DS 7

Corrigé

Autour de ℓ^2

Partie I – Dualités.

1. Montrer que E' est un sous-espace vectoriel de E^*.

- Déjà, 0_{E^*} vérifie bien la condition pour être dans E' (avec $C \coloneqq 0$). Donc $E' \neq \varnothing$.
- Soient $f, g \in E'$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Fixons C_f et C_g dans $\mathbb{R}_+$ tels que

$$\forall x \in E, \ \Big(|f(x)| \leqslant C_f \|x\| \ \text{ et } \ |g(x)| \leqslant C_g \|x\|\Big)$$

et posons $C \coloneqq C_f + |\lambda|\, C_g$. On a bien $C \geqslant 0$.
- Soit $x \in E$. On a

$$\begin{aligned} |(f+\lambda g)(x)| &= |f(x) + \lambda g(x)| \\ &\leqslant |f(x)| + |\lambda| \cdot |g(x)| \\ &\leqslant C_f \|x\| + |\lambda| \cdot C_g \|x\| = C \|x\|. \end{aligned}$$

- Ainsi, on a $f + \lambda g \in E'$.

Donc, $\boxed{E' \text{ est un sous-espace vectoriel de } E^*.}$

2. Soit $a \in E$. Montrer que $q_a \in E'$.

C'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz : si $x \in E$, on a

$$|q_a(x)| = \Big| (x \mid a) \Big| \leqslant \|x\| \times \|a\| = \|a\| \times \|x\|.$$

Ainsi, on a bien $\boxed{q_a \in E'.}$

3. Montrer que

$$E \text{ de dimension finie} \implies E' = E^*.$$

On suppose que E est de dimension finie. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E. Soit $x \in E$ qu'on écrit

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

où $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \in \mathbb{R}$. D'après le cours, on sait que

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2.$$

En particulier, on a, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$${x_i}^2 \leqslant \|x\|^2 \qquad \text{et donc} \qquad |x_i| \leqslant \|x\|.$$

Maintenant, notons $C \coloneqq \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |f(e_i)|$. On a

$$\begin{aligned} |f(x)| = \left| \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) \right| &\leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, |f(e_i)| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} C \, |x_i| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} C \, \|x\| = nC \, \|x\|. \end{aligned}$$

Ainsi, $f \in E'$ et donc $\boxed{E' = E^*.}$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(e_1, \dots, e_n) \in E^n$.

(a) Montrer que

$$(e_1, \dots, e_n) \text{ base de } E \implies (q_{e_1}, \dots, q_{e_n}) \text{ base de } E'.$$

On suppose que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E.

- On sait que E^* est de dimension finie et que $\dim E^* = \dim E \times \dim \mathbb{R} = \dim E$. Donc, E' est de dimension finie et $\dim E' = n$. Il suffit donc de montrer que la famille $(q_{e_1}, \dots, q_{e_n})$ est libre.

- Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i q_{e_i} = 0_{E^*}$. On pose $x \coloneqq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j$. On calcule

$$\begin{aligned} 0 = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i q_{e_i}\right)(x) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i q_{e_i}(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \,(x \mid e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (x \mid \lambda_i e_i) \\ &= \left(x \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) \\ &= (x \mid x) = \|x\|^2 . \end{aligned}$$

- Donc $x = 0_E$. Comme $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base, on a $\forall i,\ \lambda_i = 0$.
- Ainsi, $(q_{e_1}, \ldots, q_{e_n})$ est libre et est donc une base de E'.

On a bien montré que $\boxed{(e_1, \ldots, e_n) \text{ base de } E \implies (q_{e_1}, \ldots, q_{e_n}) \text{ base de } E'.}$

(b) On suppose que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E.
Soit $f \in \mathrm{L}(E)$. On note

$$f^* : \begin{cases} E^* \longrightarrow E^* \\ \varphi \longmapsto \varphi \circ f. \end{cases}$$

Montrer que

$$\mathrm{Mat}_{\left(q_{e_1}, \ldots, q_{e_n}\right)}(f^*) = \mathrm{Mat}_{(e_1, \ldots, e_n)}(f)^{\mathsf{T}}.$$

On écrit $\mathrm{Mat}_{(e_1,\ldots,e_n)}(f) = (a_{i,j})_{i,j}$, où les $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ de sorte que

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ \ f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \cdot e_i.$$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On veut montrer que

$$f^*(q_{e_i}) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot q_{e_j}.$$

Cette égalité a lieu dans E^*. Pour la montrer, il suffit donc de vérifier qu'elle est vraie sur la base $(e_\ell)_{1 \leqslant \ell \leqslant n}$. Soit $\ell \in [\![1, n]\!]$. On calcule

$$\begin{aligned} f^*(q_{e_i})(e_\ell) &= q_{e_i}(f(e_\ell)) \\ &= (f(e_\ell) \mid e_i) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{k,\ell} \cdot e_k \,\middle|\, e_i\right) \\ &= (a_{i,\ell} \cdot e_i \mid e_i) && \text{(car la base des } e_k \text{ est orthonormale)} \\ &= a_{i,\ell} \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot q_{e_j}\right)(e_\ell) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\,(e_\ell \,|\, e_j) = a_{i,\ell},$$

pour la même raison.

