Principe fondamental de la dynamique

Prérequis et constantes utiles
Coordonnées polaires, Équations différentielles simples

Pour commencer

Entraînement 1.1 — Une relation algébrique.

La vitesse v (en régime permanent) d'un mobile vérifie l'équation

$$m_1(v - v_1) + m_2(v - v_2) = p.$$

Donner l'expression de v (en fonction de m_1, m_2, v_1, v_2 et p) . .

Entraînement 1.2 — Un système d'équations.

L'étude d'un problème de mécanique fait intervenir une force d'intensité inconnue F et un angle inconnu $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$. La seconde loi de Newton projetée sur deux axes aboutit au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} T + F \sin\alpha = mR\omega^2 \\ F \cos\alpha = mg \end{cases}$$

a) Déterminer F en fonction des données T, m, R, ω et g. . . .

b) Déterminer α en fonction des données T, m, R, ω et g. . . . .

Entraînement 1.3 — Une équation différentielle.

On suppose que la vitesse $v(t)$ d'un mobile vérifie l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv + a_0$$

et qu'elle vaut v_0 à l'instant t_0.

Donner l'expression de $v(t)$ . . . .

Entraînement 1.4 — Analyse dimensionnelle.

a) Quelle est la dimension de la quantité de mouvement ? ....

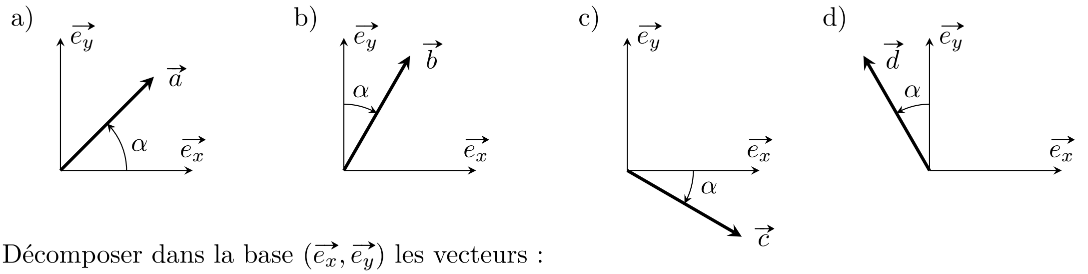
b) La constante de gravitation universelle vaut $6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}^3.\mathrm{kg}^{-1}.\mathrm{s}^{-2}$.

Quelle est la dimension de la force gravitationnelle (et donc des autres forces) ?

Décomposition de vecteurs

Entraînement 1.5 — Des projections.

On considère les vecteurs suivants :



Décomposer dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$ les vecteurs :

a) $\overrightarrow{a}$ ....

b) $\overrightarrow{b}$ ....

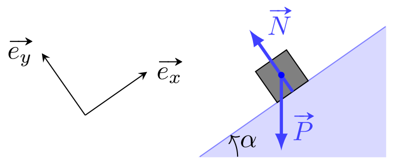
c) $\overrightarrow{c}$ ....

d) $\overrightarrow{d}$ ....

Entraînement 1.6 — Sur un plan incliné.

On considère la situation représentée ci-dessous.

Décomposer dans la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$ les vecteurs suivants.

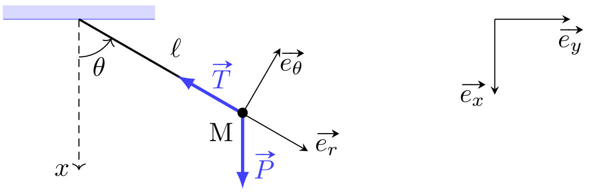


a) $\vec{P}$ ....

b) $\vec{N}$ ....

Entraînement 1.7 — Avec un pendule simple.

On considère la situation



Décomposer dans la base $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ les vecteurs suivants :

a) $\vec{P}$ ......

b) $\vec{T}$ ......

c) $\vec{P} + \vec{T}$.

Entraînement 1.8 — Avec un pendule simple (suite).

On se place dans la même situation que ci-dessus. Décomposer dans la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$:

a) $\vec{P}$ ......

b) $\vec{T}$ ......

c) $\vec{P} + \vec{T}$.

De l'accélération à la position (et *vice versa*)

Entraînement 1.9 — Du vecteur position au vecteur accélération.

On considère un point M en mouvement dont les coordonnées cartésiennes dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ sont, à chaque instant $x(t) = \dfrac{1}{2}a_0 t^2 + x_0$, $y(t) = -v_0 t$ et $z(t) = z_0$.

Donner les expressions du vecteur :

a) position ....

b) vitesse ....

c) accélération ....

Entraînement 1.10 — Du vecteur accélération au vecteur position.

On considère un point M de masse m en chute libre soumis à son poids $\overrightarrow{P} = mg\overrightarrow{e_z}$. Ce point M a été lancé avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{e_x}$ et une position initiale $\mathrm{M}_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Donner l'expression des vecteurs :

a) accélération ....

