

Produits  
Coproduits  
Produits Veinriels

---

## 1) $k$ -algèbres

Def: un anneau  $A$  +  
une structure de  
 $k$ -es.

Prop: Soit  $A$  un  $k$ -algèbre non nulle.

Alors  $k \hookrightarrow A$ .

( $k$  s'insère dans  $A$ .

$\exists \varphi : k \rightarrow A$  injectif)

Une :  $k \xrightarrow{\varphi} A$  +  $A \neq \{0\}$

$k$  corps

↓  
lineärif

dene Lne :

löt  $a \in \ker \varphi \subset k$

Si  $a \neq 0$ . Alors on a :

$$\varphi\left(n \cdot \frac{1}{a}\right) = \varphi(n) = 1_A$$

$\neq 1_A$  Absurde

Dac  $a=0$ ,  $\ker \varphi = k$  :

lineärif



Deno Prop

Il veus est dne i  
constuire une flche  
de  $k \rightarrow A$ .

On dispose dne structure de

$k$ -es sur  $A$ .

On définit

$$\varphi: k \longrightarrow A$$

$$\gamma \longmapsto \gamma \cdot 1_A$$

$$\begin{aligned} \text{On a bien } \varphi(\gamma_1 + \gamma_2) &= (\gamma_1 + \gamma_2) \cdot 1_A \\ &= \gamma_1 \cdot 1_A + \gamma_2 \cdot 1_A \end{aligned}$$

(car  $A$   $k$ -eu)

$$\varphi(\gamma_1 \gamma_2) = (\gamma_1 \gamma_2) \cdot 1_A$$

action des  $k$ -espaces

$$(\gamma u) \cdot x = \gamma \cdot (u \cdot x)$$

action des  $k$ -algébres

$$\gamma \cdot (x \times y) = (\gamma \cdot x) \times y$$

$$= x \times (\gamma \cdot y)$$

$$(\gamma_1 \cdot 1_A) \times (\gamma_2 \cdot 1_A) = \gamma_2 \cdot (\gamma_1 \cdot 1_A) \times 1_A$$

$$= \gamma_2 \cdot (\gamma_1 \cdot 1_A)$$

$$= (\gamma_2 - \gamma_1) \cdot 1_A = \varphi(\gamma_1, \gamma_2)$$

$\nearrow \gamma$   
 $\nwarrow k-\alpha$

- $\varphi(O_k) = O_k \cdot 1_A = O_A \cdot (\underbrace{e_{k+1}}_{k-\alpha})$

- $\varphi(1_k) = 1_k \cdot 1_A$

assume  $k-\alpha$        $1 \cdot n = n$



## Reciproquement

(Sort A in alphanum)

Sont  $\varphi : k \rightarrow A$

Alors  $A$  peut être munie de  
structure de  $k$ -algèbre ( $\infty$ )

defo :  $\sum_{\substack{n \in K \\ n \in A}} n$  on pose :

$$\pi \circ n := \varphi(\pi) \times n \quad (\infty)$$

Bilan

Nouvelle définition

Sont  $A$  un anneau

Une  $A$ -algèbre est un couple

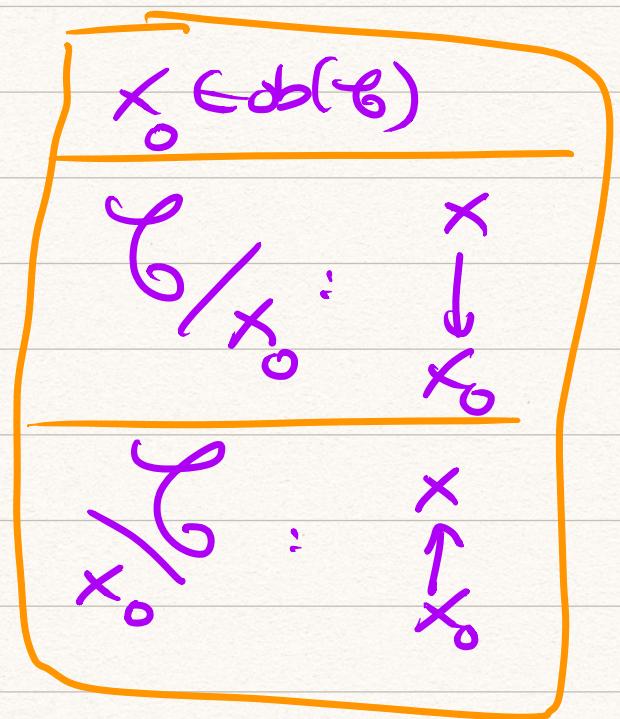
$(B, \varphi)$  où  $B$  est un anneau  
et  $\varphi : A \rightarrow B$  est  
un morphisme