On a donc bien $f^*(q_{e_i}) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot q_{e_j}$, et ce pour tout i, ce qui signifie que

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\left(q_{e_1},\dots,q_{e_n}\right)}\,(f^*) = \mathrm{Mat}_{(e_1,\dots,e_n)}\,(f)^{\mathsf{T}}.}$$

5. On note

$$\Phi_E : \begin{cases} E \longrightarrow E' \\ a \longmapsto q_a. \end{cases}$$

Montrer que Φ_E est injective.

On montre que $\ker \Phi_E = \{0_E\}$. Soit $a \in E$ tel que $\Phi_E(a) = 0_{E'}$. On a donc

$$\forall x \in E,\ (x \,|\, a) = 0.$$

En particulier, on a $q_a(a) = \|a\|^2 = 0$ et donc $a = 0_E$. Ainsi, $\boxed{\Phi_E \text{ est injective.}}$

Partie II – Premières propriétés de ℓ^2.

6. Trouver une suite $a \in \ell^2 \setminus \ell^1$.

Soit $\alpha > 0$. On considère la suite $(a_n)_n$ définie par

$$a_0 \coloneqq 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1,\ \ a_n = \frac{1}{n^\alpha}.$$

D'après le critère de Riemann, on sait que

$$(a_n)_n \in \ell^1 \iff \sum_n \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1$$

$$(a_n)_n \in \ell^2 \iff \sum_n \frac{1}{n^{2\alpha}} \text{ converge} \iff 2\alpha > 1 \iff \alpha > \frac{1}{2}.$$

Par conséquent (pour $\alpha = 1$), $\boxed{\text{la suite } \left(0, 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right) \text{ est dans } \ell^2 \text{ mais pas dans } \ell^1.}$

7. Montrer que $\ell^1 \subset \ell^2$.

Soit $(u_n)_n \in \ell^1$.

- Comme la série $\sum_n |u_n|$ converge, on a $|u_n| \longrightarrow 0$.
- Donc, on a $|u_n| \leqslant 1$ APCR et donc ${u_n}^2 \leqslant |u_n|$ APCR.
- Donc, ${u_n}^2 = \mathrm{O}(|u_n|)$.
- Comme la série $\sum_n u_n$ est absolument convergente, il en est de même pour $\sum_n {u_n}^2$.

Ainsi, $(u_n)_n \in \ell^2$ et on a bien $\boxed{\ell^1 \subset \ell^2.}$

8. **Une propriété de transfert.**
Soient $a, b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrer que

$$\left.\begin{array}{l} a \in \ell^2 \\ b \in \ell^2 \end{array}\right\} \implies a \times b \in \ell^1.$$

On passera par les sommes partielles et on pourra utiliser des inégalités classiques.

On suppose que $a, b \in \ell^2$. Notons

$$S_a \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} {a_n}^2 \qquad \text{et} \qquad S_b \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} {b_n}^2.$$

Soit $N \in \mathbb{N}$. On a $\sum_{n=0}^{N} {a_n}^2 \leqslant S_a$ et de même pour b. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\left(\sum_{k=0}^{N} |a_k|\,|b_k|\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=0}^{N} {a_k}^2\right) \times \left(\sum_{k=0}^{N} {b_k}^2\right) \leqslant S_a \times S_b.$$

Donc, on a $\sum_{k=0}^{N} |a_k|\,|b_k| \leqslant \sqrt{S_a S_b}$. Ainsi, les sommes partielles de la série $\sum_n |a_n b_n|$ sont majorées. Par conséquent, la série $\sum_n |a_n b_n|$ converge, $a \times b \in \ell^1$ et donc

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} a \in \ell^2 \\ b \in \ell^2 \end{array}\right\} \implies a \times b \in \ell^1.}$$

9. En déduire que ℓ^2 est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Soient $a, b \in \ell^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Il est clair que λa est encore dans ℓ^2.
- Il nous reste donc à montrer que $a + b \in \ell^2$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$(a_n + b_n)^2 = {a_n}^2 + 2 a_n b_n + {b_n}^2 \leqslant {a_n}^2 + 2\,|a_n b_n| + {b_n}^2.$$

  Comme les séries $\sum_n {a_n}^2$, $\sum_n {b_n}^2$ et $\sum_n |a_n b_n|$ sont convergentes, par majoration, il en est de même pour la série à termes positifs $\sum_n (a_n + b_n)^2$.

