

Colas Bardavid

Schémas différentiels :
approche géométrique et approche fonctorielle

Colas Bardavid

IRMAR, Université Rennes 1,
Campus de Beaulieu,
35042 RENNES Cédex, France

e-mail : colas.bardavid@univ-rennes1.fr

web : http://perso.univ-rennes1.fr/colas.bardavid/

Version du 7 juillet 2010.

Remerciements

Merci à ceux que j'ai oublié de remercier.

Mes premiers remerciements vont à mon directeur, Felix Ulmer. Merci d'abord de m'avoir fait confiance, en me proposant un sujet. Je t'en suis très reconnaissant. Merci de m'avoir fait découvrir, à travers ton cours de M2, la théorie de Galois différentielle. Merci de m'avoir accueilli dans la communauté Galois-Diff, en me conviant à toutes ces belles conférences, Édimbourg, Luminy, Oberwolfach, Bedlewo. Merci pour tout.

Merci aussi à Jean-Marie Lion et Nicoletta Tchou qui m'ont accompagné durant la dernière année de ma thèse. Merci en particulier Jean-Marie, pour le temps et l'énergie que tu m'as consacrés.

Mes seconds remerciements vont aux rapporteurs, Alexandru Buium et Zoé Chatzidakis. Merci d'avoir accepté cette lourde tâche et de l'avoir menée avec tant de soin. Merci en particulier, Zoé Chatzidakis, pour vos nombreuses remarques qui ont contribué à améliorer mon manuscript.

Merci aux membres du jury, Zoé Chatzidakis, Michèle Loday-Richaud, Jean-Marie Lion, Bertrand Toën et Felix Ulmer. C'est un honneur pour moi que de vous compter dans mon jury. Félicitations Michèle Loday-Richaud pour votre carrière, joyeux anniversaire !

J'ai eu la grande chance de préparer ma thèse au sein de l'IRMAR. Merci pour les excellentes conditions de travail qu'il offre aux doctorants. Quant à l'atmosphère agréable qui y règne, elle est l'œuvre de toutes et de tous : enseignants-chercheurs, bibliothécaires, secrétaires et techniciens. Merci à vous tous ! Merci aussi à l'ENS Ulm pour le cadre qu'elle offre et dont j'ai eu la très grande chance de profiter. Merci en particulier à Marc Rosso qui m'a accompagné dans mon choix d'aller à Rennes. Merci à l'Université de Rennes 1.

J'ai bénéficié, au cours de ces années de thèse — et avant — de l'aide généreuse de nombreuses personnes. Sans elles, la tâche aurait été bien différente. C'est un plaisir pour moi que de remercier aujourd'hui toutes celles et ceux qui m'ont aidé. Merci d'abord à David Bourqui et Goulwen Fichou : leur geste m'a autant aidé qu'il m'a touché. Merci à Bernard Le Stum qui m'a accueilli au sixième étage et qui a toujours été là aux moments importants. Merci à Véronique Le Goff, Delphine Boucher, Antoine Chambert-Loir, Christophe Mourougane, Laurent Moret-Bailly, Michel Gros, Florian Ivorra, Michel Coste, Frank Loray, David Lubicz, Jean-Baptiste Bardet, Viktoria Heu, Anne Virrion, Antoine Ducros. Merci à Guénaël Renault, Pierre Dèbes, Lucia Di Vizio et à Jacques-Arthur Weil. Merci à Claudine Mitschi, pour son attention bienveillante tournée vers la jeune génération. Merci à Michael Singer. Merci à tous ceux qui ont été mes professeurs. Merci en particulier à Miguel Concy et Frank Taïeb, qui m'ont transmis, j'espère, un peu de leur enthousiasme mathématique.

La recherche est une activité passionnante. L'un des grands plaisirs des mathématiques, pour moi, ce sont les moments de partage — partage de connaissances, partage de points de vue, partage d'expériences. Ces moments de partage donnent tout son sens à la rude solitude du travail de mathématicien. Merci à tous ceux qui ont partagé avec moi leurs mathématiques. Merci à Bertrand Toën, maître en partage. Merci à Amaury Thuillier. Merci à Rodolphe Richard et Vincent Pilloni. Merci à João Pedro Pinto dos Santos. Merci à François Ollivier, Gaëtan Chenevier, Guy Casale, Daniel Bertrand, Xavier Caruso, Florian Marty, Bill Keigher, Lourdes Juan, Arne Ledet, Pierre Nguyen, Tobias Dyckerhoff, Michael Wibmer. Merci à Paul Poncet.

J'ai une pensée émue aujourd'hui en souvenir de Jerry Kovacic, qui nous a quittés prématurément l'année passée. Nous nous étions rencontrés à Oberwolfach — ce fut un beau moment de partage.

Une thèse, cela se fait entouré d'autres thésards. Merci à tous les doctorants de l'IRMAR pour le groupe que l'on forme. Merci à ceux m'ont précédé et accueilli, je pense en particulier à Jérôme, Christian, Ferrán, Valéry. Merci à ceux avec qui j'ai partagé le quotidien : Maher, Jacques, Jimmy, Adrien, Fanny, Richard, Arnaud, Sébastien, Aurélien, Jean-Romain, Viktoria, Thomas, Mathilde, Victor, Nirmal, Alina, Adrien, Jean-Louis. Merci aux jeunes thésards, Gaël, Mathieu, Fabien. Merci à mes co-bureaux ! Merci Viviana, Gweltaz, Thomas, Clément, Lionel pour votre bonne humeur, pour votre soutien. Un merci particulier à Sylvain, Rodolphe, Jérémy, Fabrice et Damian, pour votre enthousiasme, pour le temps partagé devant le tableau. Fabrice, c'est un grand plaisir de travailler avec toi, merci.

Enfin, du fond du cœur, bon courage à ceux qui viennent de commencer — et bon courage à ceux qui vont bientôt terminer !

Merci à ma famille, pour comment elle m'accompagne et comment elle me nourrit. Merci à ma mère, Chantal, et mon père, Claude pour ce qu'ils m'ont transmis. Merci à ma sœur, Marion, pour ce que l'on construit ensemble. Merci à César, Charles, Josiane et aux Couès pour le rôle essentiel qu'ils ont joué dans cette aventure. Merci à Adrien, Fabrice et Martine pour l'accueil qu'ils m'avaient offert en une autre occasion... Bon courage Camille ! Merci Daniel pour tes encouragements. Merci enfin à mon grand-père Robert et ma grand-mère Andrée pour tout ce que vous m'avez apporté. En ce jour important pour moi, j'ai une pensée spéciale pour vous.

Merci à Rennes. Ce fut un vrai plaisir que de vivre ici pendant ces six années. Ville unique, Rennes, merci.

Merci à toutes celles et ceux qui ont croisé ma route, pour les beaux moments partagés, pour ce que cela m'a apporté. Merci aux rencontres éphémères, merci aux amis. Merci Paul, JPouille, Samson, Miguel, Cyril, Aurélien, Thomas, Aghilès. Merci Guilhem, Alan, Manu, Jojo, Marion, Gauthier BoboGC, Kmi, Matthias, Myriam et Mañol. Merci Laurent, Nolwenn, Hélène, Séb, Sonia, Micha, Marc, Martin. Merci David. Merci Iñaki, Maiana, Sylvain, Soraya, Hélène. Merci Tsubame ! Merci Chris McCandless, merci Fatih Akin, merci Julie...

Pour ceux qui restent à remercier, les mots ne suffiront pas. Merci à mon chat Jojo pour les fous rires, les câlins de tête et les ronrons. Merci Aurélien Che Hadji pour l'intensité que ta présence donne aux aventures que nous partageons, merci d'être toi. Merci Doudou, pour la douceur que tu m'offres, pour ton écoute inégalée. Merci pour tout ce que l'on partage, merci pour notre liberté.

Table des matières

Notations	ix
Introduction	1
Problématique	1
Géométrie algébro-différentielle : un historique	4
La théorie des schémas de Toën et Vaquié	7
But de cette thèse	8
Résumé de la thèse et principaux résultats.....	11
Plan du texte	19
I Préliminaires différentiels et catégoriques	21
1. Quelques points d'algèbre différentielle	23
1.1. Objets de base	24
1.2. Idéaux différentiels	26
1.3. Constructions classiques.....	28
1.4. Problèmes d'idéaux différentiels.....	29
1.5. Changements de base	31
2. Quelques points de théorie des catégories	35
2.1. Carrés cartésiens	37
2.2. Lemme de Yoneda.....	44
2.3. Équivalences de catégories.....	44
2.4. Foncteurs adjoints.....	45
2.5. Limites, colimites	51
2.6. Sites, préfaisceaux et faisceaux au-dessus d'un site.....	52
II Champs de vecteurs, feuilles et trajectoires dans les schémas	65
3. Champs de vecteurs, feuilles et trajectoires dans les schémas	67
3.1. Plusieurs points de vue pour l'espace tangent	69
3.2. Champs de vecteurs	78
3.3. Catégorie des schémas avec champ de vecteurs.....	85
3.4. Trajectoire d'un point dans un schéma muni d'un champ de vecteurs.....	89
3.5. Généralisation aux dérivations de Hasse-Schmidt	95
3.6. Trajectoires et morphismes.....	97
3.7. Un exemple de champ de vecteurs.....	98

III Espace des feuilles grossier et trajectoires des schémas sans dynamique propre à base simple	101
4. Espace des feuilles grossier	103
4.1. Schémas avec champ de vecteurs simples.....	104
4.2. Espace des feuilles grossier	106
4.3. Espace des feuilles grossier d'un schéma simple	106
4.4. Schémas munis d'un champ de vecteurs quasi-simples.....	112
5. Trajectoires des schémas sans dynamique propre à base simple	121
5.1. Introduction.....	123
5.2. Schémas sans dynamique propre	124
5.3. Cas où la base et l'espace total sont affines.....	125
5.4. Cas où la base n'est pas forcément affine.....	136
5.5. Cas général.....	138
5.6. Calcul de l'espace des feuilles grossier	140
IV Faisceau de Carrà Ferro d'un schéma muni d'un champ de vecteurs	143
6. Topologie et faisceau de Carrà Ferro	145
6.1. Fermés et ouverts invariants.....	147
6.2. Topologie de Carrà Ferro.....	152
6.3. Étude d'une base d'ouverts.....	155
6.4. Intersection des voisinages d'un point	156
6.5. Faisceau de Carrà Ferro et faisceau de Keigher.....	159
7. Kovacic, Carrà Ferro et Keigher ont les mêmes constantes	163
7.1. Faisceau de Kovacic	164
7.2. Constantes dans les anneaux de fractions	166
7.3. Kovacic, Carrà Ferro et Keigher ont les mêmes constantes	170
V Espace des feuilles géométrique	175
8. Espaces de feuilles	177
8.1. Premiers essais	179
8.2. Deux intermèdes d'algèbre commutative	185
8.3. Les champs de vecteurs comme actions de groupe de $\widehat{\mathbf{G}_a}$	192
8.4. Espaces des feuilles.....	195
8.5. Espace des feuilles géométrique et faisceau de Carrà Ferro	198
8.6. Calcul de l'espace des feuilles universel dans le cas simple.....	205
VI Schémas différentiels : le point de vue fonctoriel	207
9. Espaces algébro-différentiels	209
9.1. Introduction.....	213
9.2. Espaces algébro-différentiels.....	214
9.3. Algèbre des fonctions régulières d'un espace algébro-différentiel	216
9.4. Espaces algébro-différentiels en groupes, anneaux, modules	220

9.5. Exemples d'espaces algébro-différentiels	225
9.6. La platitude abordée <i>via</i> les espaces algébro-différentiels	232
9.7. Torseurs pour les espaces algébro-différentiels	234
9.8. Espaces tangents des espaces algébro-différentiels	237
9.9. Espaces tangents d'ordre supérieur et voisinage formel d'un point	242
9.10. Dérivée logarithmique d'un k -groupe algébro-différentiel	245
VII Schémas différentiels : le point de vue relatif	253
Introduction	255
Le point de vue relatif de Toën et Vaquié	255
Le point de vue relatif appliqué aux schémas différentiels	256
Les schémas différentiels vus comme espaces annelés	257
10. Définition des fonct-∂-schémas	261
10.1. Prétopologie de Zariski sur $(\mathbf{Alg}_k^\partial)^{\text{op}}$	261
10.2. Les schémas sont des faisceaux Zariski	270
10.3. Immersions ouvertes dans $\mathbf{Faisc}((\mathbf{Alg}_k^\partial)^{\text{op}})$	271
10.4. La prétopologie de Zariski sur $\mathbf{Faisc}_{\text{Zar}, k}^\partial$	288
10.5. Définition des fonct- ∂ -schémas et caractérisation	290
11. Équivalence des deux points de vue	293
11.1. Une adjonction entre \mathbf{Esp}_k^∂ et $\mathbf{EspLocAnn}_k^\partial$	294
11.2. Le foncteur des points h_- est pleinement fidèle	299
11.3. Le cas affine	301
11.4. Le cas quasi-affine	304
11.5. La réalisation géométrique d'un fonct- ∂ -schéma est un schéma	310
11.6. Le foncteur des points d'un schéma est un fonct- ∂ -schéma	311
11.7. Le cas général	316

Notations

\hat{A}	L'anneau différentiel des sections globales du faisceau de Kovacic de $\text{diff-Spec } A$ <i>A est un anneau différentiel</i> (7.1.2) , page 164
A^∂	L'anneau des constantes de A , noté aussi C_A <i>A est un anneau différentiel</i> (1.1.4) , page 25
$\mathbf{Alg}_k^{\partial}$	La catégorie des k -algèbres différentielles <i>k est un anneau différentiel</i> (1.1.3) , page 24
\mathbf{Ann}	La catégorie des anneaux (commutatifs unitaires)
\mathbf{Ann}^∂	La catégorie des anneaux différentiels (commutatifs unitaires) (1.1.3) , page 24
\mathbf{AnnNC}	La catégorie des anneaux unitaires non-nécessairement commutatifs (9.4.3) , page 222
$\mathcal{C} \xrightleftharpoons[F \in \omega]{G \in *} \mathcal{D}$	Le foncteur F admet G comme adjoint à gauche ; le foncteur G admet F comme adjoint à droite <i>F et G sont deux foncteurs covariants</i> (2.4.1) , page 45
C_A ou $C(A)$	L'anneau des constantes de A , noté aussi A^∂ <i>A est un anneau différentiel</i> (1.1.4) , page 25
$C_{\mathcal{S}}$	Le corps $C_{\mathcal{O}_{\mathcal{S}}(S)}$, naturellement isomorphe à $\varinjlim_{U \neq \emptyset} C_{\mathcal{O}_{\mathcal{S}}(U)}$ <i>S est un schéma muni d'un champ de vecteurs, simple</i> (4.3.4) , page 110
C_n^k	Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$

$\text{diff-Spec } A$	L'ensemble des idéaux premiers et différentiels de A A est un anneau différentiel (6.5.1) , page 159
$\underline{\text{diff-Spec }} A$	Le foncteur $\mathbf{Alg}_k^\partial \rightarrow \mathbf{Ens}$ qui à K associe $\text{Hom}_{\mathbf{Alg}_k^\partial}(A, K)$ (on le note aussi h_A) $A \in \mathbf{Alg}_k^\partial$ (9.2.1) , page 215
$(\underline{\text{diff-Spec }} A)_I$	Le foncteur $\mathbf{Alg}_k^\partial \rightarrow \mathbf{Ens}$ qui à K associe $\{\phi \in \text{Hom}_{\mathbf{Alg}_k^\partial}(A, K) \mid (\phi(I)) = K\}$ A est une k -algèbre différentielle, I est un idéal de A (10.3.2) , page 272
\mathbf{Esp}_k^∂	La catégorie des foncteurs covariants de \mathbf{Alg}_k^∂ dans \mathbf{Ens} k est un anneau différentiel (9.2.1) , page 214
$\mathbf{EspLocAnn}_k^\partial$	La catégorie des k -espaces différentiellement localement annelés k est un anneau différentiel (11.1.1) , page 294
$\exp(\varepsilon\partial)_n$	Le morphisme $k \rightarrow k[\varepsilon]/\varepsilon^{n+1}$ qui à f associe sa « série de Taylor » à l'ordre n k est un anneau différentiel (9.9.1) , page 242
F^δ	Le plus grand fermé invariant de X , contenu dans F $(X, \vec{\mathcal{V}})$ est un \mathbf{Q} -schéma muni d'un champ de vecteurs et F est un fermé de X (6.1.2) , page 151
$\mathbf{Faisc}(\mathcal{C})$	La catégorie des faisceaux au-dessus de \mathcal{C} \mathcal{C} est un site (2.6.4) , page 54
$\mathbf{Fais}_{\text{Zar}, k}^\partial$	La catégorie des faisceaux au-dessus du site $(\mathbf{Alg}_k^\partial)^{\text{op}}$ muni de la prétopologie de Zariski k est un anneau différentiel (10.1.5) , page 270
$\text{fonct-}\partial\text{-}\mathbf{Sch}_k$	La catégorie des k -fonct- ∂ -schémas. Ce sont des foncteurs $\mathbf{Alg}_k^\partial \rightarrow \mathbf{Ens}$ vérifiant certaines propriétés k est un anneau différentiel (10.5.1) , page 290
$\mathbf{FormSch}$	La catégorie des schémas formels (8.3.1) , page 193
$\mathbf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$	La catégorie des foncteurs de \mathcal{C} dans \mathcal{D}

$F \in \omega$	Le foncteur F admet un adjoint à gauche F est un foncteur covariant (2.4.2) , page 46
$F \in \omega(G)$	Le foncteur F admet G comme adjoint à gauche F et G sont deux foncteurs covariants (2.4.2) , page 46
$G \in *$	Le foncteur G admet un adjoint à droite G est un foncteur covariant (2.4.2) , page 46
$G \in *(F)$	Le foncteur G admet F comme adjoint à droite F et G sont deux foncteurs covariants (2.4.2) , page 46
$\widehat{\mathbf{G}}_a$	Le groupe additif formel (8.3.2) , page 193
h_A	Le foncteur $\mathbf{Alg}_k^\partial \rightarrow \mathbf{Ens}$ qui à K associe $\text{Hom}_{\mathbf{Alg}_k^\partial}(A, K)$, noté aussi <u>diff-Spec</u> A $A \in \mathbf{Alg}_k^\partial$ (10.1.4) , page 266
$\langle I \rangle$	L'idéal différentiel engendré par I I est un idéal de A , un anneau différentiel (1.2.1) , page 26
$I_\#$	Le plus grand idéal différentiel contenu dans I I est un idéal de A , un anneau différentiel (3.4.2) , page 94
$k\langle X_1, \dots, X_n \rangle$	La k -algèbre différentielle des polynômes algébro-différentiels à n indéterminées k est un anneau différentiel (9.5.1) , page 228
\mathbf{N}	L'ensemble $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ des entiers naturels.
\mathcal{O}^∂	Le faisceau des sections constantes de \mathcal{O} \mathcal{O} est un faisceau en anneaux différentiels (7.3) , page 170
$\mathcal{O}(F)$	La k -algèbre différentielle des transformations naturelles de F dans le foncteur oubli F est un k -espace algébro-différentiel (9.3.1) , page 216
$\mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(\text{Keigher})}$	Le faisceau de Keigher de diff-Spec A A est un anneau différentiel (6.5.2) , page 160

$\mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(\text{CF})}$	Le faisceau de Carrà Ferro de diff-Spec A A est une Q -algèbre différentielle (6.5.3), page 160
$\mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(\text{Kov})}$	Le faisceau de Kovacic de diff-Spec A A est un anneau différentiel (7.1.1), page 164
$\mathcal{O}_{X^{\mathcal{V}}}$	Le faisceau dont on munit l'ensemble des feuilles $X^{\mathcal{V}}$ \mathcal{X} est un Q -schéma muni d'un champ de vecteurs (8.5.4), page 201
Ouv (X)	La catégorie des ouverts de X (on peut aussi la voir comme un site, ou un lieu) X est un espace topologique (2.6.2), page 53
\mathfrak{p}^δ	L'idéal premier différentiel associé à \mathfrak{p} \mathfrak{p} est un idéal premier d'une Q -algèbre différentielle A (3.4.2), page 94
PréFaisc (\mathcal{C})	La catégorie des préfaisceaux au-dessus de \mathcal{C} \mathcal{C} est un site (2.6.4), page 54
PréFaisc $_k^{\partial, \text{rep}}$	La catégorie des préfaisceaux $(\mathbf{Alg}_k^\partial)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ens}$ qui sont représentables k est un anneau différentiel (11.3.2), page 301
PréFaisc $^{\text{quasi-aff}}$	La catégorie des préfaisceaux $(\mathbf{Alg}_k^\partial)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ens}$ quasi-affines k est un anneau différentiel (11.4.1), page 304
Sch $^\partial$	La catégorie des schémas munis d'un champ de vecteurs (3.3.3), page 87
Sch $_{\mathcal{S}}^\partial$	La catégorie des schémas munis d'un champ de vecteurs au-dessus de \mathcal{S} \mathcal{S} est un schéma muni d'un champ de vecteurs (3.3.5), page 88
SchAff $_k^\partial$	La catégorie des k -schémas affines munis d'un k -champ de vecteurs k est un anneau différentiel (11.3.2), page 301
SchQuasiAff $_k^\partial$	La catégorie des k -schémas quasi-affines munis d'un k -champ de vecteurs k est un anneau différentiel (11.4.1), page 304

Sol_A	Le k -espace algébro-différentiel des solutions de l'équation $Y' = AY$ k est un anneau différentiel et $A \in M_n(k)$ (9.5.3) , page 226
$\text{Spec}^\partial A$	Le schéma affine $\text{Spec } A$ muni du champ de vecteurs associé à ∂_A (A, ∂_A) est un anneau différentiel (3.3.2) , page 88
$\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x)$	La trajectoire de x sous le champ $\vec{\mathcal{V}}$ $(X, \vec{\mathcal{V}})$ est un \mathbf{Q} -schéma muni d'un champ de vecteurs et $x \in X$ (3.4.1) , page 91
$U_{A,I}$	L'ouvert de $\text{Spec } A$ défini par l'idéal I A est un anneau et I un idéal de A (11.4.5) , page 308
U^δ	Le plus petit ouvert invariant de X , contenant U $(X, \vec{\mathcal{V}})$ est un schéma muni d'un champ de vecteurs, défini au-dessus de \mathbf{Q} , et U est un ouvert de X (6.1.1) , page 148
U_Δ	Le plus grand ouvert Zariski de $\text{Spec } A$ dont la trace sur $\text{diff-Spec } A$ est U A est une \mathbf{Q} -algèbre différentielle et U est un ouvert Kolchin de $\text{diff-Spec } A$ (6.5.2) , page 161
$\vec{\mathcal{V}}$	Notation générique d'un champ de vecteurs (défini sur un schéma) (3.2.2) , page 79
$x \in X$	x est un point de X : $x = (K, p)$ et $p \in X(K)$ X est k -espace algébro-différentiel et $K \in \mathbf{Alg}_k^\partial$ (9.2.3) , page 216
$X^{\vec{\mathcal{V}}}$	L'ensemble des feuilles de \mathcal{X} \mathcal{X} est un schéma muni d'un champ de vecteurs (8.5.1) , page 198
$X_{/Y}$	Le schéma formel, complété de X le long de Y X est un schéma et Y une partie fermée de X (8.3.1) , page 193
\hat{X}	Le schéma formel, complété de X le long d'une partie Y sous-entendue X est un schéma et Y une partie fermée de X (8.3.1) , page 193
X_A	Le k -espace algébro-différentiel des matrices fondamentales de solutions de l'équation $Y' = AY$ k est un anneau différentiel et $A \in M_n(k)$ (9.5.3) , page 227

Introduction

Le but de cette thèse est double :

- a) d'une part, il s'agit d'apporter un éclairage géométrique sur plusieurs constructions de la théorie, encore incomplète, des schémas différentiels. On le fera en introduisant les notions de *feuille* et de *trajectoire* dans les schémas munis d'un champ de vecteurs. Cet éclairage géométrique nous permettra, entre autres, de montrer que les trois faisceaux classiques définis pour les schémas différentiels ont les mêmes constantes dans le cas réduit.
- b) d'autre part, on souhaite aborder la question des schémas différentiels *via* le point de vue fonctoriel. En particulier, il s'agira de comprendre ce que l'approche [TV09] de Bertrand Toën et Michel Vaquié apporte à ce sujet : on prouvera, entre autres, que la catégorie des schémas différentiels définis à la Toën-Vaquié est équivalente à la catégorie des schémas munis d'un champ de vecteurs.

Cette introduction est organisée comme suit : après avoir exposé la problématique des schémas différentiels, dressé un historique des travaux dans ce domaine, et présenté l'approche [TV09] de la théorie des schémas, on énoncera les buts de notre travail. Puis, on dressera un résumé de cette thèse, en expliquant nos principaux résultats.

Problématique

La *théorie des schémas*, développée dès 1958 par Alexandre Grothendieck, constitue un événement essentiel dans l'histoire de l'étude des *équations algébriques*. Précedée par les travaux d'André Weil et de Jean-Pierre Serre⁽¹⁾, cette théorie est à l'origine d'un renouvellement des méthodes de la géométrie algébrique et d'un regain d'intérêt pour ses thématiques, et a permis de nombreux progrès dans ce domaine. À titre d'exemple, citons les fameuses conjectures de Weil, dont la démonstration par Grothendieck et Deligne repose entièrement sur cette nouvelle géométrie. Par ailleurs, la théorie des schémas, au-delà de ses aspects techniques, a fait germer dans les mathématiques contemporaines de nouvelles idées, de nouveaux points de vue qui ont porté des fruits dans de nombreux autres champs d'application.

Outre l'étude des équations algébriques, un autre grand thème des mathématiques est l'étude des *équations différentielles*. Si cette étude peut être menée par des méthodes analytiques, elle peut aussi l'être par des méthodes algébriques. C'est ainsi (parmi d'autres exemples) que la théorie de Galois des équations algébriques a été transposée au cas des

⁽¹⁾... et d'Oscar Zariski, et de Pierre Cartier, et de Claude Chevalley, et de...

équations différentielles linéaires : il s'agit de la *théorie de Picard-Vessiot*, aussi appelée *théorie de Galois différentielle*⁽²⁾. C'est avec de tels outils qu'on démontre, par exemple, le résultat :

Proposition ([Ros72]). *La primitive $\int e^{x^2} dx$ ne peut être exprimée en termes de fonctions élémentaires.*

L'algèbre a fait d'autres incursions dans l'étude des équations différentielles. Citons par exemple la théorie des \mathcal{D} -modules (*cf.* [BGK⁺87]) ou l'analyse algébrique (*cf.* [Pom94]).

Au vu de ces deux constats, on peut se poser la question suivante : étant donné que certaines méthodes de l'étude des équations algébriques s'adaptent bien au cadre des équations différentielles, et étant donné que la théorie des schémas a constitué une révolution dans cette étude, est-il possible de développer, pour les équations différentielles, un analogue de la théorie des schémas, une *théorie des schémas différentiels* ?

Si k est un corps et si $P_1, \dots, P_m \in k[X_1, \dots, X_n]$ sont des polynômes en n variables, on associe classiquement au système d'équations polynomiales

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} P_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ P_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ P_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

un schéma $X_{\mathcal{S}}$ qu'il faut concevoir comme un objet géométrique tel que pour toute extension⁽³⁾ de corps K/k , l'ensemble $Sol_{\mathcal{S}}(K)$ des solutions dans K du système (\mathcal{S}) corresponde aux points de l'objet géométrique $X_{\mathcal{S}}$ à coordonnées dans K .

Cet exemple constitue le paradigme des schémas. On peut le transposer sans mal au cas des équations différentielles. Par équation différentielle, on entend ici, *équation différentielle algébrique* à coefficients dans $\mathbf{C}(t)$. On peut facilement remplacer le corps $\mathbf{C}(t)$ par n'importe quel anneau différentiel mais on exclut de notre propos, les équations différentielles du type

$$y' = \sin(y) \quad \text{ou} \quad \exp(y') = \frac{y^2 - y'}{2},$$

dont la non-linéarité n'est pas polynomiale. En revanche, le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} \frac{1}{t-1}y_1^{(3)} - y_2 = (t-1)(y_2')^2 \\ y_2 = (t+1)(y_1)^2 + (y_1')^2 + (y_1'')^2 \end{cases}$$

constitue un exemple typique de ces équations différentielles algébriques que l'on considère. Ainsi, l'analogue dans le cadre des équations différentielles du système (\mathcal{S}) précédent est la donnée de m équations différentielles algébriques L_1, \dots, L_m à n fonctions inconnues. Le paradigme des schémas différentiels serait alors un objet géométrique X tel que pour toute extension $K/\mathbf{C}(t)$, les points de X à coordonnées dans K corresponde à l'ensemble des solutions dans K du système d'équations différentielles.

On sait déjà associer à de tels systèmes d'équations un objet géométrique. Il s'agit du sous-ensemble de \mathcal{U}^n défini par les équations différentielles considérées, où \mathcal{U} est un corps différentiel « suffisamment gros » (en l'occurrence immense) qui contient $\mathbf{C}(t)$. L'étude de ces objets constitue la *géométrie algébrique différentielle*⁽⁴⁾, dans sa version classique. Cette

⁽²⁾On trouvera de très bons exposés de cette théorie dans [vdPS03], [Mag94] ou [Kap57], entre autres.

⁽³⁾Ou, plus généralement, pour toute k -algèbre K .

⁽⁴⁾On dira aussi *géométrie algébro-différentielle*.

théorie, développée sous l'impulsion de Joseph Fels Ritt, et nourrie, entre autres, par les nombreux travaux d'Ellis Kolchin correspond, en quelque sorte, dans sa forme, à la géométrie algébrique *juste avant* la théorie des schémas. En effet, dans les années 1940, André Weil développa un formalisme algébrique (dans son livre [Wei46]), lui permettant de donner des fondations rigoureuses à la géométrie algébrique au-dessus d'un corps quelconque. Son formalisme est caractérisé par le fait qu'il fixe au début de son livre un corps \mathbf{K} algébriquement clos, dit *domaine universel*, de degré de transcendance infini au-dessus de son sous-corps premier, et par le fait que les seuls corps qu'il s'autorise à considérer dans la suite sont les sous-corps de \mathbf{K} au-dessus desquels \mathbf{K} est encore de degré de transcendance infini. Ritt et Kolchin s'étant inspirés des travaux de Weil pour développer leur « nouvelle géométrie », il est naturel que l'on retrouve dans leurs travaux ce *corps universel* (cette fois-ci différentiel), qui chapeaute tout. Ces corps différentiels universels ont d'ailleurs été à l'origine de plusieurs travaux de Kolchin (voir par exemple l'article [Kol80]).

Le formalisme d'André Weil a cependant vite été surpassé par la théorie des schémas. Celle-ci est plus générale, son formalisme est plus élégant et, en particulier, elle ne nécessite pas de se restreindre aux sous-corps d'un corps universel : on peut considérer les K -points d'un schéma X pour tout extension du corps de base k — et même mieux pour toute k -algèbre K . Le fait que Kolchin ait continué à utiliser un formalisme *à la Weil* pour sa géométrie algébrique différentielle⁽⁵⁾ est ainsi symptomatique du fait que cette dernière n'ait pas su prendre au vol le train de la théorie des schémas. En même temps, vu le statut de *leader* de Kolchin en algèbre différentielle, c'en est aussi une explication.

Notons toutefois que, malgré ces lacunes théoriques, la géométrie algébro-différentielle est à l'œuvre dans plusieurs travaux récents. Citons par exemple l'article [CS07] de Phyllis Cassidy et Michael Singer, où les auteurs présentent une théorie de Galois des équations différentielles linéaires *à paramètres*. Dans leur cadre, si

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = A(x, t_1, \dots, t_m) \cdot Y \quad (1)$$

est une équation différentielle linéaire, paramétrée par t_1, \dots, t_m , alors le groupe de Galois de (1) qui apparaît naturellement est un *groupe algébro-différentiel linéaire, à la Cassidy*⁽⁶⁾ [Cas72]. Citons aussi l'article [Lan08] qui constitue une version « non-linéaire à la Kolchin » de [CS07] ; là-aussi les groupes de Galois qui apparaissent sont des groupes algébro-différentiels, mais cette fois-ci *à la Kolchin*⁽⁷⁾. Enfin, citons l'article [HS08] de Charlotte Hardouin et Michael Singer, où les auteurs développent une théorie à paramètres des équations aux différences.

⁽⁵⁾ Ainsi, dans son livre [Kol73], publié en 1973, Kolchin se place encore dans le cadre d'un corps universel différentiel \mathcal{U} pour définir les *espaces affines différentiels* ; de même, dans sa contribution [Kol86] au LNM 1185 consacré à la théorie des groupes, publiée en 1986, Kolchin, de même, se place d'emblée dans un corps différentiel universel \mathcal{U} .

⁽⁶⁾ C'est-à-dire *à la Weil*.

⁽⁷⁾ En effet, Kolchin, de même qu'il a développé une théorie axiomatique des groupes algébriques [Kol73], reposant notamment sur la notion de spécialisation, a développé dans [Kol86] une théorie axiomatique des groupes algébriques différentiels.

Géométrie algébro-différentielle : un historique

La géométrie algébrique différentielle à la Weil. Dans un excellent *survey* figurant dans l'édition [Kol99] des œuvres complètes de Kolchin, Alexandru Buium et Phyllis Joan Cassidy passent en revue les différents résultats de cette théorie. Comme on l'a souligné plus haut, les fondements géométriques de cette théorie reposent sur un formalisme à la Weil. Cependant, dans cet article, les résultats y sont présentés sous leur forme « algèbre commutative différentielle ». Les résultats exposés concernent :

- les problèmes de noethérianité des espaces affines différentiels
- la décomposition primaire d'idéaux dans le cas différentiel
- l'étude de la question des composantes irréductibles d'une variété
- la théorie de la dimension dans le cas différentiel
- la théorie des groupes algébriques différentiels

ainsi que quelques autres sujets. Parmi les mathématiciens qui ont apporté leur pierre à cet édifice, citons : Joseph E. Ritt, William H. Raudenbuch, Howard Levi, Ellis Kolchin, Phyllis J. Cassidy, William Y. Sit.

L'approche schématique de la géométrie algébrique différentielle. C'est William Keigher qui initie cette approche, en 1975. Dans les années qui suivent, Alexandru Buium et Giuseppa Carrà Ferro s'intéressent au problème. Puis, dans les années 2000, le sujet resurgit grâce à une série d'articles de Jerald Kovacic.

Contributions de William F. Keigher. — L'approche schématique de la géométrie algébrique différentielle remonte à l'article [Kei75] de William F. Keigher, publié en 1975. Dans cet article, l'approche choisie par Keigher est très catégorique⁽⁸⁾ : le spectre d'un anneau différentiel est défini via les adjonctions et les comonades. Néanmoins, en conclusion de son article, Keigher remarque que le spectre $\text{diff-Spec } A$ d'un anneau différentiel peut être décrit en des termes plus simples d'algèbre commutative différentielle : en tant qu'ensemble, $\text{diff-Spec } A$ est l'ensemble des idéaux premiers différentiels de A . Dans ses articles suivants [Kei77, Kei78, Kei81, Kei82a, Kei82b, Kei83], Keigher adopte plutôt ce dernier point de vue pour étudier les schémas différentiels.

Dans [Kei77], il se concentre sur le cas où l'anneau A ne contient pas \mathbf{Q} , en définissant les anneaux différentiels spéciaux, et en étudiant leur spectre différentiel.

Dans [Kei78, Kei81, Kei82a], il définit la notion d'idéal différentiel quasi-premier, qui lui permet de considérer le cas des anneaux différentiels qui ne sont pas spéciaux. Il traite aussi le cas où l'anneau A est muni de plusieurs dérivations. Dans ces articles, il se concentre sur le spectre différentiel en tant qu'ensemble. Dans [Kei81], il revient néanmoins sur le faisceau dont il faut munir le quasi-spectre différentiel d'un anneau. Il aborde cette question du point de vue des adjonctions ; néanmoins, le faisceau est défini plus clairement que dans [Kei75] : il s'agit de la restriction du faisceau structural. Il remarque, en donnant un exemple, que si A est un anneau différentiel, et si on note $X = \text{diff-Spec } A$ le schéma différentiel affine associé à A , alors l'anneau différentiel $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ des sections globales de X n'est pas nécessairement isomorphe à A .

L'article [Kei83] est, quant à lui, consacré à ce faisceau. Keigher généralise son approche, en remplaçant les idéaux différentiels par des \mathcal{C} -idéaux, où \mathcal{C} est une famille quelconque d'idéaux. Il donne une construction plus concrète de ce faisceau, à la [EGA_I] — mais

⁽⁸⁾Ce n'est pas un hasard ! La thèse de Keigher s'intitule *Categorical Aspects of Differential Algebra*.

son approche plus abstraite [Kei81], bien que nécessitant des connaissances en théorie des catégories, nous semble plus juste *a posteriori*.

Dans [Kei82b], Keigher interprète des résultats alors récents d'algèbre différentielle en termes schématiques ; il soulève aussi la question de l'existence des produits fibrés et y apporte des réponses partielles. Il montre enfin que les schémas différentiels affines sont séparés.

Contributions de Giuseppa Carrà Ferro. — Dans son premier article [Car78] sur ce sujet, écrit en italien et publié en 1978, Giuseppa Carrà Ferro généralise la construction que Keigher fait dans [Kei75] : alors qu'il étudiait dans cet article fondateur le cas d'un anneau différentiel ordinaire, c'est-à-dire d'un anneau A muni d'une unique dérivation ∂ , Carrà Ferro étudie le cas d'un anneau A muni d'un ensemble fini Δ de dérivations commutant deux-à-deux. Le point de vue qu'elle choisit pour mener son étude de l'espace topologique $\text{diff-Spec } A$ est l'algèbre commutative différentielle. Dans ce premier article, la question du faisceau de $\text{diff-Spec } A$ n'est pas abordée. Dans son article suivant [CF85] sur la question, Carrà Ferro étudie l'anneau différentiel des sections globales, noté A_Δ , de $\text{diff-Spec } A$. Elle munit en effet $\text{diff-Spec } A$ d'un faisceau en anneaux différentiels⁽⁹⁾, défini à la [Har77] : les sections au-dessus d'un ouvert U sont les fonctions

$$s : U \longrightarrow \coprod_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}}$$

qui sont localement des quotients d'éléments de A . Elle y généralise certains résultats de [Bui82]. Entre autres propriétés, elle montre que $(A_\Delta)_\Delta \simeq A_\Delta$. Enfin, dans le troisième article [CF90] qu'elle a publié sur le sujet, Carrà Ferro introduit un nouveau faisceau. Au lieu de considérer, comme dans [CF85] le faisceau à la Hartshorne, elle définit un nouveau faisceau $\mathcal{O}_{(\Delta)}$. Ce faisceau a l'avantage de vérifier

$$\Gamma(\text{diff-Spec } A, \mathcal{O}_{(\Delta)}) \simeq A.$$

Ensuite, elle prouve une équivalence de catégories analogue pour ces objets à l'équivalence de catégorie entre **Ann** et la catégories des schémas affines, puis étudie les modules au-dessus de ces nouveaux espaces.

Contributions d'Alexandru Buium. — Alexandru Buium, dont la contribution à la « géométrisation » de l'algèbre commutative différentielle est très grande (on y reviendra plus loin dans cette introduction) n'a écrit qu'un seul article [Bui82] dont le thème est les schémas différentiels. Dans cet article, où il se restreint au cas des algèbres de Ritt, c'est-à-dire au cas des anneaux différentiels contenant **Q**, Alexandru Buium étudie les objets introduits par Keigher dans [Kei75] d'un point de vue particulièrement géométrique. Dans une première partie, son étude porte sur l'anneau différentiel des sections globales⁽¹⁰⁾ ; il en déduit une équivalence de catégories. Dans un second temps, il étudie certaines propriétés géométriques des schémas différentiels (qui s'appellent dans ce cadre des schémas de Ritt). Il prouve les deux théorèmes suivants :

Théorème. *Si $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ sont des morphismes différentiellement de type finis entre des schémas de Ritt affines et réduits alors, il en est de même pour $g \circ f$.*

⁽⁹⁾C'est le faisceau que reprendra Kovacic.

⁽¹⁰⁾Le faisceau qu'il considère est le faisceau restreint, comme dans [Kei81].

Théorème. Soit $X \xrightarrow{f} Y$ un morphisme différentiellement de type fini entre des schémas de Ritt ordinaires. On suppose que Y , en tant qu'espace topologique, est noethérien. Alors, le morphisme f est constructif.

Ces deux théorèmes sont à noter dans la mesure où il ne s'agit pas de résultats concernant le cadre théorique des schémas différentiels, mais où il s'agit de résultats ayant un contenu géométrique et qui sont énoncés dans ce nouveau cadre. Buium démontre ensuite un résultat concernant le H^1 d'un ouvert de l'espace affine, résultat qui au vu de la théorie des schémas « classiques » constitue pour ces nouveaux schémas différentiels une pathologie.

Contributions de Jerald J. Kovacic. — Le problème des schémas différentiels est le dernier thème qu'étudia Jerald J. Kovacic. Dans les deux premiers articles [Kov02a, Kov02b] qu'il publia sur le sujet, Kovacic reprend la théorie développée par ses prédécesseurs avec un très grand soin. Les objets considérés sont toujours définis via l'algèbre différentielle, et une étude détaillée des premières propriétés du spectre différentiel est menée. L'approche choisie est proche dans l'esprit de [EGA I] et de [Har77]. Comme on l'a dit, le faisceau dont il munit $\text{diff-Spec } A$ est un faisceau à la Hartshorne. Il s'intéresse ensuite au problème de l'anneau différentiel A_Δ des sections globales du schéma différentiel affine $\text{diff-Spec } A$. De multiples exemples sont donnés pour illustrer ce que l'on peut attendre du morphisme $i_\Delta : A \longrightarrow A_\Delta$, et surtout de ce qu'on ne peut pas en attendre. Des conditions sont ensuite données pour caractériser le noyau de i_Δ , pour décrire l'image de i_Δ et pour assurer l'injectivité ou la surjectivité de i_Δ . Ces résultats généralisent ceux de Keigher, Carrà Ferro et Buium. Kovacic démontre aussi que les produits fibrés existent si l'on se restreint à des anneaux particuliers. Dans ses deux articles suivants [Kov03, Kov06], Kovacic utilise les schémas différentiels pour réinvestir la théorie de Galois différentielle. En effet, la forme que Kolchin avait donnée à la théorie des extensions fortement normales reposait sur son axiomatisation des groupes algébriques différentiels. Dans l'article [Kov03], Kovacic est amené à étudier certaines questions de géométrie algébrique différentielle dans les termes des schémas différentiels : immersions fermées, produits, schéma (ou, pour être plus exact, espace localement annelé) constant associé à un schéma différentiel, schéma différentiel décomposé (*split differential scheme*).

Contributions de Franck Benoist. — Franck Benoist a été amené à s'intéresser à la géométrie algébrique différentielle (et plus particulièrement aux groupes algébriques différentiels) et aux schémas différentiels afin de formuler certains résultats de théorie des modèles. Son approche diffère des approches précédentes dans la mesure où, au lieu de considérer un anneau différentiel (A, ∂) , il s'intéresse aux anneaux munis d'une dérivation de Hasse-Schmidt, c'est-à-dire aux anneaux A munis d'une famille $D = (D_i)_{i \in \mathbf{N}}$ d'applications additives de A dans A vérifiant

$$\begin{aligned} \forall i \in \mathbf{N}, \quad \forall x, y \in A, \quad D_i(xy) &= \sum_{m+n=i} D_m(x)D_n(y) \\ \forall i, j \in \mathbf{N}, \quad D_i \circ D_j &= \binom{i+j}{i} D_{i+j} \end{aligned}$$

Ces opérateurs D_i , qui interviennent en particulier lorsque la caractéristique de A est non-nulle, jouent le rôle des $\frac{1}{i!} \partial^i$, dans le cas où (A, ∂) est un anneau différentiel contenant \mathbf{Q} . Dans ce dernier cas, son approche est alors équivalente à celle de Kovacic.

Schémas munis d'une dérivation. Le problème des schémas différentiels, ainsi qu'on l'a vu précédemment, consiste en partie à associer à un anneau différentiel (A, ∂) un objet géométrique $\text{diff-Spec } A$; il s'agit donc, entre autres, de « géométriser » l'algèbre commutative différentielle. On peut réaliser cet objectif d'une tout autre manière que ce qu'ont proposé les mathématiciens précédents. En effet, si (A, ∂) est un anneau différentiel, alors la dérivation ∂ peut être vue comme un champ de vecteurs sur $\text{Spec } A$. Il est alors possible de développer une géométrie pour ces objets, comme l'a fait Alexandru Buium. Cette géométrie est aussi appelée *géométrie algébrique différentielle*, par exemple dans [Bui94], de telle sorte qu'il faut être prudent lorsqu'on rencontre ce terme. De la même manière, pour Buium, entre autres, un Δ -schéma est un schéma muni d'un champ de vecteurs (on donnera une définition plus précise quand il en sera question). Ces objets ont été largement étudiés par Alexandru Buium, dans les LNM [Bui86, Bui92] ainsi que dans de nombreux articles⁽¹¹⁾. Remarquons que le champ d'application de cette théorie n'est absolument pas disjoint de celui des schémas différentiels, dans la mesure où, par exemple, dans [Bui86, Bui92], Buium répond à des questions de théorie de Galois différentielle. Cette approche est aussi celle choisie par Hiroshi Umemura dans [Ume96], où l'auteur cherche à unifier la théorie de Galois au sens de Galois et la théorie de Galois au sens de Kolchin. Tobias Dyckerhoff, dans [Dyc], a développé une théorie de Galois pour ces objets.

La géométrie algébrique différentielle via la théorie des modèles. Il est possible d'approcher les problèmes posés par la géométrie algébrique différentielle *via* la théorie des modèles. C'est notamment l'approche d'Anand Pillay dans son article [Pil97]. Il y montre en particulier que, concernant le problème des groupes algébriques différentiels, les approches

- par la géométrie algébrique différentielle *à la Weil*
- suivant l'axiomatisation développée par Kolchin dans [Kol85]
- par la théorie des modèles

définissent trois catégories équivalentes. Cette dernière approche est particulièrement efficace puisqu'elle permet à Pillay de répondre à des questions ouvertes posées par Kolchin, tout en généralisant ses résultats de théorie de Galois différentielle. De nombreux autres articles qui suivent cette démarche ont été publiés, en particulier par Pillay. Citons aussi, dans le cas des équations aux différences, les travaux de Zoé Chatzidakis et de Ehud Hrushovski.

La théorie des schémas de Toën et Vaquié

L'approche de Toën et Vaquié. La question des schémas différentiels peut être abordée d'un tout autre point de vue. Dans un article récent [TV09], Bertrand Toën et Michel Vaquié ont développé une approche de la théorie des schémas complètement fonctorielle, et très générale. Cette approche s'applique *a priori* aux schémas différentiels — c'est ceci qui nous a amené à nous intéresser à ces travaux. Expliquons la démarche de [TV09].

Étant donné $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1})$ une catégorie monoïdale symétrique, par ailleurs supposée complète, cocomplète et fermée (*ie* possédant des Hom internes pour la structure monoïdale \otimes), on dispose d'une notion de monoïde commutatif dans \mathcal{C} . Il s'agit simplement d'objets A de

⁽¹¹⁾Buium s'intéresse désormais à des analogues arithmétiques de cette géométrie. Voir par exemple [Bui94].

\mathcal{C} munis de morphismes $A \otimes A \rightarrow A$ et $\mathbf{1} \rightarrow A$ vérifiant certaines conditions. L'exemple prototypique d'un tel triplet $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1})$ est le suivant :

$$(\mathbf{Z}\text{-Mod}, \otimes, \mathbf{Z}).$$

Dans ce cas, les monoïdes commutatifs dans $(\mathbf{Z}\text{-Mod}, \otimes, \mathbf{Z})$ ne sont rien d'autre que les anneaux commutatifs ! Ainsi, partant de $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1})$ une donnée vérifiant les conditions précitées, Toën et Vaquié définissent la catégorie $\mathbf{Comm}(\mathcal{C})$ des monoïdes commutatifs dans \mathcal{C} . Cette catégorie est un analogue de la catégorie \mathbf{Ann} .

C'est dans ce contexte que les deux auteurs construisent leur géométrie algébrique relative (à cette donnée \mathcal{C}) : ils remplacent la catégorie des anneaux \mathbf{Ann} , qui est à la base de la théorie des schémas, par la catégorie $\mathbf{Comm}(\mathcal{C})$. Il s'agit alors de généraliser la définition des schémas dans ce cadre. Le point de vue qu'ils adoptent est alors le point de vue fonctoriel : pour eux, les schémas au-dessus de \mathcal{C} seront des foncteurs (covariants)

$$\mathbf{Comm}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Ens} :$$

intuitivement, leurs foncteurs des points. Leur approche permet de définir d'un même geste plusieurs catégories de schémas *sous* $\mathrm{Spec} \mathbf{Z}$, parmi lesquelles la catégorie des schémas au-dessus de \mathbf{F}_1 .

Le point de vue relatif appliqué aux schémas différentiels. Évidemment, pour le mathématicien qui s'intéresse aux schémas différentiels, l'article [TV09] est très intéressant : en effet, le triplet

$$(\mathbf{Z}\text{-Mod diff}, \otimes, \mathbf{Z}),$$

c'est-à-dire la catégorie monoïdale des \mathbf{Z} -modules *differentiels*, satisfait les hypothèses de leur théorie. Ainsi, sans aucun effort, uniquement en appliquant les résultats de [TV09], on obtient une catégorie des schémas différentiels, *a priori* convenable car naturelle. Néanmoins, la catégorie obtenue est, d'une certaine manière, compliquée, et ce pour deux raisons :

- d'une part, les schémas différentiels qu'on obtient, en ce sens, ne sont pas des espaces annelés, ni même des espaces topologiques, ni même des ensembles ! En effet, ce sont des foncteurs $\mathbf{Ann}^{\partial} \longrightarrow \mathbf{Ens}$.
- d'autre part, la construction de Toën et Vaquié, comme on l'a vu, est extrêmement générale. Il est légitime de penser que dans le contexte relativement simple

$$(\mathbf{Z}\text{-Mod diff}, \otimes, \mathbf{Z})$$

leur construction peut être simplifiée.

But de cette thèse

Le but de cette thèse est de répondre à plusieurs questions relatives à la géométrie algébrique différentielle. Dans la liste suivante des objectifs qu'on s'est fixés, certaines questions sont volontairement vagues et générales — elles font néanmoins bien partie de celles qui nous ont guidé dans nos recherches, et on a considéré qu'il était important de les mentionner ici.

Comparer les faisceaux de Keigher, Carrà Ferro et Kovacic. Comme on l'a vu dans l'historique qu'on a dressé, si A est un anneau différentiel, l'espace topologique $\text{diff-Spec } A$ peut être muni de différents faisceaux :

- Le faisceau induit sur $\text{diff-Spec } A$ par le faisceau structural $\mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}$. Il apparaît pour la première fois dans [Kei81, Corollary 3.2], dans le cadre général des spectres quasi-premiers différentiels. C'est aussi ce faisceau que considère Buium dans [Bui82]. On le note

$$\mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(\text{Keigher})}.$$

- Le faisceau, à la Hartshorne, des fonctions $s : U \longrightarrow \coprod_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}}$ qui sont localement des quotients d'éléments de A . C'est ce faisceau dont Kovacic munit $\text{diff-Spec } A$ dans les articles qu'il a consacrés à ce sujet. On le note

$$\mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(\text{Kov})}.$$

- Lorsque A est un anneau différentiel spécial, le faisceau construit par Carrà Ferro dans [CF90]. Son avantage sur les deux autres faisceaux est que son anneau différentiel des sections globales, pour $\text{diff-Spec } A$, est naturellement isomorphe à A . On le note

$$\mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(\text{CF})}.$$

Quel est le lien entre ces trois faisceaux ? S'il est sous-entendu dans la littérature, bien que ce ne soit pas dit explicitement, que les faisceaux $\mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(\text{Keigher})}$ et $\mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(\text{Kov})}$ sont isomorphes, qu'en est-il du faisceau $\mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(\text{CF})}$ de Carrà Ferro ? Comment est-il relié à $\mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(\text{Keigher})}$ et $\mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(\text{Kov})}$? Ce faisceau, dont la définition peut apparaître plus compliquée que celle des deux autres, n'a en effet plus été étudié après sa définition dans l'article [CF90]. Enfin, quel est parmi ces trois faisceaux le plus adéquat pour la géométrie algébrique différentielle ?

Mieux comprendre le faisceau $\mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(\text{CF})}$. Les questions précédentes nous amènent naturellement à chercher à mieux comprendre le faisceau de Carrà Ferro, c'est-à-dire à le comprendre géométriquement : le faisceau de Carrà Ferro peut-il s'interpréter en des termes géométriques ? Peut-on, le cas échéant, généraliser sa définition au cas non-affine ? Mieux, ce faisceau peut-il être vu comme la solution d'un problème naturel ?

De plus, afin de déterminer si le faisceau $\mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(\text{CF})}$ a de bonnes propriétés, on peut aussi se demander, par exemple, si l'espace annelé

$$(\text{diff-Spec } A, \mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(\text{CF})})$$

est localement annelé. En effet, on sait déjà que les faisceaux $\mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(\text{Keigher})}$ et $\mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(\text{Kov})}$ sont des faisceaux en anneaux locaux (différentiels).

Aborder $\text{diff-Spec } A$ d'un point de vue géométrique. Si l'on veut pouvoir généraliser le faisceau de Carrà Ferro au cas non-affine, il faut nécessairement adopter un point de vue géométrique sur $\text{diff-Spec } A$. Or, dans les nombreux articles consacrés à l'étude des spectres différentiels, le point de vue adopté est celui de l'algèbre différentielle. Peut-on comprendre $\text{diff-Spec } A$ d'un point de vue géométrique ? Le cas échéant, peut-on généraliser certaines constructions ($\text{diff-Spec } A$, les différents faisceaux, etc.) au cas non-affine ?

Une telle approche permettrait-elle d'aborder géométriquement et de généraliser certains thèmes classiques de l'algèbre différentielle ? En particulier, *quid* de la théorie de Galois différentielle d'un point de vue géométrique ?

Simplifier l'approche de Toën et Vaquié dans le cas différentiel. Comme on l'a déjà dit, la théorie très générale développée dans [TV09] s'applique au contexte différentiel et fournit ainsi automatiquement une catégorie

$$\mathbf{Sch}_{(\mathbf{Z}\text{-Mod diff}, \otimes, \mathbf{Z})}.$$

Cependant, les objets de cette catégorie sont compliqués⁽¹²⁾. Pour en donner la mesure, donnons la définition ([TV09], page 455) selon cet article de « *A → B est une immersion ouverte Zariski* » :

- (i) Pour tout anneau différentiel C , le morphisme $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}^\partial}(B, C) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}^\partial}(A, C)$ est injectif.
- (ii) Le foncteur de changement de base

$$- \otimes_A B : A\text{-Mod} \rightarrow B\text{-Mod}$$

commute aux limites finies.

- (iii) Le foncteur

$$\begin{aligned} \mathbf{Alg}_A^\partial &\longrightarrow \mathbf{Ens} \\ C &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_A^\partial}(B, C) \end{aligned}$$

commute aux colimites filtrantes.

La question qu'on se pose est donc : étant donné que le contexte $(\mathbf{Z}\text{-Mod diff}, \otimes, \mathbf{Z})$ qui nous intéresse a plus de structure qu'un contexte $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1})$ général et que, de plus, il est très proche du contexte $(\mathbf{Z}\text{-Mod}, \otimes, \mathbf{Z})$ des schémas, peut-on mener l'approche de Toën et Vaquié, dans ce cas, d'une manière plus simple ?

Explorer l'approche fonctorielle des schémas différentiels. *A priori*, les objets que nous fournit une approche à la Toën et Vaquié sont des foncteurs $F : \mathbf{Ann}^\partial \rightarrow \mathbf{Ens}$. On se propose de s'intéresser à la catégorie

$$\mathbf{Fun}(\mathbf{Ann}^\partial, \mathbf{Ens})$$

des foncteurs covariants de \mathbf{Ann}^∂ dans \mathbf{Ens} . Peut-on étudier certaines questions relatives à la théorie des schémas différentiels dans ce cadre très général et très souple ? En particulier, peut-on définir la dérivée logarithmique d'un foncteur en groupes

$$F : \mathbf{Ann}^\partial \rightarrow \mathbf{Grp} ?$$

Faire le lien entre l'approche à la Toën et Vaquié et les autres approches. Pour le cas des schémas, on trouve dans [DG70] une comparaison entre l'approche classique des schémas, via les espaces localement annelés, et l'approche fonctorielle. En particulier, leur *théorème de comparaison* (page 18) établit une équivalence de catégories entre \mathbf{Sch} et la catégorie des schémas construits selon une approche fonctorielle. Peut-on établir un tel théorème dans le cas des schémas différentiels ? À quel point de vue l'approche à la Toën et Vaquié est-elle équivalente ? Retrouve-t-on les schémas différentiels, et le cas échéant avec quel faisceau, ou retrouve-t-on les schémas munis d'un champ de vecteurs ?

⁽¹²⁾La principale raison étant que l'approche de Toën et Vaquié est très générale.

Résumé de la thèse et principaux résultats

Dans le résumé qui suit, les résultats énoncés (à l'exception du lemme de Singer-van der Put) sont tous des résultats originaux démontrés dans cette thèse.

Feuilles et trajectoires. Soit X un schéma muni d'un champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$. La première chose qu'on fait dans cette thèse est de remarquer qu'on peut associer⁽¹³⁾ à tout élément $x \in X$ un vecteur $\vec{\mathcal{V}}(x) \in T_x X$. En notant $\mathcal{X} = (X, \vec{\mathcal{V}})$, on dit que alors que η est une *feuille* de \mathcal{X} (ou que η est une feuille pour $\vec{\mathcal{V}}$) si $\vec{\mathcal{V}}(\eta) = 0$. L'ensemble des feuilles de \mathcal{X} , qu'on note $X^{\vec{\mathcal{V}}}$ est alors un analogue pour X de ce que $\text{diff-Spec } A$ est à $\text{Spec } A$. Dans ce contexte, on peut alors définir la *trajectoire* de x sous le champ $\vec{\mathcal{V}}$, grâce au théorème suivant :

Théorème (Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les schémas⁽¹⁴⁾). *Soit X un \mathbf{Q} -schéma, muni d'un champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$. Soit $x \in X$. Alors, l'ensemble*

$$\left\{ \eta \in X \mid \begin{array}{l} \eta \rightsquigarrow x \\ \text{et} \\ \eta \text{ est une feuille de } \vec{\mathcal{V}} \end{array} \right\}$$

possède un plus petit élément. On l'appelle *trajectoire* de x sous le champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$ et on le note $\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x)$.

Cette application $\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(-)$ est compatible aux morphismes⁽¹⁵⁾ : si $\mathcal{X} = (X, \vec{\mathcal{V}})$ et $\mathcal{Y} = (Y, \vec{\mathcal{W}})$ sont deux \mathbf{Q} -schémas munis de champs de vecteurs, et si $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ est un morphisme, alors on a

$$f(\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x)) = \text{Traj}_{\vec{\mathcal{W}}}(f(x)).$$

A priori, on ne peut définir la trajectoire que si le schéma X est défini au-dessus de \mathbf{Q} . Néanmoins, on peut faire l'économie de cette hypothèse, quitte à remplacer les dérivations par les *dérivations de Hasse-Schmidt*⁽¹⁶⁾.

Espace des feuilles grossier. Étant donné un tel \mathcal{X} , on introduit⁽¹⁷⁾ la notion d'*espace des feuilles grossier* de \mathcal{X} . C'est un schéma T muni d'un morphisme $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow (T, \vec{0})$ tel que tout morphisme $\varphi' : \mathcal{X} \rightarrow (T', \vec{0})$ se factorise par φ . On calcule⁽¹⁸⁾ un tel espace des feuilles grossier quand le schéma \mathcal{X} n'admet qu'une seule feuille (on dit dans ce cas que \mathcal{X} est *simple*) : on obtient un schéma

$$T = \text{Spec } C_{\mathcal{X}},$$

où $C_{\mathcal{X}}$ est un corps naturellement associé à \mathcal{X} . En fait, les schémas simples \mathcal{X} sont les analogues géométriques, dans le cas différentiel, des spectres de corps. En effet, de façon générale, si (A, ∂) est un anneau différentiel, on peut munir le schéma affine $\text{Spec } A$ d'un champ de vecteurs associé à ∂ — et on note cet objet $\text{Spec}^\partial A$. Si l'anneau différentiel (A, ∂) est différentiellement simple, en particulier si A est un corps, on peut montrer que $\text{Spec}^\partial A$ est simple, et que son espace des feuilles grossier est calculé en considérant l'anneau des

⁽¹³⁾Paragraphe (3.2.3).

⁽¹⁴⁾Théorème 3.4.4.

⁽¹⁵⁾Proposition 3.6.1.

⁽¹⁶⁾Paragraphe (3.5)

⁽¹⁷⁾Définition 4.2.1.

⁽¹⁸⁾Théorème 4.3.6

constantes C_A (qu'on note aussi A^∂). Cette situation se généralise à une classe d'anneaux différentiels plus large, qu'on appelle *quasi-simples*. Ceci permet de voir que l'espace des feuilles grossier de \mathcal{X} ne paramétrise pas toujours bien l'ensemble des feuilles de \mathcal{X} .

Soit alors \mathcal{S} un schéma muni d'un champ de vecteurs simple. Puisque $\text{Spec } C_{\mathcal{S}}$ est l'analogue géométrique de l'anneau des constantes d'un anneau différentiel, on peut espérer géométriser et généraliser, à l'aide de ces espaces des feuilles grossiers, certains résultats d'algèbre différentielle. Considérons par exemple la proposition suivante, due à Michael Singer et Marius van der Put :

Proposition ([vdPS03, Chap. 1, Lemma 1.23]). *Soit M un corps différentiel et C son corps des constantes. On étend la dérivation $'$ sur M en une dérivation sur $M[Y_{i,j}, \frac{1}{\det}]$ en posant $Y'_{i,j} = 0$ pour tous i, j . On voit $C[Y_{i,j}, \frac{1}{\det}]$ comme un sous-anneau de $M[Y_{i,j}, \frac{1}{\det}]$. Alors, l'application $I \mapsto (I)$ de l'ensemble des idéaux de $C[Y_{i,j}, \frac{1}{\det}]$ dans l'ensemble des idéaux différentiels de $M[Y_{i,j}, \frac{1}{\det}]$ est une bijection, dont l'inverse est donnée par $J \mapsto J \cap C[Y_{i,j}, \frac{1}{\det}]$.*

Cette proposition est un lemme de théorie de Galois différentielle, qui leur permet de faire le lien entre deux définitions possibles d'un corps de Picard-Vessiot. Dans notre langage, elle se généralise⁽¹⁹⁾ en

Théorème. *Soit \mathcal{S}/\mathbf{Q} un schéma muni d'un champ de vecteurs simple et soit*

$$\begin{array}{c} \mathcal{X} \\ \downarrow \\ \mathcal{S} \end{array}$$

un schéma muni d'un champ de vecteurs, défini au-dessus de \mathcal{S} , qu'on suppose sans dynamique propre. Soit $x : C_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{S}$ un point. Alors, toute feuille η de \mathcal{X} intersecte la fibre X_x en un unique point $\text{Section}_x(\eta)$, et les deux applications

$$\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}} : \begin{array}{ccc} X_x & \longrightarrow & \text{feuilles de } \mathcal{X} \\ p \longmapsto & & \text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(p) \end{array} \quad \text{et} \quad \text{Section}_x : \begin{array}{ccc} \text{feuilles de } \mathcal{X} & \longrightarrow & X_x \\ \eta \longmapsto & & \text{Section}_x(\eta) \end{array}$$

sont deux bijections réciproques.

Topologie et faisceau de Carrà Ferro. Les feuilles et les trajectoires nous permettent de réinvestir géométriquement l'article [CF90], et de généraliser les constructions de Carrà Ferro au cas non-affine. Étant donné $\mathcal{X} = (X, \vec{\mathcal{V}})$ un \mathbf{Q} -schéma muni d'un champ de vecteurs, on commence par définir ce que sont les *fermés invariants de X (sous le champ $\vec{\mathcal{V}}$)* : ce sont les fermés de X stables par l'application $\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}$; dualement, on obtient la notion d'*ouvert invariant*. On prouve⁽²⁰⁾ :

Théorème. *Soit X un \mathbf{Q} -schéma, muni d'un champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$. Soit $U \in \mathbf{Ouv}(X)$ un ouvert de X . Alors, l'ensemble*

$$\left\{ V \in \mathbf{Ouv}(X) \mid \begin{array}{c} V \supset U \\ \text{et} \\ V \text{ est invariant sous le champ de vecteurs } \vec{\mathcal{V}} \end{array} \right\}$$

possède un plus petit élément. On l'appelle ouvert invariant sous $\vec{\mathcal{V}}$ associé à U et on le note U^δ .

⁽¹⁹⁾Théorème 5.5.2.

⁽²⁰⁾Théorème 6.1.3.