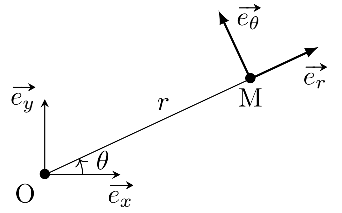
b) vitesse ....

c) position ....

Autour des coordonnées polaires

Dans ce paragraphe, on considère un point M repéré par la distance r et l'angle θ en coordonnées polaires ; la distance r et l'angle θ dépendent du temps t : le point M est mobile.

On représente la situation par le schéma ci-contre.



Entraînement 1.11 — Fondamental.

Décomposer dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$ les vecteurs :

a) $\overrightarrow{e_r}$ ....

b) $\overrightarrow{e_\theta}$ ....

Entraînement 1.12

Exprimer dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$ les vecteurs :

a) $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}t}$ ......

b) $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\theta}}{\mathrm{d}t}$ ......

Entraînement 1.13 — Deux dérivées à connaître.

Exprimer dans la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ les vecteurs :

a) $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}t}$ ......

b) $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\theta}}{\mathrm{d}t}$ ......

QCM **Entraînement 1.14 — Vecteur position en coordonnées polaires.**

Comment s'exprime le vecteur position $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ en coordonnées polaires ?

(a) $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\overrightarrow{e_r} + \theta\overrightarrow{e_\theta}$

(b) $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\overrightarrow{e_r} + \dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$

(c) $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\overrightarrow{e_r}$

(d) $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \theta\overrightarrow{e_\theta}$

....

Entraînement 1.15 — Accélération en coordonnées polaires.

Exprimer en coordonnées polaires :

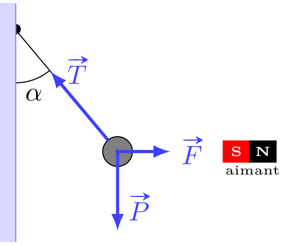
a) le vecteur vitesse $\vec{v}$ ....

b) le vecteur accélération $\vec{a}$ ....

Étude de systèmes en équilibre

A.N. **Entraînement 1.16 — Tension d'un fil.**

Une bille d'acier de poids $P = 2{,}0\,\mathrm{N}$, fixée à l'extrémité d'un fil de longueur $\ell = 50\,\mathrm{cm}$ est attirée par un aimant exerçant une force $F = 1{,}0\,\mathrm{N}$. À l'équilibre, le fil s'incline d'un angle α et l'on a



$$\vec{T} + \vec{F} + \vec{P} = \vec{0}$$

où $\vec{T}$ est la tension exercée par le fil.

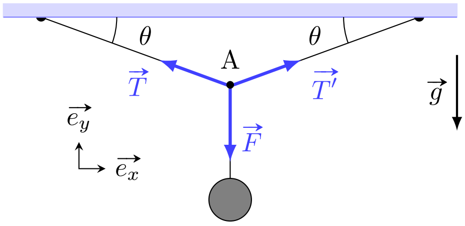
Calculer :

a) la tension T du fil ....

b) l'angle α (en radian) ....

Entraînement 1.17 — Masse suspendue.

Un objet qui pèse 800 N est suspendu en équilibre à l'aide de deux cordes symétriques qui font un angle $\theta = 20$ avec l'horizontal.



Le point A est soumis à trois forces :

$$\vec{T}, \vec{T'} \text{ et } \vec{F}.$$

On note $\vec{R}$ la résultante des forces.

a) Exprimer la composante horizontale R_x en fonction de T, T' et θ. ..

b) Exprimer la composante verticale R_y en fonction de T, T', F et θ. .

c) Déterminer la tension T en résolvant l'équation $\vec{R} = \vec{0}$. ....

Mouvements rectilignes

A.N. **Entraînement 1.18 — Chute avec frottement.**

Un corps de masse $m = 2\,\text{kg}$ tombe verticalement avec une accélération de $a = 9\,\text{m.s}^{-2}$. Lors de sa chute il subit la force de pesanteur ainsi qu'une force de frottement due à l'air.

On prendra $g = 9{,}8\,\text{m.s}^{-2}$ pour l'intensité du champ de pesanteur.

Quelle est l'intensité de la force de frottement ? ....

A.N. **Entraînement 1.19 — Contact dans un ascenseur.**

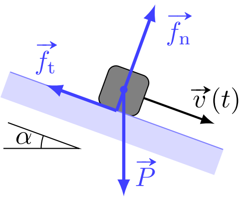
Un homme de masse $m = 80\,\text{kg}$ est dans un ascenseur. Cet ascenseur monte avec une accélération $a = 1\,\text{m.s}^{-2}$. On note $\overrightarrow{F}$ la force exercée par l'homme sur le plancher de l'ascenseur.

On prendra $g = 9{,}8\,\text{m.s}^{-2}$ pour l'intensité du champ de pesanteur.

Quelle est l'intensité de $\overrightarrow{F}$? ....