Consequence :

• Reppel :  $(\text{Top})/S$  la

catégorie des fibres au-dessus de  $S$

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ S \end{array}$$



• Sit A un anneau

Alors

$$A \diagup (\text{Ann})$$

$$= \begin{matrix} B \\ \uparrow \\ A \end{matrix} = (A - A\text{lg}).$$

$$\underline{\text{Bilan}} : (k - A\text{lg}) = \downarrow \diagup (\text{Ann})$$

$$= \left\{ k \rightarrow A \right\}$$

(Rq) Si  $B \in (A\text{-Alg})$

alors en particulier  $B \in (A\text{-Mod})$

2) lien avec les objets initiaux / finaux

$\mathcal{C}$  catégorie ;  $X_{ini}$  un objet initial ; alors  $\forall x \in \text{ob}(\mathcal{C})$ ,

$\exists!$   $X_{ini} \longrightarrow x$ .

Corollaire :  $\mathcal{C} \simeq \mathcal{C}$

$X_{ini}$

De m<sup>e</sup>, si  $X_{fin}$  est un objet final

donc  $\mathcal{C}$ , alors  $\mathcal{C}/_{\text{f.g.}} \cong \mathcal{C}$ .

$$\underline{\text{CCl}} = (\mathbb{Z} - \text{Alg}) = (\text{Alg})$$

De m  $(\text{Top}) /_{S^1 \star \{p\}} = (\text{Top})$

### 3) Coproducts dans $(\text{Grp})$

- $G, G' \in \text{ob}((\text{Grp}))$

Qu'est-ce que " $G \coprod G'$ "?  
Tie le coproduct de  $G$  et  $G'$ ?

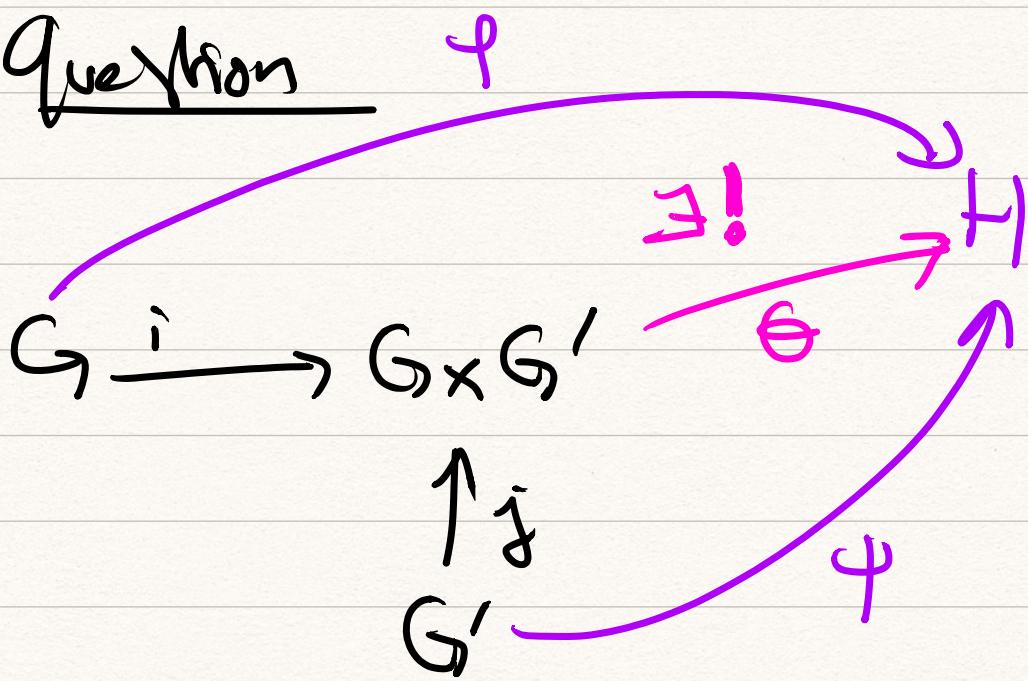
- Est-ce que  $G \times G'$  est un coproduct de  $G$  et  $G'$ ?

T'aî le bon de  $\iota : G \longrightarrow G \times G'$

C'est ok : on prend  $\iota : G \longrightarrow G \times G'$   
 $x \longmapsto (x, e')$

De m  $\tilde{f} : G' \longrightarrow G \times G'$   
 $y \longmapsto (e, y)$

• Question



Sont  $(x, y) \in G \times G'$ .