L'application $U \mapsto U^\delta$ commute aux unions et aux intersections quelconques, de sorte que les ouverts invariants de X forment une topologie, qu'on appelle *topologie de Carrà Ferro*. On a alors⁽²¹⁾ :

Proposition. *Soit $\mathcal{X} = (X, \vec{\mathcal{V}})$ un \mathbf{Q} -schéma muni d'un champ de vecteurs. Alors, les topologies de Zariski et de Carrà Ferro induisent la même topologie sur l'ensemble $X^{\vec{\mathcal{V}}}$ des feuilles.*

Cette topologie nous permet de définir le faisceau de Carrà Ferro dans le cas non affine. En effet, l'inclusion de $X^{\vec{\mathcal{V}}}$, l'ensemble des feuilles de \mathcal{X} , dans X est continue quand on munit X de la topologie de Carrà Ferro. On note cette application continue $i_{CF} : X^{\vec{\mathcal{V}}} \longrightarrow X$. Dès lors, on définit :

$$\mathcal{O}_{X^{\vec{\mathcal{V}}}}^{(CF)} := (i_{CF})^{-1} \mathcal{O}_{\mathcal{X}} :$$

c'est la restriction Carrà Ferro de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ à $X^{\vec{\mathcal{V}}}$. En fait, cette restriction est facile à calculer, puisqu'on prouve⁽²²⁾ :

Proposition. *Soit $\mathcal{X} = (X, \vec{\mathcal{V}})$ un \mathbf{Q} -schéma muni d'un champ de vecteurs. Alors,*

$$(i_{CF})^{-1} \mathcal{O}_{\mathcal{X}} = (\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}})_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}}.$$

Cela signifie que, si U est un ouvert de $X^{\vec{\mathcal{V}}}$, en posant $U_\Delta := \{x \in X \mid \text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x) \in U\}$, on calcule les sections de $\mathcal{O}_{X^{\vec{\mathcal{V}}}}^{(CF)}$ par $\mathcal{O}_{X^{\vec{\mathcal{V}}}}^{(CF)}(U) = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U_\Delta)$.

Comparaison des faisceaux de Kovacic, Keigher et Carrà Ferro. Si on fait la même chose en munissant plutôt X de la topologie de Zariski, en notant $i_{Zar} : X^{\vec{\mathcal{V}}} \longrightarrow X$ l'inclusion, on définit le faisceau de Keigher dans le cas non-affine

$$\mathcal{O}_{X^{\vec{\mathcal{V}}}}^{(Keigher)}(U) := (i_{Zar})^{-1} \mathcal{O}_{\mathcal{X}}.$$

On peut alors montrer⁽²³⁾ :

Théorème. *Soit $\mathcal{X} = (X, \vec{\mathcal{V}})$ un \mathbf{Q} -schéma réduit muni d'un champ de vecteurs. Alors,*

$$\mathcal{O}_{X^{\vec{\mathcal{V}}}}^{(CF), \partial} = \mathcal{O}_{X^{\vec{\mathcal{V}}}}^{(Keigher), \partial}.$$

Autrement dit, les faisceaux de Carrà-Ferro et de Keigher, dans le cas réduit, ont les mêmes constantes. Dans le cas affine, on montre qu'il en est de même pour le faisceau de Kovacic. Plus précisément, on montre

Théorème. *Soit A un anneau différentiel réduit. Alors,*

$$\mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(Keigher)} = \mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(Kov)}.$$

Si de plus A est défini au-dessus de \mathbf{Q} , alors

$$\mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(Kov), \partial} = \mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(Keigher), \partial} = \mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(CF), \partial}.$$

⁽²¹⁾Fait 8.5.1.

⁽²²⁾Paragraphe (8.5.3).

⁽²³⁾Théorème 7.3.1 et fait 8.5.4.

Autrement dit, dans le cas réduit au moins, les faisceaux de Kovacic et de Keigher sont égaux. De plus, les faisceaux de Kovacic, de Keigher et de Carrà Ferro ont les mêmes constantes. On montre aussi⁽²⁴⁾ :

Proposition. *Soit \mathcal{X} un \mathbf{Q} -schéma réduit muni d'un champ de vecteurs. Alors,*

$$(X^{\vec{\mathcal{V}}}, \mathcal{O}_{X^{\vec{\mathcal{V}}}}^{(CF),\partial})$$

est un espace localement annelé.

L'ingrédient principal de la démonstration de ces résultats est la proposition suivante⁽²⁵⁾ de *prolongement des constantes* :

Proposition. *Soit $\mathcal{X} = (X, \vec{\mathcal{V}})$ un \mathbf{Q} -schéma réduit muni d'un champ de vecteurs. Soit U un ouvert de X . Alors, pour tout $f \in \mathcal{O}_X(U)^\partial$, il existe un unique $\tilde{f} \in \mathcal{O}_X(U^\delta)^\partial$ tel que $\tilde{f}|_U = f$. De plus,*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(U)^\partial & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(U^\delta)^\partial \\ f & \longmapsto & \tilde{f} \end{array}$$

est un isomorphisme d'anneaux, dont l'inverse est $\mathcal{O}_X(U^\delta)^\partial \longrightarrow \mathcal{O}_X(U)^\partial$, la restriction des constantes.

Espace des feuilles géométriques. Comme on l'a dit, l'exemple des anneaux différentiels quasi-simples montre que l'espace des feuilles grossier de \mathcal{X} ne décrit pas adéquatement l'ensemble des feuilles de \mathcal{X} . Il nous faut donc introduire, dans ce but, un nouvel espace des feuilles. Pour ce faire, on s'est inspiré du livre [MF82] de Mumford et Fogarty, consacré à la question du quotient d'un schéma X par un groupe. En effet, le cas des schémas munis d'une action de groupe, et le cas des schémas munis d'un champ de vecteurs sont très similaires, comme on le montre⁽²⁶⁾ :

Proposition. *Soit X un schéma. Alors, les actions de $\widehat{\mathbf{G}}_a$ sur X sont en bijection avec les champs de vecteurs de Hasse-Schmidt de X .*

En particulier, si X est un schéma défini sur \mathbf{Q} , on a une bijection entre les actions de $\widehat{\mathbf{G}}_a$ sur X et les champs de vecteurs sur X . Cette analogie nous conduit donc à introduire la notion d'*espace des feuilles géométrique*, qui est l'analogue de la définition [MF82] de *quotient géométrique* d'un schéma par un groupe. On montre alors⁽²⁷⁾ :

Théorème. *Soit $\mathcal{X} = (X, \vec{\mathcal{V}})$ un \mathbf{Q} -schéma muni d'un champ de vecteurs. Supposons que \mathcal{X} admette un espace des feuilles géométrique $t : \mathcal{X} \longrightarrow (T, \vec{0})$. Alors, il est isomorphe à*

$$Traj_{\vec{\mathcal{V}}} : \mathcal{X} \longrightarrow ((X^{\vec{\mathcal{V}}}, \mathcal{O}_{X^{\vec{\mathcal{V}}}}^{(CF),\partial}), \vec{0}).$$

Autrement dit, l'espace des feuilles géométrique, quand il existe, est toujours isomorphe à l'ensemble des feuilles, muni du faisceau des constantes de Carrà Ferro !

⁽²⁴⁾ Proposition 7.1.1.

⁽²⁵⁾ Proposition 7.3.3.

⁽²⁶⁾ Proposition 8.3.1.

⁽²⁷⁾ Théorème 8.5.5.

Espaces algébro-différentiels. Maintenant, on souhaite étudier la question des schémas différentiels sous le point de vue fonctoriel. Cette approche repose sur le *yoga des foncteurs*, qui remonte à Yoneda, mais dont la vraie teneur et les premiers cas d'utilisation sont à chercher dans les travaux de Grothendieck (voir par exemple [SGA3I]). Par « *yoga des foncteurs* », en substance, on veut dire que si \mathcal{C} est une catégorie quelconque, alors, \mathcal{C} se plonge dans la catégorie des foncteurs de \mathcal{C}^{op} dans **Ens** : on dispose d'un foncteur

$$i_{\widehat{\mathcal{C}}} : \mathcal{C} \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}} := \mathbf{Fun}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Ens})$$

pleinement fidèle. Dans certains cas, on peut même « réduire » la catégorie de départ de ces foncteurs. C'est ainsi que, pour tout anneau k , la catégorie des k -schémas se plonge dans

$$\mathbf{Fun}(\mathbf{Alg}_k, \mathbf{Ens}).$$

Par analogie, on introduit donc la catégorie

$$\mathbf{Fun}(\mathbf{Alg}_k^{\partial}, \mathbf{Ens}),$$

qu'on note **Esp** $_k^{\partial}$ et dont on appelle les objets k -espaces algébro-différentiels.

L'étude qu'on mène de cette catégorie nous permet de définir de nombreux objets et propriétés relatifs aux k -espaces algébro-différentiels. Si on note X un espace k -algébro-différentiel, on fait entre autres les constructions suivantes :

- on associe à X son *algèbre des fonctions régulières* $\mathcal{O}(X)$, qui est une k -algèbre différentielle. Le foncteur $X \mapsto \mathcal{O}(X)$ est un adjoint à droite du foncteur $i_{\widehat{\mathcal{C}}}$ défini plus haut, pour $\mathcal{C} = (\mathbf{Alg}_k^{\partial})^{\text{op}}$.
- si $x \in X$, on définit $T_x X$, l'espace tangent à X en x , qui est un $\kappa(x)$ -espace algébro-différentiel. C'est la fibre en x du fibré tangent

$$\begin{array}{ccc} TX & & \\ \downarrow & & \\ X & & \end{array}.$$

Ce fibré est canoniquement muni d'une section $\partial_X : X \longrightarrow TX$, qu'on appelle *dérivée de* X , et qui nous permet de généraliser aux k -espaces algébro-différentiels les équations différentielles du type

$$\dot{y} = \vec{\mathcal{V}}(y),$$

où $\vec{\mathcal{V}}$ est un champ de vecteurs défini sur X .

On introduit aussi de nombreux exemples de k -espaces algébro-différentiels dont, entre autres, les espaces affines $\mathbf{A}_k^{\partial, n}$ et le k -espace algébro-différentiel $X_{(P_i)_i}$ des solutions d'un système d'équations différentielles non-linéaires

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{rcl} P_1(f_1, \dots, f_n) & = & 0 \\ & \vdots & \\ P_m(f_1, \dots, f_n) & = & 0 \end{array} \right.$$

Cet espace $X_{(P_i)_i}$ nous permet de caractériser la platitude différentielle du système (\mathcal{S}) , notion introduite dans [FLMR92]. Ainsi, on peut définir :

Définition. Soit k un anneau différentiel et soient P_1, \dots, P_m des polynômes algébro-différentiels en n variables, à coefficients dans k . On dit que le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} P_1(f_1, \dots, f_n) & = & 0 \\ P_2(f_1, \dots, f_n) & = & 0 \\ & \vdots & \\ P_m(f_1, \dots, f_n) & = & 0 \end{array} \right.$$

est différentiellement plat s'il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que le k -espace algébro-différentiel $\text{Sol}_{(P_i)_i}$ soit birationnel à $\mathbf{A}_k^{\partial,p}$.

Une autre question que l'on aborde via les k -espaces algébro-différentiels est celui de la définition de la dérivée logarithmique

$$l\delta : G \longrightarrow \text{Lie}(G)$$

d'un k -groupe algébro-différentiel. Pour définir celle-ci, on impose une condition type Schlesinger à G . Cette condition (S) porte sur des diagrammes qu'on astreint à être cartésiens : on demande que G , en tant que foncteur, préserve certaines limites.

Définition des schémas différentiels à la Toën et Vaquié. L'approche précédente du problème des schémas différentiels, qui est fondamentalement une approche géométrique, est une approche « par le haut », dans le sens où l'on étudie une « sur-catégorie » de la catégorie dont on est à la recherche. Pour redescendre à cette dernière, il nous faut trouver des conditions à imposer à ces objets plus généraux pour qu'ils tombent effectivement dans la bonne sous-catégorie. Voici comment l'on procède :

- Pour commencer, on munit $(\mathbf{Alg}_k^\partial)^{\text{op}}$ d'une prétopologie, qu'on appelle *prétopologie de Zariski*. On dispose ainsi de la catégorie des faisceaux au-dessus de ce site. On note cette catégorie

$$\mathbf{Faisc}_{\text{Zar},k}^\partial.$$

- Puis, si U et X sont deux tels faisceaux, et que $f : U \longrightarrow X$ est un morphisme, on définit la propriété pour f d'être une *immersion ouverte*. Cette définition découle du cas affine, pour lequel on sait décrire de façon très concrète ces immersions ouvertes. On prouve ensuite, et c'est le plus délicat, que les immersions ouvertes sont stables par composition. On peut alors munir $\mathbf{Faisc}_{\text{Zar},k}^\partial$ d'une prétopologie de Grothendieck comme suit : on dit qu'un ensemble

$$\{X_i \longrightarrow X\}_{i \in I}$$

est un recouvrement de X si tous les morphismes $X_i \longrightarrow X$ sont des immersions ouvertes, et si le morphisme

$$\coprod_{i \in I} X_i \longrightarrow X$$

est un épimorphisme dans $\mathbf{Faisc}_{\text{Zar},k}^\partial$.

- On définit alors les *fonct- ∂ -schémas* : ce sont les faisceaux X qui peuvent être recouverts par des objets affines. On note *fonct- ∂ -Sch_k* la catégorie obtenue.

On montre alors⁽²⁸⁾ :

Théorème. Soit k un anneau différentiel. Alors, *fonct- ∂ -Sch_k* est équivalence à la catégorie des k -schémas munis de k -champ de vecteurs.

⁽²⁸⁾Théorème 11.7.1.

Pour montrer ce théorème, on suit une méthode qui est très classique pour ce genre de problème. On montre d'abord qu'on dispose d'une adjonction⁽²⁹⁾

$$\mathbf{Esp}_k^\partial \begin{array}{c} \xrightarrow{|-\| \in *} \\ \xleftarrow[h_- \in \omega]{} \end{array} \mathbf{EspLocAnn}_k^\partial$$

entre \mathbf{Esp}_k^∂ et $\mathbf{EspLocAnn}_k^\partial$, la catégorie des espaces localement différentiellement annelés. Puis, on montre que cette adjonction se restreint à \mathbf{Sch}_k^∂ et à *fonct- ∂ -Sch*_k en une équivalence de catégories. Pour prouver cela, on s'attaque d'abord à des sous-catégories de \mathbf{Esp}_k^∂ et de $\mathbf{EspLocAnn}_k^\partial$ moins compliquées. Ainsi, on commence par montrer l'équivalence entre, d'un côté, les schémas affines munis d'un champ de vecteurs et, de l'autre, les foncteurs représentables : c'est le cas affine. Puis, on fait la même chose pour les « ouverts des affines » : c'est le cas quasi-affine. Enfin, on déduit le cas général du cas quasi-affine.

Résultats divers et variés. Pour terminer, citons trois résultats qu'on démontrera au cours de cette thèse, qui y figurent en tant que lemmes ou aparté, mais qui nous ont semblé suffisamment intéressants pour figurer dans cette introduction. Tout d'abord, si k est un anneau, on prouve que $k[[t]] \otimes_k k[[u]]$ s'injecte dans $k[[t, u]]$, et on caractérise son image : si l'on voit une série formelle comme une matrice infinie, alors celles qui proviennent de $k[[t]] \otimes_k k[[u]]$ sont exactement celles qui sont de rang fini. Cela nous permet de montrer⁽³⁰⁾ que le morphisme

$$\begin{aligned} k[[t]] &\longrightarrow k[[t, u]] \\ t &\longmapsto t + u \end{aligned}$$

ne se factorise pas par l'injection $i : k[[t]] \otimes_k k[[u]] \longrightarrow k[[t, u]]$.

Le second résultat qu'on cite concerne l'algèbre différentielle. Soient A est un anneau différentiel et S est une partie multiplicative de A . Soit $\frac{a}{s} \in S^{-1}A$ un élément constant. Alors, on a

$$\left(\frac{a}{s}\right)' = \frac{a's - s'a}{s^2} = 0,$$

de sorte qu'on a envie d'écrire

$$\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'} \quad \text{et même,} \quad \forall i \in \mathbf{N}, \quad \frac{a}{s} = \frac{a^{(i)}}{s^{(i)}}.$$

En fait, ce résultat est vrai, mais beaucoup moins simple à démontrer qu'on peut l'imaginer. On a⁽³¹⁾ :

Proposition. *Soit A un anneau différentiel. Soit S une partie multiplicative de A , si $s \in S$ et si $i \in \mathbf{N}$, on a*

$$\left. \left(\frac{a}{s} \right)' = 0 \text{ dans } S^{-1}A \right\} \implies \frac{a}{s} = \frac{a^{(i)}}{s^{(i)}} \text{ dans } S^{-1}A$$

Enfin, on prouve la jolie proposition suivante⁽³²⁾, qui permet d'écrire proprement certains isomorphismes quand on empile ou juxtapose les changements de base.

⁽²⁹⁾ Proposition 11.1.3.

⁽³⁰⁾ Fait 8.2.7.

⁽³¹⁾ Proposition 7.2.2.

⁽³²⁾ Proposition 2.1.4.

Proposition. Soit \mathcal{C} une catégorie et

$$\begin{array}{ccccc} & & B' & & \\ & \swarrow & | & \searrow & \\ \cdots & A & \xrightarrow{\quad} & B & \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ C' & \xrightarrow{\quad} & D' & \xrightarrow{\quad} & \\ \downarrow & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ C & \xrightarrow{\quad} & D & & \end{array}$$

trois faces d'un cube — qui sont cartésiennes. Supposons qu'il existe un objet A' , ainsi que deux flèches, qui fassent d'une des faces manquantes ou d'une des tranches un carré cartésien. Alors, il existe une unique façon de compléter le cube en cube commutatif, et on a alors que ce cube

$$\begin{array}{ccccc} A' & \longrightarrow & B' & & \\ \downarrow & \searrow & | & \searrow & \\ \cdots & A & \xrightarrow{\quad} & B & \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ C' & \xrightarrow{\quad} & D' & \xrightarrow{\quad} & \\ \downarrow & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ C & \xrightarrow{\quad} & D & & \end{array}$$

a toutes ses faces, ainsi que ses tranches $(A'D'DA)$, $(A'B'DC)$ et $(A'BDC')$, cartésiennes.

Plan du texte

On trouvera en préambule de chaque chapitre une présentation détaillée, qui inclut une remise en contexte des problèmes étudiés ainsi qu'un résumé de la démarche suivie et des résultats obtenus.

Première partie : Préliminaires différentiels et catégoriques

Premier chapitre. Dans le premier chapitre, on expose quelques points d'algèbre commutative différentielle. On y introduit les objets de base et on y démontre plusieurs propositions sur le caractère premier d'idéaux différentiels maximaux.

Deuxième chapitre. Dans ce chapitre, principalement, on fait des rappels de théorie des catégories. Ces rappels concernent en majeure partie les catégories de faisceaux. On montre aussi plusieurs lemmes techniques de théorie des catégories.

Deuxième partie : Champs de vecteurs, feuilles et trajectoires dans les schémas

Troisième chapitre. Dans le troisième chapitre, on introduit les champs de vecteurs sur les schémas. On définit alors les feuilles et les trajectoires dans ce cadre, et on étudie leurs propriétés.

Troisième partie : Espace des feuilles grossier et trajectoires des schémas sans dynamique propre à base simple

Quatrième chapitre. On définit l'espace des feuilles grossier d'un schéma muni d'un champ de vecteurs, et on le calcule dans les cas simple et quasi-simple.

Cinquième chapitre. On utilise l'espace des feuilles grossier d'un schéma simple \mathcal{S} pour étudier les trajectoires d'un schéma $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S}$ en famille. Dans le cas sans dynamique propre, on obtient une bijection entre les feuilles de \mathcal{X} et les points d'une fibre.

Quatrième partie : Faisceau de Carrà Ferro d'un schéma muni d'un champ de vecteurs

Sixième chapitre. On utilise les outils géométriques introduits dans le troisième chapitre pour définir et étudier la topologie de Carrà Ferro d'un schéma muni d'un champ de vecteurs. On définit aussi les faisceaux de Carrà Ferro et de Keigher, qu'on compare entre eux.

Septième chapitre. On prouve que les faisceaux de Keigher et de Kovacic sont isomorphes dans le cas réduit. Toujours dans ce cas, on prouve que les faisceaux de Keigher, de Kovacic et de Carrà Ferro ont les mêmes constantes.

Cinquième partie : Espace des feuilles géométrique

Huitième chapitre. On établit une analogie entre les schémas munis d'une action de groupe et les schémas munis d'un champ de vecteurs. Suivant cette analogie, on définit l'espace des feuilles géométrique d'un schéma muni d'un champ de vecteurs. On montre que, lorsqu'il existe, cet espace des feuilles géométrique peut être calculé à l'aide du faisceau de Carrà Ferro.

Sixième partie : Schémas différentiels : le point de vue fonctoriel

Neuvième chapitre. Ce chapitre est consacré à l'étude des k -espaces algébro-différentiels. On y introduit ces objets ainsi que de nombreuses propriétés et constructions les concernant. On illustre cette notion par des exemples relatifs à l'algèbre différentielle et aux équations différentielles. On traite aussi la question de la dérivée logarithmique d'un k -groupe algébro-différentiel.

Septième partie : Schémas différentiels : le point de vue relatif

Dixième chapitre. On définit la catégorie des fonct- ∂ -schémas. Pour cela, on munit la catégorie \mathbf{Alg}_k^∂ d'une prétopologie, et on définit sur la catégorie de faisceaux correspondante une notion d'immersion ouverte.

Onzième chapitre. On prouve que la catégorie des fonct- ∂ -schémas est équivalente à la catégorie des schémas munis d'un champ de vecteurs. Pour cela, on établit une adjonction entre la catégorie des espaces algébro-différentiels et la catégorie des espaces localement différentiellement annelés, et on montre comment cette adjonction se restreint en une équivalence.

Première partie

Quelques points d'algèbre différentielle et de théorie des catégories

Chapitre 1

Quelques points d'algèbre différentielle

Le but de cette partie est de fixer les notations et les définitions (le lecteur est supposé être à l'aise avec ces notions) ainsi que de démontrer quelques propositions sur les idéaux différentiels. Ainsi, il est bien connu que si A est un anneau différentiel contenant \mathbf{Q} , et si \mathfrak{p} est un idéal différentiel maximal, alors \mathfrak{p} est un idéal premier. Ce résultat peut être raffiné comme suit. Soient A une \mathbf{Q} -algèbre différentielle, I un idéal *differentiel* de A et \mathfrak{p} un idéal *premier* de A tels que $I \subset \mathfrak{p}$. Alors, les éléments maximaux parmi les idéaux différentiels J de A tels que

$$I \subset J \subset \mathfrak{p},$$

sont des idéaux *differentiels premiers* de A .

On démontre aussi le résultat suivant concernant l'anneau des constantes après changement de base :

Proposition. *Soit $C \rightarrow C'$ une « extension » d'anneaux constants (ie un morphisme entre deux anneaux munis de la dérivation nulle). Soit $R \in \mathbf{Alg}_C^\partial$. On note $R_{C'} = R \otimes_C C'$. Alors, sous l'une ou l'autre des conditions suivantes :*

- (i) *La famille $(f')_{f \in R}$ engendre R en tant que C -module*
- (ii) *C' est un C -module plat,*

on a

$$C_{(R_{C'})} = C_R \otimes_C C'.$$

Une bonne référence pour l'algèbre différentielle est [Kol73]. Citons aussi [vdPS03], [Mag94] et [Kap57].

1.1 Objets de base

(1.1.1) Anneaux différentiels. Les anneaux que nous considérerons par la suite seront toujours commutatifs et unitaires. Un *anneau différentiel* est un anneau A muni d'une *dérivation* ∂ , c'est-à-dire d'une application $\partial : A \rightarrow A$ qui vérifie :

$$\begin{aligned}\partial(f + g) &= \partial(f) + \partial(g) \\ \partial(fg) &= f\partial(g) + \partial(f)g,\end{aligned}$$

la seconde condition imposée à ∂ étant appelée *relation de Leibniz*. On notera indifféremment, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, $f' := \partial(f)$. On note aussi

$$f^{(n)} := (\underbrace{\partial \circ \cdots \circ \partial}_{n \text{ fois}})(f).$$

La relation de Leibniz peut être étendue aux dérivées d'ordre arbitraire de la manière qui suit :

Proposition 1.1.1. Soient A un anneau différentiel et $f, g \in A$. Alors

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Démonstration. — Elle se fait par récurrence sur n . ■

(1.1.2) Corps différentiels. Un *corps différentiel* est un anneau différentiel (k, ∂) où k est un corps.

(1.1.3) Morphismes, catégories. Un *morphisme entre deux anneaux différentiels* (A, ∂_A) et (B, ∂_B) est un morphisme d'anneaux $\varphi : A \rightarrow B$ commutant avec les dérivations, ie tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \partial_A \downarrow & & \downarrow \partial_B \\ A & \xrightarrow{\varphi} & B \end{array}$$

commute. La *catégorie des anneaux différentiels* est notée \mathbf{Ann}^∂ . Si k est un anneau différentiel, une k -algèbre différentielle sera un anneau différentiel A munis d'un morphisme

$$k \rightarrow A.$$

Les morphismes entre deux k -algèbres différentielles $k \rightarrow A$ et $k \rightarrow B$ seront par définition les morphismes $\varphi : A \rightarrow B$ d'anneaux différentiels faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ & \swarrow k \quad \nearrow & \\ & k & \end{array}.$$

On appellera *catégorie des k -algèbres différentielles* la catégorie ainsi définie. On la notera \mathbf{Alg}_k^∂ .

(1.1.4) Constantes. Soit A un anneau différentiel. Une *constante* de A est un élément $f \in A$ tel que $f' = 0$. L'ensemble des constantes de A , noté C_A est un anneau, l'*anneau des constantes de A* . On note aussi $C(A)$ ou A^∂ l'anneau des constantes de A , principalement quand la notation C_- n'est pas suffisamment lisible. Si A et B sont deux anneaux différentiels, si $\varphi : A \rightarrow B$ est un morphisme et si $c \in A$ est une constante de A , alors

$$\varphi(c)' = \varphi(c') = 0 ;$$

autrement dit, φ envoie C_A dans C_B , ce qui nous permet de voir cette opération comme un foncteur

$$C_- : \mathbf{Ann}^\partial \rightarrow \mathbf{Ann}.$$

De même, si k est un anneau différentiel, on définit un foncteur $C_- : \mathbf{Alg}_k^\partial \rightarrow \mathbf{Alg}_{C_k}$. Si k est un corps différentiel, son anneau des constantes C_k est encore un corps.

On prendra garde aux constantes, comme l'illustre l'exemple suivant.

(1.1.5) Un contre-exemple. Le but de ce qui suit est de construire une extension d'anneaux différentiels $A \subset B$ vérifiant :

- (i) A et B sont intègres ;
- (ii) l'extension $A \subset B$ n'affecte pas les constantes, ie $C_A = C_B$;
- (iii) en revanche, les constantes de $\text{Frac}(B)$ sont strictement plus nombreuses que celles de A : $C_A \subsetneq C_{\text{Frac}(B)}$

Voilà comment on procède : on prend pour A un anneau C intègre, muni de la dérivation nulle. Puis on considère l'anneau de polynômes $B = C[x, y]$ qu'on munit de la dérivation définie par

$$x' = x^2y \quad \text{et} \quad y' = y^2x.$$

Soit $f \in C_B$, qu'on écrit

$$f = \sum_{i=0}^N f_i(y)x^i.$$

En exprimant $f' = 0$, on obtient l'égalité

$$\sum_{i=0}^N f_i(y)'x^i + \sum_{i=0}^N f_i(y)ix^{i-1}x^2y = 0.$$

Par ailleurs, on a $f_i(y)' = f'_i(y)y^2x$. Donc,

$$\sum_{i=0}^N f'_i(y)y^2x^{i+1} + \sum_{i=0}^N f_i(y)yix^{i+1} = 0.$$

Soit i compris entre 0 et N . En comparant les termes de degré $i+1$ en x , on trouve que

$$f'_i(y)y^2 = if_i(y)y.$$

Si on écrit $f_i(y) := \sum_{j=0}^M a_jy^j$, on trouve que

$$\sum_{j=0}^M ja_jy^{j+1} = i \cdot \sum_{j=0}^M a_jy^{j+1}.$$

Ainsi, $f_i(y)$ s'écrit nécessairement $f_i(y) = a_iy^i$. Notre élément constant f est donc nécessairement de la forme $f = \sum a_i(xy)^i$. Comme $(xy)' = 2(xy)^2$, on a donc $f = c$: ainsi, $C_B = C$. Cependant, on vérifie aussi que $\frac{x}{y} \in C_{\text{Frac}(B)}$ et donc que $C \subsetneq C_{\text{Frac}(B)}$.

(1.1.6) Algèbre de Lie des dérivations. L'ensemble des dérivations de A est noté $\text{Der}(A)$. C'est un A -module. En effet, si $\partial \in \text{Der}(A)$ et si $\lambda \in A$, alors $\lambda \cdot \partial$ est encore une dérivation. De même, la somme de deux dérivations est encore une dérivation.

Si k est un anneau (sous-entendu de base) et si A est une k -algèbre (*via* le morphisme $i : k \longrightarrow A$), on note $\text{Der}_k(A)$ l'ensemble des dérivations ∂ de A vérifiant

$$\forall \lambda \in k, \quad \partial(i(\lambda)) = 0.$$

C'est une k -algèbre de Lie : pour le crochet de Lie, si $\partial_1, \partial_2 \in \text{Der}_k(A)$, on pose

$$[\partial_1, \partial_2] := \partial_1 \partial_2 - \partial_2 \partial_1.$$

On vérifie facilement que c'est encore une dérivation. Puis, on vérifie que :

- $[\cdot, \cdot]$ est antisymétrique
- $[\cdot, \cdot]$ est k -bilinéaire
- $[\cdot, \cdot]$ vérifie la relation de Jacobi, *ie*

$$\forall \partial_1, \partial_2, \partial_3 \in \text{Der}_k(A) \quad [\partial_1, [\partial_2, \partial_3]] + [\partial_2, [\partial_3, \partial_1]] + [\partial_3, [\partial_1, \partial_2]] = 0.$$

1.2 Idéaux différentiels

(1.2.1) Idéaux différentiels. Un *idéal différentiel* I d'un anneau différentiel est un idéal I de A stable par dérivation, *ie* tel que :

$$\forall f \in I, \quad \partial(f) \in I.$$

Si I est un idéal ou, plus généralement, une partie de A , on note $\langle I \rangle$ l'idéal différentiel engendré par I . Parmi les constructions classiques d'algèbre commutative qui sont encore valables en algèbre différentielle, citons celle-là :

Proposition 1.2.1. Soient A une \mathbf{Q} -algèbre différentielle et I un idéal différentiel. Alors, le radical \sqrt{I} est encore un idéal différentiel.

Démonstration. — En effet, supposons que $f \in A$ soit tel que $f^n \in I$. On montre alors par récurrence sur $1 \leq k \leq n$ que

$$(f')^{2k-1} f^{n-k} \in I.$$

Pour $k = 1$, en dérivant $f^n \in I$, on trouve $n f^{n-1} f' \in I$. Comme n est inversible dans A , on conclut. Supposons maintenant que $g := (f')^{2k-1} f^{n-k} \in I$ avec $1 \leq k \leq n-1$; en dérivant $f' g$, on obtient :

$$\begin{aligned} (f' g)' &= (f'(f')^{2k-1} f^{n-k})' \\ &= f'' \underbrace{(f')^{2k-1} f^{n-k}}_{=g \in I} + \underbrace{f' ((2k-1)(f')^{2k-2} f'' f^{n-k})}_{=(2k-1)f'' g \in I} + f' ((f')^{2k-1} (n-k) f' f^{n-k-1}). \end{aligned}$$

Par conséquent, le dernier terme, $(n - k)(f')^{2(k+1)-1} f^{n-(k+1)}$ est lui-aussi dans I . Comme $(n - k)$ est inversible dans A , on en déduit le résultat escompté. Lorsqu'on l'applique en $k = n$, on obtient :

$$(f')^{2n-1} \in I$$

et donc $f' \in \sqrt{I}$. ■

En particulier, (0) étant un idéal différentiel, il en est de même de $\sqrt{(0)}$, l'idéal des éléments nilpotents. Par conséquent, on a :

$$f \text{ nilpotent} \implies f' \text{ nilpotent.}$$

(1.2.2) Idéaux différentiels maximaux. Le lemme de Zorn nous assure de l'existence d'idéaux différentiels et maximaux pour cette propriété. Ces idéaux « différentiels-maximaux » vérifient une propriété supplémentaire :

Proposition 1.2.2. *Soient A une \mathbf{Q} -algèbre différentielle et \mathfrak{P} un idéal « différentiel-maximal », ie un élément maximal de l'ensemble*

$$\{I \mid I \text{ est un idéal différentiel de } A \text{ et } I \neq A\}.$$

Alors, \mathfrak{P} est un idéal premier.

Démonstration. — Ce résultat est classique. En voici une démonstration. Soit \mathfrak{P} un tel idéal. Commençons par démontrer que \mathfrak{P} est radical. D'après la proposition 1.2.1, on sait que $\sqrt{\mathfrak{P}}$ est encore différentiel ; si \mathfrak{P} n'était pas radical, on aurait $\sqrt{\mathfrak{P}} = A$ — et donc $1^n \in \mathfrak{P}$ pour un certain $n \in \mathbf{N}_{\geq 1}$: c'est absurde.

Soient maintenant $f, g \in A$ tels que $fg \in \mathfrak{P}$. Notons

$$Z = \{h \in A \mid \exists n \in \mathbf{N}, f^n h \in \mathfrak{P}\}.$$

On voit facilement que Z est un idéal qui contient \mathfrak{P} ; en fait, mieux, c'est un idéal différentiel : si $h \in Z$ ie si $f^n h \in \mathfrak{P}$ pour un certain $n \in \mathbf{N}$, alors

$$(f^n h)' = nf^{n-1} f'h + f^n h' \in \mathfrak{P}$$

et donc

$$f(f^n h)' = nf' f^n h + f^{n+1} h' \in \mathfrak{P}.$$

Comme le premier terme de la somme de gauche est déjà dans \mathfrak{P} , on en déduit que $f^{n+1} h' \in \mathfrak{P}$ et donc que $h' \in Z$. Ainsi, Z est un idéal différentiel contenant \mathfrak{P} et contenant g , par hypothèse. Par conséquent, si $g \notin \mathfrak{P}$ on a forcément $Z = A$ et donc il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $f^{n_0} \in \mathfrak{P}$: $f \in \sqrt{\mathfrak{P}}$. D'après $\mathfrak{P} = \sqrt{\mathfrak{P}}$, on en déduit que $f \in \mathfrak{P}$. ■

(1.2.3) Anneaux différentiels simples. Un anneau différentiel A est *simple* (ou *differentiellement simple*, si l'on veut préciser) si ses seuls idéaux différentiels sont (0) et A . D'une certaine façon, les anneaux différentiels simples sont les analogues différentiels des corps. En particulier, on a :

Proposition 1.2.3. Soit A un anneau différentiel et I un idéal différentiel. Alors :

$$I \text{ est maximal} \iff A/I \text{ est simple.}$$

On peut aussi caractériser les anneaux différentiels simples avec la notion d'*unité différentielle*, due à Jerald Kovacic (cf. [Kov02b]). Si A est un anneau différentiel et si $f \in A$, on dit que f est une unité différentielle si l'idéal différentiel $\langle f \rangle$ engendré par f contient 1. On peut alors caractériser les anneaux différentiels simples comme les anneaux dont tous les éléments non-nuls sont des unités différentielles.

1.3 Constructions classiques

(1.3.1) Algèbre de polynômes. Soit k un anneau différentiel et soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'indéterminées. Alors, se donner une dérivation sur $k[(X_i)_{i \in I}]$ qui étend la dérivation de k équivaut à choisir une famille quelconque

$$(P_i)_{i \in I} \in [(X_i)_{i \in I}]^I.$$

La dérivation ∂ associée à une telle famille est caractérisée par

$$\forall i \in I, \quad \partial(X_i) := P_i.$$

(1.3.2) Quotient. Soit A un anneau différentiel et I un idéal différentiel. Alors, il existe une unique dérivation $\partial_{A/I}$ sur A/I telle que la projection canonique $A \rightarrow A/I$ soit un morphisme d'anneaux différentiels. Cette dérivation est définie par

$$\forall a \in A, \quad \partial_{A/I}(a + I) := \partial(a) + I.$$

(1.3.3) Localisation. Soit A un anneau différentiel et soit S un partie multiplicative de A . Alors, il existe une unique dérivation $\partial_{S^{-1}A}$ sur $S^{-1}A$ telle que le morphisme canonique $A \rightarrow S^{-1}A$ soit un morphisme d'anneaux différentiels. Si $a \in A$ et $s \in S$, cette dérivation est définie par

$$\partial_{S^{-1}A}\left(\frac{a}{s}\right) := \frac{a's - s'a}{s^2}.$$

(1.3.4) Produit tensoriel. Soit k un anneau et soient A et B deux k -algèbres. Soient ∂_A une dérivation de A et ∂_B une dérivation de B . Alors, il existe une unique dérivation $\partial_{A \otimes_k B}$ de $A \otimes_k B$ telle que les morphismes canoniques

$$i_A : A \rightarrow A \otimes_k B \quad \text{et} \quad i_B : B \rightarrow A \otimes_k B$$

soient des morphismes d'anneaux différentiels. Cette unique dérivation est définie par

$$\forall (a, b) \in A \times B, \quad \partial_{A \otimes_k B}(a \otimes b) := \partial_A(a) \otimes b + a \otimes \partial_B(b).$$

Par ailleurs, si k est muni d'une dérivation ∂_k et si (A, ∂_A) et (B, ∂_B) sont des (k, ∂_k) -algèbres différentielles, alors, $(A \otimes_k B, \partial_{A \otimes_k B})$, muni du morphisme canonique $k \rightarrow A \otimes_k B$ est une (k, ∂_k) -algèbre différentielle. C'est le coproduit de (A, ∂_A) et (B, ∂_B) au-dessus de (k, ∂_k) .

1.4 Problèmes d'idéaux différentiels

Dans cette section, on généralise la proposition 1.2.1.

Proposition 1.4.1. *Soient A une \mathbf{Q} -algèbre différentielle et \mathfrak{P} un idéal premier de A . Alors, l'ensemble*

$$\{I \mid I \text{ idéal différentiel de } A \text{ et } I \subset \mathfrak{P}\}$$

admet des éléments maximaux — et ils sont tous premiers.

Démonstration. — La première partie de l'assertion est une application facile du lemme de Zorn, en remarquant que (0) est toujours un idéal différentiel. Pour démontrer la seconde, on localise A par rapport à l'idéal premier \mathfrak{P} : on considère l'anneau différentiel $A_{\mathfrak{P}}$, et on note $i : A \rightarrow A_{\mathfrak{P}}$ la flèche canonique de localisation. On utilise la correspondance⁽¹⁾ entre les idéaux différentiels de A et ceux de $A_{\mathfrak{P}}$, qui peut s'exprimer ainsi : les deux applications

$$\begin{array}{ccc} \Phi : & \text{idéaux différentiels de } A & \longrightarrow \text{idéaux différentiels} \\ & \text{contenus dans } \mathfrak{P} & \subseteq A_{\mathfrak{P}} \\ & I \mapsto & IA_{\mathfrak{P}} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} \Psi : & \text{idéaux différentiels} & \longrightarrow \text{idéaux différentiels de } A \\ & \subseteq A_{\mathfrak{P}} & \text{contenus dans } \mathfrak{P} \\ & J \mapsto i^{-1}(J) & \end{array}$$

sont croissantes et vérifient :

$$\begin{array}{ll} \Phi(\Psi(J)) = J & \text{pour tout } J \text{ idéal différentiel } \subseteq A_{\mathfrak{P}} \\ I \subset \Psi(\Phi(I)) & \text{pour tout } I \text{ idéal différentiel de } A \text{ contenu dans } \mathfrak{P}. \end{array}$$

On en déduit immédiatement que Ψ est injective. Soit maintenant I_0 est un élément maximal de

$$\{I \mid I \text{ idéal différentiel de } A \text{ et } I \subset \mathfrak{P}\}.$$

Montrons pour commencer que $\Phi(I_0)$ est un élément maximal parmi les idéaux différentiels de $A_{\mathfrak{P}}$ différents de $A_{\mathfrak{P}}$. En effet, si J_1 est un idéal différentiel strict de $A_{\mathfrak{P}}$, tel que $\Phi(I_0) \subset J_1$, alors, en appliquant Ψ , on obtient

$$I_0 \subset \Psi(\Phi(I_0)) \subset \Psi(J_1) \subset \mathfrak{P}. \quad (1)$$

Comme I_0 est maximal, on en déduit que $\Psi(\Phi(I_0)) = \Psi(J_1)$; comme Ψ est injective, on en déduit que $\Phi(I_0) = J_1$, ce qu'on voulait. Or, $A_{\mathfrak{P}}$ est encore une \mathbf{Q} -algèbre différentielle, et on peut donc lui appliquer la proposition 1.2.2 : les idéaux « différentiels-maximaux » de $A_{\mathfrak{P}}$ sont premiers — et c'est donc le cas de $\Phi(I_0)$. Maintenant, d'après (1) et la maximalité de I_0 , on sait que $I_0 = \Psi(\Phi(I_0))$. Comme par ailleurs Ψ envoie les idéaux premiers sur les idéaux premiers, on en déduit que I_0 est premier, ce qu'on voulait démontrer. ■

On peut énoncer une version encore plus générale de la proposition 1.2.2.

⁽¹⁾qui, attention !, n'est pas bijective.

Proposition 1.4.2. Soit A une \mathbf{Q} -algèbre différentielle. Soient \mathfrak{P} un idéal premier de A et I un idéal différentiel de A vérifiant $I \subset \mathfrak{P}$. Alors, l'ensemble

$$\{J \mid J \text{ idéal différentiel de } A \text{ et } I \subset J \subset \mathfrak{P}\}$$

admet des éléments maximaux — et ils sont tous premiers.

Démonstration. — Comme pour la proposition précédente, on procède en se ramenant à un cas déjà traité. Tout d'abord, remarquons que l'ensemble

$$\{J \mid J \text{ idéal différentiel de } A \text{ et } I \subset J \subset \mathfrak{P}\}$$

est non-vide, puisqu'il contient I ; comme de plus c'est un ensemble ordonné inductif, d'après le lemme de Zorn, il possède des éléments maximaux. Pour démontrer que ces derniers sont premiers, on considère l'anneau différentiel A/I , muni de la projection canonique $p : A \rightarrow A/I$. On utilise ensuite la correspondance entre les idéaux de A et ceux de A/I , qu'on peut écrire comme suit : les deux applications

$$\Phi : \begin{array}{c} \text{idéaux différentiels de } A \\ \text{contenant } I \text{ et contenus dans } \mathfrak{P} \end{array} \xrightarrow{\quad} \begin{array}{c} \text{idéaux différentiels de } A/I \\ \text{contenus dans } \mathfrak{P}A/I \end{array}$$

$$J \mapsto p(J)$$

et

$$\Psi : \begin{array}{c} \text{idéaux différentiels de } A/I \\ \text{contenus dans } \mathfrak{P}A/I \end{array} \xrightarrow{\quad} \begin{array}{c} \text{idéaux différentiels de } A \\ \text{contenant } I \text{ et contenus dans } \mathfrak{P} \end{array}$$

$$J \mapsto p^{-1}(J)$$

sont des bijections croissantes réciproques l'une de l'autre. Ainsi, les éléments maximaux auxquels on s'intéresse sont exactement les p^{-1} des idéaux différentiels maximaux de A/I contenus dans $\mathfrak{P}A/I$. Or, ces derniers, d'après la proposition 1.4.1, sont premiers. Par conséquent, il en est de même pour leur image inverse, ce qui démontre le résultat attendu. ■

(1.4.1) Généralisations. En se plaçant dans l'anneau différentiel $S^{-1}A$, si S est une partie multiplicative, au lieu de l'anneau différentiel $A_{\mathfrak{P}}$, on peut démontrer une version plus générale de la proposition 1.4.2, qui s'énonce :

Proposition 1.4.3. Soit A une \mathbf{Q} -algèbre différentielle et soit S une partie multiplicative ne contenant pas 0. Soit I un idéal différentiel n'intersectant pas S . Alors, l'ensemble

$$\{J \mid J \text{ idéal différentiel de } A \text{ et } I \subset J \text{ et } S \cap J = \emptyset\}$$

admet des éléments maximaux — et ils sont tous premiers.

De même, dans la démonstration de la proposition 1.4.1, en considérant l'anneau différentiel A/I au lieu de $A_{\mathfrak{P}}$, on pourrait montrer :

Proposition 1.4.4. Soit A une \mathbf{Q} -algèbre différentielle et soit I un idéal différentiel différent de A . Alors, l'ensemble

$$\{J \mid J \text{ idéal différentiel de } A \text{ et } I \subset J \neq A\}$$

admet des éléments maximaux — et ils sont tous premiers.

1.5 Changements de base

Si $A \rightarrow B$ est un morphisme d'anneaux différentiels, on dispose naturellement d'un foncteur de changement de base

$$F_{A \rightarrow B} : \begin{array}{ccc} \mathbf{Alg}_A^\partial & \longrightarrow & \mathbf{Alg}_B^\partial \\ R & \longmapsto & R_B := R \otimes_A B \end{array},$$

où on a étendu la dérivation de R à R_B par la règle de Leibniz : $(f \otimes b)' = f' \otimes b + f \otimes b'$.

Un cas important est lorsque l'on se contente d'étendre l'anneau des constantes. On a alors :

Proposition 1.5.1. *Soit $C \rightarrow C'$ une « extension » d'anneaux constants (ie un morphisme entre deux anneaux munis de la dérivation nulle). Soit $R \in \mathbf{Alg}_C^\partial$. Alors, sous l'une ou l'autre des conditions suivantes :*

- (i) *La famille $(f')_{f \in R}$ engendre R en tant que C -module*
- (ii) *C' est un C -module plat,*

on a

$$C_{(R_{C'})} = C_R \otimes_C C'.$$

Démonstration. — Pour démontrer cette proposition, on utilise le lemme 10 et la proposition 13 de [Bou85, chap. I, §2 n° 11]. On en donne ici une forme un peu allégée :

Lemme 1.5.2 (lemme 10 de [Bou85, chap. I, §2 n° 11]). *Soit A un anneau commutatif et soient M et N deux A -modules. Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille génératrice de N . Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille à support fini d'éléments de M . Alors, pour que*

$$\sum_{(i \in I)} x_i \otimes f_i = 0$$

il faut et il suffit qu'il existe un ensemble fini J , une famille $(y_j)_{j \in J}$ d'éléments de M et une famille presque nulle $(a_{ij})_{(i,j) \in I \times J} \in A^{(I \times J)}$ tels que

- *on a $\sum_{(i \in I)} a_{ij} f_i = 0$ pour tout $j \in J$;*
- *on a $x_i = \sum_{j \in J} a_{ij} y_j$ pour tout $i \in I$.*

Lemme 1.5.3 (proposition 13 de [Bou85, chap. I, §2 n° 11]). *Soit A un anneau commutatif, soit M un A -module plat et soit N un A -module. Soit $(f_i)_{i \in I} \in M^I$ et $(x_i)_{i \in I} \in N^I$ deux familles finies d'éléments telles que*

$$\sum_{i \in I} f_i \otimes x_i = 0.$$

Alors, il existe J un ensemble fini, $(y_j)_{j \in J} \in M^J$ une famille d'éléments de M et $(a_{ij})_{(i,j) \in I \times J} \in A^{I \times J}$ tels que

- *on a $\sum_{i \in I} a_{ij} f_i = 0$ pour tout $j \in J$;*
- *on a $x_i = \sum_{j \in J} a_{ij} y_j$ pour tout $i \in I$.*

La principale différence entre ces deux énoncés est que, dans le premier lemme, on n'a pas d'hypothèse de platitude, mais on suppose que la famille $(f_i)_i$ est génératrice, alors que dans le second lemme, sous une hypothèse de platitude, on n'a pas besoin de supposer que la famille $(f_i)_i$ soit génératrice.

Démontrons maintenant la proposition. Pour commencer, remarquons qu'on a bien $C_R \otimes_C C' \subset C_{(R_{C'})}$. En effet, la dérivée d'un élément du type $\sum_i f_i \otimes \lambda_i$ où les $f_i \in C_R$ et les $\lambda_i \in C'$ est bien toujours nulle. Passons à l'inclusion réciproque.

On fait d'abord l'hypothèse (i), à savoir que la famille $(f')_{f \in R}$ engendre R en tant que C -module. Soit donc

$$x = \sum_{(f \in R)} f \otimes \lambda_f$$

un élément de $R \otimes_C C'$ tel que $x' = 0$. Cela s'écrit

$$\sum_{(f \in R)} f' \otimes \lambda_f = 0.$$

On applique alors le premier lemme de Bourbaki avec la famille génératrice $(f')_{f \in R}$. On obtient ainsi un ensemble J fini, une famille $(\mu_j)_{j \in J}$ d'éléments de C' et une famille presque nulle $(a_{f,j})_{(f,j) \in R \times J} \in C^{(R \times J)}$ tels que

$$\sum_{(f \in R)} a_{f,j} \cdot f' = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_f = \sum_{j \in J} a_{f,j} \mu_j$$

pour tout $(f, j) \in R \times J$. En particulier, on a

$$\begin{aligned} x &= \sum_{(f \in R)} f \otimes \lambda_f = \sum_{(f \in R)} f \otimes \left(\sum_{j \in J} a_{f,j} \mu_j \right) \\ &= \sum_{(f \in R)} \sum_{j \in J} a_{f,j} f \otimes \mu_j \\ &= \sum_{j \in J} \left(\sum_{(f \in R)} a_{f,j} \cdot f \right) \otimes \mu_j. \end{aligned}$$

Si on note $g_j = \sum_{(f \in R)} a_{f,j} \cdot f$ pour tout j , on a alors $g'_j = 0$ — et c'est ainsi qu'on voit que $x \in C_R \otimes_C C'$, ce qu'on voulait.

Faisons maintenant l'hypothèse (ii), à savoir que C est un C' -module plat. Soit

$$x = \sum_{i=1}^n f_i \otimes \lambda_i$$

un élément de $R \otimes_C C'$ qui est constant. On a donc

$$\sum_{i=1}^n f'_i \otimes \lambda_i = 0.$$

D'après le second lemme de Bourbaki, il existe donc un ensemble J fini, $(\mu_j)_{j \in J} \in C'^J$ et $(a_{ij})_{ij} \in C$ des familles d'éléments tels que

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot f'_i = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_i = \sum_{j \in J} a_{ij} \mu_j$$

pour tous i, j . On peut alors conclure, comme précédemment, que

$$x = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot f_i \right) \otimes \mu_j$$

et donc qu'on a bien $x \in C_R \otimes_C C'$. ■

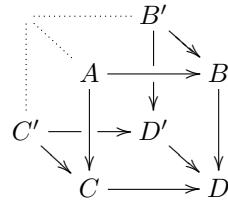
Chapitre 2

Quelques points de théorie des catégories

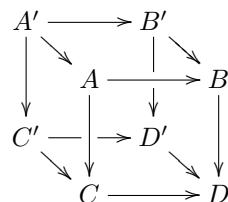
Ce chapitre regroupe les résultats de théorie des catégories que nous utiliserons dans ce travail. Mis à part la première section, qui porte sur les carrés cartésiens, la majorité des notions et résultats qui sont présentés ici ne seront utilisés que dans les deux dernières parties, *ie* dans les chapitres (9), (10) et (11). Le lecteur pourra donc dans un premier temps sauter la lecture de ce chapitre.

Dans la première section sur les carrés cartésiens, on montre, entre autres, la jolie proposition suivante, qui porte sur les cubes cartésiens.

Proposition. *Soit \mathcal{C} une catégorie et soient*



trois faces d'un cube — qui sont cartésiennes. Supposons qu'il existe un objet A' , ainsi que deux flèches, qui fassent d'une des faces manquantes ou d'une des tranches un carré cartésien. Alors, il existe une unique façon de compléter le cube en cube commutatif, et on a alors que ce cube



a toutes ses faces, ainsi que ses tranches $(A'D'DA)$, $(A'B'DC)$ et $(A'BC'D')$, cartésiennes.

Dans les sections qui suivent, on fait des rappels et on montre plusieurs lemmes techniques sur les sujets suivants :

- lemme de Yoneda
- équivalence de catégories

- adjonctions
- limites et colimites
- faisceaux au-dessus d'un site

En effet, dans la dernière partie de ce travail, où l'on définira les fonct- ∂ -schémas, on aura besoin de beaucoup de petits résultats concernant les faisceaux au-dessus d'un site et les différentes propriétés (monomorphismes, épimorphismes, adjonctions, commutation de limites et de colimites, etc.) des catégories de faisceaux. Plutôt qu'interrompre alors le fil de notre exposé par tous ces nombreux résultats, on a choisi de les présenter ici, en guise de *préliminaire catégorique*. Notons aussi que parmi ces préliminaires, on a fait figurer en bonne place des rappels sur les adjonctions. En effet, quand, dans le dernier chapitre, il s'agira de montrer que la catégorie des fonct- ∂ -schémas est équivalente à la catégorie des schémas munis d'un champ de vecteurs, on procédera comme suit : on construira d'abord une adjonction entre deux grosses sur-catégories des catégories en jeu, et on montrera que cette adjonction se restreint en une équivalence là où on le souhaite.

Indiquons dès maintenant la notation suivante : on écrira

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F \in \omega} \\ \xleftarrow{G \in *} \end{array} \mathcal{D}$$

pour signifier que F admet pour adjoint à gauche G (ou, de façon équivalente, pour dire que G admet pour adjoint à droite F). On notera alors : $F \in \omega(G)$ et $G \in *(F)$.

Les livres suivants sont de bonnes références pour la théorie des catégories : [ML71], [Sch72]. Pour les faisceaux au-dessus d'un site, il y a l'excellent [MLM94]. Le livre [KS06] couvre, quant à lui, les deux domaines.

2.1 Carrés cartésiens

Définition 2.1.1. Soit \mathcal{C} une catégorie. On dit que le carré

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & D \end{array}$$

est cartésien si A , muni de ses flèches vers B et C est un produit fibré de B et C au-dessus de D . On note alors

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ C & \longrightarrow & D \end{array} .$$

(2.1.1) Juxtaposition de carrés cartésiens. Les propositions qui suivent sont des classiques des carrés cartésiens ; elles sont par exemple proposées en exercice dans [ML71]. On en donne des démonstrations.

Proposition 2.1.2. Le composé de deux carrés cartésiens est cartésien. Plus précisément : dans une catégorie \mathcal{C} , si

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ C & \longrightarrow & D \end{array} , \quad \begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & E \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ D & \longrightarrow & F \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & D \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ G & \longrightarrow & H \end{array}$$

sont cartésiens alors il en de même pour

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & B & \xrightarrow{\quad} & E \\ \downarrow & \square & \downarrow & & \downarrow \\ C & \xrightarrow{\quad} & D & \xrightarrow{\quad} & F \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & B & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ C & \xrightarrow{\quad} & D & \xrightarrow{\quad} & D \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ G & \longrightarrow & H & & \end{array} .$$

Démonstration. — Démontrons la proposition pour le premier type de composition. Soit donc \mathcal{C} une catégorie et soient

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & B \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ C & \xrightarrow{\quad} & D \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\quad} & E \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ D & \xrightarrow{\quad} & F \end{array}$$

deux carrés cartésiens. Montrons alors que A est un produit fibré de E et C au-dessus de F . Soit, pour cela, X un objet de \mathcal{C} et

$$\begin{array}{ccc} X & \swarrow & \\ & \searrow & \\ & A & \xrightarrow{\quad} B & \xrightarrow{\quad} E \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ & C & \xrightarrow{\quad} D & \xrightarrow{\quad} F \end{array}$$

un diagramme commutatif. Pour construire la flèche de X vers A , on utilise d'abord le caractère cartésien du carré de droite. En effet, en composant la flèche $X \rightarrow C$ avec la

flèche $C \rightarrow D$, on peut appliquer la propriété pour B d'être un produit fibré de E et D au-dessus de F . Ainsi, on obtient une flèche $X \rightarrow B$ qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\quad} & A & \xrightarrow{\quad} & B \xrightarrow{\quad} E \\ & \searrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ & & C & \xrightarrow{\quad} & D \xrightarrow{\quad} F \end{array}$$

On peut alors utiliser le caractère cartésien du diagramme de droite, et obtenir une flèche $X \rightarrow A$ qui convient. L'unicité de cette flèche se voit similairement.

Le résultat pour le second type de composition se déduit aisément du premier, puisque dire que

$$\begin{array}{ccc} A \rightarrow B & & C \rightarrow D \\ \downarrow \square \downarrow & \text{et} & \downarrow \square \downarrow \\ C \rightarrow D & & G \rightarrow H \end{array} \quad \text{sont cartésiens,}$$

c'est exactement la même chose que de dire que

$$\begin{array}{ccc} A \rightarrow C & & C \rightarrow G \\ \downarrow \square \downarrow & \text{et} & \downarrow \square \downarrow \\ B \rightarrow D & & D \rightarrow H \end{array} \quad \text{sont cartésiens.}$$

On peut alors appliquer ce qu'on vient de démontrer, et conclure. ■

Cette proposition admet une réciproque partielle, qui s'énonce :

Proposition 2.1.3. Soit \mathcal{C} une catégorie et soient

$$\begin{array}{ccc} A \rightarrow B & & B \rightarrow E \\ \downarrow & & \downarrow \\ C \rightarrow D & , & D \rightarrow F \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} C \rightarrow D & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ G \rightarrow H & & \end{array}$$

trois carrés commutatifs. Alors :

$$\begin{array}{ccc} A \rightarrow B \rightarrow E & & B \rightarrow E \\ \downarrow \square \downarrow & \text{et} & \downarrow \square \downarrow \\ C \rightarrow D \rightarrow F & & D \rightarrow F \end{array} \quad \text{cartésiens} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccc} A \rightarrow B & & \\ \downarrow \square \downarrow & & \\ C \rightarrow D & & \end{array} \quad \text{cartésien}$$

et

$$\begin{array}{ccc} A \rightarrow B & & C \rightarrow D \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ C \rightarrow D \rightarrow H & \text{et} & G \rightarrow H \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ G \rightarrow H & & \end{array} \quad \text{cartésiens} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccc} A \rightarrow B & & \\ \downarrow \square \downarrow & & \\ C \rightarrow D & & \end{array} \quad \text{cartésien.}$$

Démonstration. — Comme pour la démonstration de la proposition précédente, il suffit de démontrer la première affirmation. On garde les notations de l'énoncé, et on suppose donc

que

$$\begin{array}{ccc} A \rightarrow B \rightarrow E \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ C \rightarrow D \rightarrow F \end{array}$$

est cartésien. On veut montrer que

$$\begin{array}{ccc} A \rightarrow B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C \rightarrow D \end{array}$$

l'est aussi. Soit donc X un objet de \mathcal{C} et $X \rightarrow B$ et $X \rightarrow C$ deux flèches qui font commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\quad} & A & \xrightarrow{\quad} & B \cdots \cdots E \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & C & \xrightarrow{\quad} & D \cdots \cdots F \end{array}$$

On définit d'abord une flèche $X \rightarrow E$, par simple composition de $X \rightarrow B$ avec $B \rightarrow E$: le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\quad} & A & \xrightarrow{\quad} & B \rightarrow E \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & C & \xrightarrow{\quad} & D \cdots \cdots F \end{array}$$

commute. On vérifie ensuite facilement que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\quad} & A & \xrightarrow{\quad} & B \cdots \cdots E \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & C & \xrightarrow{\quad} & D \rightarrow F \end{array}$$

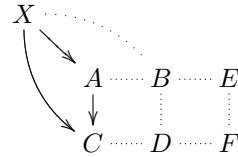
commute aussi, de telle sorte qu'on peut utiliser le caractère cartésien du carré ($AEFC$) et ainsi obtenir une flèche $X \rightarrow A$. En particulier, on dispose maintenant de deux flèches de X vers B , à savoir celles-ci :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\quad} & A & \xrightarrow{\quad} & B \cdots \cdots E \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & C & \xrightarrow{\quad} & D \cdots \cdots F \end{array}$$

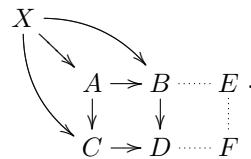
dont on voudrait montrer qu'elles sont égales. Pour montrer cela, on vérifie d'abord que ces deux flèches, composées avec $B \rightarrow E$ sont égales, et que, composées avec $B \rightarrow D$, elles le sont aussi. On vérifie aussi que ces deux (et non quatre, par conséquent) flèches $X \rightarrow E$ et $X \rightarrow D$ « coïncident sur F ». On utilise alors le caractère cartésien de ($BEDF$) (plus précisément, on utilise l'unicité de la factorisation $X \rightarrow B$) pour montrer que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\quad} & A & \xrightarrow{\quad} & B \cdots \cdots E \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & C & \xrightarrow{\quad} & D \cdots \cdots F \end{array}$$

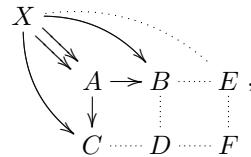
commute, *i.e.* que les deux flèches $X \rightarrow B$ construites sont égales. L'égalité des deux flèches



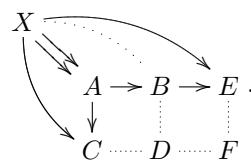
résulte quant à elle directement de la définition par « cartésiennité » de $(AEFC)$ de $X \rightarrow A$. Ainsi, on a montré l'existence d'une flèche $X \rightarrow A$ qui rende commutatif le diagramme



Il nous faut maintenant montrer son unicité. Elle est simple à voir. Si on a deux flèches $X \rightarrow A$ qui font commuter le diagramme



alors, ces deux flèches font aussi commuter le diagramme



La « cartésiennité » du carré $(AEFC)$ nous assure alors qu'elles sont égales. Ainsi, on a bien montré que le carré $(ABCD)$ est cartésien, ce qui conclut notre démonstration. ■

(2.1.2) Une jolie proposition sur les cubes cartésiens. La proposition qui suit nous sera utile à plusieurs reprises. Elle nous permettra de formaliser de façon élégante certains arguments du type « sont isomorphes naturellement ».

Proposition 2.1.4. Soit \mathcal{C} une catégorie et soient

$$\begin{array}{ccccc} & & B' & & \\ & \nearrow & | & \searrow & \\ & A & \xrightarrow{\quad} & B & \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ C' & \xrightarrow{\quad} & D' & \xrightarrow{\quad} & \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ C & \xrightarrow{\quad} & D & & \end{array}$$

trois faces d'un cube — qui sont cartésiennes. Supposons qu'il existe un objet A' , ainsi que deux flèches, qui fassent d'une des faces manquantes ou d'une des tranches un carré cartésien. Alors, il existe une unique façon de compléter le cube en cube commutatif, et on a alors que ce cube

$$\begin{array}{ccccc} A' & \longrightarrow & B' & & \\ \searrow & & | & \searrow & \\ & A & \xrightarrow{\quad} & B & \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ C' & \xrightarrow{\quad} & D' & \xrightarrow{\quad} & \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ C & \xrightarrow{\quad} & D & & \end{array}$$

a toutes ses faces, ainsi que ses tranches $(A'D'DA)$, $(A'B'DC)$ et $(A'BDC')$, cartésiennes.

Démonstration. — On reprend les notations de l'énoncé. Supposons que la face du haut puisse être complétée en diagramme cartésien. On est donc dans la situation

$$\begin{array}{ccccc} A' & \longrightarrow & B' & & \\ \searrow & & | & \searrow & \\ & A & \xrightarrow{\quad} & B & \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ C' & \xrightarrow{\quad} & D' & \xrightarrow{\quad} & \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ C & \xrightarrow{\quad} & D & & \end{array} .$$

Pour commencer, on applique le lemme 2.1.2 aux deux carrés cartésiens $(A'B'BA)$ et $(B'BDD')$: on obtient que la tranche $(A'D'DA)$ est cartésienne. De même, on montre que la tranche $(A'B'DC)$ est cartésienne. Pour montrer que la face du fond et la face de gauche sont aussi cartésiennes, il nous faut d'abord construire une flèche $A' \rightarrow C'$. On construit cette flèche grâce au caractère cartésien de la face du bas, avec les flèches $A' \rightarrow C$ et $A' \rightarrow D'$ obtenues par composition :

$$\begin{array}{ccccc} A' & \longrightarrow & B' & & \\ \searrow & & | & \searrow & \\ & A & \xrightarrow{\quad} & B & \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ C' & \xrightarrow{\quad} & D' & \xrightarrow{\quad} & \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ C & \xrightarrow{\quad} & D & & \end{array} .$$

Cette flèche $A' \rightarrow C'$, qui par ailleurs est par conséquent unique, rend donc le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} A' & \longrightarrow & B' & & \\ \searrow & & | & \searrow & \\ & A & \xrightarrow{\quad} & B & \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ C' & \xrightarrow{\quad} & D' & \xrightarrow{\quad} & \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ C & \xrightarrow{\quad} & D & & \end{array} .$$

commutatif et, par conséquent, le cube en entier

$$\begin{array}{ccccc} A' & \longrightarrow & B' & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ & A & \longrightarrow & B & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ C' & \longrightarrow & D' & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ C & \longrightarrow & D & & \end{array}$$

l'est aussi. Montrons que la face de gauche est cartésienne. Pour cela, on utilise le lemme 2.1.3 : la tranche $(ADD'A')$ est cartésienne, ainsi que le carré $(CDD'C')$, qui en est « un facteur à droite ». Par conséquent, la face de gauche est bien cartésienne. Pour la face du fond, on utilise un argument similaire — mais en se servant cette fois de la tranche $(A'B'DC)$ comme appui. Ainsi, toutes les faces sont cartésiennes. On en déduit aisément que la tranche $(A'BDC')$ l'est aussi.

