies A \notin \mathrm{GL}_p(\mathbb{C}).}$$

12. Montrer que la famille $(\alpha_1^\bullet, \dots, \alpha_p^\bullet)$ est libre.

- Montrons que la matrice $A^\top$ est inversible. Pour cela, on va utiliser le « critère nucléaire d'inversibilité ».
- Soit donc $X \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ tel que $A^\top X = 0_{p,1}$. On écrit
$$X = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{p-1} \end{pmatrix},$$
où $\forall k$, $a_k \in \mathbb{C}$.
- Comme $A^\top X = 0_{p,1}$, on a
$$\forall k \in [\![1, p]\!], \quad \sum_{i=0}^{p-1} a_i {\alpha_k}^i = 0.$$
- Notons $P := \sum_{i=0}^{p-1} a_i X^i$. Ainsi, les α_k sont tous racines de P.
- Comme $\deg(P) \leqslant p-1$ et comme P possède au moins p racines, puisque les α_i sont deux à deux distincts, le « critère radical de nullité » nous assure que $P = 0$. Ainsi, $\forall k$, $a_k = 0$ et donc $X = 0_{p,1}$.
- Ainsi, $A^\top$ est inversible. Donc, A est inversible.
- En contraposant l'implication de la question **11.**, on en déduit que

$$\boxed{\text{la famille } (\alpha_1^\bullet, \dots, \alpha_p^\bullet) \text{ est libre.}}$$

13. Soient $P_1, \dots, P_p \in \mathbb{C}[X]$ tels que
$$\sum_{i=1}^{p} P_i(\bullet) \times \alpha_i^\bullet = 0_{\mathbb{C}^\mathbb{N}}.$$

(a) Montrer que
$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot T(P_i)(\bullet) \times \alpha_i^\bullet = 0_{\mathbb{C}^\mathbb{N}}.$$

On applique l'endormorphisme S à $\sum_{i=1}^{p} P_i(\bullet) \times \alpha_i^\bullet = 0_{\mathbb{C}^\mathbb{N}}$. On obtient
$$\sum_{i=1}^{p} \mathsf{S}(P_i(\bullet) \times \alpha_i^\bullet) = 0_{\mathbb{C}^\mathbb{N}} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot T(P_i)(\bullet) \times \alpha_i^\bullet$$
d'après la question **8.**(a). $\boxed{\text{D'où le résultat.}}$

(b) En déduire que
$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \sum_{i=1}^{p} T_{\alpha_i,\lambda}(P_i)(\bullet) \times \alpha_i^\bullet = 0_{\mathbb{C}^\mathbb{N}}.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Notons

$$\sum_{i=1}^{p} P_i(\bullet) \times \alpha_i^{\bullet} = 0_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}} \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot T(P_i)(\bullet) \times \alpha_i^{\bullet} = 0_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}}. \tag{2}$$

En calculant $(2) + \lambda \cdot (1)$, on obtient

$$\sum_{i=1}^{p} (\alpha_i \cdot T(P_i)(\bullet) + \lambda P_i(\bullet)) \times \alpha_i^{\bullet} = 0_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}}$$

$$\text{donc} \qquad \sum_{i=1}^{p} T_{\alpha_i,\lambda}(P_i)(\bullet) \times \alpha_i^{\bullet} = 0_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}},$$

$\boxed{\text{ce qu'on voulait démontrer.}}$

14. On note, pour $i \in [\![1,p]\!]$, $g_i \coloneqq \prod_{j=1}^{p} T_{\alpha_i,-\alpha_j}$.

(a) Soit $i \in [\![1,p]\!]$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall P \in \mathbb{C}_n[X],\ \ g_i(P) \in \mathbb{C}_{n-1}[X].$$

- Soient $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{C}_n[X]$.
- Comme les $T_{\alpha,\beta}$ commutent, d'après la question **4.**, on peut écrire

$$g_i = \left(\prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} T_{\alpha_i,-\alpha_j} \right) \circ T_{\alpha_i,-\alpha_i}.$$