- Ainsi, $a + b \in \ell^2$.

Comme de plus $\ell^2 \neq \varnothing$ (la suite nulle est dans ℓ^2), en tant que sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,

$$\boxed{\ell^2 \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel.}}$$

10. Si $a, b \in \ell^2$, on note

$$(a \,|\, b) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n.$$

Justifier cette définition.

Soient $a, b \in \ell^2$. Comme $a \times b \in \ell^1$ (d'après la question **8.**), la série $\sum_n a_n b_n$ est absolument convergente donc convergente. Ainsi, $\boxed{\text{la somme } \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n \text{ est bien définie.}}$

Partie III – Un lemme sur les séries divergentes.

11. Montrer que $\sum_n \frac{u_n}{(S_n)^2}$ converge.

On pourra utiliser que $(S_n)^2 \geqslant S_n S_{n-1}$ *et exprimer* u_n *en fonction de* S_n.

On suppose que $\sum_n u_n$ diverge. Soit $N \geqslant 1$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} \frac{u_n}{(S_n)^2} &= \frac{u_0}{(S_0)^2} + \sum_{n=1}^{N} \frac{u_n}{(S_n)^2} \\
&\leqslant \frac{1}{u_0} + \sum_{n=1}^{N} \frac{u_n}{S_n S_{n-1}}
\end{aligned}$$

car $\forall n \geqslant 1$, $(S_n)^2 \geqslant S_n S_{n-1}$. Or, si $n \geqslant 1$, on a

$$\frac{u_n}{S_n S_{n-1}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n S_{n-1}} = \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}.$$

Donc,

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{u_n}{(S_n)^2} \leqslant \frac{1}{u_0} + \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n} \right) = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{S_0} - \frac{1}{S_N} \leqslant \frac{1}{u_0} + \frac{1}{S_0}.$$

Comme $\sum_n \frac{u_n}{(S_n)^2}$ est une série à termes positifs, elle est convergente. On a bien

$$\boxed{\sum_n u_n \text{ diverge} \implies \sum_n \frac{u_n}{(S_n)^2} \text{ converge.}}$$

12. On veut montrer que $\sum_n \frac{u_n}{S_n}$ diverge.

(a) On suppose que $\frac{u_n}{S_n} \not\longrightarrow 0$. Conclure.

Dans ce cas, $\boxed{\text{la série } \sum_n \frac{u_n}{S_n} \text{ est grossièrement divergente.}}$

(b) On suppose que $\frac{u_n}{S_n} \longrightarrow 0$.

(i) Montrer que la série $\sum_n \ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right)$ diverge.

Soit $N \in \mathbb{N}$. On calcule

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} \ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right) &= \sum_{n=1}^{N} \ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right) && \text{(car } u_0 = S_0\text{)} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \ln\left(\frac{S_n - u_n}{S_n}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \ln\left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \ln(S_{n-1}) - \ln(S_n) \\
&= \ln(S_0) - \ln(S_N) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} -\infty
\end{aligned}$$

car $S_N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Par conséquent,

$$\boxed{\text{la série } \sum_n \ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right) \text{ diverge.}}$$

(ii) Conclure.

Comme on a supposé $\frac{u_n}{S_n} \longrightarrow 0$, on a

$$\ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right) \sim -\frac{u_n}{S_n} \qquad \text{quand } n \to \infty.$$

Comme ces termes sont de signe constant, le théorème de comparaison des séries à terme équivalents s'applique : on a

$$\sum_n \ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right) \text{ diverge} \iff \sum_n -\frac{u_n}{S_n} \text{ diverge} \iff \sum_n \frac{u_n}{S_n} \text{ diverge.}$$

Ainsi, on a

$$\boxed{\text{la série } \sum_n \frac{u_n}{S_n} \text{ diverge.}}$$

Partie IV – Trois belles propriétés de ℓ^2.