Entraînement 1.20 — Calcul d'une action de contact.

Un bloc de masse m, de poids $\overrightarrow{P}$ glisse à une vitesse $v(t)$, variable au cours du temps, sur un support plan qui exerce une action de contact.



Celle-ci se décompose en deux actions :

- une action normale à la surface $\overrightarrow{f_\text{n}}$;
- une action de frottement $\overrightarrow{f_\text{t}}$ opposée à la vitesse de glissement.

Le plan est incliné d'un angle α, comme figuré ci-contre.

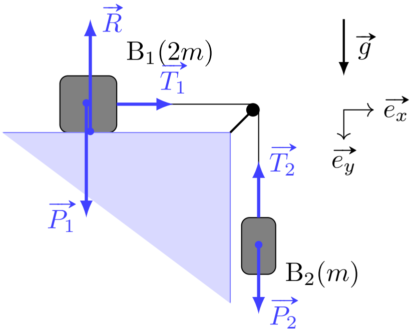
Déterminer (en fonction d'au moins une des données P, $v(t)$, m et α) :

a) l'intensité de l'action normale f_n ....

b) l'intensité du frottement f_t ....

Entraînement 1.21 — Calcul d'une accélération.

Deux blocs B_1 et B_2 de masse respective $2m$ et m sont reliés par un fil. On passe le fil dans la gorge d'une poulie, puis on maintient le bloc B_1 sur la table alors que l'autre est suspendu dans l'air. On libère le bloc B_1 qui glisse alors sur la table. On note T_1 et T_2 les tensions exercées par le fil sur les blocs, a_1 et a_2 les accélérations respectives des blocs B_1 et B_2, et g le champ de pesanteur. Les frottements sont négligeables.



a) Exprimer a_1 en fonction de m et T_1. ....

b) Exprimer l'accélération a_2 de B_2 en fonction de m, g et T_2. ....

c) Le fil étant inextensible et sans masse on a $a_1 = a_2$ et $T_1 = T_2$.

En déduire l'accélération en fonction uniquement de g ....

Réponses mélangées

$\arctan\left(\dfrac{mR\omega^2 - T}{mg}\right)$ $\quad a_0t\overrightarrow{e_x} - v_0\overrightarrow{e_y}$ $\quad a_0\overrightarrow{e_x}$ $\quad P\overrightarrow{e_x}$ $\quad \dfrac{g}{3}$ $\quad v_0\overrightarrow{e_x} + gt\overrightarrow{e_z}$

$2{,}2\,\mathrm{N}$ $\quad 864\,\mathrm{N}$ $\quad -T\cos(\theta)\overrightarrow{e_x} - T\sin(\theta)\overrightarrow{e_y}$ $\quad b\sin(\alpha)\overrightarrow{e_x} + b\cos(\alpha)\overrightarrow{e_y}$

$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\overrightarrow{e_\theta}$ $\quad (v_0t + x_0)\overrightarrow{e_x} + y_0\overrightarrow{e_y} + \dfrac{1}{2}gt^2\overrightarrow{e_z}$

$-d\sin(\alpha)\overrightarrow{e_x} + d\cos(\alpha)\overrightarrow{e_y}$ $\quad \cos(\theta)\overrightarrow{e_x} + \sin(\theta)\overrightarrow{e_y}$ $\quad -P\sin(\alpha)\overrightarrow{e_x} - P\cos(\alpha)\overrightarrow{e_y}$

$(T' + T)\sin\theta - F$ $\quad \left(\dfrac{1}{2}a_0t^2 + x_0\right)\overrightarrow{e_x} - v_0t\overrightarrow{e_y} + z_0\overrightarrow{e_z}$ $\quad g\overrightarrow{e_z}$ $\quad g - \dfrac{T_2}{m}$

$0{,}46\,\mathrm{rad}$ $\quad$ c $\quad -\dot{\theta}\overrightarrow{e_r}$ $\quad -T\overrightarrow{e_r}$ $\quad (P\cos(\theta) - T)\overrightarrow{e_r} - P\sin(\theta)\overrightarrow{e_\theta}$

$1{,}6\,\mathrm{N}$ $\quad a\cos(\alpha)\overrightarrow{e_x} + a\sin(\alpha)\overrightarrow{e_y}$ $\quad \dfrac{T_1}{2m}$ $\quad -\dot{\theta}\cos(\theta)\overrightarrow{e_x} - \dot{\theta}\sin(\theta)\overrightarrow{e_y}$

$\sqrt{(mR\omega^2 - T)^2 + (mg)^2}$ $\quad (T' - T)\cos\theta$ $\quad -m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + P\sin\alpha$

$-\sin(\theta)\overrightarrow{e_x} + \cos(\theta)\overrightarrow{e_y}$ $\quad (P - T\cos(\theta))\overrightarrow{e_x} - T\sin(\theta)\overrightarrow{e_y}$