- D'après la question **5.**, on $T_{\alpha_i,-\alpha_i}(P) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.
- D'après la même question, comme $\forall j \neq i,\ \ \alpha_j \neq \alpha_i$, on a pour tout $Q \in \mathbb{C}[X]$,

$$\deg T_{\alpha_i,-\alpha_j}(Q) = \deg(Q).$$

  Ainsi, pour tout $Q \in \mathbb{C}[X]$, on a

$$\deg \left[\left(\prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} T_{\alpha_i,-\alpha_j} \right) (Q) \right] = \deg Q.$$

- Ainsi, $\deg(g_i(P)) \leqslant n-1$. On a bien

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall P \in \mathbb{C}_n[X],\ \ g_i(P) \in \mathbb{C}_{n-1}[X].}$$

(b) De nouveau, soient $P_1, \dots, P_p \in \mathbb{C}[X]$ tels que $\sum_{i=1}^{p} P_i(\bullet) \times \alpha_i^{\bullet} = 0_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}}$.

Montrer que

$$\sum_{i=1}^{p} g_i(P_i)(\bullet) \times \alpha_i^{\bullet} = 0_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}}.$$

- D'après la question **13.** (b), on a, si $Q_1, \dots, Q_p \in \mathbb{C}[X]$

$$\sum_{i=1}^{p} Q_i(\bullet) \times \alpha_i^{\bullet} = 0_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}} \implies \left(\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \sum_{i=1}^{p} T_{\alpha_i,\lambda}(Q_i)(\bullet) \times \alpha_i^{\bullet} = 0_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}}\right). \tag{$\star$}$$

- On a

$$\sum_{i=1}^{p} P_i(\bullet) \times \alpha_i^{\bullet} = 0_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}}. \tag{3}$$

- En appliquant $(\star)$ à (3) avec $\lambda = -\alpha_1$, on obtient

$$\sum_{i=1}^{p} T_{\alpha_i,-\alpha_1}(P_i)(\bullet) \times \alpha_i^{\bullet} = 0_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}}. \tag{4}$$

- En appliquant $(\star)$ à (4) avec $\lambda = -\alpha_2$, on obtient

$$\sum_{i=1}^{p} T_{\alpha_i,-\alpha_2} \circ T_{\alpha_i,-\alpha_1}(P_i)(\bullet) \times \alpha_i^{\bullet} = 0_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}}.$$

- En itérant cette opération avec $\lambda = -\alpha_3, \dots, -\alpha_p$, on obtient

$$\sum_{i=1}^{p} \left(\prod_{j=1}^{p} T_{\alpha_i,-\alpha_j}\right)(P_i)(\bullet) \times \alpha_i^{\bullet} = 0_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}} \quad \textit{ie} \quad \boxed{\sum_{i=1}^{p} g_i(P_i)(\bullet) \times \alpha_i^{\bullet} = 0_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}}.}$$

15. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'assertion

$$\mathscr{P}(n) \coloneqq « \forall P_1, \dots, P_p \in \mathbb{C}_n[X],\ \left(\sum_{i=1}^{p} P_i(\bullet) \times \alpha_i^{\bullet} = 0_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}} \implies \left(\forall i \in [\![1,p]\!],\ P_i = 0_{\mathbb{C}[X]}\right)\right) ».$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

- On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
- Montrons $\mathscr{P}(0)$. On considère donc des polynômes $P_1, \dots, P_p \in \mathbb{C}_0[X]$ tels que

$$\sum_{i=1}^{p} P_i(\bullet) \times \alpha_i^{\bullet} = 0_{\mathbb{C}[X]}.$$

Ces polynômes sont constants. On les écrit $P_i = \lambda_i$, où les $\lambda_i \in \mathbb{C}$. On a donc

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot \alpha_i^{\bullet} = 0_{\mathbb{C}[X]}.$$

Or, d'après la question **12.**, la famille $(\alpha_1^{\bullet}, \dots, \alpha_p^{\bullet})$ est libre.
Donc, $\forall i$, $\lambda_i = 0$. Donc, $\forall i$, $P_i = 0_{\mathbb{C}[X]}$. Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- Montrons l'hérédité, *ie* que $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$.
  Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
  Soient $P_1, \ldots, P_p \in \mathbb{C}_{n+1}[X]$ tels que

$$\sum_{i=1}^{p} P_i(\bullet) \times \alpha_i^{\bullet} = 0_{\mathbb{C}[X]}.$$

  D'après la question **14.** (b), on a donc

$$\sum_{i=1}^{p} g_i(P_i)(\bullet) \times \alpha_i^{\bullet} = 0_{\mathbb{C}[X]}.$$