13. Réciproque de la propriété de transfert.

(a) Soit $a \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. Montrer que

$$\left(\forall b \in \ell^2,\ a \times b \in \ell^1\right) \implies a \in \ell^2.$$

- On suppose que
$$\forall b \in \ell^2,\ a \times b \in \ell^1. \qquad (*)$$
Montrons que $a \in \ell^2$.
- On raisonne par l'absurde et on suppose que $a \notin \ell^2$. Ainsi, la série $\sum_n {a_n}^2$ est divergente.
- On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n \coloneqq \sum_{k=0}^{n} {a_k}^2$.
- Comme on a ${a_n}^2 > 0$ pour $n \in \mathbb{N}$, la question **11.** s'applique. Ainsi, la série $\sum_n \frac{{a_n}^2}{(S_n)^2}$ converge.
- Donc, la suite $\left(\frac{a_n}{S_n}\right)_n$ est dans ℓ^2. Donc, d'après $(*)$, la suite $\left(a_n \times \frac{a_n}{S_n}\right)_n$ est dans ℓ^1.
- Autrement dit, la série $\sum_n \frac{{a_n}^2}{S_n}$ converge, ce qui contredit la question **12.**.

Ainsi, on a bien $\boxed{\left(\forall b \in \ell^2,\ a \times b \in \ell^1\right) \implies a \in \ell^2.}$

(b) Montrer que le résultat est encore valable si $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- On suppose que la suite a vérifie $\forall b \in \ell^2,\ a \times b \in \ell^1$. Montrons que $a \in \ell^2$.
- On introduit les suites u et c définies par
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = \frac{1}{n+1} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \ c_n = |a_n| + \frac{1}{n+1}.$$
- Comme la suite u est dans ℓ^2, on a
$$c \in \ell^2 \iff |a| + c \in \ell^2 \iff |a| \in \ell^2 \iff a \in \ell^2$$
(on laisse le lecteur le démontrer s'il en ressent le besoin). On va donc montrer que $c \in \ell^2$.
- Montrons que la suite c vérifie
$$\forall b \in \ell^2,\ c \times b \in \ell^1.$$
Soit $b \in \ell^2$. On a $a \times b \in \ell^1$, donc $|a| \times b \in \ell^1$. De plus, d'après la propriété de transfert rappelée en préambule et démontrée dans la question **8.**, on a $u \times b \in \ell^1$. Comme ℓ^1 est un espace vectoriel, on a $(|a| \times b + u \times b) \in \ell^1$, *ie* $c \times b \in \ell^1$, ce qu'on voulait démontrer.
- D'après la question précédente, on a donc $c \in \ell^2$; donc $\boxed{a \in \ell^2.}$

14. L'espace ℓ^2 n'a pas de borne supérieure.

Dans cette question, on veut montrer qu'il n'existe pas de suite $(M_n)_n$ *telle que*

$$\forall u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad \Big(u \in \ell^2 \iff u_n = \mathrm{o}(M_n) \text{ quand } n \to \infty\Big).$$

On suppose l'existence d'une telle suite $(M_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, qu'on fixe.

En utilisant la question **13.** (b), aboutir à une contradiction et conclure.

On va montrer que

$$\forall b \in \ell^2, \ (b_n \times M_n)_n \in \ell^1.$$

Soit $b \in \ell^2$. On a donc $b_n = \mathrm{o}(M_n)$. Donc, par propriété des relations de comparaison, on a

$$\sqrt{|b_n|} = \mathrm{o}\Big(\sqrt{|M_n|}\Big).$$

Donc, en multipliant des deux côtés par $\sqrt{|M_n|}$, on a

$$\sqrt{|b_n|\,|M_n|} = \mathrm{o}(|M_n|) \quad ie \quad \sqrt{|b_n \times M_n|} = \mathrm{o}(M_n).$$

Donc, la suite $\Big(\sqrt{|b_n \times M_n|}\Big)_n$ est dans ℓ^2. Donc, $(|b_n \times M_n|)_n \in \ell^1$. Donc, $(b_n \times M_n)_n \in \ell^1$.
Donc, on a bien prouvé

$$\forall b \in \ell^2, \ (b_n \times M_n)_n \in \ell^1.$$

Donc, d'après la question **13.** (b) : $(M_n)_n \in \ell^2$. Donc, $M_n = \mathrm{o}(M_n)$, ce qui est absurde.
Ainsi,

$$\boxed{\text{il n'existe pas de suite } (M_n)_n \text{ telle que } u \in \ell^2 \iff u_n = \mathrm{o}(M_n)}$$

pour toute suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

15. L'espace $(\ell^2)'$ est isomorphe à ℓ^2.

Montrer que

$$\Phi : \begin{cases} \ell^2 \longrightarrow (\ell^2)' \\ a \longmapsto q_a \end{cases}$$

est un isomorphisme.