$P\cos(\theta)\overrightarrow{e_r} - P\sin(\theta)\overrightarrow{e_\theta}$ $\quad \mathrm{MLT^{-1}}$ $\quad \mathrm{MLT^{-2}}$ $\quad \dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$

$\left(v_0 - \dfrac{a_0}{k}\right)\mathrm{e}^{-k(t-t_0)} + \dfrac{a_0}{k}$ $\quad \dfrac{p + m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}$ $\quad \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$ $\quad P\cos\alpha$

$N\overrightarrow{e_y}$ $\quad c\cos(\alpha)\overrightarrow{e_x} - c\sin(\alpha)\overrightarrow{e_y}$ $\quad -\dot{\theta}\sin(\theta)\overrightarrow{e_x} + \dot{\theta}\cos(\theta)\overrightarrow{e_y}$ $\quad 1{,}17\,\mathrm{kN}$

► Réponses et corrigés page ??

Fiche nº 1. Principe fondamental de la dynamique

Réponses

1.1 .... $\boxed{\dfrac{p+m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}}$

1.2 a) .... $\boxed{\sqrt{\left(mR\omega^2-T\right)^2+(mg)^2}}$

1.2 b) .... $\boxed{\arctan\left(\dfrac{mR\omega^2-T}{mg}\right)}$

1.3 .... $\boxed{\left(v_0-\dfrac{a_0}{k}\right)\mathrm{e}^{-k(t-t_0)}+\dfrac{a_0}{k}}$

1.4 a) .... $\boxed{\mathrm{MLT}^{-1}}$

1.4 b) .... $\boxed{\mathrm{MLT}^{-2}}$

1.5 a) .... $\boxed{a\cos(\alpha)\overrightarrow{e_x}+a\sin(\alpha)\overrightarrow{e_y}}$

1.5 b) .... $\boxed{b\sin(\alpha)\overrightarrow{e_x}+b\cos(\alpha)\overrightarrow{e_y}}$

1.5 c) .... $\boxed{c\cos(\alpha)\overrightarrow{e_x}-c\sin(\alpha)\overrightarrow{e_y}}$

1.5 d) .... $\boxed{-d\sin(\alpha)\overrightarrow{e_x}+d\cos(\alpha)\overrightarrow{e_y}}$

1.6 a) .... $\boxed{-P\sin(\alpha)\overrightarrow{e_x}-P\cos(\alpha)\overrightarrow{e_y}}$

1.6 b) .... $\boxed{N\overrightarrow{e_y}}$

1.7 a) .... $\boxed{P\cos(\theta)\overrightarrow{e_r}-P\sin(\theta)\overrightarrow{e_\theta}}$

1.7 b) .... $\boxed{-T\overrightarrow{e_r}}$

1.7 c) .... $\boxed{(P\cos(\theta)-T)\overrightarrow{e_r}-P\sin(\theta)\overrightarrow{e_\theta}}$

1.8 a) .... $\boxed{P\overrightarrow{e_x}}$

1.8 b) .... $\boxed{-T\cos(\theta)\overrightarrow{e_x}-T\sin(\theta)\overrightarrow{e_y}}$

1.8 c) .... $\boxed{(P-T\cos(\theta))\overrightarrow{e_x}-T\sin(\theta)\overrightarrow{e_y}}$

1.9 a) .... $\boxed{\left(\dfrac{1}{2}a_0t^2+x_0\right)\overrightarrow{e_x}-v_0t\overrightarrow{e_y}+z_0\overrightarrow{e_z}}$

1.9 b) .... $\boxed{a_0t\overrightarrow{e_x}-v_0\overrightarrow{e_y}}$

1.9 c) .... $\boxed{a_0\overrightarrow{e_x}}$

1.10 a) .... $\boxed{g\overrightarrow{e_z}}$

1.10 b) .... $\boxed{v_0\overrightarrow{e_x}+gt\overrightarrow{e_z}}$

1.10 c) .... $\boxed{(v_0t+x_0)\overrightarrow{e_x}+y_0\overrightarrow{e_y}+\dfrac{1}{2}gt^2\overrightarrow{e_z}}$

1.11 a) .... $\boxed{\cos(\theta)\overrightarrow{e_x}+\sin(\theta)\overrightarrow{e_y}}$

1.11 b) .... $\boxed{-\sin(\theta)\overrightarrow{e_x}+\cos(\theta)\overrightarrow{e_y}}$

1.12 a) .... $\boxed{-\dot\theta\sin(\theta)\overrightarrow{e_x}+\dot\theta\cos(\theta)\overrightarrow{e_y}}$

1.12 b) .... $\boxed{-\dot\theta\cos(\theta)\overrightarrow{e_x}-\dot\theta\sin(\theta)\overrightarrow{e_y}}$

1.13 a) .... $\boxed{\dot\theta\overrightarrow{e_\theta}}$

1.13 b) .... $\boxed{-\dot\theta\overrightarrow{e_r}}$

1.14 .... $\boxed{\text{c}}$

1.15 a) .... $\boxed{\dot r\overrightarrow{e_r}+r\dot\theta\overrightarrow{e_\theta}}$