Supposons maintenant, par exemple, qu'il existe un objet A' ainsi que deux flèches $A' \rightarrow C$ et $A' \rightarrow B$ tels que la tranche $(A'B'DC)$ soit cartésienne. On est donc dans la situation

$$\begin{array}{ccccc} A' & \longrightarrow & B' & & \\ \searrow & & \downarrow & & \\ & A & \longrightarrow & B & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ C' & \dashrightarrow & D' & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ C & \longrightarrow & D & & \end{array}.$$

On utilise le caractère cartésien de la face du premier plan, *i.e.* de la face $(ABCD)$, avec les flèches $A' \rightarrow C$ et $A' \rightarrow B$ (cette dernière étant obtenue par composition), comme figuré sur le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} A' & \longrightarrow & B' & & \\ \searrow & & \downarrow & & \\ & A & \longrightarrow & B & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ C & \dashrightarrow & D & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ C & \longrightarrow & D & & \end{array},$$

pour obtenir l'existence d'une unique flèche $A' \rightarrow A$ qui rende le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} A' & \longrightarrow & B' & & \\ \searrow & & \downarrow & & \\ & A & \longrightarrow & B & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ C & \dashrightarrow & D & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ C & \longrightarrow & D & & \end{array}$$

commutatif. On peut alors appliquer le lemme 2.1.3 : la tranche $(A'B'DC)$ ainsi que le carré $(ABCD)$ étant cartésiens, le carré « facteur » $(A'B'BA)$, c'est-à-dire la face du haut, l'est aussi. On s'est ainsi ramené au cas précédent.

Les autres cas, de façon similaire, se ramènent à des cas déjà traités. ■

(2.1.3) Monomorphismes et carrés cartésiens. Voici une proposition qui nous sera utile plus loin.

Proposition 2.1.5. Soit \mathcal{C} une catégorie. Soit

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ p_{X'} \downarrow & \square & \downarrow p_{Y'} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

un carré cartésien dans \mathcal{C} . Alors, si f est un monomorphisme, f' en est aussi un.

Démonstration. — Avec les notations de l'énoncé, soit Z un objet de \mathcal{C} et soient

$$g, h : Z \rightrightarrows X'$$

deux morphismes qui sont égaux après composition avec f' . Par propriété du carré cartésien, dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} Z & & & & \\ & \searrow g & & & \\ & \swarrow h & & & \\ & & X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ p_{X'} \downarrow & & | & & \downarrow p_{Y'} \\ X & \xrightarrow{f} & Y & & \end{array}$$

il suffit de prouver que g et h , composées avec f' et composées avec $p_{X'}$ coïncident au-dessus de Y . Comme on a supposé que c'est le cas avec f' , il suffit de le faire pour $p_{X'}$. Or, comme le carré commute, on a

$$f \circ (p_{X'} \circ g) = f \circ (p_{X'} \circ h).$$

Comme f est un monomorphisme, on en déduit que $p_{X'} \circ g = p_{X'} \circ h$, ce qui nous permet de conclure. ■

2.2 Lemme de Yoneda

Soit \mathcal{C} une catégorie. On note $\widehat{\mathcal{C}}$ la catégorie des foncteurs (covariants) de \mathcal{C}^{op} dans **Ens**, et $\check{\mathcal{C}}$ la catégorie des foncteurs (covariants) de \mathcal{C} dans **Ens** :

$$\widehat{\mathcal{C}} := \mathbf{Fun}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Ens}) \quad \text{et} \quad \check{\mathcal{C}} := \mathbf{Fun}(\mathcal{C}, \mathbf{Ens}).$$

On dispose des foncteurs suivants

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{C}} \\ h_{\mathcal{C}} : & X \longmapsto \left(\begin{array}{c} \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Ens} \\ Y \longmapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \end{array} \right) & \text{et} & k_{\mathcal{C}} : & \mathcal{C} & \longrightarrow & \check{\mathcal{C}} \\ & & & & X \longmapsto \left(\begin{array}{c} \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Ens} \\ Y \longmapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \end{array} \right) \end{array}$$

On peut alors énoncer le lemme de Yoneda :

Proposition 2.2.1 (*Lemme de Yoneda*, proposition 1.4.3 de [KS06]).

(i) Pour tous $A \in \widehat{\mathcal{C}}$ et $X \in \mathcal{C}$, on a $\text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(h_{\mathcal{C}}(X), A) \simeq A(X)$.

(ii) Pour tous $B \in \check{\mathcal{C}}$ et $X \in \mathcal{C}$, on a $\text{Hom}_{\check{\mathcal{C}}}(B, k_{\mathcal{C}}(X)) \simeq B(X)$.

De plus, ces isomorphismes sont fonctoriels en X , A et B .

(iii) En particulier, les foncteurs $h_{\mathcal{C}}$ et $k_{\mathcal{C}}$ sont pleinement fidèles.

2.3 Équivalences de catégories

Dans cette section, on fait quelques brefs rappels sur les équivalences de catégories, dans le but de souligner le lien qu'elles entretiennent avec les adjonctions, auxquelles est consacrée la section suivante. On démontre aussi un lemme.

(2.3.1) Définition. La voici :

Définition 2.3.1. Soient \mathcal{C} et \mathcal{D} deux catégories. Soient $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ deux foncteurs (covariants). On dit que :

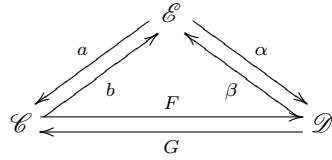
- F admet pour quasi-inverse G
 - (F, G) est une équivalence de catégories
- s'il existe deux transformations naturelles inversibles

$$\eta : \text{Id}_{\mathcal{C}} \longrightarrow GF \quad \text{et} \quad \varepsilon : FG \longrightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}.$$

Remarque. — En fait, étant donné deux catégories et deux foncteurs F et G , la première notion dont on dispose est celle d'*isomorphisme de catégories* et d'*inverse d'un foncteur* : pour cela, on astreint F et G à vérifier $FG = \text{Id}$ et $GF = \text{Id}$. Dans la définition de quasi-inverse, on ne demande plus que FG égale Id , mais simplement que FG soit *isomorphe* à Id . Dans la définition d'une adjonction, on affaiblira encore les contraintes sur ces foncteurs F et G : on demandera uniquement l'existence de morphismes $\text{Id} \longrightarrow GF$ et $FG \longrightarrow \text{Id}$, vérifiant certaines conditions. ◇

(2.3.2) Un lemme sur les équivalences.

Lemme 2.3.2. Soient



des foncteurs (covariants) entre trois catégories \mathcal{C} , \mathcal{D} et \mathcal{E} . On suppose que :

(i) Les couples (a, b) et (α, β) sont des équivalences de catégories entre, respectivement, \mathcal{E} et \mathcal{C} , et \mathcal{E} et \mathcal{D} .

(ii) Les deux diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\quad a \quad} & \mathcal{E} \\ & F \downarrow & \swarrow \alpha \\ & \mathcal{D} & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xleftarrow{\quad b \quad} & \mathcal{E} \\ & G \downarrow & \swarrow \beta \\ & \mathcal{D} & \end{array}$$

commutent à isomorphisme près. C'est-à-dire,

- d'une part, les foncteurs $F \circ a : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{D}$ et $\alpha : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{D}$ sont isomorphes ;
- d'autre part, les foncteurs $b \circ G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$ et $\beta : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$ sont isomorphes.

Alors, le couple (F, G) est une équivalence de catégories.

Démonstration. — D'abord, d'après $Fa \simeq \alpha$, on a $Fab \simeq F \simeq \alpha b$. De même, on a $G \simeq a\beta$. Ainsi, $GF \simeq a\beta\alpha b \simeq ab \simeq \text{Id}$. De même, $FG \simeq \text{Id}$. Par conséquent, (F, G) est bien une équivalence de catégories. ■

2.4 Foncteurs adjoints

(2.4.1) Définition. La notion d'adjonction est fondamentale, et les foncteurs adjoints apparaissent partout en mathématiques. Voici la définition.

Définition 2.4.1. Soient \mathcal{C} et \mathcal{D} deux catégories. Soient $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ deux foncteurs (covariants). On dit que :

- G admet pour adjoint à gauche F , et on note $G \in \omega(F)$
- F admet pour adjoint à droite G , et on note $F \in \ast(G)$
- (F, G) est une adjonction

s'il existe deux transformations naturelles

$$\eta : \text{Id}_{\mathcal{C}} \longrightarrow GF \quad \text{et} \quad \varepsilon : FG \longrightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}},$$

appelées respectivement unité et counité, telles que les deux diagrammes

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{F\eta} & FGF \\ & \searrow \text{Id}_F & \downarrow \varepsilon_F \\ & F & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\eta G} & GFG \\ & \searrow \text{Id}_G & \downarrow G\varepsilon \\ & G & \end{array}$$

commutent.

Remarques. — La notation $G \in \omega(F)$ est justifiée par le fait que des exemples typiques de foncteurs qui admettent un adjoint à gauche sont les foncteurs oubli, qu'on note habituellement ω . De même, la notation $F \in *(G)$ vient du fait que le foncteur « groupe libre » est un exemple typique de foncteur admettant un adjoint à droite.

- Par définition, les deux assertions $G \in \omega(F)$ et $F \in *(G)$ sont équivalentes.
- Classiquement (voir par exemple [ML71]), (F, G) est une adjonction si, et seulement si, il y a une bijection bifonctorielle en $(X, Y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$ entre

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) \quad \text{et} \quad \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y).$$

En pratique, c'est plutôt ce critère qu'on utilise pour vérifier qu'un couple de foncteurs est une adjonction.

- Lorsqu'on dispose d'un couple

$$\begin{array}{c} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \\ \xleftarrow{G} \end{array}$$

de foncteurs entre deux catégories, on notera abusivement le fait que $G \in \omega(F)$ et $F \in \omega(G)$ comme suit :

$$\begin{array}{c} \mathcal{C} \xrightleftharpoons[F \in *]{G \in \omega} \mathcal{D} \end{array}$$

◊

Définition 2.4.2. Soit $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un foncteur covariant entre deux catégories.

- On dit que F admet un adjoint à gauche, et on note $F \in \omega$ s'il existe $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ tel que $F \in \omega(G)$.
- On dit que F admet un adjoint à droite, et on note $F \in *$ s'il existe $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ tel que $F \in *(G)$.

(2.4.2) Exemple. Les exemples sont très nombreux. On en donne un seul, pour illustrer la définition. On prend $\mathcal{C} = \mathbf{Grp}$ la catégorie des groupes et $\mathcal{D} = \mathbf{Ens}$. On considère les deux foncteurs

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Grp} & \longrightarrow & \mathbf{Ens} \\ oub : & (G, m, e) \longmapsto G & \text{et} \quad libre : & \mathbf{Ens} & \longrightarrow \mathbf{Grp} \\ & & & E & \longmapsto *_{{e \in E}} \mathbf{Z} \end{array}$$

On voit le groupe $*_{e \in E} \mathbf{Z}$ comme le groupe libre ayant pour base les $e \in E$. Un élément typique de ce groupe est

$$x = e_1^{n_1} e_2^{n_2} \cdots e_\ell^{n_\ell}$$

où les $e_i \in E$ et $n_i \in \mathbf{Z}$. Alors, on a $oub \in \omega(libre)$ et $libre \in *(oub)$. Comme unité, on choisit $\eta : \text{Id}_{\mathbf{Ens}} \longrightarrow oub \circ libre$ définie par

$$\eta_E : \begin{array}{c} E \longrightarrow oub(*_{e \in E} \mathbf{Z}) \\ e \longmapsto e \end{array}.$$

Comme counité, on choisit $\varepsilon : libre \circ oub \longrightarrow \text{Id}_{\mathbf{Grp}}$ définie par

$$\varepsilon_G : \begin{array}{c} *_{g \in oub(G)} \mathbf{Z} \longrightarrow G \\ g_1^{n_1} g_2^{n_2} \cdots g_\ell^{n_\ell} \longmapsto g_1^{n_1} g_2^{n_2} \cdots g_\ell^{n_\ell} \end{array}.$$

On laisse au lecteur le loisir de vérifier que les deux conditions sur l'unité et la counité sont vérifiées.

Dans les paragraphes qui suivent, on énonce un certain nombre de propriétés des foncteurs adjoints. Les démonstrations omises sont laissées au lecteur, qui pourra s'appuyer sur un livre de théorie des catégories, [ML71] par exemple. Commençons par le lien entre équivalence et adjonction :

(2.4.3) Adjonctions et équivalence.

Proposition 2.4.3. *Soient*

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\[-1ex] \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$$

des foncteurs (covariants) entre deux catégories, tels que (F, G) soit une équivalence de catégories. Alors,

$$F \in \omega(G), \quad G \in *F \quad \text{et} \quad G \in \omega(F), \quad F \in *(G)$$

Remarque. — La réciproque de cette proposition est fausse. Autrement dit, dans une situation de type

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\[-1ex] \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$$

où on a $F \in \omega(G)$ et $G \in \omega(F)$ — c'est-à-dire où F est à la fois un adjoint à gauche et à droite de G , alors le couple (F, G) n'est pas forcément une équivalence de catégorie. Voici un contre-exemple. On considère A un anneau et le foncteur

$$\mathbf{0} : A\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow A\text{-}\mathbf{Mod}$$

qui envoie tout A -module N sur le module nul. Vérifions alors que $\mathbf{0}$ admet pour adjoint à gauche $\mathbf{0}$. Autrement dit, vérifions que $\mathbf{0} \in \omega(\mathbf{0})$. On aura alors automatiquement $\mathbf{0} \in *(0)$. Cependant, il est clair que $\mathbf{0}$ n'est pas une équivalence de catégories. Ainsi, on doit juste montrer que

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-}\mathbf{Mod}}(N, 0) \simeq \mathrm{Hom}_{A\text{-}\mathbf{Mod}}(0, M),$$

pout tout N , ce qui est évident. \diamond

(2.4.4) Adjonctions et isomorphismes de foncteurs. Voyons maintenant les liens entre isomorphismes (de foncteurs) et adjonctions.

Proposition 2.4.4. *Soient*

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F, \tilde{F}} \\[-1ex] \xleftarrow{G, \tilde{G}} \end{array} \mathcal{D}$$

des foncteurs (covariants) entre deux catégories tels que $F \simeq \tilde{F}$ et $G \simeq \tilde{G}$. Alors,

$$G \in \omega(F) \implies \tilde{G} \in \omega(\tilde{F})$$

$$G \in *(F) \implies \tilde{G} \in *(F)$$

Cette proposition admet une réciproque, que voici :

Proposition 2.4.5. Soient

$$\mathcal{C} \xrightleftharpoons[\substack{G, \tilde{G}}]{F} \mathcal{D}$$

des foncteurs (covariants) entre deux catégories. Alors,

$$\left. \begin{array}{l} G \in \omega(F) \\ \tilde{G} \in \omega(F) \end{array} \right\} \implies G \simeq \tilde{G} \quad \text{et} \quad \left. \begin{array}{l} G \in *(F) \\ \tilde{G} \in *(F) \end{array} \right\} \implies G \simeq \tilde{G}$$

Autrement dit, les adjoints, quand ils existent, sont uniques à isomorphisme près.

(2.4.5) Adjonctions et composition.

Proposition 2.4.6. Soient

$$\mathcal{C} \xrightleftharpoons[\substack{G_1}}{F_1} \mathcal{D} \xrightleftharpoons[\substack{G_2}}{F_2} \mathcal{E}$$

des foncteurs (covariants) entre trois catégories. Alors,

$$\begin{aligned} F_1 \in \omega(G_1) \text{ et } F_2 \in \omega(G_2) &\implies F_2 \circ F_1 \in \omega(G_2 \circ G_1) \\ F_1 \in *(G_1) \text{ et } F_2 \in *(G_2) &\implies F_2 \circ F_1 \in *(G_2 \circ G_1). \end{aligned}$$

Corollaire 2.4.7. Soient $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E}$ des foncteurs (covariants) entre trois catégories. Alors,

$$\begin{aligned} F \in \omega \text{ et } G \in \omega &\implies G \circ F \in \omega \\ F \in * \text{ et } G \in * &\implies G \circ F \in *. \end{aligned}$$

Autrement dit, les notions d'adjoint à gauche et à droite sont compatibles avec la composition.

(2.4.6) Adjonction et sous-catégories pleines.

Proposition 2.4.8. Soient

$$\mathcal{C} \xrightleftharpoons[\substack{G}}{F} \mathcal{D}$$

des foncteurs (covariants) entre deux catégories, et soient \mathcal{C}' et \mathcal{D}' des sous-catégories pleines de \mathcal{C} et \mathcal{D} , respectivement. On suppose que

$$\forall X \in \text{ob}(\mathcal{C}'), F(X) \in \mathcal{D}' \quad \text{et} \quad \forall Y \in \text{ob}(\mathcal{D}'), G(Y) \in \mathcal{C}'.$$

On peut alors noter $\mathcal{C}' \xrightleftharpoons[\substack{G'}]{F'} \mathcal{D}'$ la restriction des foncteurs à ces sous-catégories. Alors,

$$F \in \omega(G) \implies F' \in \omega(G').$$

Autrement dit, la restriction d'un adjonction, au but et à la source, à des sous-catégories pleines est encore une adjonction.

(2.4.7) Un critère pour qu'une adjonction soit une équivalence de catégories. On aura besoin plus loin de ce critère, quelque peu technique.

Lemme 2.4.9. Soit

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F \in *} \\ \xleftarrow{G \in \omega} \end{array} \mathcal{D}$$

une adjonction dont on note $\eta : \text{Id}_{\mathcal{C}} \longrightarrow GF$ et $\varepsilon : FG \longrightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$ l'unité et la counité. Soit \mathcal{E} une troisième catégorie et soient

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{E} & \\ f \swarrow & \nearrow g & \\ \mathcal{C} & & \mathcal{D} \end{array}$$

deux foncteurs essentiellement surjectifs. On suppose de plus qu'on a

$$\phi : F \circ f \longrightarrow g \quad \text{et} \quad \psi : G \circ g \longrightarrow f$$

deux isomorphismes de foncteurs faisant commuter les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} G \circ F \circ f & \xrightarrow{G\phi} & G \circ g \\ \eta f \uparrow & \nearrow \psi & \downarrow \varepsilon g \\ f & & g \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} F \circ G \circ g & \xrightarrow{F\psi} & F \circ f \\ \downarrow \varepsilon g & \nearrow \phi & \\ g & & f \end{array} .$$

Alors, (F, G) est une équivalence de catégories.

Démonstration. — On veut démontrer que η et ε sont des isomorphismes de foncteurs. On le montre pour η , la démonstration étant similaire pour ε . Soit e_0 un objet de \mathcal{E} . Notons $X_0 := f(e_0)$. Montrons pour commencer que

$$\eta_{X_0} : X_0 \longrightarrow G \circ F(X_0)$$

est un isomorphisme. D'après les hypothèses du lemme, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G \circ F \circ f(e_0) & \xrightarrow{G(\phi_{e_0})} & G \circ g(e_0) \\ \eta_{f(e_0)} \uparrow & \nearrow \psi_{e_0} & \\ f(e_0) & & \end{array}$$

commute. Si on le réécrit en termes de X_0 , on a :

$$\begin{array}{ccc} (G \circ F)(X_0) & \xrightarrow{G(\phi_{e_0})} & G(g(e_0)) \\ \eta_{X_0} \uparrow & \nearrow \psi_{e_0} & \\ X_0 & & \end{array} .$$

Par ailleurs, par hypothèses, $\phi_{e_0} : F(f(e_0)) \longrightarrow g(e_0)$ est un isomorphisme. Donc, il en est de même de l'image $G(\phi_{e_0})$ de cet isomorphisme par G . De plus, ψ_{e_0} est aussi un isomorphisme. Donc, η_{X_0} est un isomorphisme, ce qu'on voulait.

Soit maintenant X un objet quelconque de \mathcal{C} . On veut montrer que $\eta_X : X \longrightarrow G \circ F(X)$ est un isomorphisme. Comme f est essentiellement surjectif, il existe $e_0 \in \mathcal{E}$ tel que $X_0 :=$

$f(e_0)$ soit isomorphe à X . Notons $u : X \rightarrow X_0$ un tel isomorphisme. Si on applique η à ce morphisme, on obtient

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & X_0 \\ \eta_X \downarrow & & \downarrow \eta_{X_0} \\ GF(X_0) & \xrightarrow{G(u)} & GF(X_0) \end{array}$$

Le morphisme u est un isomorphisme, donc il en est de même pour $G(u)$. On vient de montrer que η_{X_0} est un isomorphisme. Donc, η_X en est aussi un. Ainsi, η est un isomorphisme. On montrerait de même que ε est inversible. Ainsi, (F, G) est une équivalence de catégories. ■

(2.4.8) Monomorphismes, épimorphismes et adjonctions. Comme on le verra dans la section suivante, la propriété fondamentale des foncteurs adjoints est qu'ils transforment (selon des hypothèses qu'on précisera en temps voulu) limites en limites et colimites en colimites, selon qu'ils soient $*$ ou ω . On peut illustrer ce principe selon lequel les foncteurs adjoints respectent certaines propriétés par le résultat qui suit⁽¹⁾ :

Proposition 2.4.10. Soit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur (covariant) entre deux catégories. Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme entre deux objets de \mathcal{C} . Alors,

$$F \in * \text{ et } f \text{ est un épimorphisme} \implies F(f) \text{ est un épimorphisme.}$$

$$F \in \omega \text{ et } f \text{ est un monomorphisme} \implies F(f) \text{ est un monomorphisme.}$$

Démonstration. — Gardons les notations de l'énoncé, et supposons que $f : X \rightarrow Y$ soit un épimorphisme, et que $F \in *$. Notons $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur tel que $F \in *(G)$. On veut montrer que $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$ est un épimorphisme. Cela revient à montrer que l'application

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(Y), Z) \xrightarrow{F(f) \circ} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Z)$$

est injective pour tout objet Z . Fixons donc un objet Z de \mathcal{D} . Le fait que $F \in *(G)$ implique qu'on a deux bijections qui fassent commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(Y), Z) & \xrightarrow{F(f) \circ} & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Z) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, G(Z)) & \xrightarrow{f \circ} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Z)) \end{array} .$$

Comme la flèche du bas est injective, car f est un épimorphisme, et comme les deux flèches latérales sont des bijections, on en déduit que la flèche du haut est injective : $F(f)$ est bien un épimorphisme.

L'autre assertion se démontre identiquement. ■

⁽¹⁾De façon étonnante, on n'a pas trouvé de trace de ce résultat élémentaire dans [ML71].

2.5 Limites, colimites

Dans cette section, on rappelle quelques résultats classiques sur les limites et les colimites, et on démontre de petits lemmes dont on aura besoin plus loin.

(2.5.1) Catégories (co)complètes. Soit \mathcal{C} une catégorie. On dit que \mathcal{C} est *complète* (resp. *co-complète*) si \mathcal{C} admet toutes les limites (resp. toutes les colimites).

On a alors le fameux critère suivant de (co)complétude :

Théorème 2.5.1 (Corollary 2, p. 109 de [ML71]). *Soit \mathcal{C} une catégorie. Alors, \mathcal{C} est (co)complète si, et seulement si, elle admet les (co)produits et les (co)noyaux.*

(2.5.2) Limites, colimites et foncteurs adjoints. L'une des propriétés fondamentales des foncteurs adjoints (si ce n'est la propriété fondamentale), c'est qu'ils commutent aux (co)limites. Voici les énoncés précis.

Théorème 2.5.2 (Theorem 1, p. 114 de [ML71]). *Soit $\omega : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur (covariant) qui possède un adjoint à gauche. Alors, si la limite $\left(\varprojlim_{i \in I} \Phi_i \right)$ existe dans \mathcal{C} , on a :*

$$\varprojlim_{i \in I} \omega(\Phi_i) = \omega\left(\varprojlim_{i \in I} \Phi_i\right),$$

où I est une petite catégorie et $\Phi : I \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur.

De même,

Théorème 2.5.3. *Soit $* : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur (covariant) qui possède un adjoint à droite. Alors, si la colimite $\left(\operatorname{colim}_{i \in I} \Phi_i \right)$ existe dans \mathcal{C} , on a :*

$$\operatorname{colim}_{i \in I} *(\Phi_i) = * \left(\operatorname{colim}_{i \in I} \Phi_i \right),$$

où I est une petite catégorie et $\Phi : I \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur.

Autrement dit, les foncteurs admettant un adjoint à gauche (resp. un adjoint à droite) commutent aux limites (resp. aux colimites) quelconques.

(2.5.3) Colimites et épimorphismes. On démontre :

Proposition 2.5.4. *Soit \mathcal{C} une catégorie, soit I une petite catégorie, soient $F, G : I \rightarrow \mathcal{C}$ deux foncteurs, et soit $\varphi : F \rightarrow G$ une transformation naturelle entre F et G . Pour tout $i \in I$, on note*

$$X_i := F(i) \quad \text{et} \quad Y_i := G(i).$$

On suppose que, pour tout $i \in I$,

$$\varphi(i) : X_i \rightarrow Y_i$$

est un épimorphisme. On suppose aussi que les colimites $\varinjlim_{i \in I} X_i$ et $\varinjlim_{i \in I} Y_i$ existent dans \mathcal{C} . Alors,

$$\varinjlim_{i \in I} X_i \longrightarrow \varinjlim_{i \in I} Y_i$$

est un épimorphisme.

Remarque. — En particulier, sous les mêmes hypothèses et avec les mêmes notations, si les $f_i : X_i \longrightarrow Y_i$ sont des épimorphismes et si les coproduits $\coprod_i X_i$ et $\coprod_i Y_i$ existent, alors, la flèche

$$\coprod_i X_i \longrightarrow \coprod_i Y_i$$

est encore un épimorphisme. \diamond

Démonstration. — Il s'agit d'un bon exercice pour la manipulation des colimites. Soit Z un objet de \mathcal{C} . On considère deux flèches

$$\varinjlim_{i \in I} Y_i \rightrightarrows Z$$

qui sont égales après composition avec

$$\varinjlim_i X_i \longrightarrow \varinjlim_i Y_i.$$

Soit $i_0 \in I$ un indice, fixé. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_{i_0} & \longrightarrow & \varinjlim_i X_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y_{i_0} & \longrightarrow & \varinjlim_i Y_i \end{array}$$

commute. Donc, ces deux flèches, restreintes à Y_{i_0} , coïncident après composition avec $X_{i_0} \longrightarrow Y_{i_0}$. Or, cette dernière flèche est un épimorphisme. Donc, les deux flèches qui nous intéressent sont égales après restriction à Y_{i_0} , c'est-à-dire après composition avec

$$Y_{i_0} \longrightarrow \varinjlim_i Y_i.$$

Par la propriété universelle du coproduit, elles sont donc égales. Donc, le morphisme

$$\varinjlim_i X_i \longrightarrow \varinjlim_i Y_i$$

est bien un épimorphisme. ■

2.6 Sites, préfaisceaux et faisceaux au-dessus d'un site

Les sites généralisent les espaces topologiques. À ce titre, on dispose d'une notion de préfaisceau et d'une notion de faisceau au-dessus d'un site.

(2.6.1) Prétopologies et sites. Soit \mathcal{C} une catégorie admettant les produits fibrés⁽²⁾. Rappelons qu'une *prétopologie de Grothendieck* sur \mathcal{C} est la donnée pour tout objet X de \mathcal{C} d'une collection $\text{Recouvr}(X)$ vérifiant les axiomes suivants :

a) Les éléments de $\text{Recouvr}(X)$ sont des ensembles $\{X_i \rightarrow X\}_i$ de flèches dont le codomaine est X . Intuitivement, il faut concevoir les éléments de $\text{Recouvr}(X)$ comme des recouvrements de X .

b) Pour tout couple (X, Y) d'objets de \mathcal{C} et pour tout isomorphisme $Y \xrightarrow{f} X$, on a

$$\{Y \xrightarrow{f} X\} \in \text{Recouvr}(X).$$

On remarquera bien que, dans ce cas, le recouvrement dont il s'agit est un singleton. Autrement dit, *tout isomorphisme est un recouvrement*.

c) Pour tout objet X et tout recouvrement $\{X_i \rightarrow X\}_i$ de X , si Y est un autre objet de \mathcal{C} et si $Y \xrightarrow{f} X$ est un morphisme quelconque, alors

$$\{X_i \times_X Y \rightarrow Y\}_i \in \text{Recouvr}(Y).$$

Autrement dit, *les recouvrements sont stables par changement de base*.

d) Enfin, si X est un objet de \mathcal{C} , si $\{X_i \rightarrow X\}_i \in \text{Recouvr}(X)$ et si, pour tout i , $\{Y_{ij} \rightarrow X_i\}_j \in \text{Recouvr}(X_i)$, alors

$$\{Y_{ij} \rightarrow X\}_{ij} \in \text{Recouvr}(X).$$

Autrement dit, *les recouvrements sont stables par recollement*.

Une telle catégorie \mathcal{C} munie d'une prétopologie de Grothendieck est appelée un *site*.

(2.6.2) Le site des ouverts d'un espace topologique. Si X est un espace topologique et qu'on note **Ouv**(X) la catégorie des ouverts de X — *ie* la catégorie dont les objets sont les ouverts de X et les morphismes les inclusions — alors, on peut faire de **Ouv**(X) un site. Remarquons d'abord que **Ouv**(X) est une catégorie qui admet les produits fibrés : si $V \rightarrow U$ et $W \rightarrow U$ sont deux morphismes, autrement dit, si V et W sont deux ouverts inclus dans U , alors, l'ouvert $V \cap W$, muni de sa flèche d'inclusion dans U est un produit fibré de V et W au-dessus de U . Ceci étant dit, on munit **Ouv**(X) de la prétopologie suivante : si U est un ouvert de X , alors on pose

$$\text{Recouvr}(U) := \left\{ \{V_i \subset U\}_i \middle| \bigcup_i V_i = U \right\}.$$

Autrement dit, $\text{Recouvr}(U)$ correspond aux recouvrements ouverts de U .

⁽²⁾On pourrait se passer de cette hypothèse, mais alors les axiomes d'une prétopologie seraient plus compliqués — il faudrait supposer que les produits existent quand on veut les utiliser. Une autre manière pour éviter cette hypothèse est d'utiliser la notion de *crible* et de *topologie de Grothendieck*. Le lecteur intéressé pourra consulter [MLM94].

(2.6.3) Préfaisceaux et faisceaux. Soit \mathcal{C} un site. Alors, un *préfaisceau sur \mathcal{C}* est, tout simplement, un foncteur contravariant de \mathcal{C} dans **Ens**. Autrement dit, c'est un foncteur covariant⁽³⁾ $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ens}$. En particulier, la notion de préfaisceau sur un site ne dépend pas de la prétopologie de Grothendieck, mais uniquement de la catégorie. Un *faisceau sur \mathcal{C}* est un préfaisceau $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ens}$ qui vérifie la condition suivante :

$$\begin{aligned} & \forall X \in \text{ob}(\mathcal{C}), \\ & \forall \{X_i \rightarrow X\}_{i \in I} \in \text{Recouvr}(X), \\ F(X) & \longrightarrow \prod_{i \in I} F(X_i) \xrightarrow[\text{pr}_2]{\text{pr}_1} \prod_{i,j \in I} F(X_i \times_X X_j) \\ & \text{est un égalisateur.} \end{aligned}$$

Cela signifie que la première flèche est injective et que son image est exactement l'ensemble des éléments de $\prod_i F(X_i)$ qui ont la même image par pr_1 et par pr_2 . La flèche pr_1 est définie comme suit. Pour i et j deux indices fixés, on dispose d'un morphisme canonique

$$X_i \times_X X_j \rightarrow X_i.$$

Après application du foncteur F , on dispose d'une flèche

$$\varphi_i : F(X_i) \rightarrow F(X_i \times_X X_j).$$

Le morphisme pr_1 est le produit de ces morphismes φ_i . La flèche pr_2 est définie similairement, sauf qu'on part des morphismes canoniques

$$X_i \times_X X_j \rightarrow X_j.$$

Intuitivement, dire que ce diagramme est un égalisateur correspond aux deux axiomes classiques des faisceaux : une « section » est déterminée par ses restrictions à un recouvrement ; la donnée d'une section pour chaque ouvert d'un recouvrement détermine une section globale, si les conditions de recollement sur les intersections sont vérifiées.

Comme on peut s'y attendre, si X est un espace topologique, alors la donnée d'un préfaisceau (resp. d'un faisceau) sur X correspond à la donnée d'un préfaisceau (resp. d'un faisceau) sur le site **Ouv**(X).

On fera des fois l'abus de notation suivant : si \mathcal{C} est un site, $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$ et si $\{X_i \rightarrow X\}_i$ est un recouvrement de X ; si par ailleurs, $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ens}$ est un préfaisceau sur \mathcal{C} , et si $f \in F(X)$ est une section de F au-dessus de X , alors on notera

$$f|_{X_i}$$

l'image de f par l'application $F(X) \rightarrow F(X_i)$.

(2.6.4) Monos et épis de préfaisceaux. On dispose d'une notion évidente de morphisme entre faisceaux et entre préfaisceaux : ce sont les transformations naturelles. Les catégories obtenues sont notées

$$\mathbf{PréFaisc}(\mathcal{C}) \quad (\text{ou encore } \widehat{\mathcal{C}}) \qquad \text{et} \qquad \mathbf{Faisc}(\mathcal{C})$$

⁽³⁾On préfère considérer toujours des foncteurs *covariants*, car c'est dans ce cadre que le formalisme des adjoints et le théorème de commutation des adjoints aux (co)limites s'énoncent le plus clairement.

On peut alors caractériser en termes simples les monomorphismes et les épimorphismes dans **PréFaisc** (\mathcal{C}). C'est l'objet de la proposition qui suit.

Proposition 2.6.1. Soit \mathcal{C} un site, soient F et $G \in \text{PréFaisc}(\mathcal{C})$ et soit $\varphi : F \rightarrow G$ un morphisme. Alors,

$$\begin{aligned}\varphi \text{ est un monomorphisme} &\iff \forall X \in \text{ob}(\mathcal{C}), \varphi_X : F(X) \rightarrow G(X) \text{ est injectif} \\ \varphi \text{ est un épimorphisme} &\iff \forall X \in \text{ob}(\mathcal{C}), \varphi_X : F(X) \rightarrow G(X) \text{ est surjectif}\end{aligned}$$

Démonstration. — Commençons par le cas des monomorphismes. Avec les notations de l'énoncé, supposons que pour tout objet X de \mathcal{C} , l'application $\varphi_X : F(X) \rightarrow G(X)$ soit injective. Montrons alors que φ est bien un mono. Soit donc H un troisième objet de **PréFaisc** (\mathcal{C}) et soient

$$H \xrightarrow{\quad f \quad} F \xrightarrow{\quad g \quad} G$$

deux morphismes qui, composés avec $\varphi : F \rightarrow G$, sont égaux. On veut montrer que $f = g$. Soit donc X un objet de \mathcal{C} . On veut montrer que $f_X = g_X$. Soit donc $a \in H(X)$ un élément quelconque de l'ensemble $H(X)$. On a, par hypothèse,

$$\varphi_X(f_X(a)) = \varphi_X(g_X(a))$$

Or, φ_X est injective. Donc, on a bien l'égalité attendue.

Réciproquement, supposons que le morphisme $\varphi : F \rightarrow G$ soit un mono. Soit X_0 un objet de \mathcal{C} . On veut montrer que $\varphi_{X_0} : F(X_0) \rightarrow G(X_0)$ est injective. Soient donc $a, b \in F(X_0)$ tels que $\varphi_{X_0}(a) = \varphi_{X_0}(b)$. On veut montrer que $a = b$. Pour cela, on utilise le préfaisceau, qu'on note h_{X_0} , défini par

$$\forall X \in \text{ob}(\mathcal{C}), \quad h_{X_0}(X) := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X_0).$$

On définit alors un morphisme $f_a : h_{X_0} \rightarrow F$ en posant, pour tout X et pour tout morphisme $g : X \rightarrow X_0$

$$(f_a)_X(g) := F(g)(a).$$

De même, on définit un morphisme f_b . Vérifions alors que $\varphi \circ f_a = \varphi \circ f_b$: soit X un objet de \mathcal{C} et soit $g : X \rightarrow X_0$ un élément de $h_{X_0}(X)$. On a alors $(\varphi \circ f_a)_X(g) = \varphi_X(F(g)(a)) = G(g)(\varphi_{X_0}(a))$, comme on le voit sur le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X_0 \\ & & \downarrow \\ F(X_0) & \xrightarrow{\varphi_{X_0}} & G(X_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(X_0) & \xrightarrow{F(g)} & F(X) \xrightarrow{\varphi_X} G(X) \\ a & \longmapsto & F(g)(a) \end{array}$$

Comme $\varphi_{X_0}(a) = \varphi_{X_0}(b)$, on a ainsi que $\varphi \circ f_a = \varphi \circ f_b$. Comme φ est un mono, on a donc que $f_a = f_b$. On en déduit facilement que $a = b$.

Passons maintenant au cas des épimorphismes. Comme la démonstration de la première implication est très semblable au cas des monomorphismes, on ne démontre que la seconde des deux implications. Avec les notations de l'énoncé, supposons donc que $\varphi : F \rightarrow G$ soit un épimorphisme. On veut montrer que, pour tout objet X de \mathcal{C} , l'application $\varphi_X : F(X) \rightarrow G(X)$ est surjective. Pour cela, on commence par définir un préfaisceau annexe, qu'on note \tilde{F} . Si X est un objet de \mathcal{C} , alors $\tilde{F}(X)$ est le groupe abélien libre de base $F(X)$. Autrement dit,

$$\tilde{F}(X) := \mathbf{Z}^{(F(X))}.$$

On définit de même le préfaisceau \tilde{G} . Le morphisme φ s'étend en un morphisme

$$\tilde{\varphi} : \tilde{F} \longrightarrow \tilde{G}.$$

Les préfaisceaux \tilde{F} et \tilde{G} sont alors des préfaisceaux en groupes abéliens, et le morphisme $\tilde{\varphi}$ respecte ces structures. Dans ce cadre, le morphisme $\tilde{\varphi}$ est encore un épimorphisme, ie $\tilde{\varphi}$ est un épimorphisme dans la catégorie des préfaisceaux en groupes abéliens. On considère alors le préfaisceau $\text{Im } \tilde{\varphi}$, défini par

$$\text{Im } \tilde{\varphi}(X) := \text{Im } \tilde{\varphi}_X \subset \tilde{G}(X),$$

pour tout $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$. Puis, on définit le préfaisceau H en posant :

$$H(X) := \tilde{G}(X) / \text{Im } \tilde{\varphi}(X),$$

pour tout $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$. Ce préfaisceau H est muni d'un morphisme canonique $\pi : \tilde{G} \rightarrow H$. Par ailleurs, on dispose aussi du morphisme nul $0 : \tilde{G} \rightarrow H$. Ces deux morphismes, composés avec $\tilde{\varphi}$, coïncident. Ainsi, comme $\tilde{\varphi}$ est un épimorphisme, cela signifie que pour tout X et pour tout $a \in \tilde{G}(X)$, on a $a \in \text{Im } \tilde{\varphi}_X$. Par conséquent, l'application $\tilde{\varphi}_X$ est surjective. D'après le lemme 2.6.2 qui suit, on en déduit que $\varphi_X : F(X) \rightarrow G(X)$ est surjectif, ce qu'on voulait montrer. ■

Lemme 2.6.2. Soit $f : E \rightarrow F$ une application entre deux ensembles. Alors,

$$f \text{ surjective} \iff \mathbf{Z}^{(f)} : \mathbf{Z}^{(E)} \rightarrow \mathbf{Z}^{(F)} \text{ surjectif.}$$

Démonstration. — On note $\tilde{f} : \mathbf{Z}^{(E)} \rightarrow \mathbf{Z}^{(F)}$ le morphisme de groupes déduit de f . Il est facile de voir que \tilde{f} est surjective si f l'est. Réciproquement, supposons \tilde{f} surjective. Soit alors $y \in F$. On cherche un $x \in E$ tel que $f(x) = y$. L'élément y peut aussi être vu comme un élément de $\mathbf{Z}^{(F)}$. Il existe donc un entier $n \geq 1$, n éléments distincts de E , qu'on note x_1, \dots, x_n et n entiers d_1, \dots, d_n tels que

$$\tilde{x} := d_1 \cdot x_1 + \dots + d_n \cdot x_n \quad \text{et} \quad \tilde{f}(\tilde{x}) = y.$$

Or,

$$\tilde{f}(d_1 \cdot x_1 + \dots + d_n \cdot x_n) = \sum_i d_i \cdot f(x_i).$$

Par conséquent, si aucun des x_i ne vérifie $f(x_i) = y$, on ne peut avoir $f(\tilde{x}) = y$. Ainsi, il en existe au moins un, et f est donc surjective. ■

(2.6.5) Monos et épis de faisceaux. Pour ce qui est des monomorphismes de *faisceaux*, la situation est similaire ; mais, en ce qui concerne les épimorphismes, elle est plus délicate, comme on va le voir. Cela est tout à fait semblable au cas des faisceaux d'un espace topologique, où le caractère mono d'un morphisme se teste ouvert par ouvert et peut être caractérisé par le préfaisceaux des noyaux (dans le cas des faisceaux en groupes abéliens), et où le caractère épi d'un morphisme, au contraire, ne peut pas se tester ouvert par ouvert. Ainsi on a :

Proposition 2.6.3. Soit \mathcal{C} un site, soient F et G deux faisceaux sur \mathcal{C} et soit $\varphi : F \rightarrow G$ un morphisme de faisceaux. Alors :

$$\varphi \text{ est un monomorphisme} \iff \forall X \in \text{ob}(\mathcal{C}), \varphi_X \text{ est injective.}$$

Démonstration. — Le sens « gauche \iff droite » découle de la proposition 2.6.1. En effet, si la condition de droite est vérifiée, alors, φ est un monomorphisme dans la catégorie **PréFaisc**(\mathcal{C}). Ainsi, si H est faisceau sur \mathcal{C} et si f et g sont deux morphismes tels que le diagramme

$$H \xrightarrow{\quad f \quad} F \xrightarrow{\quad \varphi \quad} G \\ \downarrow g$$

commute, alors f et g sont égaux car ils sont en particulier⁽⁴⁾ des morphismes de préfaisceaux entre H et F .

Réciproquement, supposons que φ soit un monomorphisme. La preuve de la proposition 2.6.1 ne s'applique pas car, si X est un objet de \mathcal{C} , h_X , qui est toujours un préfaisceau, n'est pas forcément un faisceau. Avant de continuer cette preuve, qu'on reprendra un peu plus loin, il nous faut donc faire quelques compléments. ■

Pour commencer, notons une définition qui correspond au cas favorable, où tous les h_X sont des faisceaux :

Définition 2.6.4. Soit \mathcal{C} une catégorie admettant les produits fibrés. On dit qu'une prétopologie τ sur \mathcal{C} est sous-canonical si pour tout objet X de \mathcal{C} , le préfaisceau h_X est un faisceau pour la prétopologie τ .

(2.6.6) Faisceau associé à un préfaisceau. Comme dans le cas des espaces topologiques, si \mathcal{C} est un site, on peut associer à un préfaisceau F sur \mathcal{C} , un faisceau, qui, en un sens, est le faisceau sur \mathcal{C} le plus proche de F . Dans ce qui suit, on explique rapidement la construction de cet objet. Le lecteur désirant plus de détails — en particulier les preuves — pourra se reporter au paragraphe III.5 de [MLM94]. On aura principalement besoin des deux faits suivants :

- Théorème d'existence du faisceau associé : si \mathcal{C} est un site, il existe un foncteur

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{PréFaisc}(\mathcal{C}) & \longrightarrow & \mathbf{Faisc}(\mathcal{C}) \\ \text{faisceau associé :} & & \\ F & \longmapsto & F^a \end{array}$$

⁽⁴⁾ Ceci est un cas particulier du résultat plus général suivant. Soient \mathcal{C} et \mathcal{D} deux catégories, $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur *pleinement fidèle*, et soient X et Y deux objets de \mathcal{C} reliés par un morphisme $f : X \rightarrow Y$. Alors, si le morphisme $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$ est un monomorphisme, il en est de même pour $f : X \rightarrow Y$.

tel que, si F et G sont des faisceaux au-dessus de \mathcal{C} et si $\varphi : F \rightarrow G$ est un morphisme de faisceaux, alors, l'image par ce foncteur de F (resp. G) est encore F (resp. G), et l'image du morphisme $\varphi : F \rightarrow G$ est encore $\varphi : F \rightarrow G$. Par ailleurs, F^a vient avec un morphisme de préfaisceaux

$$F \longrightarrow F^a$$

tel que (entre autres), si F est un préfaisceau, si G est un faisceau et si $\varphi : F \longrightarrow G$ est un morphisme, alors, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F^a \\ \varphi \searrow & & \downarrow \varphi^a \\ & & G \end{array}$$

commute.

- *C'est un adjoint* : ce foncteur « faisceau associé » est un adjoint à gauche du foncteur oubli

$$\mathbf{Faisc}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{PréFaisc}(\mathcal{C}).$$

Par ailleurs, et c'est une propriété très importante, ce foncteur « faisceau associé » commute aux limites finies.⁽⁵⁾

- *Caractérisation du faisceau associé à un sous-prafaisceau d'un faisceau* : si \mathcal{C} est un site, si G est un faisceau sur \mathcal{C} et si F est un préfaisceau sur \mathcal{C} tel que

$$\forall X \in \text{ob}(\mathcal{C}), \quad F(X) \subset G(X),$$

alors, le faisceau F^a associé à F est isomorphe à

$$F^a(X) \simeq \{ f \in G(X) \mid \exists \{X_i \rightarrow X\} \in \text{Recouvr}(X), \forall i f|_{X_i} \in F(X_i)\}.$$

Ceci étant fait, on peut revenir à la démonstration qu'on avait laissée en plan.

Démonstration de la proposition 2.6.3. — Comme on l'a dit, le préfaisceau h_X n'est pas nécessairement un faisceau sur \mathcal{C} . Néanmoins, on dispose du faisceau associé, noté h_X^a (a pour associé). Dans la preuve de la proposition 2.6.1, étant donné X un objet de \mathcal{C} et a et b deux éléments de $F(X)$ tels que $\varphi_X(a) = \varphi_X(b)$, on avait construit deux morphismes de préfaisceaux f_a et f_b faisant commuter le diagramme

$$h_X \xrightarrow[\substack{f_a \\ f_b}]{} F \xrightarrow{\varphi} G.$$

Si on applique le foncteur « faisceau associé » à ce diagramme, sachant que F et G sont déjà des faisceaux, on obtient le diagramme commutatif

$$h_X^a \xrightarrow[\substack{f_a^a \\ f_b^a}]{} F \xrightarrow{\varphi} G.$$

⁽⁵⁾En tant que foncteur admettant un adjoint à droite, le foncteur « faisceau associé » commute aux colimites quelconques, comme on l'a vu dans le paragraphe (2.5.2). Ainsi, le fait qu'il commute aux limites finies est bien une propriété remarquable.

Comme φ est un monomorphisme, on en déduit que les deux morphismes f_a^a et f_b^a sont égaux. Or, h_X^a vient avec un morphisme de préfaisceaux $h_X \rightarrow h_X^a$ faisant commuter les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} h_X & \xrightarrow{f_\bullet} & F \\ \downarrow & \nearrow f_\bullet^a & \\ h_X^a & & \end{array}$$

où f_\bullet représente f_a ou f_b . Ainsi, si l'on note $\text{Id}_X^a \in h_X^a(X)$ l'image de $(\text{Id}_X : X \rightarrow X) \in h_X(X)$ par le morphisme canonique $h_X \rightarrow h_X^a$, on a :

$$\begin{aligned} f_a^a(\text{Id}_X^a) &= f_a(\text{Id}_X) = a \\ &= f_b^a(\text{Id}_X^a) = f_b(\text{Id}_X) = b \end{aligned}$$

ce qui achève notre preuve. ■

(2.6.7) Épimorphismes de faisceaux, le retour. Pour les épimorphismes, comme on l'a dit, la caractérisation est un peu plus compliquée : il s'agit de

Proposition 2.6.5. Soit \mathcal{C} un site, soient F et G deux faisceaux et soit $\varphi : F \rightarrow G$ un morphisme de faisceaux. Alors,

$$\begin{gathered} \varphi \text{ est un épimorphisme} \\ \Updownarrow \\ \forall X \in \text{ob}(\mathcal{C}), \forall g \in G(X), \exists \{X_i \rightarrow X\} \in \text{Recouvr}(X) \mid \\ \forall i, \exists f_i \in F(X_i), g|_{X_i} = \varphi_{X_i}(f_i). \end{gathered}$$

Démonstration. — Démontrons d'abord le sens « bas \implies haut ». Soit donc, avec les notations de l'énoncé, H un faisceau sur \mathcal{C} et f, g deux morphismes faisant commuter le diagramme

$$F \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{f} H.$$

On veut montrer que $f = g$. Soit donc X un objet de \mathcal{C} . On veut montrer que $f_X = g_X$. Soit donc $x \in G(X)$. On veut montrer que $f_X(x) = g_X(x)$. Comme H est un faisceau, il suffit de trouver un recouvrement $\{X_i \rightarrow X\}$ de X tel que

$$\forall i, f_X(x)|_{X_i} = g_X(x)|_{X_i}.$$

Comme $(f_X(x))|_{X_i} = f_{X_i}(x|_{X_i})$ — c'est l'axiome des morphismes de préfaisceaux, autrement dit des transformations naturelles — et de même pour g_X , il suffit de montrer que

$$\forall i, f_{X_i}(x|_{X_i}) = g_{X_i}(x|_{X_i}).$$

Or d'après l'hypothèse faite (« bas »), il existe un recouvrement $\{X_i \rightarrow X\}$ tel que, pour tout i , il existe un élément $f_i \in F(X_i)$ tel que

$$x|_{X_i} = \varphi_{X_i}(f_i).$$

Ainsi, ce que l'on veut montrer est

$$\forall i, f_{X_i}(\varphi_{X_i}(f_i)) = g_{X_i}(\varphi_{X_i}(f_i)).$$

Or, cela est vrai car $f \circ \varphi = g \circ \varphi$, égalité qu'on utilise sur les objets X_i et pour les éléments f_i .

Réiproquement, supposons que φ soit un épimorphisme. Comme dans la preuve de la proposition 2.6.1, on va plutôt raisonner avec des faisceaux en groupes abéliens. Ainsi, aux faisceaux (en ensembles) F et G , on associe les faisceaux sur \mathcal{C} en groupes abéliens, \tilde{F} et \tilde{G} , qu'on définit par

$$\tilde{F}(X) := \mathbf{Z}^{(F(X))} \quad \text{et} \quad \tilde{G}(X) := \mathbf{Z}^{(G(X))}$$

pour tout objet X de \mathcal{C} . Le morphisme φ s'étend en un morphisme $\tilde{\varphi}$, qui est un morphisme de faisceaux en *groupes abéliens*. Comme le préfaisceau des $\text{Im } \tilde{\varphi}_X(\tilde{F}(X))$ n'est pas un faisceau, il faut considérer son faisceau associé. On le note, pour éviter toute confusion, $(\text{Im } \tilde{\varphi})^a$. De même, le préfaisceau H des quotients,

$$H(X) := \tilde{G}(X) / (\text{Im } \tilde{\varphi})^a(X)$$

pour tout $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$, n'est un faisceau et on doit donc considérer son faisceau associé, H^a . On dispose de deux morphismes, la projection canonique

$$\pi^a : \tilde{G} \xrightarrow{\pi} H \longrightarrow H^a$$

et le morphisme nul

$$0^a : \tilde{G} \xrightarrow{0} H \longrightarrow H^a.$$

Vérifions qu'ils sont égaux après composition avec φ . Soit X un objet de \mathcal{C} et soit $x \in F(X)$. Alors, l'image de $\varphi_X(x)$ par π est nulle dans $H(X)$, donc, les images par π et par 0 de $\varphi_X(x)$ sont les mêmes. Comme φ est un épimorphisme, on en déduit donc que les morphismes π et 0 sont égaux. Cela signifie que, si X est un objet de \mathcal{C} et si $g \in G(X)$, alors $\pi(g)$ égale 0 dans $H^a(X)$. Cela signifie qu'il existe un recouvrement $\{X_i \rightarrow X\}$ de X tel que pour tout i , $\pi(g)|_{X_i}$ égale 0 dans $H(X_i)$, donc appartient à $(\text{Im } \tilde{\varphi})^a(X_i)$. Pour chaque i , cela signifie, d'après la caractérisation du faisceau associé à un sous-préfaisceau d'un faisceau, qu'il existe un recouvrement $\{Y_{ij} \rightarrow X_i\}$ tel que $g|_{Y_{ij}}$ appartienne à $\text{Im } \varphi_{Y_{ij}}$ (on utilise le lemme 2.6.2). Ainsi, en « recollant » les recouvrements $\{Y_{ij} \rightarrow X_i\}$ des X_i , on obtient un recouvrement $\{Z_k \rightarrow X\}$ de X tel que pour tout k , il existe un élément $f_k \in F(Z_k)$ tel que $\varphi_{Z_k}(f_k) = g|_{Z_k}$. C'est exactement la condition « haut », et on a donc démontré la proposition. ■

(2.6.8) Épimorphismes de faisceaux et carrés cartésiens. On peut déduire de ce qui précède, par exemple, le fait que les épimorphismes soient envoyés sur des épimorphismes par les carrés cartésiens :

Proposition 2.6.6. *Soit \mathcal{C} un site. Soit*

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{f'} & X' \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

un carré cartésien dans $\mathbf{Faisc}(\mathcal{C})$. Alors,

$$f \text{ est un épi} \implies f' \text{ est un épi.}$$

Remarque. — Cette proposition est fausse dans une catégorie quelconque. Ce qui est vrai, dans une catégorie quelconque, c'est f mono entraîne f' mono, comme on l'a démontré dans le paragraphe (2.1.3). \diamond

Démonstration. — Gardons les notations de l'énoncé et supposons que f est un épimorphisme. Évidemment, on montre que f' est un épimorphisme en utilisant la caractérisation de la proposition 2.6.5. Soit donc S un objet de \mathcal{C} et soit $x \in X'(S)$. On note \bar{x} l'image de x dans $X(S)$. Comme f est un épimorphisme, on peut trouver un recouvrement $\{S_i \rightarrow S\}_i$ de S et des $\bar{y}_i \in Y(S_i)$ tels que $\bar{x}_i = f(\bar{y}_i)$. Or, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Y'(S_i) & \xrightarrow{f'} & X'(S_i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y(S_i) & \xrightarrow{f} & X(S_i) \end{array}$$

est encore cartésien dans **Ens**⁽⁶⁾. Donc, comme on a un élément $\bar{y}_i \in Y(S_i)$ et un élément $x_i \in X'(S_i)$ qui ont les mêmes images dans $X(S_i)$, on sait que ces deux éléments donnent naissance à un élément $y_i \in Y'(S_i)$ au-dessus d'eux, ce qu'on voulait. ■

(2.6.9) Une caractérisation des épimorphismes de faisceaux. Démontrons maintenant la proposition suivante, dont on aura besoin par la suite.

Proposition 2.6.7. *Soit \mathcal{C} un site, soient F et G dans **Faisc**(\mathcal{C}) et soit $G \rightarrow F$ un morphisme. Alors,*

$$\begin{aligned} G \rightarrow F \text{ est un épimorphisme} \\ \Updownarrow \\ \text{colim}\left(G \times_F G \rightrightarrows G\right) = F \end{aligned}$$

Démonstration. — Commençons par montrer le sens « haut \Rightarrow bas ». On suppose donc que $G \rightarrow F$ est un épimorphisme. Soient X un objet de **Faisc**(\mathcal{C}) et $G \rightarrow X$ un morphisme qui fasse commuter le diagramme

$$G \times_F G \rightrightarrows G \longrightarrow X .$$

On veut montrer que ce morphisme $G \rightarrow X$ se factorise uniquement par $G \rightarrow F$. Soit donc S un objet de \mathcal{C} . On veut construire un morphisme $F(S) \rightarrow X(S)$. Soit $f \in F(S)$. Comme $G \rightarrow F$ est un épimorphisme, soit $\{S_i \rightarrow S\}$ un recouvrement de S et soit $(g_i)_i \in \prod_i G(S_i)$ tel que pour tout i , g_i s'envoie par $G \rightarrow F$ sur la restriction à S_i de f . *A priori*, les g_i ne se recollent pas ; c'est d'ailleurs pour cela qu'on n'a pas trouvé un $g \in G(S)$ qui s'envoie sur f . On note $x_i \in X(S_i)$ l'image de g_i par $G \rightarrow X$. On veut montrer que les x_i se recollent. On aura ainsi obtenu un objet $x \in X(S)$, dont on dira que c'est l'image de f . Le morphisme obtenu $F \rightarrow X$ sera évidemment une factorisation de $G \rightarrow X$ par $G \rightarrow F$, dont on peut voir par ailleurs par des méthodes similaires qu'elle est unique.

⁽⁶⁾Cela vient fait que le foncteur oubli **Faisc**(\mathcal{C}) \rightarrow **PréFaisc**(\mathcal{C}) commute aux limites, et cela vient du fait que ce foncteur possède un adjoint à gauche, à savoir le foncteur faisceau associé. Puis, on sait que dans **PréFaisc**(\mathcal{C}), les limites se calculent « points par points » — et cela vient probablement aussi de l'existence d'un adjoint à gauche à un certain foncteur...

Ainsi, tout ce qu'il nous reste à montrer, c'est que les $x_i \in X(S_i)$ se recollent. Cela signifie, rappelons-le, que le diagramme

$$\prod_i X(S_i) \xrightarrow[\text{pr}_2]{\text{pr}_1} \prod_{i,j} X(S_i \times_S S_j)$$

commute. On considère $(x_i)_i$, qui est un élément de $\prod_i X(S_i)$. Considérons d'abord son image par pr_1 . C'est une famille indexée par $(i, j) \in I^2$. Soient donc deux indices, i et j . L'élément d'indice (i, j) de $\text{pr}_1((x_i)_i)$ est l'image de x_i par le morphisme

$$X(S_i) \longrightarrow X(S_i \times S_j).$$

De même, l'élément d'indice (i, j) de $\text{pr}_2((x_i)_i)$ est l'image de x_j par le morphisme

$$X(S_j) \longrightarrow X(S_i \times S_j).$$

On veut montrer que ces deux éléments sont égaux. Ils le sont car, les x_i proviennent des g_i , car les g_i s'envoient sur les f_i et que les f_i se recollent et que le diagramme

$$G(S_i \times_S S_j) \times_{F(S_i \times_S S_j)} G(S_i \times_S S_j) \rightrightarrows G(S_i \times_S S_j) \longrightarrow X(S_i \times_S S_j)$$

commute.

Montrons maintenant le sens « bas \implies haut ». Il est beaucoup plus facile, et vrai dans n'importe quelle catégorie, pas seulement dans les catégories de faisceaux. En effet, supposons que $G \longrightarrow F$ soit la colimite de

$$G \times_F G \rightrightarrows G.$$

Soit maintenant Z un troisième objet, muni de deux flèches $F \rightrightarrows Z$ qui fassent commuter le diagramme

$$G \longrightarrow F \rightrightarrows Z.$$

Notons $G \longrightarrow Z$ l'unique flèche ainsi obtenue. Elle fait commuter le diagramme

$$G \times_F G \rightrightarrows G \longrightarrow Z.$$

Donc elle admet une unique factorisation par $G \longrightarrow F$. Or, chacune des deux flèches $F \rightrightarrows Z$ est une telle factorisation. Donc, elles sont égales. Et donc, on voit ainsi que $G \longrightarrow F$ est un épimorphisme. ■

(2.6.10) Commutation des limites et des colimites dans les catégories de faisceaux.

Prouvons ce résultat intéressant de commutation des limites et des colimites.

Théorème 2.6.8. *Soit \mathcal{C} un site. Soit I une catégorie finie et soit J une petite catégorie filtrante. Soit*

$$\begin{aligned} I \times J &\longrightarrow \mathbf{Faisc}(\mathcal{C}) \\ (i, j) &\longmapsto X_{i,j} \end{aligned}$$

un foncteur. Alors, on a

$$\varprojlim_{i \in I} \left(\operatorname{colim}_{j \in J} X_{i,j} \right) = \operatorname{colim}_{j \in J} \left(\varprojlim_{i \in I} X_{i,j} \right)$$

toutes ces limites et colimites étant calculées dans $\mathbf{Faisc}(\mathcal{C})$.

Démonstration. — On sait, d'après la proposition 10.1.2 de [Sch72], que cette proposition est vraie pour les préfaisceaux. Comme le foncteur d'oubli

$$\omega : \mathbf{PréFaisc}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Faisc}(\mathcal{C})$$

possède un adjoint à gauche, il commute avec les limites : cela signifie que l'objet

$$\varprojlim_{i \in I} X_{i,j}$$

est le même, qu'il soit calculé dans $\mathbf{PréFaisc}(\mathcal{C})$ ou dans $\mathbf{Faisc}(\mathcal{C})$.

Par ailleurs, le foncteur « faisceau associé », qui admet ω pour adjoint à droite, commute aux colimites. Cela signifie donc que

$$\left(\varinjlim_{\substack{\text{PréFaisc} \\ j \in J}} X_{i,j} \right)^a = \varinjlim_{j \in J} X_{i,j}$$

dans $\mathbf{Faisc}(\mathcal{C})$.

Or on sait aussi, comme on l'a déjà dit, cf. Theorem 1, p.128 de [MLM94], que ce foncteur faisceau associé commute aux limites finies. Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} \varinjlim_{j \in J} \left(\varinflim_{i \in I} X_{i,j} \right) &= \left(\varinjlim_{j \in J} \left(\varinflim_{i \in I} X_{i,j} \right) \right)^a \\ &= \left(\varinjlim_{j \in J} \left(\varinflim_{i \in I} X_{i,j} \right) \right)^a \\ &= \left(\varinflim_{i \in I} \left(\varinjlim_{j \in J} X_{i,j} \right) \right)^a \\ &= \varinflim_{i \in I} \left(\varinjlim_{j \in J} X_{i,j} \right)^a \\ &= \varinflim_{i \in I} \left(\varinflim_{\substack{\text{PréFaisc} \\ j \in J}} X_{i,j} \right) \\ &= \varinflim_{i \in I} \left(\varinflim_{\substack{\text{Faisc} \\ j \in J}} X_{i,j} \right) \\ &= \varinflim_{i \in I} \left(\varinflim_{\substack{\text{Faisc} \\ \text{colim } j \in J}} X_{i,j} \right), \end{aligned}$$

ce qu'on voulait. ■

Deuxième partie

Champs de vecteurs, feuilles et trajectoires dans les schémas

Chapitre 3

Champs de vecteurs, feuilles et trajectoires dans les schémas

Ce chapitre commence par des rappels sur l'espace tangent $T_x X$ (appelé aussi dans la littérature « espace tangent de Zariski ») d'un schéma X en un point x . On présente plusieurs points de vue sur cet objet, qu'on compare entre eux. Ces points de vue, en toute généralité, ne sont pas équivalents. Néanmoins, on prouve que dans certains cas tout à fait satisfaisants, au moins deux d'entre eux le sont. Plus précisément, on prouve :

Proposition. *Soient k un corps parfait et X un schéma défini sur k . Soit $x \in X$ tel que l'extension $\kappa(x)/k$ soit finie. Alors, les deux $\kappa(x)$ -espaces vectoriels*

$$T_x X := (\mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2)^\vee \quad \text{et} \quad \mathrm{Der}_{\kappa(x)}(\mathcal{O}_{X,x} \otimes_k \kappa(x), \kappa(x))$$

sont isomorphes.

C'est en particulier le cas si X est un schéma localement de type fini sur k et si x est un point fermé.

Ces rappels nous permettent d'introduire naturellement les champs de vecteurs définis sur un schéma X . Les k -schémas X muni d'un k -champ de vecteurs \mathcal{V} sont appelés dans [Bui86] des Δ -schémas. Comme on s'intéresse dans notre étude à plusieurs notions de schémas différentiels, on n'utilisera pas cette terminologie. On appellera ces objets, tout simplement, des

(k -)schémas munis d'un (k -)champ de vecteurs.

On note \mathbf{Sch}^∂ et \mathbf{Sch}_k^∂ les catégories correspondantes. Si \mathcal{X} est un tel objet, certaines questions de dynamique se posent naturellement. Ainsi, après avoir défini ce qu'est un point $\eta \in X$ — penser à η non-fermé — *invariant sous le champ de vecteurs \mathcal{V}* , ou, autrement dit, après avoir défini ce que sont les *feuilles de \mathcal{V}* , et établi leur caractérisation dans le cas affine, il devient naturel de chercher une transposition pour les schémas du théorème de Cauchy-Lipschitz : dans quelle mesure la donnée d'un point et d'un champ de vecteurs déterminent une trajectoire. La démonstration de cette version schématique du théorème de Cauchy-Lipschitz repose alors sur certaines propositions du premier chapitre concernant le caractère premier des idéaux différentiellement maximaux. Comme application de ce théorème, on définit, si X est un \mathbf{Q} -schéma muni d'un champ de vecteurs \mathcal{V} , et si $x \in X$, la *trajectoire de x sous le champ \mathcal{V}* , notée $\mathrm{Traj}_{\mathcal{V}}(x)$. C'est un élément de X ; autrement dit, c'est, *grosso modo*, une sous-variété algébrique irréductible de X .

A priori, on ne peut définir la trajectoire que si le schéma X dans lequel on travaille est défini au-dessus de \mathbf{Q} . Cela vient principalement du fait que les propositions du premier chapitre affirmant le caractère premier de différents idéaux différentiels maximaux ne sont valables que pour les anneaux différentiels contenant \mathbf{Q} . Néanmoins, on verra qu'on peut faire l'économie de cette hypothèse, quitte à remplacer les dérivations par des *dérivations de Hasse-Schmidt*. Dans le cas où $\mathbf{Q} \subset A$, les dérivations de A sont en bijection avec les dérivations de Hasse-Schmidt de A .

