

DS 7

4 heures

- *Tout résultat ou raisonnement doit être clairement justifié, sauf mention du contraire.*
- *La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.*
- *La présentation de la copie sera prise en compte dans l'évaluation :*
 - ▷ *encadrez les résultats principaux ;*
 - ▷ *soulignez les résultats et arguments intermédiaires importants ;*
 - ▷ *soignez votre écriture ;*
 - ▷ *maintenez une marge dans vos copies, aérez vos copies ;*
 - ▷ *enfin, numérotez vos copies (et non vos pages).*
- *Les documents, calculatrices et autres appareils électroniques sont interdits.*
- *Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie en expliquant les initiatives que vous avez été amené à prendre.*

Autour de ℓ^2

Les ensembles de parties $\{\text{I}\}$, $\{\text{II}, \text{III}, \text{IV}\}$, et $\{\text{V}, \text{VI}, \text{VII}\}$ sont largement indépendants.

Partie I – Dualités.

Notations

▷ Si E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(\cdot | \cdot)$, on note

$$E^* := L(E, \mathbb{R})$$

$$\text{et } E' := \left\{ f \in E^* \mid \exists C \in \mathbb{R}_+ : \forall x \in E, |f(x)| \leq C \|x\| \right\},$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme associée à $(\cdot | \cdot)$.

▷ Si de plus $a \in E$, on note

$$q_a : \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (x | a) \end{cases}.$$

Dans cette partie, on fixe E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(\cdot | \cdot)$.

1. Montrer que E' est un sous-espace vectoriel de E^* .
2. Soit $a \in E$. Montrer que $q_a \in E'$.
3. Montrer que

$$E \text{ de dimension finie} \implies E' = E^*.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(e_1, \dots, e_n) \in E^n$.
(a) Montrer que

$$(e_1, \dots, e_n) \text{ base de } E \implies (q_{e_1}, \dots, q_{e_n}) \text{ base de } E'.$$

- (b) On suppose que (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormée de E .
Soit $f \in L(E)$. On note

$$f^* : \begin{cases} E^* \longrightarrow E^* \\ \varphi \longmapsto \varphi \circ f \end{cases}.$$

Montrer que

$$\text{Mat}_{(q_{e_1}, \dots, q_{e_n})}(f^*) = \text{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(f)^T.$$

5. On note

$$\Phi_E : \begin{cases} E \longrightarrow E' \\ a \longmapsto q_a \end{cases}.$$

On admet que Φ_E est linéaire.

Montrer que Φ_E est injective.

Partie II – Premières propriétés de ℓ^2 .

Notations

▷ On rappelle que si $a, b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on note $a \times b$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, (a \times b)_n = a_n \times b_n.$$

▷ On note

$$\ell^1 := \left\{ (a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \text{la série } \sum_n |a_n| \text{ est convergente} \right\}$$
$$\ell^2 := \left\{ (a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \text{la série } \sum_n a_n^2 \text{ est convergente} \right\}.$$

▷ On admet que ℓ^1 est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

6. Trouver une suite $a \in \ell^2 \setminus \ell^1$.
7. Montrer que $\ell^1 \subset \ell^2$.
8. **Une propriété de transfert.**

Soient $a, b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrer que

$$\left. \begin{array}{l} a \in \ell^2 \\ b \in \ell^2 \end{array} \right\} \implies a \times b \in \ell^1.$$

On passera par les sommes partielles et on pourra utiliser des inégalités classiques.

9. En déduire que ℓ^2 est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
10. Si $a, b \in \ell^2$, on note

$$(a \mid b) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n.$$

Justifier cette définition.

On admet que $(\cdot \mid \cdot)$ définit un produit scalaire sur ℓ^2 .

Partie III – Un lemme sur les séries divergentes.

Hypothèses et notations

▷ Dans cette partie, on considère une suite $(u_n)_n \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_n u_n$ diverge.

▷ Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n := \sum_{k=0}^n u_k$.

11. Montrer que $\sum_n \frac{u_n}{(S_n)^2}$ converge.

On pourra utiliser que $(S_n)^2 \geq S_n S_{n-1}$ et exprimer u_n en fonction de S_n .

12. On veut montrer que $\sum_n \frac{u_n}{S_n}$ diverge.

(a) On suppose que $\frac{u_n}{S_n} \not\rightarrow 0$. Conclure.

(b) On suppose que $\frac{u_n}{S_n} \rightarrow 0$.

(i) Montrer que la série $\sum_n \ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right)$ diverge.

On passera par les sommes partielles et on utilisera les propriétés du logarithme.

(ii) Conclure.

Partie IV – Trois belles propriétés de ℓ^2 .

Bilan et notations

▷ D'après ce qui précède, on sait que ℓ^2 est un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(\cdot | \cdot)$ défini par

$$(a | b) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n \quad \text{si } a, b \in \ell^2.$$

▷ Dans la suite, si $a \in \ell^2$, on notera $\|a\|_2 := \sqrt{(a | a)}$.

