

DS 4
CORRIGÉ

Étude d'une suite de racines
Application à l'optimalité d'un contrôle

Partie I – Un contrôle classique

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré n qu'on écrit

$$P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$

où $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, a_k \in \mathbb{C}$.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de P .

Montrer que

$$\left(\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, |a_k| \leq 1 \right) \implies |\alpha| < 2.$$

On suppose que $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, |a_k| \leq 1$.

On raisonne par l'absurde et on suppose que $|\alpha| \geq 2$. On a

$$\alpha^n = - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \alpha^k.$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned} |\alpha^n| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k \alpha^k \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |\alpha|^k \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |\alpha|^k && \text{car } \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, |a_k| \leq 1 \\ &= \frac{|\alpha|^n - 1}{|\alpha| - 1} && (\text{car } |\alpha| \neq 1 \text{ car } |\alpha| \geq 2) \\ &\leq |\alpha|^n - 1 && (\text{car } |\alpha| - 1 \geq 1 \text{ donc } \frac{1}{|\alpha| - 1} \leq 1) \end{aligned}$$

C'est absurde.

Partie II – Étude d’une fonction auxiliaire

Dans la suite, on considère la fonction

$$f_n : \begin{cases} [1, 2] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto t^{n+1} - 2t^n + 1. \end{cases}$$

2. (a) Étudier le signe de $f'_n(t)$ pour $t \in [1, 2]$.

Soit $t \in [1, 2]$. On a $f'_n(t) = (n+1)t^n - 2nt^{n-1} = t^{n-1}((n+1)t - 2n)$.

Comme $t \geq 0$, on a

$$f'_n(t) \geq 0 \iff (n+1)t - 2n \geq 0 \iff t \geq \frac{2n}{n+1} = 2 - \frac{2}{n+1},$$

avec égalité si et seulement si $t = 2 - \frac{2}{n+1}$. D’où le tableau de signes :

t	1	$2 - \frac{2}{n+1}$	2
$f'_n(t)$		− 0 +	

- (b) En déduire la valeur de u_n telle que le tableau de variations de f_n soit

t	1	$2 - u_n$	2
f_n		$f_n(2 - u_n)$	

On précisera les valeurs en 1 et 2 mais on ne calculera pas $f_n(2 - u_n)$.

La valeur $u_n := \frac{2}{n+1}$ convient. De plus, on a

$$f_n(1) = 0 \quad \text{et} \quad f_n(2) = 1.$$

On a alors le tableau de variations

t	1	$2 - \frac{2}{n+1}$	2
f_n	0	$f_n(2 - u_n)$	1

- (c) En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que f_n s'annule en un unique point sur $]1, 2]$.

Comme f_n est strictement décroissante sur $[0, 2 - u_n]$ et que $f_n(0) = 0$, on a

$$f_n(2 - u_n) < 0.$$

Comme $f_n(1) > 0$, comme f_n est strictement croissante sur $[0, 2 - u_n]$ et qu'elle est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique point dans $[2 - u_n, 1]$ en lequel f_n s'annule.

De plus, f_n ne s'annule pas sur $]0, 2 - u_n]$. Finalement,

il existe un unique point dans $]0, 1]$ en lequel f_n s'annule.

3. On note

$$m_n := 1 - \left(2 - \frac{2}{n+1}\right)^n \times \frac{2}{n+1}.$$

- (a) Sans justification, donner un équivalent simple de m_n quand $n \rightarrow \infty$.

On trouve

$$m_n \sim -\frac{1}{e^2} \times \frac{2^{n+1}}{n}.$$

- (b) En déduire la limite de la suite $(m_n)_n$.

On a donc $m_n \longrightarrow -\infty$.

4. Dessiner l'allure de \mathcal{C}_{f_n} .

On attend un dessin propre, schématique, sur lequel figurent quelques valeurs remarquables.

Voici l'allure du graphe de f_6 .



