Généralités sur l'exponentielle I

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 1.1 — Des fractions.

Calculer, en donnant le résultat sous forme de fraction irréductible :

a) $2-\dfrac{1}{3}$ ....

b) $\dfrac{\frac{3}{2}}{2}$ ....

c) $\dfrac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{3}}$ ......

Calcul 1.2 — Des puissances.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Exprimer les nombres suivants sous la forme « 2^a » (où a est un entier dépendant de n).

a) $2^n + 3 \times 2^n$ ..

b) $2^n \times 4^n$ ......

c) $\dfrac{2^n \times 8^{-n}}{4}$ ....

Produits et quotients d'exponentielles

Calcul 1.3 — Des calculs de base.

Simplifier les expressions suivantes.

a) $\exp(5) \times \exp(-2) \times \exp(0)$ ......

b) $\dfrac{\exp(4)}{\exp(-3)}$ ....

c) $\big(\exp(-1)\big)^2 \times \sqrt{\exp(4)}$ ....

d) $\exp(-1) \times \big(\exp(-3)\big)^2$ ....

e) $\dfrac{\exp(7) \times \exp(-8)}{\exp(2)}$ ....

f) $\dfrac{\exp(5) \times \big(\exp(-2)\big)^3}{\exp(4) \times \exp(-1)}$ ....

Calcul 1.4 — Avec des variables (I).

Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier les expressions suivantes.

a) $\big(\exp(x+1)\big)^2 \times \exp(-2x+1)$ ....

b) $\big(\exp(4x-5) \times \exp(3-2x)\big)^2$ ....

c) $\exp(3x) \times \exp(1-5x) \times \big(\exp(2x-1)\big)^2$ ....

d) $\dfrac{\exp(4x+1)}{\exp(3-2x)}$ ....

Calcul 1.5 — Avec des variables (II).

Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier les expressions suivantes.

a) $\dfrac{\exp(1) \times \big(\exp(4x)\big)^3}{\exp(8x+1)}$ ....

b) $\dfrac{\exp(3x) \times \exp(2)}{\exp(5) \times \big(\exp(-x)\big)^3}$ ....

c) $\left(\dfrac{\exp(2x+3) \times \exp(2-3x)}{\exp(-5)}\right)^{-1}$ ....

d) $\dfrac{\exp(x)-1}{\exp(x)+1} + \dfrac{\exp(-x)-1}{\exp(-x)+1}$ ....

Exponentielles et identités remarquables

Calcul 1.6

Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $\big(\exp(x)+\exp(-x)\big)^2$ ....

b) $\big(2\exp(2x)+3\exp(-x)\big)^2$ ....

c) $\big(3\exp(x)-\exp(-x)\big)^2$ ....

d) $\big(1+\exp(x)\big)\big(1-\exp(x)\big)$ ....

Calcul 1.7

Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $-2\exp(3x) - \exp(2x)\big(\exp(2x)-\exp(-x)\big)^2$ ....

b) $\big(\exp(x)+\exp(-x)\big)^2 - \big(\exp(x)-\exp(-x)\big)^2$ ....

Calcul 1.8 — Des factorisations.

Soit $x \in \mathbb{R}$. À l'aide d'une identité remarquable, factoriser les expressions suivantes.

a) $\exp(2x) + 4\exp(-2x) + 4$ ....

b) $\exp(6x) + 9\exp(-2x) - 6\exp(2x)$ ....

c) $16\exp(4x) - 9$ ....

d) $9\exp(2x) - 4\exp(-2x)$ ....

Résolutions d'équations et d'inéquations

Calcul 1.9 — Quelques équations.

Donner l'ensemble des solutions, dans $\mathbb{R}$, des équations suivantes.

a) $\exp(2x) = \exp(5)$ ....

b) $\exp(x^2) = \exp(2x)$ ....

c) $\big(\exp(x) - 1\big)\big(\exp(x) + 5\big) = 0$ ...

d) $\exp(3x) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(-1)}$ ....

e) $5 - 3\exp(4x - 1) = 2$ ....