▷ On pourra utiliser librement dans la suite que

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad a, b \in \ell^2 \implies a \times b \in \ell^1.$$

13. Réciproque de la propriété de transfert.

(a) Soit $a \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. Montrer que

$$(\forall b \in \ell^2, a \times b \in \ell^1) \implies a \in \ell^2.$$

On raisonnera par l'absurde et on utilisera les résultats de la partie III.

(b) Montrer que le résultat est encore valable si $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

14. L'espace ℓ^2 n'a pas de borne supérieure.

Dans cette question, on veut montrer qu'il n'existe pas de suite $(M_n)_n$ telle que

$$\forall u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad \left(u \in \ell^2 \iff u_n = o(M_n) \text{ quand } n \rightarrow \infty \right).$$

On suppose l'existence d'une telle suite $(M_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, qu'on fixe.

En utilisant la question 13.(b), aboutir à une contradiction et conclure.

15. L'espace $(\ell^2)'$ est isomorphe à ℓ^2 .

Montrer que

$$\Phi : \begin{cases} \ell^2 \longrightarrow (\ell^2)' \\ a \longmapsto q_a \end{cases}$$

est un isomorphisme.

Partie V – Un critère pour être ℓ^2 .

Notations

Dans cette partie, on fixe :

▷ une fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x > 0, \quad f(x) > 0 ;$$

▷ une suite $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$u_0 \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (u_n \geq 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n)).$$

16. On suppose que

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in [0, \delta], \quad f(x) \geq x.$$

Montrer que $u_n \not\rightarrow 0$.

17. Le critère pour être ℓ^2 .

Dans cette question, on suppose que

$$f(x) = x - Cx^\alpha + o(x^\alpha) \text{ quand } x \rightarrow 0,$$

où $C \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha > 1$.

(a) Montrer que $C < 0 \implies u_n \not\rightarrow 0$.

(b) On suppose que $C > 0$ et $u_n \rightarrow 0$.

(i) Montrer que $u_n^{1-\alpha} \sim C(\alpha-1)n$.

On pourra utiliser le théorème de Cesàro.

(ii) En déduire que

$$(u_n)_n \in \ell^2 \iff \alpha < 3.$$

Partie VI – Application à une suite récurrente.

Rappels et notations

▷ On pourra utiliser le résultat suivant, légère généralisation de la question 17. :

Proposition.

Soit I un intervalle de longueur non nulle contenant 0 et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.
Soit $C > 0$ et soit $\alpha > 1$ tels que

$$f(x) = x - Cx^\alpha + o(x^\alpha) \text{ quand } x \rightarrow 0.$$

Soit $(u_n)_n \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Alors,

$$u_n \rightarrow 0 \implies \left((u_n)_n \in \ell^2 \iff \alpha < 3 \right).$$

▷ Dans cette partie, on considère $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable qui est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 - t + 1 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

18. Montrer que f est \mathcal{C}^∞ .

19. Montrer que $f \geq 0$ et que f est croissante sur $[0, 1]$.

20. On veut montrer que $\forall x \in]0, 1], f(x) < x$. On pose

$$A := \{x \in]0, 1] \mid f(x) \geq x\}.$$

On raisonne par l'absurde et on suppose $A \neq \emptyset$. On pose $a := \inf A$.

(a) Montrer que $a \in A$.

(b) Montrer que $a > 0$.

(c) En utilisant le théorème des accroissements finis, aboutir à une contradiction.

21. On considère la suite $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

(a) Montrer que $(u_n)_n$ est bien définie.

(b) Montrer que $u_n \rightarrow 0$ et $(u_n)_n \in \ell^2$.

Partie VII – Application à une intégrale imbriquée à l’infini.

▷ On fixe $\alpha > 0$ et on considère la fonction

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \frac{e^{1-2 \cosh(t)}}{2}. \end{cases}$$

▷ On considère la suite $(x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par

$$x_0 := 1,$$

$$x_1 := \int_{-1}^1 g(t) \, dt,$$

$$x_2 := \int_{-\int_{-1}^1 g(\theta) \, d\theta}^{\int_{-1}^1 g(\theta) \, d\theta} g(t) \, dt,$$

$$x_3 := \int_{\int_{-\int_{-1}^1 g(x) \, dx}^{\int_{-1}^1 g(x) \, dx} \int_{-\int_{-1}^1 g(\theta) \, d\theta}^{\int_{-1}^1 g(\theta) \, d\theta} g(t) \, dt,$$

$$x_4 := \int_{\int_{-\int_{-1}^1 g(x) \, dx}^{\int_{-1}^1 g(x) \, dx} \int_{-\int_{-1}^1 g(\theta) \, d\theta}^{\int_{-1}^1 g(\theta) \, d\theta} \int_{-\int_{-1}^1 g(u) \, du}^{\int_{-1}^1 g(u) \, du} g(t) \, dt,$$

etc.

22. Montrer que $(x_n)_n$ est décroissante.

23. Montrer que $x_n \rightarrow 0$.

24. (a) Montrer que $(x_n)_n \notin \ell^2$.

(b) Donner un équivalent de x_n .

FIN DU SUJET.