Partie III – Premières propriétés de la suite des racines

5. (a) Soit $t \in]1, 2]$. Montrer que

$$P_n(t) = 0 \iff f_n(t) = 0.$$

On calcule, comme $t \neq 1$,

$$\begin{aligned} P_n(t) &= t^n - \sum_{k=0}^{n-1} t^k \\ &= t^n - \frac{t^n - 1}{t - 1} \\ &= \frac{t^n(t - 1) - t^n + 1}{t - 1} \\ &= \frac{t^{n+1} - 2t^n + 1}{t - 1} = \frac{f_n(t)}{t - 1}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien

$$P_n(t) = 0 \iff f_n(t) = 0.$$

- (b) En déduire que P_n possède une unique racine dans $]1, +\infty[$.

- Comme, d'après la question 2.(c), f_n possède un unique zéro dans $]1, 2]$, on en déduit que P_n possède une unique racine dans $]1, 2]$.
- Il nous reste à prouver que $\forall t > 2$, $P_n(t) \neq 0$. Soit $t > 2$. On a

$$t^{n+1} > 2t^n \geq 2t^n - 1 \quad \text{donc} \quad t^{n+1} - 2t^n + 1 > 0$$

donc $P_n(t) > 0$.

Ainsi,

$$P_n \text{ possède une unique racine dans }]1, +\infty[.$$

Notation

Dans toute la suite du problème, pour tout $n \geq 2$, on note x_n cette unique racine.

6. Montrer que $2 - \frac{2}{n+1} \leq x_n < 2$.

Comme $f\left(2 - \frac{2}{n+1}\right) < 0$ et $f_n(2) > 0$, le théorème des valeurs intermédiaires nous assure que l'unique zéro x_n de f_n vérifie nécessairement

$$2 - \frac{2}{n+1} \leq x_n < 2.$$

7. (a) Calculer x_2 .

Le réel x_2 est racine du polynôme $X^2 - X - 1$ et vérifie $x_2 > 1$. On trouve $x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

- (b) Montrer que $x_2 > \frac{3}{2}$.

On raisonne par équivalences. On a

$$\begin{aligned} x_2 > \frac{3}{2} &\iff \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > \frac{3}{2} \\ &\iff 1 + \sqrt{5} > 3 \\ &\iff \sqrt{5} > 2 \\ &\iff 5 > 4 \end{aligned} \quad \text{car } (\cdot)^2 \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+.$$

Donc, comme on a $5 > 4$, on a bien $x_2 > \frac{3}{2}$.

8. Montrer que $x_n \rightarrow 2$.

Comme on a $\forall n \geq 2$, $2 - \frac{2}{n+1} \leq x_n < 2$ et comme $2 - \frac{2}{n+1} \rightarrow 2$, par encadrement, on en déduit que

$$x_n \rightarrow 2.$$

Partie IV – Optimalité du contrôle classique

9. Montrer que 2 contrôle les racines de \mathcal{E} .

Il s'agit d'une reformulation de la question 1..

10. Soit $M \in \mathbb{R}_+$. Montrer que

$$M \text{ contrôle les racines de } \mathcal{E} \implies M \geq 2.$$

Soit $M \in \mathbb{R}_+$ tel que M contrôle les racines de \mathcal{E} .

Comme $P_n \in \mathcal{E}_n$ et comme $x_n \in Z_{\mathbb{C}}(P_n)$, on a (par définition de M) $|x_n| \leq M$.

En faisant tendre $n \rightarrow \infty$, on obtient

$$2 \leq M.$$

Partie V – Un premier lemme

11. Montrer que

$$\delta_n \times p_n \longrightarrow \ell \implies (1 + \delta_n)^{p_n} \longrightarrow e^\ell.$$

Supposons que $\delta_n \times p_n \longrightarrow \ell$. On a

$$(1 + \delta_n)^{p_n} = \exp(p_n \ln(1 + \delta_n)).$$

De plus, comme $\delta_n \longrightarrow 0$, on a $\ln(1 + \delta_n) \sim \delta_n$, d'après le cours. Donc, on a

$$p_n \ln(1 + \delta_n) \sim p_n \times \delta_n \quad \text{et donc} \quad p_n \ln(1 + \delta_n) \longrightarrow \ell.$$

Comme $\exp(\cdot)$ est continue en ℓ , on a

$$(1 + \delta_n)^{p_n} = \exp(p_n \ln(1 + \delta_n)) \longrightarrow e^\ell.$$

12. Applications.

(a) (i) Soit $n \geq 2$. Montrer que $n! \geq 3^{n-2}$.