1.15 b) .... $\boxed{\left(\ddot r-r\dot\theta^2\right)\overrightarrow{e_r}+\left(2\dot r\dot\theta+r\ddot\theta\right)\overrightarrow{e_\theta}}$

1.16 a) .... $\boxed{2{,}2\,\mathrm{N}}$

1.16 b) .... $\boxed{0{,}46\,\mathrm{rad}}$

1.17 a) .... $\boxed{(T'-T)\cos\theta}$

1.17 b) .... $\boxed{(T'+T)\sin\theta-F}$

1.17 c) .... $\boxed{1{,}17\,\mathrm{kN}}$

1.18 .... $\boxed{1{,}6\,\mathrm{N}}$

1.19 .... $\boxed{864\,\mathrm{N}}$

1.20 a) .... $\boxed{P\cos\alpha}$

1.20 b) .... $\boxed{-m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + P\sin\alpha}$

1.21 a) .... $\boxed{\dfrac{T_1}{2m}}$

1.21 b) .... $\boxed{g - \dfrac{T_2}{m}}$

1.21 c) .... $\boxed{\dfrac{g}{3}}$

Corrigés

1.2 a) Pour obtenir F il faut pouvoir éliminer α. L'astuce consiste à utiliser l'identité

$$\sin^2 + \cos^2 = 1$$

On a $\begin{cases} F\sin\alpha = mR\omega^2 - T \\ F\cos\alpha = mg \end{cases}$ soit $F^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = F^2 = \big(mR\omega^2 - T\big)^2 + (mg)^2$. Finalement, l'intensité d'une force étant positive, on trouve $F = \sqrt{(mR\omega^2 - T)^2 + (mg)^2}$.

....

1.2 b) Quand on écrit le système sous la forme $\begin{cases} F\sin\alpha = mR\omega^2 - T \\ F\cos\alpha = mg \end{cases}$, on s'aperçoit qu'il suffit de faire le rapport des deux équations pour éliminer F. On obtient

$$\tan\alpha = \frac{mR\omega^2 - T}{mg} \quad \text{d'où} \quad \alpha = \arctan\left(\frac{mR\omega^2 - T}{mg}\right)$$

....

1.3 La solution de l'équation homogène est $v(t) = A\mathrm{e}^{-kt}$. Une solution particulière (constante) est $v = \dfrac{a_0}{k}$. Les solutions sont $v(t) = A\mathrm{e}^{-kt} + \dfrac{a_0}{k}$. La condition initiale $v(t_0) = v_0$ donne

$$A = \left(v_0 - \frac{a_0}{k}\right)\mathrm{e}^{kt_0}.$$

Il en découle la solution générale $v(t) = \left(v_0 - \dfrac{a_0}{k}\right)\mathrm{e}^{-k(t-t_0)} + \dfrac{a_0}{k}$.

....

1.4 a) En effet, si on note p la quantité de mouvement, m la masse et v la vitesse, on a $[p] = [mv]$, $[v] = \mathrm{LT}^{-1}$ et $[m] = \mathrm{M}$.

....

1.4 b) En vertu de la loi de gravitation universelle $F_\mathrm{g} = \dfrac{Gm_1m_2}{r^2}$, d'où

$$[F] = [G] \times \mathrm{M}^2\mathrm{L}^{-2} = \mathrm{L}^3\mathrm{M}^{-1}\mathrm{T}^{-2} \times \mathrm{L}^{-2} = \mathrm{MLT}^{-2}$$

....

1.5 a) La composante suivant $\overrightarrow{e_x}$ correspond au produit scalaire $\vec{a}\cdot\overrightarrow{e_x} = a \times 1 \times \cos(\alpha)$. De même la composante suivant $\overrightarrow{e_y}$ est le produit scalaire $\vec{a}\cdot\overrightarrow{e_y} = a \times 1 \times \cos(\pi/2 - \alpha) = a\sin(\alpha)$.

....

1.5 b) La composante suivant $\overrightarrow{e_x}$ vaut $b_x = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{e_x} = b\cos(\pi/2 - \alpha) = b\sin(\alpha)$. De même la composante suivant $\overrightarrow{e_y}$ vaut $b_y = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{e_y} = b\cos(\alpha)$.

....

1.5 c) On a $c_x = \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{e_x} = c\cos(\alpha)$ et $c_y = \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{e_y} = c\cos(\pi/2 + \alpha) = -c\sin(\alpha)$.

....

1.5 d) On trouve $d_x = \overrightarrow{d} \cdot \overrightarrow{e_x} = d\cos(\pi/2 + \alpha) = -d\sin(\alpha)$ et $d_y = \overrightarrow{d} \cdot \overrightarrow{e_y} = d\cos(\alpha)$.

....