  Or, d'après la question **14.** (a), on a $\forall i,\ g_i(P_i) \in \mathbb{C}_n[X]$.
  D'après $\mathscr{P}(n)$, on a donc $\forall i,\ g_i(P_i) = 0_{\mathbb{C}[X]}$. Fixons $i \in [\![1, p]\!]$; comme les $T_{\alpha,\beta}$ commutent, on écrit

$$g_i(P_i) = \left(\prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} T_{\alpha_i, -\alpha_j} \right) \Big(T_{\alpha_i, -\alpha_i}(P_i) \Big) = 0_{\mathbb{C}[X]}.$$

  D'après la question **6.**, pour tout $j \neq i$, l'endomorphisme $T_{\alpha_i, -\alpha_j}$ est injectif. Donc,

$$\prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} T_{\alpha_i, -\alpha_j}$$

  est également injectif. Donc, on a $T_{\alpha_i, -\alpha_i}(P_i) = 0_{\mathbb{C}[X]}$. Toujours d'après la même question, et comme $\alpha_i \neq 0$, on obtient que P_i est constant.
  On est donc ramené au cas $\mathscr{P}(0)$: tous les P_i sont nuls. D'où l'hérédité.
- Ainsi, on a $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \mathscr{P}(n) \text{ est vraie.}}$

16. Soit $N \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille de suites

$$\left(\left(n^k \alpha_i^n \right)_{n \in \mathbb{N}} \right)_{\substack{0 \leqslant k \leqslant N \\ 1 \leqslant i \leqslant p}}$$

est libre.

- Soit $(\lambda_{k,i})_{\substack{0 \leqslant k \leqslant N \\ 1 \leqslant i \leqslant p}} \in \mathbb{C}^{[\![0,N]\!] \times [\![1,p]\!]}$ une famille telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant N \\ 1 \leqslant i \leqslant p}} \lambda_{k,i} \cdot n^k \alpha_i^n = 0.$$

- On réorganise la somme pour l'écrire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{k=0}^{N} \lambda_{k,i} \cdot n^k \right) \alpha_i^n = 0.$$

- Pour $i \in [\![1, p]\!]$, on note $P_i \coloneqq \sum_{k=0}^{N} \lambda_{k,i} X^k$. On alors

$$\sum_{i=1}^{p} P_i(\bullet) \times \alpha_i^{\bullet} = 0_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}}.$$

- D'après la question **15.**, on a donc $\forall i,\ P_i = 0_{\mathbb{C}[X]}$. Donc,

$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ \forall k \in [\![0, N]\!],\ \ \lambda_{k,i} = 0.$$

- Ainsi, $\boxed{\text{la famille } \left(\left(n^k \alpha_i^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \right)_{\substack{0\leqslant k\leqslant N \\ 1\leqslant i\leqslant p}} \text{ est libre.}}$

Partie IV – Suites récurrentes.

17. Montrer que $E = \ker P(\mathsf{S})$.

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} u \in \ker P(\mathsf{S}) &\iff P(\mathsf{S})(u) = 0_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}} \\ &\iff \left(\mathsf{S}^p - a_{p-1}\mathsf{S}^{p-1} - \cdots - a_0 \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}}\right)(u) = 0_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}} \\ &\iff \mathsf{S}^p(u) - a_{p-1}\mathsf{S}^{p-1}(u) - \cdots - a_0 u = 0_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}}. \end{aligned}$$

Or, par récurrence immédiate sur $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \left(\mathsf{S}^k(u)\right)_n = u_{n+k}.$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} u \in \ker P(\mathsf{S}) &\iff \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+p} - a_{p-1}u_{n+p-1} - \cdots - a_0 u_n = 0 \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \cdots + a_0 u_n \\ &\iff (u_n)_n \in E. \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien

$$\boxed{E = \ker P(\mathsf{S}).}$$

18. Une majoration.
Montrer que $\ker P(\mathsf{S})$ est de dimension finie et que $\dim(\ker P(\mathsf{S})) \leqslant p$.