On raisonne par récurrence.

- On pose, pour $n \geq 2$, $\mathcal{P}(n)$: « $n! \geq 3^{n-2}$ ».

- Déjà, $\mathcal{P}(2)$ est vraie. En effet, on a $2! = 2$ et $3^{2-2} = 1$.

- Montrons que $\forall n \geq 2$, $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$.

Soit $n \geq 2$ tel que $\mathcal{P}(n)$. On a $n! \geq 3^{n-2}$. On a donc $(n+1)! \geq 3^{n-2}(n+1)$. Or, comme $n \geq 2$, on a $n+1 \geq 3$ et donc

$$(n+1)! \geq 3^{n-2}(n+1) \geq 3^{n-2} \times 3 = 3^{(n+1)-2}.$$

Donc, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Ainsi, d'après le principe de récurrence, on a $\boxed{\forall n \geq 2, n! \geq 3^{n-2}}.$

(ii) En déduire que

$$\left(1 + \frac{1}{n!}\right)^{2^n} \longrightarrow 1.$$

On a donc

$$0 \leq \frac{2^n}{n!} \leq \frac{2^n}{3^{n-2}} = \frac{1}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^n \longrightarrow 0.$$

Donc, d'après la question 12.(a)(i), on a

$$\boxed{\left(1 + \frac{1}{n!}\right)^{2^n} \longrightarrow e^0 = 1.}$$

(b) Déterminer la limite de la suite de terme général

$$\left(1 + \frac{1}{n^n}\right)^{(n+1)^n}.$$

Déjà, on a

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Comme $\frac{1}{n} \times n \rightarrow 1$, d'après la question **12.**(a)(i) avec « $p_n = n$ » et « $\delta_n = \frac{1}{n}$ », on a

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e^1 = e.$$

Donc, on a

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} \rightarrow e.$$

Donc, en réappliquant la question **12.**(a)(i) avec « $p_n = (n+1)^n$ » et « $\delta_n = n^n$ », on obtient

$$\boxed{\left(1 + \frac{1}{n^n}\right)^{(n+1)^n} \rightarrow e^e.}$$

13. Le premier lemme.

Montrer que

$$\delta_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \implies (1 + \delta_n)^n \rightarrow 1.$$

Supposons que $\delta_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. On a donc $\delta_n \times n \rightarrow 0$. Donc, en appliquant la question **12.**(a)(i), on obtient

$$\boxed{(1 + \delta_n)^n \rightarrow e^0 = 1.}$$

Partie VI – Un deuxième lemme

14. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\delta_n \neq 0$ et que $\delta_n = O\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

(a) Montrer que

$$\frac{(1 + \delta_n)^n - 1}{n\delta_n} = 1 + \frac{\delta_n}{n} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \delta_n^{k-2}.$$

D'après la formule du binôme de Newton, on a

$$(1 + \delta_n)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \delta_n^k = 1 + n\delta_n + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \delta_n^k.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \frac{(1 + \delta_n)^n - 1}{n\delta_n} &= \frac{n\delta_n + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \delta_n^k}{n\delta_n} \\ &= 1 + \frac{1}{n} \times \frac{\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \delta_n^k}{\delta_n} \\ &= 1 + \frac{\delta_n}{n} \times \frac{\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \delta_n^k}{\delta_n^2} \\ &= 1 + \frac{\delta_n}{n} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \delta_n^{k-2}, \end{aligned}$$

ce qu'on voulait démontrer.

(b) Montrer que

$$\left| \frac{\delta_n}{n} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \delta_n^{k-2} \right| \leq \frac{2^n |\delta_n|}{n} \text{ APCR.}$$

Comme $\delta_n = O\left(\frac{1}{2^n}\right)$, on a $\delta_n \rightarrow 0$; et donc on a $|\delta_n| \leq 1$ APCR.