1.6 a) Le poids a pour composante suivant $\overrightarrow{e_x}$, $P_x = \overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{e_x} = P\cos(\alpha + \pi/2) = -P\sin(\alpha)$. De même sa composante suivant $\overrightarrow{e_y}$ s'écrit $P_y = \overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{e_y} = P\cos(\alpha + \pi) = -P\cos(\alpha)$. Ainsi, le poids s'écrit

$$\overrightarrow{P} = -P\sin(\alpha)\overrightarrow{e_x} - P\cos(\alpha)\overrightarrow{e_y}.$$

....

1.6 b) $\overrightarrow{N}$ est colinéaire au vecteur unitaire $\overrightarrow{e_y}$ et de même sens ; on a donc $\overrightarrow{N} = N\overrightarrow{e_y}$.

....

1.7 a)

Le poids a pour composante suivant $\overrightarrow{e_r}$, $P_r = \overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{e_r} = P\cos(\theta)$. De même sa composante suivant $\overrightarrow{e_\theta}$ s'écrit $P_\theta = \overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{e_\theta} = P\cos(\alpha + \pi/2) = -P\sin(\theta)$. Ainsi, le poids s'écrit

$$\overrightarrow{P} = P\cos(\theta)\overrightarrow{e_r} - P\sin(\theta)\overrightarrow{e_\theta}.$$

....

1.7 b) $\overrightarrow{T}$ est colinéaire au vecteur unitaire $\overrightarrow{e_r}$ et sens opposé ; on a donc $\overrightarrow{T} = -T\overrightarrow{e_r}$.

....

1.8 a) Le poids $\overrightarrow{P}$ est colinéaire et de même sens que le vecteur unitaire $\overrightarrow{e_x}$; on a donc $\overrightarrow{P} = P\overrightarrow{e_x}$.

....

1.8 b) La tension du fil $\overrightarrow{T}$ a pour composante suivant $\overrightarrow{e_x}$, $T_x = \overrightarrow{T} \cdot \overrightarrow{e_x} = T\cos(\pi - \theta) = -T\cos(\theta)$. De même, sa composante suivant $\overrightarrow{e_y}$ vaut $T_y = \overrightarrow{T} \cdot \overrightarrow{e_y} = T\cos(\pi/2 + \theta) = -T\sin(\theta)$. Finalement, on trouve $\overrightarrow{T} = -T\cos(\theta)\overrightarrow{e_x} - T\sin(\theta)\overrightarrow{e_y}$.

....

1.9 a) Le vecteur position est le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z}$, d'où

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \left(\frac{1}{2}a_0 t^2 + x_0\right)\overrightarrow{e_x} - v_0 t\overrightarrow{e_y} + z_0\overrightarrow{e_z}.$$

....

1.9 b) Dans le système de coordonnées cartésiennes, le vecteur vitesse s'écrit

$$\overrightarrow{v} = \dot{x}\overrightarrow{e_x} + \dot{y}\overrightarrow{e_y} + \dot{z}\overrightarrow{e_z} = a_0 t\overrightarrow{e_x} - v_0\overrightarrow{e_y}.$$

....

1.9 c) Dans le système de coordonnées cartésiennes, le vecteur accélération s'exprime en fonction des dérivées secondes des coordonnées : $\overrightarrow{a} = \ddot{x}\overrightarrow{e_x} + \ddot{y}\overrightarrow{e_y} + \ddot{z}\overrightarrow{e_z} = a_0\overrightarrow{e_x}$.

....

1.10 a) D'après le PFD, $mg\overrightarrow{e_z} = m\overrightarrow{a}$ d'où $\overrightarrow{a} = g\overrightarrow{e_z}$.

1.10 b) L'accélération s'écrit $\overrightarrow{a} = \dot{v}_x\overrightarrow{e_x} + \dot{v}_y\overrightarrow{e_y} + \dot{v}_z\overrightarrow{e_z}$. On en déduit

$$\left\{\begin{array}{ccc} \dot{v}_x & = & 0 \\ \dot{v}_y & = & 0 \\ \dot{v}_z & = & g \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ccc} v_x & = & C_1 \\ v_y & = & C_2 \\ v_z & = & gt + C_3 \end{array}\right\}$$

Les conditions initiales imposent $C_1 = v_0$, $C_2 = 0$ et $C_3 = 0$. Finalement $\overrightarrow{v} = v_0\overrightarrow{e_x} + gt\overrightarrow{e_z}$.

