

Quatrième composition de mathématiques

4 heures

- *Tout résultat ou raisonnement doit être clairement justifié, sauf mention du contraire.*
- *La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.*
- *La présentation de la copie sera prise en compte dans l'évaluation.*

Il vous est demandé :

- ▷ d'encadrer les résultats principaux ;
 - ▷ de souligner les résultats et arguments intermédiaires importants ;
 - ▷ de soigner votre écriture ;
 - ▷ de maintenir une marge dans vos copies et d'aérer vos copies ;
 - ▷ de numéroté vos copies.
- *Les documents, calculatrices et autres appareils électroniques sont interdits.*

Suites qui piétinent

Définitions et notations

- Dans ce problème, toutes les suites sont indexées par \mathbb{N}^* et on pose $E := \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$. Les suites pourront être notées u, v, w , etc.
Soit $u \in E$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

▷ Le terme d'indice n de u est noté u_n . Ainsi, on a $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

▷ On notera « $u \longrightarrow 0$ » l'assertion « $(u_n)_n$ tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$ ».

▷ De même, on notera « $u \longrightarrow +\infty$ » quand la suite $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$.

- Si $u \in E$, on note Δu la suite définie par

$$\forall n \geq 1, (\Delta u)_n = u_{n+1} - u_n.$$

- Soit $u \in E$.

On dit que u piétine lorsque $u_{n+1} - u_n \longrightarrow 0$.

On note E_p l'ensemble des suites qui piétinent.

- Soit φ un endomorphisme de E .

On rappelle que, pour $p \in \mathbb{N}$, on note φ^p le p -ième itéré de φ défini par

$$\begin{cases} \varphi^0 := \text{Id}_E \\ \varphi^p := \varphi \circ \varphi^{p-1} \end{cases} \quad \text{si } p \geq 1.$$

Toutes les parties du problème sont indépendantes.

Partie I – Généralités sur Δ

1. On rappelle que E est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

On considère l'application

$$\Delta : \begin{cases} E \longrightarrow E \\ u \longmapsto \Delta u \end{cases}.$$

Montrer que Δ est un endomorphisme de E .

2. (a) Montrer que Δ est surjectif.
(b) L'application Δ est-elle injective?

Partie II – Étude d'un exemple

Pour $p \in \mathbb{N}$, on note $B(p)$ l'élément de E défini par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, B(p)_n = \binom{n}{p}.$$

On fixe $p \in \mathbb{N}^*$.

3. (a) Calculer $B(p)_p$.

(b) Calculer $B(p)_1$.

4. (a) On cherche la limite éventuelle de $B(p)$.

(i) Montrer que

$$\forall n \geq p+1, \binom{n}{p} \geq n.$$

(ii) En déduire la limite de la suite $B(p)$.

(b) Donner un équivalent simple de $(B(p)_n)_n$ quand $n \rightarrow +\infty$.

5. Donner une expression simple de la suite $\Delta(B(p+1))$.

Partie III – Les itérés de Δ et un exemple

Pour $u \in E$, on note Tu la suite définie par

$$\forall n \geq 1, (Tu)_n = u_{n+1}$$

et on note T l'endomorphisme de E défini par $u \mapsto Tu$.

6. Soit $u \in E$.

(a) Soit n un entier naturel non nul. Donner une expression du terme d'indice n de $\Delta^2 u$, c'est-à-dire une expression de $(\Delta^2 u)_n$.

(b) Exprimer l'endomorphisme Δ à l'aide de T et Id_E .

(c) En déduire que pour $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\Delta^p u)_n = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} u_{n+k}.$$

7. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On note a la suite géométrique $a := (\alpha^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Soit $p \in \mathbb{N}$. Donner une expression simple de la suite $\Delta^p(a)$.

Partie IV – Piétinement : généralités et exemples

8. Montrer que E_p est un sous-espace vectoriel de E .

9. Soit $(u_n)_n \in E$. A-t-on

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ piétine } \implies (|u_n|)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ piétine ?}$$

10. Montrer que $(\ln(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ piétine.

11. Soit $u \in E$.

(a) Montrer que

$$u \text{ converge } \implies u \text{ piétine.}$$

(b) La réciproque est-elle vraie ?

12. (a) Montrer que $(\sqrt{n})_n$ piétine.

(b) Soit $a > 0$.

(i) Soit $(\varepsilon_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ telle que $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Montrer que

$$(1 + \varepsilon_n)^a - 1 \sim a \varepsilon_n.$$

On pourra utiliser un taux d'accroissement.

(ii) Montrer que

$$(n^a)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ piétine } \iff a < 1.$$

(c) Montrer que $(\sqrt[n]{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ piétine.