Soit donc N_0 tel que pour tout $n \geq N_0$, on a $|\delta_n| \leq 1$.

Soit $n \geq N_0$. On calcule :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\delta_n}{n} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \delta_n^{k-2} \right| &\leq \frac{|\delta_n|}{n} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} |\delta_n|^{k-2} \\ &\leq \frac{|\delta_n|}{n} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} && (\text{car pour tout } \ell \geq 0, |\delta_n|^\ell \leq 1) \\ &\leq \frac{|\delta_n|}{n} \underbrace{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}}_{=2^n} = \frac{2^n |\delta_n|}{n}. \end{aligned}$$

Donc, on a

$$\left| \frac{\delta_n}{n} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \delta_n^{k-2} \right| \leq \frac{2^n |\delta_n|}{n} \text{ APCR.}$$

(c) **Le deuxième lemme.**

En déduire que

$$(1 + \delta_n)^n - 1 \sim n\delta_n \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Comme $\delta_n = O\left(\frac{1}{2^n}\right)$, la suite $(2^n \delta_n)_n$ est bornée. Donc, on a

$$\frac{2^n |\delta_n|}{n} \rightarrow 0$$

et donc

$$\frac{\delta_n}{n} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \delta_n^{k-2} \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Donc, d'après la question 14.(a), on a $\frac{(1 + \delta_n)^n - 1}{n\delta_n} \rightarrow 1$, ie $(1 + \delta_n)^n - 1 \sim n\delta_n$, ie :

$$(1 + \delta_n)^n - 1 = n\delta_n + o(n\delta_n).$$

Finalement, on a

$$(1 + \delta_n)^n = 1 + n\delta_n + o(n\delta_n).$$

15. Un raffinement.

Montrer que

$$(1 + \delta_n)^n = 1 + n\delta_n + \frac{n^2 \delta_n^2}{2} + o(n^2 \delta_n^2) \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

En utilisant la formule de Newton, de même que dans la question 14.(a), on a

$$\frac{\left((1 + \delta_n)^n - (1 + n\delta_n)\right) - \frac{n(n+1)}{2} \delta_n^2}{\frac{n(n+1)}{2} \delta_n^2} = 1 + \frac{2\delta_n}{n(n+1)} \sum_{k=3}^n \binom{n}{k} \delta_n^{k-3}.$$

Or, on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{2\delta_n}{n(n+1)} \sum_{k=3}^n \binom{n}{k} \delta_n^{k-3} \right| &\leq \frac{2|\delta_n|}{n(n+1)} \sum_{k=3}^n \binom{n}{k} && \text{APCR} \\ &\leq \frac{2|\delta_n|}{n(n+1)} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \\ &= \frac{2|\delta_n| 2^n}{n(n+1)} \rightarrow 0 && \text{car } \delta_n = O\left(\frac{1}{2^n}\right). \end{aligned}$$

Donc, on a

$$\left((1 + \delta_n)^n - (1 + n\delta_n)\right) \sim \frac{n(n+1)}{2} \delta_n^2.$$

Or, comme $n = o(n^2)$, on a $n\delta_n^2 = o(n^2\delta_n^2)$; et donc

$$\frac{n(n+1)}{2} \delta_n^2 = \frac{n^2\delta_n^2 + n\delta_n^2}{2} \sim \frac{n^2\delta_n^2}{2}.$$

Finalement, on a

$$\left((1 + \delta_n)^n - (1 + n\delta_n)\right) \sim \frac{n^2\delta_n^2}{2}$$

c'est-à-dire

$$(1 + \delta_n)^n = 1 + n\delta_n + \frac{n^2\delta_n^2}{2} + o(n^2\delta_n^2).$$

Partie VII – Étude de la suite des racines

On rappelle que la suite $(x_n)_n$ introduite dans la partie **III**. vérifie la relation suivante

$$\forall n \geq 2, \quad x_n^{n+1} - 2x_n^n + 1 = 0.$$

et qu'on a démontré que $x_n \rightarrow 2$.

16. (a) Montrer que $f_n(x_{n+1}) > 0$.