Calcul 1.10 — Quelques inéquations (I).

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

On donnera l'ensemble des solutions sous la forme d'un intervalle.

a) $\exp(5x) - 1 > 0$ ....

b) $\exp(x^2) < \exp(x)$ ....

Calcul 1.11 — Quelques inéquations (II).

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

On donnera l'ensemble des solutions sous la forme d'un intervalle ou d'une union d'intervalles.

a) $\exp(x^2 - 1) \geqslant \mathrm{e}$ ....

b) $12 - 4\exp(5x + 1) \geqslant 8$ ....

c) $\exp(6x^2) > \exp(2 - x)$ ....

Calcul 1.12 — Avec des changements de variables.

À l'aide d'un changement de variable, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $\exp(2x) + 3\exp(x) = 4$ ....

On fera le changement de variable « $X = \exp(x)$ »

b) $\exp(2x) - (1 + \mathrm{e})\exp(x) + \mathrm{e} = 0$ ....

On fera le changement de variable « $X = \exp(x)$ »

c) $\exp(x^2) + \dfrac{\mathrm{e}}{\exp(x^2)} = 1 + \mathrm{e}$ ....

On fera le changement de variable « $X = \exp(x^2)$ »

Une parité

Entraînement 1.13

La fonction $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \dfrac{\exp(t)-1}{\exp(t)+1} \end{cases}$ est :

(a) paire (b) impaire (c) ni l'un, ni l'autre

. . . .

Calculs plus avancés

On appelle fonction *cosinus hyperbolique*, notée cosh, la fonction définie par :

$$\cosh : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow [1, +\infty[\\ x \longmapsto \dfrac{\exp(x)+\exp(-x)}{2}. \end{cases}$$

De même, on appelle fonction *sinus hyperbolique*, notée sinh, la fonction définie par :

$$\sinh : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{\exp(x)-\exp(-x)}{2}. \end{cases}$$

Calcul 1.14 — Une relation ?

Soit $x \in \mathbb{R}$. A-t-on $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$? . . . .

Calcul 1.15 — Des relations.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

a) Exprimer $\cosh(2x)$ en fonction de $\cosh(x)$ . . . .

b) En déduire l'expression de $\cosh(2x)$ en fonction de $\sinh(x)$ . . . .

Calcul 1.16

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a $\cosh(x+y) - \cosh(x-y) = \cdots$

(a) $2\sinh(x)\cosh(y)$ (b) $2\cosh(x)\sinh(y)$ (c) $2\sinh(x)\sinh(y)$

. . . .

Calcul 1.17

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a $\sinh(x+y) + \sinh(x-y) = \cdots$

(a) $2\sinh(x)\sinh(y)$ (b) $2\cosh(x)\sinh(y)$ (c) $2\sinh(x)\cosh(y)$

....

Calcul 1.18 — Une équation.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cosh(2x) = 1$.

(On pourra penser à un changement de variable) ....

Calcul 1.19 — Calcul de sommes.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \exp(kx)$ .... b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \big(\exp(kx)\big)^2$ ....

Réponses mélangées

$(3e^{-x} - e^{3x})^2$ $\quad \frac{3}{4}$ $\quad \exp(6x-2)$ $\quad 1$ $\quad \left\{\frac{1}{4}\right\}$ $\quad$ (c) $\quad \{-1, 0, 1\}$ $\quad \frac{3}{8}$

$\left]-\infty, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, +\infty\right[$ $\quad 4$ $\quad \exp(2x-1)$ $\quad \{0, 2\}$ $\quad -1 - \exp(6x)$

$\exp(3)$ $\quad 2^{n+2}$ $\quad]0, 1[$ $\quad \exp(x-10)$ $\quad \left\{\frac{5}{2}\right\}$ $\quad \left(2e^{-x} + e^{x}\right)^2$ $\quad$ (c)