- Compte tenu de la question **5.**, il nous reste à prouver que Φ est surjective.
- Soit $\varphi \in (\ell^2)'$. On cherche $a \in \ell^2$ tel que $\Phi(a) = \varphi$. On va raisonner par analyse-synthèse.
- Fixons donc $a \in \ell^2$ tel que $\Phi(a) = \varphi$ *ie* telle que $q_a = \varphi$.
  Si $i \in \mathbb{N}$, notons $e_i := (\delta_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$ la suite dont tous les termes sont nuls sauf le terme d'indice i. On a bien $\forall n$, $e_n \in \ell^2$. Et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$q_a(e_n) = a_n.$$

  Ainsi, la suite $(a_n)_n$, si elle existe, est unique, ce qu'on savait déjà puisque Φ est injective.

- Passons à la synthèse. On considère la suite $(a_n)_n$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ a_n = \varphi(e_n).$$

Il nous faut montrer deux choses : que $(a_n)_n \in \ell^2$ et que $\varphi = \Phi(a)$.

- Avant tout, on peut remarquer que la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormale.
- On veut montrer que $(a_n)_n \in \ell^2$. Fixons $C \geqslant 0$ tel que

$$\forall x \in E, \ \ |\varphi(x)| \leqslant C \left\|x\right\|_2.$$

Soit $N \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
\left|\varphi\left(\sum_{n=0}^{N} a_n e_n\right)\right| &= \left|\sum_{n=0}^{N} a_n \varphi(e_n)\right| \\
&= \left|\sum_{n=0}^{N} {a_n}^2\right| \\
&= \sum_{n=0}^{N} {a_n}^2 \\
&\leqslant C \left\|\sum_{n=0}^{N} a_n e_n\right\|_2 . \qquad (*)
\end{aligned}$$

Or, on a

$$\left(\left\|\sum_{n=0}^{N} a_n e_n\right\|_2\right)^2 = \sum_{n=0}^{N} {a_n}^2$$

car la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormale. Donc, l'inégalite $(*)$ s'écrit aussi

$$\sum_{n=0}^{N} {a_n}^2 \leqslant C \sqrt{\sum_{n=0}^{N} {a_n}^2}.$$

Ainsi, on a

$$\sqrt{\sum_{n=0}^{N} {a_n}^2} \leqslant C \text{ et donc } \sum_{n=0}^{N} {a_n}^2 \leqslant C^2.$$

Ainsi, la série à termes positifs $\sum_n {a_n}^2$ est convergente : on a bien $(a_n)_n \in \ell^2$.

- Il nous reste à montrer que $q_a = \varphi$. Soit $(u_n)_n \in \ell^2$. Soit $f \in \left(\ell^2\right)'$; on fixe $C_f \geqslant 0$ tel que $\forall x \in E, |f(x)| \leqslant C_f \left\|x\right\|_2$. On va montrer que

$$f\left(\sum_{n=0}^{N} u_n e_n\right) \longrightarrow f(u) \quad \text{ quand } N \to \infty.$$

Cela permettra de conclure car on peut prendre $f \coloneqq q_a$ ou $f \coloneqq \varphi$ et que φ et q_a coïncident en les e_i et donc en les combinaisons linéaires des e_i.

On écrit

$$\begin{aligned}
\left|f(u) - f\left(\sum_{n=0}^{N} u_n e_n\right)\right| &= \left|f\left(u - \sum_{n=0}^{N} u_n e_n\right)\right| \\
&= \Big|f\Big((0, \dots, 0, u_{N+1}, u_{N+2}, \dots)\Big)\Big| \\
&\leqslant C_f \Big\|(0, \dots, 0, u_{N+1}, u_{N+2}, \dots)\Big\|_2 \\
&= C_f \sqrt{\sum_{n=N+1}^{\infty} {u_n}^2}.
\end{aligned}$$

Comme la série $\sum_n {u_n}^2$ converge, on sait que ses restes tendent vers 0 : on a

$$\sum_{n=N}^{\infty} {u_n}^2 \longrightarrow 0 \quad \text{quand } N \to \infty.$$

Ainsi, on a bien

$$f\left(\sum_{n=0}^{N} u_n e_n\right) \longrightarrow f(u) \quad \text{quand } N \to \infty,$$

$\boxed{\text{ce qui conclut la réponse.}}$

Partie V – Un critère pour être ℓ^2.

16. On suppose que

$$\exists \delta > 0 : \ \forall x \in [0, \delta[, \ f(x) \geqslant x.$$

Montrer que $u_n \not\longrightarrow 0$.