- On considère l'application suivante :

$$\varphi : \begin{cases} \ker P(\mathsf{S}) \longrightarrow \mathbb{C}^p \\ \quad u \longmapsto (u_0, u_1, \dots, u_{p-1}). \end{cases}$$

C'est une application linéaire.

- Si on montre que φ est injective, d'après les propriétés des espaces vectoriels, on aura montré que $\ker P(\mathsf{S})$ est de dimension finie que $\dim\ker P(\mathsf{S}) \leqslant \dim \mathbb{C}^p = p$.
- Soit donc $u \in \ker P(\mathsf{S})$ telle que $\varphi(u) = 0_{\mathbb{C}^p}$. On a donc $u_0 = \cdots = u_{p-1} = 0$. Comme u vérifie la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \cdots + a_0 u_n,$$

une récurrence immédiate d'ordre p montre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$.
- $\boxed{\text{D'où le résultat.}}$

19. Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Calculer $\ker(\mathsf{S} - \alpha\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}})$ et en donner une base.

- On raisonne par analyse-synthèse.
- Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $(\mathsf{S} - \alpha\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}})(u) = 0_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}}$. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \alpha \cdot u_n.$$

- Ainsi, la suite u est géométrique de raison α. Donc, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 \cdot \alpha^n.$$

Donc, $u \in \mathrm{Vect}(\alpha^\bullet)$.
- Réciproquement, si $u \in \mathrm{Vect}(\alpha^\bullet)$, u est dans $\ker(\mathsf{S} - \alpha\mathrm{Id})$.
- Ainsi, on a $\boxed{\ker(\mathsf{S} - \alpha\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(\alpha^\bullet)\,;\text{ une base de } \ker(\mathsf{S} - \alpha\mathrm{Id}) \text{ est } (\alpha^\bullet).}$

20. Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Donner une base de $\ker(\mathsf{S} - \alpha\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}})^2$.

- Déjà, on calcule $(\mathsf{S} - \alpha\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}})^2 = \mathsf{S}^2 - 2\alpha\mathsf{S} + \alpha^2\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}}$.
- Soit $u \in \ker(\mathsf{S} - \alpha\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}})^2$. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; u_{n+2} - 2\alpha u_{n+1} + \alpha^2 u_n = 0.$$

- Ainsi, u est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont le polynôme caractéristique est $X^2 - 2\alpha X + \alpha^2 = (X - \alpha)^2$. Un théorème du cours nous dit alors qu'il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; u_n = (\lambda + \mu n)\alpha^n.$$

- Autrement dit,

$$\boxed{\text{une base de } \ker(\mathsf{S} - \alpha\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}})^2 \text{ est } \Big((\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}, (n\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}\Big).}$$

21. Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Donner une base de $\ker(\mathsf{S} - \alpha \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}})^p$.
On attend une démonstration.