$\left]-\infty, -\frac{2}{3}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ $\quad 0$ $\quad]0, +\infty[$ $\quad (4e^{2x} - 3)(4e^{2x} + 3)$ $\quad \exp(6x-3)$

$\{0, 1\}$ $\quad e^{2x} + e^{-2x} + 2$ $\quad 2^{3n}$ $\quad \{0\}$ $\quad 2\cosh^2(x) - 1$ $\quad 2\sinh^2(x) + 1$

$\left]-\infty, -\frac{1}{5}\right]$ $\quad \exp(7)$ $\quad \{0\}$ $\quad (3e^{x} - 2e^{-x})(3e^{x} + 2e^{-x})$ $\quad \{0\}$ $\quad$ oui $\quad \frac{1 - e^{(n+1)x}}{1 - e^{x}}$

$\exp(4x)$ $\quad 4e^{4x} + 9e^{-2x} + 12e^{x}$ $\quad$ (b) $\quad \exp(4x-4)$ $\quad \exp(-3)$ $\quad \frac{e^{2x}(1 - e^{2nx})}{1 - e^{2x}}$

$9e^{2x} + e^{-2x} - 6$ $\quad 1 - e^{2x}$ $\quad \frac{5}{3}$ $\quad \exp(-4)$ $\quad \exp(-7)$ $\quad 2^{-2n-2}$ $\quad \exp(3)$ $\quad \left\{\frac{1}{2}\right\}$

► Réponses et corrigés page 6

Fiche n° 1. Généralités sur l'exponentielle I

Réponses

1.1 a) .... $\boxed{\dfrac{5}{3}}$

1.1 b) .... $\boxed{\dfrac{3}{4}}$

1.1 c) .... $\boxed{\dfrac{3}{8}}$

1.2 a) .... $\boxed{2^{n+2}}$

1.2 b) .... $\boxed{2^{3n}}$

1.2 c) .... $\boxed{2^{-2n-2}}$

1.3 a) .... $\boxed{\exp(3)}$

1.3 b) .... $\boxed{\exp(7)}$

1.3 c) .... $\boxed{1}$

1.3 d) .... $\boxed{\exp(-7)}$

1.3 e) .... $\boxed{\exp(-3)}$

1.3 f) .... $\boxed{\exp(-4)}$

1.4 a) .... $\boxed{\exp(3)}$

1.4 b) .... $\boxed{\exp(4x-4)}$

1.4 c) .... $\boxed{\exp(2x-1)}$

1.4 d) .... $\boxed{\exp(6x-2)}$

1.5 a) .... $\boxed{\exp(4x)}$

1.5 b) .... $\boxed{\exp(6x-3)}$

1.5 c) .... $\boxed{\exp(x-10)}$

1.5 d) .... $\boxed{0}$

1.6 a) .... $\boxed{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}+2}$

1.6 b) .... $\boxed{4\mathrm{e}^{4x}+9\mathrm{e}^{-2x}+12\mathrm{e}^{x}}$

1.6 c) .... $\boxed{9\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}-6}$

1.6 d) .... $\boxed{1-\mathrm{e}^{2x}}$

1.7 a) .... $\boxed{-1-\exp(6x)}$

1.7 b) .... $\boxed{4}$

1.8 a) .... $\boxed{\left(2\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}\right)^2}$

1.8 b) .... $\boxed{(3\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{3x})^2}$

1.8 c) .... $\boxed{(4\mathrm{e}^{2x}-3)(4\mathrm{e}^{2x}+3)}$

1.8 d) .... $\boxed{(3\mathrm{e}^{x}-2\mathrm{e}^{-x})(3\mathrm{e}^{x}+2\mathrm{e}^{-x})}$