- Déjà, remarquons que la suite $(u_n)_n$ est à valeurs $\geqslant 0$.
- On fixe un $\delta > 0$ tel que $\forall x \in [0, \delta[, \ f(x) \geqslant x$.
- On raisonne par l'absurde et on suppose que $u_n \longrightarrow 0$. Fixons donc $N \in \mathbb{N}$ tel que

  $$\forall n \geqslant N, \ \ |u_n| < \delta.$$

  Plus précisément, on a $\forall n \geqslant N, \ 0 \leqslant u_n < \delta$.
- Soit $n \geqslant N$. On a $u_n \in [0, \delta[$ donc $f(u_n) \geqslant u_n$ *ie* $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- Donc, $\forall n \geqslant N$, $u_n \geqslant u_N$. Donc, par passage à la limite, on a $0 \geqslant u_N$. Donc $u_N = 0$.
- Or, on pourrait montrer par récurrence immédiate que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. C'est absurde.
- Ainsi, on a $\boxed{u_n \not\longrightarrow 0.}$

17. Le critère pour être ℓ^2.

Dans cette question, on suppose que

$$f(x) = x - Cx^\alpha + \mathrm{o}(x^\alpha) \text{ quand } x \to 0,$$

où $C \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha > 1$.

(a) Montrer que $C < 0 \implies u_n \not\to 0$.

On suppose que $C < 0$. Montrons que $\exists \delta > 0 : \forall x \in [0, \delta[, \; f(x) \geqslant x$.
On a $f(x) - x = -Cx^\alpha + \mathrm{o}(x^\alpha)$ quand $x \to 0$, donc

$$f(x) - x \sim -Cx^\alpha.$$

Or, $\forall x \geqslant 0$, $-Cx^\alpha \leqslant 0$.
De plus, on sait que deux fonctions équivalentes ont localement le même signe. Donc, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in [0, \delta[, \; f(x) - x \geqslant 0$. La question précédente permet de conclure : $\boxed{u_n \not\to 0.}$

(b) On suppose que $C > 0$ et $u_n \longrightarrow 0$.

(i) Montrer que ${u_n}^{1-\alpha} \sim C(\alpha - 1)n$.

On pourra utiliser le théorème de Cesàro.

Comme $u_n \longrightarrow 0$ par hypothèse, on peut remplacer x par u_n dans le développement asymptotique $f(x) = x - Cx^\alpha + \mathrm{o}(x^\alpha)$. On obtient

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n - C{u_n}^\alpha + \mathrm{o}({u_n}^\alpha) \\ &= u_n\Big(1 - C{u_n}^{\alpha-1} + \mathrm{o}\Big({u_n}^{\alpha-1}\Big)\Big) \end{aligned}$$

Donc, en passant à la puissance $1 - \alpha$:

$$\begin{aligned} {u_{n+1}}^{1-\alpha} &= {u_n}^{1-\alpha}\Big(1 - C{u_n}^{\alpha-1} + \mathrm{o}\Big({u_n}^{\alpha-1}\Big)\Big)^{1-\alpha} \\ &= {u_n}^{1-\alpha}\Big(1 - C(1-\alpha){u_n}^{\alpha-1} + \mathrm{o}\Big({u_n}^{\alpha-1}\Big)\Big) \end{aligned}$$

car $(1 + h + \mathrm{o}(h))^{1-\alpha} = 1 + (1-\alpha)h + \mathrm{o}(h)$ quand $h \to 0$.
Donc, on a

$$\begin{aligned} {u_{n+1}}^{1-\alpha} &= {u_n}^{1-\alpha} - C(1-\alpha) + \mathrm{o}(1) \\ \text{donc} \quad {u_{n+1}}^{1-\alpha} - {u_n}^{1-\alpha} &= C(\alpha-1) + \mathrm{o}(1) \\ \text{donc} \quad {u_{n+1}}^{1-\alpha} - {u_n}^{1-\alpha} &\longrightarrow C(\alpha-1). \end{aligned}$$

Donc, d'après le lemme de Cesàro, on a

$$\boxed{{u_n}^{1-\alpha} \sim C(\alpha-1)n.}$$

(ii) En déduire que

$$(u_n)_n \in \ell^2 \iff \alpha < 3.$$

D'après ce qui précède, on a

$$\begin{aligned} u_n &\sim (C(\alpha-1))^{\frac{1}{1-\alpha}} \times n^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ &\sim (C(\alpha-1))^{\frac{1}{1-\alpha}} \times \frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha-1}}}. \end{aligned}$$

Donc, on a

$${u_n}^2 \sim (C(\alpha-1))^{\frac{2}{1-\alpha}} \times \frac{1}{n^{\frac{2}{\alpha-1}}}.$$

Donc

$$\begin{aligned} (u_n)_n \in \ell^2 &\iff \frac{2}{\alpha-1} > 1 \\ &\iff 2 > \alpha - 1 \\ &\iff \boxed{\alpha < 3.} \end{aligned}$$

Partie VI – Application à une suite récurrente.