1.10 c) Le vecteur vitesse s'écrit $\overrightarrow{v} = \dot{x}\overrightarrow{e_x} + \dot{y}\overrightarrow{e_y} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}$. Par identification avec l'expression obtenue précédemment, on a

$$\left\{\begin{array}{ccc} \dot{x} & = & v_0 \\ \dot{y} & = & 0 \\ \dot{z} & = & gt \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & v_0t + C_4 \\ y & = & C_5 \\ z & = & \dfrac{1}{2}gt^2 + C_6 \end{array}\right\}$$

Les conditions initiales imposent $C_4 = x_0$, $C_5 = y_0$ et $C_6 = 0$. Finalement

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = (v_0t + x_0)\overrightarrow{e_x} + y_0\overrightarrow{e_y} + \frac{1}{2}gt^2\overrightarrow{e_z}.$$

1.11 a) $\overrightarrow{e_r} \cdot \overrightarrow{e_x} = \cos(\theta)$ et $\overrightarrow{e_r} \cdot \overrightarrow{e_y} = \cos(\pi/2 - \theta) = \sin(\theta)$ d'où $\overrightarrow{e_r} = \cos(\theta)\overrightarrow{e_x} + \sin(\theta)\overrightarrow{e_y}$.

1.11 b) $\overrightarrow{e_\theta} \cdot \overrightarrow{e_x} = \cos(\pi/2 + \theta) = -\sin(\theta)$ et $\overrightarrow{e_\theta} \cdot \overrightarrow{e_y} = \cos(\theta)$ d'où $\overrightarrow{e_\theta} = -\sin(\theta)\overrightarrow{e_x} + \cos(\theta)\overrightarrow{e_y}$.

1.12 a) Il suffit de dériver le vecteur $\overrightarrow{e_r} = \cos(\theta)\overrightarrow{e_x} + \sin(\theta)\overrightarrow{e_y}$ sachant que $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$ sont des constantes (vectorielles). On a donc $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\cos(\theta)}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_x} + \dfrac{\mathrm{d}\sin(\theta)}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_y}$. Ici θ dépend du temps, par conséquent $\dfrac{\mathrm{d}\cos(\theta)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \times \dfrac{\mathrm{d}\cos(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = -\dot{\theta}\sin(\theta)$. de même $\dfrac{\mathrm{d}\sin(\theta)}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\cos(\theta)$. Finalement,

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\sin(\theta)\overrightarrow{e_x} + \dot{\theta}\cos(\theta)\overrightarrow{e_y}.$$

1.12 b) En partant de $\overrightarrow{e_\theta} = -\sin(\theta)\overrightarrow{e_x} + \cos(\theta)\overrightarrow{e_y}$, on trouve

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\theta}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\sin(\theta)}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_x} + \frac{\mathrm{d}\cos(\theta)}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_y} = -\dot{\theta}\cos(\theta)\overrightarrow{e_x} - \dot{\theta}\sin(\theta)\overrightarrow{e_y}.$$

1.14 Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ est colinéaire et de même sens que $\overrightarrow{e_r}$. Sa norme étant égal r, on a $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\overrightarrow{e_r}$.

1.15 a) Il suffit de dériver le vecteur position en utilisant les résultats des exercices précédents : $\overrightarrow{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_r} + r\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$.

1.15 b) Dérivons le vecteur vitesse :

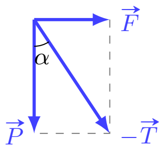
$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t}\vec{e_r} + \dot{r}\frac{\mathrm{d}\vec{e_r}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}(r\dot{\theta})}{\mathrm{d}t}\vec{e_\theta} + r\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\vec{e_\theta}}{\mathrm{d}t} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{e_\theta}.$$

1.16 a) Calculons le carré scalaire :

$$\vec{T}^2 = (-\vec{F} - \vec{P})^2 = F^2 + P^2 + 2\vec{F}\cdot\vec{P} = 5$$

car $\vec{F}\cdot\vec{P} = 0$. Par conséquent, $T = \sqrt{5} \simeq 2{,}2\,\mathrm{N}$.

1.16 b) Une construction géométrique permet de trouver immédiatement l'angle α :



$$\tan\alpha = F/P \quad \text{soit} \quad \alpha = 0{,}46\,\mathrm{rad}$$

On peut aussi utiliser les produits scalaires. Par exemple

$$\vec{T}\cdot\vec{F} = T \times F\cos(\pi/2 + \alpha) = -TF\sin\alpha$$

De plus, compte tenu de l'équilibre des forces

$$\vec{T}\cdot\vec{F} = (-\vec{F} - \vec{P})\cdot\vec{F} = -F^2 - \vec{P}\cdot\vec{F} = -F^2$$

Il en découle $\sin\alpha = F/T$ soit $\alpha = 0{,}46\,\mathrm{rad}$ (c'est-à-dire $\alpha = 26$).