- Pour $i \in [\![0, p-1]\!]$, on note $P_i \coloneqq X^i$. On va montrer que
$$\Big(P_i(\bullet) \times \alpha^\bullet\Big)_{0 \leqslant i \leqslant p-1}$$
est une base de $\ker(\mathsf{S} - \alpha \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}})^p$. Pour alléger les calculs, on note $f \coloneqq \mathsf{S} - \alpha \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}}$.
- Commençons par une remarque préliminaire. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Alors, d'après la question **8.** (a), on a
$$\begin{aligned} f(P(\bullet) \times \alpha^\bullet) &= (\mathsf{S} - \alpha \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}})(P(\bullet) \times \alpha^\bullet) \\ &= \mathsf{S}(P(\bullet) \times \alpha^\bullet) - \alpha \cdot P(\bullet) \times \alpha^\bullet \\ &= \alpha \cdot T(P)(\bullet) \times \alpha^\bullet - \alpha \cdot P(\bullet) \times \alpha^\bullet \\ &= \alpha \cdot (T(P) - P)(\bullet) \times \alpha^\bullet \\ &= \alpha \cdot T_{1,-1}(P)(\bullet) \times \alpha^\bullet. \end{aligned}$$
Notons $\Delta \coloneqq T_{1,-1}$. Par récurrence immédiate, on a
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^k(P(\bullet) \times \alpha^\bullet) = \alpha^k \cdot \Delta^k(P)(\bullet) \times \alpha^\bullet.$$
- Or, d'après la question **5.** (b), on a $\deg \Delta(P) \leqslant \deg(P) - 1$. Donc,
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \deg \Delta^k(P) \leqslant \deg(P) - k.$$
- Fixons $i \in [\![0, p-1]\!]$. En particulier, on a $\deg \Delta^p(P_i) \leqslant i - p < 0$. Donc, $\Delta^p(P_i) = 0_{\mathbb{C}[X]}$. Donc,
$$f^p(P_i(\bullet) \times \alpha^\bullet) = \Delta^p(P_i)(\bullet) \times \alpha^\bullet = 0_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}}.$$
- Ainsi, on a $\forall i \in [\![0, p-1]\!],\ P_i(\bullet) \times \alpha^\bullet \in \ker(\mathsf{S} - \alpha \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}})^p$. Comme la famille des $P_i(\bullet) \times \alpha^\bullet$ est libre d'après la question **16.**, on en déduit que
$$\dim \ker(\mathsf{S} - \alpha \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}})^p \geqslant p.$$
Or, d'après la question **18.**, on a aussi $\dim \ker(\mathsf{S} - \alpha \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}})^p \leqslant p$. Donc,
$$\dim \ker(\mathsf{S} - \alpha \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}})^p = p.$$
- Ainsi, la famille $\Big(P_i(\bullet) \times \alpha^\bullet\Big)_{0 \leqslant i \leqslant p-1}$ est une famille libre de $\ker(\mathsf{S} - \alpha \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}})^p$ de « bonne taille ». Donc,
$$\boxed{\Big(P_i(\bullet) \times \alpha^\bullet\Big)_{0 \leqslant i \leqslant p-1} \text{ est une base de } \ker(\mathsf{S} - \alpha \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}})^p.}$$

22. Structure des suites définies par récurrence.

On écrit
$$P = \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{p_k}.$$
où $r \in \mathbb{N}^*$ et où $\forall k \in [\![1, r]\!]$, $\alpha_k \in \mathbb{C}$ et $p_k \in \mathbb{N}^*$.

On admet que
$$\mathsf{S}^p - \sum_{i=1}^{p-1} a_i \mathsf{S}^i = \prod_{k=1}^{r} (\mathsf{S} - \alpha_k \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}})^{p_k}.$$

On suppose que $\forall k \in [\![1, r]\!]$, $\alpha_k \neq 0$.

(a) Donner une base de E.

- Dans cette question, pour $i \in \mathbb{N}$, on note $P_i := X^i$.
- Soit $k \in [\![1, r]\!]$. Soit $i \in [\![0, p_k - 1]\!]$. On pose $u := P_i(\bullet) \times \alpha_k^{\bullet}$. Comme les $T_{\alpha,\beta}$ commutent, on a
$$\begin{aligned} P(\mathsf{S})(u) &= \prod_{\ell=1}^{r} (\mathsf{S} - \alpha_\ell \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}})^{p_\ell}(u) \\ &= \left(\prod_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant r \\ \ell \neq k}} (\mathsf{S} - \alpha_\ell \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}})^{p_\ell} \right) \circ (\mathsf{S} - \alpha_k \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}})^{p_k}(u). \end{aligned}$$
Comme $(\mathsf{S} - \alpha_k \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}})^{p_k}(u) = 0_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}}$ d'après la question précédente (c'est ici qu'on utilise le fait que $\alpha_k \neq 0$), on a
$$P(\mathsf{S})(u) = 0_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}}.$$
Ainsi, $u \in E$.
- Ainsi, la famille
$$\boxed{\left(P_i(\bullet) \times \alpha_k^{\bullet}\right)_{\substack{(i,k) \in \mathbb{N} \times [\![1,p]\!] \\ \text{tel que } i \leqslant p_k - 1}}}$$
est une famille de E. D'après la question **16.**, elle est libre. Comme elle est de taille p, on a $\dim E \geqslant p$. Or, d'après la question **18.**, on a $\dim E \leqslant p$. Donc, cette famille libre de « bonne taille » est une base de E.