Enfin, on prouve que cette application $\text{Traj}_{\varphi}(-)$ est compatible aux morphismes, et on fait le lien entre cette nouvelle notion et l'article [Kei77] de William Keigher.

3.1 Plusieurs points de vue pour l'espace tangent

(3.1.1) Cas des schémas. Soit (X, \mathcal{O}_X) un espace annelé. Rappelons que si $x \in X$, on définit l'anneau des germes de fonctions en x par :

$$\mathcal{O}_{X,x} := \varinjlim_{x \in U \hookrightarrow X} \mathcal{O}_X(U).$$

Si U est un ouvert de X et qu'on considère l'espace annelé $(U, \mathcal{O}_X|_U)$, alors l'anneau des germes de fonctions en x , vu si $x \in X$ ou si $x \in U$ ne change pas. Autrement dit, l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ ne dépend que du « germe d'espace annelé de X autour de x ».

Soient k un anneau, X un schéma défini sur k , $x \in X$. L'étude de $\mathcal{O}_{X,x}$ ne dépendant que du « germe d'espace de X autour de x », et tout point de X possédant un voisinage affine, on se ramène au cas où $X = \text{Spec } A$. Soit donc A une k -algèbre et $x \in \text{Spec } A$. Le point x est donc un idéal premier de A , qu'on notera aussi \mathfrak{p}_x — pour la clarté. L'anneau des germes de fonctions en x , qu'on appelle aussi dans ce contexte *l'anneau local de X en x* vérifie

$$\mathcal{O}_{X,x} \simeq A_{\mathfrak{p}_x}.$$

C'est un anneau local dont on note \mathfrak{m}_x son unique idéal maximal. Si l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ doit évidemment être compris comme l'anneau des fonctions définies localement autour de x , son idéal maximal \mathfrak{m}_x doit aussi évidemment être compris comme l'idéal des fonctions définies autour de x et qui s'annulent en x . Le corps $A_{\mathfrak{p}_x}/\mathfrak{m}_x$ est noté $\kappa(x)$ et est appelé le *corps résiduel de x* . On dispose ainsi d'une flèche, qui est d'une certaine façon la flèche d'évaluation en x des fonctions définies autour de x ,

$$\begin{array}{ccc} (\forall U \text{ voisinage de } x) & \mathcal{O}_X(U) & \xrightarrow{\quad \widetilde{\quad} \quad} A_{\mathfrak{p}_x} & \xrightarrow{\quad \widetilde{\quad} \quad} A_{\mathfrak{p}_x}/\mathfrak{m}_x = \kappa(x) \\ & f & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Tous les anneaux définis ci-dessus sont des k -algèbres.

Avant de continuer ces rappels sur $\mathcal{O}_{X,x}$, faisons un petit intermède de théorie des modules. On considère toujours notre anneau k . Si B est une k -algèbre et que I est un idéal de B , alors on peut voir I comme un B -module. En effet, I est bien stable par addition et, si $\lambda \in B$ et $x \in I$, le produit $\lambda \cdot x$ est encore dans I . De même, l'idéal I^2 de B , défini par

$$I^2 = (\{xy \mid x \in I \text{ et } y \in I\}) = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i y_i \mid n \in \mathbf{N}_{>0} \text{ et } x_i, y_i \in I \right\},$$

peut aussi être vu comme un B -module. Sous ce point de vue, I^2 est un sous- B -module de I , et on peut considérer le B -module I/I^2 . Le B -module I/I^2 est en fait un B/I -module. En effet, si λ et λ' sont deux éléments de B qui diffèrent par $\mu = \lambda' - \lambda \in I$ et que $x \in I/I^2$, alors

$$\lambda' x = (\lambda + \mu)x = \lambda x + \underbrace{\mu x}_{\in I^2/I^2} = \lambda x.$$

Plus formellement, il s'agit de voir que le morphisme $B \longrightarrow \text{End}_{\mathbf{Grp}}(I/I^2)$ qui définit la structure de B -module de I/I^2 se factorise par $B \longrightarrow B/I$.

Si on applique ce qu'on vient de voir à $B = A_{\mathfrak{p}_x}$ et $I = \mathfrak{M}_x$, on obtient que $\mathfrak{M}_x/\mathfrak{M}_x^2$ est naturellement muni d'une structure de $\kappa(x)$ -espace vectoriel. On l'appelle l'*espace cotangent* à X en x . On peut alors faire la définition suivante :

Définition 3.1.1. Soient X un schéma et $x \in X$. L'espace tangent à X en x est le $\kappa(x)$ -espace vectoriel $(\mathfrak{M}_x/\mathfrak{M}_x^2)^\vee$. On le note $T_x X$.

On comprend mieux cette définition à la lumière de ce qui suit. On considère la \mathbf{R} -algèbre $\mathcal{C}^\omega(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ des fonctions analytiques de \mathbf{R} dans \mathbf{R} . Soit $x_0 \in \mathbf{R}$. Notons \mathfrak{M}_{x_0} l'idéal de $\mathcal{C}^\omega(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ des fonctions qui s'annulent en x_0 . Alors, on a

$$\mathfrak{M}_{x_0}^2 = \{f \in \mathcal{C}^\omega(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \mid f(x_0) = f'(x_0) = 0\}.$$

En effet, d'un côté, si f et g sont deux éléments de \mathfrak{M}_{x_0} , on a :

$$(fg)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0) = 0.$$

De l'autre, si $f \in \mathcal{C}^\omega(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ vérifie $f(x_0) = f'(x_0) = 0$, la fonction f peut s'écrire

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots.$$

Du coup, la fonction définie par $g(x) := \frac{f(x)}{(x - x_0)}$ et prolongée par $g(x_0) = 0$ est bien analytique. On a $f = g \cdot (x - x_0)$ et ainsi $f \in \mathfrak{M}_{x_0}^2$. Ainsi, dans cette situation, le \mathbf{R} -espace vectoriel $\mathfrak{M}_{x_0}/\mathfrak{M}_{x_0}^2$ est

$$\mathfrak{M}_{x_0}/\mathfrak{M}_{x_0}^2 = \{f \in \mathcal{C}^\omega(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \mid f(x_0) = 0\} / \{f \in \mathcal{C}^\omega(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \mid f(x_0) = f'(x_0) = 0\}$$

et s'identifie à l'espace des valeurs prises par les dérivées en x_0 . Son dual correspond donc à « l'espace sous-jacent », à savoir ici l'espace tangent.

(3.1.2) Cas d'une variété différentielle. Soit M une variété différentielle et $p \in M$. L'espace tangent $T_p M$ à M au point p est défini comme suit. On considère d'abord l'ensemble des germes de chemins \mathcal{C}^∞ de M passant au temps $t = 0$ au point p : c'est l'ensemble des applications $\mathcal{C}^\infty \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ telles que $\gamma(0) = p$, où l'on identifie deux telles applications si elles coïncident sur l'intersection de leurs domaines de définition. Puis, on dit que deux tels germes de chemins γ_1 et γ_2 sont équivalents si, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{O}_{M,p}$ on a

$$(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0).$$

Intuitivement, cela veut dire que les deux chemins γ_1 et γ_2 traversent le point p dans la même direction et à la même vitesse. L'espace quotient obtenu est $T_p M$, par définition. Soit alors $\vec{v} \in T_p M$ un vecteur tangent à M au point p , représenté par le chemin γ . À l'aide de ce vecteur \vec{v} , on définit une \mathbf{R} -forme linéaire de $\mathcal{O}_{M,p}$:

$$\begin{aligned} \partial_{\vec{v}} : \quad & \mathcal{O}_{M,p} \longrightarrow \mathbf{R} \\ & \varphi \longmapsto (\varphi \circ \gamma)'(0). \end{aligned}$$

Cette \mathbf{R} -forme $\partial_{\vec{v}}$ vérifie par ailleurs, si $\varphi, \psi \in \mathcal{O}_{M,p}$:

$$\begin{aligned} \partial_{\vec{v}}(\varphi \cdot \psi) &= ((\varphi \cdot \psi) \circ \gamma)'(0) \\ &= ((\varphi \circ \gamma) \cdot (\psi \circ \gamma))'(0) \\ &= (\varphi \circ \gamma)'(0)(\psi \circ \gamma)(0) + (\varphi \circ \gamma)(0)(\psi \circ \gamma)'(0) \\ &= \partial_{\vec{v}}(\varphi)\psi(p) + \varphi(p)\partial_{\vec{v}}(\psi). \end{aligned}$$

Rappelons alors qu'on définit :

Définition 3.1.2. Soient k un anneau, A une k -algèbre et M un A -module. Une k -dérivation de A dans M est une application k -linéaire $d : A \rightarrow M$ vérifiant :

$$\forall \lambda \in k, d(\lambda) = 0 \quad \text{et} \quad \forall (f, g) \in A^2, d(fg) = f \cdot d(g) + g \cdot d(f).$$

L'ensemble des k -dérivations de A dans M est noté $\text{Der}_k(A, M)$. C'est un A -module.

Dans le cas qui nous intéresse, l'anneau k est $k = \mathbf{R}$, la k -algèbre A est $A = \mathcal{O}_{M,p}$. Le A -module M , ici, est en fait une A -algèbre ; c'est $M = \mathbf{R}$ via la flèche d'évaluation en p des fonctions $\text{év}_p : \mathcal{O}_{M,p} \rightarrow \mathbf{R}$. Avec ces notations, la \mathbf{R} -forme $\partial_{\vec{v}}$ vérifie

$$\partial_{\vec{v}} \in \text{Der}_{\mathbf{R}}(\mathcal{O}_{M,p}, \mathbf{R}).$$

Réciproquement, on peut vérifier que tout élément de $\text{Der}_{\mathbf{R}}(\mathcal{O}_{M,p}, \mathbf{R})$ provient d'un vecteur tangent. Autrement dit :

Proposition 3.1.3. Soit M une variété différentielle et $m \in M$. L'application

$$\begin{array}{ccc} T_p M & \longrightarrow & \text{Der}_{\mathbf{R}}(\mathcal{O}_{M,p}, \mathbf{R}) \\ \vec{v} & \longmapsto & \partial_{\vec{v}} \end{array}$$

est un isomorphisme de \mathbf{R} -espaces vectoriels.

(3.1.3) Un troisième point de vue. On a ainsi, dans le cas des variétés différentielles, exprimé l'espace tangent en termes de dérivations. Un troisième point de vue est possible. Plaçons-nous dans un cadre général : on considère k un anneau, A une k -algèbre et M un A -module. Suivant [EGA IV.1, (18.2.3)] ou, plus simplement, [Gil02], on définit la A -algèbre des nombres duals au-dessus de A et à coefficients dans M , qu'on note $A \oplus M\varepsilon$, comme suit. Ses éléments sont les $a \oplus m\varepsilon$, qu'on additionne naturellement, et qu'on multiplie grâce à la règle $\varepsilon^2 = 0$:

$$(a_1 \oplus m_1\varepsilon) \cdot (a_2 \oplus m_2\varepsilon) = a_1a_2 \oplus (a_1m_2 + a_2m_1)\varepsilon.$$

Enfin, on note $p_{\varepsilon=0} : A \oplus M\varepsilon \rightarrow A$ la projection sur le premier facteur, qui est un morphisme de A -algèbres, et $p_2 : A \oplus M\varepsilon \rightarrow M$, la projection sur le second facteur, qui est A -linéaire. Soit maintenant $d \in \text{Der}_k(A, M)$. Vérifions que l'application

$$\Phi_d : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \oplus M\varepsilon \\ a & \longmapsto & a \oplus d(a)\varepsilon \end{array}$$

est un morphisme de k -algèbres. Elle est bien additive. Elle respecte la structure de k -algèbre car $d(\lambda) = 0$ dès que $\lambda \in k$. Enfin, on a

$$\begin{aligned} \Phi_d(a_1a_2) &= a_1a_2 \oplus d(a_1a_2)\varepsilon \\ &= a_1a_2 \oplus (a_1d(a_2) + a_2d(a_1))\varepsilon \\ &= (a_1 \oplus d(a_1)\varepsilon) \cdot (a_2 \oplus d(a_2)\varepsilon) \\ &= \Phi_d(a_1)\Phi_d(a_2). \end{aligned}$$

Réciproquement, on vérifie que si $\Phi : A \rightarrow A \oplus M\varepsilon$ est un morphisme de k -algèbres tel que $p_{\varepsilon=0} \circ \Phi = \text{Id}_A$, alors $p_2 \circ \Phi : A \rightarrow M$ est une k -dérivation de A dans M . Autrement dit :

Proposition 3.1.4. Soient k un anneau, A une k -algèbre et M un A -module. Alors, la flèche

$$\begin{aligned} \text{Der}_k(A, M) &\longrightarrow \{\Phi \in \text{Hom}_{\mathbf{Alg}_k}(A, A \oplus M\varepsilon) \mid p_{\varepsilon=0} \circ \Phi = \text{Id}_A\} \\ d &\longmapsto \text{Id} \oplus d(\cdot)\varepsilon \end{aligned}$$

définit un isomorphisme de A -modules.

Le cadre précédent peut être simplifié si M , en plus d'être un A -module, est une A -algèbre, qu'on note alors B . En effet, dans ce cas, au lieu de considérer $A \oplus M\varepsilon$, il suffit de considérer la B -algèbre $B[\varepsilon]/\varepsilon^2$: si on note $A \xrightarrow{i} B$ le morphisme de structure d'algèbre, on peut associer à toute dérivation $d \in \text{Der}_k(A, B)$ un morphisme de k -algèbres

$$\begin{aligned} \Phi_d : A &\longrightarrow B[\varepsilon]/\varepsilon^2 \\ a &\longmapsto i(a) + d(a)\varepsilon \end{aligned}$$

qui vérifie $p_{\varepsilon=0} \circ \Phi_d = i$. Réciproquement, tout morphisme $\Phi \in \text{Hom}_{\mathbf{Alg}_k}(A, B[\varepsilon]/\varepsilon^2)$ qui vérifie $p_{\varepsilon=0} \circ \Phi = i$ provient d'une dérivation. Cette dernière condition sur la « trivialité du premier facteur de Φ » peut être omise si on se place dans le cadre où l'on dispose d'une « flèche d'évaluation » $A \longrightarrow k$, qui fait de k une A -algèbre, et qu'on regarde les dérivations $\text{Der}_k(A, k)$. En effet, comme on regarde les morphismes de k -algèbres, les structures de k -algèbre de A et de $k[\varepsilon]/\varepsilon^2$ assurent que « le premier facteur est trivial ». Ceci se résume dans :

Proposition 3.1.5. Soient k un anneau, A une k -algèbre, et soit $\text{év} : A \longrightarrow k$ un morphisme faisant de k une A -algèbre. Alors

$$\begin{aligned} \text{Der}_k(A, k) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Alg}_k}(A, k[\varepsilon]/\varepsilon^2) \\ d &\longmapsto (f \mapsto \text{év}(f) + d(f)\varepsilon) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de A -modules.

Ainsi, dans le cas des variétés différentielles, on peut dire :

Proposition 3.1.6. Soient M une variété différentielle et $m \in M$. L'application

$$\begin{aligned} T_p M &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Alg}_{\mathbf{R}}}(\mathcal{O}_{M,p}, \mathbf{R}[\varepsilon]/\varepsilon^2) \\ \vec{v} &\longmapsto (\varphi \mapsto \varphi(p) + \partial_{\vec{v}}(\varphi)\varepsilon) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de \mathbf{R} -espaces vectoriels.

Récapitulons : on a vu, dans le cas des variétés différentielles, qu'on peut adopter trois points de vue pour définir l'espace tangent en un point. On peut définir $T_p M$ avec les germes de chemin. Ou bien, on peut considérer

$$T_p M := \text{Der}_{\mathbf{R}}(\mathcal{O}_{M,p}, \mathbf{R}) \quad \text{ou bien, encore,} \quad T_p M := \text{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathcal{O}_{M,p}, \mathbf{R}[\varepsilon]/\varepsilon^2).$$

On pourrait aussi montrer — c'est un exercice d'analyse — que l'espace tangent est aussi isomorphe à $(\mathfrak{M}_p/\mathfrak{M}_p^2)^\vee$.

(3.1.4) Retour au cas des schémas. On va maintenant montrer que ces points de vue s'importent au cas de schémas. On voudrait, dans un premier temps, voir l'espace tangent d'un schéma en un point comme un ensemble de dérivations. Comme précédemment, on peut se restreindre au cas d'un schéma affine. Soient donc k un anneau, A une k -algèbre ; on considère le schéma affine $X = \text{Spec } A$ et $x \in \text{Spec } A$ un idéal premier de A , qu'on note aussi \mathfrak{p}_x .

Ainsi, on voudrait voir $T_x X$ comme quelque chose du genre $\text{Der}_k(\mathcal{O}_{X,x}, k)$. Pour cela, suivant la définition 3.1.2, — si on est réaliste — il faut que k soit muni d'une structure de $\mathcal{O}_{X,x}$ -algèbre ; autrement dit, il nous faudrait un morphisme $\mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow k$, qui pourrait du coup être conçu comme un « morphisme d'évaluation ». Or, ceci est exclu : l'arithmétique du point x fait qu'on ne peut pas forcément « évaluer » $\mathcal{O}_{X,x}$ dans k . Par exemple, si $X = \text{Spec } \mathbf{Q}[t]$ est la droite affine définie sur \mathbf{Q} et que \mathfrak{p}_x est l'idéal premier $(t^2 - 2)$ définissant le point « $x = \sqrt{2}$ », il n'existe aucun morphisme de $\mathcal{O}_{X,x} = \mathbf{Q}[t]_{(t^2-2)}$ vers \mathbf{Q} . En effet, si on note $\alpha \in \mathbf{Q}$ l'image de t par ce morphisme, il faudrait pouvoir « évaluer » la fraction rationnelle $\frac{1}{t-\alpha}$, qui est bien dans $\mathbf{Q}[t]_{(t^2-2)}$, ce qui est impossible.

Un meilleur objet à regarder est $\text{Der}_{\kappa(x)}(\kappa(x) \otimes_k \mathcal{O}_{X,x}, \kappa(x))$. Pour commencer, remarquons qu'on peut encore « évaluer » $\kappa(x) \otimes_k \mathcal{O}_{X,x}$ dans $\kappa(x)$. On le fait à l'aide de la flèche définie par

$$\Phi_x : \begin{array}{ccc} \kappa(x) \otimes_k \mathcal{O}_{X,x} & \longrightarrow & \kappa(x) \\ \lambda \otimes f & \longmapsto & \lambda f(x) \end{array}.$$

On note \mathfrak{N}_x le noyau de Φ_x ; c'est un idéal maximal de $\kappa(x) \otimes_k \mathcal{O}_{X,x}$, puisque Φ_x est surjectif. Notons

$$i_x : \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{X,x} & \longrightarrow & \kappa(x) \otimes_k \mathcal{O}_{X,x} \\ f & \longmapsto & 1 \otimes f \end{array}$$

la flèche canonique. Elle envoie \mathfrak{M}_x sur $i(\mathfrak{M}_x)$, qui lui-même engendre un idéal qu'on note $(i_x)_* \mathfrak{M}_x$. On a $(i_x)_* \mathfrak{M}_x \subset \mathfrak{N}_x$. En effet, une fonction $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ qui s'annule en x garde cette propriété quand on « augmente » $\mathcal{O}_{X,x}$ en $\kappa(x) \otimes_k \mathcal{O}_{X,x}$. De même, l'idéal \mathfrak{M}_x^2 s'envoie dans \mathfrak{N}_x^2 . On dispose donc d'une flèche induite par i_x et qu'on note \bar{i}_x :

$$\bar{i}_x : \mathfrak{M}_x / \mathfrak{M}_x^2 \longrightarrow \mathfrak{N}_x / \mathfrak{N}_x^2.$$

qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_x & \xrightarrow{i_x} & \mathfrak{N}_x \\ p_{\mathfrak{M}_x^2} \downarrow & & \downarrow p_{\mathfrak{N}_x^2} \\ \mathfrak{M}_x / \mathfrak{M}_x^2 & \xrightarrow{\bar{i}_x} & \mathfrak{N}_x / \mathfrak{N}_x^2 \end{array}. \quad (1)$$

D'après ce qu'on a dit dans le rappel de théorie de modules fait dans le paragraphe 3.1.1, $\mathfrak{N}_x / \mathfrak{N}_x^2$ peut être vu comme un $(\kappa(x) \otimes_k \mathcal{O}_{X,x}) / \mathfrak{N}_x$ -module. Comme la flèche Φ_x est surjective : $\mathfrak{N}_x / \mathfrak{N}_x^2$ peut être vu comme un $\kappa(x)$ -module — c'est-à-dire un $\kappa(x)$ -espace vectoriel. On peut alors vérifier que \bar{i}_x est une application $\kappa(x)$ -linéaire.

À l'aide de ce qui précède, voyons maintenant comment on peut relier

$$T_x X \quad \text{et} \quad \text{Der}_{\kappa(x)}(\kappa(x) \otimes_k \mathcal{O}_{X,x}, \kappa(x)).$$

Pour commencer, montrons qu'on peut associer à toute dérivation un vecteur tangent. Soit donc

$$\partial \in \text{Der}_{\kappa(x)}(\kappa(x) \otimes_k \mathcal{O}_{X,x}, \kappa(x)).$$

On veut construire φ_∂ une forme $\kappa(x)$ -linéaire $\mathfrak{M}_x/\mathfrak{M}_x^2 \longrightarrow \kappa(x)$. Soit donc $\bar{f} \in \mathfrak{M}_x/\mathfrak{M}_x^2$, image de $f \in \mathfrak{M}_x$ par $p_{\mathfrak{M}_x^2}$. On pose :

$$\varphi_\partial(\bar{f}) = \partial(1 \otimes f).$$

Pour vérifier que cette application est bien définie, il suffit de montrer que, si $f, g \in \mathfrak{M}_x$, alors on a $\partial(1 \otimes fg) = 0$. Ceci est vrai :

$$\begin{aligned}\partial(1 \otimes fg) &= \partial((1 \otimes f) \cdot (1 \otimes g)) \\ &= f(x) \cdot \partial(1 \otimes g) + g(x) \partial(1 \otimes f) = 0.\end{aligned}$$

Par ailleurs, l'application $\text{Der}_{\kappa(x)}(\kappa(x) \otimes_k \mathcal{O}_{X,x}, \kappa(x)) \longrightarrow T_x X$ ainsi définie est bien $\kappa(x)$ -linéaire.

On veut maintenant associer une dérivation $\partial_{\vec{v}}$ à un vecteur tangent $\vec{v} \in T_x X$. Pour cela, supposons que \bar{i}_x soit un isomorphisme de $\kappa(x)$ -espaces vectoriels. Soit $\tilde{f} \in \kappa(x) \otimes_k \mathcal{O}_{X,x}$; on peut supposer que \tilde{f} est un tenseur simple, c'est-à-dire que f s'écrit $\tilde{f} = \lambda \otimes f$. Si on soustrait à \tilde{f} sa valeur en x , on obtient une fonction qui s'annule en x . Formellement :

$$\lambda \otimes f - \lambda f(x) \otimes 1 \in \mathfrak{N}_x.$$

On considère la classe de cette fonction dans $\mathfrak{N}_x/\mathfrak{N}_x^2$, qu'on rapatrie dans $\mathfrak{M}_x/\mathfrak{M}_x^2$ via l'isomorphisme \bar{i}_x . On peut alors appliquer à cet élément la forme linéaire $\vec{v} \in (\mathfrak{M}_x/\mathfrak{M}_x^2)^\vee$. On a défini :

$$\begin{array}{ccc}\kappa(x) \otimes_k \mathcal{O}_{X,x} & \xrightarrow{\hspace{1cm}} & \kappa(x) \\ \partial_{\vec{v}} : & \lambda \otimes f \longmapsto & \vec{v} \bullet \left(\bar{i}_x^{-1} (p_{\mathfrak{N}_x^2}(\lambda \otimes f - \lambda f(x) \otimes 1)) \right).\end{array}$$

Cette application est $\kappa(x)$ -linéaire, car toutes les applications qui la définissent le sont. Elle vérifie bien $\partial(\lambda) = 0$ si $\lambda \in \kappa(x)$. Par ailleurs, si $f, g \in \mathcal{O}_{X,x}$ et si $\lambda, \mu \in \kappa(x)$, on a les égalités suivantes :

$$\begin{array}{ccc}(\lambda \otimes f - \lambda f(x) \otimes 1) \cdot \mu g(x) \otimes 1 & & \lambda \mu g(x) \otimes f + \lambda \mu f(x) \otimes g \\ + & = & - \\ (\mu \otimes g - \mu g(x) \otimes 1) \cdot \lambda f(x) \otimes 1 & & 2\lambda \mu f(x)g(x) \otimes 1\end{array}$$

et

$$(\lambda \otimes f - \lambda f(x) \otimes 1) \cdot (\mu \otimes g - \mu g(x) \otimes 1) = 0 \quad \text{dans } \mathfrak{N}_x/\mathfrak{N}_x^2$$

ie

$$\lambda \mu \otimes fg - \lambda \mu f(x) \otimes g - \lambda \mu g(x) \otimes f + \lambda \mu f(x)g(x) \otimes 1 = 0 \quad \text{dans } \mathfrak{N}_x/\mathfrak{N}_x^2.$$

De telle sorte que, dans $\mathfrak{N}_x/\mathfrak{N}_x^2$, on a :

$$\begin{array}{ccc}(\lambda \otimes f - \lambda f(x) \otimes 1) \cdot \mu g(x) \otimes 1 & & \lambda \mu \otimes fg \\ + & = & - \\ (\mu \otimes g - \mu g(x) \otimes 1) \cdot \lambda f(x) \otimes 1 & & \lambda \mu f(x)g(x) \otimes 1\end{array}$$

En appliquant $\vec{v} \circ \bar{i}_x^{-1}$ à l'égalité ci-dessus, on obtient, en notant $\tilde{f} = \lambda \otimes f$ et $\tilde{g} = \mu \otimes g$:

$$\tilde{g}(x) \cdot \partial_{\vec{v}}(\tilde{f}) + \tilde{f}(x) \cdot \partial_{\vec{v}}(\tilde{g}) = \partial_{\vec{v}}(\tilde{f}\tilde{g}).$$

Autrement dit, l'application $\partial_{\vec{v}}$ qu'on a ainsi définie est bien un élément de

$$\text{Der}_{\kappa(x)}(\kappa(x) \otimes_k \mathcal{O}_{X,x}, \kappa(x)).$$

On peut alors énoncer :

Proposition 3.1.7. Soient k un anneau, X un schéma défini sur k et $x \in X$. L'application

$$\begin{array}{ccc} \text{Der}_{\kappa(x)}(\kappa(x) \otimes_k \mathcal{O}_{X,x}, \kappa(x)) & \longrightarrow & T_x X \\ \partial & \longmapsto & (f \mapsto \partial(f)), \end{array}$$

définie pour tout $x \in X$, est $\kappa(x)$ -linéaire. Quand \bar{i}_x est un isomorphisme, c'est un isomorphisme.

Démonstration. — Notons

$$\begin{aligned} \Theta : \text{Der}_{\kappa(x)}(\kappa(x) \otimes_k \mathcal{O}_{X,x}, \kappa(x)) &\longrightarrow T_x X \\ &\text{et} \\ \Psi : T_x X &\longrightarrow \text{Der}_{\kappa(x)}(\kappa(x) \otimes_k \mathcal{O}_{X,x}, \kappa(x)) \end{aligned}$$

les deux applications qu'on vient de définir. Supposons que \bar{i}_x soit un isomorphisme. Démontrons d'abord que, pour $\partial \in \text{Der}_{\kappa(x)}(\kappa(x) \otimes_k \mathcal{O}_{X,x}, \kappa(x))$ fixé, on a bien

$$\Psi \circ \Theta(\partial) = \partial.$$

Soient donc $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ et $\lambda \in \kappa(x)$. On veut calculer

$$\varphi_\partial \left(\bar{i}_x^{-1} (p_{\mathfrak{M}_x^2} (\lambda \otimes f - \lambda f(x) \otimes 1)) \right).$$

Pour cela, soit $g \in \mathfrak{M}_x$ tel que

$$p_{\mathfrak{M}_x^2}(g) = \bar{i}_x^{-1} (p_{\mathfrak{M}_x^2} (\lambda \otimes f - \lambda f(x) \otimes 1));$$

d'après la définition qu'on a décrite de φ_∂ , on a donc :

$$\psi_\partial \left(\bar{i}_x^{-1} (p_{\mathfrak{M}_x^2} (\lambda \otimes f - \lambda f(x) \otimes 1)) \right) = \partial(1 \otimes g).$$

En appliquant \bar{i}_x des deux côtés à l'avant-dernière équation, on obtient que

$$(\bar{i}_x \circ p_{\mathfrak{M}_x^2})(g) = p_{\mathfrak{M}_x^2} (\lambda \otimes f - \lambda f(x) \otimes 1).$$

En utilisant la commutativité du diagramme (1), on obtient que

$$p_{\mathfrak{M}_x^2}(i_x(g)) = p_{\mathfrak{M}_x^2} (\lambda \otimes f - \lambda f(x) \otimes 1).$$

Enfin, en tenant compte de la définition de la flèche i_x , cela s'écrit

$$p_{\mathfrak{M}_x^2}(1 \otimes g) = p_{\mathfrak{M}_x^2} (\lambda \otimes f - \lambda f(x) \otimes 1).$$

Par conséquent, les deux éléments $1 \otimes g$ et $\lambda \otimes f - \lambda f(x) \otimes 1$ ont la même image par ∂ . Ainsi,

$$(\Psi \circ \Theta(\partial))(\lambda \otimes f) = \partial(\lambda \otimes f - \lambda f(x) \otimes 1).$$

Or, par définition de $\text{Der}_{\kappa(x)}(\kappa(x) \otimes_k \mathcal{O}_{X,x}, \kappa(x))$, la dérivée de tout élément de la forme $\mu \otimes 1$ est nulle. Ainsi, on peut écrire

$$(\Psi \circ \Theta(\partial))(\lambda \otimes f) = \partial(\lambda \otimes f) \quad \text{et donc } (\Psi \circ \Theta)(\partial) = \partial,$$

ce qu'on voulait.

Montrons maintenant $\Theta \circ \Psi(\vec{v}) = \vec{v}$. Soit donc $\tilde{f} \in \mathfrak{M}_x/\mathfrak{M}_x^2$; on écrit $\tilde{f} = p_{\mathfrak{M}_x^2}(f)$ pour $f \in \mathfrak{M}_x$. On a donc :

$$\begin{aligned} (\Theta \circ \Psi(\vec{v})) \bullet \tilde{f} &= (\Theta(\partial_{\vec{v}})) \bullet \tilde{f} \\ &= \partial_{\vec{v}}(1 \otimes f) \\ &= \vec{v} \bullet \left(\overline{i_x}^{-1} \left(p_{\mathfrak{N}_x^2} (1 \otimes f - \underbrace{f(x)}_{f(x)=0} \otimes 1) \right) \right) \\ &= \vec{v} \bullet \left(\overline{i_x}^{-1} (p_{\mathfrak{N}_x^2} (1 \otimes f)) \right) \\ &= \vec{v} \bullet \left(\overline{i_x}^{-1} (p_{\mathfrak{N}_x^2} (i_x(f))) \right). \end{aligned}$$

En utilisant la commutativité du diagramme (1), c'est-à-dire l'identité $p_{\mathfrak{N}_x^2} \circ i_x = \overline{i_x} \circ p_{\mathfrak{M}_x^2}$, on peut alors écrire

$$(\Theta \circ \Psi(\vec{v})) \bullet \tilde{f} = \vec{v} \bullet \left(\overline{i_x}^{-1} (\overline{i_x} (p_{\mathfrak{M}_x^2}(f))) \right) = \vec{v} \bullet \tilde{f},$$

ce qu'on voulait. ■

(3.1.5) La condition « $\overline{i_x}$ est un isomorphisme ». Afin de rendre la proposition 3.1.7 plus effective, on donne une condition suffisante pour que le morphisme $\overline{i_x}$ soit un isomorphisme.

Proposition 3.1.8. *Soient k un anneau, X un schéma défini sur k et $x \in X$. Si l'extension $k \rightarrow \kappa(x)$ est étale, $\overline{i_x}$ est un isomorphisme. En particulier, quand k est un corps parfait, si l'extension $\kappa(x)/k$ est finie, alors $\overline{i_x}$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — On reprend les notations du paragraphe précédent (\mathfrak{M}_x , \mathfrak{N}_x , etc.) On note $A = \mathcal{O}_{X,x}$ et $B = \mathcal{O}_{X,x} \otimes_k \kappa(x)$. On utilise le théorème de la seconde suite exacte fondamentale (théorème 25.2 de [Mat89]) :

- pour l'extension $k \rightarrow A \rightarrow \kappa(x)$, on obtient la suite exacte

$$\mathfrak{M}_x/\mathfrak{M}_x^2 \longrightarrow \Omega_{A/k} \otimes_A \kappa(x) \longrightarrow \Omega_{\kappa(x)/k} \longrightarrow 0$$

- pour l'extension $\kappa(x) \rightarrow B \rightarrow \kappa(x)$, on obtient la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathfrak{N}_x/\mathfrak{N}_x^2 \longrightarrow \Omega_{B/\kappa(x)} \otimes_B \kappa(x) \longrightarrow 0$$

Par ailleurs, d'après la proposition 8.2A de [Har77], on a :

$$\Omega_{B/\kappa(x)} \simeq \Omega_{A/k} \otimes_A B,$$

de sorte qu'en tensorisant cet isomorphisme par $\otimes_B \kappa(x)$, on a

$$\Omega_{B/\kappa(x)} \otimes_B \kappa(x) \simeq \Omega_{A/k} \otimes_A \kappa(x).$$

Ainsi, la première suite exacte peut se réécrire

$$\mathfrak{M}_x/\mathfrak{M}_x^2 \longrightarrow \mathfrak{N}_x/\mathfrak{N}_x^2 \longrightarrow \Omega_{\kappa(x)/k} \longrightarrow 0.$$

On peut vérifier que la première flèche est égale à $\overline{i_x}$. Une condition suffisante donnée par le théorème de Matsumura pour qu'elle soit injective est que $\kappa(x)$ soit lisse au-dessus de k . Une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit surjective est que $\Omega_{\kappa(x)/k}$ soit nul. Une condition suffisante pour tout cela est que $k \rightarrow \kappa(x)$ soit étale. ■

(3.1.6) Un dernier point de vue. On vient de voir que, dans les cas favorables, l'espace tangent $T_x X$ d'un schéma en un point s'identifie à

$$\mathrm{Der}_{\kappa(x)}(\kappa(x) \otimes_k \mathcal{O}_{X,x}, \kappa(x)).$$

Plaçons-nous désormais dans le cas où x est un point rationnel — c'est-à-dire dans le cas où $\kappa(x) = k$. D'après la proposition 3.1.5, le $\kappa(x)$ -espace vectoriel $\mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_{X,x}, k)$ est isomorphe à

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_{\kappa(x)}}(\mathcal{O}_{X,x}, k[\varepsilon]/\varepsilon^2).$$

qui, en notant $X_x = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$, est lui-même est en bijection avec

$$X_x(k[\varepsilon]/\varepsilon^2).$$

Or, les $(k[\varepsilon]/\varepsilon^2)$ -points de X_x s'identifient aux $(k[\varepsilon]/\varepsilon^2)$ -points de X qui, par composition avec

$$\begin{array}{ccc} k[\varepsilon]/\varepsilon^2 & \longrightarrow & k \\ p_{\varepsilon=0}: & & \varepsilon \longmapsto 0 \end{array}$$

s'envoient sur p_x , le $\kappa(x)$ -point de X canonique associé à x . En effet, on dispose toujours d'un morphisme canonique (voir le paragraphe 2.4 de [EGA I])

$$\begin{array}{ccc} X_x = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) & & \\ & \downarrow j_x & \\ & X & \end{array}$$

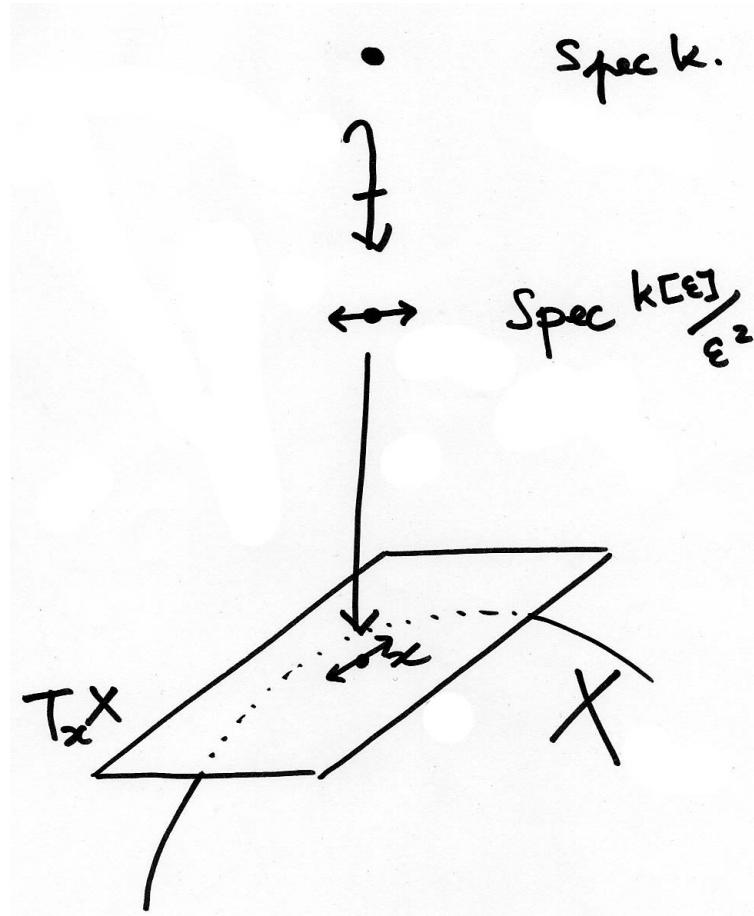
— qui envoie l'unique point fermé de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ sur x . Ainsi, par composition avec j_x , un $(k[\varepsilon]/\varepsilon^2)$ -point de X_x , donne un $(k[\varepsilon]/\varepsilon^2)$ -point de X qui coïncide avec p_x sur $\mathrm{Spec} k$. Réciproquement, P , un $(k[\varepsilon]/\varepsilon^2)$ -point de X qui coïncide avec p_x sur $\mathrm{Spec} k$, se factorise par $U \hookrightarrow X$ pour tout ouvert U de X contenant x . On peut ainsi associer à P un $(k[\varepsilon]/\varepsilon^2)$ -point de X_x . Conclusion :

Proposition 3.1.9. Soient k un corps, X un schéma défini sur k et $x \in X$ un point rationnel. On peut identifier les deux ensembles

$$T_x X \quad \text{et} \quad X(p_{\varepsilon=0})^{-1}(j_x) \subset X(k[\varepsilon]/\varepsilon^2).$$

Remarquons que ce troisième point de vue sur l'espace tangent d'un schéma X en x est l'analogie algébrique de la définition qu'on a choisie pour les variétés différentielles, avec les germes de chemins, etc. En effet, s'il fallait trouver l'analogie algébrique d'un chemin \mathcal{C}^∞ noté $\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow M$ passant par m au temps $t = 0$, ce serait un morphisme $\mathbf{A}_k^1 \longrightarrow X$ envoyant 0 sur x . Puis, ne regarder que les *germes* de chemin et ne s'intéresser qu'à leur dérivée à $t = 0$, reviendrait à ne regarder que la trace des morphismes $\mathbf{A}_k^1 \longrightarrow X$ sur $\mathrm{Spec}(k[\varepsilon]/\varepsilon^2)$:

$$\mathrm{Spec}(k[\varepsilon]/\varepsilon^2) \hookrightarrow \mathbf{A}_k^1 \longrightarrow X.$$

FIG. 1 – Un $k[\varepsilon]/\varepsilon^2$ -point de X localisé en x .

3.2 Champs de vecteurs

(3.2.1) Définition. Soient k un anneau, X un schéma défini sur k et $x \in X$. On vient de voir dans le paragraphe (3.1.4) que, sous certaines hypothèses, les $\kappa(x)$ -espaces vectoriels

$$T_x X \quad \text{et} \quad \text{Der}_{\kappa(x)}(\kappa(x) \otimes_{k\mathcal{O}_{X,x}} \kappa(x))$$

sont isomorphes. Dans le cas des variétés différentielles, cette analogie de point de vue est toujours vraie : si M est une variété différentielle et $p \in M$, les \mathbf{R} -espaces vectoriels

$$T_p M \quad \text{et} \quad \text{Der}_{\mathbf{R}}(\mathcal{O}_{M,p}, \mathbf{R})$$

sont toujours isomorphes. Toujours dans le cas des variétés différentielles, cette dualité de point de vue est encore valable pour les *champs de vecteurs* : si U est un ouvert de M , les champs de vecteurs sur U , *ie* les « applications \mathcal{C}^∞ » qui à $m \in U$ associent un vecteur $\vec{v}_m \in T_m X$ sont en correspondance bijective avec

$$\text{Der}_{\mathbf{R}}(\mathcal{O}_M(U), \mathcal{O}_M(U)).$$

Dans le cas des espaces annelés, on définit :

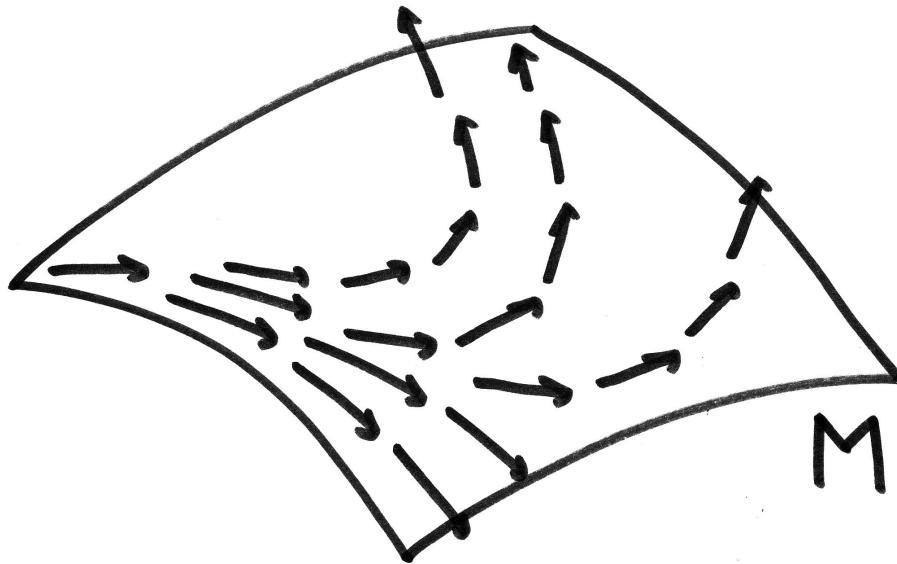


FIG. 2 – Un champ de vecteurs, dans le cas d'une variété différentielle M .

Définition 3.2.1. Soit k un anneau et soit (X, \mathcal{O}_X) un espace annelé en k -algèbres. Une k -dérivation de \mathcal{O}_X dans \mathcal{O}_X est une famille $\partial = (\partial_U)_U$ de flèches

$$\partial_U : \mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U) \quad \in \quad \text{Der}_k(\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X(U))$$

compatibles aux restrictions. On note $\text{Der}_k(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ l'ensemble de ces k -dérivations. C'est un \mathcal{O}_X -module.

Remarque. — Lorsqu'on prend pour anneau de base $k = \mathbf{Z}$, on notera simplement

$$\text{Der}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) := \text{Der}_{\mathbf{Z}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$$

◊

Dans le cas des variétés différentielles, on peut associer à tout champ de vecteurs $m \mapsto \vec{v}_m$ défini sur M tout entier une \mathbf{R} -dérivation (de faisceaux) $\partial \in \text{Der}_{\mathbf{R}}(\mathcal{O}_M, \mathcal{O}_M)$. C'est ainsi qu'on généralise aux k -schémas la notion de champ de vecteurs.

Définition 3.2.2. Soit X un schéma. Un champ de vecteurs défini sur X est une dérivation $\partial \in \text{Der}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$.

Remarques. — Si k est un anneau et si X est un espace annelé en k -algèbres, on peut toujours munir X du *champ de vecteurs nul*. Il s'agit, tout simplement, du champ de vecteurs défini par

$$\partial_U(f) = 0 \quad \forall U \subset_{\Theta} X \quad \forall f \in \mathcal{O}_X(U).$$

— Dans la définition des k -dérivations qui précède, le « k » est très important. Intuitivement, plus k est grand, moins on a de latitude pour choisir la dérivation (*ie* le champ de vecteurs). Plus précisément, si X est un espace annelé en k -algèbres (penser typiquement à un k -schéma), alors, on peut (il faut) voir X comme un espace annelé au-dessus de $\text{Spec } k$.

Alors, dans ce cas, choisir une k -dérivation sur X , c'est la même chose que de choisir un champ de vecteurs sur X qui se projette sur le champ de vecteurs nul sur $\text{Spec } k$. En un sens, on interdit alors qu'il y ait de la dynamique « dans le sens de la base ». C'est pourquoi on a défini les champs de vecteurs comme des \mathbf{Z} -dérivations : on ne veut *a priori* exclure aucune dynamique. ◇

(3.2.2) Cas affine. Si $X = \text{Spec } A$, on peut donc associer à tout champ de vecteurs ∂ défini sur X une dérivation $\partial_A := \partial_{\text{Spec } A}$ de A : c'est la dérivation des sections globales induite par ∂ . En fait, cette correspondance est bijective : de la même manière que les $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}$ -modules quasi-cohérents sont en correspondance bi-univoque avec les A -modules (*cf.* le théorème (1.4.1) de [EGA I]) : les champs de vecteurs définis sur $\text{Spec } A$ sont en correspondance biunivoque avec les dérivations de A .

Afin de préciser cette correspondance entre champs de vecteurs et dérivations de l'algèbre des fonctions régulières, regardons ce qui se passe pour \mathbf{A}_C^n . Dans ce cas, *intuitivement*, un champ de vecteurs défini sur \mathbf{A}_C^n correspond à la donnée pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{C}^n$ d'un vecteur

$$\vec{v}_x \in \mathbf{C}^n$$

de telle sorte que la fonction $x \mapsto \vec{v}_x$ varie algébriquement. Autrement dit, un champ de vecteurs correspond à la donnée de n polynômes $P_1, \dots, P_n \in \mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$ définissant pour chaque $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{C}^n$ le vecteur

$$\vec{v}_x = (P_1(x_1, \dots, x_n), \dots, P_n(x_1, \dots, x_n)) \in \mathbf{C}^n.$$

Dans ce cas, la dérivation de l'algèbre de fonctions régulières de \mathbf{A}_C^n associée à ce champ de vecteurs est la dérivation

$$\partial : \mathbf{C}[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow \mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$$

$$\text{définie par } \partial(X_1) = P_1 \quad \partial(X_2) = P_2 \quad \dots \quad \partial(X_n) = P_n.$$

Pour justifier cette équivalence de points de vue, il faut définir ce qu'est le vecteur tangent en un point $x \in X$ associé à un champ de vecteurs défini sur X .

(3.2.3) Spécialisation d'un champ de vecteurs en un point. Revenons au cas général : soit X un schéma, muni d'un champ de vecteurs ∂ . Alors, on peut associer à tout point $x \in X$ un vecteur tangent à X en x , qu'on note $\vec{v}_{\partial,x} \in T_x X$, de la manière suivante. Les dérivations $\partial_U : \mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U)$ étant compatibles aux restrictions, le champ de vecteurs ∂ « se factorise » à travers l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$: pour tout couple de voisinages ouverts (U, V) vérifiant $x \in U \subset V$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(V) & \xrightarrow{\partial_V} & \mathcal{O}_X(V) \\ \downarrow \rho_{V \rightarrow U} & & \searrow \\ \mathcal{O}_X(U) & \xrightarrow{\partial_U} & \mathcal{O}_{X,x} \end{array}$$

commute. Par la propriété de la limite inductive, on obtient donc une flèche

$$\partial_x : \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x},$$

dont on vérifie sans difficulté que c'est une dérivation : $\partial_x \in \text{Der}(\mathcal{O}_{X,x}, \mathcal{O}_{X,x})$. Intuitivement, ce ∂_x correspond à la restriction du champ de vecteurs au « voisinage infinitésimal » de x dans X . Enfin, à partir de ce ∂_x , on définit :

$$\vec{v}_{\partial,x} : \begin{aligned} \mathfrak{M}_x/\mathfrak{M}_x^2 &\longrightarrow \kappa(x) \\ f &\longmapsto (\partial_x f)(x) \end{aligned},$$

qui est bien un élément de $T_x X$. Si X est un schéma, on notera aussi les champs de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$. Dans ce cas, si $x \in X$, l'élément de $T_x X$ associé à $\vec{\mathcal{V}}$ sera noté $\vec{\mathcal{V}}(x)$. Si $X = \text{Spec } A$ est un schéma affine, on notera alors $\partial_{\vec{\mathcal{V}}} : A \longrightarrow A$ la dérivation de l'anneau des fonctions globales, définissant le champ de vecteurs.

Dans le cas affine, la dérivation « locale » ∂_x est tout simplement l'unique dérivation induite par $\partial_A : A \longrightarrow A$ sur le localisé $\mathcal{O}_{X,x} = A_{\mathfrak{p}}$. Le vecteur $\vec{v}_{\partial,x}$ s'écrit donc :

$$\vec{v}_{\partial,x} : \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_x/\mathfrak{M}_x^2 & \longrightarrow & \kappa(x) \\ \frac{g}{h} & \longmapsto & \frac{(g'h - h'g)(x)}{h^2(x)} \end{array} .$$

(3.2.4) Champs de vecteurs de \mathbf{A}_k^n . Maintenant qu'on a précisé comment l'on définissait $\vec{\mathcal{V}}(x)$ quand $\vec{\mathcal{V}}$ est un champ de vecteurs défini sur un schéma X et que $x \in X$, on peut préciser la correspondance « intuitive » qu'on a commencé à esquisser dans le paragraphe (3.2.2). On considère donc le k -schéma $X = \mathbf{A}_k^n$. Comme on l'a dit, se donner un champ de vecteurs sur X équivaut à se donner une dérivation de $k[X_1, \dots, X_n]$. Soit donc ∂ une telle dérivation. Si on suppose de plus qu'est nulle⁽¹⁾ sur k , on sait alors qu'elle est déterminée par l'image des indéterminées X_i . Ainsi, on note

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad P_i(X_1, \dots, X_n) := \partial(X_i).$$

Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ un k -point de \mathbf{A}_k^n ; autrement dit : $x \in k^n$. On peut alors calculer $\vec{\mathcal{V}}(x)$. Pour cela, on considère la k -base de $\mathfrak{M}_x/\mathfrak{M}_x^2$ donnée par les éléments

$$e_1 := X_1 - x_1 \quad \dots \quad e_i := X_i - x_i \quad \dots \quad e_n := X_n - x_n.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{V}}(x) \bullet e_i &= \vec{\mathcal{V}}(x) \bullet (X_i - x_i) \\ &= \partial(X_i - x_i)(x) \\ &= P_i(x). \end{aligned}$$

Ainsi, dans la base duale des e_i , le vecteur $\vec{\mathcal{V}}(x)$ a pour coordonnées

$$\vec{\mathcal{V}}(x) = (P_1(x), \dots, P_n(x)),$$

ce qu'on voulait.

(3.2.5) Points invariants, feuilles. On peut maintenant s'intéresser aux « points invariants sous l'action du champ de vecteurs », qu'on appellera aussi « feuilles du champ de vecteurs ». Dans cette optique, revenons un instant au cas des variétés différentielles. Si M est une variété différentielle, la donnée d'un champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$ et d'un point $m \in M$ déterminent un chemin dessiné sur M , partant du point m . Ce chemin $\gamma_m : [0, T[\longrightarrow M$ est déterminé par les conditions :

$$\gamma_m(0) = m \quad \text{et} \quad \forall t \in [0, T[, \gamma'_m(t) = \vec{\mathcal{V}}(\gamma_m(t))$$

⁽¹⁾Cette hypothèse est naturelle si $k = \mathbf{C}$, par exemple, auquel cas on s'attend à ce que les éléments de \mathbf{C} soient des constantes — *i.e.* soient de dérivée nulle.

— le caractère unique d'un chemin solution est une conséquence du théorème de Cauchy-Lipschitz. On dira alors qu'un point $m \in M$ est laissé invariant par le champ $\vec{\mathcal{V}}$ si le chemin constant

$$\gamma_m^{\text{cst}} : \begin{array}{l} \mathbf{R}_{\geq 0} \longrightarrow M \\ t \longmapsto m \end{array}$$

est solution du problème précédent. Une condition nécessaire et suffisante pour que m soit laissé invariant est :

$$m \text{ est laissé invariant par } \vec{\mathcal{V}} \iff \vec{\mathcal{V}}(m) = \vec{0}.$$

Dans la même veine, on a aussi la notion de courbe dans M invariante par $\vec{\mathcal{V}}$ (on appelle *courbe* un \mathbf{R} -point de M). C'est : une courbe $\gamma : \mathbf{R} \longrightarrow M$ est dite *invariante par $\vec{\mathcal{V}}$* si

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \vec{\mathcal{V}}(\gamma(t)) \in \text{Vect}(\gamma'(t)).$$

Plus généralement, on pourra dire qu'un \mathbf{R}^n -point $\varphi : \mathbf{R}^n \longrightarrow M$ est *invariant par $\vec{\mathcal{V}}$* si

$$\forall \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n, \quad \vec{\mathcal{V}}(\varphi(\mathbf{t})) \in \text{Im}(T_{\mathbf{t}}\varphi).$$

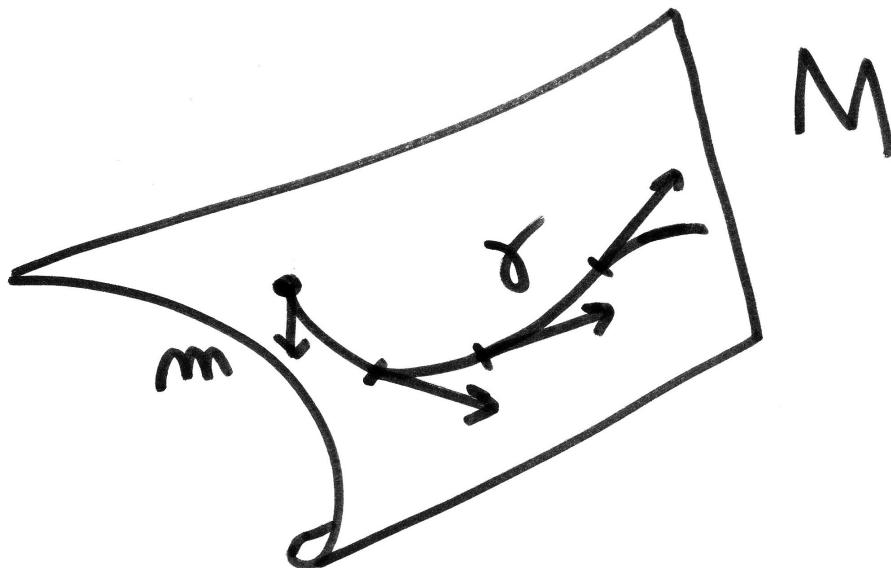


FIG. 3 – L'image $\{\gamma_m(t)\}_{t \geq 0}$ de la trajectoire du point m sous l'action d'un champ de vecteurs.

Dans le cas des schémas, la situation va être plus intéressante. En effet, en plus de la notion classique de point, celle de « $m \in M$ », on dispose de la notion de point non-fermé. Intuitivement, un point non-fermé correspond à une sous-variété algébrique (irréductible) du schéma X . En analogie avec le cas des variétés différentielles, on définit :

Définition 3.2.3. Soit $\mathcal{X} = (X, \vec{\mathcal{V}})$ un schéma muni d'un champ de vecteurs. Un point $x \in X$ est dit invariant sous le champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$ si $\vec{\mathcal{V}}(x) = \vec{0}$.

Une feuille de \mathcal{X} (on dira aussi une feuille pour le champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$) est un point invariant de X sous le champ $\vec{\mathcal{V}}$.

On a alors la très jolie proposition suivante :

Proposition 3.2.4. *Soit A un anneau et soit $X := \text{Spec } A$ un schéma, muni d'un champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$ — ie soit ∂_A une dérivation de A . Soit $x \in X$ — ie soit x un idéal premier de A . Alors :*

$$\begin{aligned} x \text{ est invariant sous le champ de vecteurs } \vec{\mathcal{V}} \\ \Updownarrow \\ x \text{ est un idéal différentiel de } (A, \partial_A) \end{aligned}$$

Remarques. — Cette proposition est encore vraie si X est un schéma quelconque ; elle s'exprime alors comme suit.

Proposition 3.2.5. *Soient X un schéma muni d'un champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$ et $x \in X$. Alors x est invariant sous le champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$ si, et seulement si, il existe une carte affine dans laquelle x est un idéal différentiel. Si c'est le cas, alors x est un idéal différentiel dans toute carte affine.*

En effet, le fait pour x d'être un point invariant sous le champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$, ie le fait que $\vec{\mathcal{V}}(x) \in T_x X$ soit nul, se teste localement autour de x : il suffit donc pour le vérifier de se placer dans un ouvert affine contenant x .

— Un autre façon de généraliser cette proposition au cas non-affine est la suivante : un point x d'un schéma X muni d'un champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$ est invariant sous $\vec{\mathcal{V}}$ si, et seulement si, le faisceau d'idéaux qui le définit est un faisceau d'idéaux *differentiels*. \diamond

Démonstration de la proposition 3.2.4. — Soit (A, ∂_A) un anneau différentiel. Soit \mathfrak{p} un idéal premier de A . On note aussi $x = \mathfrak{p}$ et $X = \text{Spec } A$. Alors, x est invariant sous le champ de vecteurs défini par ∂_A si, et seulement si, l'application

$$\vec{v}_{\partial, x} : \begin{array}{ccc} \mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2 & \longrightarrow & \kappa(x) \\ \frac{g}{h} & \longmapsto & \frac{(g'h - h'g)(x)}{h^2(x)} \end{array} .$$

est nulle. Autrement dit si pour tout $g \in \mathfrak{p}$ et tout $h \notin \mathfrak{p}$

$$(g'h - h'g)(x) = 0$$

$$\text{ie } g'h - h'g \in \mathfrak{p}.$$

En particulier, en prenant g un élément quelconque de \mathfrak{p} et $h = 1$, on voit que cette condition est équivalente à

$$\forall g \in \mathfrak{p}, \quad g' \in \mathfrak{p}$$

— autrement dit à : \mathfrak{p} est un idéal différentiel. ■

(3.2.6) Un exemple. Considérons le schéma affine $\mathbf{A}_{\mathbb{C}}^2$, dont on note l'anneau $\mathbb{C}[x, y]$. On cherche un champ de vecteurs défini sur $\mathbf{A}_{\mathbb{C}}^2$ admettant le point non-fermé

$$\eta = (x^3 + y^2) \subset \mathbb{C}[x, y]$$

pour feuille (*cf. figure 4*). Pour cela, on se dit qu'il suffit de trouver un champ de vecteurs qui soit tangent en tout point de la courbe \mathcal{C} définie par $x^3 + y^2 = 0$ à celle-ci. Si on note $\Psi(x, y) = x^3 + y^2$, la courbe \mathcal{C} est une courbe de niveau de la fonction Ψ . Ainsi, on sait

qu'au point $(a, b) \in \mathcal{C}$ un vecteur tangent à \mathcal{C} est orthogonal à $\nabla_{(a,b)}\Psi$. Soit $(a, b) \in \mathcal{C}$. On a :

$$\nabla_{(a,b)}\Psi = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}(a, b), \frac{\partial \Psi}{\partial y}(a, b) \right) = (3a^2, 2b).$$

Un vecteur orthogonal à $\nabla_{(a,b)}\Psi$ est

$$\vec{\mathcal{V}}(a, b) = (-2b, 3a^2).$$

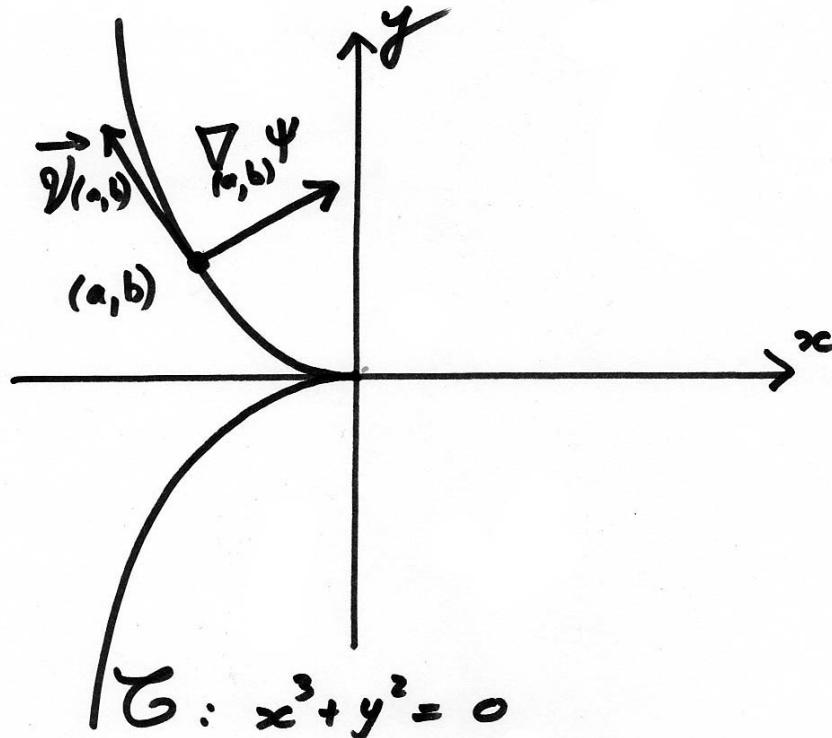


FIG. 4 – $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^2$, le point non-fermé η et le gradient $\nabla_{(a,b)}\Psi$ (traces sur \mathbf{R}).

Ainsi, on considère le champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$ défini par la relation ci-dessus. Autrement dit, on munit l'anneau $\mathbf{C}[x, y]$ de la dérivation

$$\partial(x) := -2y \quad \text{et} \quad \partial(y) := 3x^2.$$

On vérifie alors que le point $\eta = (x^3 + y^2)$ est invariant sous le champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$:

$$\partial(x^3 + y^2) = 3x^2x' + 2yy' = -6x^2y + 6yx^2 = 0$$

et donc l'idéal $(x^3 + y^2)$ est bien un idéal différentiel. À partir de ce premier champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$ répondant à notre question, on peut construire une classe de champs de vecteurs, déduits de $\vec{\mathcal{V}}$, qui répondent eux-aussi à notre question. Vu ce qui a été expliqué jusqu'à présent, on s'attend à ce qu'un champ de vecteurs $\vec{\mathcal{W}}$ tel que

$$\forall (a, b) \in \mathbf{C}^2, \quad \vec{\mathcal{V}}(a, b) \text{ et } \vec{\mathcal{W}}(a, b) \text{ soient colinéaires}$$

satisfasse aussi à la condition que l'on cherche à vérifier, à savoir que η soit une feuille pour $\vec{\mathcal{W}}$. Soit donc Q une fonction scalaire algébrique définie sur $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^2$, ie

$$Q \in \mathbf{C}[x, y].$$

On définit un nouveau champ de vecteurs $\vec{\mathcal{W}}_Q$ sur \mathbf{A}_C^2 par la formule

$$\partial_{\vec{\mathcal{W}}_Q}(x) := -2y \cdot Q(x, y) \quad \text{et} \quad \partial_{\vec{\mathcal{W}}_Q}(y) := 3x^2 \cdot Q(x, y).$$

Vérifions que η est encore une feuille pour ce champ de vecteurs :

$$\partial_{\vec{\mathcal{W}}_Q}(x^3 + y^2) = 3x^2x' + 2yy' = (-6x^2y + 6yx^2) Q(x, y) = 0.$$

L'idéal $(x^3 + y^2)$ est donc bien invariant sous l'action de la dérivation $\partial_{\vec{\mathcal{W}}_Q}$.

On peut maintenant se demander si on a obtenu de la sorte tous les champs de vecteurs laissant η invariant. La réponse est négative puisque le champ de vecteurs $\vec{\mathcal{Z}}$ défini sur \mathbf{A}_C^2 par la formule

$$\partial_{\vec{\mathcal{Z}}}(x) = 2x \quad \text{et} \quad \partial_{\vec{\mathcal{Z}}}(y) = 3y$$

laisse invariant η sans être du type $\vec{\mathcal{W}}_Q$. En effet, le calcul

$$\partial_{\vec{\mathcal{Z}}}(x^3 + y^2) = 3x^2x' + 2yy' = 6x^3 + 6y^2 = 6(x^3 + y^2)$$

montre que l'idéal $(x^3 + y^2)$ est différentiel.

3.3 Catégorie des schémas avec champ de vecteurs

Dans ce qui suit, on définit la catégorie des schémas avec champ de vecteurs.

(3.3.1) Espaces différentiellement annelés. Si X est un schéma muni d'un champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$, alors, pour tout ouvert U de X , l'anneau des sections $\mathcal{O}_X(U)$ hérite via le champ de vecteurs d'une structure d'anneau différentiel. Par ailleurs, par définition d'un champ de vecteurs, les applications de restriction du faisceau sont des morphismes d'anneaux différentiels. Autrement dit, le champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$ munit naturellement le faisceau \mathcal{O}_X d'une structure de faisceau en anneaux différentiels. On dit alors que X , muni de ce faisceau d'anneaux différentiels est un *espace différentiellement annelé*⁽²⁾.