1.17 a) $\vec{R} = \vec{T} + \vec{T'} + \vec{F}$. Sa composante horizontale vaut

$$R_x = \vec{R}\cdot\vec{e_x} = \underbrace{\vec{T}\cdot\vec{e_x}}_{-T\cos\theta} + \underbrace{\vec{T'}\cdot\vec{e_x}}_{T'\cos\theta} + \underbrace{\vec{F}\cdot\vec{e_x}}_{0} = (T' - T)\cos\theta.$$

1.17 b) La composante verticale de $\vec{R}$ s'écrit

$$R_y = \vec{R}\cdot\vec{e_y} = \underbrace{\vec{T}\cdot\vec{e_y}}_{T\sin\theta} + \underbrace{\vec{T'}\cdot\vec{e_y}}_{T'\sin\theta} + \underbrace{\vec{F}\cdot\vec{e_y}}_{-F} = (T' + T)\sin\theta - F.$$

1.17 c) Résoudre l'équation vectorielle $\vec{R} = \vec{0}$, c'est résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} (T' - T)\cos\theta &= 0 \\ (T' + T)\sin\theta - F &= 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} T' &= T \\ T &= \dfrac{F}{2\sin\theta} \end{cases}$$

Sachant que $F = 800\,\mathrm{N}$ et $\theta = 20°$, on obtient $T = 1{,}17\,\mathrm{kN}$.

1.18 Le principe fondamental de la dynamique impose $m\vec{g}+\vec{F}=m\vec{a}$. En projetant la relation précédente suivant la verticale descendante, on obtient $mg-F=ma$ ce qui donne $F=m(g-a)=1{,}6\,\mathrm{N}$.

....

1.19 L'homme subit son poids $\vec{P}=m\vec{g}$ et la force de contact dû à l'ascenseur $-\vec{F}$ (principe des actions réciproques). Le principe fondamental de la dynamique donne $m\vec{g}-\vec{F}=m\vec{a}$. En projetant sur la verticale ascendante on obtient $ma=-mg+F$, soit $F=m(a+g)=80\times 10{,}8=864\,\mathrm{N}$.

....

1.20 a) Le principe fondamental de la dynamique donne $\vec{P}+\vec{f_\mathrm{n}}+\vec{f_\mathrm{t}}=m\vec{a}$ avec $\vec{a}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{e_\mathrm{t}}$ ($\vec{e_\mathrm{t}}$ est le vecteur unitaire orienté suivant le vecteur vitesse ; c'est le vecteur tangent de la base de Frenet). Si l'on projette la relation suivant la normale $\vec{e_\mathrm{n}}$ au support on aboutit à

$$\underbrace{\vec{P}\cdot\vec{e_\mathrm{n}}}_{P\cos(\pi-\alpha)}+\underbrace{\vec{f_\mathrm{n}}\cdot\vec{e_\mathrm{n}}}_{f_\mathrm{n}}+\underbrace{\vec{f_\mathrm{t}}\cdot\vec{e_\mathrm{n}}}_{0}=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\underbrace{\vec{e_\mathrm{t}}\cdot\vec{e_\mathrm{n}}}_{0}$$

ce qui donne $f_\mathrm{n}=-P\cos(\pi-\alpha)=P\cos\alpha$.

....

1.20 b) En projetant la relation fondamentale de la dynamique suivant la direction tangentielle au support on obtient

$$\underbrace{\vec{P}\cdot\vec{e_\mathrm{t}}}_{P\cos(\pi/2-\alpha)}+\underbrace{\vec{f_\mathrm{n}}\cdot\vec{e_\mathrm{t}}}_{0}+\underbrace{\vec{f_\mathrm{t}}\cdot\vec{e_\mathrm{t}}}_{-f_\mathrm{t}}=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\underbrace{\vec{e_\mathrm{t}}\cdot\vec{e_\mathrm{t}}}_{1}$$

c'est-à-dire $f_\mathrm{t}=-m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+P\sin\alpha$.

....

1.21 a) Le principe fondamental appliqué au bloc B_1 donne $2m\vec{g}+\vec{R}+\vec{T_1}=2m\vec{a_1}$. Projetons cette relation suivant le sens du mouvement :

$$2m\,\underbrace{\vec{g}\cdot\vec{e_x}}_{0}+\underbrace{\vec{R}\cdot\vec{e_x}}_{0}+\underbrace{\vec{T_1}\cdot\vec{e_x}}_{T_1}=2m\,\underbrace{\vec{a_1}\cdot\vec{e_x}}_{a_1}\quad\text{soit}\quad a_1=\frac{T_1}{2m}.$$

....

1.21 b) Le principe fondamental appliqué au bloc B_2 donne $m\vec{g}+\vec{T_2}=m\vec{a_2}$. Projetons cette relation suivant le sens du mouvement :

$$m\,\underbrace{\vec{g}\cdot\vec{e_y}}_{g}+\underbrace{\vec{T_2}\cdot\vec{e_y}}_{-T_2}=m\,\underbrace{\vec{a_2}\cdot\vec{e_y}}_{a_2}\quad\text{soit}\quad a_2=g-\frac{T_2}{m}.$$

....

1.21 c) On a les relations :

$$a_1=\frac{T_1}{2m}\qquad\text{et}\qquad a_2=g-\frac{T_2}{m}$$

Multiplions la première relation par $2m$, et la deuxième par m, puis additionnons les. On trouve $2ma_1+ma_2=T_1+mg-T_2$. Comme $a_1=a_2$ et $T_1=T_2$, on obtient $3ma_1=mg$ soit $a_1=a_2=g/3$.

....