

DEVOIR LIBRE 1

Premiers exercices

À rendre pour le jeudi 7 septembre 2023

L'objectif de ce premier DL est de vous entraîner :

- à l'autonomie,
- à la prise d'initiatives mathématiques,
- à la recherche de questions difficiles.

N'oubliez pas que c'est en cherchant seul qu'on progresse le plus.

Je serai plus satisfait par le travail de quelqu'un qui a cherché seul le DL et ne traite pas certaines questions que par celui de quelqu'un qui traite plus de questions mais s'est fait aider pour certaines d'entre elles. Ceci est pour vous encourager à chercher seul les exercices que vous avez à faire, car il s'agit de la meilleure manière de progresser.

Au sein d'un même exercice, en général, les questions sont de plus en plus difficiles. De même, les différents exercices d'un devoir sont en général classés par difficulté croissante, même s'il peut arriver que ça ne soit pas vrai.

I. Trois équations

Soient $a, b > 0$. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x > 0$.

On pourra donner les solutions sans justification, en écrivant : « La solution de l'équation est ... ».

- a) $ax = b$
- b) $a^x = b$
- c) $x^a = b$

II. Une recherche d'exemple

Trouver deux nombres rationnels $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ compris strictement entre 0 et 10 et tels que

$$\alpha\beta = 99.$$

Dans votre solution, vous pourrez donner directement α et β (sous forme de fractions), sans expliquer comment vous les avez trouvés. Vous pouvez aussi expliquer comment vous les avez trouvés, si vous le souhaitez.

III. Calcul sous contrainte

Dans cet exercice, les réponses devront être données sous une forme aussi simple que possible, ne dépendant pas des inconnues.

1. Soient $x, y > 0$ tels que

$$2^x = 81 \quad \text{et} \quad 3^y = 64.$$

Calculer xy .

2. Soient $x, y > 0$ tels que

$$4^x = \sqrt{5^y} = 400.$$

Calculer $\frac{xy}{2x+y}$.

3. Soient $x, y, z > 0$ tels que

$$\frac{xy}{x+y} = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \frac{xz}{x+z} = \frac{1}{3}.$$

Calculer $\frac{1}{y} - \frac{1}{z}$.

4. Soient $x, y > 0$ tels que

$$\ln\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{\ln(x) + \ln(y)}{2}.$$

Calculer $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.

5. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que

$$(x + \sqrt{1+x^2})(y + \sqrt{1+y^2}) = 1.$$

Calculer $x + y$.

IV. Des sommes d'entiers

On considère 1000 nombres entiers relatifs vérifiant la propriété suivante : la somme de 99 nombres quelconques pris parmi ces nombres est toujours ≥ 0 . Montrez que la somme de tous ces nombres est ≥ 0 .

V. Calcul sous contrainte (suite)

1. Soit $x > 0$ tel que

$$x^x = 64.$$

Calculer $2^x + 2^{-x}$.

2. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned} a + b + c &= 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 2 \\ a^3 + b^3 + c^3 &= 3. \end{aligned}$$

Combien vaut $a^5 + b^5 + c^5$?