18. Montrer que f est $\mathscr{C}^\infty$.

Montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ que $f \in \mathscr{D}^n(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

- Pour $n = 1$: f est dérivable par hypothèse.
- Soit $n \geqslant 1$ tel que $f \in \mathscr{D}^n(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Montons que $f \in \mathscr{D}^{n+1}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Par opérations sur les fonctions dérivables n fois, la fonction

  $$t \longmapsto f(t)^2 - t + 1$$

  est aussi dérivable n fois. Donc, $f' \in \mathscr{D}^n(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Donc $f \in \mathscr{D}^{n+1}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Ainsi, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f \in \mathscr{D}^n(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}).$$

Donc, $\boxed{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}).}$

19. Montrer que $f \geqslant 0$ et que f est croissante sur $[0, 1]$.

Soit $t \in [0, 1]$. On a $1 - t \geqslant 0$ donc $f(t)^2 - t + 1 \geqslant 0$ donc $f'(t) \geqslant 0$. Ainsi,

$$\boxed{f \text{ est croissante sur } [0, 1].}$$

Comme par ailleurs $f(0) = 0$, on a $\boxed{f \geqslant 0 \text{ sur } [0, 1].}$

20. On veut montrer que $\forall x \in \,]0, 1]$, $f(x) < x$. On pose

$$A := \Big\{ x \in \,]0, 1] \;\Big|\; f(x) \geqslant x \Big\}.$$

On raisonne par l'absurde et on suppose $A \neq \varnothing$. On pose $a := \inf A$.

(a) Montrer que $a \in A$.

Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, on fixe une suite $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui tend vers a. On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) \geqslant a_n$. Comme f est continue en a, on a $f(a_n) \longrightarrow f(a)$. Par passage à la limite dans les inégalités larges, on a $f(a) \geqslant a$.
Ainsi, $\boxed{a \in A.}$

(b) Montrer que $a > 0$.

- Comme f est $\mathscr{C}^\infty$, la formule de Taylor-Young est valable.
- On a $f(0) = 0$. Comme f est solution de l'équation différentielle $y' = y^2 - t + 1$, on a $f'(0) = f(0)^2 - 0 + 1 = 1$. Enfin, si on dérive l'équation différentielle, comme f est $\mathscr{C}^\infty$, on obtient que f satisfait l'équation $y'' = 2yy' - 1$. Donc, on a $f''(0) = -1$.
- Donc, on a $f(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)$ quand $x \to 0$ et donc $f(x) - x \sim -\dfrac{x^2}{2}$.
- Deux fonctions équivalentes ayant localement le même signe stricte, il existe donc $\delta > 0$, qu'on fixe, tel que
$$\forall x \in]0, \delta[, \quad f(x) - x < 0.$$
- Ainsi, on a bien $\forall x \in A$, $x > \delta$. Donc $\boxed{a \geqslant \delta > 0.}$

(c) En utilisant le théorème des accroissements finis, aboutir à une contradiction.

- On a $a > 0$, $a \leqslant 1$ et $f(a) \geqslant a$. Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, d'après le théorème des accroissement finis, il existe $b \in]0, a[$ tel que
$$\frac{f(a) - f(0)}{a - 0} = f'(b).$$
- On a donc $f'(b) \geqslant 1$ et donc $f(b)^2 - b + 1 = f'(b) \geqslant 1$. Donc, on a $f(b)^2 \geqslant b$.
- Or, comme $b < a$, on a $f(b) < b < a \leqslant 1$. Comme de plus on a $f(b) \geqslant 0$, on a $f(b)^2 \leqslant f(b)$.
- Donc, on a $f(b) \geqslant b$, ce qui est absurde.
- Ainsi : $A = \varnothing$, *ie*
$$\boxed{\forall x \in]0, 1], \quad f(x) < x.}$$

21. On considère la suite $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par
$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

(a) Montrer que $(u_n)_n$ est bien définie.

On va montrer par récurrence que $(u_n)_n$ est bien définie et décroissante. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note
$$\mathscr{P}(n) := « \ 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1 \ ».$$

- Pour $n = 0$, on a $u_1 = f(u_0)$. Or, d'après ce qui précède, on a $f(1) < 1$. Donc, $u_1 \leqslant u_0$. Comme f est $\geqslant 0$ sur $[0, 1]$, on a bien $\mathscr{P}(0)$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. On a $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$. Comme on a vue que f est croissante sur $[0,1]$, on a immédiatement : $f(0) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$. Et comme $f(0) = 0$ et $f(1) \leqslant 1$, on a
$$0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$$
ie $\mathscr{P}(n+1)$.