Si maintenant $\mathcal{X} = (X, \mathcal{O}_X)$ et $\mathcal{Y} = (Y, \mathcal{O}_Y)$ sont deux espaces différentiellement annelés, on a une notion naturelle de morphisme de \mathcal{X} dans \mathcal{Y} .

(3.3.2) Morphismes entre schémas munis de champs de vecteurs. Soient $\mathcal{X} = (X, \vec{\mathcal{V}})$ et $\mathcal{Y} = (Y, \vec{\mathcal{W}})$ deux schémas munis de champ de vecteurs. On appelle *morphisme de \mathcal{X} dans \mathcal{Y}* tout morphisme de schémas $f : X \rightarrow Y$ qui soit aussi un morphisme pour les structures d'espace différentiellement annelé de X et Y . Cela signifie que pour tout ouvert V de Y , on demande que le morphisme

$$f_V^\# : \mathcal{O}_Y(V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$$

soit un morphisme d'anneaux différentiels. Autrement, cela signifie que pour tout ouvert V de Y , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Y(V) & \xrightarrow{f_V^\#} & \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) \\ \partial_V \downarrow & & \downarrow \partial_{f^{-1}(V)} \\ \mathcal{O}_Y(V) & \xrightarrow{f_V^\#} & \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) \end{array}$$

⁽²⁾Évidemment, réciproquement, si X est un schéma, alors, munir X d'une structure d'espace différentiellement annelé (compatible à la structure de schéma), c'est la même chose que munir X d'un champ de vecteurs.

commute. Dans le cas où $X = \text{Spec } A$ et $Y = \text{Spec } B$ sont affines, cela revient à demander que le morphisme d'algèbres $B \rightarrow A$ associé à f soit un morphisme d'algèbres différentielles.

Intuitivement, si \mathcal{X} et \mathcal{Y} sont deux schémas munis de champs de vecteurs, dire que $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ est un morphisme revient à dire que pour tout $x \in X$, le vecteur tangent $\vec{\mathcal{V}}(x)$ est envoyé par f sur $\vec{\mathcal{W}}(f(x))$. Ou, autrement dit, que le champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$ se projette par f sur le champ de vecteurs $\vec{\mathcal{W}}$ de Y . Plus précisément :

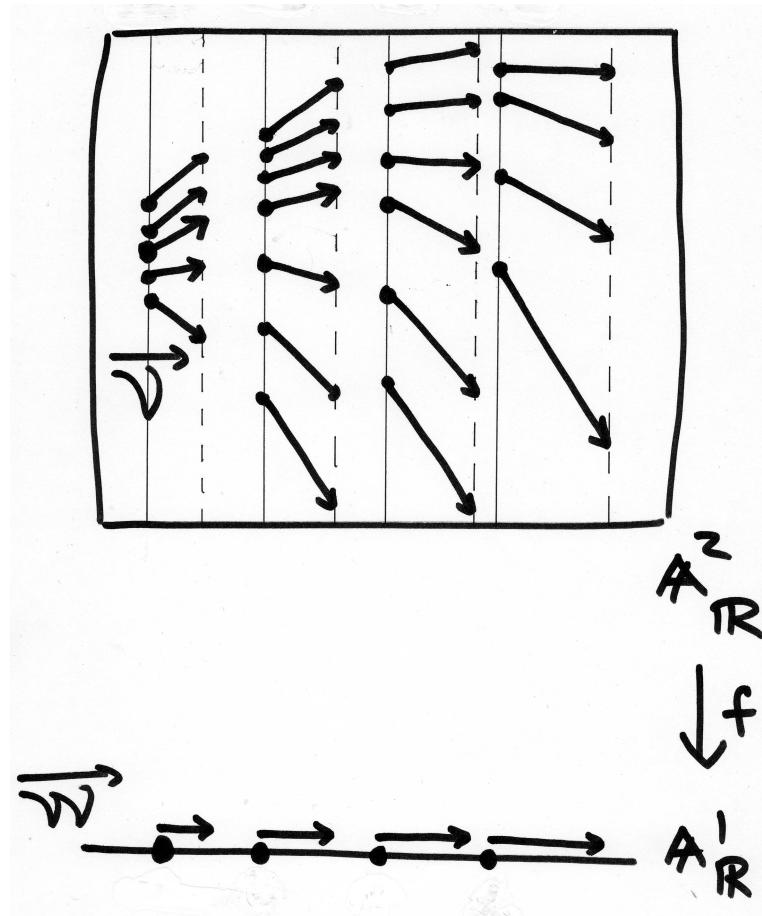


FIG. 5 – Exemple de morphisme compatible aux champs de vecteurs.

Proposition 3.3.1. Soient $\mathcal{X} = (X, \vec{\mathcal{V}})$ et $\mathcal{Y} = (Y, \vec{\mathcal{W}})$ deux schémas munis de champs de vecteurs et $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme. Alors

$$\forall x \in X, \quad T_x f \bullet \vec{\mathcal{V}}(x) = \vec{\mathcal{W}}(f(x)).$$

Démonstration. — Soient $(X, \vec{\mathcal{V}})$ et $(Y, \vec{\mathcal{W}})$ deux schémas munis d'un champ de vecteurs, soit f un morphisme entre eux, et soit $x \in X$. Comme la proposition qu'on veut montrer est de nature locale, il suffit de la démontrer dans le cas affine. On considère donc deux anneaux différentiels A et B , ainsi qu'un morphisme d'anneaux différentiels $\varphi : B \rightarrow A$. Soit \mathfrak{p} un

idéal premier de A . On note aussi $x = \mathfrak{p}$, f le morphisme entre $X := \text{Spec } A$ et $Y := \text{Spec } B$ et $f(x)$ l'idéal $\varphi^{-1}\mathfrak{p}$. Le morphisme φ induit un morphisme entre les localisés

$$B_{\varphi^{-1}\mathfrak{p}} \longrightarrow A_{\mathfrak{p}}$$

et entre les espaces cotangents

$$\mathfrak{M}_{\varphi^{-1}\mathfrak{p}} / \mathfrak{M}_{\varphi^{-1}\mathfrak{p}}^2 \longrightarrow \mathfrak{M}_{\mathfrak{p}} / \mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}^2.$$

Ce morphisme induit lui-même un morphisme

$$T_x X \longrightarrow T_{f(x)} Y$$

qui correspond à $T_x f$, l'application tangente à f en x . Le vecteur $\vec{\mathcal{V}}(x) \in T_x X$ est la trace sur $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}} / \mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}^2$ de l'application

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{\mathfrak{p}} &\longrightarrow A/\mathfrak{p} \\ \psi &\longmapsto \psi' \bmod \mathfrak{p} \end{aligned}.$$

La définition est similaire pour $\vec{\mathcal{W}}(f(x))$. Les deux vecteurs

$$\vec{\mathcal{W}}(f(x)) \quad \text{et} \quad T_x f \bullet \vec{\mathcal{V}}(x)$$

coïncident car le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_{\varphi^{-1}\mathfrak{p}} & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{\mathfrak{p}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\varphi} & A \\ \downarrow \partial_B & & \downarrow \partial_A \\ B & \xrightarrow{\varphi} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ B/\varphi^{-1}\mathfrak{p} & \longrightarrow & A/\mathfrak{p}. \end{array}$$

■

(3.3.3) Catégorie des schémas munis de champ de vecteurs. La catégorie obtenue est appelée *catégorie des schémas munis de champ de vecteurs*.⁽³⁾ On la note \mathbf{Sch}^∂ . Si $\mathcal{X} = (X, \vec{\mathcal{V}})$ est un schéma muni d'un champ de vecteurs, alors on note, pour tout ouvert U de X ,

$$\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U) := (\mathcal{O}_X(U), \partial_{\vec{\mathcal{V}}|_U})$$

l'anneau différentiel obtenu en munissant l'anneau $\mathcal{O}_X(U)$ de la dérivation induite par $\vec{\mathcal{V}}$. En particulier, on dispose d'un foncteur « section globale » de \mathbf{Sch}^∂ dans \mathbf{Ann}^∂ qui à X associe $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(X)$. Ce foncteur établit une anti-équivalence de catégories entre \mathbf{Ann}^∂ et la catégorie des schémas *affines* munis d'un champ de vecteurs.

⁽³⁾Buium, dans [Bui86], l'appelle *catégorie des ∂ -schémas*

Notation 3.3.2. Soit A un anneau différentiel. On note $\text{Spec}^\partial A$ le spectre de A muni du champ de vecteurs canoniquement associé à la dérivation de A . Autrement dit, on a défini un foncteur covariant

$$\text{Spec}^\partial : (\mathbf{Ann}^\partial)^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sch}^\partial.$$

Dans le cas non-différentiel, on sait (*cf.* par exemple l'exercice II.2.4 de [Har77]) que $\text{Spec} : \mathbf{Ann}^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Sch}$ admet pour adjoint à gauche le foncteur des sections globales ; dans le cas différentiel, il en est de même :

$$(\mathbf{Ann}^\partial)^{\text{op}} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Spec}^\partial \in \omega} \\ \xleftarrow[\mathcal{O}(-) \in *]{} \end{array} \mathbf{Sch}^\partial$$

est une adjonction.⁽⁴⁾

(3.3.4) Produits fibrés. De la même façon que dans [EGA I], par recollements successifs, on peut montrer :

Proposition 3.3.3. La catégorie \mathbf{Sch}^∂ admet les produits fibrés.

Plus précisément, si k est un anneau différentiel et si A et B sont deux k -algèbres différentielles, alors on construit le produit fibré

$$\text{Spec}^\partial A \otimes_{\text{Spec}^\partial k} \text{Spec}^\partial B$$

en considérant la k -algèbre différentielle $A \otimes_k B$.

(3.3.5) Catégorie relative. Soit \mathcal{S} un schéma muni d'un champ de vecteurs. Alors, on notera

$$\mathbf{Sch}_{\mathcal{S}}^\partial$$

la catégorie des schémas munis d'un champ de vecteurs au-dessus de \mathcal{S} . Ses objets sont les schémas munis d'un champ de vecteurs \mathcal{X} avec un morphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & & \\ \downarrow & & \\ \mathcal{S}. & & \end{array}$$

Remarquons bien, en particulier, que cela impose de sévères restrictions aux champs de vecteurs possibles sur X . On peut voir de tels objets comme des schémas X au-dessus de S , munis d'un champ de vecteurs qui relève celui de S . Lorsque \mathcal{S} est le spectre d'un anneau différentiel k , on note aussi

$$\mathbf{Sch}_k^\partial$$

cette catégorie. On définit aussi :

⁽⁴⁾ En fait, de façon plus générale, on a une adjonction

$$(\mathbf{Ann}^\partial)^{\text{op}} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Spec}^\partial \in \omega} \\ \xleftarrow[\mathcal{O}(-) \in *]{} \end{array} \mathbf{EspLocAnn}_k^\partial.$$

Définition 3.3.4. Soit \mathcal{S} un schéma muni d'un champ de vecteurs, et soit X un schéma défini au-dessus de S . Un \mathcal{S} -champ de vecteurs pour X est un champ de vecteurs de X compatible à celui de \mathcal{S} .

Dans le cas où k est un anneau différentiel et où $\mathcal{S} = \text{Spec}^{\partial} k$, on appelle aussi les \mathcal{S} -champs de vecteurs : k -champs de vecteurs.

Remarques. — Si X est un schéma, un champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$ défini sur X correspond à un section globale du fibré tangent de X

$$T_X := \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X^1, \mathcal{O}_X).$$

$$\begin{array}{ccc} & T_X & \\ s \swarrow \downarrow & & \\ & X & \end{array}$$

De même, si S est un schéma de base, qu'on munit du champ de vecteurs nul, et si X est un schéma au-dessus de S , alors, un champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$ sur X , compatible avec le champ nul de S , correspond à un section globale du fibré tangent relatif de X/S

$$T_{X/S} := \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X/S}^1, \mathcal{O}_X).$$

$$\begin{array}{ccc} & T_{X/S} & \\ s \swarrow \downarrow & & \\ & X/S & \end{array}$$

Cela résulte de la proposition (16.5.3) de [EGA IV.4].

— Si, cette fois, \mathcal{S} est un schéma muni d'un champ de vecteurs quelconque, et que X est un schéma défini au-dessus de S , alors, l'ensemble des champs de vecteurs de X compatibles à celui de \mathcal{S} a une structure (en un sens à préciser) de $T_{X/S}$ -torseur : si $\vec{\mathcal{V}}$ est un tel champ de vecteurs et que $\vec{\mathcal{V}}_0$ est un champ de vecteurs sur X qui se projette sur le champ nul sur S , alors, $\vec{\mathcal{V}} + \vec{\mathcal{V}}_0$ est encore compatible au champ de vecteurs de \mathcal{S} . ◇

3.4 Trajectoire d'un point dans un schéma muni d'un champ de vecteurs

(3.4.1) Cas des variétés différentielles. On a vu, dans le cas des variétés différentielles, qu'un point m sur une variété différentielle M munie d'un champ de vecteur $\vec{\mathcal{V}}$ déterminait de façon unique un chemin maximal

$$\gamma : I_\gamma \longrightarrow M$$

invariant sous le champ $\vec{\mathcal{V}}$ — en quelque sorte la *trajectoire du point m sous l'action du champ $\vec{\mathcal{V}}$* . Plus précisément, ce résultat s'énonce ainsi :

Théorème 3.4.1 (Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les variétés différentielles). Soient M une variété différentielle munie d'un champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$ et $m \in M$. Alors, l'ensemble

$$\left\{ \gamma : I \longrightarrow M \quad \middle| \quad \begin{array}{l} \forall t \in I, \gamma'(t) = \vec{\mathcal{V}}(\gamma(t)) \\ \gamma(0) = m \end{array} \right\},$$

ordonné par la relation

$$(\gamma : I \longrightarrow M) \leq (\chi : J \longrightarrow M) \iff (I \subset J \text{ et } \chi|_I = \gamma),$$

admet un plus grand élément.

On veut faire la même chose pour les schémas. On a dans ce cadre une notion qui peut correspondre à celle de chemin : celle de point non-fermé. Ainsi, si $\eta \in X$ est un point non-fermé d'un schéma X , qui est une feuille pour $\vec{\mathcal{V}}$, et qui est de dimension 1 ; et si « $x \in \eta$ » est un « point classique » sur η , non-invariant par $\vec{\mathcal{V}}$, on a envie de dire que η est la trajectoire de x .

Avant d'aller plus loin dans cette idée, clarifions ce que veut dire « $x \in \eta$ » lorsque x est un point « classique » et η est un point non-fermé. Déjà, disons tout de suite que ce qu'on a appelé plus haut « point classique », c'est-à-dire un $x \in X$ qu'on peut bien représenter par un point, correspond exactement à la notion de point fermé : un *point classique* $x \in X$ est un élément de X tel que le singleton $\{x\}$ est fermé. Les points qui restent, les points non-fermés η , c'est-à-dire ceux tels que l'ensemble $\{\eta\}$ n'est pas fermé, sont exactement les points qui définissent des sous-variétés irréductibles de X de dimension non-nulle. Intuitivement, cette sous-variété correspond à l'ensemble $\overline{\{\eta\}} \subset X$. Soient maintenant x et η deux éléments de X , un schéma. Dire « $x \in \eta$ » n'a pas de sens. En revanche, on dit que η se spécialise en x (ou que x est une spécialisation de η — ou encore que η est une généralisation de x), et on note $\eta \rightsquigarrow x$ si

$$x \in \overline{\{\eta\}}.$$

On peut définir un ordre sur X à l'aide de cette flèche de spécialisation en disant :

$$x \leq \eta \iff \eta \rightsquigarrow x.$$

Le seul point difficile à vérifier, pour montrer que \leq définit bien un ordre, est l'antisymétrie : a-t-on $x = y$ si $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$? La réponse est oui — cf. la proposition (2.1.5) de [EGA_I]. Si $X = \text{Spec } A$ est un schéma affine et $x, \eta \in X$ sont deux idéaux premiers de A , alors, on a :

$$\eta \rightsquigarrow x \iff \eta \subset x.$$

L'ordre défini sur les points est donc l'ordre opposé de l'inclusion entre idéaux. Cette notion de spécialisation est tout à fait intéressante et donne lieu à des résultats tels que :

Proposition 3.4.2. Soit X un schéma. Soient $x \in X$ et $U \subset_{\Theta} X$ un voisinage ouvert de x . Alors :

$$\forall \eta \in X, \quad (\eta \rightsquigarrow x \implies \eta \in U).$$

En fait, cette proposition est vraie dans n'importe quel espace topologique — et nous le démontrerons dans de cadre. En effet, la définition

$$\eta \rightsquigarrow x \iff x \in \overline{\{\eta\}}$$

peut tout à fait être énoncée dans ce cadre plus général. C'est d'ailleurs le point de vue adopté par Grothendieck dans [EGA_I, chapitre 0, §2].

Démonstration. — Soient ainsi X un espace topologique et $x \in X$. Soit U un ouvert de X contenant x . Soit $\eta \rightsquigarrow x$ une généralisation de x . Supposons que η n'appartienne pas à U . Le singleton $\{\eta\}$ serait alors un sous-ensemble du fermé $X \setminus U$. En particulier, on aurait

$$\overline{\{\eta\}} \subset X \setminus U.$$

Ainsi, x , qui est un élément de $\overline{\{\eta\}}$ n'appartiendrait pas à U : c'est absurde. ■

Cette proposition peut aussi s'écrire, si X est un espace topologique et $x \in X$:

$$\{\eta \in X \mid \eta \rightsquigarrow x\} \subset \bigcap_{\substack{U \subseteq X \\ x \in U}} U.$$

On peut en fait montrer que cette inclusion est une égalité. C'est ce que dit la proposition qui suit.

Proposition 3.4.3. *Soient X un espace topologique et $x \in X$. Alors :*

$$\{\eta \in X \mid \eta \rightsquigarrow x\} = \bigcap_{\substack{U \subseteq X \\ x \in U}} U.$$

Démonstration. — On n'a plus qu'une inclusion à montrer. Soit donc $\eta \in X$ un élément qui ne se spécialise pas en x . Montrons qu'il n'appartient pas à l'intersection de tous les ouverts contenant x : il suffit de trouver un ouvert U_0 contenant x et ne contenant pas η . Comme η ne se spécialise pas en x , on a $x \notin \overline{\{\eta\}}$; ainsi, l'ouvert $U_0 = X \setminus \overline{\{\eta\}}$ convient. ■

Évidemment, on a des énoncés duals pour les fermés et pour les spécialisations. On retiendra, en particulier, de cette discussion les deux principes suivants :

*Un ouvert est stable par généralisation.
Un fermé est stable par spécialisation.*

On peut maintenant énoncer le théorème qui définit les trajectoires dans le cas des schémas :

Théorème 3.4.4 (Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les schémas). *Soit X un \mathbf{Q} -schéma, muni d'un champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$. Soit $x \in X$. Alors, l'ensemble*

$$\left\{ \eta \in X \quad \begin{array}{|c} \hline \eta \rightsquigarrow x \\ \text{et} \\ \eta \text{ est une feuille de } \vec{\mathcal{V}} \\ \hline \end{array} \right\}$$

possède un plus petit élément. On l'appelle trajectoire de x sous le champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$ et on le note $Traj_{\vec{\mathcal{V}}}(x)$.

Remarque. — Pour définir la trajectoire, dans ce cadre-là, il faut que pour tout ouvert U de X , l'anneau $\mathcal{O}_X(U)$ vérifie la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbf{N}_{>0}, \quad n \in \mathcal{O}_X(U)^\times.$$

Cela équivaut à $\mathbf{Q} \subset \mathcal{O}_X(U)$. En dernier ressort, cela revient à demander que X soit un \mathbf{Q} -schéma. Cette hypothèse « X est un \mathbf{Q} -schéma » reviendra donc régulièrement dans le reste de ce travail, à chaque fois qu'on aura besoin de parler de ou d'utiliser les trajectoires.

Notons tout de même, comme on le verra dans la section (3.5), qu'on peut se passer de cette hypothèse. ◇

Ce théorème repose sur le lemme et la proposition suivants :

Lemme 3.4.5. (i) Soient A un anneau et \mathfrak{p} un idéal premier de A . Alors, la flèche

$$\begin{array}{ccc} \text{idéaux de } A & \longrightarrow & \text{idéaux de } A_{\mathfrak{p}} \\ I & \longmapsto & IA_{\mathfrak{p}} \end{array}$$

identifie les idéaux premiers de $A_{\mathfrak{p}}$ avec les idéaux premiers de A contenus dans \mathfrak{p} .

(ii) En langage géométrique, cela se dit : si X un schéma et si $x \in X$, alors

$$\mathrm{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \quad \text{et} \quad \{\eta \in X \mid \eta \rightsquigarrow x\}$$

sont en correspondance bi-univoque.

Démonstration. — Il s'agit d'un énoncé classique. ■

Proposition 3.4.6. Soient A une \mathbf{Q} -algèbre différentielle et \mathfrak{p} un idéal premier minimal de A . Alors, \mathfrak{p} est un idéal différentiel.

Démonstration. — Cette proposition ainsi que sa démonstration sont issus du lemme (1.18) de l'article [Gil02] de Henri Gillet. On trouve aussi le résultat dans [Bui86] (c'est le point 2) du lemme (2.1)), qui renvoie pour la démonstration à [Rad71], par exemple. Soient donc A une \mathbf{Q} -algèbre différentielle et \mathfrak{p} un idéal premier minimal de A . Grâce au lemme 3.4.5, on voit que $A_{\mathfrak{p}}$ possède un unique idéal premier, à savoir $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. Maintenant, l'idéal (0) de $A_{\mathfrak{p}}$ est un idéal différentiel. On sait alors, grâce à la proposition 1.2.1, que le radical de (0) , l'idéal $\sqrt{(0)}$, est encore différentiel. Comme c'est aussi un idéal premier, on a nécessairement que $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = \sqrt{(0)}$ — et donc, \mathfrak{p} est un idéal différentiel. ■

En termes géométriques, cette proposition se formule :

Proposition 3.4.7. Soit X un \mathbf{Q} -schéma muni d'un champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$. Alors, les « composantes irréductibles de X sont stables sous le champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$ ».

Démonstration. — En effet, soit X un \mathbf{Q} -schéma. Soit X_0 une composante irréductible de X , ie une sous-partie de X irréductible maximale. On sait que X_0 est fermée et donc, d'après la proposition (2.1.5) de [EGAIV], qu'il existe un unique $\eta \in X$ tel que $X_0 = \overline{\{\eta\}}$. L'énoncé exact, en termes mathématiques, de la proposition est alors :

$$\eta \text{ est invariant sous le champ } \vec{\mathcal{V}}.$$

Pour le vérifier, plaçons-nous dans un ouvert affine U isomorphe à $\mathrm{Spec} A$ contenant η . Le point $\eta \in U$ est un alors un point maximal (pour l'ordre \leq défini plus haut) parmi les points de U . En effet, s'il existait un point $\eta' \in U$ strictement plus grand que η , ce point définirait un fermé irréductible de U , à savoir $\overline{\{\eta'\}}^U$, strictement plus grand que $\overline{\{\eta\}}^U = X_0 \cap U$. En particulier, on aurait

$$\overline{\{\eta\}}^X \subsetneq \overline{\{\eta'\}}^X,$$

ce qui est absurde. Puis, si on exprime dans $\mathrm{Spec} A$ la propriété pour η d'être un point maximal parmi les points de U , on obtient que η correspond dans $\mathrm{Spec} A$ à un idéal premier minimal. La proposition précédente nous dit alors que cet idéal est nécessairement différentiel : en termes géométriques, elle nous dit donc que η est une feuille pour $\vec{\mathcal{V}}$. ■

Démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz pour les schémas. — Soit X un \mathbf{Q} -schéma muni d'un champ de vecteurs \mathcal{V} . Comme tout voisinage ouvert de x contient tous les points $\eta \in X$ qui se spécialisent en x — on vient de le voir dans la proposition 3.4.2, on se ramène au cas où $X = \text{Spec } A$. Dans ce cas, $x = \mathfrak{p}$ est un idéal premier de A , et les points η qui se spécialisent en \mathfrak{p} sont exactement les idéaux \mathfrak{q} contenus dans \mathfrak{p} . Notre question est ainsi la suivante :

Étant donné A un anneau différentiel et \mathfrak{p} un idéal premier de A , l'ensemble $\{\mathfrak{q} \in \text{Spec } A \mid \mathfrak{q} \text{ est un idéal différentiel et } \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}\}$ admet-il un plus grand élément ?

La réponse qu'on donne à cette question peut être décrite en deux étapes.

Étape 1 : La première chose à voir est si l'ensemble considéré,

$$E(\mathfrak{p}) := \{\mathfrak{q} \mid \mathfrak{q} \text{ est un idéal premier différentiel et } \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}\}$$

est non-vide. Pour prouver cela, on montre que A possède un idéal premier minimal⁽⁵⁾ \mathfrak{p}_0 contenu dans \mathfrak{p} . On le fait en utilisant le lemme de Zorn. En effet, soit $\{\mathfrak{q}_i\}_{i \in I}$ un ensemble totalement ordonné d'idéaux premiers contenus dans \mathfrak{p} . Alors, l'idéal

$$\mathfrak{q} := \bigcap_{i \in I} \mathfrak{q}_i$$

est un idéal premier — et, évidemment, contenu dans \mathfrak{p} . Pour le voir, considérons $x, y \in A$ tels que $xy \in \mathfrak{q}$. On veut montrer que $x \in \mathfrak{q}$ ou $y \in \mathfrak{q}$. Supposons que $x \notin \mathfrak{q}$: soit ainsi $i_0 \in I$ tel que $x \notin \mathfrak{q}_{i_0}$. Les idéaux \mathfrak{q}_i étant tous comparables, on a :

$$\mathfrak{q} = \bigcap_{\substack{i \in I \\ \mathfrak{q}_i \subset \mathfrak{q}_{i_0}}} \mathfrak{q}_i.$$

Soit maintenant $i \in I$ tel que $\mathfrak{q}_i \subset \mathfrak{q}_{i_0}$. On a $xy \in \mathfrak{q}_i$. Donc x ou y est dans \mathfrak{q}_i . Mais, comme $\mathfrak{q}_i \subset \mathfrak{q}_{i_0}$, on ne peut pas avoir $x \in \mathfrak{q}_i$ — et donc on a $y \in \mathfrak{q}_i$. Ainsi :

$$y \in \bigcap_{\substack{i \in I \\ \mathfrak{q}_i \subset \mathfrak{q}_{i_0}}} \mathfrak{q}_i = \mathfrak{q}.$$

Le lemme de Zorn nous assure alors que A possède un idéal premier minimal \mathfrak{p}_0 inclus dans \mathfrak{p} , et la proposition 3.4.6 nous garantit que \mathfrak{p}_0 est un idéal différentiel. Autrement dit, $\mathfrak{p}_0 \in E(\mathfrak{p})$.

Étape 2 : Montrons maintenant que $E(\mathfrak{p})$ possède un plus grand élément. Comme il est non-vide — on vient de le montrer — et qu'il est inductif (c'est facile à vérifier), le lemme de Zorn s'applique : $E(\mathfrak{p})$ possède un élément maximal \mathfrak{q}_0 . Supposons que \mathfrak{q}_0 ne soit pas le plus grand élément de $E(\mathfrak{p})$: il existe donc $\mathfrak{q}_1 \in E(\mathfrak{p})$ tel que $\mathfrak{q}_1 \not\subseteq \mathfrak{q}_0$. Mais alors, l'idéal $\mathfrak{q}_0 + \mathfrak{q}_1$, strictement plus grand que \mathfrak{q}_0 , est un idéal différentiel inclus dans \mathfrak{p} . Et, la proposition 1.4.2 du chapitre 1 nous assure que les éléments maximaux de

$$\{J \mid J \text{ idéal différentiel de } A \text{ et } \mathfrak{q}_0 + \mathfrak{q}_1 \subset J \subset \mathfrak{p}\}$$

sont des idéaux premiers. Un tel idéal \mathfrak{q}_2 (qui existe, encore une fois, par le lemme de Zorn) vient alors contredire la maximalité de \mathfrak{q}_0 , ce qui achève la preuve du théorème. ■

⁽⁵⁾Cet idéal premier minimal correspond à la composante irréductible à laquelle x appartient.

Remarque. — L'étape 1 de la démonstration ci-dessus peut être menée d'une autre manière, plus rapide mais moins géométrique. On veut montrer, si A est un anneau différentiel et $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ que l'ensemble

$$E(\mathfrak{p}) := \{\mathfrak{q} \in \text{Spec } A \mid \mathfrak{q} \text{ est un idéal différentiel et } \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}\}$$

est non-vide. En appliquant la proposition 1.4.1, comme dans l'étape 2, on démontre que les éléments maximaux de

$$\{J \mid J \text{ idéal différentiel de } A \text{ et } J \subset \mathfrak{p}\}$$

sont des idéaux premiers. En particulier, on obtient que ces éléments maximaux — qui existent par Zorn — sont des éléments de $E(\mathfrak{p})$. \diamond

(3.4.2) La version « algèbre commutative différentielle » du cas affine de ce théorème, qui se révèle être une proposition tout à fait remarquable, est pour nous l'occasion d'introduire la définition suivante :

Proposition-Définition 3.4.8. *Soient A une \mathbf{Q} -algèbre différentielle et \mathfrak{p} un idéal premier de A . Alors, l'ensemble*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{q} \text{ idéal différentiel de } A \\ \mid \mathfrak{q} \text{ est premier} \\ \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p} \end{array} \right\}$$

admet un plus grand élément. On l'appelle idéal différentiel associé à \mathfrak{p} , et on le note \mathfrak{p}^δ .

Cette proposition, sous une forme très différente, peut être trouvée dans l'article [Kei77] de William Keigher. En effet, dans cet article, Keigher introduit, si A est un anneau différentiel et si X est une partie de A :

$$X_\# := \left\{ x \mid \forall n \in \mathbf{N}, x^{(n)} \in X \right\}.$$

La propriété fondamentale de cette construction est la suivante :

Fait 3.4.9. *Soit A un anneau différentiel et soit I un idéal de A . Alors $I_\#$ est le plus grand idéal différentiel de A contenu dans I .*

Démonstration. — On a quatre choses à démontrer. La première est que $I_\# \subset I$, et c'est évident. La deuxième est que $I_\#$ est stable par dérivation, et c'est aussi évident. La troisième est que $I_\#$ est un idéal. Déjà, c'est évident que $I_\#$ est stable par addition. Puis, soit $x \in I_\#$, soit $\lambda \in A$ et soit $n \in \mathbf{N}$. On a :

$$(\lambda x)^{(n)} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{k} x^{(i)} \lambda^{(n-i)}.$$

Comme tous les $x^{(i)}$ sont dans I , il en est de même pour $(\lambda x)^{(n)}$, et on a donc bien que $\lambda x \in I_\#$. Enfin, la dernière propriété à montrer est que $I_\#$ est le plus grand tel idéal différentiel. Soit donc J un idéal différentiel de A inclus dans I . Soit $x \in J$, alors, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, $x^{(n)}$ est dans J est donc dans I , et donc, $x \in I_\#$, ce qu'on voulait. ■

Keigher démontre alors (c'est sa proposition 1.5) que si A contient \mathbf{Q} , si I est un idéal premier, alors $I_\#$ est encore un idéal premier. Le lien avec ce qui précède tient alors dans la proposition suivante, qui, après coup, constitue une caractérisation tout à fait remarquable

de \mathfrak{p}^δ . Cependant, il semble que Keigher n'avait pas mesuré l'importance géométrique de l'idéal $\mathfrak{p}_\#$.

Proposition 3.4.10. *Soient A une \mathbf{Q} -algèbre différentielle et \mathfrak{p} un idéal premier de A . Alors,*

$$\mathfrak{p}^\delta = \mathfrak{p}_\#.$$

Démonstration. — En effet, d'après le fait qu'on vient de démontrer, on sait que $\mathfrak{p}_\#$ est le plus grand idéal différentiel de A inclus dans \mathfrak{p} . Mais, la proposition 1.4.1 nous assure alors que $\mathfrak{p}_\#$ est un idéal premier. On a donc bien $\mathfrak{p}^\delta = \mathfrak{p}_\#$. ■

(3.4.3) Que se passe-t-il quand on n'est plus au-dessus de \mathbf{Q} ? Pour définir la trajectoire d'un point x , on a utilisé le fait que les anneaux différentiels considérés contenaient tous \mathbf{Q} . En fait, il suffit de supposer que le schéma X qui nous intéresse peut être recouvert par des ouverts affines U_i dont les anneaux A_i vérifient :

$$\forall \mathfrak{p} \in \text{Spec } A_i, \quad \mathfrak{p}_\# \in \text{Spec } A_i.$$

De tels anneaux sont appelés *anneaux spéciaux (special rings)* par Keigher dans [Kei77] — article où il étudie par quelles constructions sont stables de tels anneaux.

Néanmoins, pour résoudre ce problème, un moyen plus élégant, et, comme on le verra dans la section (8.3), plus pertinent, est ce qui suit.

3.5 Généralisation aux dérivations de Hasse-Schmidt

(3.5.1) Définition. Les dérivations de Hasse-Schmidt généralisent les dérivations. Les définitions varient selon les auteurs. On reprend la définition que donne Franck Benoist dans [Ben06] :

Définition 3.5.1. *Soit A un anneau. Une dérivation de Hasse-Schmidt sur A est une suite $D = (D_i)_{i \geq 0}$ vérifiant :*

- (i) pour tout $i \geq 0$, $D_i : A \longrightarrow A$ est une application additive, et $D_0 = \text{Id}_A$
- (ii) la loi de Leibniz généralisée : pour tout i et pour tous $f, g \in A$:

$$D_i(fg) = \sum_{k+\ell=i} D_k(f)D_\ell(g)$$

- (iii) l'itérativité : pour tous $i, j \geq 0$,

$$D_i \circ D_j = \binom{i+j}{i} D_{i+j}.$$

Remarques. — Pour Hideyuki Matsumura, dans [Mat82], les familles D vérifiant (i) et (ii) sont des *differentiations* ; celles qui vérifient (iii) sont appelées des *differentiations itératives*. Paul Vojta, dans [Voj07], appelle *dérivées supérieures* les différentiations. Ces objets ont été introduits par Hasse et Schmidt dans [HS37].

— Si A est un anneau et D une dérivation de Hasse-Schmidt pour A , on a une notion de D -idéal de A . De façon plus générale, la plupart de ce qu'on peut faire en algèbre différentielle

peut être fait avec les dérivations de Hasse-Schmidt. On renvoie au preprint [Ben] pour plus de détails. \diamond

(3.5.2) Les trajectoires dans le cadre de Hasse-Schmidt. En particulier, on peut démontrer dans ce cadre un analogue de la proposition 1.4.2, qu'on avait démontrée dans le chapitre (1), et de la proposition 3.4.8, qu'on vient de montrer. C'est le résultat suivant :

Proposition 3.5.2. Soit A un anneau et soit D une dérivation de Hasse-Schmidt pour A . Soit I un D -idéal de A . Soit $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ tel que $I \subset \mathfrak{p}$. Alors, l'ensemble

$$\{J \mid J \text{ est un } D\text{-idéal et } I \subset J \subset \mathfrak{p}\}$$

admet un plus grand élément, qui en plus est un idéal premier de A .

Démonstration. — On garde les notations de l'énoncé. Pour démontrer cette proposition, on va adapter au cadre des dérivations de Hasse-Schmidt la proposition 1.5 de [Kei77] : autrement dit, on adapte la démarche « à la $\mathfrak{p}_\#$ » de Keigher. Ainsi, on note

$$\mathfrak{p}_\# := \{f \in A \mid \forall i \geq 0, D_i(f) \in \mathfrak{p}\}.$$

Montrons d'abord qu'il s'agit d'un idéal. L'ensemble $\mathfrak{p}_\#$ est clairement additif. Soit donc $f \in \mathfrak{p}_\#$ et $\lambda \in A$. Montrons que $\lambda f \in \mathfrak{p}_\#$: soit $i \geq 0$. On a

$$D_i(\lambda f) = \sum_{k+\ell=i} D_k(\lambda) D_\ell(f) :$$

et donc, on a bien $\lambda f \in \mathfrak{p}_\#$. Montrons maintenant qu'il s'agit d'un idéal premier. Soient $f, g \in A$ tels que $f \notin \mathfrak{p}_\#$ et $g \notin \mathfrak{p}_\#$. Soient n et m tels que

$$\begin{cases} D_n(f) \notin \mathfrak{p} & \text{et} & \forall k < n, D_k(f) \in \mathfrak{p} \\ D_m(g) \notin \mathfrak{p} & \text{et} & \forall k < m, D_k(g) \in \mathfrak{p}. \end{cases}$$

Montrons que $fg \notin \mathfrak{p}$: on calcule

$$D_{n+m}(fg) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} D_k(f) D_{(n+m)-k}(g) \right) + D_n(f) D_m(g) + \left(\sum_{\ell=0}^{m-1} D_{(n+m)-\ell}(f) D_\ell(g) \right).$$

Dans cette expression, tous les termes sont dans \mathfrak{p} sauf le terme isolé au milieu. Comme \mathfrak{p} est premier, on a $D_n(f) D_m(g) \notin \mathfrak{p}$. Ainsi, $D_{n+m}(fg) \notin \mathfrak{p}$ et donc $fg \notin \mathfrak{p}_\#$, ce qu'on voulait. Il suffit enfin de vérifier que si J est un D -idéal contenu dans \mathfrak{p} , alors, on a $J \subset \mathfrak{p}_\#$, ce qui est facile. ■

Remarque. — Dans cette démonstration, on n'a pas utilisé l'itérativité de D : cette proposition est en fait valable pour les différenciations de Matsumura. \diamond

Dès lors, on voit bien comment définir les trajectoires dans le cadre suivant. Soit X un schéma. On appelle *champ de vecteurs de Hasse-Schmidt sur X* les familles $(\partial_i)_{i \geq 0}$ vérifiant :

- (i) pour tout $i \geq 0$, $\partial_i : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X$ est un morphisme de faisceaux en groupes abéliens, et $\partial_0 = \text{Id}_{\mathcal{O}_X}$.
- (ii) pour tout ouvert U de X , $(\partial_i)_U : \mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U)$ est une dérivation de Hasse-Schmidt de $\mathcal{O}_X(U)$.

Ainsi, on pourrait généraliser le travail qui suit à ces champs de vecteurs de Hasse-Schmidt. Néanmoins, on ne l'a pas fait car le cadre des anneaux différentiels est plus classique ; mais, on reste tout de même sûr que cette généralisation ne pose pas de problème. On verra réapparaître⁽⁶⁾ ces objets dans la section (8.3).

(3.5.3) Lien entre les dérivations et les dérivations de Hasse-Schmidt. On termine cette section en montrant que si A est un anneau contenant \mathbf{Q} , alors se donner une dérivation de Hasse-Schmidt sur A équivaut à se donner une dérivation sur A .

Proposition 3.5.3. *Soit A une \mathbf{Q} -algèbre. Alors, l'application*

$$\begin{array}{ccc} \{ \text{dérivations de Hasse-Schmidt de } A \} & \longrightarrow & \text{Der}(A, A) \\ D = (D_i)_{i \geq 0} & \longmapsto & D_1 \end{array}$$

est une bijection.

Démonstration. — On garde les notations de l'énoncé. Remarquons pour commencer que si D est une dérivation de Hasse-Schmidt sur A , alors pour tout $i \geq 1$, on a

$$D_i = i! \cdot \underbrace{D_1 \circ \cdots \circ D_1}_{i \text{ fois}},$$

ce qui se montre aisément par récurrence. Puis, montrons que cette application est injective. Soient D et D' deux dérivations de Hasse-Schmidt de A telles que $D_1 = D'_1$. Soit $i \geq 1$. Comme $i!$ est inversible dans A , on en déduit que $D_i = D'_i$. Ainsi, $D = D'$. Montrons qu'elle est surjective : soit ∂ une dérivation de A . Alors, on vérifie facilement (il s'agit de la proposition 1.1.1) que

$$D := \left(\frac{\partial^i}{i!} \right)_{i \geq 0}$$

est une dérivation de Hasse-Schmidt de A . ■

3.6 Trajectoires et morphismes

Revenons aux anneaux différentiels « classiques », et continuons notre étude des schémas munis d'un champ de vecteurs, et des trajectoires. On prouve la formule suivante, qui est naturelle, de compatibilité de la trajectoire aux morphismes.

Proposition 3.6.1. *Soient $\mathcal{X} = (X, \vec{\mathcal{V}})$ et $\mathcal{Y} = (Y, \vec{\mathcal{W}})$ deux \mathbf{Q} -schémas munis de champs de vecteurs, ainsi que $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme entre eux. Alors, pour tout $x \in X$, on a*

$$\varphi(Traj_{\vec{\mathcal{V}}}(x)) = Traj_{\vec{\mathcal{W}}}(\varphi(x)).$$

⁽⁶⁾de façon inattendue !

Démonstration. — Commençons par nous ramener au cas affine. Soit x un élément de X . On vient de voir que la trajectoire de x est définie comme le plus petit élément de

$$\left\{ \eta \in X \mid \begin{array}{c} \eta \rightsquigarrow x \\ \text{et} \\ \eta \text{ est une feuille de } \vec{\mathcal{V}} \end{array} \right\}.$$

Or, si U un ouvert de X contenant x , on sait que U contient toutes les générations de x . Ainsi, il suffit de chercher la trajectoire dans un ouvert affine. On pose $y := \varphi(x)$. Soit V un ouvert affine de Y contenant y . Soit U un ouvert affine de X , contenant x , et contenu dans $\varphi^{-1}(U)$. On dispose alors d'un morphisme $\varphi : U \rightarrow V$ entre des schémas affines, ce qui nous ramène au cas affine.

Soient donc A et B deux \mathbf{Q} -algèbres différentielles et soit $\phi : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux différentiels. Soit \mathfrak{p} un idéal premier de B . Comme on l'a vu dans le paragraphe (3.4.2), la trajectoire de \mathfrak{p} correspond à l'idéal $\mathfrak{p}_\#$, qui est bien un idéal premier. Ce qu'on veut donc démontrer est donc que

$$\phi^{-1}(\mathfrak{p}_\#) = (\phi^{-1}\mathfrak{p})_\#.$$

Or,

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(\mathfrak{p}_\#) &= \{x \in A \mid \phi(x) \in \mathfrak{p}_\#\} \\ &= \left\{x \in A \mid \forall n \in \mathbf{N}, \phi(x)^{(n)} \in \mathfrak{p}\right\} \\ &= \left\{x \in A \mid \forall n \in \mathbf{N}, \phi(x^{(n)}) \in \mathfrak{p}\right\} \\ &= \left\{x \in A \mid \forall n \in \mathbf{N}, x^{(n)} \in \phi^{-1}\mathfrak{p}\right\} \\ &= (\phi^{-1}\mathfrak{p})_\#, \end{aligned}$$

ce qui termine notre preuve. ■

3.7 Un exemple de champ de vecteurs sur \mathbf{A}_C^2 qui ne possède que deux feuilles

Dans cette section, on exhibe un exemple un peu pathologique, qui pourra être utile pour tester certains énoncés. On considère la \mathbf{C} -algèbre différentielle $\mathbf{C}[x, y]$ munie de la dérivation définie par

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial y} = 1 - xy^2 \\ \frac{\partial y}{\partial y} = x^2 - y^3 \end{cases}.$$

On note $\vec{\mathcal{V}}$ le champ de vecteurs qui s'en déduit. Les feuilles (ou plus précisément leurs traces réelles) dans le cas \mathcal{C}^∞ sont représentées dans la figure 6.

Dans [Jou79], Jean-Pierre Jouanolou montre qu'aucune des « feuilles \mathcal{C}^∞ » non-constantes n'est algébrique. Comme le seul point fermé invariant sous $\vec{\mathcal{V}}$ est $(1, 1)$, on en déduit :

Fait 3.7.1. *Pour tout $x \in \mathbf{A}_C^2$ différent de $(1, 1)$, on a : $Traj_{\vec{\mathcal{V}}}(x) = \eta$, le point générique. Sinon, $Traj_{\vec{\mathcal{V}}}((1, 1)) = (1, 1)$.*

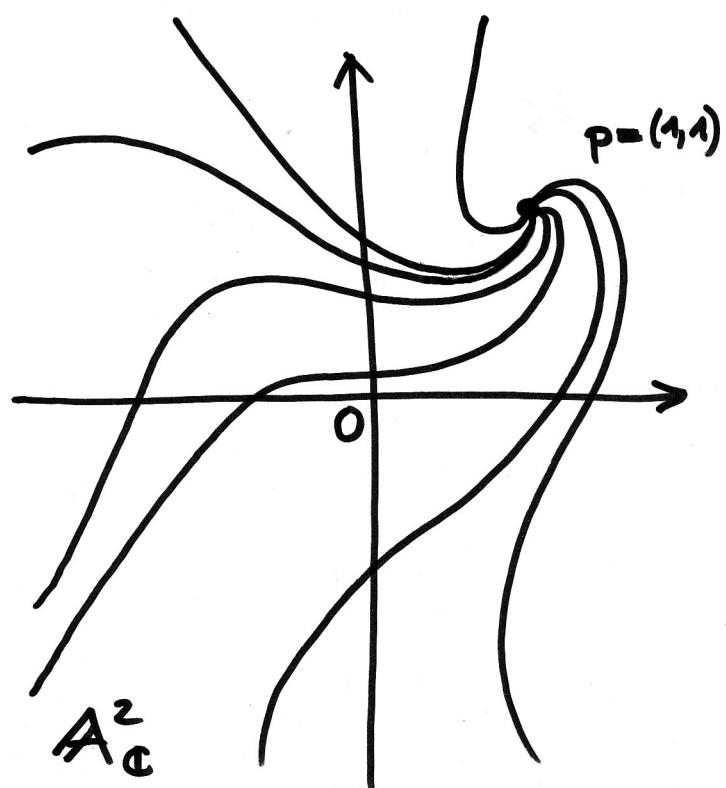


FIG. 6 – Feuilles réelles \mathcal{C}^∞ du système $x' = 1 - xy^2$ et $y' = x^2 - y^3$.

Troisième partie

**Espace des feuilles grossier et
trajectoires des schémas sans
dynamique propre à base simple**

Chapitre 4

Espace des feuilles grossier d'un schéma muni d'un champ de vecteurs

Soit $\mathcal{X} = (X, \mathcal{V})$ un schéma muni d'un champ de vecteurs.

On commence ce chapitre par définir ce que signifie \mathcal{X} est *simple* : c'est quand il n'y a qu'une seule trajectoire, la trajectoire dense — et cette notion correspond dans le cas affine aux anneaux différentiellement simples. Après avoir démontré quelques propriétés sur ces schémas, on définit ce qu'est *l'espace des feuilles grossier* associé à \mathcal{X} . Intuitivement, il s'agit d'un schéma T qui classifie les feuilles de \mathcal{V} .

On calcule cet espace des feuilles grossier dans le cas où \mathcal{X} est simple : on obtient un point (le spectre d'un corps). Ainsi, la notion d'espace des feuilles grossier correspond bien dans ce cas à ce qu'on veut qu'elle soit. On introduit ensuite une notion un peu plus générale que les schémas simples : *les schémas quasi-simples*. Dans ce cas aussi, on sait calculer l'espace des feuilles grossier, et il s'agit encore d'un point. C'est ici que la notion d'espace des feuilles *grossier* montre ses limites⁽¹⁾ : en effet, un schéma quasi-simple peut très bien avoir plusieurs feuilles.

Dans le cas où $\mathcal{S} = (S, \mathcal{V})$ est simple, on verra que l'espace des feuilles grossier

$$\mathcal{S} \longrightarrow (C_{\mathcal{S}}, \vec{0})$$

constitue pour \mathcal{S} un très bon analogue de ce que C_A constitue pour A .

⁽¹⁾D'où le terme « grossier ».

4.1 Schémas avec champ de vecteurs simples

On définit :

Définition 4.1.1. Soit $\mathcal{X} = (X, \vec{\mathcal{V}})$ un schéma, muni d'un champ de vecteurs. On dit que \mathcal{X} est simple si

- d'une part, X est irréductible, auquel cas on note η son point générique ;
- et si, d'autre part, la seule feuille de $\vec{\mathcal{V}}$ est η .

Remarques. — Intuitivement, cela veut bien dire que le champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$ ne laisse invariant aucun fermé Zariski strict de X : il n'y a ni point fixe pour $\vec{\mathcal{V}}$, ni courbe invariante, etc.

— Dans le cas où l'on dispose d'une notion de trajectoire, par exemple dans le cas où X est un \mathbf{Q} -schéma, il revient au même de demander que X soit irréductible de point générique η et que

$$\forall x \in X, \quad \text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x) = \eta.$$

◊

(4.1.1) Schémas simples affines. Rappelons qu'on dit qu'un anneau différentiel A est différentiellement simple si les seuls idéaux différentiels de A sont (0) et A . Soit A un tel anneau différentiel, dont on suppose qu'il contient \mathbf{Q} . Si on considère le schéma muni d'un champ de vecteurs $\text{Spec}^{\partial} A$, ses seuls fermés invariants sous le champ sont ainsi \emptyset et A ; ceci peut aussi s'exprimer par :

$$\forall x \in \text{Spec}^{\partial} A, \quad \text{Traj}(x) = \eta. \tag{1}$$

où l'on a noté η le point générique de $\text{Spec } A$. Cependant, pour parler de point générique de $\text{Spec } A$, il faut que $\text{Spec } A$ soit irréductible. Quand A est différentiellement simple, c'est toujours le cas. En fait, mieux, A est même intègre. En effet, soit, d'après la proposition 1.2.2, \mathfrak{P} un idéal différentiel maximal de A . Comme, par définition, \mathfrak{P} est différent de A , on a donc nécessairement $\mathfrak{P} = (0)$. La même proposition nous dit que \mathfrak{P} est premier : ainsi, A est intègre. On a démontré :

Proposition 4.1.2. Soit A une \mathbf{Q} -algèbre différentiellement simple. Alors, A est intègre.

Remarques. — Dans le cas où $\mathbf{Q} \not\subseteq A$, on peut montrer

$$A \text{ réduit et différentiellement simple} \implies A \text{ intègre.}$$

En effet, dans ce cas, considérons deux éléments x et y de A , tels que $xy = 0$, et supposons $x \neq 0$. Considérons l'ensemble

$$(0 : y)^{\infty} := \{\lambda \in A \mid \exists n \in \mathbf{N}, \lambda y^n = 0\}.$$

C'est un idéal de A . Mieux, c'est un idéal différentiel. En effet, si on a $\lambda y^n = 0$, alors, en dérivant, on obtient que $\lambda \cdot ny^{n-1}y' + \lambda' \cdot y^n = 0$. En multipliant par y , on a donc $\lambda' \cdot y^{n+1} = 0$. De plus, $(0 : y)^{\infty}$ est un idéal non-nul. En effet, on a $x \in (0 : y)^{\infty}$, par hypothèse. Comme A est différentiellement simple, on a donc $(0 : y)^{\infty} = A$, et donc y est nilpotent. Comme on a supposé A réduit, c'est donc que $y = 0$.

— On ne peut pas faire mieux : il existe des anneaux différentiels qui sont différentiellement simples sans être réduits. En voici un exemple. On prend

$$A = \mathbf{F}_p[\varepsilon]/\varepsilon^p$$

et on pose $\varepsilon' = 1$. On peut faire un tel choix car on est en caractéristique p ; en effet, le fait que $\varepsilon^p = 0$ impose qu'on ait $p \cdot \varepsilon^{p-1} \varepsilon' = 0$. On peut donc bien choisir $\varepsilon' = 1$. On vérifie alors facilement que A est bien différentiellement simple. \diamond

On aimerait que l'interprétation géométrique (1) de la simplicité d'un anneau différentiel soit éventuellement une *caractérisation*. Autrement dit, on aimerait que :

Proposition 4.1.3. *Soit A une \mathbf{Q} -algèbre différentielle. On suppose que le seul idéal différentiel premier de A est (0) . Alors, A est différentiellement simple.*

Cette proposition est vraie, comme on le montre ci-dessous :

Démonstration. — Soit A une \mathbf{Q} -algèbre différentielle vérifiant les hypothèses de la proposition. Soit I un idéal différentiel propre de A . La proposition 1.4.4 nous assure alors qu'il existe un idéal différentiel et premier \mathfrak{P} contenant I . Comme \mathfrak{P} doit être égal à (0) , il en est de même pour I : A est donc différentiellement simple. ■

Concernant les anneaux différentiels simples, notons aussi la proposition suivante, qu'on utilisera par la suite.

Proposition 4.1.4. *Soit A un anneau différentiel simple. Alors, C_A est un corps.*

Démonstration. — En effet, soit $c \in C_A$ une constante non-nulle. Comme A est différentiellement simple, l'idéal différentiel

$$\{cf \mid f \in A\},$$

qui contient $c \neq 0$, est A tout entier. Il existe donc $f \in A$ tel que $cf = 1$. Montrons que f est aussi une constante. En dérivant la relation $cf = 1$, on obtient que $cf' = 0$. Supposons que f' soit non-nul. Alors, en utilisant encore le fait que A soit différentiellement simple, on sait qu'il existe $L \in A[\partial]$ tel que $L \bullet (f') = 1$. En appliquant cet opérateur L à cf' , on obtient que $c \cdot 1 = 0$, ce qui est absurde, et achève la démonstration. ■

(4.1.2) Intégrité des schémas simples. Plus généralement, on a la proposition suivante :

Proposition 4.1.5. *Soit $\mathcal{X} = (X, \vec{\mathcal{V}})$ un \mathbf{Q} -schéma avec champ de vecteurs simple. Alors, X est intègre.*

Démonstration. — Pour démontrer que X est intègre, il suffit de démontrer que tout ouvert affine de X est intègre. Soit donc U un ouvert affine non-vide de X . On sait que U , en tant qu'ouvert non-vide d'un irréductible, est aussi irréductible. On vérifie aisément alors que U , muni du champ de vecteurs induit, est encore simple. On en déduit d'après la proposition 4.1.3 que l'anneau de U est différentiellement simple et, d'après la proposition 4.1.2, que cet anneau est intègre. Ainsi, X est bien intègre. ■

4.2 Espace des feuilles grossier d'un schéma muni d'un champ de vecteurs

(4.2.1) Introduction. Soit \mathcal{X} un \mathbf{Q} -schéma muni d'un champ de vecteurs. On cherche un « espace » T qui classifie les feuilles de $\vec{\mathcal{V}}$, un espace dont intuitivement les points correspondent aux trajectoires de \mathcal{X} . Un tel espace est muni d'un morphisme $\varphi : X \rightarrow T$ qui doit vérifier

$$\forall (x, y) \in X^2 \quad \text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x) = \text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(y) \implies \varphi(x) = \varphi(y). \quad (2)$$

(4.2.2) Soit T un \mathbf{Q} -schéma, qu'on munit du champ de vecteurs nul. Considérons maintenant $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow (T, \vec{0})$ un morphisme de \mathbf{Q} -schémas munis de champs de vecteurs, et vérifions que la propriété (2) est vraie pour φ . Soient donc $x, y \in X$. On a, en vertu de la proposition 3.6.1 :

$$\text{Traj}_{\vec{0}}(\varphi(x)) = \varphi(x) = \varphi(\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x)).$$

Ainsi, φ vérifie bien

$$\forall (x, y) \in X^2 \quad \text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x) = \text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(y) \implies \varphi(x) = \varphi(y),$$

ce qu'on voulait.

(4.2.3) Espace des feuilles grossier. Tout ceci justifie la définition suivante :

Définition 4.2.1. Soit k un anneau. Soit \mathcal{X} un k -schéma muni d'un k -champ de vecteurs. On appelle espace des feuilles grossier de \mathcal{X} tout k -schéma T , muni d'un morphisme

$$\varphi : \mathcal{X} \rightarrow (T, \vec{0})$$

de k -schémas munis de champ de vecteurs, qui soit universel pour cette propriété.

Remarques. — « Qui soit universel pour cette propriété » : c'est-à-dire, si T' est un autre k -schéma muni d'un morphisme $\varphi' : \mathcal{X} \rightarrow (T', \vec{0})$, alors, il existe un unique morphisme $f : T \rightarrow T'$ qui fasse commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{\varphi} & (T, \vec{0}) \\ \varphi' \downarrow & \nearrow f & \\ (T', \vec{0}) & & \end{array}$$

— Rien *a priori* nous assure de l'existence d'un tel espace des feuilles grossier pour un k -schéma \mathcal{X} muni d'un champ de vecteurs quelconque.

— Dans le cas où X est un k -schéma muni de la dérivée nulle, alors il est facile de vérifier que l'espace des feuilles grossier existe : tout simplement, c'est X lui-même. \diamond

4.3 Espace des feuilles grossier d'un schéma simple

Dans cette section, on calcule l'espace des feuilles grossier d'un schéma simple. On considère k un anneau contenant \mathbf{Q} .

(4.3.1) Faisceau des constantes. Soit $\mathcal{X} = (X, \mathcal{O}_X)$ un espace différentiellement anelé : rappelons que cela signifie simplement que pour tout ouvert U on se donne un anneau différentiel $\mathcal{O}_X(U)$, et qu'on astreint les restrictions à être des morphismes d'anneaux différentiels. On peut alors définir le *faisceau des constantes de \mathcal{X}* : pour chaque ouvert U de X , on pose

$$\mathcal{O}_X^{\text{cte}}(U) := C_{\mathcal{O}_X(U)}.$$

Vérifions qu'il s'agit bien d'un faisceau. Pour commencer, ce préfaisceau est bien séparé, en tant que sous-préfaisceau d'un faisceau. Il nous reste donc à montrer que les sections se recollent. Soient ainsi U un ouvert de X et $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de U . Pour chaque $i \in I$, soit $f_i \in \mathcal{O}_X^{\text{cte}}(U_i)$. On suppose que les f_i coïncident sur les intersections $U_i \cap U_j$. Comme \mathcal{O}_X est un faisceau, ces f_i se recollent en une section globale $f \in \mathcal{O}_X(U)$, dont il nous faut montrer qu'elle est constante. On veut donc montrer que $f' = 0$. Or, f' est nulle localement, puisque

$$\forall i \in I, \quad (f')_{|U_i} = (f_{|U_i})' = f_i' = 0.$$

Ainsi, $f' = 0$ et on a bien montré que $\mathcal{O}_X^{\text{cte}}$ est un faisceau.

(4.3.2) Faisceau des constantes d'un schéma simple. Dans ce paragraphe, on va montrer que, si \mathcal{X} est un k -schéma simple alors, l'anneau $C_{\mathcal{O}_X(U)}$ des constantes de $\mathcal{O}_X(U)$ ne dépend pas de l'ouvert U non-vide. On démontre avant :

Proposition 4.3.1. *Soit K un anneau différentiel simple intègre et soit S une partie moltiplicative de K qui ne contient pas 0. On note $i_S : K \rightarrow S^{-1}K$ le morphisme de localisation. Alors :*

- le morphisme d'anneaux $C_{i_S} : C_K \rightarrow C_{S^{-1}K}$ est un isomorphisme. Autrement dit, K et $S^{-1}K$ ont les mêmes constantes.
- l'anneau différentiel $S^{-1}K$ est simple.

Démonstration. — On reprend les notations de l'énoncé. Démontrons d'abord le premier point. Comme K est intègre, on sait que C_{i_S} , qui est la restriction de i_S à C_K , est injective. Montrons qu'elle est surjective. Soit donc

$$y := \frac{a}{s} \in S^{-1}K$$

tel que

$$y' = \left(\frac{a}{s}\right)' = \frac{a's - s'a}{s^2} = 0.$$

On considère l'ensemble

$$E_y := \{x \in K \mid xy \in K\}.$$

C'est clairement un idéal de K . En fait, mieux, c'est un idéal différentiel de K . En effet, considérons x un élément de E_y . On a alors

$$(xy)' = x'y + xy' = x'y \in K.$$

Par ailleurs, par hypothèse, s (qui est non-nul) appartient à E_y . Comme K est différentiellement simple, on a donc que $E_y = K$ et donc que $y \in K$. Donc, $y \in C_K$ et on a ainsi $C_K = C_{S^{-1}K}$.

Démontrons le second point. Soit I un idéal non-nul de $S^{-1}K$. Soit donc

$$y := \frac{a}{s} \in I$$

un élément de I non-nul. On note J l'idéal défini par

$$J := i_S^{-1}(I) = \{x \in K \mid x \in I\}.$$

C'est aussi un idéal différentiel. Comme $a \in J$ et comme a est non-nul, J est égal à K . On voit ainsi que $1 \in I$: l'idéal I est donc l'idéal plein. ■

On peut alors énoncer :

Proposition 4.3.2. *Soit $\mathcal{X} = (X, \mathcal{V})$ un \mathbf{Q} -schéma avec champ de vecteurs simple. Soient U et V deux ouverts non-vides de X , avec $U \subset V$. On considère le morphisme de restriction $\rho_{V \rightarrow U} : \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(V) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U)$. Alors la trace de ce morphisme sur les constantes, ie*

$$C(\rho_{V \rightarrow U}) : C(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(V)) \rightarrow C(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U))$$

est un isomorphisme. Autrement dit, les anneaux de constantes de tous les anneaux $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U)$, pour U non-vide, sont isomorphes.

Remarque. — Pour la clarté, on a noté $C(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U))$ au lieu de $C_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U)}$, l'anneau des constantes de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U)$, etc. ◇

Pour démontrer cette proposition, on utilise le lemme suivant :

Lemme 4.3.3. *Soit X un espace topologique irréductible et soit $(V_i)_{i \in I}$ une base d'ouverts non-vides de X . Soit \mathcal{F} un faisceau sur X qui vérifie*

$$\forall (i, j) \in I^2 \quad V_i \subset V_j \implies \rho_{V_j \rightarrow V_i} : \mathcal{F}(V_j) \rightarrow \mathcal{F}(V_i) \text{ est un isomorphisme.}$$

Alors, quels que soient les ouverts non-vides U et V de X vérifiant $U \subset V$, on a

$$\rho_{V \rightarrow U} : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U) \text{ est un isomorphisme}$$

Démonstration du lemme 4.3.3. — Le fond de l'argument est que, comme il est expliqué dans le paragraphe 3.2 du chapitre 0 de [EGA I], un faisceau est déterminé par ses valeurs prises sur une base d'ouverts.

Plus précisément, commençons par remarquer que, si X un espace topologique irréductible, et si A est un anneau donné, alors le préfaisceau (en anneaux) défini par

$$\mathcal{F}_A(U) := \begin{cases} A & \text{si } U \text{ est non-vide} \\ 0 & \text{si } U = \emptyset \end{cases}$$

est un faisceau. En effet, comme X est irréductible, tout ouvert non-vide de X est encore irréductible et est *a fortiori* connexe.

Considérons alors une base d'ouverts $(V_i)_{i \in I}$ de X et un faisceau \mathcal{F} comme dans l'énoncé. Tous les $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(V_i)$ sont isomorphes — mais aucun d'entre eux ne prévaut sur les autres. Pour en choisir un naturellement, il suffit de considérer la limite inductive (filtrante)

$$A := \varinjlim_{i \in I} \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(V_i).$$

On dispose d'une famille de morphismes $f_i : \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(V_i) \rightarrow A$ qui est compatible aux flèches de restriction. Autrement dit, on dispose d'un morphisme de « préfaisceaux définis sur la base $(V_i)_i$ »

$$f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_A.$$

Comme expliqué dans [EGA I], on sait que ce morphisme f détermine un morphisme entre les faisceaux, qui sera ici un isomorphisme. Autrement dit, si U et V sont deux ouverts non-vides, avec $U \subset V$, dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi_V} & A \\ \rho_{V \rightarrow U} \downarrow & & \parallel \\ \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & A \end{array}$$

les deux flèches φ_V et φ_U sont des isomorphismes. Il en est donc de même pour $\rho_{V \rightarrow U}$, ce qu'on voulait démontrer. ■

Remarque. — On pourrait aussi démontrer ce lemme directement. ◇

Démonstration de la proposition 4.3.2. — En vertu du lemme 4.3.3 qu'on vient de prouver, il suffit donc, pour démontrer la proposition qui nous intéresse, de trouver une base d'ouverts $(V_i)_{i \in I}$ vérifiant

$$\forall (i, j) \in I^2 \quad V_i \subset V_j \implies C(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(V_j)) \longrightarrow C(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(V_i)) \text{ est un isomorphisme.}$$

On démontre d'abord cette proposition dans le cas affine. Soit donc A une \mathbf{Q} -algèbre différentielle simple et soit $\mathcal{X} := \mathrm{Spec}^{\partial} A$ le \mathbf{Q} -schéma affine muni du champ de vecteurs associé. En particulier, d'après la proposition 4.1.2, on sait que A est intègre. Une base d'ouverts non-vides de A est constituée par les ouverts distingués $D(f)$, lorsque f parcourt $A \setminus A^{\times}$. Soient donc $D(f)$ et $D(g)$ deux tels ouverts que l'on suppose vérifier $D(f) \subset D(g)$. Dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} & C(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(X)) & \\ \rho_1 \swarrow & & \searrow \rho_2 \\ C(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(D(g))) & \xrightarrow{\rho_3} & C(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(D(f))) \end{array},$$

qui s'écrit en fait

$$\begin{array}{ccc} & C(A) & \\ \rho_1 \swarrow & & \searrow \rho_2 \\ C(A_g) & \xrightarrow{\rho_3} & C(A_f) \end{array},$$

où l'on veut démontrer que la flèche ρ_3 est un isomorphisme, on sait, d'après la proposition 4.3.1, que les flèches ρ_1 et ρ_2 sont des isomorphismes. Ainsi, il en est de même pour ρ_3 . Le lemme 4.3.3 s'applique donc : la proposition est donc vraie si le schéma ambiant est affine.