1.9 a) .... $\boxed{\left\{\dfrac{5}{2}\right\}}$

1.9 b) .... $\boxed{\{0,2\}}$

1.9 c) .... $\boxed{\{0\}}$

1.9 d) .... $\boxed{\left\{\dfrac{1}{2}\right\}}$

1.9 e) .... $\boxed{\left\{\dfrac{1}{4}\right\}}$

1.10 a) .... $\boxed{]0,+\infty[}$

1.10 b) .... $\boxed{]0,1[}$

1.11 a) .... $\boxed{\left]-\infty,-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2},+\infty\right[}$

1.11 b) .... $\boxed{\left]-\infty,-\dfrac{1}{5}\right]}$

1.11 c) .... $\boxed{\left]-\infty,-\dfrac{2}{3}\right[\cup\left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[}$

1.12 a) .... $\boxed{\{0\}}$

1.12 b) .... $\boxed{\{0,1\}}$

1.12 c) .... $\boxed{\{-1,0,1\}}$

1.13 .... $\boxed{\text{b}}$

1.14 .... $\boxed{\text{oui}}$

1.15 a) .... $\boxed{2\cosh^2(x)-1}$

1.15 b) .... $\boxed{2\sinh^2(x)+1}$

1.16 .... $\boxed{ⓒ}$

1.17 .... $\boxed{ⓒ}$

1.18 .... $\boxed{\{0\}}$

1.19 a) .... $\boxed{\dfrac{1-\mathrm{e}^{(n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{x}}}$

1.19 b) .... $\boxed{\dfrac{\mathrm{e}^{2x}(1-\mathrm{e}^{2nx})}{1-\mathrm{e}^{2x}}}$

Corrigés

1.2 c) On a $\dfrac{2^n\times 8^{-n}}{4}=\dfrac{2^n\times\left(2^3\right)^{-n}}{2^2}=\dfrac{2^{n-3n}}{2^2}=2^{-2n-2}$.

....

1.9 a) On a $\exp(2x)=\exp(5)\iff 2x=5\iff x=\dfrac{5}{2}$.

....

1.12 a) On pose $X=\mathrm{e}^x$. L'équation devient alors $X^2+3X-4=0$, dont le discriminant est égal à 25. Les solutions de cette équation d'inconnue X sont : $X_1=\dfrac{-3-\sqrt{25}}{2}=-4$ et $X_2=\dfrac{-3-\sqrt{25}}{2}=1$.

Les solutions de l'équation d'inconnue x sont donc les solutions des équations « $\exp(x)=-4$ » et « $\exp(x)=1$ ».

La première équation n'a pas de solution car pour tout x réel, $\exp(x)>0$ et la deuxième équation a pour solution $x=0$. L'ensemble des solutions est donc $\{0\}$.

....

1.12 b) On pose $X=\exp(x)$.

L'équation devient alors $X^2-(1+\mathrm{e})X+\mathrm{e}=0$, dont le discriminant est égal à $(1+\mathrm{e})^2-4\mathrm{e}=(\mathrm{e}-1)^2$.

Les solutions de cette équation d'inconnue X sont

$$X_1=\frac{1+\mathrm{e}-\sqrt{(\mathrm{e}-1)^2}}{2}=\frac{1+\mathrm{e}-\mathrm{e}+1}{2}=1\qquad\text{et}\qquad X_2=\frac{1+\mathrm{e}+\sqrt{(\mathrm{e}-1)^2}}{2}=\frac{1+\mathrm{e}+\mathrm{e}-1}{2}=\mathrm{e}.$$

Les solutions de l'équation d'inconnue x sont donc les solutions des équations : $\exp(x)=1$ et $\exp(x)=\mathrm{e}$ qui sont respectivement $x=0$ et $x=1$. L'ensemble des solutions est donc $\{0,1\}$.

....