13. (a) Montrer que la suite $\left(\frac{n}{\ln(n)}\right)_{n \geq 2}$ piétine.

(b) Soit $a \in]0, 1[$. Entre les deux suites

$$(n^a)_{n \geq 1} \quad \text{et} \quad \left(\frac{n}{\ln(n)}\right)_{n \geq 2}$$

laquelle est négligeable devant l'autre ?

(c) Soit $a > 1$.

(i) Déterminer un équivalent simple de $\frac{n}{\ln^a(n+1)} - \frac{n}{\ln^a(n)}$.

(ii) La suite $\left(\frac{n}{\ln^a(n)}\right)_{n \geq 2}$ piétine-t-elle ?

14. Soit $(u_n)_n \in E$ telle que

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in \mathbb{R}_+^* \\ u_n \rightarrow +\infty \\ (u_n)_n \text{ piétine.} \end{cases}$$

(a) Montrer que $(\sqrt{u_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ piétine.

(b) Montrer que $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ piétine.

15. Soit $u \in E$.

(a) Montrer en exhibant un contre-exemple que l'implication

$$u \text{ piétine} \implies u_{n+1} \sim u_n$$

est fausse en général.

(b) Montrer que

$$\left. \begin{array}{l} u \text{ piétine} \\ u_n \longrightarrow +\infty \end{array} \right\} \implies u_{n+1} \sim u_n.$$

16. Soient $u, v \in E$ telles que $u_n \sim v_n$. A-t-on

$$u \text{ piétine} \implies v \text{ piétine} ?$$

Partie V – Vitesse de divergence des suites qui piétinent

17. **Théorème de Cesàro.** Soient $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n := \sum_{k=1}^n u_k.$$

(a) On suppose que $u_n \longrightarrow 0$.

(i) Soit $\varepsilon > 0$.

Montrer qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geq N_0, \quad \frac{\left| \sum_{k=1}^n u_k \right|}{n} \leq \frac{\sum_{k=1}^{N_0-1} |u_k|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

(ii) En déduire que $\left(\frac{S_n}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*} \longrightarrow 0$.

(b) En utilisant la question précédente, montrer le théorème de Cesàro :

$$u_n \longrightarrow \ell \implies \frac{S_n}{n} \longrightarrow \ell.$$

18. Soit $u \in E$.

(a) En utilisant le théorème de Cesàro, montrer que

$$u \text{ piétine} \implies u_n = o(n).$$

(b) A-t-on l'implication

$$u_n = o(n) \implies u \text{ piétine} ?$$

Partie VI – Une condition de piétinement dans le cas borné

Dans cette partie, u est un élément de E .

19. Montrer que

$$u \text{ bornée} \implies \Delta u \text{ bornée}.$$

20. Soit $C > 0$.

(a) Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $a \leq b$. On suppose que

$$\forall n \in \llbracket a, b \rrbracket, u_{n+1} - u_n \geq C.$$

Montrer que

$$u_{b+1} - u_a \geq (b - a + 1)C.$$

(b) On suppose que

$$\forall \ell \in \mathbb{N}^*, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \llbracket n_0, n_0 + \ell \rrbracket, u_{n+1} - u_n \geq C.$$

Montrer que u ne peut pas être bornée.

21. Soit $v \in E$.

Dans cette question, on suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq 0$.

On suppose que $v \not\rightarrow 0$ et $\Delta v \rightarrow 0$.

(a) Écrire sous forme d'expression quantifiée l'assertion $v \not\rightarrow 0$.

(b) Montrer que

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall N \in \mathbb{N}^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* : \left(v_{n_0} \geq \varepsilon_0 \text{ et } \forall n \geq n_0, |v_{n+1} - v_n| \leq \frac{\varepsilon_0}{N} \right).$$

(c) On fixe un tel $\varepsilon_0 > 0$.

Montrer que

$$\forall \ell \in \mathbb{N}^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* : \forall n \in \llbracket n_0, n_0 + \ell \rrbracket, v_n \geq \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

22. (a) On suppose que $\Delta^2 u \rightarrow 0$ et $\Delta u \not\rightarrow 0$. Montrer que u n'est pas bornée.

(b) On suppose u bornée. Montrer que

$$\Delta^2 u \rightarrow 0 \implies \Delta u \rightarrow 0.$$

23. On suppose u bornée. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\Delta u \rightarrow 0$

(ii) $\forall p \in \mathbb{N}^*, \Delta^p u \rightarrow 0$

(iii) $\exists p \in \mathbb{N}^* : \Delta^p u \rightarrow 0$.