Venons-en maintenant au cas général : soit $\mathcal{X} = (X, \vec{\mathcal{V}})$ un \mathbf{Q} -schéma avec champ de vecteurs simple. Une base d'ouverts de X est formée par les ouverts affines non-vides de X . Soient donc U et V deux tels ouverts vérifiant $U \subset V$. On veut montrer que la flèche de restriction

$$\rho : C(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(V)) \longrightarrow C(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U))$$

est un isomorphisme. Or, dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} C(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(V)) & \xrightarrow{\rho} & C(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U)) \\ \rho_2 \searrow & & \swarrow \rho_3 \\ & C(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U \cap V)) & \end{array}$$

comme l'ouvert $U \cap V$ est non-vide, on sait, d'après le cas affine qu'on vient de traiter, que les flèches ρ_2 et ρ_3 sont des isomorphismes. Il est en donc de même pour ρ , ce qui achève la preuve, en appliquant le même lemme. ■

(4.3.3) Espace des feuilles grossier d'un schéma simple : le cas affine. Avant de décrire quel est l'espace des feuilles grossier d'un schéma simple dans le cas général, on traite le cas affine. Si A est une \mathbf{Q} -algèbre différentielle simple, alors on dispose naturellement du morphisme d'inclusion

$$C_A \longrightarrow A.$$

Ce morphisme est un morphisme d'anneaux différentiels : il induit donc un morphisme de \mathbf{Q} -schémas avec champ de vecteurs

$$\mathrm{Spec}^\partial A \longrightarrow (\mathrm{Spec} C_A, \vec{0}).$$

Alors on va montrer :

Proposition 4.3.4. *Soit A un anneau différentiel simple. Alors,*

$$\varphi_A : \mathrm{Spec}^\partial A \longrightarrow (\mathrm{Spec} C_A, \vec{0}).$$

est un espace des feuilles grossier de $\mathrm{Spec}^\partial A$.

Remarque. — Rappelons, pour la clarté géométrique de notre propos, et comme on l'a démontré dans la proposition 4.1.4, que si A est un anneau différentiel simple, alors C_A est un corps. Ainsi, cette proposition nous dit que l'espace des feuilles grossier d'un schéma simple et affine n'a qu'un point — comme on s'y attendait. ◇

Démonstration. — Pour cette démonstration, on suppose que $\mathbf{Q} \subset A$ car ceci va nous permettre d'utiliser le formalisme des trajectoires. Ainsi, on va donner une preuve plus concise et plus élégante. Ce résultat est cependant encore vrai quand A ne contient pas \mathbf{Q} : dans ce cas-là, on en donnera une preuve dans la démonstration du lemme 4.4.10 à venir.

On reprend les notations de l'énoncé. Soit X un \mathbf{Q} -schéma muni d'un morphisme

$$\varphi : \mathrm{Spec}^\partial A \longrightarrow (X, \vec{0}).$$

On veut montrer que φ admet une unique factorisation par φ_A . Déjà, on peut remarquer que φ tombe dans un ouvert affine de X . En effet, puisque $\mathrm{Spec}^\partial A$ est simple, on sait que tous les points ont la même trajectoire, à savoir η le point générique. Or, on a vu au paragraphe (4.2.2) que des points qui ont la même trajectoire ont la même image par φ : l'image de φ est donc un point. Notons $U = \mathrm{Spec} B$ un ouvert affine de X dans lequel tombe φ . En termes d'algèbre commutative, ce qu'on veut démontrer s'énonce alors : soit B un anneau muni de la dérivée nulle et soit $\phi : B \longrightarrow A$ un morphisme d'anneaux différentiels. Alors, ϕ se factorise uniquement par l'inclusion $C_A \subset A$. Énoncé sous cette forme, c'est évident. Ceci termine la preuve. ■

(4.3.4) Espace des feuilles grossier d'un schéma simple : cas général. Passons maintenant au cas où X n'est plus forcément affine. On a d'abord traité le cas affine car on voit bien alors que, si l'on veut généraliser la proposition 4.3.4 à X non-affine, il faut trouver un analogue à X de ce que l'anneau des constantes C_K est à K . C'est justement ce qu'on a fait dans le paragraphe (4.3.2), et on va pouvoir l'utiliser maintenant.

Ainsi, on sait que les anneaux $C(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U))$ sont tous isomorphes les uns aux autres, lorsque U parcourt l'ensemble des ouverts non-vides de X . On choisit le plus simple de ces ouverts, $U := X$ et on définit

$$C_{\mathcal{X}} := \text{Spec}(C(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(X))).$$

Il nous faut maintenant définir un morphisme

$$\varphi_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \longrightarrow (C_{\mathcal{X}}, \vec{0}).$$

On va construire ce morphisme par recollement à l'aide du lemme classique suivant :

Lemme 4.3.5. *Soient X et Y deux espaces différentiellement localement annelés. Soit $(V_i)_{i \in I}$ une base d'ouverts de X et soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille de morphismes $f_i : V_i \longrightarrow Y$ telle que*

$$\forall (i, j) \in I^2, \quad V_i \subset V_j \implies f_i = f_j|_{V_i}.$$

Alors, il existe un unique $f : X \longrightarrow Y$ telle que $\forall i \in I, f|_{V_i} = f_i$.

On applique ce lemme en prenant pour espace X notre schéma muni d'un champ de vecteurs simple \mathcal{X} , pour Y le schéma $\text{Spec } C_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(X)}$ muni du champ nul. On considère $(V_i)_i$ la base des ouverts affines non-vides de X . Pour chaque V_i , on dispose d'un morphisme de restriction

$$\rho_i : \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(X) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(V_i)$$

dont la trace sur les constantes

$$C(\rho_i) : C(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(X)) \longrightarrow C(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(V_i))$$

est un isomorphisme. On considère alors les morphismes

$$f_i := V_i \xrightarrow{\sim} \text{Spec}^{\partial} \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(V_i) \longrightarrow \left(\text{Spec } C(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(V_i)), \vec{0} \right) \xrightarrow{\text{Spec } C(\rho_i)^{-1}} \left(\text{Spec } C(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(X)), \vec{0} \right),$$

dont on constate facilement qu'ils vérifient les hypothèses de compatibilité du lemme. C'est donc ainsi qu'on construit notre morphisme

$$\varphi_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \longrightarrow (C_{\mathcal{X}}, \vec{0}).$$

On est maintenant en mesure d'énoncer et de démontrer le

Théorème 4.3.6. *Soit k une \mathbf{Q} -algèbre et soit \mathcal{X} un k -schéma muni d'un k -champ de vecteurs simple. Alors, avec les notations qui précèdent,*

$$\varphi_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \longrightarrow (C_{\mathcal{X}}, \vec{0})$$

est un espace des feuilles grossier pour \mathcal{X} .

Démonstration. — On garde les notations de l'énoncé. Soit Y un k -schéma et soit $\psi : \mathcal{X} \longrightarrow (Y, \vec{0})$ un morphisme. On veut montrer que ψ se factorise uniquement par $\varphi_{\mathcal{X}}$. C'est très simple. Soit \mathcal{U} un ouvert affine de \mathcal{X} . Alors, il existe un isomorphisme naturel entre $C_{\mathcal{X}}$ et $C_{\mathcal{U}}$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \xhookrightarrow{\quad} & \mathcal{X} \\ \downarrow \varphi_{\mathcal{U}} & & \downarrow \varphi_{\mathcal{X}} \\ C_{\mathcal{U}} & \xrightarrow{\sim} & C_{\mathcal{X}} \end{array} .$$

D'après le cas affine, qu'on a traité dans la proposition 4.3.4, il existe un unique morphisme $f_{\mathcal{U}} : C_{\mathcal{U}} \longrightarrow (Y, \vec{0})$ qui factorise ψ . On vérifie facilement que tous ces $f_{\mathcal{U}}$ coïncident sur $C_{\mathcal{X}}$ et que la factorisation est valable sur \mathcal{X} tout entier (on peut par exemple utiliser le lemme 4.3.5 de recollement). ■

Remarque. — On peut se passer de l'hypothèse $\mathbf{Q} \subset k$ quand X est un schéma réduit, muni d'un champ de vecteurs simple. En effet, on a vu dans la remarque suivant la proposition 4.1.2 que ces conditions suffisent pour affirmer que X est intègre. La preuve précédente peut alors s'appliquer. ◇

4.4 Schémas munis d'un champ de vecteurs quasi-simples

Dans cette section, on introduit la notion de schéma muni d'un champ de vecteurs *quasi-simple*. On va voir, à l'aide de ces schémas quasi-simples, que l'espace des feuilles grossier d'un schéma muni d'un champ de vecteurs ne correspond pas toujours à ce que l'on voudrait qu'il soit, qu'il ne contient pas les informations qu'on souhaite. C'est pourquoi on l'appelle « *grossier* ». Pour résoudre ce problème, on introduira dans le chapitre (8) la notion d'espace des feuilles *géométrique*.

On commence par un exemple.

(4.4.1) La droite affine munie du champ radial. On se place au-dessus d'un corps k , muni de la dérivée nulle. On considère la k -algèbre différentielle A définie par

$$A := \left\{ \begin{array}{l} k[x] \\ x' = x \end{array} \right. .$$

Le k -schéma muni d'un champ de vecteurs qu'est $\text{Spec}^{\partial} A$, qu'on appelle *droite affine munie du champ radial*, n'est pas simple : il y a exactement deux trajectoires, à savoir le point 0 et le point générique η . En termes d'algèbre commutative, l'idéal (x) est un idéal différentiel — et c'est le seul idéal maximal différentiel.

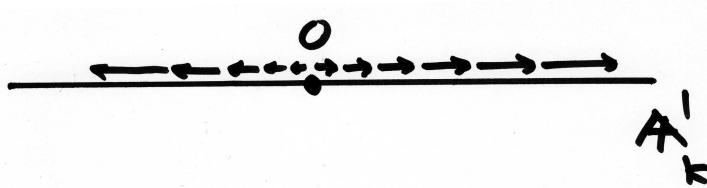


FIG. 7 – La droite affine munie du champ radial.

Cette k -algèbre différentielle A vérifie la propriété suivante :

Proposition 4.4.1. Soit k un corps de caractéristique nulle, muni de la dérivée nulle. Soit A la k -algèbre différentielle définie par

$$A := \left\{ \begin{array}{l} k[x] \\ x' = x \end{array} \right..$$

Alors,

$$C_{\text{Frac } A} = \left\{ \frac{x}{1}, x \in k \right\} = k = C_A.$$

Démonstration. — On garde les notations de l'énoncé. A est évidemment intègre. Soit

$$f = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

un élément de A . On calcule

$$f' = a_0 + a_1x + 2a_2x^2 + \cdots + na_nx^n,$$

ce qui permet de voir que $f' = 0$ si, et seulement si, $f \in C_k (= k)$.

Soit maintenant deux éléments f et g dans $A = k[x]$, avec $g \neq 0$. On pose $h := f/g$, et on suppose que

$$h' = \left(\frac{f}{g} \right)' = 0.$$

On veut montrer alors que nécessairement $h \in k$. Le fait que $h' = 0$ nous assure que $f'g - g'f = 0$. Autrement dit,

$$\frac{f}{g} = \frac{f'}{g'}.$$

Par conséquent, on a :

$$\frac{f}{g} = \frac{f' - \deg(f) \cdot f}{g' - \deg(f) \cdot g}.$$

Cette égalité ne tient que si le numérateur $g' - \deg(f)g \neq 0$. Dans le cas où on a $g' = \deg(f)g$, l'égalité $f'g - g'f = 0$ s'écrit alors $(f' - \deg(f)f)g = 0$. Si on note $n = \deg(f)$, on a alors nécessairement

$$g = \lambda x^n \quad \text{et} \quad f = \mu x^n.$$

On a bien alors $h \in k$.

Dans le cas où cette transformation du dénominateur est possible, on voit que, de proche en proche, on peut réduire le numérateur de h à une constante : il existe $\lambda \in k$ et $p \in k[x]$ tels que

$$h = \frac{\lambda}{p}.$$

En écrivant $h' = 0$, on vérifie alors que $p \in k$. Comme k est un corps, on en déduit que $h \in k$. ■

(4.4.2) Anneaux différentiels quasi-simples. C'est cet exemple qui nous inspire la définition suivante :

Définition 4.4.2. Soit A un anneau différentiel. On dit que A est quasi-simple si A est intègre et si le morphisme

$$C_i : C_A \longrightarrow C_{\text{Frac } A}$$

est un isomorphisme.

Dit de façon plus simple, un anneau différentiel est quasi-simple si $C_A = C_{\text{Frac } A}$. En particulier, si A est quasi-simple, alors C_A est un corps. On vient ainsi de voir dans le paragraphe précédent un exemple d'anneau différentiel quasi-simple. Évidemment, on a

Proposition 4.4.3. *Soit A un anneau différentiel intègre. Alors,*

$$A \text{ simple} \implies A \text{ quasi-simple.}$$

Démonstration. — On suppose que A est un anneau différentiel intègre et simple. On a vu dans la proposition 4.3.1, que la flèche $C_A \rightarrow C_{S^{-1}A}$ est un isomorphisme pour toute partie S de A ne contenant pas 0. Il suffit alors d'appliquer ce résultat avec $S := A \setminus \{0\}$: la flèche $C_A \rightarrow C_{\text{Frac } A}$ est un bien isomorphisme. ■

(4.4.3) Schémas quasi-simples. Cette définition s'étend sans problème aux schémas.

Définition 4.4.4. *Soit \mathcal{X} un schéma muni d'un champ de vecteurs. On dit que \mathcal{X} est quasi-simple s'il est intègre et peut être recouvert par des ouverts affines qui sont des spectres d'anneaux différentiels quasi-simples.*

Les schémas quasi-simples vérifient la même propriété que les schémas simples, à savoir que si \mathcal{X} est quasi-simple, alors, les anneaux de constantes des $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U)$, pour U non-vide, sont tous isomorphes (*cf.* la proposition 4.3.2) :

Proposition 4.4.5. *Soit \mathcal{X} un schéma muni d'un champ de vecteurs, quasi-simple. Alors, pour tous ouverts non-vides U et V tels que $U \subset V$, le morphisme*

$$C_{\rho_{V \rightarrow U}} : C_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(V)} \rightarrow C_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U)}$$

est un isomorphisme.

Pour démontrer cette proposition, on utilise le lemme suivant :

Lemme 4.4.6. *Soit X un schéma intègre. Soient U et V deux ouverts de X non-vides, tels que $U \subset V$. Alors,*

- a) *Les anneaux $\mathcal{O}_X(U)$ et $\mathcal{O}_X(V)$ sont intègres.*
- b) *Le morphisme $\mathcal{O}_X(V) \rightarrow \mathcal{O}_X(U)$ est injectif.*
- c) *Si de plus V est affine, alors le morphisme $\text{Frac } \mathcal{O}_X(V) \rightarrow \text{Frac } \mathcal{O}_X(U)$ est un isomorphisme.*

Remarque. — Le point c) est faux si l'on ne suppose pas V affine. Par exemple, si k est un corps, alors \mathbf{P}_k^1 est un schéma intègre. On considère l'ouvert $V = \mathbf{P}_k^1$ et pour U , on prend $\mathbf{P}_k^1 \setminus \{\infty\} \simeq \mathbf{A}_k^1$. La flèche $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1}(V) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1}(U)$ est dans cette situation le morphisme $k \rightarrow k[x]$ qui est bien injectif mais qui n'induit pas un isomorphisme sur les corps de fractions : la flèche $k \rightarrow k(x)$ n'est pas injective. ◇

Démonstration du lemme 4.4.6. — Le point a) est classique (voir par exemple [Har77, II.3]).

Démontrons le point b). On traite d'abord le cas où V est affine. Soient donc A un anneau intègre et U un ouvert non-vide de $X := \text{Spec } A$. On sait qu'il existe un ouvert de la forme

$D(f)$ non-vide et contenu dans U . Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{O}_X(X) & \\ \rho_1 \swarrow & & \searrow \rho_2 \\ \mathcal{O}_X(U) & \xrightarrow{\rho_3} & \mathcal{O}_X(D(f)) \end{array}$$

est alors un diagramme commutatif. Ce diagramme peut aussi s'écrire

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ \rho_1 \swarrow & & \searrow \rho_2 \\ \mathcal{O}_X(U) & \xrightarrow{\rho_3} & A_f \end{array}.$$

Or, la flèche ρ_2 est injective et $\rho_2 = \rho_3 \circ \rho_1$. Par conséquent, ρ_1 est aussi injective, ce que l'on voulait.

Passons maintenant au cas général. Soit donc X un schéma intègre et soient U et V deux ouverts non-vides, avec $U \subset V$. On veut montrer que le morphisme

$$\varphi : \mathcal{O}_X(V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U)$$

est injectif. Soient donc f et g dans $\mathcal{O}_X(V)$ telles que $\varphi(f) = \varphi(g)$. Soit $(V_i)_{i \in I}$ un recouvrement de V par des ouverts affines. Par chaque i on considère le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(V) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{O}_X(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_X(V_i) & \xrightarrow{\varphi_i} & \mathcal{O}_X(V_i \cap U) \end{array}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \varphi_i(f|_{V_i}) &= \varphi(f)|_{V_i \cap U} \\ &= \varphi(g)|_{V_i \cap U} = \varphi_i(g|_{V_i}). \end{aligned}$$

Or, comme on vient de le voir, φ_i est injective. Donc, pour tout i , $f|_{V_i} = g|_{V_i}$. Par conséquent, $f = g$.

Démontrons maintenant le point c). Il suffit de montrer que si A est un anneau intègre et si U est un ouvert de $\text{Spec } A$, alors le morphisme — qui est bien défini d'après le point b) — $\text{Frac } A \longrightarrow \text{Frac } \mathcal{O}_X(U)$ est un isomorphisme. Comme précédemment, soit $f \in A$ tel que $D(f)$ soit un ouvert non-vide inclus dans U . Alors, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Frac } A & \xrightarrow{\rho_1} & \text{Frac } \mathcal{O}_X(U) \\ \rho_2 \searrow & & \swarrow \rho_3 \\ \text{Frac } A_f & & \end{array}$$

est commutatif. Comme ρ_2 est bijectif et donc surjectif, il en est de même pour ρ_3 . Or, on sait déjà que ρ_3 est injectif. Donc, ρ_3 est bijectif, et il en est de même pour ρ_1 . ■

Avant d'en venir à la démonstration de la proposition 4.4.5, on énonce un autre lemme :

Lemme 4.4.7. *Soit A un anneau différentiel quasi-simple. Alors, si U est un ouvert non-vide de $\text{Spec}^{\partial} A$, l'anneau différentiel $\mathcal{O}_X(U)$ est aussi quasi-simple.*

Démonstration du lemme 4.4.7. — On garde les notations de l'énoncé. Par fonctorialité du passage au corps des fractions, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{O}_X(U) \\ \downarrow i_1 & & \downarrow i_2 \\ \mathrm{Frac} A & \xrightarrow{\mathrm{Frac} \varphi} & \mathrm{Frac} \mathcal{O}_X(U) \end{array} .$$

On passe ce diagramme aux constantes pour obtenir

$$\begin{array}{ccc} C_A & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & C_{\mathcal{O}_X(U)} \\ \downarrow \bar{i}_1 & & \downarrow \bar{i}_2 \\ C_{\mathrm{Frac} A} & \xrightarrow{\overline{\mathrm{Frac} \varphi}} & C_{\mathrm{Frac} \mathcal{O}_X(U)} \end{array} .$$

Par hypothèse, on sait que \bar{i}_1 est un isomorphisme. D'après le point *c*) du lemme précédent 4.4.6, et comme $\mathrm{Spec} A$ est un schéma intègre, on sait que $\mathrm{Frac} \varphi$ est un isomorphisme et donc que $\overline{\mathrm{Frac} \varphi}$ aussi. Par conséquent, on sait que \bar{i}_2 est surjectif. Or, \bar{i}_2 est aussi injectif car i_2 l'est. Par conséquent, \bar{i}_2 est un isomorphisme. Cela signifie bien que $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U)$ est un anneau quasi-simple. ■

On peut enfin en venir à la démonstration de la proposition 4.4.5.

Démonstration de la proposition 4.4.5. — Fixons les notations. Soit \mathcal{X} un schéma muni d'un champ de vecteurs quasi-simple. On suppose ainsi qu'il est recouvert par une famille $(U_i)_{i \in I}$ d'ouverts affines tels que, pour tout $i \in I$, l'anneau différentiel $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U_i)$ soit quasi-simple.

Considérons pour commencer le faisceau des constantes de \mathcal{X} ; rappelons que c'est le faisceau défini par

$$\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\mathrm{cte}}(U) := C_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U)}$$

pour tout ouvert U de \mathcal{X} . On considère ensuite la base $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ constituée par tous les ouverts affines contenus dans l'un au moins des U_i . Soient V_α et V_β deux éléments de cette base vérifiant $V_\alpha \subset V_\beta$. D'après le lemme précédent 4.4.7, puisque V_α et V_β sont tous deux des ouverts non-vides d'un schéma du type $\mathrm{Spec}^d A_i$ où A_i est un anneau différentiel quasi-simple, on sait que les anneaux différentiels

$$\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(V_\alpha) \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(V_\beta)$$

sont tous deux quasi-simples. Ainsi, dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} C_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(V_\beta)} & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & C_{\mathcal{O}_X(V_\alpha)} \\ \downarrow \bar{i}_1 & & \downarrow \bar{i}_2 \\ C_{\mathrm{Frac} \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(V_\beta)} & \xrightarrow{\overline{\mathrm{Frac} \varphi}} & C_{\mathrm{Frac} \mathcal{O}_X(V_\alpha)} \end{array} ,$$

les morphismes \bar{i}_1 et \bar{i}_2 sont des isomorphismes. Puis, comme V_β est affine et que \mathcal{X} est intègre, d'après le point *c*) du lemme 4.4.6, on sait aussi que $\overline{\mathrm{Frac} \varphi}$ est un isomorphisme. Par conséquent, le morphisme de restriction $\bar{\varphi}$ est aussi un isomorphisme.

On est alors dans les conditions du lemme 4.3.2, qu'on peut appliquer avec la base d'ouverts $(V_\alpha)_\alpha$ et le faisceau des constantes $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\mathrm{cte}}$: sur une base d'ouverts, toutes les restrictions sont des isomorphismes. Par conséquent, toutes les restrictions sont des isomorphismes, ce qu'on voulait démontrer. ■

Comme première application de la proposition 4.4.5, on peut démontrer la caractérisation suivante des schémas quasi-simples :

Proposition 4.4.8. *Soit \mathcal{X} un schéma muni d'un champ de vecteurs. Alors, on a :*

$$\begin{array}{c} \mathcal{X} \text{ est quasi-simple} \\ \Updownarrow \\ \forall U \text{ ouvert affine non-vide de } \mathcal{X}, \quad \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U) \text{ est un anneau différentiel quasi-simple} \end{array}$$

Démonstration. — L'implication « bas \implies haut » est évidente. Montrons l'autre implication. On note $(U_i)_i$ un recouvrement affine de \mathcal{X} tel que les anneaux $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U_i)$ soient quasi-simples. Soit maintenant U un ouvert non-vide quelconque de \mathcal{X} .

Premier cas : Si U est inclus dans les U_i , on peut conclure avec le lemme 4.4.7 : l'anneau différentiel $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U)$ est quasi-simple.

Deuxième cas : Si U est un ouvert *affine* non-vide quelconque de \mathcal{X} , on procède comme suit. Fixons U_{i_0} l'un des ouverts affines dont l'anneau est quasi-simple. Comme \mathcal{X} est intègre, l'intersection $U \cap U_{i_0}$ est non-vide. On a, comme précédemment, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} C_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U)} & \xrightarrow{\overline{\varphi}} & C_{\mathcal{O}_X(U \cap U_{i_0})} \\ \downarrow \overline{i_1} & & \downarrow \overline{i_2} \\ C_{\text{Frac } \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U)} & \xrightarrow{\overline{\text{Frac } \varphi}} & C_{\text{Frac } \mathcal{O}_X(U \cap U_{i_0})} \end{array} .$$

D'après le premier cas, qu'on vient de traiter, $\overline{i_2}$ est un isomorphisme. Comme U est affine, et d'après le lemme 4.4.6, $\overline{\text{Frac } \varphi}$ est un isomorphisme. Enfin, d'après la proposition 4.4.5, $\overline{\varphi}$ en est aussi un. Par conséquent, le morphisme $\overline{i_1}$ est un isomorphisme, ce qu'on voulait démontrer. ■

(4.4.4) Espace des feuilles grossier d'un schéma quasi-simple. Dans ce paragraphe, on montre que la construction de l'espace des feuilles grossier qu'on a faite pour les schémas simples dans la section (4.2) peut s'appliquer aux schémas quasi-simples. Cette construction repose sur la proposition 4.4.5.

Soit $\mathcal{X} = (X, \vec{\mathcal{V}})$ un schéma muni d'un champ de vecteurs quasi-simple. D'après la proposition 4.4.5, pour tout ouvert U de \mathcal{X} non-vide, le morphisme de restriction

$$\varphi_U := C_{\rho_{X \rightarrow U}} : C_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(X)} \longrightarrow C_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U)}$$

est un isomorphisme. À partir de cette collection d'isomorphismes, on définit, comme dans le cas simple, pour tout ouvert U affine non-vide, un morphisme

$$f_U : U \xrightarrow{\sim} \text{Spec}^{\partial} \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U) \longrightarrow \left(\text{Spec } C(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U)), \vec{0} \right) \xrightarrow{\text{Spec } \varphi_U^{-1}} \left(\text{Spec } C(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(X)), \vec{0} \right).$$

Cette famille $(f_U)_U$, qui est compatible aux restrictions, nous permet donc, en vertu du lemme 4.3.5 de recollement de définir un morphisme de schémas munis d'un champ de vecteurs. Si par ailleurs on note

$$C_{\mathcal{X}} := \text{Spec } C(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(X)),$$

on a donc obtenu un morphisme

$$\varphi_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \longrightarrow (C_{\mathcal{X}}, \vec{0}).$$

On a alors :

Théorème 4.4.9. *Soit \mathcal{X} un schéma muni d'un champ de vecteurs quasi-simple. Alors, avec les notations qui précèdent,*

$$\varphi_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \longrightarrow (C_{\mathcal{X}}, \vec{0}).$$

est un espace des feuilles grossier pour \mathcal{X} .

Remarque. — Comme annoncé, ce théorème montre en quoi la notion d'espace des feuilles grossier est insuffisante. En effet, dans l'exemple de la droite affine munie du champ de vecteurs radial, il y a deux trajectoires. Mais, cet espace est quasi-simple (*cf.* la proposition 4.4.1) et, donc, son espace des feuilles grossier n'a donc qu'un point — un « vrai » point de plus puisque c'est le spectre d'un corps. Cet espace des feuilles grossier n'encode donc pas exactement les informations qu'on voulait. \diamond

Pour démontrer ce théorème, on traite d'abord dans le lemme qui suit le cas affine.

Lemme 4.4.10. *Soit A un anneau différentiel quasi-simple. Alors,*

$$\varphi_A : \text{Spec}^{\partial} A \longrightarrow (\text{Spec } C_A, \vec{0})$$

est un espace des feuilles grossier pour $\text{Spec}^{\partial} A$.

Démonstration. — On garde les notations de l'énoncé. Soit donc X un schéma quelconque, avec un morphisme

$$\varphi : \text{Spec}^{\partial} A \longrightarrow (X, \vec{0}).$$

On veut montrer que φ se factorise par φ_A .

Soit V un ouvert affine de X tel que $\varphi^{-1}(V) \neq \emptyset$ et soit \mathcal{U} un ouvert affine non-vide de $\text{Spec}^{\partial} A$ contenu dans $\varphi^{-1}(V)$. On a donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \xrightarrow{\varphi|_{\mathcal{U}}} & (V, \vec{0}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec}^{\partial} A & \xrightarrow{\varphi} & (X, \vec{0}) \end{array}$$

Si on écrit $\mathcal{U} = \text{Spec}^{\partial} B$ et $V = \text{Spec } C$, et si l'on note $\phi : C \longrightarrow B$ le morphisme d'anneaux différentiels qui correspond à $\varphi|_{\mathcal{U}}$, on voit bien que ϕ se factorise uniquement par $C_B \subset B$. Or, on sait que C_B est isomorphe à C_A . Autrement dit, on a une factorisation

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{U}}} & (V, \vec{0}) \xrightarrow{\quad} (X, \vec{0}) \\ \downarrow & \nearrow f_{\mathcal{U}} & \nearrow \\ (\text{Spec } C_A, \vec{0}) & & \end{array}$$

Considérer tous les \mathcal{U} de ce type revient à considérer une base pour la topologie de $\text{Spec}^{\partial} A$. On vérifie que tous les $f_{\mathcal{U}}$ sont égaux et que cette factorisation se recolle à $\text{Spec}^{\partial} A$ tout entier. On obtient donc une factorisation

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}^{\partial} A & \xrightarrow{\varphi} & (X, \vec{0}) \\ \varphi_A \downarrow & \nearrow f & \\ (\text{Spec } C_A, \vec{0}) & & \end{array}$$

dont on vérifie aussi qu'elle est unique. ■

On peut alors démontrer le théorème 4.4.9.

Démonstration du théorème 4.4.9. — Soit \mathcal{X} un schéma muni d'un champ de vecteurs quasi-simple. Soit Y un schéma et soit

$$\varphi : \mathcal{X} \longrightarrow (Y, \vec{0})$$

un morphisme de schémas munis d'un champ de vecteurs. On veut montrer que φ que se factorise uniquement par $\varphi_{\mathcal{X}}$. Soit \mathcal{U} un ouvert non-vide affine de \mathcal{X} . On sait qu'il existe un isomorphisme naturel entre $C_{\mathcal{U}}$ et $C_{\mathcal{X}}$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{U}}} & \mathcal{X} \\ \downarrow & & \downarrow \varphi_{\mathcal{X}} \\ C_{\mathcal{U}} & \longrightarrow & C_{\mathcal{X}} \end{array}$$

D'après le cas affine qu'on vient de traiter, il existe une factorisation $f_{\mathcal{U}} : C_{\mathcal{U}} \longrightarrow (Y, \vec{0})$ qui factorise φ . On vérifie facilement que ces $f_{\mathcal{U}}$ coïncident sur $C_{\mathcal{X}}$, et que la factorisation est valable sur \mathcal{X} entier, par recollement. ■

Chapitre 5

Étude des trajectoires des schémas sans dynamique propre à base simple

Dans leur livre [vdPS03], Michael Singer et Marius van der Put prouvent la proposition suivante. C'est un lemme de théorie de Galois différentielle qui leur permet de faire le lien entre deux définitions possibles d'un corps de Picard-Vessiot.

Proposition ([vdPS03, Chap. 1, Lemma 1.23]). *Soit M un corps différentiel et C son corps des constantes. On étend la dérivation $'$ sur M en une dérivation sur $M[Y_{i,j}, \frac{1}{\det}]$ en posant $Y'_{i,j} = 0$ pour tous i, j . On voit $C[Y_{i,j}, \frac{1}{\det}]$ comme un sous-anneau de $M[Y_{i,j}, \frac{1}{\det}]$. Alors, l'application $I \mapsto (I)$ de l'ensemble des idéaux de $C[Y_{i,j}, \frac{1}{\det}]$ dans l'ensemble des idéaux différentiels de $M[Y_{i,j}, \frac{1}{\det}]$ est une bijection, dont l'inverse est donnée par $J \mapsto J \cap C[Y_{i,j}, \frac{1}{\det}]$.*

Dans la proposition ci-dessus, $k[Y_{i,j}, \frac{1}{\det}]$ désigne la k -algèbre de polynômes en les n^2 indéterminées $(Y_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ qu'on a localisée par rapport à $\det(Y_{i,j})$.

Dans ce chapitre, on se propose, à l'aide des outils développés dans les chapitres précédents (champs de vecteurs, feuilles, trajectoires, espace des feuilles grossier, etc.), de réinterpréter ce résultat et de le généraliser. Pour l'interprétation géométrique, on va voir qu'il s'agit en fait, dans une situation « en famille » du type

$$\begin{array}{c} \mathcal{X} \\ \downarrow \\ \mathcal{S} \end{array},$$

de relier les feuilles de \mathcal{X} aux points d'une fibre X_s . Dans ce cadre, la proposition de Singer et van der Put se réfère à la situation

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}^\partial M[Y_{i,j}, \frac{1}{\det}] & & \\ \downarrow & & \\ \mathrm{Spec}^\partial M & & \end{array}.$$

En ce qui concerne la généralisation de ce résultat, on procédera en trois étapes :

- D'abord, on remplacera le corps différentiel M par un anneau différentiellement simple K , et on remplacera l'anneau différentiel $M[Y_{i,j}, \frac{1}{\det}]$ par un anneau différentiel du type $K \otimes_C A$, où A est un anneau quelconque.
- Dans un second temps, on remplacera la base $\mathrm{Spec}^{\partial} K$ par un schéma différentiellement simple \mathcal{S} .
- Enfin, dans un dernier temps, on traitera le cas où l'espace total \mathcal{X} n'est pas forcément affine.

On pourra alors utiliser ce nouveau résultat pour calculer l'espace des feuilles grossier de \mathcal{X} : il s'agira d'une fibre X_s . Notons pour terminer qu'on réinterprétera ce résultat dans le chapitre (8) à l'aide de la notion d'*espace des feuilles géométrique universel*.

5.1 Introduction

On souhaite étudier la situation « en famille » d'un schéma X muni d'un champ de vecteurs et, plus particulièrement, faire le lien, dans le cas décomposé (voir la définition 5.2.1), entre les trajectoires de X et les points d'une fibre de X . Remarquons déjà que le théorème de Cauchy-Lipschitz se transpose sans difficulté au cas relatif :

Théorème 5.1.1. *Soit $\mathcal{S} = (S, \vec{\mathcal{V}}_S)$ un \mathbf{Q} -schéma muni d'un champ de vecteurs et soit $\mathcal{X} = (X, \vec{\mathcal{V}}_X)$ un schéma muni d'un champ de vecteurs, défini au-dessus de \mathcal{S} . Soient K un corps et $x : \text{Spec } K \rightarrow S$ un K -point de S . On considère la fibre de X en x :*

$$\begin{array}{ccc} X_x & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \text{Spec } K & \xrightarrow{x} & S \end{array} .$$

Alors, pour tout point $p \in X_x$, l'ensemble

$$\left\{ \eta \in X \mid \begin{array}{l} \eta \text{ est une feuille de } \vec{\mathcal{V}}_X \\ \text{et } \langle \eta \rightsquigarrow p \rangle \end{array} \right\}$$

admet un plus petit élément.

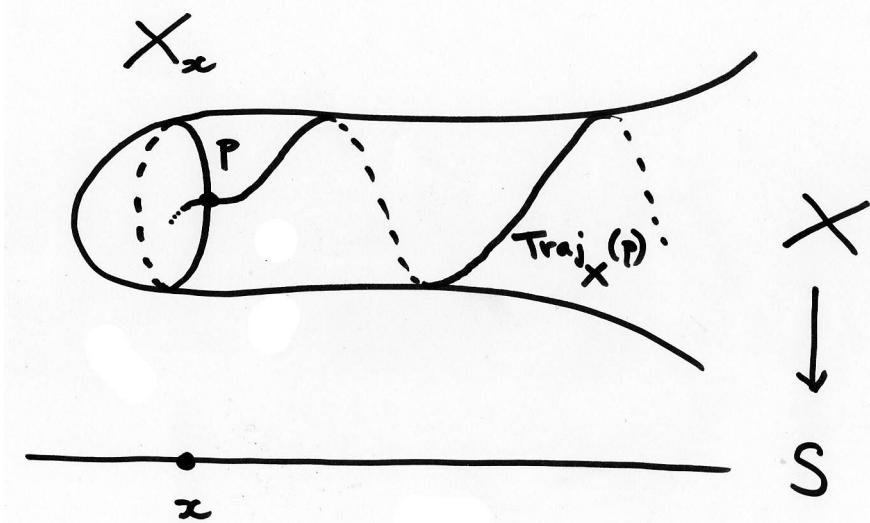


FIG. 8 – Trajectoire dans le cas d'un schéma muni d'un champ de vecteurs, « en famille ».

Démonstration. — On se place dans le cadre défini par l'énoncé. Ainsi, en particulier, on se donne un élément $p \in X_x$ dans la fibre de X au-dessus de x . Il faut éclaircir le sens de « $\eta \rightsquigarrow p$ » lorsque $\eta \in X$. On dispose, par définition, d'une flèche de X_x dans X , qu'on note ici

$$i_{X,x} : X_x \longrightarrow X.$$

Si $\eta \in X$, on dit que η passe par p , et on peut noter $\eta \rightsquigarrow p$ si $\eta \rightsquigarrow i_{X,x}(p)$. Ainsi, on cherche à savoir si l'ensemble

$$\left\{ \eta \in X \mid \begin{array}{l} \eta \text{ est une feuille de } \vec{\mathcal{V}}_X \\ \text{et } \eta \rightsquigarrow i_{X,x}(p) \end{array} \right\}$$

admet un plus petit élément ; on sait, d'après le théorème 3.4.4, que c'est oui, ce plus grand élément étant $\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}_X}(i_{X,x}(p))$. ■

(5.1.1) Problématique. Ainsi, étant donné un schéma de base, muni d'un champ de vecteurs, et qu'on note \mathcal{S} , ainsi que $\mathcal{X} \in \mathbf{Sch}^\partial$ défini au-dessus de \mathcal{S} , et étant donné x un K -point de S , on a associé à chaque point p de la fibre X_x une feuille de \mathcal{X} . La question qu'on se pose est la suivante :

Peut-on « inverser » cette opération ? Ie, dans la situation décrite ci-dessus, et étant donné une feuille η de \mathcal{X} , peut-on associer à η un point p de la fibre X_x ? Et, si oui, ces deux opérations sont-elles inverses l'une de l'autre ?

On va répondre à cette question dans le cas des *schémas sans dynamique propre*.

5.2 Schémas sans dynamique propre

(5.2.1) Introduction. On parle de schéma sans dynamique propre dans le cas où l'on dispose de deux schémas \mathcal{X} et \mathcal{S} , munis de champs de vecteurs, reliés entre eux par un morphisme

$$\begin{array}{c} \mathcal{X} \\ \downarrow \\ \mathcal{S} \end{array} .$$

Intuitivement, on dira alors que \mathcal{X} (sous-entendu \mathcal{X}/\mathcal{S}) est sans dynamique propre si « toute la dynamique de \mathcal{X} provient de celle de \mathcal{S} ». C'est ceci qu'on cherche à formaliser.

(5.2.2) Cas où la base est affine. Supposons un instant que la base \mathcal{S} soit affine, d'anneau différentiel K . Dans ce cas, on dispose d'un morphisme

$$\mathcal{S} = \mathrm{Spec}^\partial K \longrightarrow (\mathrm{Spec} C_K, \vec{0})$$

qui nous permet de transformer un schéma X_0 au-dessus de C_K en un schéma muni d'un champ de vecteurs \mathcal{X} , défini au-dessus de \mathcal{S} . C'est ainsi que dans son Lecture Notes [Bui86], Alexandru Buium définit :

Définition 5.2.1. Soit K un anneau différentiel. Soit \mathcal{X} un schéma muni d'un champ de vecteurs, défini au-dessus de $\mathcal{S} = \mathrm{Spec}^\partial K$. On dit que \mathcal{X} est décomposé⁽¹⁾ s'il existe un schéma X_0 défini au-dessus de C_K tel que

$$\mathcal{X} \simeq X_0 \otimes_{C_K} \mathcal{S}$$

où l'on a muni les schémas $\mathrm{Spec} C_K$ et X_0 des champs de vecteurs nuls.

Remarques. — Une façon équivalente de le dire est : \mathcal{X} est décomposé s'il existe un schéma constant X_0 et des morphismes qui fassent du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \longrightarrow & (X_0, \vec{0}) \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \mathcal{S} & \longrightarrow & (\mathrm{Spec} C_K, \vec{0}) \end{array}$$

un carré cartésien dans \mathbf{Sch}^∂ . Intuitivement, cela veut dire que le schéma \mathcal{X} (et son champ de vecteurs) sont obtenus à partir de X_0 , où la « dynamique » est nulle, qu'on a « étiré » le long de \mathcal{S} . En particulier, toute la « dynamique » de \mathcal{X} provient de celle de \mathcal{S} .

⁽¹⁾« *split* » en Anglais.

— Dans le cas où \mathcal{S} n'a pas de dynamique (*i.e.* dans le cas où \mathcal{S} est muni du champ de vecteurs nul), alors un schéma muni d'un champ de vecteurs \mathcal{X} au-dessus de \mathcal{S} est décomposé si, et seulement si, son champ de vecteurs est nul.

— Dans le cas où \mathcal{X} est un schéma affine, d'anneau différentiel B , demander que \mathcal{X} soit décomposé est équivalent à demander que B soit isomorphe, en tant qu'anneau différentiel, à $A \otimes_{C_K} K$ pour un anneau A muni de la dérivation nulle. \diamond

(5.2.3) Cas où la base admet un espace des feuilles grossier. Comme le voit aisément, si l'on veut étendre cette définition au cas où \mathcal{S} n'est plus forcément affine, il faut trouver un analogue pour \mathcal{S} de ce que l'anneau des constantes C_K est à K . On a vu qu'un bon candidat pour ceci était l'espace des feuilles grossier d'un schéma muni d'un champ de vecteurs. Ainsi, on définit :

Définition 5.2.2. Soit \mathcal{S} un schéma muni d'un champ de vecteurs qui admet un espace des feuilles grossier

$$\varphi_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \longrightarrow (C_{\mathcal{S}}, \vec{0}).$$

Soit \mathcal{X} un schéma muni d'un champ de vecteurs, défini au-dessus de \mathcal{S} . On dit que \mathcal{X} est sans dynamique propre s'il existe X_0 défini au-dessus de $C_{\mathcal{S}}$ et $\mathcal{X} \longrightarrow (X_0, \vec{0})$ qui fassent de

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \longrightarrow & (X_0, \vec{0}) \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \mathcal{S} & \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{S}}} & (C_{\mathcal{S}}, \vec{0}) \end{array}$$

un carré cartésien.

Remarque. — Évidemment, la question de savoir, dans le cas affine où $\mathcal{S} = \text{Spec}^{\partial} K$, si les deux notions coïncident revient à la question de savoir si $\text{Spec}^{\partial} K \longrightarrow (C_K, \vec{0})$ est toujours un espace des feuilles grossier. On vu que si K était quasi-simple, c'était bien le cas. \diamond

5.3 Étude des trajectoires dans le cas sans dynamique propre à base et espace total affines

Ces définitions étant posées, on revient à notre problème initial : étant donné

$$\begin{array}{c} \mathcal{X} \\ \downarrow \\ \mathcal{S} \end{array}$$

et un point s de S , peut-on relier les points de la fibre X_s avec les feuilles de \mathcal{X} ? Pour commencer, on répond à cette question dans le cas sans dynamique propre, quand la base \mathcal{S} et l'espace total \mathcal{X} sont affines.

(5.3.1) Un problème d'algèbre différentielle. Soit K un anneau différentiel, dont on note C l'anneau des constantes. Soit A une C -algèbre, qu'on voit comme une C -algèbre différentielle, en la munissant de la dérivée nulle. On s'intéresse au problème suivant :

Peut-on relier les idéaux de A et les idéaux différentiels de $A \otimes_C K$?

(5.3.2) Un problème de géométrie algébrique. Cette question générale d'algèbre différentielle est reliée au problème de géométrie algébrique suivant. Le lien tel qu'il est exprimé ci-dessous est une « évocation géométrique » du problème d'algèbre précédent. On énoncera des liens plus précis plus loin, dans les énoncés. Contentons-nous pour le moment de cette évocation. On part d'un morphisme

$$S \longrightarrow S_0$$

de schémas. On munit S et S_0 de champs de vecteurs : pour S_0 on choisit le champ de vecteurs nul ; pour S on prend un champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$ quelconque, mais qui doit se projeter sur le champ de vecteurs nul de S_0 ; on note \mathcal{S} le nouvel objet obtenu. Il faut penser par exemple au cas où $S_0 = \text{Spec } \mathbf{C}$ et où

$$\mathcal{S} = \text{Spec}^\partial \left(\begin{array}{c} \mathbf{C}[t] \\ \text{avec } t' = 1 \end{array} \right),$$

la droite affine $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^1$, munie du champ de vecteurs constant de longueur 1. Puis, on considère un schéma X_0 défini au-dessus de S_0 , qu'on munit lui-aussi du champ de vecteurs nul. On s'intéresse au schéma $\mathcal{X} := X_0 \otimes_{S_0} \mathcal{S}$, défini au-dessus de \mathcal{S} , muni canoniquement d'un champ de vecteurs $\vec{\mathcal{W}}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \longrightarrow & X_0 \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \mathcal{S} & \longrightarrow & S_0 \end{array}$$

Intuitivement, X est un espace fibré au-dessus de S , de fibre constante X_0 , et dont le champ $\vec{\mathcal{W}}$ « n'a que des composantes le long de \mathcal{S} ». Notre problème est alors le suivant :

Peut-on relier, et si oui, comment, les sous-variétés de X_0 et les sous-variétés de X qui sont tangentes au champ $\vec{\mathcal{W}}$?

(5.3.3) Problème d'algèbre différentielle : premiers éléments de réponse. Revenons au problème d'algèbre différentielle. Soient ainsi K un anneau différentiel, C son anneau des constantes et A une C -algèbre, qu'on munit de la dérivée nulle. On s'intéresse à la K -algèbre différentielle $A \otimes_C K$. On note $i : A \longrightarrow A \otimes_C K$ la flèche canonique

$$i : \begin{array}{c} A \longrightarrow A \otimes_C K \\ f \longmapsto f \otimes 1 \end{array},$$

qui va nous permettre de comparer les idéaux de A et les idéaux différentiels de $A \otimes_C K$.

On considère les deux flèches suivantes :

$$\begin{array}{ccc} \text{idéaux de } A & \longrightarrow & \text{idéaux différentiels de } A \otimes_C K \\ \textit{Traj :} & I \longmapsto & \langle i(I) \rangle \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} & \text{idéaux différentiels de } A \otimes_C K & \longrightarrow \text{idéaux de } A \\ \textit{Section :} & J \longmapsto & i^{-1}(J) \end{array}$$

On leur a donné des noms qui laissent entrevoir la substance géométrique de ces applications. On peut déjà remarquer que, si I est un idéal de A , alors l'idéal engendré par l'image $i(I)$ de I dans $A \otimes_C K$ est égal à l'idéal *differentiel* de $A \otimes_C K$ engendré par $i(I)$. Pour voir cela, il suffit de montrer que $(i(I))$ est déjà différentiel. Soit ainsi $x \in (i(I))$; on peut l'écrire :

$$x = \sum_{j=0}^n a_j \otimes \lambda_j,$$

où $n \in \mathbf{N}_{\geq 1}$, où les a_j sont des éléments de I et où les λ_j sont dans K . Comme A est muni de la dérivée nulle, si $a \in A$ et si $\lambda \in K$, la formule qui donne la dérivée de $a \otimes \lambda$ est :

$$(a \otimes \lambda)' = a \otimes (\lambda').$$

Ainsi, on voit que

$$x' = \sum_{j=0}^n a_j \otimes (\lambda_j'),$$

est encore un élément de $(i(I))$: $(i(I))$ est bien un idéal différentiel. La question qu'on se pose est la suivante :

Les applications $Traj$ et $Section$ sont-elles réciproques l'une de l'autre ?

On cherche ainsi à généraliser le lemme 1.23 du chapitre 1 de [vdPS03], qui étudie cette situation dans le cas où K est un corps différentiel (ici, K est un anneau différentiel) et où $A = C[Y_{i,j}]_{\det}$. Demandons-nous dans un premier temps : étant donné I un idéal de A a-t-on

$$I = Section(Traj(I))?$$

On a une inclusion qui est toujours vraie et facile à voir. C'est

$$I \subset i^{-1}(\langle i(I) \rangle) \quad \text{ie} \quad I \subset Section(Traj(I)).$$

L'inclusion réciproque est vraie si K est un C -module libre — elle est donc vraie en particulier si C est un corps. Pour le montrer, on utilise le lemme suivant :

Lemme 5.3.1 (Proposition 4.1 de [Lan02]). *Soient $A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux. Soit M un A -module libre de base $(m_i)_{i \in I}$. Alors, $B \otimes_A M$ est un B -module libre de base $(m_i \otimes 1)_{i \in I}$.*

On prouve :

Lemme 5.3.2. *En reprenant les notations précédentes, si K est libre en tant que C -module, alors, pour tout idéal I de A , on a*

$$I = i^{-1}(\langle i(I) \rangle) \quad \text{ie} \quad I = Section(Traj(I)).$$

Démonstration. — En effet, dans ces conditions, soit $(e_j)_{j \in J}$ une C -base de K , avec $e_{j_0} = 1$. D'après le lemme 5.3.1, la famille $(1 \otimes e_j)_{j \in J}$ est une A -base de $A \otimes_C K$. Soit $a \in i^{-1}(\langle i(I) \rangle)$: on a donc $a \otimes 1 \in \langle i(I) \rangle$. Soient donc $a_1, \dots, a_n \in I$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ tels que

$$a \otimes 1 = \sum_{i=1}^n a_i \otimes \lambda_i.$$

En exprimant les λ_i dans la C -base $(e_j)_j$ de K , on peut donc trouver $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m \in I$ tels que

$$a \otimes 1 = \sum_{i=1}^m \tilde{a}_i \otimes e_{j(i)},$$

où $j : \{1, \dots, m\} \rightarrow J$ est une application injective. Comme $(1 \otimes e_j)_j$ est une base, on a que $a \in I$, ce qu'on voulait. ■

(5.3.4) Égalité duale. Intéressons-nous maintenant à la seconde égalité : a-t-on, si J est un idéal différentiel de $A \otimes_C K$,

$$J = \langle i(i^{-1}J) \rangle \quad \text{ie} \quad J = \text{Traj}(\text{Section}(J))?$$

Là encore, une des deux inclusions est toujours vraie et facile à voir. C'est :

$$\text{Traj}(\text{Section}(J)) \subset J.$$

On s'intéresse à l'autre inclusion. Notre nouvelle question est donc :

*Étant donné K un anneau différentiel, A une algèbre au-dessus de C
— l'anneau des constantes de K , munie de la dérivation nulle —
et étant donné J un idéal différentiel de $A \otimes_C K$,
a-t-on $J \subset \text{Traj}(\text{Section}(J))$, ie a-t-on $J \subset \langle i(i^{-1}J) \rangle$?*

On va répondre à cette question en faisant l'hypothèse que K est un anneau différentiel simple.

Lemme 5.3.3. Soient K un anneau différentiel simple et C son anneau des constantes. Soit A une C -algèbre, qu'on munit de la dérivation nulle. On considère l'anneau différentiel $A \otimes_C K$, dont on note $i : A \longrightarrow A \otimes_C K$ le morphisme canonique associé. Alors, pour tout idéal différentiel J de $A \otimes_C K$, on a

$$J = \langle i(i^{-1}J) \rangle.$$

Autrement dit, $J = \text{Traj}(\text{Section}(J))$.

On va avoir besoin pour la démonstration de ce lemme de l'analogue différentiel de la notion d'idéal des polynômes annulateurs d'un élément.

Soit B un anneau différentiel. On note $B[\partial]$ la B -algèbre non-commutative des opérateurs différentiels linéaires à coefficients dans B :

$$B[\partial] := \left\{ \sum_{i=0}^N a_i \partial^i \mid N \in \mathbf{N}, a_i \in B \right\}$$

Si $f \in B$, on appelle *idéal des équations différentielles linéaires vérifiées par f* et on note $\text{EqDiffLin}_B(f)$ l'idéal à gauche de $B[\partial]$ défini par

$$\text{EqDiffLin}_B(f) = \{L \in B[\partial] \mid L \bullet f = 0\}.$$

Démonstration du lemme 5.3.3. — Soit K un anneau différentiel simple. On note $C = C_K$ son anneau des constantes. Soit A une C -algèbre, qu'on munit de la dérivation nulle. Tout élément x de $A \otimes_C K$ s'écrit

$$x = \sum_{j=1}^n a_j \otimes \lambda_j$$

avec $n \in \mathbf{N}$, $(a_j)_j \in A^n$ et $(\lambda_j)_j \in K^n$. On appelle *longueur de x* et on note $\ell(x)$ le plus petit $n \in \mathbf{N}$ tel qu'il existe une écriture de x « de longueur n ». On a alors, par exemple, que $\ell(x) = 0$ si, et seulement si, x est nul ; et, que $\ell(x) = 1$ si, et seulement si, x est un « tenseur pur » non-nul.

Soit maintenant J un idéal différentiel de A . On montre par récurrence sur $\ell(x) \in \mathbf{N}$ que

$$x \in J \implies x \in \text{Traj}(\text{Section}(J)).$$

Si $\ell(x) = 0$, c'est que $x = 0$ et donc, l'assertion est bien vraie. Si $\ell(x) = 1$, alors x s'écrit $x = a \otimes \lambda$, avec $a \in A$ et $\lambda \in K$, tous deux non-nuls. Comme $\lambda \neq 0$ et que K est différentiellement simple, l'idéal différentiel $\langle \lambda \rangle$ est K tout entier et contient donc 1. Par conséquent, il existe $L \in K[\partial]$ tel que $L \bullet \lambda = 1$. En appliquant l'opérateur L à x , on obtient un élément $L \bullet x$ qui est encore dans J , puisque J est un idéal différentiel, et qui vaut :

$$L \bullet x = L \bullet (a \otimes \lambda) = a \otimes (L \bullet \lambda) = a \otimes 1.$$

Par conséquent, $a \in i^{-1}(J)$ et $x \in \langle i(i^{-1}(J)) \rangle$.

Soit maintenant $x \in J$ de longueur $\ell(x) = n+1$. On suppose que l'assertion est démontrée pour les éléments de longueur $\leq n$. Soient $(a_i)_i \in A^{n+1}$ et $(\lambda_i)_i \in K^{n+1}$ tels que

$$x = \sum_{j=1}^{n+1} a_j \otimes \lambda_j.$$

On peut supposer que

$$\forall (j, k) \in \{1, \dots, n+1\}^2, \quad \text{EqDiffLin}_K(\lambda_j) = \text{EqDiffLin}_K(\lambda_k).$$

En effet, supposons que ce ne soit pas le cas. On peut donc trouver j_1 et j_2 deux entiers distincts compris entre 1 et $n+1$ qui vérifient

$$\text{EqDiffLin}_K(\lambda_{j_2}) \not\subseteq \text{EqDiffLin}_K(\lambda_{j_1}).$$

Soit alors $L \in K[\partial]$ un opérateur tel que $L \bullet \lambda_{j_1} = \widehat{\lambda_{j_1}} \neq 0$ et $L \bullet \lambda_{j_2} = 0$. Comme l'ensemble

$$\left\{ T \bullet \widehat{\lambda_{j_1}} \mid T \in K[\partial] \right\}$$

est un idéal différentiel de K , qui est différentiellement simple, et contient $\widehat{\lambda_{j_1}}$, qui est un élément non-nul, il existe donc un opérateur $T \in K[\partial]$ tel que $T \bullet \widehat{\lambda_{j_1}} = \lambda_{j_1}$. Ainsi, on peut en fait trouver un opérateur $L \in K[\partial]$ tel que $L \bullet \lambda_{j_1} = \lambda_{j_1}$ et $L \bullet \lambda_{j_2} = 0$. En appliquant l'opérateur L à x , on obtient un élément $L \bullet x$ qui est encore dans J et qui est de longueur $l(L \bullet x) \leq n$: cela se voit en écrivant

$$L \bullet x = \sum_{j=1}^{n+1} a_j \otimes (L \bullet \lambda_j).$$

Par conséquent, par hypothèse de récurrence, $L \bullet x \in \text{Traj}(\text{Section}(J))$. Mais, l'élément $x - L \bullet x$ est lui aussi dans J et de longueur $\leq n$: cela se voit en écrivant

$$x - L \bullet x = \sum_{j=0}^{n+1} a_j \otimes (\lambda_j - L \bullet \lambda_j).$$

Par conséquent, $x - L \bullet x \in \text{Traj}(\text{Section}(J))$; et donc, il en est de même pour x .

Supposons donc que

$$\forall (j, k) \in \{1, \dots, n+1\}^2, \quad \text{EqDiffLin}_K(\lambda_j) = \text{EqDiffLin}_K(\lambda_k).$$

L'élément λ_1 est évidemment non-nul (s'il était nul, cela contredirait $\ell(x) = n+1$). On peut donc trouver $L \in K[\partial]$ tel que $L \bullet \lambda_1 = 1$. Dans ce cas, pour tout $0 \leq j \leq n+1$, l'élément $L \bullet \lambda_j$ est une constante. En effet, l'opérateur $\partial \cdot L$ annule λ_1 donc annule tous les λ_j : on a, pour tout j , $(L \bullet \lambda_j)' = 0$. Notons c_j ces constantes. L'élément $L \bullet x$ est dans J et s'écrit :

$$L \bullet x = \sum_{j=1}^{n+1} a_j \otimes c_j = \sum_{j=1}^{n+1} a_j c_j \otimes 1 = \left(\sum_{j=1}^{n+1} a_j c_j \right) \otimes 1.$$

Il est donc de longueur plus petite que 1. Il est donc dans $Traj(Section(J))$. Il en est de même pour $\lambda_1 \cdot L \bullet x$. Puis, l'élément

$$x - \lambda_1 L \bullet x$$

est aussi dans J et est de longueur $\leq n$. Il est donc aussi dans $Traj(Section(J))$. Et donc, x aussi, ce qui achève notre démonstration. ■

Remarque. — Contrairement à ce qu'on avait dû faire pour le lemme 5.3.2, on n'a pas eu besoin pour ce lemme, de supposer que K soit un C -module libre. Néanmoins, comme on l'a vu dans la proposition 4.1.4, comme K est supposé simple, C_K est un corps et la condition précédente est automatiquement vérifiée. ◇

On peut récapituler ce qui précède en :

Proposition 5.3.4. *Soit K un anneau différentiel simple et C son anneau des constantes. Soit A une C -algèbre, qu'on munit de la dérivation nulle, dont on note $i : A \rightarrow A \otimes_C K$ le morphisme canonique associé. Alors, les deux applications*

$$\begin{array}{ccc} \text{idéaux de } A & \longrightarrow & \text{idéaux différentiels de } A \otimes_C K \\ \text{Traj :} & I \longmapsto & \langle i(I) \rangle \\ & \text{et} & \\ \text{Section :} & \text{idéaux différentiels de } A \otimes_C K & \longrightarrow \text{idéaux de } A \\ & J \longmapsto & i^{-1}(J) \end{array}$$

sont bijectives et réciproques l'une de l'autre.

(5.3.5) Retour au problème initial. Dans ce qui précède, on a relié, comme on le souhaitait, les idéaux différentiels de $A \otimes_C K$ et les idéaux de A . Cependant, les résultats qu'on a obtenus ne nous satisfont pas entièrement dans la mesure où :

- a) on souhaiterait avoir une correspondance entre idéaux premiers, de manière, entre autres, à exprimer les résultats en termes de schémas et de trajectoires.
- b) on souhaiterait étudier les trajectoires du schéma

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & & \\ \downarrow & , & \\ \mathcal{S} & & \end{array}$$

en fonction des points d'une fibre de X , comme décrit dans le paragraphe (5.1.1). Or, la flèche $i : A \rightarrow A \otimes_C K$ qu'on a considérée jusqu'à maintenant ne correspond pas à « l'inclusion » d'une fibre X_s dans la famille $X \rightarrow S$; elle va dans le sens opposé et elle correspond plus à une projection.

On va ainsi revenir à la situation géométrique que l'on souhaitait étudier et faire le lien avec la situation précédente. Dans notre cadre, cela veut dire qu'on va considérer un C -point x de S , autrement dit, un morphisme $K \rightarrow C$. Comme on le constatera, les choses se déroulent bien.

Pour commencer, le lemme 5.3.3 a pour conséquence le lemme suivant :

Lemme 5.3.5. Soit K un anneau différentiel simple, dont on note C l'anneau des constantes. Soit A une C -algèbre munie de la dérivation nulle. Soit $\varphi : K \rightarrow C$ un morphisme de C -algèbres. On note

$$i : \begin{array}{c} A \longrightarrow A \otimes_C K \\ a \longmapsto a \otimes 1 \end{array} \quad \text{et} \quad j : \begin{array}{c} A \otimes_C K \longrightarrow A \\ a \otimes \lambda \longmapsto a\varphi(\lambda) \end{array} .$$

Alors, pour tout idéal différentiel J de $A \otimes_C K$, on a :

$$i^{-1}(J) = j(J).$$

Démonstration. — On garde les notations de l'énoncé. Remarquons, pour commencer, que $j(J)$ égale l'idéal qu'il engendre : en effet, j est surjectif. Soit J un idéal différentiel de $A \otimes_C K$. On a bien que $i^{-1}(J) \subset j(J)$: c'est toujours vrai. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $y \in j(J)$; cela veut dire qu'il existe $x \in J$ tel que $y = j(x)$. D'après le lemme 5.3.3, $x \in (i(i^{-1}(J)))$. Cela veut dire que x peut s'écrire

$$x = \sum_{l=1}^n a_l \otimes \lambda_l$$

avec les a_l vérifiant $a_l \otimes 1 \in J$. Ainsi,

$$y = \sum_{l=1}^n a_l \cdot \varphi(\lambda_l).$$

Comme $a_l \otimes 1 \in J$, $a_l \in i^{-1}(J)$, et donc, $y \in i^{-1}(J)$. ■

Remarque. — Il est naturel de se demander si l'énoncé « dual » est vrai. Plus précisément, on peut se demander si, étant donné I un idéal de A , on a (sous ces hypothèses) $(i(I)) = j^{-1}(I)$. La réponse est non, en général. En effet, si c'était le cas, alors, pour tout idéal I de A , l'idéal $j^{-1}(I)$ serait différentiel (puisque on a vu que l'idéal $(i(I))$ l'est toujours).

Ceci n'est pas possible comme on le voit dans l'exemple qui suit. On considère $K = \mathbf{C}[t]$ muni de la dérivée $t' = 1$, $\varphi : \mathbf{C}[t] \rightarrow \mathbf{C}$ l'évaluation en a (pour un $a \in \mathbf{C}$). Comme \mathbf{C} -algèbre, on choisit $A := \mathbf{C}$, de sorte que le morphisme j s'écrit $j = \varphi : \mathbf{C}[t] \rightarrow \mathbf{C}$. Soit alors $I = (0)$ l'idéal nul de \mathbf{C} . L'idéal $j^{-1}(I)$ est l'idéal des polynômes qui s'annulent en a ; autrement dit, $j^{-1}(I) = (t - a)$. Or, cet idéal n'est pas différentiel, ce qui constitue une contradiction. ◇

L'énoncé « dual » du lemme 5.3.5 est en fait le suivant :

Proposition 5.3.6. Soit K un anneau différentiel simple, dont on note C l'anneau des constantes. Soit A une C -algèbre munie de la dérivation nulle. Soit $\varphi : K \rightarrow C$ un morphisme de C -algèbres. On note

$$i : \begin{array}{c} A \longrightarrow A \otimes_C K \\ a \longmapsto a \otimes 1 \end{array} \quad \text{et} \quad j : \begin{array}{c} A \otimes_C K \longrightarrow A \\ a \otimes \lambda \longmapsto a\varphi(\lambda) \end{array}.$$

Alors, pour tout idéal I de A , on a :

$$j^{-1}(I)_\# = (i(I)).$$

Démonstration. — Rappelons (*cf.* le fait 3.4.9) que si B est un anneau différentiel et si I est un idéal de B , $I_\# = \{x \in B \mid \forall n \in \mathbf{N}, x^{(n)} \in I\}$ est le plus grand idéal différentiel de B contenu dans I .

On reprend les notations de l'énoncé. Soit I un idéal de A . D'abord, on a bien $(i(I)) \subset j^{-1}(I)$. En effet, si $x \in (i(I))$, c'est-à-dire si x s'écrit

$$x = \sum_i x_i \otimes \lambda_i$$

avec les x_i dans I , alors $j(x) = \sum_i x_i \varphi(\lambda_i)$ est bien dans I . Par ailleurs, on a déjà vu que $(i(I))$ est un idéal différentiel de $A \otimes_C K$. La question qu'on se pose est donc de savoir si c'est le plus grand. Considérons donc J un idéal différentiel tel que

$$(i(I)) \subset J \subset j^{-1}(I).$$

En appliquant i^{-1} à ces inclusions, on a donc

$$i^{-1}(i(I)) \subset i^{-1}(J) \subset i^{-1}(j^{-1}(I)).$$

Or, d'après le lemme 5.3.2, $i^{-1}(i(I)) = I$, et d'après le lemme 5.3.5, $i^{-1}(j^{-1}(I)) = j(j^{-1}(I))$ et, comme j est surjectif, $j(j^{-1}(I)) = I$. Par conséquent, l'encadrement ci-dessus s'écrit

$$I \subset i^{-1}(J) \subset I.$$

En appliquant i à cette égalité, et tenant compte du fait que $(i(i^{-1}J)) = J$, par le lemme 5.3.3, on obtient donc que $J = (i(I))$.

Ainsi, $(i(I))$ est bien le plus grand idéal différentiel contenu dans $j^{-1}(I)$, ce qu'on voulait démontrer. ■

Ainsi, en particulier, on obtient ce corollaire tout à fait remarquable :

Corollaire 5.3.7. Soient K une \mathbf{Q} -algèbre différentielle simple et C son anneau des constantes. On suppose qu'il existe un morphisme

$$\varphi : K \longrightarrow C.$$

Soit A une C -algèbre, qu'on munit de la dérivation nulle. On considère l'anneau différentiel $A \otimes_C K$, dont on note $i : A \rightarrow A \otimes_C K$ le morphisme canonique associé. Alors, pour tout idéal premier \mathfrak{p} de A , l'idéal $(i(\mathfrak{p}))$ est un idéal différentiel premier de $A \otimes_C K$.