Soit $t \in [1, 2]$. On a

$$\begin{aligned} f_n(t) &= t^n(t-2) + 1 \\ f_{n+1}(t) &= t^{n+1}(t-2) + 1. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \frac{f_{n+1}(t)}{t} + 1 - \frac{1}{t} \\ &= \frac{f_{n+1}(t)}{t} + \frac{t-1}{t}. \end{aligned}$$

Donc, on calcule

$$\begin{aligned} f_n(x_{n+1}) &= \frac{f_{n+1}(x_{n+1})}{x_{n+1}} + \frac{x_{n+1} - 1}{x_{n+1}} \\ &= \frac{x_{n+1} - 1}{x_{n+1}}. \end{aligned}$$

Comme $x_{n+1} > 1$, on obtient $f_n(x_{n+1}) > 0$.

(b) En déduire que $(x_n)_n$ est strictement croissante.

- Déjà, on a vu que $\forall t \in]1, x_n], f_n(t) \leq 0$.
- Par conséquent, on a $x_{n+1} > x_n$.
- Ainsi, la suite $(x_n)_n$ est strictement croissante.

17. On considère la suite $(\varepsilon_n)_n$ définie par

$$\forall n \geq 2, x_n = 2 - \varepsilon_n.$$

(a) Montrer que $\varepsilon_n \rightarrow 0$.

On a montré dans la question 8. que $x_n \rightarrow 2$. On a donc $\varepsilon_n \rightarrow 0$.

(b) Montrer que

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2^n} \frac{1}{\left(1 - \frac{\varepsilon_n}{2}\right)^n}.$$

On réécrit la relation fondamentale de x_n , à savoir

$$x_n^n \times (x_n - 2) = -1$$

en forçant à apparaître ε_n . On obtient

$$(2 - \varepsilon_n)^n \times \varepsilon_n = 1 \quad \text{donc} \quad 2^n \left(1 - \frac{\varepsilon_n}{2}\right)^n \varepsilon_n = 1.$$

Donc,

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2^n} \frac{1}{\left(1 - \frac{\varepsilon_n}{2}\right)^n}.$$

(c) En déduire que

$$\varepsilon_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \quad \text{APCR.}$$

Comme $\varepsilon_n \rightarrow 0$, on a $1 - \frac{\varepsilon_n}{2} \rightarrow 1$. Donc, on a

$$1 - \frac{\varepsilon_n}{2} \geq \frac{2}{3} \quad \text{APCR.}$$

Donc, on a

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{\varepsilon_n}{2}\right)^n} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad \text{APCR.}$$

Donc, on a

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2^n} \frac{1}{\left(1 - \frac{\varepsilon_n}{2}\right)^n} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \text{ APCR.}$$

(d) En déduire que $\varepsilon_n \sim \frac{1}{2^n}$ quand $n \rightarrow \infty$.

Comme par ailleurs on a $\forall n \geq 2, \varepsilon_n > 0$ (puisque $\forall n, x_n < 2$), on en déduit que (à partir d'un certain rang) :

$$n |\varepsilon_n| = n \varepsilon_n \leq n \left(\frac{3}{4}\right)^n \rightarrow 0.$$

Le premier lemme, de la question **13.**, s'applique donc : on a

$$\left(1 - \frac{\varepsilon_n}{2}\right)^n \rightarrow e^0 = 1.$$

Par conséquent, on a $\boxed{\varepsilon_n \sim \frac{1}{2^n}}$ quand $n \rightarrow \infty$.

18. On considère la suite $(\alpha_n)_n$ définie par

$$\forall n \geq 2, x_n = 2 - \frac{1}{2^n} + \alpha_n.$$

(a) (i) Montrer que $2^n \alpha_n = 1 - 2^n \varepsilon_n$.