1.12 c) On pose $X=\exp(x^2)$. L'équation devient alors $X+\dfrac{\mathrm{e}}{X}=1+\mathrm{e}$, dont les solutions sont $X_1=1$ et $X_1=\mathrm{e}$.

Les solutions de l'équation d'inconnue x sont donc les solutions des équations « $\exp(x^2)=1$ » et « $\exp(x^2)=\mathrm{e}$ », donc des équations « $x^2=0$ » et « $x^2=1$ ». Finalement, l'ensemble des solutions est $\{-1,0,1\}$.

....

1.13 La fonction f est impaire. Vérifions que pour tout $t\in\mathbb{R}$, $f(-t)=-f(t)$. Soit $t\in\mathbb{R}$. On a

$$f(-t)=\frac{\exp(-t)-1}{\exp(-t)+1}=\frac{\exp(t)(\exp(-t)-1)}{\exp(t)(\exp(-t)+1)}=\frac{1-\exp(t)}{1+\exp(t)}=-\frac{\exp(t)-1}{\exp(t)+1}=-f(t).$$

....

1.14 Il suffit de développer $\left(\dfrac{\exp(x)+\exp(-x)}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\exp(x)-\exp(-x)}{2}\right)^2$.

....

1.15 a) On a

$$\cosh(2x) = \frac{\exp(2x)+\exp(-2x)}{2} = \frac{\exp(2x)+\exp(-2x)+2-2}{2} = \frac{\big(\exp(x)\big)^2+\big(\exp(-x)\big)^2+2-2}{2}.$$

On a donc $\cosh(2x) = \dfrac{\big(\exp(x)+\exp(-x)\big)^2-2}{2} = 2\left(\dfrac{\exp(x)+\exp(-x)}{2}\right)^2 - 1 = 2\cosh^2(x)-1.$

1.15 b) Comme $\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1$, on en déduit que $\cosh(2x) = 2\big(1+\sinh^2(x)\big)-1 = 2\sinh^2(x)+1$.

1.16 On a

$$\begin{aligned}\cosh(x+y)-\cosh(x-y) &= \frac{\exp(x+y)+\exp(-x-y)}{2} - \frac{\exp(x-y)+\exp(-x+y)}{2}\\ &= \frac{\exp(x)\big(\exp(y)-\exp(-y)\big)}{2} - \frac{\exp(-x)\big(\exp(y)-\exp(-y)\big)}{2}\\ &= \exp(x)\sinh(y)-\exp(-x)\sinh(y) = 2\sinh(x)\sinh(y).\end{aligned}$$

1.17 On procède comme ci-dessus.

1.18 On a $\cosh(2x) = \dfrac{\exp(2x)+\exp(-2x)}{2}$. Donc, l'équation à résoudre est donc équivalente à

$$\exp(2x)+\exp(-2x) = 2.$$

On effectue le changement de variable $X = \exp(2x)$ et on est amené à résoudre l'équation : $X + \dfrac{1}{X} = 2$.

Cette équation est équivalente à $X^2-2X+1=0$ (car $X \neq 0$) et a pour solution $X=1$.

L'équation initiale est donc équivalente à $\exp(2x)=1$, dont l'unique solution est $x=0$.

L'ensemble des solutions est $\{0\}$.

1.19 a) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\exp(kx) = \sum_{k=0}^{n}\big(\exp(x)\big)^k = \frac{1-\big(\exp(x)\big)^{n+1}}{1-\exp(x)} = \frac{1-\exp\big((n+1)x\big)}{1-\exp(x)}.$

1.19 b) On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\big(\exp(kx)\big)^2 &= \sum_{k=1}^{n}\exp(2kx) = \sum_{k=1}^{n}\big(\exp(2x)\big)^k = \frac{\exp(2x)\Big(1-\big(\exp(2x)\big)^n\Big)}{1-\exp(2x)}\\ &= \frac{\exp(2x)\big(1-\exp(2nx)\big)}{1-\exp(2x)}.\end{aligned}$$