Démonstration. — En effet, d'après la proposition 5.3.6 qui précède, et en gardant les notations de l'énoncé, on a

$$(i(\mathfrak{p})) = j^{-1}(\mathfrak{p})_\#.$$

L'idéal $j^{-1}(\mathfrak{p})$ est premier et, d'après la proposition 3.4.10, on a

$$j^{-1}(\mathfrak{p})_{\#} = j^{-1}(\mathfrak{p})^{\delta},$$

qui est un idéal premier. ■

Ainsi, les applications *Traj* et *Section*, dont on a déjà vu qu'elles établissent une bijection entre idéaux et idéaux différentiels, établissent une bijection entre les idéaux *premiers* de A et les idéaux *premiers* différentiels de $A \otimes_C K$.

Remarque. — Dans le corollaire 5.3.7, l'hypothèse « il existe un morphisme $K \rightarrow C$ », si elle nous est utile dans la démonstration, n'intervient pas dans la conclusion. Ainsi, il est vraisemblable qu'il existe une version plus générale de ce corollaire. Ainsi, on conjecture :

Petite conjecture 5.3.8. *Soient K un anneau différentiel simple et C son anneau des constantes. Soit A une C -algèbre, munie de la dérivation nulle. On considère l'anneau différentiel $A \otimes_C K$, et $i : A \rightarrow A \otimes_C K$ le morphisme canonique associé. Alors, pour tout idéal premier \mathfrak{p} de A , l'idéal $(i(\mathfrak{p}))$ est un idéal différentiel premier de $A \otimes_C K$.*

On voit deux pistes pour démontrer un tel résultat. D'abord, on peut essayer de le démontrer directement, en utilisant des techniques telles que celles employées pour la démonstration du lemme 5.3.3, à savoir l'utilisation d'opérateurs différentiels linéaires et de récurrences sur la longueur $\ell(x)$ d'un élément. Une autre possibilité pour le démontrer serait de reprendre les différents résultats de ce paragraphe, en remplaçant le morphisme $K \rightarrow C$ par un morphisme $K \rightarrow \tilde{C}$ où \tilde{C} est un corps mais pas nécessairement C . ◇

(5.3.6) Retour à la situation géométrique. Venons-en maintenant à la situation géométrique qui nous intéresse. Soit K un anneau différentiel simple (on peut garder à l'esprit, par exemple, que $\mathbf{C}[t]$ muni de la dérivation $t' = 1$ est un anneau différentiel simple). On note C son anneau des constantes. Le schéma de base qu'on considère, pour les familles qu'on va étudier, est $\mathcal{S} = \text{Spec}^{\partial} K$. On considère ainsi

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} \\ \downarrow \\ \mathcal{S} \end{array}$$

un schéma X au-dessus de S , muni d'un champ de vecteurs \mathcal{V} , compatible à celui de \mathcal{S} . On fait de plus l'hypothèse que X est affine, et que \mathcal{X}/\mathcal{S} est dans dynamique propre. Ainsi, on suppose que X est le spectre de $A \otimes_C K$ où A est une C -algèbre quelconque.

Soit alors $x : \text{Spec } C \rightarrow S$ un C -point de S (vu comme C -schéma). Autrement dit, soit $\varphi : K \rightarrow C$ un morphisme de C -algèbres. On considère la fibre de X en x :

$$\begin{array}{ccc} X_x & \xrightarrow{i_{X,x}} & X \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \text{Spec } C & \xrightarrow{x} & S \\ & \swarrow & \searrow \\ & C & \end{array}$$

Vu la situation géométrique dans laquelle on est, on peut facilement déterminer quelle est la fibre X_x et quel est le morphisme $i_{X,x}$. Cela vient du fait que le schéma X est formé par hypothèse sur le modèle $X_0 := \text{Spec } A$, le long de \mathcal{S} ; c'est-à-dire que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X_0 \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ S & \longrightarrow & \text{Spec } C \end{array}$$

est cartésien. Comme la juxtaposition de deux carrés cartésiens est encore un carré cartésien, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_x & \longrightarrow & X_0 \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \text{Spec } C & \xrightarrow{\text{Id}} & \text{Spec } C \end{array},$$

qui est la juxtaposition des deux diagrammes précédents, est cartésien, et donc X_x est isomorphe à X_0 . Pour déterminer la flèche $i_{X,x}$, on cherche un morphisme $A \otimes_C K \rightarrow A$ qui fasse commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} A & \xleftarrow{?} & A \otimes_C K & \xleftarrow{i} & A \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ C & \xleftarrow{\varphi} & K & \longleftarrow & C \end{array}$$

et tel que composé avec i , il soit égal à Id_A . On vérifie facilement que la seule solution est le morphisme

$$j : \begin{array}{c} A \otimes_C K \longrightarrow A \\ a \otimes \lambda \longmapsto a\varphi(\lambda) \end{array}$$

qu'on a étudié précédemment.

On a alors le lemme suivant :

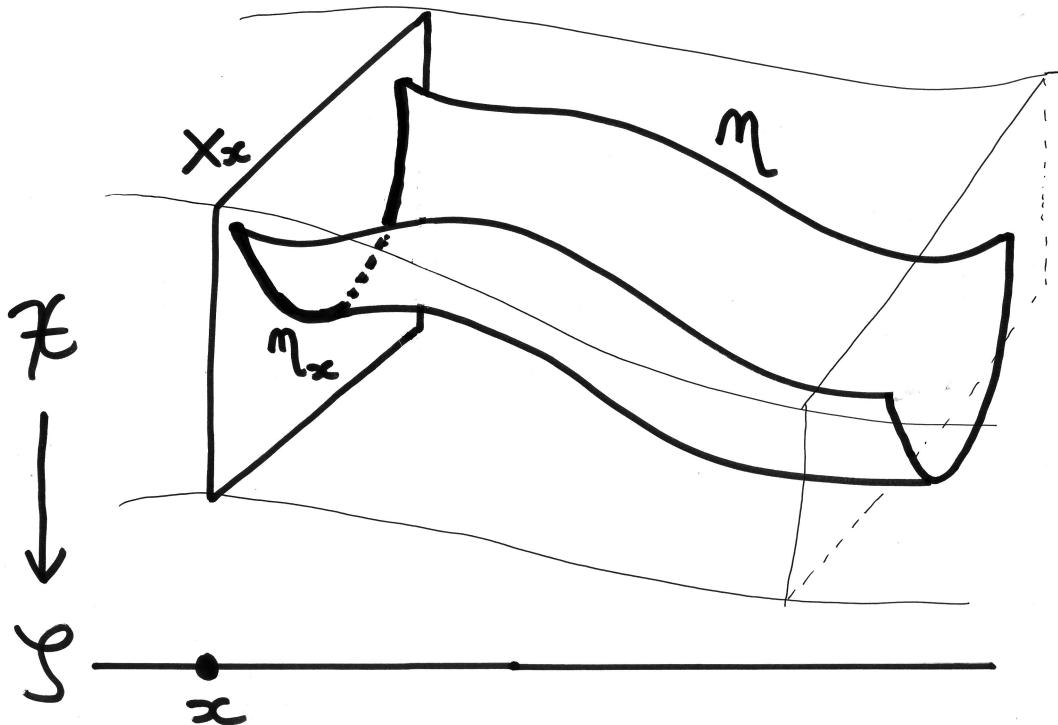
Lemme 5.3.9. *Avec les notations qui précèdent, si η est une feuille de \mathcal{X} , alors « η intersecte X_x en un unique point ». Plus précisément, cela veut dire qu'il existe un unique $\eta_x \in X_x$ tel que*

$$\forall y \in X_x, \quad \eta_x \rightsquigarrow y \iff \eta \rightsquigarrow i_{X,x}(y).$$

Remarque. — Cela peut paraître un peu compliqué pour caractériser l'intersection de η et de X_x . En effet, on s'attendrait plutôt à une caractérisation de η_x par

$$\exists! \eta_x \in X_x \mid \eta \rightsquigarrow i_{X,x}(\eta_x).$$

Mais, cette assertion échoue à caractériser l'intersection de η avec X_x dans le cas où η est de dimension ≥ 2 (*cf.* la figure 9). Il existe en effet dans ce cas de multiples points $y \in X_x$ qui se trouvent sur η . Ce qu'on souhaite dans ce cas-là, c'est que « tous ces multiples points » y se regroupent sous la houlette d'un seul point η_x . ◇

FIG. 9 – Section η_x en x d'une trajectoire η : cas où η est de dimension 2.

Démonstration. — L'unicité est évidente. Pour l'existence, d'après le lemme 5.3.5, si \mathfrak{p} est un idéal différentiel premier de $A \otimes_C K$, alors $j(\mathfrak{p})$ est un idéal premier de A . C'est cet idéal qui est le « point d'intersection » entre η et X_x , pour $\mathfrak{p} = \eta$. ■

Dans la suite, si η est une feuille de \mathcal{X} , on note $\text{Section}_x(\eta)$ cet unique point η_x . On peut alors énoncer le théorème suivant, qui répond à notre question initiale, dans le cas où la base est affine et l'espace total l'est également :

Théorème 5.3.10. Soient K une \mathbf{Q} -algèbre différentielle simple et $C = C_K$. On note $\mathcal{S} = \text{Spec}^{\partial} K$. Soit x un C -point de \mathcal{S} . Soit alors

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & & \\ \downarrow & & \\ \mathcal{S} & & \end{array}$$

un schéma affine muni d'un champ de vecteurs sans dynamique propre. Avec les notations précédentes, les applications

$$\text{Traj}_{\vec{\gamma}} : \begin{array}{ccc} X_x & \longrightarrow & \text{feuilles de } \mathcal{X} \\ p \mapsto & & \text{Traj}_{\vec{\gamma}}(p) \end{array} \quad \text{et} \quad \text{Section}_x : \begin{array}{ccc} \text{feuilles de } \mathcal{X} & \longrightarrow & X_x \\ \eta \mapsto & & \text{Section}_x(\eta) \end{array}$$

sont réciproques l'une de l'autre.

Démonstration. — D'un point de vue « algèbre commutative », cela revient à prouver que

les applications suivantes sont réciproques l'une de l'autre. D'une part

$$\begin{array}{ccc} \text{idéaux premiers de } A & \longrightarrow & \text{idéaux différentiels et premiers de } A \otimes_C K \\ \mathfrak{p} & \longmapsto & j^{-1}(\mathfrak{p})^\delta \end{array}$$

et, d'autre part,

$$\begin{array}{ccc} \text{idéaux différentiels et premiers de } A \otimes_C K & \longrightarrow & \text{idéaux premiers de } A \\ \mathfrak{q} & \longmapsto & j(\mathfrak{q}) \end{array}$$

C'est exactement la proposition 5.3.4, restreinte aux idéaux premiers, vue à travers le lemme 5.3.5 et la proposition 5.3.6. ■

5.4 Cas où la base n'est pas forcément affine

(5.4.1) Notations. On suppose désormais que la base n'est plus affine. Soit donc \mathcal{S} un \mathbb{Q} -schéma muni d'un champ de vecteurs simple, dont on note S le schéma sous-jacent. On sait que \mathcal{S} admet un espace des feuilles grossier

$$\varphi_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \longrightarrow (C_{\mathcal{S}}, \vec{0}).$$

On sait que $C_{\mathcal{S}}$ est le spectre d'un corps. On se donne X_0 un schéma *affine* au-dessus de $C_{\mathcal{S}}$. On considère

$$\mathcal{X} := \mathcal{S} \times_{(C_{\mathcal{S}}, \vec{0})} (X_0, \vec{0});$$

On note X le schéma sous-jacent et \mathcal{V} le champ de vecteurs dont il est muni. Enfin, on se donne un $C_{\mathcal{S}}$ -point x de \mathcal{S} . On note X_x la fibre de X et $i_{X,x} : X_x \longrightarrow X$ le morphisme qui « inclut » X_x dans X .

(5.4.2) Section d'une feuille par la fibre. Tout d'abord, il s'agit, comme dans le lemme 5.3.9, de montrer qu'une feuille η de \mathcal{X} coupe la fibre X_x en un seul point. La figure 10 montre le cas qu'on souhaite exclure.

On montre donc :

Lemme 5.4.1. *Avec les notations qui précèdent, si η est une feuille de \mathcal{X} , alors « η intersecte X_x en un unique point ». Plus précisément, cela veut dire qu'il existe un unique $\eta_x \in X_x$ tel que*

$$\forall y \in X_x, \quad \eta_x \rightsquigarrow y \iff \eta \rightsquigarrow i_{X,x}(y).$$

On note ce point $\text{Section}_x(\eta) := \eta_x$.

Pour démontrer ce lemme, on va avoir besoin de deux autres lemmes.

Lemme 5.4.2. *Soit*

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ & \downarrow & \\ B & \longrightarrow & C \end{array}$$

un diagramme de schémas, et soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de A . Alors, $(U_i \times_C B)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de $A \times_C B$.

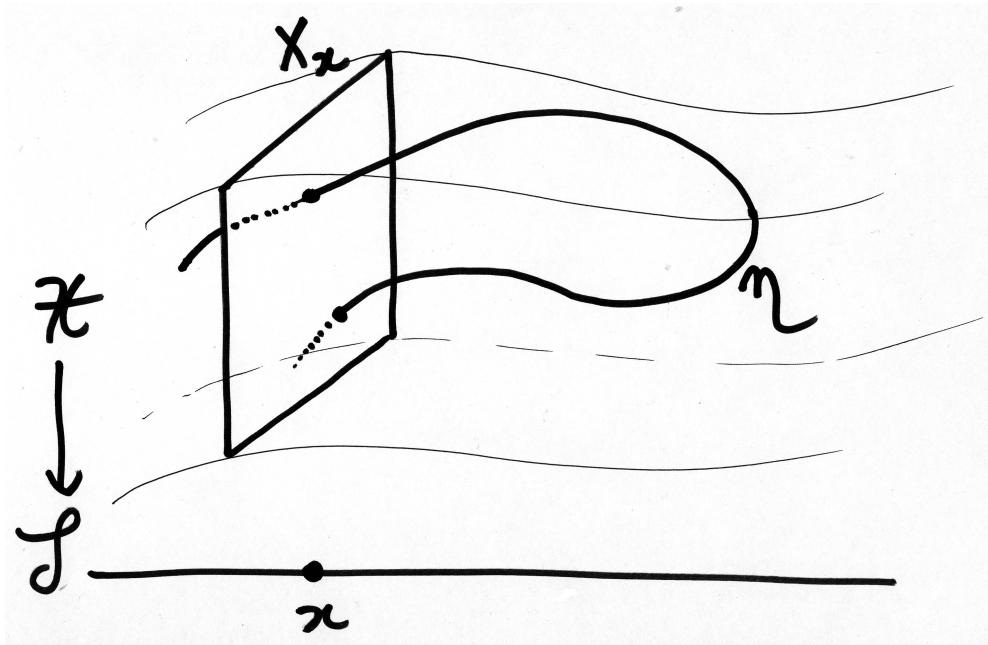


FIG. 10 – Cas (à exclure) où la trajectoire coupe la fibre en deux points.

Démonstration du lemme 5.4.2. — D'abord, grâce à la proposition (4.3.1) de [EGA_I], on sait que le produit de deux immersions (ouvertes, fermées) est une immersion (ouverte, fermée). En particulier, les immersions ouvertes sont stables par changement de base. Donc, pour tout i , le morphisme $U_i \times_C B \rightarrow A \times_C B$ est une immersion ouverte. Montrons maintenant que cette famille d'ouverts recouvre $A \times_C B$. Pour cela, il suffit de montrer que le morphisme

$$\coprod_i U_i \times_C B \rightarrow A \times_C B$$

est surjectif. Or, on sait, d'après la proposition (3.5.2) de [EGA_I], que les morphismes surjectifs sont stables par changement de base. Comme $\coprod_i U_i \rightarrow A$ est surjectif, il en est donc de même pour

$$\coprod_i U_i \times_C B = \left(\coprod_i U_i \right) \times_C B \rightarrow A \times_C B,$$

ce qui achève la preuve. ■

Lemme 5.4.3. *Avec les notations du paragraphe (5.4.1), si η est une feuille de \mathcal{X} , alors, pour tout ouvert non-vide U de S , on a $\eta \in U \times_{C_S} X_0$.*

Démonstration du lemme 5.4.3. — On montre d'abord la proposition dans le cas où S est affine. On écrit donc $\mathcal{S} = \text{Spec}^{\partial} K$, où K est un anneau différentiel simple. On note $C = C_K$ et on considère A une C -algèbre. On considère $\mathcal{X} = \text{Spec}^{\partial}(A \otimes_C K)$. Soit donc $\eta := \mathfrak{p}$ un idéal différentiel de $A \otimes_C K$. On veut montrer que η est dans tout ouvert de X du type $U \times_C X_0$, où U est un ouvert de S non-vide. Il suffit de le montrer pour les ouverts distingués $D(f)$ de S . Soit donc $f \in K$, un élément non-nul. La question qu'on se pose est de savoir s'il existe un idéal premier \mathfrak{q} de $A \otimes_C K_f$ tel que \mathfrak{p} soit l'image inverse de \mathfrak{q} par l'application

$$i_f : A \otimes_C K \rightarrow A \otimes_C K_f. \tag{1}$$

Remarquons d'abord qu'on a :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall x \in A \otimes_C K, \quad f^n x \in \mathfrak{p} \implies x \in \mathfrak{p}.$$

En effet, soient $n \in \mathbf{N}$ et $x \in A \otimes_C K$ tels que $f^n x \in \mathfrak{p}$. Supposons que $x \notin \mathfrak{p}$. Alors, comme \mathfrak{p} est premier, on a $f^n \in \mathfrak{p}$. Comme f^n est non-nul et que K est un anneau différentiel simple, on sait qu'il existe $L \in K[\partial]$ tel que $L \bullet (f^n) = 1$. Ainsi, on aurait $1 \in \mathfrak{p}$, ce qui est absurde ; donc, on a bien $x \in \mathfrak{p}$. Puis, on montre que l'idéal $(i_f(\mathfrak{p}))$ est premier. Déjà, on note que les éléments de $(i_f(\mathfrak{p}))$ sont exactement les p/f^n , avec $p \in \mathfrak{p}$ et $n \in \mathbf{N}$. De même, d'ailleurs, les éléments de $A \otimes_C K_f$ sont les x/f^m . Supposons donc qu'on ait deux éléments $\alpha, \beta \in A \otimes_C K_f$ tels que $\alpha\beta \in (i_f(\mathfrak{p}))$. En tenant compte de ce qu'on vient de dire, on sait qu'il existe $x, y \in A \otimes_C K$ et $m, n, q \in \mathbf{N}$ tels que

$$\alpha = \frac{x}{p^n} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{y}{p^m} \quad \text{et} \quad f^q xy \in \mathfrak{p}.$$

D'après (1), on voit bien qu'on a α ou β qui appartient à $(i_f(\mathfrak{p}))$. De même, on montre que

$$i_f^{-1}(i_f(\mathfrak{p})) = \mathfrak{p},$$

ce qui montre ce qu'on voulait dans le cas affine.

Revenons au cas général. On sait, d'après le lemme 5.4.2, qu'il existe un ouvert affine U_0 de S tel que $\eta \in U_0 \times_{C,\mathcal{S}} X_0$. Soit alors U un ouvert non-vide quelconque de S . Comme S est irréductible, on a $U \cap U_0 \neq \emptyset$. On peut donc appliquer le cas affine : on sait que $\eta \in (U \cap U_0) \times_{C,\mathcal{S}} X_0$. En particulier, $\eta \in U \times_{C,\mathcal{S}} X_0$. ■

On peut maintenant en venir à notre lemme initial : démontrer que toute feuille coupe la fibre X_x .

Démonstration du lemme 5.4.1. — Avec les notations de (5.4.1), soit donc $\eta \in X$ une feuille de \mathcal{X} . Soit U un ouvert affine de S « dans lequel tombe x ». D'après le lemme 5.4.3, on sait que $\eta \in U \times_{C,\mathcal{S}} X_0$. On s'est ainsi ramené au cas où la base est affine. On peut donc appliquer le lemme 5.3.9, qui nous donne l'existence du point d'intersection entre η et la fibre lorsque la base est affine. ■

(5.4.3) Dès lors, le fait qu'il y ait une bijection entre les éléments de la fibre X_x et les feuilles de \mathcal{X} est direct : comme dans la preuve ci-dessus, il suffit de se placer dans un ouvert affine de la base \mathcal{S} dans lequel tombe le point x . On a donc :

Proposition 5.4.4. *Avec les notations qui précèdent, les applications*

$$\begin{aligned} Traj_{\vec{\gamma}} : \quad & X_x \longrightarrow \text{feuilles de } \mathcal{X} \\ & p \longmapsto Traj_{\vec{\gamma}}(p) \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} Section_x : \quad & \text{feuilles de } \mathcal{X} \longrightarrow X_x \\ & \eta \longmapsto Section_x(\eta) \end{aligned}$$

sont réciproques l'une de l'autre.

5.5 Cas général

(5.5.1) Notations. On reprend les notations du paragraphe (5.4.1). La seule différence est qu'on ne suppose plus X_0 affine.

(5.5.2) Section d'une trajectoire par la fibre. Le première chose à définir, comme dans le cas précédent, est l'application Section_x : il faut vérifier que si η est une feuille de \mathcal{X} , alors η coupe la fibre X_x en un seul point. C'est l'objet du lemme suivant :

Lemme 5.5.1. *Avec les notations qui précèdent, pour toute feuille η de \mathcal{X} , il existe un unique $\eta_x \in X_x$ tel que*

$$\forall y \in X_x, \quad \eta \rightsquigarrow i_{X,x}(y) \iff \eta_x \rightsquigarrow y.$$

On note ce point $\text{Section}_x(\eta) := \eta_x$.

Démonstration. — L'unicité est facile à voir. Supposons en effet que l'on ait deux tels éléments $\eta_{x,1}$ et $\eta_{x,2}$. Comme $\eta_{x,1} \rightsquigarrow \eta_{x,1}$, on a donc $\eta \rightsquigarrow i_{X,x}(\eta_{x,1})$, en utilisant la caractérisation de $\eta_{x,1}$. Donc, en utilisant la caractérisation de $\eta_{x,2}$, on a $\eta_{x,2} \rightsquigarrow \eta_{x,1}$. De même, on a $\eta_{x,1} \rightsquigarrow \eta_{x,2}$ et donc $\eta_{x,1} = \eta_{x,2}$.

Passons maintenant à l'existence. Soit η une feuille de \mathcal{X} . D'après le lemme 5.4.2, les schémas

$$U_i \times_{C_S} S$$

pour U_i ouvert affine de X_0 recouvrent X . Soit donc $U \times_{C_S} S$ un tel ouvert affine qui contient η . Pour la même raison que ce qu'on a expliqué en (5.3.6), on peut remarquer, pour la clarté de notre propos, que la fibre en x de $U \times_{C_S} S$ est isomorphe à U . Puis, maintenant que l'espace total est affine, on peut appliquer le lemme 5.4.1 :

$$\exists! \eta_{U,x} \in U, \quad \forall y \in U, \quad \eta_{U,x} \rightsquigarrow y \iff \eta \rightsquigarrow i_{X,x}(y).$$

On veut montrer que ces $\eta_{U,x}$ sont tous les mêmes. Soient donc deux ouverts U et V tels que η appartienne à la fois à $U \times_{C_S} S$ et à $V \times_{C_S} S$. Alors, on a

$$\eta \in (U \cap V) \times_{C_S} S.$$

Puis, on procède comme suit. Le point $\eta_{U \cap V,x}$ appartient à $U \cap V$ donc à U . Par ailleurs, il vérifie : $\eta \rightsquigarrow i_{X,x}(\eta_{U \cap V,x})$. Donc, en appliquant la propriété de $\eta_{U,x}$, on a : $\eta_{U,x} \rightsquigarrow \eta_{U \cap V,x}$. Comme les ouverts sont stables par généralisation, et que $\eta_{U \cap V,x} \in U \cap V$, on a donc $\eta_{U,x} \in U \cap V$. Comme on a $\eta \rightsquigarrow i_{X,x}(\eta_{U,x})$, en appliquant la propriété de $\eta_{U,x}$, on a donc $\eta_{U \cap V,x} \rightsquigarrow \eta_{U,x}$. Ainsi, on a montré que $\eta_{U,x} = \eta_{U \cap V,x}$. Comme on peut faire la même chose avec V , on en déduit que $\eta_{U,x} = \eta_{V,x}$, ce qui conclut la preuve. ■

(5.5.3) On peut énoncer et démontrer notre théorème dans toute sa généralité :

Théorème 5.5.2. *Avec les notations de (5.5.1), les applications*

$$\begin{array}{ccc} X_x & \longrightarrow & \text{feuilles de } \mathcal{X} \\ \text{Traj}_{\mathcal{V}} : & p \longmapsto & \text{Traj}_{\mathcal{V}}(p) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \text{feuilles de } \mathcal{X} & \longrightarrow & X_x \\ \text{Section}_x : & \eta \longmapsto & \text{Section}_x(\eta) \end{array}$$

sont réciproques l'une de l'autre.

Démonstration. — Comme on l'a vu dans la démonstration précédente, les choses se passent « ouvert affine par ouvert affine ». On entend par cela que si une feuille η de \mathcal{X} appartient à un ouvert du type $U \times_{C_S} S$, avec U un ouvert affine de X_0 , alors le point d'intersection de η avec X_x sera aussi dans U . De même, si $y \in X_x$ est dans un ouvert affine U de X_x , alors la trajectoire η de y appartiendra à $U \times_{C_S} X_0$. Pour vérifier que

$$\text{Section}_x \circ \text{Traj}_{\mathcal{V}} = \text{Id} \quad \text{et} \quad \text{Traj}_{\mathcal{V}} \circ \text{Section}_x = \text{Id},$$

on peut donc se placer dans de tels ouverts. Dans ce cas, ces égalités résultent de la proposition 5.4.4. ■

(5.5.4) Contre-exemples. Le théorème 5.5.2 est faux si l'on ne suppose pas la base \mathcal{S} simple. Même si la base \mathcal{S} est quasi-simple, il est faux. En effet, si on prend comme base \mathcal{S} la droite \mathbf{A}_C^1 munie du champ radial, comme schéma $X_0 = \mathbf{A}_C^1$, et qu'on prend $x = 1$, par exemple, alors les points de la fibre X_x « détecteront » toutes les trajectoires, à l'exception des points de la fibre X_0 , qui sont tous invariants.

Si la base est simple mais que l'espace \mathcal{X}/\mathcal{S} n'est pas « sans dynamique propre », là aussi on peut donner des contre-exemples. Dans la figure 11, si x est un point quelconque du cercle, la fibre X_x est dénombrable, alors qu'il n'y a qu'une seule trajectoire.

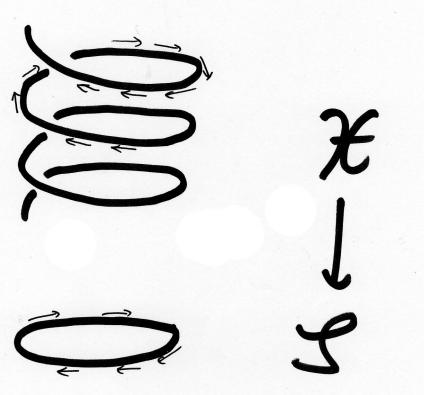


FIG. 11 – Contre-exemple (transcendant) lorsque \mathcal{X}/\mathcal{S} n'est pas sans dynamique propre.

5.6 Espace des feuilles grossier d'un schéma sans dynamique propre au-dessus d'une base simple

Le théorème 5.5.2 nous fournit un outil, à savoir l'application Section_x qui facilite l'étude des schémas sans dynamique propre au-dessus d'une base simple. Ainsi, en guise d'application, on calcule l'espace des feuilles grossier de tels schémas. Pour cela, on va avoir besoin du lemme suivant :

Lemme 5.6.1. *Avec les notations de (5.5.1), et en notant $p : \mathcal{X} \rightarrow X_0$, on a*

$$\forall x \in X, \quad i_{X,x}(p(x)) = \text{Section}_x(\text{Traj}_{\mathcal{V}}(x)).$$

Démonstration. — On le démontre dans le cas où X_0 et S sont affines. Pour passer du cas affine au cas non-affine, il suffit de procéder comme dans la démonstration du lemme 5.4.1 par exemple.

On se donne donc K un anneau différentiel simple, on note C son anneau des constantes (qui est un corps). Soit A une C -algèbre. On se donne aussi $\varphi : K \rightarrow C$. On considère, comme on l'a fait dans la section (5.3) les morphismes

$$i : A \rightarrow A \otimes_C K \quad \text{et} \quad j = \text{Id}_A \otimes \varphi : A \otimes_C K \rightarrow A.$$

Soit $\mathfrak{p} = x$ un idéal premier de $A \otimes_C K$. On montre d'abord que

$$\text{Traj}_{\mathcal{V}}(i_{X,x}(p(x))) = \text{Traj}_{\mathcal{V}}(x).$$

En termes de i et de j , on veut montrer que

$$(j^{-1}(i^{-1}\mathfrak{p}))^\delta \stackrel{?}{=} \mathfrak{p}^\delta.$$

Or, $(j^{-1}(i^{-1}\mathfrak{p}))^\delta = (i(i^{-1}\mathfrak{p}))$ d'après la proposition 5.3.6. On veut donc montrer que $(i(i^{-1}\mathfrak{p})) = \mathfrak{p}^\delta$. Déjà, l'idéal $(i(i^{-1}\mathfrak{p}))$ est bien un idéal différentiel. Ensuite, on a bien $(i(i^{-1}\mathfrak{p})) \subset \mathfrak{p}$. Enfin, si J est un idéal différentiel inclus dans \mathfrak{p} , on a

$$J \subset \mathfrak{p} \quad \text{donc} \quad (i(i^{-1}J)) \subset (i(i^{-1}\mathfrak{p})).$$

Or, d'après le lemme 5.3.3, on a $(i(i^{-1}J)) = J$. Donc, $(i(i^{-1}\mathfrak{p}))$ est bien le plus grand idéal différentiel inclus dans \mathfrak{p} : on a

$$(i(i^{-1}\mathfrak{p})) = \mathfrak{p}^\delta.$$

Maintenant, on montre que

$$\forall x \in X, \forall y \in X_x, \quad \text{Traj}_{\mathcal{V}}(y) = \text{Traj}_{\mathcal{V}}(x) \implies y = \text{Section}_x(\text{Traj}_{\mathcal{V}}(x)).$$

Soit donc $y = \mathfrak{q}$ un idéal premier de A et soit toujours $x = \mathfrak{p}$ un idéal premier de $A \otimes_C K$. On suppose que

$$(j^{-1}\mathfrak{q})^\delta = \mathfrak{p}^\delta. \tag{2}$$

D'après la proposition 5.3.6, on a $(j^{-1}\mathfrak{q})^\delta = (i(\mathfrak{q}))$. En appliquant i^{-1} à (2), et en tenant compte du lemme 5.3.3, on obtient que

$$\mathfrak{q} = i^{-1}(\mathfrak{p}^\delta).$$

Or d'après le lemme 5.3.5, on sait que $i^{-1}(J) = j(J)$ dès que J est un idéal différentiel de $A \otimes_C K$. Ainsi, on a montré que

$$\mathfrak{q} = j(\mathfrak{p}^\delta),$$

ce qui veut exactement dire que $y = \text{Section}_x(\text{Traj}_{\mathcal{V}}(x))$.

Ainsi, en mettant bout à bout :

$$\begin{aligned} \forall x \in X, \quad & \text{Traj}_{\mathcal{V}}(i_{X,x}(p(x))) = \text{Traj}_{\mathcal{V}}(x) \\ \forall x \in X, \forall y \in X_x, \quad & \text{Traj}_{\mathcal{V}}(y) = \text{Traj}_{\mathcal{V}}(x) \implies y = \text{Section}_x(\text{Traj}_{\mathcal{V}}(x)) \end{aligned}$$

on obtient

$$\forall x \in X, \quad i_{X,x}(p(x)) = \text{Section}_x(\text{Traj}_{\mathcal{V}}(x)),$$

ce qu'on voulait. ■

Proposition 5.6.2. *Avec les notations et les hypothèses de (5.5.1),*

$$\mathcal{X} \longrightarrow (X_0, \vec{0})$$

est un espace des feuilles grossier de \mathcal{X} .

Remarque. — On verra dans la section (8.6) une version améliorée de ce résultat : en fait, $\mathcal{X} \longrightarrow (X_0, \vec{0})$ est un espace des feuilles géométrique. ◇

Démonstration. — Soit Y un k -schéma et $f : \mathcal{X} \longrightarrow (Y, \vec{0})$ un morphisme. On veut construire un morphisme $g : X_0 \longrightarrow Y$ qui factorise f . On pose

$$g : X_0 \xrightarrow{i_{X,x}} X \xrightarrow{f} Y.$$

Vérifions que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 p \downarrow & \nearrow i_{X,x} & \swarrow f \\
 X_0 & & X
 \end{array}$$

commute. Soit $x \in X$. D'après le lemme 5.6.1, on sait que

$$i_{X,x}(p(x)) = \text{Section}_x(\text{Traj}_{\mathcal{V}}(x)).$$

En particulier, $i_{X,x}(p(x))$ et x ont la même trajectoire. Par conséquent, on sait que

$$f(x) = f(i_{X,x}(p(x))),$$

ce qu'on voulait. L'unicité d'une telle factorisation vient du fait que $p \circ i_{X,x} = \text{Id}_{X_0}$. ■

Quatrième partie

**Faisceau de Carrà Ferro d'un
schéma muni d'un champ de
vecteurs**

Chapitre 6

Topologie et faisceau de Carrà Ferro

Dans ce chapitre, on réinterprète et on généralise à la lumière des champs de vecteurs et des trajectoires l'article [CF90] de Giuseppa Carrà Ferro. Soit

$$\mathcal{X} = (X, \vec{\mathcal{V}})$$

un \mathbf{Q} -schéma muni d'un champ de vecteurs. De la même façon qu'on a défini, dans le chapitre (3), ce qu'est un point invariant $\eta \in X$ sous le champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$ (*ie* une feuille), on commence celui-ci par la définition de ce que sont les fermés et les ouverts invariants sous $\vec{\mathcal{V}}$. On peut alors montrer un théorème de Cauchy-Lipschitz pour les ouverts de X :

Théorème. *Soit X un \mathbf{Q} -schéma, muni d'un champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$. Soit $U \in \mathbf{Ouv}(X)$ un ouvert de X . Alors, l'ensemble*

$$\left\{ V \in \mathbf{Ouv}(X) \mid \begin{array}{c} V \supset U \\ \text{et} \\ V \text{ est invariant sous le champ de vecteurs } \vec{\mathcal{V}} \end{array} \right\}$$

possède un plus petit élément. On l'appelle ouvert invariant sous $\vec{\mathcal{V}}$ associé à U et on le note U^δ .

Ce théorème apparaît comme une géométrisation et une généralisation au cas non-affine du lemme 1.5 de [CF90], dont on rappelle ici l'énoncé :

Proposition ([CF90, Lemma 1.5]). *Soit A un anneau différentiel. Pour tout ouvert U de $\text{diff-Spec } A$, il existe un ouvert Zariski U_Δ de $\text{Spec } A$ tel que*

- (i) $U_\Delta \cap \text{diff-Sp } A = U$
- (ii) $U_\Delta \supset \text{Spec } A \setminus \overline{\text{diff-Spec } A}^{\text{Zar}}$
- (iii) *Si V est un ouvert Zariski de $\text{Spec } A$ tel que $V \cap \text{diff-Spec } A = U$, alors $V \subset U_\Delta$.*

L'ouvert U_Δ de Carrà Ferro correspond évidemment à l'ouvert U^δ . Elle démontre ensuite que, sous certaines hypothèses, on a

$$U_\Delta \cap V_\Delta = (U \cap V)_\Delta \quad \text{et} \quad \bigcup_{i \in I} U_{i\Delta} = \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right)_\Delta.$$

On généralise ces résultats au cas non-affine, ce qui nous permet de définir la *topologie de Carrà Ferro de \mathcal{X}* : c'est la famille des ouverts de X invariants sous le champ $\vec{\mathcal{V}}$.

On peut alors définir deux faisceaux sur $\text{diff-Spec } A$:

- le *faisceau de Keigher* $\mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(\text{Keigher})}$;
- le *faisceau de Carrà Ferro* $\mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(\text{CF})}$.

Ces deux faisceaux sont définis comme les restrictions du faisceau structural de $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}$, quand on munit $\text{Spec } A$ soit de la topologie de Zariski, soit de la topologie de Carrà Ferro. On montre alors que le faisceau de Carrà Ferro peut aussi être défini comme le poussé en avant de $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}$ par l'application $\text{Traj} : \text{Spec } A \longrightarrow \text{diff-Spec } A$: c'est ce faisceau que Giuseppa Carrà Ferro utilise pour définir les *schémas de Kolchin* dans [CF90]. On retrouve en particulier le fait que

$$\Gamma\left(\text{diff-Spec } A, \mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(\text{CF})}\right) = A.$$

6.1 Fermés et ouverts invariants

Soit X un \mathbf{Q} -schéma muni d'un champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$. On a donné dans le paragraphe (3.2.5) la définition d'un point invariant sous l'action du champ $\vec{\mathcal{V}}$. On peut généraliser cette notion de stabilité sous le champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$ aux ouverts et aux fermés de X . On définit :

Définition 6.1.1. Soit X un \mathbf{Q} -schéma muni d'un champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$. Un fermé F de X est dit invariant sous le champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$ si

$$\forall x \in F, \quad \text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x) \in F.$$

Un ouvert U de X est dit invariant sous le champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$ si le fermé complémentaire $X \setminus U$ l'est.

Comme un fermé est stable par *spécialisation*, ie comme on a, si F est un fermé,

$$(x \in F \text{ et } x \rightsquigarrow y) \implies y \in F,$$

on a en particulier que si F est un fermé invariant et si $x \in F$, alors la trajectoire de x , *ainsi que « ses points sous-jacents »* appartiennent à F . Dans le cas affine, on peut caractériser les fermés invariants ainsi :

Proposition 6.1.2. Soit $X = \text{Spec } A$ un schéma affine défini sur \mathbf{Q} , muni d'un champ de vecteurs ∂_A . Soit I un idéal de A . Alors,

$$V(I) \text{ invariant sous } \vec{\mathcal{V}} \iff \sqrt{I} = \sqrt{\langle I \rangle}.$$

Démonstration. —

\Leftarrow : On montre d'abord que, si I est un idéal différentiel, alors $V(I)$ est invariant sous $\vec{\mathcal{V}}$. En effet, soit, sous ces hypothèses, $\mathfrak{p} \in V(I)$, ie \mathfrak{p} un idéal premier de A vérifiant $I \subset \mathfrak{p}$. Par définition de l'idéal différentiel associé à \mathfrak{p} , on a $I \subset \mathfrak{p}^\delta$ et donc : $\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}} \in V(I)$, ce qui montre ce qu'on voulait. Maintenant, si I est quelconque et que $\sqrt{I} = \sqrt{\langle I \rangle}$, alors, comme $V(I) = V(\sqrt{I})$, le cas précédent s'applique : en effet, comme $\sqrt{I} = \sqrt{\langle I \rangle}$ et comme $\sqrt{\langle I \rangle}$ est un idéal différentiel — cf. proposition 1.2.1, \sqrt{I} en est aussi un. Donc, $V(I)$ est une fermé invariant.

\Rightarrow : Réciproquement, supposons que $V(I)$ soit invariant sous $\vec{\mathcal{V}}$. *A priori*, on a

$$V(\langle I \rangle) \subset V(I).$$

L'inclusion réciproque est aussi vérifiée : soit $\mathfrak{p} \in V(I)$. Alors, l'idéal associé à \mathfrak{p} vérifie :

$$I \subset \mathfrak{p}^\delta \subset \mathfrak{p} \quad \text{et donc} \quad \langle I \rangle \subset \mathfrak{p}^\delta \subset \mathfrak{p},$$

puisque c'est un idéal différentiel. On a donc : $\mathfrak{p} \in V(\langle I \rangle)$. Par conséquent, $V(I) = V(\langle I \rangle)$ et donc (lemme II.2.1 de [Har77], par exemple) $\sqrt{I} = \sqrt{\langle I \rangle}$. ■

(6.1.1) Ouvert invariant associé à un ouvert. Maintenant, si U est un ouvert d'un schéma X muni d'un champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$, de la même façon qu'on associe à un point $x \in X$ sa trajectoire sous l'action du champ $\vec{\mathcal{V}}$, on peut considérer l'ouvert déduit de U sous l'action du champ $\vec{\mathcal{V}}$. On pourra remarquer la similitude entre la proposition qui suit et le théorème 3.4.4 qui définit $\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x)$.

Théorème 6.1.3 (Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les ouverts). *Soit X un \mathbf{Q} -schéma, muni d'un champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$. Soit $U \in \mathbf{Ouv}(X)$ un ouvert de X . Alors, l'ensemble*

$$\left\{ V \in \mathbf{Ouv}(X) \mid \begin{array}{c} V \supset U \\ \text{et} \\ V \text{ est invariant sous le champ de vecteurs } \vec{\mathcal{V}} \end{array} \right\}$$

possède un plus petit élément. On l'appelle ouvert invariant sous $\vec{\mathcal{V}}$ associé à U et on le note U^δ .

La notion d'ouvert invariant est locale : c'est ce qu'on exprime par les deux lemmes qui suivent, qu'on utilisera pour démontrer le théorème.

Lemme 6.1.4. *Soit X un \mathbf{Q} -schéma muni d'un champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$. Soit U un ouvert quelconque de X . Alors, si V un ouvert de X invariant sous $\vec{\mathcal{V}}$, $U \cap V$ est un ouvert invariant de U sous $\vec{\mathcal{V}}|_U$.*

Lemme 6.1.5. *Soit X un \mathbf{Q} -schéma muni d'un champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$. Soit $(U_i)_{i \in I}$ une base d'ouverts de X . Soit, pour tout $i \in I$, V_i un ouvert invariant de U_i , telle que la famille $(V_i)_{i \in I}$ soit compatible, ie telle que*

$$\forall (i, j) \in I^2, \quad U_i \subset U_j \implies V_i = V_j \cap U_i.$$

Alors, $\bigcup_{i \in I} V_i$ est un ouvert invariant de X .

Démonstration du premier lemme. — Soient V un ouvert invariant de X et U un ouvert quelconque. Montrons que $F := U \setminus (U \cap V)$ est invariant. Soit $x \in F$. Alors, en particulier, $x \in X \setminus V$, donc $\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x) \in X \setminus V$. Mais, $\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x)$ est aussi dans U car c'est une généralisation de x , qui lui aussi est dans U . Ainsi, $\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x) \in F$, et donc, $U \cap V$ est invariant sous $\vec{\mathcal{V}}$. ■

Démonstration du second lemme. — Soit $(U_i)_{i \in I}$ une base d'ouverts de X . Soit, pour tout $i \in I$, V_i un ouvert invariant de U_i , telle que la famille $(V_i)_{i \in I}$ soit compatible. Cette condition peut aussi s'exprimer

$$\forall (i, j) \in I^2, \quad U_i \subset U_j \implies \begin{array}{ccc} V_i & \hookrightarrow & V_j \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ U_i & \hookrightarrow & U_j \end{array},$$

à l'aide de la notion de carré cartésien. On note $F_i := U_i \setminus V_i$ le fermé complémentaire de V_i dans U_i et $V = \bigcup_{i \in I} V_i$. Montrons que le fermé

$$F := X \setminus V = X \setminus \bigcup_{i \in I} V_i$$

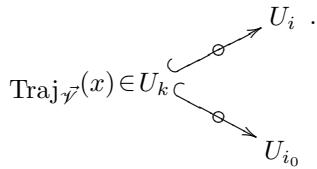
est invariant. Soit $x \in F$. Soit $i \in I$. On veut montrer que $\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x)$ n'appartient pas à V_i .

Premier cas : Si $x \in U_i$, alors $x \in F_i$. Comme F_i est invariant sous $\vec{\mathcal{V}}$, on a donc $\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x) \in F_i$: en particulier, $\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x) \notin V_i$.

Deuxième cas : Supposons $x \notin U_i$. On raisonne par l'absurde et on suppose que $\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x) \in V_i$. Soit i_0 tel que $x \in U_{i_0}$. En particulier, $\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x)$, qui est une généralisation de x , est aussi dans U_{i_0} . Par conséquent,

$$\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x) \in U_i \cap U_{i_0}.$$

Soit donc, puisque $(U_j)_{j \in I}$ est une base d'ouverts, $k \in I$ tel que U_k soit inclus dans $U_i \cap U_{i_0}$ et contienne $\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x)$. On est donc dans la situation



On a par ailleurs, $V_k = V_i \cap U_k$. Or, $\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x)$ est dans U_k , et aussi dans V_i , par hypothèse absurde. Donc, $\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x) \in V_k$. Or, $V_k = V_{i_0} \cap U_k$. Donc, $V_k \subset V_{i_0}$ et donc $\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x) \in V_{i_0}$. D'après le premier cas traité juste au-dessus, c'est absurde, ce qui démontre le second lemme. ■

Pour démontrer l'existence de l'ouvert invariant associé à un ouvert, pour un schéma quelconque, on va d'abord traiter le cas des schémas affines.

Proposition 6.1.6. *Soient A une \mathbf{Q} -algèbre différentielle et $X = \text{Spec } A$ un schéma affine, muni d'un champ de vecteurs ∂_A . Soit $U \in \mathbf{Ouv}(X)$ un ouvert de X . Alors, l'ensemble*

$$\left\{ V \in \mathbf{Ouv}(X) \mid \begin{array}{l} V \supset U \\ \text{et} \\ V \text{ est invariant sous le champ de vecteurs } \vec{\mathcal{V}} \end{array} \right\}$$

possède un plus petit élément. On le note U^δ .

Démonstration. — Soit U un ouvert de $\text{Spec } A$, dont le fermé complémentaire est $V(I)$, avec I idéal de A . Chercher le plus petit ouvert de X contenant U et invariant sous $\vec{\mathcal{V}}$ revient à chercher le plus grand fermé de X inclus dans $V(I)$ et invariant sous $\vec{\mathcal{V}}$. On suppose I radiciel. D'après la proposition 6.1.2, on cherche donc le plus petit idéal radiciel J , contenant I et vérifiant

$$J = \sqrt{\langle J \rangle}.$$

Ainsi, un tel J est, comme $\sqrt{\langle J \rangle}$, un idéal différentiel. Par conséquent, J contient forcément $\langle I \rangle$. Et, comme J est radiciel, J contient forcément $\sqrt{\langle I \rangle}$. Comme l'idéal $K = \sqrt{\langle I \rangle}$ vérifie

$$K = \sqrt{\langle K \rangle},$$

c'est donc l'idéal qu'on recherche. ■

La démonstration précédente donne en fait une expression explicite de U^δ : si U est un ouvert de $\text{Spec } A$ décrit par $U = (\text{Spec } A) \setminus V(I)$, alors $U^\delta = (\text{Spec } A) \setminus V(\langle I \rangle)$. Ces ouverts U^δ vérifient la propriété de compatibilité suivante :

Lemme 6.1.7. Soient (A, ∂_A) et (B, ∂_B) deux \mathbf{Q} -algèbres différentielles, et soit $\phi : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux différentiels. On note $\varphi : \text{Spec } B \longrightarrow \text{Spec } A$ le morphisme de schémas correspondant à ϕ . Soit U un ouvert de $\text{Spec } A$. Alors :

$$(\varphi^{-1}(U))^\delta = \varphi^{-1}(U^\delta).$$

Démonstration. — En effet, avec les notations de l'énoncé, soit I un idéal de A tel que $U = \text{Spec } A \setminus V(I)$. On note $\phi(I)B$ l'idéal engendré par l'image de I par ϕ : les éléments de $\phi(I)B$ sont les sommes finies $\sum \phi(a_i)b_i$. On a alors $\varphi^{-1}(U) = \text{Spec } B \setminus V(\phi(I)B)$. Ainsi, démontrer le lemme revient à démontrer l'égalité

$$\phi(\langle I \rangle_A)B = \langle \phi(I)B \rangle_B.$$

On montre facilement, d'abord, que $\phi(\langle I \rangle_A)B$ est un idéal différentiel. Comme par ailleurs, $\phi(I)B$ est inclus dans $\phi(\langle I \rangle_A)B$, on a

$$\langle \phi(I)B \rangle_B \subset \phi(\langle I \rangle_A)B.$$

Pour l'inclusion réciproque, on utilise l'expression explicite d'un élément typique de $\langle I \rangle_A$: c'est

$$f \in \langle I \rangle_A \iff f = \sum_i a_i f_i^{(n_i)},$$

où la somme est finie, où les a_i sont des éléments de A , où les f_i sont des éléments de I et où les n_i sont des entiers naturels. Soit $f \in \phi(\langle I \rangle_A)B$. Ainsi, avec des notations évidentes, f peut s'écrire

$$\begin{aligned} f &= \sum_j \phi \left(\sum_i a_{i,j} f_{i,j}^{(n_{i,j})} \right) b_j \\ &= \sum_{i,j} b_j \phi(a_{i,j}) \phi(f_{i,j})^{(n_{i,j})}. \end{aligned}$$

Sous cette forme, on voit que f appartient nécessairement à $\langle \phi(I)B \rangle_B$. D'où l'égalité. ■

On peut maintenant démontrer le théorème 6.1.3.

Démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz pour les ouverts. — Soit X un \mathbf{Q} -schéma muni d'un champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$. On note $(W_i)_{i \in I}$ l'ensemble des ouverts affines de X . C'est une base d'ouverts de X . Soit U un ouvert de X . On cherche un plus petit élément pour l'ensemble

$$\left\{ V \in \mathbf{Ouv}(X) \quad \left| \begin{array}{l} V \supset U \\ \text{et} \\ V \text{ est invariant sous le champ de vecteurs } \vec{\mathcal{V}} \end{array} \right. \right\}.$$

Cet ensemble est non-vide car X est dedans. Soit $V \supset U$ un ouvert de X invariant sous le champ $\vec{\mathcal{V}}$. Alors, pour tout $i \in I$, $V \cap W_i$ est un ouvert de W_i contenant $U \cap W_i$ et qui, d'après le lemme 6.1.4, est invariant sous $\vec{\mathcal{V}}$. Par conséquent, en utilisant le fait qu'on sait déterminer les ouverts associés dans les schémas affines — cf. proposition 6.1.6, on a :

$$(U \cap W_i)^\delta \subset V \cap W_i.$$

Par conséquent,

$$\bigcup_{i \in I} (U \cap W_i)^\delta \subset \bigcup_{i \in I} V \cap W_i = V.$$

Réiproquement, on montre que

$$\bigcup_{i \in I} (U \cap W_i)^\delta$$

est un ouvert invariant. Pour cela, on utilise le lemme 6.1.5 avec, comme base d'ouverts $(W_i)_{i \in I}$, comme ouverts invariants les $(U \cap W_i)^\delta$. Pour finir, il suffit de montrer que la famille des $((U \cap W_i)^\delta)_{i \in I}$ est compatible, mais cela est une conséquence du lemme 6.1.7 — ce qui conclut la démonstration du théorème. ■

(6.1.2) Fermé invariant associé à un fermé. De la même façon, toujours si X est un \mathbf{Q} -schéma muni d'un champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$, et si F est un fermé de X , on définit F^δ . C'est le plus grand fermé invariant contenu dans F . On a évidemment :

$$(X \setminus F)^\delta = X \setminus F^\delta.$$

(6.1.3) Une caractérisation des ouverts et des fermés invariants. Montrons maintenant la caractérisation suivante, très pratique :

Proposition 6.1.8. Soit X un \mathbf{Q} -schéma muni d'un champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$. Soient U un ouvert de X et F un fermé de X . Alors,

$$\begin{aligned} U^\delta &= \{x \in X \mid \text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x) \in U\} \\ F^\delta &= \{x \in X \mid \text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x) \in F\} \end{aligned}$$

Remarque. — Soient U un ouvert de X et F un fermé. On peut déjà remarquer qu'on a bien

$$U \subset \{x \in X \mid \text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x) \in U\}.$$

En effet, si $x \in U$, alors toutes les générations de x , et donc en particulier $\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x)$ appartiennent à U . De même, on a bien

$$\{x \in X \mid \text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x) \in F\} \subset F.$$

◊

Démonstration. — Compte tenu des lemmes de localité 6.1.4 et 6.1.5, il suffit de le montrer dans le cas affine. Soit donc A une \mathbf{Q} -algèbre différentielle. On note $X = \text{Spec } A$. Soit I un idéal de A , définissant un fermé F de X . Soit $x = \mathfrak{p} \in X$. On a

$$\begin{aligned} x \in F^\delta &\iff x \in V(\langle I \rangle) \\ &\iff \langle I \rangle \subset \mathfrak{p}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a $\langle I \rangle \subset \mathfrak{p} \iff I \subset \mathfrak{p}^\delta$. En effet, si $I \subset \mathfrak{p}^\delta$ alors $\langle I \rangle \subset \mathfrak{p}^\delta$ et donc, en particulier, $\langle I \rangle \subset \mathfrak{p}$. Réiproquement, si $\langle I \rangle \subset \mathfrak{p}$, comme \mathfrak{p}^δ est le plus grand idéal différentiel contenu dans \mathfrak{p} , on a $\langle I \rangle \subset \mathfrak{p}^\delta$ et donc $I \subset \mathfrak{p}^\delta$. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} x \in F^\delta &\iff I \subset \mathfrak{p}^\delta \\ &\iff \text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x) \in F, \end{aligned}$$

ce qu'on voulait. Le cas des ouverts se déduit par passage au complémentaire. ■

6.2 Topologie de Carrà Ferro

On peut maintenant définir la topologie de Carrà Ferro d'un \mathbf{Q} -schéma X muni d'un champ de vecteurs.

Théorème 6.2.1. *Soit X un \mathbf{Q} -schéma muni d'un champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$. Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de X . Alors,*

$$\left(\bigcup_{i \in I} U_i \right)^\delta = \bigcup_{i \in I} U_i^\delta \quad \text{et, si } I \text{ est fini,} \quad \left(\bigcap_{i \in I} U_i \right)^\delta = \bigcap_{i \in I} U_i^\delta.$$

En particulier, l'ensemble $\{U \mid U \text{ est un ouvert invariant de } X\}$ est une topologie pour X . On l'appelle topologie de Carrà Ferro de \mathcal{X} .

On donne deux démonstrations de ce théorème. Pour la première démonstration, on revient à la définition de l'ouvert U^δ dans le cas affine. Le théorème repose alors, dans le cas des intersections, sur une proposition d'algèbre différentielle. La seconde démonstration, beaucoup plus courte, repose sur la caractérisation 6.1.8 qui précède.

Première démonstration du théorème 6.2.1. — D'après la description⁽¹⁾ qu'on a faite de U^δ en fonction des ouverts affines de X , dans la démonstration du théorème 6.1.3, il suffit de démontrer la proposition pour les schémas affines. Soit donc (A, ∂_A) un anneau différentiel. Montrons d'abord que le symbole δ commute aux unions quelconques. Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille quelconque d'ouverts de $X = \mathrm{Spec} A$. On écrit pour tout $i \in I$ $U_i = X \setminus V(J_i)$, où J_i est un idéal de A . L'ouvert

$$U := \bigcup_{i \in I} U_i$$

peut alors s'écrire $U = X \setminus V((J_i)_{i \in I})$, où on a noté $(J_i)_{i \in I}$ l'idéal engendré par les J_i . Or,

$$\langle (J_i)_{i \in I} \rangle = (\langle J_i \rangle)_{i \in I}.$$

En effet, dans un sens, on a, pour tout $i_0 \in I$, $\langle J_{i_0} \rangle \subset \langle (J_i)_{i \in I} \rangle$ donc $(\langle J_i \rangle)_{i \in I} \subset \langle (J_i)_{i \in I} \rangle$. Par ailleurs, l'idéal $(\langle J_i \rangle)_{i \in I}$ est différentiel : un élément quelconque $f \in (\langle J_i \rangle)_{i \in I}$ s'écrit en effet

$$f = \sum_i f_i$$

où la somme est finie, et où, pour chaque $i \in I$, $f_i \in \langle J_i \rangle$. On voit bien alors que f' est encore dans $(\langle J_i \rangle)_{i \in I}$, de sorte qu'on a $\langle (J_i)_{i \in I} \rangle \subset \langle (J_i)_{i \in I} \rangle$. L'égalité $\langle (J_i)_{i \in I} \rangle = (\langle J_i \rangle)_{i \in I}$ signifie exactement que

$$\left(\bigcup_{i \in I} U_i \right)^\delta = \bigcup_{i \in I} U_i^\delta.$$

Montrons maintenant que δ commute aux intersections finies. Soient U et V deux ouverts de X ; on les écrit $U = X \setminus V(I)$ et $V = X \setminus V(J)$, avec I et J deux idéaux de A . L'intersection $U \cap V$ de U et V s'écrit alors

$$U \cap V = X \setminus V(IJ).$$

En effet, on sait que si \mathfrak{p} est un idéal premier de A , on a l'équivalence

$$IJ \not\subseteq \mathfrak{p} \iff (I \not\subseteq \mathfrak{p} \text{ et } J \not\subseteq \mathfrak{p}).$$

⁽¹⁾qui repose sur les deux lemmes précédents de localité.

Pour démontrer que $(U \cap V)^\delta = U^\delta \cap V^\delta$, il suffirait donc de prouver que

$$\langle IJ \rangle \stackrel{?}{=} \langle I \rangle \langle J \rangle.$$

Remarquons d'abord que le produit de deux idéaux différentiels est encore un idéal différentiel. Donc, $\langle I \rangle \langle J \rangle$ est un idéal différentiel. Comme par ailleurs, il contient évidemment IJ , on a bien $\langle IJ \rangle \subset \langle I \rangle \langle J \rangle$. Mais hélas, en fait, l'égalité attendue est fausse. Le théorème repose alors sur la proposition suivante. ■

Proposition 6.2.2. Soit A une \mathbf{Q} -algèbre différentielle. Soient I et J deux idéaux de A . Alors,

$$\sqrt{\langle IJ \rangle} = \sqrt{\langle I \rangle \langle J \rangle}.$$

Démonstration. — Soient A une \mathbf{Q} -algèbre différentielle et I, J deux idéaux de A . On vient de voir, dans la démonstration du théorème 6.2.1 qu'on a $\langle IJ \rangle \subset \langle I \rangle \langle J \rangle$; en particulier, on a $\sqrt{\langle IJ \rangle} \subset \sqrt{\langle I \rangle \langle J \rangle}$. On veut maintenant montrer que $\sqrt{\langle I \rangle \langle J \rangle} \subset \sqrt{\langle IJ \rangle}$. On propose deux démonstrations de cette inclusion.

Première démonstration. On utilise le fait (voir Corollary 2.3 du chapitre X de [Lan02] par exemple) que, de manière générale, si R est un anneau et si K est un idéal de R , alors

$$\sqrt{K} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R \\ K \subset \mathfrak{p}}} \mathfrak{p} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p}_0 \in \text{Spec } R \\ K \subset \mathfrak{p}_0 \\ \mathfrak{p}_0 \text{ minimal}}} \mathfrak{p}_0.$$

Maintenant, soit \mathfrak{p}_0 un idéal premier de A tel que $\langle IJ \rangle \subset \mathfrak{p}_0$ et qui soit minimal pour ces propriétés. En particulier, $IJ \subset \mathfrak{p}_0$. On sait alors qu'on a soit $I \subset \mathfrak{p}_0$ soit $J \subset \mathfrak{p}_0$. Supposons par exemple qu'on ait $I \subset \mathfrak{p}_0$. Comme on sait, grâce à la la proposition 3.4.6 appliquée à $A/\langle IJ \rangle$, que \mathfrak{p}_0 est un idéal différentiel, on en déduit que $\langle I \rangle \subset \mathfrak{p}_0$ puis que $\langle I \rangle \langle J \rangle \subset \mathfrak{p}_0$. Le cas $J \subset \mathfrak{p}_0$ est identique. Ainsi, on a

$$\{\mathfrak{p}_0 \in \text{Spec } A \mid \langle IJ \rangle \subset \mathfrak{p}_0 \text{ et } \mathfrak{p}_0 \text{ minimal}\} \subset \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid \langle I \rangle \langle J \rangle \subset \mathfrak{p}\}.$$

Donc,

$$\bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R \\ \langle I \rangle \langle J \rangle \subset \mathfrak{p}}} \mathfrak{p} \subset \bigcap_{\substack{\mathfrak{p}_0 \in \text{Spec } R \\ \langle IJ \rangle \subset \mathfrak{p}_0 \\ \mathfrak{p}_0 \text{ minimal}}} \mathfrak{p}_0.$$

Autrement dit,

$$\sqrt{\langle I \rangle \langle J \rangle} \subset \sqrt{\langle IJ \rangle},$$

ce qu'on voulait démontrer. ■

Deuxième démonstration. Pour commencer, considérons f et g deux éléments de A tels que $fg \in IJ$. On démontre par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que $f^{(n)}g \in \sqrt{\langle IJ \rangle}$. Pour $n = 0$, c'est évident : on a bien $fg \in IJ$. Supposons que $f^{(n)}g \in \sqrt{\langle IJ \rangle}$. En particulier, $f^{(n)}g^2 \in \sqrt{\langle IJ \rangle}$. Or, d'après la proposition 1.2.1, et comme A est une \mathbf{Q} -algèbre différentielle, l'idéal $\sqrt{\langle IJ \rangle}$ est différentiel. Ainsi,

$$(f^{(n)}g^2)' = f^{(n+1)}g^2 + 2f^{(n)}gg' \in \sqrt{\langle IJ \rangle}.$$

Comme $2f^{(n)}gg' = 2g'(f^{(n)}g)$ est déjà dans $\sqrt{\langle IJ \rangle}$, les éléments $f^{(n+1)}g^2$ et donc $f^{(n+1)}g^2 = (f^{n+1}g)^2$ sont eux aussi dans $\sqrt{\langle IJ \rangle}$. Par conséquent,

$$f^{(n+1)}g \in \sqrt{\sqrt{\langle IJ \rangle}} = \sqrt{\langle IJ \rangle},$$

ce qui démontre ce qu'on attendait. Soit maintenant $n \in \mathbf{N}$ fixé. Montrons par récurrence sur $m \in \mathbf{N}$ que $f^{(n)}g^{(m)} \in \sqrt{\langle IJ \rangle}$. Pour $m = 0$, c'est exactement ce qu'on vient de prouver. Supposons maintenant que $f^{(n)}g^{(m)} \in \sqrt{\langle IJ \rangle}$. Alors, on montre de la même manière⁽²⁾ que ce qui précède que $f^{(n)}g^{(m+1)} \in \sqrt{\langle IJ \rangle}$.

Soit maintenant h un élément quelconque de $\langle I \rangle \langle J \rangle$. Il est facile de voir que h s'écrit forcément comme une somme finie

$$h = \sum_{i=1}^n a_i f_i^{(n_i)} g_i^{(m_i)}$$

où les a_i sont des éléments de A , les f_i des éléments de I , les g_i des éléments de J et, les n_i et les m_i , des entiers naturels. D'après ce qui précède, chacun des éléments $f_i^{(n_i)} g_i^{(m_i)}$ est dans $\sqrt{\langle IJ \rangle}$ — par conséquent h aussi. Ainsi, on a montré que

$$\langle I \rangle \langle J \rangle \subset \sqrt{\langle IJ \rangle} \quad \text{et donc} \quad \sqrt{\langle I \rangle \langle J \rangle} \subset \sqrt{\langle IJ \rangle},$$

ce qu'on voulait. ■

Deuxième démonstration du théorème 6.2.1. — Comme on l'a déjà dit, cette seconde démonstration utilise la caractérisation 6.1.8 de U^δ . Soit X un \mathbf{Q} -schéma muni d'un champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$. Pour commencer, soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de X . Alors,

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right)^\delta &\iff \text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x) \in \bigcup_{i \in I} U_i \\ &\iff \exists i \in I \mid \text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x) \in U_i \\ &\iff \exists i \in I \mid x \in U_i^\delta \\ &\iff x \in \bigcup_{i \in I} U_i^\delta. \end{aligned}$$

Pour les intersections, c'est la même chose. Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille finie d'ouverts de X . On a :

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcap_{i \in I} U_i \right)^\delta &\iff \text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x) \in \bigcap_{i \in I} U_i \\ &\iff \forall i \in I \mid \text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x) \in U_i \\ &\iff \forall i \in I \mid x \in U_i^\delta \\ &\iff x \in \bigcap_{i \in I} U_i^\delta. \end{aligned}$$

■
Remarque. — Cette seconde démonstration prouve que δ commute aux intersections quelconques. ◇

⁽²⁾ En fait, on a montré ce qui suit : si A est une \mathbf{Q} -algèbre différentielle et si I est un idéal de A , alors, pour tous $f, g \in A$ et pour tous $n, m \in \mathbf{N}$,

$$fg \in I \implies f^{(n)}g^{(m)} \in \sqrt{\langle I \rangle}.$$

6.3 Étude d'une base d'ouverts

Soit (A, ∂) une \mathbf{Q} -algèbre différentielle. On note $X = \text{Spec } A$ et $\mathcal{X} = \text{Spec}^\partial(A, \partial)$. Si $f \in A$, rappelons qu'on note

$$D(f) := (\text{Spec } A) \setminus V(f).$$

On sait (*cf.* proposition (I.I.10) de [EGA I]) que les $D(f)$ forment une base d'ouverts de $\text{Spec } A$. On définit l'analogue de $D(f)$ dans notre cadre. C'est

$$D^\delta(f) := (D(f))^\delta = (\text{Spec } A) \setminus V(\langle f \rangle).$$

C'est un ouvert Carrà Ferro de \mathcal{X} . On peut l'exprimer comme une union :

$$D^\delta(f) = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} D(f^{(i)}).$$

Proposition 6.3.1. *Soit (A, ∂) une \mathbf{Q} -algèbre différentielle et $\mathcal{X} = \text{Spec}^\partial(A, \partial)$. Soit $x \in \mathcal{X}$, ie soit \mathfrak{p} un idéal premier de A . Alors, les*

$$D^\delta(f) \quad \text{avec } f \notin \mathfrak{p}$$

forment une base de voisinages ouverts de x pour la topologie de Carrà Ferro.