(b) En déduire que $E \subset \mathrm{PG}(\mathbb{C})$.

On a trouvé une base de E qui est formée de suites polygéométriques. Donc, $\boxed{E \subset \mathrm{PG}(\mathbb{C})}$.

Partie V – Suites périodiques.

23. (a) Montrer que $\mathrm{Per}_p(\mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

- On peut le démontrer « à la main ».
- On peut aussi remarquer qu'une suite u est p-périodique si, et seulement si, $\mathsf{S}^p(u) = u$. Ainsi, on a
$$\mathrm{Per}_p(\mathbb{C}) = \ker(\mathsf{S}^p - \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}}).$$
- Donc, $\boxed{\mathrm{Per}_p(\mathbb{C}) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{C}^{\mathbb{N}}.}$

(b) Montrer que $\mathrm{Per}_p(\mathbb{C})$ est de dimension finie.

- Là aussi, on peut le démontrer « à la main » en exhibant une base (ce qu'on fera dans la question suivante).
- On peut aussi remarquer que l'application qui à une suite p-périodique u associe ses p premiers termes est linéaire et injective.
- Sinon, on peut invoquer le résultat de la question **18.**. Redisons en effet qu'une suite p-périodique est en particulier une « suite récurrente d'ordre p ». On obtient en plus que $\dim \mathrm{Per}_p(\mathbb{C}) \leqslant p$.

(c) Donner une base de $\mathrm{Per}_p(\mathbb{C})$.

- On considère la suite $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ définie par
$$u_n \coloneqq \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est un multiple de } p \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
pour $n \in \mathbb{N}$. Cette suite est p-périodique.
- Pour $i \in [\![0, p-1]\!]$, on pose $u(i) \coloneqq \mathsf{S}^i(u)$; c'est aussi une suite p-périodique.
- La famille $\big(u(0), u(1), \dots, u(p-1)\big)$ est libre. En effet, parmi ces suites, seule $u(i)$ a un terme d'indice i non-nul.
- Comme on sait que $\dim \mathrm{Per}_p(\mathbb{C}) \leqslant p$, on en déduit que $\dim \mathrm{Per}_p(\mathbb{C}) = p$ et que
$$\boxed{\big(u(0), u(1), \dots, u(p-1)\big) \text{ est une base de } \mathrm{Per}_p(\mathbb{C}).}$$

24. Montrer que $\mathrm{Per}_p(\mathbb{C}) \subset \mathrm{PG}(\mathbb{C})$.

On a déjà remarqué que $\mathrm{Per}_p(\mathbb{C})$ est l'ensemble des suites vérifiant la relation de récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+p} = u_n.$$
Les résultats de la partie IV s'appliquent donc. En particulier, d'après la question **22.** (b), on a bien $\boxed{\mathrm{Per}_p(\mathbb{C}) \subset \mathrm{PG}(\mathbb{C}).}$

25. On considère la suite u définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que $u = \lambda \cdot \alpha^\bullet + \mu \cdot \beta^\bullet$.

- On vérifie que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{(-1)^n + 1}{2}$.
- On a donc

$$\boxed{u = \frac{1}{2} \cdot (-1)^\bullet + \frac{1}{2} \cdot 1^\bullet.}$$

26. On considère la suite u définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est un multiple de } p \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer $q \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_q) \in (\mathbb{C}^*)^q$ et $(P_1, \ldots, P_q) \in \mathbb{C}[X]^q$ tels que

$$u = \sum_{i=1}^{q} P_i(\bullet) \times \alpha_i^\bullet.$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $r \in [\![0, p-1]\!]$ le reste de la division euclidienne de n par p et on écrit $n = pq + r$, où $q \in \mathbb{N}$.
- On suppose $r \neq 0$. On calcule

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p-1} \left(e^{2ik\pi/p}\right)^n &= \sum_{k=0}^{p-1} \left(e^{2ik\pi/p}\right)^{pq+r} = \sum_{k=0}^{p-1} \underbrace{e^{2ikq\pi}}_{=1} \left(e^{2ik\pi/p}\right)^r \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} \left(e^{2ir\pi/p}\right)^k \\
&= \frac{1 - \left(e^{2ir\pi/p}\right)^p}{1 - e^{2ir\pi/p}} \qquad \left(\text{car } e^{2ir\pi/p} \neq 1, \text{ car } r \in [\![1, p-1]\!]\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