Je veux que  $\varphi(x) = f((x, e'))$

$\varphi(y) = f((e, y))$

$$\text{Donc : } \theta((n, g)) =$$

$$\theta((n, e') - (e, g))$$

$$= \theta((n, e')) - \theta((e, g))$$

$$= \varphi(n) \cdot \psi(g)$$

D'où l'écriture  
de  $\theta$

$$\textcircled{1} \quad \varphi(g) \cdot \psi(x)$$

Synthèse : Soit  $\varphi : G \rightarrow H$   
 $\psi : G' \rightarrow H$

On pose  $\theta : G \times G' \rightarrow H$

$$(n, g) \mapsto \varphi(n) \cdot \psi(g)$$

On a bien  $\begin{cases} \varphi = \theta \circ i \\ \psi = \theta \circ j \end{cases}$

On  
mais  
 $(e, g) \cdot (x, e')$

On n'a pas rentré q Θ est un morphisme :

$$\Theta((n_1x_1, y_1a_2)) = \ell(n_1x_1) \psi(y_1a_2)$$

$$= \ell(n_1) \ell(x_1) \cdot \psi(y_1) \cdot \psi(a_2)$$

$$= \ell(n_1) \psi(y_1) \cdot \ell(x_1) \psi(a_2)$$



exercice : Trouver un effet

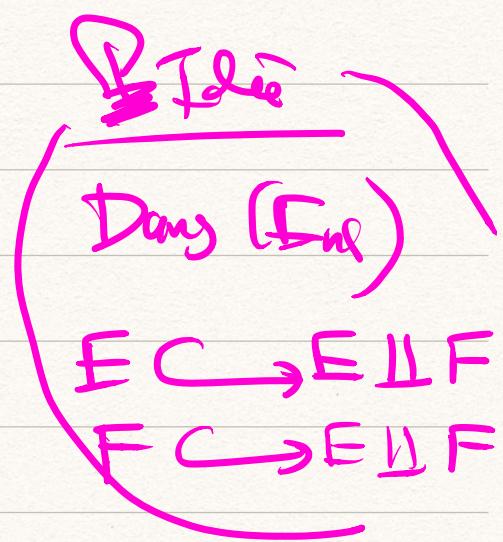
$$(12) \circ (23) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (231)$$

$$(23) \circ (12) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (132)$$



- On cherche un groupe "universel", "minal"  $T$  uni de deux morphes

$$\begin{array}{ccc} i: G & \longrightarrow & T \\ j: G^r & \longrightarrow & T \\ G & \xrightarrow{i} & T & \xrightarrow{j} & H \\ & \uparrow j' & & & \uparrow \\ & G^r & & & \end{array}$$



Idee: On cherche un groupe  $T$  "contenant  $G$ ", "contenant  $G'$ " minimal pour cette propriété.

#### 4) Construction du produit libre

Soient  $G, G'$  deux groupes.

1<sup>o</sup>)  $M =$  l'ensemble des mots

composé dans l'alphabet  $\underline{\underline{G \sqcup G'}}$

$$\text{i.e. } M = \{ g_1 g_2 \dots g_n \mid \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \\ \forall i, "g_i \in G" \\ \text{ou} \\ "g_i \in G'" \end{array} \}$$

X alphabet  $(\bigcup N^n)$

Mots(X) =  $\underset{n \geq 0}{\rightarrow}$  mots

$M$  est un monoïde avec la concaténation.

2<sup>o</sup>) On munît  $M$  de la relation

d'équivalence engendrée par

Si  $g_1, g_2 \in G$  : le mot

à deux lettres  $g_1 g_2 \sim$

au mot à 1 lettre  $(g_1 g_2)$

Si  $\underline{h_1, h_2 \in G}$  : de  $\bar{m}$

$h_1, h_2 \sim (h_1 h_2)$

3)  $H /_{\sim}$  est muni d'une  
structure

Notation :  $G \times G'$   
produit libre  
de  $G$  avec  $G'$

Exemple :

$$\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$$

Notons : a) le seul élémt  $\neq 1$  du 1er  $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ .

On a  $a^2 = 1$

a le 1er  $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$  = {1, a}

et (b) le seul élémt  $\neq 1$  du  $2^d \mathbb{Z}_{2^d}$

$$\text{du } b^2 = 1$$

et le  $2^d \mathbb{Z}_{2^d} = \{1, b\}$

Alors  $\mathbb{Z}_{2^d} * \frac{\mathbb{Z}}{2^d}$

$$= \{ ab, aba, a, b \\ ba, ababa, \\ , baba, ababab, \\ bababa \}$$

Prop :  $G \neq \{e\} \Rightarrow G * G^r$  et  
 $G^r \neq \{e\}$  et ordini

cd :  $G + G'$  et

un coproduct de  $G$  et  $G'$