On a $x_n = 2 - \varepsilon_n = 2 - \frac{1}{2^n} + \alpha_n$. Par conséquent, on a

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2^n} - \alpha_n.$$

Donc,

$$2^n \varepsilon_n = 1 - 2^n \alpha_n \quad \text{donc} \quad \boxed{2^n \alpha_n = 1 - 2^n \varepsilon_n.}$$

(ii) En déduire que $\alpha_n = o\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

Comme $\varepsilon_n \sim \frac{1}{2^n}$, on a $1 - 2^n \varepsilon_n \rightarrow 0$ ie on a $2^n \alpha_n \rightarrow 0$, ie

$$\boxed{\alpha_n = o\left(\frac{1}{2^n}\right).}$$

(b) Montrer que

$$2^n \alpha_n \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{\alpha_n}{2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{\alpha_n}{2}\right)^n - 1.$$

On force à apparaître α_n dans la relation fondamentale de x_n . On a

$$x_n^{n+1} = 2x_n^n - 1 \quad ie \quad \left(2 - \frac{1}{2^n} + \alpha_n\right)^{n+1} = 2\left(2 - \frac{1}{2^n} + \alpha_n\right)^n - 1.$$

Donc,

$$2^{n+1} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{\alpha_n}{2}\right)^{n+1} = 2^{n+1} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{\alpha_n}{2}\right)^n - 1. \quad (*)$$

Afin de simplifier les calculs, on pose

$$A(n) := 1 - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{\alpha_n}{2}.$$

On a

$$\begin{aligned} 2^{n+1} A(n)^{n+1} &= 2^{n+1} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{\alpha_n}{2}\right) \times A(n)^n \\ &= 2^{n+1} A(n)^n - A(n)^n + 2^n \alpha_n A(n)^n. \end{aligned}$$

Donc, (*) se réécrit

$$2^{n+1} A(n)^n - A(n)^n + 2^n \alpha_n A(n)^n = 2^{n+1} A(n)^n - 1.$$

Ainsi, on a $2^n \alpha_n A(n)^n = A(n)^n - 1$ et donc

$$\boxed{2^n \alpha_n \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{\alpha_n}{2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{\alpha_n}{2}\right)^n - 1.}$$

(c) En déduire que $\alpha_n \sim -\frac{n}{2 \times 4^n}$.

• Déjà, comme $\alpha_n = o\left(\frac{1}{2^n}\right)$, on a

$$-\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{\alpha_n}{2} \sim -\frac{1}{2^{n+1}} = O\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

• Donc, le deuxième lemme, prouvé dans la question 14.(c), s'applique ; on a

$$\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{\alpha_n}{2}\right)^n - 1 \sim -\frac{n}{2^{n+1}} \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

• En particulier, on a $\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{\alpha_n}{2}\right)^n \sim 1$.

• Par conséquent, l'égalité de la question 18.(b) donne

$$2^n \alpha_n \sim -\frac{n}{2^{n+1}}.$$

• Ainsi, on a $\boxed{\alpha_n \sim -\frac{n}{2 \times 4^n}}.$

19. Donner le terme suivant du développement asymptotique de x_n .

- Déjà, on considère la suite β_n définie par

$$\forall n \geq 2, \quad x_n = 2 - \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2 \times 4^n} + \beta_n.$$

- Par des raisonnements similaires à ceux de la question **18.**(a)(ii), on a

$$\beta_n = o\left(\frac{n}{4^n}\right).$$

- On écrit

$$x_n = 2 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{n}{4^{n+1}} + \frac{\beta_n}{2} \right).$$

et on pose

$$B(n) := 1 - \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{n}{4^{n+1}} + \frac{\beta_n}{2}.$$

de sorte que $x_n = 2B(n)$.

- Donc, on a

$$\begin{aligned} x_n^n (2 - x_n) &= 2^n B(n)^n \left(\frac{1}{2^n} + \frac{n}{2 \times 4^n} - \beta_n \right) \\ &= B(n)^n + \frac{nB(n)^n}{2^{n+1}} - 2^n B(n)^n \beta_n. \end{aligned}$$

- Ainsi, la relation fondamentale $x_n^n (2 - x_n) = 1$ de x_n s'écrit

$$\boxed{\frac{nB(n)^n}{2^{n+1}} - 2^n B(n)^n \beta_n = 1 - B(n)^n.} \quad (**)$$