- Au contraire, si $r = 0$, on a

$$\sum_{k=0}^{p-1} \left(e^{2ik\pi/p}\right)^n = \sum_{k=0}^{p-1} 1^k = p.$$

- Ainsi, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{p} \cdot \left(e^{2ik\pi/p}\right)^n = u_n$$

  et donc

$$\boxed{u = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{p} \cdot \left(e^{2ik\pi/p}\right)^\bullet.}$$

Partie VI – Espaces de dimension finie stables par S.

Soit E un sous-espace de dimension finie de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ stable par S.

27. On note S' la restriction de S à E.
Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $(\mu_0, \ldots, \mu_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$ tels que

$$\mathsf{S}'^p = \sum_{i=0}^{p-1} \mu_i \mathsf{S}'^i.$$

On pose $m \coloneqq \dim E$. On sait que $\dim \mathrm{L}(E) = m^2$. On considère la famille

$$\left(\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}}, \mathsf{S}', \mathsf{S}'^2, \ldots, \mathsf{S}'^{m^2}\right).$$

C'est une famille à $m^2 + 1$ éléments dans un espace de dimension m^2. Donc elle est liée. Fixons donc $(\lambda_i)_{0 \leqslant i \leqslant m^2} \in \mathbb{C}^{m^2+1}$ une famille non nulle telle que

$$\sum_{i=0}^{m^2} \lambda_i \mathsf{S}'^i = 0_{\mathrm{L}(E)}.$$

Soit $p \in [\![0, m^2]\!]$ le plus grand indice k tel que $\lambda_k \neq 0$. On a donc

$$\lambda_p \mathsf{S}'^p = -\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i \mathsf{S}'^i.$$

Comme $\lambda_p \neq 0$, on a

$$\mathsf{S}'^p = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{-\lambda_i}{\lambda_p} \mathsf{S}'^i.$$

En posant $\mu_i \coloneqq -\dfrac{\lambda_i}{\lambda_p}$ pour $i \in [\![0, p-1]\!]$, $\boxed{\text{on a trouvé une famille qui répond à la question.}}$

28. Montrer qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall u \in E,\ \ \mathsf{S}^{N_0}(u) \in \mathrm{PG}(\mathbb{C}).$$

- On fixe $p \in \mathbb{N}^*$ et $(\mu_i)_i \in \mathbb{C}^p$ tels que

$$\mathsf{S'}^p = \sum_{i=0}^{p-1} \mu_i \mathsf{S'}^i.$$

On note $P := X^p - \sum_{i=0}^{p-1} \mu_i X^i$ et on écrit

$$P = \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{p_k} X^{N_0}.$$

où $r \in \mathbb{N}$, $\forall k \in [\![1, r]\!], \alpha_k \in \mathbb{C}^*$ et $p_k \in \mathbb{N}^*$ et $N_0 \in \mathbb{N}$ et on pose

$$Q := \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{p_k}.$$

- On a vu dans la question **24.** que $\ker Q(\mathsf{S}) \subset \mathrm{PG}(\mathbb{C})$.
- Soit $u \in E$. On a

$$\begin{aligned} & \mathsf{S'}^p(u) = \sum_{i=0}^{p-1} \mu_i \mathsf{S'}^i(u) \\ \text{donc} \quad & P(\mathsf{S})(u) = 0_{\mathbb{C}^\mathbb{N}} \\ \text{donc} \quad & Q(\mathsf{S}) \circ \mathsf{S}^{N_0}(u) = 0_{\mathbb{C}^\mathbb{N}} \\ \text{donc} \quad & \mathsf{S}^{N_0}(u) \in \ker Q(\mathsf{S}) \\ \text{donc} \quad & \mathsf{S}^{N_0}(u) \in \mathrm{PG}(\mathbb{C}). \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien

$$\boxed{\forall u \in E,\ \ \mathsf{S}^{N_0}(u) \in \mathrm{PG}(\mathbb{C}).}$$