On ainsi montré que $\boxed{(u_n)_n \text{ est bien définie, décroissante et } \geqslant 0.}$

(b) Montrer que $u_n \longrightarrow 0$ et $(u_n)_n \in \ell^2$.

D'après le théorème de la limite montone, $(u_n)_n$ converge vers une limite $\ell \in [0,1]$. Comme f est continue, cette limite ℓ est un point fixe de f. Or, on a vu que $\forall x \in]0,1]$, $f(x) < x$. Donc, $\ell = 0$. Donc, $\boxed{u_n \longrightarrow 0.}$

On peut alors appliquer le résulat du préambule, avec $C = \dfrac{1}{2}$ et $\alpha = 2$. En effet, on a vu plus haut que
$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\Big(x^2\Big) \text{ quand } x \to 0.$$
Donc $\boxed{(u_n)_n \in \ell^2.}$

Partie VII – Application à une intégrale imbriquée à l'infini.

22. Montrer que $(x_n)_n$ est décroissante.

- La suite $(x_n)_n$ est définie par
$$x_0 := 1 \quad \text{ et } \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \ x_{n+1} = \int_{-x_n}^{x_n} g(t)\,\mathrm{d}t.$$
Comme la fonction g est paire, on a
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ x_{n+1} = 2\int_0^{x_n} g(t)\,\mathrm{d}t.$$
Posons $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2\displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t. \end{cases}$$
Comme $g \geqslant 0$ et qu'on intègre « dans la bonne direction » si $x \geqslant 0$, la fonction f est $\geqslant 0$. De plus, la fonction f est croissante. En effet, si $0 \leqslant y \leqslant x$, alors $[0,y] \subset [0,x]$; comme $g \geqslant 0$, on a bien $f(x) \geqslant f(y)$.
- Ainsi, on sait (cela se montre par récurrence) que
$$x_1 \leqslant x_0 \implies (x_n)_n \text{ décroissante.}$$

- Soit $x \geqslant 0$. On calcule

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x e^{1-e^t-e^{-t}}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^x e^{1-e^t}\,\mathrm{d}t. && (\text{car } \forall t,\ \exp(-e^{-t}) \leqslant 1) \end{aligned}$$

  Or, on sait que si $t \in \mathbb{R}$, on a $e^t \geqslant 1+t$ et donc $(1-e^t) \leqslant -t$. Ainsi, on a

$$f(x) \leqslant \int_0^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1 - e^{-x}.$$

  Or, si $x > 0$, on a $(1-e^{-x}) < x$, pour des raisons similaires à ce qu'on vient de dire.
- On a donc montré que $\forall x > 0,\ f(x) < x$.
- En particulier, on a $x_1 = f(1) < 1 = x_0$. Ainsi, $\boxed{(x_n)_n \text{ est décroissante.}}$

23. Montrer que $x_n \longrightarrow 0$.

Comme par ailleurs, on a $f \geqslant 0$, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \geqslant 0$. D'après le théorème de la limite monotone : la suite $(x_n)_n$ est convergente ; comme f est continue, la limite de $(x_n)_n$ est un point fixe de f, qui est compris entre 0 et 1.
Or, on a $\forall x > 0,\ f(x) < x$. Ainsi, le seul point fixe de f est 0.
Donc, on a bien $\boxed{x_n \longrightarrow 0.}$

24. (a) Montrer que $(x_n)_n \notin \ell^2$.

- La fonction f, en tant que primitive d'une fonction $\mathscr{C}^\infty$ est $\mathscr{C}^\infty$.
- Soit $x \geqslant 0$. On calcule

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{1-\cosh(x)} \\ f''(x) &= -\sinh(x)e^{1-\cosh(x)} \\ f'''(x) &= \sinh^2(x)e^{1-\cosh(x)} - \cosh(x)e^{1-\cosh(x)} \end{aligned}$$

- On a donc

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = e^0 = 1, \quad f''(0) = 0 \quad \text{et} \quad f'''(0) = -1$$

  et donc, d'après la formule de Taylor-Young :

$$f(x) = x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right).$$

- On est donc dans le cas défini dans le préambule de la partie précédente, avec $C = \dfrac{1}{6}$ et $\alpha = 3$. Donc, $\boxed{(x_n)_n \notin \ell^2.}$

(b) Donner un équivalent de x_n.

La question **17.** (b) (i) donne ${x_n}^{1-\alpha} \sim C(\alpha - 1)n = \dfrac{n}{3}$. Donc,

$$\boxed{x_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}.}$$

FIN DU CORRIGÉ.