- Maintenant, utilisons le raffinement du deuxième lemme donné dans la question **15.** On pose

$$\delta_n := -\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{n}{4^{n+1}} + \frac{\beta_n}{2}.$$

On a

$$\begin{aligned} B(n)^n &= (1 + \delta_n)^n \\ &= 1 + n\delta_n + \frac{n^2\delta_n^2}{2} + o\left(n^2\delta_n^2\right). \end{aligned}$$

Comme $\delta_n \sim -\frac{1}{2^{n+1}}$, on peut écrire ce développement asymptotique

$$\boxed{B(n)^n = 1 + n\delta_n + \frac{n^2\delta_n^2}{2} + o\left(\frac{n^2}{4^n}\right).} \quad (1)$$

- On a

$$n\delta_n = -\frac{n}{2^{n+1}} - \frac{n^2}{4^{n+1}} + \frac{n\beta_n}{2}.$$

Comme $\beta_n = o\left(\frac{n}{4^n}\right)$, on a

$$\frac{n\beta_n}{2} = o\left(\frac{n^2}{4^n}\right).$$

On a donc

$$\boxed{n\delta_n = -\frac{n}{2^{n+1}} - \frac{n^2}{4^{n+1}} + o\left(\frac{n^2}{4^n}\right).} \quad (2)$$

- Travaillons maintenant sur le terme δ_n^2 : on a $\delta_n \sim -\frac{1}{2^{n+1}}$. Donc, on a

$$\delta_n^2 \sim \frac{1}{4^{n+1}} \quad ie \quad \delta_n^2 = \frac{1}{4^{n+1}} + o\left(\frac{1}{4^n}\right).$$

Donc, on a

$$\boxed{\frac{n^2\delta_n^2}{2} = \frac{n^2}{2 \times 4^{n+1}} + o\left(\frac{n^2}{4^n}\right).} \quad (3)$$

- Bilan : après simplification, en utilisant (1), (2) et (3), on a

$$\boxed{B(n)^n = 1 - \frac{n}{2^{n+1}} - \frac{n^2}{2 \times 4^{n+1}} + o\left(\frac{n^2}{4^n}\right).}$$

- En particulier, on a

$$\frac{nB(n)^n}{2^{n+1}} = \frac{n}{2^{n+1}} - \frac{n^2}{4^{n+1}} - \frac{n^3}{2 \times 8^{n+1}} + o\left(\frac{n^3}{8^n}\right).$$

Comme $\frac{n^3}{2 \times 8^{n+1}} = o\left(\frac{n^2}{4^n}\right)$, on a donc

$$\boxed{\frac{nB(n)^n}{2^{n+1}} = \frac{n}{2^{n+1}} - \frac{n^2}{4^{n+1}} + o\left(\frac{n^2}{4^n}\right).}$$

- Or, l'identité (**) est

$$\frac{nB(n)^n}{2^{n+1}} - 2^n B(n)^n \beta_n = 1 - B(n)^n ;$$

on a donc

$$\left(\frac{n}{2^{n+1}} - \frac{n^2}{4^{n+1}} + o\left(\frac{n^2}{4^n}\right) \right) - 2^n B(n)^n \beta_n = \frac{n}{2^{n+1}} + \frac{n^2}{2 \times 4^{n+1}} + o\left(\frac{n^2}{4^n}\right).$$

- Donc, on a

$$-2^n B(n)^n \beta_n = \frac{3n^2}{2 \times 4^{n+1}} + o\left(\frac{n^2}{4^n}\right)$$

donc

$$-2^n B(n)^n \beta_n \sim \frac{3n^2}{2 \times 4^{n+1}}.$$

Comme $B(n)^n \sim 1$ (d'après le premier lemme) et donc $-2^n B(n)^n \beta_n \sim -2^n \beta_n$, on a donc

$$\boxed{\beta_n \sim -\frac{3n^2}{8^{n+1}}}.$$

- Conclusion : on a donc

$$\boxed{x_n = 2 - \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2 \times 4^n} - \frac{3n^2}{8^{n+1}} + o\left(\frac{n^2}{8^n}\right)}.$$