Démonstration. — En effet, soit U un ouvert Carrà Ferro de \mathcal{X} contenant x . On peut donc écrire, d'après la proposition 6.1.2,

$$U = \text{Spec } A \setminus V(I)$$

avec I idéal différentiel de A . Comme x n'est pas dans I , on a : $I \not\subseteq \mathfrak{p}$. Soit donc $f \in I$ avec $f \notin \mathfrak{p}$. Comme I est un idéal différentiel, on a $\langle f \rangle \subset I$, donc $V(\langle f \rangle) \supset V(I)$ et donc $D^\delta(f) \subset U$. Par ailleurs, on a $\langle f \rangle \not\subseteq \mathfrak{p}$ donc $x \in D^\delta(f)$. ■

Remarque. — En fait, avec les notations de la proposition, si, plus généralement, $f \notin \mathfrak{p}^\delta$, on a encore $x \in D^\delta(f)$. En effet, supposons que ce ne soit pas le cas : on fait l'hypothèse absurde que $\langle f \rangle \subset \mathfrak{p}$. Alors, en particulier, $f^{(i)}$ est un élément de \mathfrak{p} pour tout $i \in \mathbf{N}$. Par conséquent, d'après la caractérisation de la proposition 3.4.10, $f \in \mathfrak{p}^\delta$, ce qui est absurde. ◇

(6.3.1) Recouvrements et égalisateurs en théorie des faisceaux. Soit maintenant X un espace topologique quelconque muni d'un faisceau (d'ensembles ou, mieux, de k -algèbres différentielles) \mathcal{F} , soit U un ouvert de X qui s'écrit

$$U = \bigcup_{i \in I} U_i$$

avec $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de X . Les axiomes de faisceau nous disent exactement que l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(U) &\longrightarrow \left\{ (f_i)_i \mid \forall (i, j) \in I^2, (f_i)_{|U_i \cap U_j} = (f_j)_{|U_i \cap U_j} \right\} \subset \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \\ f &\longmapsto (f_{|U_i})_{i \in I} \end{aligned}$$

est un isomorphisme. En termes plus savants, on peut aussi dire que le diagramme

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j \in I} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

est un *égalisateur*. Précisons quelles sont les flèches de ce diagramme. La première est tout simplement :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(U) &\longrightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \\ f &\longmapsto (f_i)_{i \in I} \end{aligned}.$$

Les deux suivantes sont

$$\begin{aligned} \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) &\longrightarrow \prod_{i,j \in I} \mathcal{F}(U_i \cap U_j) & \text{et} & \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) &\longrightarrow \prod_{i,j \in I} \mathcal{F}(U_i \cap U_j) \\ (f_i)_{i \in I} &\longmapsto (f_{i|U_i \cap U_j})_{i \in I} & & (f_i)_{i \in I} &\longmapsto (f_{j|U_i \cap U_j})_{i \in I} \end{aligned}.$$

On peut appliquer ce qui précède pour décrire l'anneau des sections sur l'ouvert $D^\delta(f)$. Soit donc A un anneau différentiel et $f \in A$. On considère

$$X := \text{Spec } A \quad U := D^\delta(f) \quad U_i := D(f^{(i)}).$$

Par ailleurs, l'intersection de U_i et de U_j peut être décrite par

$$U_i \cap U_j = D(f^{(i)} f^{(j)}).$$

En effet, on a bien

$$\forall \mathfrak{p} \in \text{Spec } A, \quad \forall (g, h) \in A^2, \quad (gh \notin \mathfrak{p} \iff g \notin \mathfrak{p} \text{ et } h \notin \mathfrak{p}).$$

Ainsi, en appliquant ce qui précède, on obtient :

$$\begin{aligned} \Gamma(D^\delta(f), \mathcal{O}_X) &\simeq \left\{ (x_i)_{i \in \mathbf{N}} \in \prod_{i \in \mathbf{N}} A_{f^{(i)}} \mid \forall (i, j) \in \mathbf{N}^2, \quad x_i = x_j \text{ dans } A_{f^{(i)} f^{(j)}} \right\} \\ &\simeq \left\{ \left(\frac{a_i}{(f^{(i)})^{n_i}} \right)_{i \in \mathbf{N}} \mid \begin{array}{l} \forall (i, j) \in \mathbf{N}^2, \quad \exists N_{i,j} \in \mathbf{N}, \\ (f^{(i)} f^{(j)})^{N_{i,j}} \cdot (a_i (f^{(j)})^{n_j} - a_j (f^{(i)})^{n_i}) = 0 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Notation 6.3.2. Soit A un anneau différentiel et $f \in A$. On note

$$A_{f,\partial} := \Gamma(D^\delta(f), \text{Spec}^\partial A).$$

6.4 Intersection des voisinages d'un point

Commençons par introduire une définition.

Définition 6.4.1. Soit X un espace topologique et soit $x \in X$. On appelle halo de x et on note

$$\{x\} := \bigcap_{\substack{U \text{ ouvert de } X \\ \text{tel que } x \in U}} U$$

Si X est un espace topologique et si $x \in X$, on a démontré dans la proposition 3.4.3 que l'intersection de tous les ouverts contenant x est exactement l'ensemble des générisations de x :

$$\{x\} = \{y \in X \mid y \rightsquigarrow x\}.$$

(6.4.1) Orbite d'un point sous l'action du champ. Soit $\mathcal{X} = (X, \vec{\mathcal{V}})$ un **Q**-schéma muni d'un champ de vecteurs. Soit $x \in X$. On veut définir l'orbite de x sous l'action de $\vec{\mathcal{V}}$. On dispose déjà de la trajectoire $\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x)$. On pourrait être tenté de définir l'orbite de x sous l'action de $\vec{\mathcal{V}}$ comme l'ensemble des spécialisations de $\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x)$. Ce serait une mauvaise définition. En effet, il est tout à fait possible qu'une des spécialisations $\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x) \rightsquigarrow y$ ait une trajectoire strictement plus petite que $\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x)$. On le voit par exemple sur la figure 12, où le point p est une spécialisation de $\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(\eta)$ dont la trajectoire est strictement plus petite. On le voit aussi dans l'exemple qui suit, où le point x choisi est cette fois fermé.

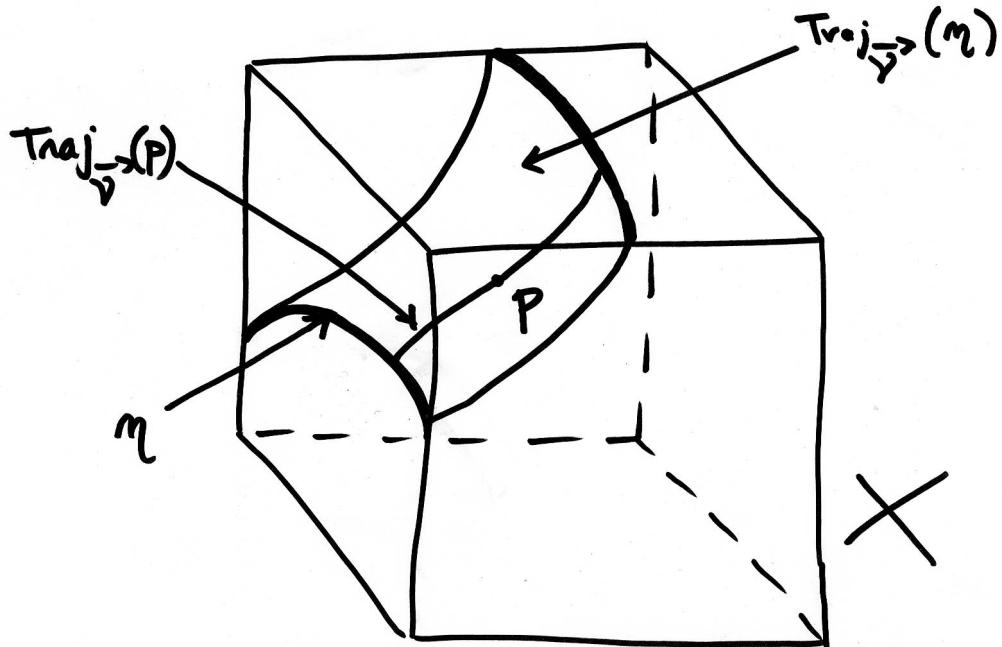


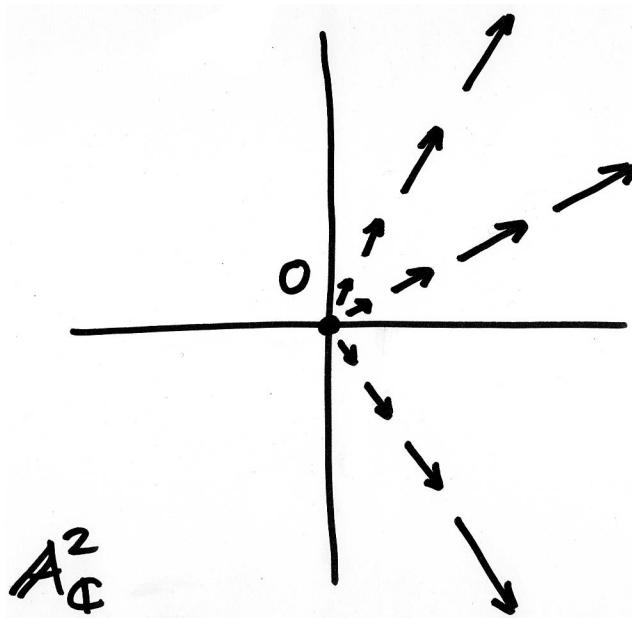
FIG. 12 – Exemple de trajectoire d'un point η non-fermé.

(6.4.2) Le plan A_C^2 muni d'un champ radial. On considère la **C**-algèbre différentielle $A = \mathbf{C}[x, y]$ dont la dérivation est définie par $\partial x = x$ et $\partial y = y$. On note $\mathcal{X} = \text{Spec}^d A$ (voir la figure 13). On peut facilement vérifier que les trajectoires de \mathcal{X} sont exactement :

- le point générique $\eta = (0)$ de \mathcal{X} ;
- les droites passant par l'origine, *i.e.* les idéaux premiers $(ax + by)$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$;
- l'origine $O = (x, y)$.

Ainsi, si on considère le point $p = (x - 1, y - 1)$ la trajectoire de p est la droite passant par O et p : $\text{Traj}(p) = (x - y)$. En particulier, le point O est une spécialisation de $\text{Traj}(p) = (x - y)$, mais sa trajectoire est strictement plus petite.

La bonne notion d'orbite est en fait :

FIG. 13 – A_C^2 muni d'un champ radial.

Définition 6.4.2. Soit $\mathcal{X} = (X, \vec{\mathcal{V}})$ un \mathbf{Q} -schéma muni d'un champ de vecteurs. Soit $x \in X$. On appelle orbite de x sous l'action de $\vec{\mathcal{V}}$ et on note $x^{\vec{\mathcal{V}}}$ le sous-ensemble de X

$$x^{\vec{\mathcal{V}}} := \{y \in X \mid \text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x) = \text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(y)\}.$$

On vérifie facilement que les orbites de X constituent une partition de X .

Proposition 6.4.3. Soit $\mathcal{X} = (X, \vec{\mathcal{V}})$ un \mathbf{Q} -schéma muni d'un champ de vecteurs. On munit X de la topologie de Carrà Ferro. Soit $x \in X$. Alors,

$$\{x\} = \{y \in X \mid \text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(y) \rightsquigarrow x\}$$

Démonstration. — Montrons d'abord que si U est un ouvert Carrà Ferro de X contenant x et si $y \in X$ vérifie $\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(y) \rightsquigarrow x$ alors, $y \in U$. Supposons le contraire : alors, y appartient au fermé complémentaire F , qui est invariant sous $\vec{\mathcal{V}}$ par définition. Donc : $\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(y) \in F$. Comme un fermé Zariski (et en particulier un fermé Carrà Ferro) est stable par spécialisation et comme $\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(y) \rightsquigarrow x$, on a donc $x \in F$, ce qui est absurde.

Réciproquement, soit $y \in X$ tel que $\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(y) \not\rightsquigarrow x$. Cela signifie que

$$x \notin \overline{\{\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(y)\}}^{Zar}.$$

Or, il n'est pas difficile de montrer que

$$\eta \text{ invariant sous } \vec{\mathcal{V}} \implies \overline{\{\eta\}}^{Zar} \text{ est un fermé Carrà Ferro.}$$

On en déduit que $U = X \setminus \overline{\{\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(y)\}}^{Zar}$ est un ouvert Carrà Ferro qui contient x mais ne contient pas y . ■

En particulier, l'orbite de x sous $\vec{\mathcal{V}}$ est incluse dans le halo de x :

$$x^{\vec{\mathcal{V}}} \subset \{x\}.$$

Si \mathcal{X} est un schéma irréductible muni d'un champ de vecteurs et si on note η son point générique, alors le halo de η égale l'ensemble des points « dont la trajectoire est dense dans X » :

$$\{\eta\} = \{x \in X \mid \text{Traj}_{\mathcal{X}}(x) = \eta\}.$$

6.5 Faisceau de Carrà Ferro et faisceau de Keigher

(6.5.1) Considérations préliminaires. Dans cette section, on s'intéresse au spectre différentiel d'un anneau différentiel A , défini comme suit :

Définition 6.5.1. Soit A un anneau différentiel. Le spectre différentiel de A est

$$\text{diff-Spec } A := \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ est un idéal différentiel premier de } A\}.$$

L'ensemble $\text{diff-Spec } A$ est inclus dans $\text{Spec } A$. On peut donc le munir de la topologie induite par la topologie de Zariski. On appelle cette topologie : la *topologie de Kolchin*. Mais, quand A est une \mathbf{Q} -algèbre différentielle, et si on munit $\text{Spec } A$ de la topologie de Carrà Ferro, que se passe-t-il ? Obtient-on la même topologie induite ? La réponse est oui, comme on le démontera dans un cadre plus général dans le fait 8.5.1. Dans ce qui suit, on note $(\text{Spec } A, \text{Zar})$ quand on munit $\text{Spec } A$ de la topologie de Zariski — et on note $(\text{Spec } A, CF)$ quand on munit $\text{Spec } A$ de la topologie de Carrà Ferro.

En particulier, on dispose de deux applications continues

$$i_{\text{Zar}} : \text{diff-Spec } A \longrightarrow (\text{Spec } A, \text{Zar})$$

et

$$i_{\text{CF}} : \text{diff-Spec } A \longrightarrow (\text{Spec } A, CF),$$

correspondant aux inclusions.

L'espace topologique $(\text{Spec } A, \text{Zar})$ est muni, classiquement, du faisceau structural $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}$. Quant à l'espace topologique $(\text{Spec } A, CF)$, on peut le munir du faisceau induit par $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}$. On le note $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}^{(\text{CF})}$; il est défini par

$$\forall U \text{ ouvert invariant de } \text{Spec } A, \quad \mathcal{O}_{\text{Spec } A}^{(\text{CF})}(U) := \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(U).$$

Il s'agit en fait de l'image directe de $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}$ par le morphisme

$$i_{\text{Zar} \rightarrow \text{CF}} : (\text{Spec } A, \text{Zar}) \longrightarrow (\text{Spec } A, CF);$$

ie on a $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}^{(\text{CF})} = (i_{\text{Zar} \rightarrow \text{CF}})_* \mathcal{O}_{\text{Spec } A}$. Ces deux faisceaux sont des faisceaux en anneaux différentiels.

(6.5.2) Faisceau de Keigher. Soit A un anneau différentiel. On peut alors considérer l'image inverse du faisceau structural de $\text{Spec } A$ par i_{Zar} . On obtient un faisceau en anneaux différentiels sur $\text{diff-Spec } A$, qu'on appelle *faisceau de Keigher de diff-Spec* A , et qu'on note

$$\mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(\text{Keigher})} := (i_{\text{Zar}})^{-1} \mathcal{O}_{\text{Spec } A}.$$

On schématise la situation comme suit :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(\text{Keigher})} & \xleftarrow{\quad} & \mathcal{O}_{\text{Spec } A} \\ | & & | \\ \text{diff-Spec } A & \xrightarrow{i_{\text{Zar}}} & (\text{Spec } A, \text{Zar}) \end{array}$$

Ce faisceau apparaît clairement pour la première fois dans l'article [Kei81]. Par définition, le faisceau $\mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(\text{Keigher})}$ est donc le faisceau associé au préfaisceau \mathcal{A} défini par, pour tout U ouvert de $\text{diff-Spec } A$:

$$\mathcal{A}(U) := \underset{\substack{U \subset V \\ V \text{ ouvert Zariski \\ de Spec } A}}{\operatorname{colim}} \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(V).$$

(6.5.3) Faisceau de Carrà Ferro. Soit A une \mathbf{Q} -algèbre différentielle. De même, on peut aussi considérer l'image inverse du faisceau de Carrà Ferro par i_{CF} . On obtient un faisceau en anneaux différentiels sur $\text{diff-Spec } A$, qu'on appelle *faisceau de Carrà Ferro de diff-Spec* A , et qu'on note

$$\mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(\text{CF})} := (i_{\text{CF}})^{-1} \mathcal{O}_{\text{Spec } A}^{(\text{CF})}.$$

On schématise la situation comme suit :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(\text{CF})} & \xleftarrow{\quad} & \mathcal{O}_{\text{Spec } A}^{(\text{CF})} \\ | & & | \\ \text{diff-Spec } A & \xrightarrow{i_{\text{CF}}} & (\text{Spec } A, \text{CF}) \end{array}$$

Ainsi, par définition, le faisceau $\mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(\text{CF})}$ est le faisceau associé au préfaisceau \mathcal{B} défini, pour tout ouvert U de $\text{diff-Spec } A$, par :

$$\mathcal{B}(U) = \underset{\substack{U \subset V \\ V \text{ ouvert Carrà Ferro \\ de Spec } A}}{\operatorname{colim}} \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(V).$$

Ainsi, on a un morphisme naturel

$$\mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(\text{CF})} \longrightarrow \mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(\text{Keigher})},$$

sur lequel on reviendra plus loin.

On peut calculer le faisceau $\mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(\text{CF})}$ en calculant la limite inductive. Pour cela, on a besoin du fait suivant :

Fait 6.5.2. Soit A une \mathbf{Q} -algèbre différentielle. Soit U un ouvert Kolchin de $\text{diff-Spec } A$. On note

$$U_\Delta := \left\{ x \in \text{Spec } A \mid \text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}_A}(x) \in U \right\}.$$

Alors, U_Δ est un ouvert Carrà Ferro de $\text{Spec } A$ (autrement dit, un ouvert invariant sous $\vec{\mathcal{V}}_A$) et on a

$$U_\Delta \cap \text{diff-Spec } A = U.$$

Démonstration. — On garde les notations de l'énoncé. Soit I un idéal de A tel que

$$U = \{ \mathfrak{p} \in \text{diff-Spec } A \mid I \not\subseteq \mathfrak{p} \}.$$

Quitte à remplacer I par $\langle I \rangle$, on peut supposer que I est un idéal différentiel. Soit alors \mathfrak{p} un idéal premier quelconque. On a

$$I \subset \mathfrak{p} \implies I \subset \mathfrak{p}^\delta \quad \text{et} \quad I \subset \mathfrak{p}^\delta \implies I \subset \mathfrak{p}.$$

Ainsi, l'ensemble

$$\left\{ x \in \text{Spec } A \mid \text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}_A}(x) \in U \right\}$$

égal l'ouvert défini par l'idéal I . Comme en plus cet idéal est différentiel, on sait que l'ouvert qu'il définit est invariant sous $\vec{\mathcal{V}}_A$. Enfin, si $x \in \text{diff-Spec } A$, on a $\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}_A}(x) = x$: cela permet de voir que

$$U_\Delta \cap \text{diff-Spec } A = U.$$

■

On a alors :

Théorème 6.5.3. Soit A une \mathbf{Q} -algèbre différentielle. Soit U un ouvert Kolchin de $\text{diff-Spec } A$. Alors,

$$\mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(CF)}(U) \simeq \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(U_\Delta).$$

En particulier, $\Gamma(\text{diff-Spec } A, \mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(CF)}) \simeq A$: l'anneau différentiel des sections globales de $\mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(CF)}$ est isomorphe à A .

Remarques. — La deuxième partie du théorème est l'élément central de l'article [CF90] de Giuseppa Carrà Ferro. En effet, elle y définit un faisceau $\mathcal{O}_{(\Delta)}$ en posant $\mathcal{O}_{(\Delta)}(U) = \mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}(U_\Delta)$. Sa proposition 4.1 dit alors : $\Gamma(\text{diff-Spec } A, \mathcal{O}_{(\Delta)}) \simeq A$.

— Notons $\text{Traj}_A : \text{Spec } A \rightarrow \text{diff-Spec } A$, l'application trajectoire. Alors, le faisceau $U \mapsto \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(U_\Delta)$ peut être défini comme poussé-en-avant du faisceau $\mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}$ par Traj_A . Ainsi, la première partie du théorème nous dit

$$(i_{\text{CF}})^{-1} \mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A} \simeq (\text{Traj}_A)_* \mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}.$$

◊

Démonstration. — On garde les notations de l'énoncé. Soit U un ouvert Kolchin de $\text{diff-Spec } A$. Calculons la colimite

$$\varinjlim_{\substack{U \subset V \\ V \text{ ouvert Carrà Ferro de } \text{Spec } A}} \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(V).$$

Notons déjà que U_Δ est un de ces ouverts Carrà Ferro contenant U . Montrons que si V est un ouvert Carrà Ferro de $\text{Spec } A$ contenant U , alors, $U_\Delta \subset V$. Soit $x \in U_\Delta$. Par définition, on a $\text{Traj}_{\mathcal{V}}(x) \in U$. Donc, $\text{Traj}_{\mathcal{V}}(x) \in V$. Donc, d'après la caractérisation 6.1.8, on a $x \in V^\delta$. Or, comme V est invariant, on a $V^\delta = V$. Ainsi, on a bien $x \in V$ et donc $U_\Delta \subset V$. Ainsi, cette limite inductive égale $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}(U_\Delta)$. Ainsi, en calculant cette colimite on tombe sur un faisceau ; on n'a donc pas besoin de considérer le faisceau associé, et la colimite calculée est $\mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(\text{CF})}$.

Montrons maintenant la deuxième partie du théorème. Pour cela, on montre que

$$(\text{diff-Spec } A)_\Delta = \text{Spec } A,$$

ce qui est évident : la trajectoire de tout $x \in \text{Spec } A$ est bien un élément de $\text{diff-Spec } A$. ■

Chapitre 7

Les faisceaux de Kovacic, de Carrà Ferro et de Keigher ont les mêmes constantes

Dans cette partie, on rappelle la définition du faisceau de Kovacic (*cf.* par exemple [Kov02b]). On montre d'abord que ce faisceau est isomorphe au faisceau de Keigher dans le cas réduit. Puis, on montre, toujours dans le cas réduit que ces trois faisceaux ont des faisceaux des constantes isomorphes.

Pour démontrer ce résultat, on prouve la proposition suivante d'algèbre commutative différentielle, qui semble très naturelle, mais n'est pas si évidente à démontrer :

Proposition. *Soit (A, ∂) un anneau différentiel. Soit S une partie multiplicative de A , si $s \in S$ et si $i \in \mathbf{N}$, on a*

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{a}{s} \right)' = 0 & \text{ dans } S^{-1}A \\ s^{(i)} \in S \end{aligned} \right\} \implies \frac{a}{s} = \frac{a^{(i)}}{s^{(i)}} \text{ dans } S^{-1}A$$

Les méthodes utilisées pour démontrer ces résultats nous permettent aussi de montrer la proposition suivante de prolongement des constantes :

Proposition. *Soit $\mathcal{X} = (X, \vec{\mathcal{V}})$ un \mathbf{Q} -schéma réduit muni d'un champ de vecteurs. Soit U un ouvert de X . Alors, pour tout $f \in \mathcal{O}_X(U)^\partial$, il existe un unique $\tilde{f} \in \mathcal{O}_X(U^\delta)^\partial$ tel que $\tilde{f}|_U = f$. De plus,*

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X(U)^\partial &\longrightarrow \mathcal{O}_X(U^\delta)^\partial \\ f &\longmapsto \tilde{f} \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'anneaux, dont l'inverse est $\mathcal{O}_X(U^\delta)^\partial \longrightarrow \mathcal{O}_X(U)^\partial$, la restriction des constantes.

7.1 Faisceau de Kovacic

(7.1.1) Définition. Dans la suite, on considère (A, ∂) un anneau différentiel. On se place sur l'ensemble

$$X = \text{diff-Spec } A := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid \mathfrak{p} \text{ est un idéal différentiel de } A\}.$$

On munit X de la topologie de Kolchin. Soit U un ouvert de X pour cette topologie. Jerald Kovacic (dans [Kov02b], par exemple) définit un faisceau d'anneaux différentiels sur X en posant

$$\mathcal{O}_X^{(Kov)}(U) := \left\{ s : U \longrightarrow \coprod_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}} \middle| \begin{array}{l} i) \quad \forall \mathfrak{p} \in U, s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}} \\ ii) \quad \exists (U_i)_{i \in I} \text{ recouvrement ouvert de } U, \\ \quad \quad \quad \exists (a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I} \in A^I, \\ \quad \quad \quad \forall \mathfrak{p} \in U, \forall i \in I, \mathfrak{p} \in U_i \implies b_i \notin \mathfrak{p} \text{ et } s(\mathfrak{p}) = a_i/b_i \end{array} \right\}.$$

Ce faisant, il s'inspire de la construction du faisceau structural d'un schéma que propose Robin Hartshorne dans [Har77]. Ce faisceau a fait l'objet de nombreux articles.

(7.1.2) Sections globales. On note, suivant [Kov02b], \hat{A} l'anneau différentiel des sections globales

$$\hat{A} := \mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(Kov)}(\text{diff-Spec } A).$$

On dispose d'un morphisme $i_A : A \longrightarrow \hat{A}$, d'anneaux différentiels. Ce morphisme, auquel Kovacic s'intéresse particulièrement dans [Kov02b], n'est en général ni injectif, ni surjectif. Par ailleurs, pour trouver des contre-exemples, il n'est pas nécessaire d'aller chercher des choses très compliquées. Ainsi, si k est un corps qu'on munit de la dérivation nulle, et qu'on considère l'anneau différentiel

$$A = k[t] \quad \text{avec} \quad t' = 1,$$

alors, cet anneau A ne possède qu'un seul idéal différentiel, à savoir $\eta = (0)$. On vérifie alors aisément que

$$\hat{A} = k(t).$$

Dans cet exemple, le morphisme $i_A : k[t] \longrightarrow k(t)$ n'est pas surjectif.

(7.1.3) Les faisceaux de Keigher et de Kovacic sont isomorphes dans le cas réduit.
On montre :

Proposition 7.1.1. *Soit A un anneau différentiel réduit. Alors,*

$$\mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(Keigher)} = \mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(Kov)}.$$

Démonstration. — Soit A un anneau différentiel réduit. Soit U un ouvert de $\text{diff-Spec } A$. On va montrer que

$$\mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(Kov)}(U) = \varinjlim_{\substack{U \supset V \\ V \text{ ouvert Zariski de } \text{Spec } A}} \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(V),$$

ce qui permettra de conclure. Pour commencer, si $V \supset U$ est un ouvert Zariski de $\text{Spec } A$, on a bien un morphisme

$$i_V : \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(V) \longrightarrow \mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(Kov)}(U),$$

et ces flèches forment une famille compatible. Ce morphisme i_V est défini comme suit : on peut voir le faisceau structural $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}$ à la Hartshorne. Dans ce cas, une section $f \in \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(V)$ est une fonction

$$f : V \longrightarrow \coprod_{\mathfrak{p} \in V} A_{\mathfrak{p}}$$

qui est localement le quotient de deux éléments de A . Comme $U \subset V$, on peut restreindre cette fonction à U ; elle est alors encore localement le quotient de deux éléments : c'est bien une section Kovacic au dessus de U .

Montrons que ces morphismes $(i_V)_V$ font de $\mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(\text{Kov})}(U)$ la limite inductive qu'on souhaite calculer. Soit donc B un anneau différentiel muni d'une famille de flèches compatibles

$$\varphi_V : \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(V) \longrightarrow B$$

pour tout ouvert Zariski V de $\text{Spec } A$ contenant U . On veut construire une unique factorisation

$$\varphi : \mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(\text{Kov})}(U) \longrightarrow B.$$

Soit donc $f \in \mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(\text{Kov})}(U)$: f est une fonction de

$$U \longrightarrow \coprod_{\mathfrak{p} \in \text{diff-Spec } A} A_{\mathfrak{p}}$$

et il existe une famille $(U_i)_i$ d'ouverts recouvrant U et deux familles $(a_i)_i$ et $(b_i)_i$ de A telles que

$$\forall \mathfrak{p} \in U, \quad \mathfrak{p} \in U_i \implies \left(b_i \notin \mathfrak{p} \quad \text{et} \quad f(\mathfrak{p}) = \frac{a_i}{b_i} \quad \text{dans } A_{\mathfrak{p}} \right).$$

Les ouverts U_i , par définition, s'écrivent $U_i = \text{diff-Spec } A \cap W_i$, où les W_i sont des ouverts Zariski de $\text{Spec } A$. On remplace les W_i par

$$\widetilde{W}_i := W_i \cap D(b_i),$$

de sorte que $\forall \mathfrak{p} \in W_i, b_i \notin \mathfrak{p}$. Les ouverts \widetilde{W}_i vérifient encore $U_i = \text{diff-Spec } A \cap \widetilde{W}_i$. On considère alors

$$\widetilde{W} := \bigcup \widetilde{W}_i.$$

C'est un ouvert Zariski contenant U . Montrons que la fonction f peut être étendue à \widetilde{W} : on veut construire

$$\tilde{f} \in \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(\widetilde{W})$$

dont la restriction à U soit égale à f . Pour ceci, il suffit de vérifier que

$$\forall \mathfrak{p} \in \widetilde{W}, \quad \left(\mathfrak{p} \in \widetilde{W}_i \text{ et } \mathfrak{p} \in \widetilde{W}_j \right) \implies \frac{a_i}{b_i} = \frac{a_j}{b_j} \quad \text{dans } A_{\mathfrak{p}}.$$

On pourra alors poser $\tilde{f}(\mathfrak{p}) = a_i/b_i$. C'est ici qu'on va utiliser l'hypothèse « A réduit ». Soit donc $\mathfrak{p} \in \widetilde{W}$ et soient i et j deux indices tels que $\mathfrak{p} \in \widetilde{W}_i$ et $\mathfrak{p} \in \widetilde{W}_j$. Considérons $\mathfrak{q} = \text{Traj}_{\mathcal{F}_A}(\mathfrak{p})$. C'est une généralisation de \mathfrak{p} , qui appartient donc encore \widetilde{W}_i . C'est un idéal différentiel. Par conséquent, $\mathfrak{q} \in \widetilde{W}_i \cap \text{diff-Spec } A = U_i$. De même, on a $\mathfrak{q} \in U_j$. Par conséquent, on sait que

$$f(\mathfrak{q}) = \frac{a_i}{b_i} = \frac{a_j}{b_j} \quad \text{dans } A_{\mathfrak{q}}.$$

On veut en déduire que cette égalité est encore vraie dans $A_{\mathfrak{p}}$. Pour cela on utilise le lemme 7.1.2 qui suit. On a donc un élément $\tilde{f} \in \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(\widetilde{W})$ qu'on peut envoyer dans B par

$$\varphi_{\widetilde{W}} : \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(\widetilde{W}) \longrightarrow B.$$

On vérifie alors que ceci définit l'application φ cherchée, et que cette dernière est nécessairement unique. ■

Lemme 7.1.2. *Soit A un anneau différentiel réduit. Soit $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$. Soient $a, b, \alpha, \beta \in A$, avec $b, \beta \notin \mathfrak{p}$. Alors,*

$$\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{dans } A_{\mathfrak{p}^\delta} \implies \frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{dans } A_{\mathfrak{p}}.$$

Démonstration. — Soit A un anneau différentiel réduit. On commence par montrer le petit résultat suivant : soient θ et f deux éléments de A tels que $\theta f = 0$; alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $\theta^{(n)} f^{n+1} = 0$. Évidemment, on le montre par récurrence. Pour $n = 0$, c'est l'hypothèse. Supposons que $\theta^{(n)} f^{n+1} = 0$ et dérivons cette expression :

$$\theta^{(n+1)} f^{n+1} + (n+1) \cdot \theta^{(n)} f^n f' = 0.$$

En multipliant cette égalité par f , on trouve ce qu'on voulait.

Revenons au lemme. On garde les notations de l'énoncé. Soit donc $\theta \notin \mathfrak{p}^\delta$ tel que

$$\theta \cdot (a\beta - b\alpha) = 0.$$

Comme $\theta \notin \mathfrak{p}^\delta$, on sait qu'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $\theta^{(n)} \notin \mathfrak{p}$. Or, d'après ce qui précède, on sait que

$$\begin{aligned} \theta^{(n)} \cdot (a\beta - b\alpha)^{n+1} &= 0 \\ \text{donc} \quad (\theta^{(n)} \cdot (a\beta - b\alpha))^{n+1} &= 0 \\ \text{donc, car } A \text{ est réduit,} \quad \theta^{(n)} \cdot (a\beta - b\alpha) &= 0. \end{aligned}$$

Comme $\theta^{(n)} \notin \mathfrak{p}$, on a donc $\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta}$ dans $A_{\mathfrak{p}}$, ce qu'on voulait. ■

7.2 Constantes dans les anneaux de fractions

Avant d'en venir au thème de ce chapitre, à savoir la comparaison des faisceaux de Kovacic et de Carrà Ferro au niveau des constantes, on fait un petit *aparté* plus général sur les constantes des anneaux de fractions, qui nous sera utile plus tard.

Soit (A, ∂) un anneau différentiel et soit S une partie multiplicative de A , quelconque. Comme on l'a rappelé dans le paragraphe (1.3.3), l'anneau $S^{-1}A$ est naturellement muni d'une dérivation ; c'est

$$\left(\frac{a}{s}\right)' := \frac{a's - s'a}{s^2}.$$

Considérons maintenant un élément *constant* a/s de $S^{-1}A$. Cela veut dire qu'on a

$$t \cdot (a's - s'a) = 0,$$

pour un certain $t \in S$. Pour motiver ce qui suit, remplaçons cette identité par l'identité plus simple $as' - s'a = 0$ et faisons comme si cette égalité signifiait

$$\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}.$$

Alors, en réappliquant ce raisonnement, on obtiendrait

$$\forall i \in \mathbf{N}, \quad \frac{a}{s} = \frac{a^{(i)}}{s^{(i)}}.$$

Évidemment, ce qui précède n'est qu'une heuristique, puisque, d'une part, on n'a pas $a's - s'a = 0$ mais bien $\exists t \in S, t \cdot (a's - s'a) = 0$ et que, d'autre part, l'élément s' n'appartient pas forcément à S — de sorte qu'on ne peut pas considérer l'élément a'/s' dans $S^{-1}A$. L'objet de ce paragraphe est de montrer comment rendre rigoureux le raisonnement précédent. Pour commencer, on énonce et démontre le lemme suivant.

Lemme 7.2.1. *Soit (A, ∂) un anneau différentiel et soient $t, A_1, A_2, B_1, B_2 \in A$. Alors,*

$$\begin{aligned} t \cdot (A_1 B_2 - B_1 A_2) &= 0 \\ &\Downarrow \\ t^2 \cdot (B_2^2 \cdot (B_1 A'_1 - A_1 B'_1) - B_1^2 \cdot (A'_2 B_2 - B'_2 A_2)) &= 0. \end{aligned}$$

Démonstration. — On garde les notations de l'énoncé. Notons

$$\Theta := t \cdot (A_1 B_2 - B_1 A_2).$$

On suppose que $\Theta = 0$. On calcule alors

$$\begin{aligned} 0 &= \\ (t \cdot \Theta' \cdot B_1 B_2) - (t B_1 B'_2 \cdot \Theta) - (t B'_1 B_2 \cdot \Theta) &= \\ t^2 \cdot (A'_1 B_2 B_1 B_2 + A_1 B'_2 B_1 B_2 - B'_1 A_2 B_1 B_2 - B_1 A'_2 B_1 B_2) &+ t' \cdot \overbrace{t \cdot (A_1 B_2 - B_1 A_2)}^{=\Theta=0} B_1 B_2 \\ - t^2 \cdot (A_1 B_2 B_1 B'_2 - B_1 A_2 B_1 B'_2) &\\ - t^2 \cdot (A_1 B_2 B'_1 B_2 - B_1 A_2 B'_1 B_2) &\\ = t^2 \cdot (A'_1 B_2 B_1 B_2 + B_1 A_2 B_1 B'_2 - B_1 A'_2 B_1 B_2 - A_1 B_2 B'_1 B_2) &\\ = t^2 \cdot (B_2^2 \cdot (A'_1 B_1 - A_1 B'_1) - B_1^2 \cdot (A'_2 B_2 - A_2 B'_2)), & \end{aligned}$$

ce qu'on voulait démontrer. ■

On peut maintenant démontrer :

Proposition 7.2.2. *Soit (A, ∂) un anneau différentiel. Soient $\theta, a, b \in A$ tels que*

$$\theta \cdot (a'b - ab') = 0.$$

1) *Alors, pour tout $N \in \mathbf{N}_{\geq 3}$ et pour tout $0 \leq i \leq N$, on a*

$$\begin{aligned} \theta \cdot (a'b - ab') &= 0 \\ \theta^2 \cdot (a''b - ab'') &= 0 \\ b^{N-1} \theta^N \cdot (b^{(i)} a^{(N-i)} - a^{(i)} b^{(N-i)}) &= 0. \end{aligned}$$

2) *En particulier, si S est une partie multiplicative de A , si $s \in S$ et si $i \in \mathbf{N}$, on a*

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{a}{s} \right)' &= 0 \text{ dans } S^{-1}A \\ s^{(i)} &\in S \end{aligned} \right\} \implies \frac{a}{s} = \frac{a^{(i)}}{s^{(i)}} \text{ dans } S^{-1}A$$

Démonstration. — On garde les notations de la proposition. En particulier, on suppose que

$$\theta \cdot (a'b - ab') = 0. \tag{1}$$

On note

$$E_{N,i} := b^{N-1}\theta^N \cdot \left(b^{(i)}a^{(N-i)} - a^{(i)}b^{(N-i)} \right).$$

Commençons par démontrer le point 1). La première égalité est l'hypothèse qu'on fait ; la seconde égalité s'obtient en dérivant la première et en la multipliant par θ . Pour le lot d'égalités suivantes, on raisonne par récurrence sur N . Pour $N = 3$, remarquons qu'en dérivant la seconde égalité, et en la multipliant par θ , on obtient :

$$\theta^3 \cdot ((a''b' - a'b'') + (a'''b - ab''')) = 0. \quad (2)$$

Or, en appliquant le lemme 7.2.1 avec $t = \theta$, $A_1 = a$, $B_2 = b'$, $B_1 = b$ et $A_2 = a'$, on obtient que

$$b^2\theta^2 \cdot (b'a'' - a'b'') = 0;$$

ainsi, en particulier, on a

$$b^2\theta^3 \cdot (b'a'' - a'b'') = 0 \quad \text{et, d'après (2),} \quad b^2\theta^3 \cdot (a'''b - ab''') = 0$$

Supposons maintenant le point 1) vérifié pour tous les $n \leq N$ et montrons-le pour $N + 1$. D'abord, on calcule, pour $0 \leq i \leq N$:

$$\begin{aligned} & 0 \\ & = \\ & b\theta \cdot E_{N,i}' \\ & = \\ & \underbrace{b\theta \cdot ((N-1)b'b^{N-2}\theta^N + Nb^{N-1}\theta'\theta^{N-1}) \cdot \left(b^{(i)}a^{(N-i)} - a^{(i)}b^{(N-i)} \right)}_{=0} \\ & + \\ & b^N\theta^{N+1} \cdot \left(b^{(i+1)}a^{(N-i)} - a^{(i+1)}b^{(N-i)} + b^{(i)}a^{(N+1-i)} - a^{(i)}b^{(N+1-i)} \right) \\ & = \\ & b^N\theta^{N+1} \cdot \left(\left(b^{(i+1)}a^{((N+1)-(i+1))} - a^{(i+1)}b^{((N+1)-(i+1))} \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(b^{(i)}a^{((N+1)-i)} - a^{(i)}b^{((N+1)-i)} \right) \right) \\ & = \\ & E_{N+1,i+1} + E_{N+1,i}. \end{aligned}$$

Une conséquence de ce lot d'égalités et que s'il existe i_0 tel que E_{N+1,i_0} soit nul, alors tous

les $E_{N+1,i}$ sont nuls. En effet, on aurait alors

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 1 & \\ \vdots & & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 & 1 & 0 \\ & \cdots & & 0 & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ & & & i_0 & & \end{pmatrix}}_A \cdot \begin{pmatrix} E_{N+1,0} \\ E_{N+1,1} \\ \vdots \\ E_{N+1,N+1} \end{pmatrix} = 0.$$

Or, si on calcule le déterminant de A en développant par rapport à la dernière ligne, on trouve

$$\det A = (-1)^{N+i_0} \cdot \det \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \\ \hline & & & 1 & & \\ & & & 1 & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 & 1 \end{array} \right) = (-1)^{N+i_0},$$

et donc A est inversible. Ainsi, il nous suffit de trouver un i_0 tel que E_{N+1,i_0} est nul. On raisonne par disjonction de cas. Si $N + 1 = 2k$ est pair, alors on a

$$E_{N+1,k} = b^N \theta^{N+1} \cdot (b^{(k)} a^{((N+1)-k)} - a^{(k)} b^{((N+1)-k)}) = b^N \theta^{N+1} \cdot (b^{(k)} a^{(k)} - a^{(k)} b^{(k)}) = 0,$$

ce qui permet de conclure. Si $N + 1 = 2k + 1$ est impair, on sait, d'après l'hypothèse de récurrence que

$$E_{k,0} = b^{k-1} \theta^k \cdot (a^{(k)} b + b^{(k)} a) = 0.$$

Si on utilise alors le lemme précédent 7.2.1, avec

$$t = (b^{k-1} \theta^k) \quad A_1 = a^{(k)} \quad B_2 = b \quad B_1 = b^{(k)} \quad A_2 = A,$$

on trouve

$$(b^{k-1} \theta^k)^2 \cdot (b^2 \cdot (b^{(k)} a^{(k+1)} - a^{(k)} b^{(k+1)}) + b^{(k)^2} \cdot (a'b - b'a)) = 0.$$

Donc, compte tenu de $\theta \cdot (a'b - b'a) = 0$, on a

$$b^{2k} \theta^{2k} \cdot (b^{(k)} a^{(k+1)} - a^{(k)} b^{(k+1)}) = 0.$$

En multipliant cette dernière égalité par θ , on obtient ainsi : $E_{N+1,k} = 0$ — et donc, tous les $E_{N+1,i}$ le sont aussi.

Montrons maintenant le point 2). Il s'agit d'une conséquence immédiate du point 1). Soit S une partie multiplicative de A et soient $(a, s) \in A \times S$ tel que

$$\left(\frac{a}{s}\right)' = 0 \quad \text{dans } S^{-1}A.$$

Cela signifie qu'il existe $\theta \in S$ tel que

$$\theta \cdot (a's - s'a) = 0.$$

On suppose maintenant que $i \in \mathbf{N}$ vérifie $s^{(i)} \in S$. L'équation $E_{i,0} = 0$ qu'on vient de montrer nous dit donc

$$\underbrace{\left(s^{i-1}\theta^i\right)}_{\in S} \cdot \left(a^{(i)}s - as^{(i)}\right) = 0.$$

Comme $s^{(i)} \in S$, ceci entraîne

$$\frac{a}{s} = \frac{a^{(i)}}{s^{(i)}} \quad \text{dans } S^{-1}A.$$

■

7.3 Les faisceaux de Kovacic, de Carrà Ferro et de Keigher ont les mêmes constantes

A priori, les faisceaux de Kovacic (et *a fortiori* de Keigher, dans le cas réduit) et de Carrà Ferro ne sont pas isomorphes (sur $\text{diff-Spec } A$) : par exemple, on sait que les sections globales de $\text{diff-Spec } A$, pour Kovacic, n'égalent pas A en général, alors que pour Carrà Ferro, c'est le cas. Mais, pour les constantes, on a le théorème suivant :

Théorème 7.3.1. *Soit A une \mathbf{Q} -algèbre différentielle réduite. Alors,*

$$\mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(Kov), \partial} = \mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(Keigher), \partial} \simeq \mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(CF), \partial}$$

Remarque. — On a noté $\mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(Kov), \partial}$ le faisceau des constantes de $\mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(Kov)}$, et de même pour les deux autres faisceaux. ◇

Pour le démontrer, on utilise le lemme suivant :

Lemme 7.3.2. *Soit $(X, \vec{\mathcal{V}})$ un \mathbf{Q} -schéma muni d'un champ de vecteurs. Soit $x \in X$, soit U un voisinage de x et soit $f \in \mathcal{O}_X(U)$. Alors,*

$$f_{\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x)} = 0 \implies \exists n \in \mathbf{N} \mid (f_x)^n = 0.$$

Remarques. — Autrement dit, si f est une fonction régulière définie au voisinage de x et dont le germe le long de $\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}(x)}$ est nulle, alors le germe de f dans x est nilpotent. Ce lemme est un avatar du lemme 7.1.2.

— Ce résultat est faux en dehors du cadre différentiel : si X est un schéma, si $x \in X$ et si $\eta \rightsquigarrow x$ est une génératisation de x , alors

$$f_\eta = 0 \quad \not\Rightarrow \quad \exists n \in \mathbf{N} \mid (f_x)^n = 0.$$

Pour le voir, il suffit de considérer le sous-schéma fermé de $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^2$, réunion des axes $x = 0$ et $y = 0 : X = \text{Spec } \mathbf{C}[x, y]/(xy)$. Dans ce schéma, la fonction y est nulle dans \mathcal{O}_{X, η_x} — où η_x correspond au point générique de l'axe $y = 0$ — mais y n'est pas nilpotente dans $\mathcal{O}_{X, (0,0)}$. \diamond

Démonstration du théorème 7.3.1. — Soit donc A une \mathbf{Q} -algèbre différentielle réduite. Soit U un ouvert Kolchin de $\text{diff-Spec } A$. On commence par construire un morphisme

$$\Psi : \mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(\text{Kov})}(U) \xrightarrow{\delta} \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(U^\delta).$$

Soit donc

$$s : U \longrightarrow \coprod_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}}$$

une fonction vérifiant les conditions *i*) et *ii*) données dans la définition du faisceau de Kovacic. On se donne donc un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de U et deux familles d'éléments $(a_i)_i$ et $(b_i)_i$ vérifiant les conditions voulues. Comme la section s est supposée être constante, on a

$$\forall \mathfrak{p} \in U, \quad s(\mathfrak{p})' = 0.$$

C'est cette condition qui va nous permettre d'étendre s en une section constante du « faisceau Zariski » au-dessus de U^δ . Pour définir $\Psi(s)$, on va construire une fonction

$$t := \Psi(s) : U^\delta \longrightarrow \coprod_{\mathfrak{q} \in U^\delta} A_{\mathfrak{q}}$$

qui soit une section du faisceau structural de $\text{Spec } A$ au-dessus de U^δ , et qui soit constante.

Avant de la définir, motivons ce qui va suivre. Soit $\mathfrak{q} \in U^\delta$. Cela signifie que $\mathfrak{q}^\delta \in U$. On dispose en ce point \mathfrak{q}^δ de la valeur

$$s(\mathfrak{q}^\delta) = \frac{a}{b} \in A_{\mathfrak{q}^\delta},$$

avec $b \notin \mathfrak{q}^\delta$. Cela signifie, grâce à la caractérisation

$$\mathfrak{q}^\delta = \left\{ f \in A \mid \forall n \in \mathbf{N}, f^{(n)} \in \mathfrak{q} \right\},$$

qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $b^{(n_0)} \notin \mathfrak{q}$. Comme la section s est constante, on a par ailleurs

$$a'b - b'a = 0 \quad \text{dans } A_{\mathfrak{q}^\delta}.$$

Ainsi, dans $A_{\mathfrak{q}^\delta}$, on a

$$\forall j \in \mathbf{N}, \quad \frac{a}{b} = \frac{a^{(j)}}{b^{(j)}}.$$

C'est pourquoi on pourra poser :

$$t(\mathfrak{q}) = \frac{a^{(n_0)}}{b^{(n_0)}} \in A_{\mathfrak{q}}.$$

Ainsi, on choisit pour chaque $\mathfrak{q} \in U^\delta$, un tel $a \in A$, un tel $b \in A$ vérifiant $b \notin \mathfrak{q}^\delta$ et un tel entier, et on les note respectivement — pour le besoin de cette démonstration — $a(\mathfrak{q})$, $b(\mathfrak{q})$ et $n_0(\mathfrak{q})$. On définit donc :

$$\forall \mathfrak{q} \in U^\delta, \quad t(\mathfrak{q}) := \frac{a(\mathfrak{q})^{(n_0(\mathfrak{q}))}}{b(\mathfrak{q})^{(n_0(\mathfrak{q}))}}.$$

Avec cette définition, il est clair que t est une fonction constante. Vérifions que cette fonction t est bien une section du faisceau structural de $\text{Spec } A$. Pour cela, il faut trouver un recouvrement⁽¹⁾ Ω_ℓ de U^δ et deux familles (α_ℓ) et (β_ℓ) telles que

$$\forall \mathfrak{q} \in U^\delta, \quad \forall \ell, \quad \left(\mathfrak{q} \in \Omega_\ell \implies \beta_\ell \notin \mathfrak{q} \quad \text{et} \quad t(\mathfrak{q}) = \frac{\alpha_\ell}{\beta_\ell} \quad \text{dans } A_{\mathfrak{q}} \right).$$

Comme recouvrement, on choisit les ouverts

$$V_{i,n} := U_i^\delta \cap D(b_i^{(n)}) \quad \text{pour } i \in I \text{ et } n \in \mathbf{N}.$$

C'est bien un recouvrement. En effet, soit $\mathfrak{q} \in U^\delta$; cela signifie que $\mathfrak{q}^\delta \in U$. Donc, il existe $i \in I$ tel que $\mathfrak{q}^\delta \in U_i$. On a donc $\mathfrak{q} \in U_i^\delta$. Puis, comme $\mathfrak{q}^\delta \in U_i$, on sait que $b_i \notin \mathfrak{q}^\delta$. Par conséquent, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $b_i^{(n)} \notin \mathfrak{q}$; autrement dit, pour ce n , on a $\mathfrak{q} \in D(b_i^{(n)})$. Ainsi, on a trouvé un couple (i, n) tel que $\mathfrak{q} \in V_{i,n}$. Comme familles d'éléments, on choisit

$$\alpha_{i,n} := a_i^{(n)} \quad \text{et} \quad \beta_{i,n} := b_i^{(n)}.$$

Soient donc $\mathfrak{q} \in U^\delta$ et (i, n) tels que $\mathfrak{q} \in V_{i,n}$. On a bien que $\beta_{i,n} \notin \mathfrak{q}$. Il faut vérifier que,

$$t(\mathfrak{q}) = \frac{a_i^{(n)}}{b_i^{(n)}} \quad \text{dans } A_{\mathfrak{q}}.$$

Par hypothèse, on a $\mathfrak{q}^\delta \in U_i$. Par conséquent, on sait que

$$\frac{a(\mathfrak{q}^\delta)}{b(\mathfrak{q}^\delta)} = \frac{a_i}{b_i} \quad \text{dans } A_{\mathfrak{q}^\delta};$$

comme ces deux éléments ont leur dérivée nulle, et comme on sait, d'une part, que $b(\mathfrak{q})^{(n_0(\mathfrak{q}))} \notin \mathfrak{q}$, par définition de $n_0(\mathfrak{q})$ et que, d'autre part, $b_i^{(n)} \notin \mathfrak{q}$, en appliquant la proposition 7.2.2, on obtient que

$$\frac{a(\mathfrak{q})^{n_0(\mathfrak{q})}}{b(\mathfrak{q})^{n_0(\mathfrak{q})}} = \frac{a_i^{(n)}}{b_i^{(n)}} \quad \text{dans } A_{\mathfrak{q}^\delta}.$$

En appliquant le lemme 7.1.2, on en déduit que

$$\frac{a(\mathfrak{q})^{n_0(\mathfrak{q})}}{b(\mathfrak{q})^{n_0(\mathfrak{q})}} = \frac{a_i^{(n)}}{b_i^{(n)}} \quad \text{dans } A_{\mathfrak{q}}.$$

Ainsi, le morphisme

$$\Psi : \mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(Kov)}(U)^\partial \longrightarrow \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(U^\delta)^\partial.$$

est bien défini.

Le morphisme réciproque

$$\Phi : \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(U^\delta)^\partial \longrightarrow \mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(Kov)}(U)^\partial$$

est bien plus simple à définir : il s'agit juste de la restriction, et l'on vérifie sans mal que la restriction d'une section Zariski est une section Kovacic. Pour finir, on laisse le soin au lecteur de vérifier que Ψ et Φ sont réciproques l'un de l'autre : les méthodes utilisées sont similaires à ce qu'on vient de faire. ■

⁽¹⁾Dans cette démonstration, on utilise la définition du faisceau structural d'un schéma à la Hartshorne.

(7.3.1) Un résultat de prolongation des constantes. Au passage, remarquons qu'on peut déduire de la démonstration qui précède le résultat suivant de *prolongation des constantes*, qu'on sera amené à utiliser par la suite :

Proposition 7.3.3. Soit $\mathcal{X} = (X, \mathcal{V})$ un \mathbf{Q} -schéma réduit muni d'un champ de vecteurs. Soit U un ouvert de X . Alors, pour tout $f \in \mathcal{O}_X(U)^\partial$, il existe un unique $\tilde{f} \in \mathcal{O}_X(U^\delta)^\partial$ tel que $\tilde{f}|_U = f$. De plus,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(U)^\partial & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(U^\delta)^\partial \\ f & \longmapsto & \tilde{f} \end{array}$$

est un isomorphisme d'anneaux, dont l'inverse est $\mathcal{O}_X(U^\delta)^\partial \longrightarrow \mathcal{O}_X(U)^\partial$, la restriction des constantes.

Démonstration. — On garde les notations de l'énoncé. Démontrons pour commencer l'unicité d'un tel prolongement. Soient donc

$$\tilde{f}^1 \quad \text{et} \quad \tilde{f}^2 \in \mathcal{O}_X(U^\delta)^\partial$$

tels que $\tilde{f}^1|_U = \tilde{f}^2|_U = f$. Soit $x \in U^\delta$. Cela signifie que $\text{Traj}_{\mathcal{V}}(x) \in U$. Notons $y := \text{Traj}_{\mathcal{V}}(x)$. On a donc

$$\tilde{f}_y^1 = \tilde{f}_y^2.$$

Par conséquent, d'après le lemme 7.3.2, et comme X est réduit, on a donc $\tilde{f}_x^1 = \tilde{f}_x^2$. Donc, $\tilde{f}^1 = \tilde{f}^2$, ce qu'on voulait montrer.

Démontrons maintenant l'existence d'un tel prolongement. Supposons qu'on ait démontré ce résultat dans le cas affine. Démontrons-le dans le cas général. Soit $(\Omega_i)_i$ une base d'ouverts affines de X . On note $U_i = U \cap \Omega_i$ et $f_i = f|_{U_i}$. D'après le cas affine, on a donc

$$\tilde{f}_i \in \mathcal{O}_{\Omega_i}(U_i^\delta)^\partial$$

telle que $f_i = \tilde{f}_i|_{U_i}$. On utilise alors le lemme 6.1.4 de localité et l'unicité des \tilde{f}_i pour voir que

$$\forall i, j \quad U_i \subset U_j \implies \tilde{f}_j|_{U_i^\delta} = \tilde{f}_i.$$

Le second lemme de localité 6.1.5 ainsi que le lemme 6.1.7, nous permettent de voir que U^δ est la réunion des U_i^δ . Ainsi, les \tilde{f}_i se recollent en un \tilde{f} , et on vérifie sans mal que $\tilde{f}|_U = f$.

Maintenant, le cas affine correspond à ce qu'on a fait dans la démonstration du théorème 7.3.1 : en fait, on y a même fait mieux, puisqu'on est parti d'une section Kovacic constante au-dessus de V , un ouvert Kolchin, et qu'on l'a prolongée en une section constante du faisceau structural au-dessus de V^δ .

On définit ainsi un morphisme $\mathcal{O}_X(U)^\partial \longrightarrow \mathcal{O}_X(U^\delta)^\partial$: ceci résulte immédiatement de l'unicité de ces prolongements. Enfin, ce morphisme est un isomorphisme dont la réciproque est le morphisme de restriction $\mathcal{O}_X(U^\delta)^\partial \longrightarrow \mathcal{O}_X(U)^\partial$: si $f \in \mathcal{O}_X(U^\delta)^\partial$, le prolongement de la restriction est encore f , par unicité de ce prolongement ; si $f \in \mathcal{O}_X(U)^\partial$, la restriction du prolongement est encore f , par définition du prolongement. ■

Cinquième partie

Espace des feuilles géométrique

Chapitre 8

Espaces de feuilles

Dans ce chapitre, maintenant qu'on a défini et étudié la topologie de Carrà Ferro, on revient sur la question de l'*espace de feuilles* d'un schéma X muni d'un champ de vecteurs. Notre but est toujours, étant donné $\mathcal{X} = (X, \vec{\mathcal{V}})$, de trouver un « espace » T (par exemple un schéma) qui classifie les feuilles de \mathcal{X} . Ce problème de l'espace classifiant des feuilles est analogue, en un certain sens, à celui de trouver un quotient $X//G$, quand X est un schéma muni d'une action d'un groupe algébrique G . En fait, il ne s'agit là pas seulement d'une analogie vague mais bel et bien d'une vraie correspondance. En effet, on démontrera dans la troisième section de ce chapitre, que

Proposition. *Soit X un schéma. Alors, les actions de $\widehat{\mathbf{G}_a}$ sur X sont en bijection avec les champs de vecteurs de Hasse-Schmidt de X (autrement dit, les dérivations de Hasse-Schmidt de \mathcal{O}_X).*

En particulier, si X est un schéma défini sur \mathbf{Q} , on a une bijection entre les actions de $\widehat{\mathbf{G}_a}$ sur X et les champs de vecteurs sur X .

Dans la première section, on a rassemblé deux essais infructueux pour établir cette proposition. En fait, la difficulté résidait dans la définition de l'objet $\widehat{\mathbf{G}_a}$: le bon cadre, finalement, est celui des schémas formels. Ces deux essais pour définir $\widehat{\mathbf{G}_a}$ soulèvent des questions d'algèbre auxquelles on a répondu dans la deuxième section. Celle-ci doit donc être considérée comme un intermède d'algèbre commutative. On y donne un caractérisation élégante et opérationnelle de $k[[t]] \otimes_k k[[u]]$ et on y démontre que le morphisme

$$\begin{aligned} k[[t]] &\longrightarrow k[[t, u]] \\ t &\longmapsto t + u \end{aligned}$$

ne se factorise pas par $k[[t]] \otimes_k k[[u]] \longrightarrow k[[t, u]]$.

Ceci étant fait, on en vient à proprement parler aux questions d'espaces de feuilles. David Mumford, dans son livre [MF82], définit plusieurs notions de quotients $X//G$, dans le cas où G agit sur X . Ainsi, naturellement, on s'inspire de son travail, et on donne les définitions des *espaces de feuilles* (éventuellement *universels*) *grossiers* ou *géométriques*. Puis, on propose une construction concrète de l'espace des feuilles géométrique, quand celui-ci existe. Pour ce faire, on introduit $X^{\vec{\mathcal{V}}}$ l'ensemble des feuilles d'un schéma \mathcal{X} muni d'un champ de vecteurs. Cet ensemble est très important. Il s'agit de l'analogue non-affine de $\text{diff-Spec } A$:

$$X^{\vec{\mathcal{V}}} \subset X \quad // \quad \text{diff-Spec } A \subset \text{Spec } A.$$

On munit ensuite cet ensemble d'une topologie et d'un faisceau : comme ce qui se passait dans le cas affine (voir la section (6.5)), la topologie de Zariski et la topologie de Carrà

Ferro induisent la même topologie sur $X^{\vec{V}}$; de plus, on a le choix entre plusieurs faisceaux, mais, là aussi, dans les cas favorables, ils sont isomorphes. Pour le démontrer, on utilise la proposition 7.3.3 de prolongement des sections constantes. Ainsi, on définit un espace annelé

$$(X^{\vec{V}}, \mathcal{O}_{X^{\vec{V}}}).$$

On montre alors :

Théorème. Soit $\mathcal{X} = (X, \vec{V})$ un \mathbf{Q} -schéma muni d'un champ de vecteurs. Supposons que \mathcal{X} admette un espace des feuilles géométrique $t : \mathcal{X} \rightarrow (T, \vec{0})$. Alors, il est isomorphe à

$$\text{Traj}_{\vec{V}} : \mathcal{X} \rightarrow \left((X^{\vec{V}}, \mathcal{O}_{X^{\vec{V}}}), \vec{0} \right).$$

Ce théorème montre ainsi que la topologie de Carrà Ferro et le faisceau qu'on lui associe sont solutions du problème de l'espace des feuilles. Par ailleurs, même quand \mathcal{X} n'admet pas d'espace des feuilles géométrique, ce qui est tout à fait possible (*cf.* le cas des schémas quasi-simples), l'espace annelé $(X^{\vec{V}}, \mathcal{O}_{X^{\vec{V}}})$ a des bonnes propriétés, puisqu'on montre :

Proposition. Soit \mathcal{X} un \mathbf{Q} -schéma réduit muni d'un champ de vecteurs. Alors, $(X^{\vec{V}}, \mathcal{O}_{X^{\vec{V}}})$ est un espace localement annelé.

Enfin, on montre que l'étude des trajectoires des schémas sans dynamique propre à base simple menée dans le chapitre (5), qui généralisait le lemme 1.23 de [vdPS03], peut se résumer comme suit :

Proposition. Soit \mathcal{S} un \mathbf{Q} -schéma muni d'un champ de vecteurs, simple. On suppose que \mathcal{S} possède un $C_{\mathcal{S}}$ -point. Alors le morphisme $\varphi_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \rightarrow (C_{\mathcal{S}}, \vec{0})$, est un espace des feuilles universel géométrique pour \mathcal{S} .

8.1 Analogie entre actions de groupe et action des trajectoires : premiers essais

L'analogie entre, d'un côté, les schémas X munis d'une action d'un groupe (algébrique) G et, de l'autre, les schémas X munis d'un champ de vecteurs \mathcal{V} est très tentante, et on va essayer dans cette section de la réaliser. En particulier, on a envie de considérer comme analogues :

- d'une part, le problème de l'espace classifiant des orbites (sous l'action de G) de X ; autrement dit, du quotient de X par le groupe G ;
- d'autre part, le problème de l'espace classifiant des trajectoires de X sous le champ de vecteurs \mathcal{V} .

(8.1.1) Premier essai : les champs de vecteurs vus comme actions de groupe ?

Soit k un anneau. Soit X un schéma, défini au-dessus de k . Dans ce paragraphe, on va explorer le lien entre les « actions » de $\text{Spec } k[\varepsilon]/\varepsilon^2$ sur X (en tant que k -schémas) et les champs de vecteurs \mathcal{V} sur X qui s'annulent sur $\text{Spec } k$.

Commençons par traiter le cas affine. Soit donc k un anneau. On note $\widehat{\mathbf{G}}_a^{[1]}$ le k -schéma « en groupes »⁽¹⁾ défini comme suit :

- le schéma sous-jacent à $\widehat{\mathbf{G}}_a^{[1]}$ est $\text{Spec } k[\varepsilon]/\varepsilon^2$;
- pour la loi de « groupes », on prend la loi additive.

On note ce « groupe » $\widehat{\mathbf{G}}_a^{[1]}$ car l'idée sous-jacente à sa construction est : on part du groupe additif \mathbf{G}_a , on regarde sa complétion formelle⁽²⁾ autour de 0, qui est aussi un k -schéma en « groupes »⁽³⁾ ; mais, en fait, on ne regarde pas ce groupe $\widehat{\mathbf{G}}_a^{[1]}$, mais seulement sa première approximation. C'est $\text{Spec } k[\varepsilon]/\varepsilon^2$ et on le note donc $\widehat{\mathbf{G}}_a^{[1]}$. Si ce $\widehat{\mathbf{G}}_a^{[1]}$ (additif) était (vraiment) un groupe, on aurait un morphisme

$$\widehat{\mathbf{G}}_a^{[1]} \times \widehat{\mathbf{G}}_a^{[1]} \longrightarrow \widehat{\mathbf{G}}_a^{[1]}$$

ie , on aurait un morphisme

$$\Phi : k[\varepsilon]/\varepsilon^2 \longrightarrow k[\varepsilon_1]/\varepsilon_1^2 \otimes_k k[\varepsilon_2]/\varepsilon_2^2 \simeq k[\varepsilon_1, \varepsilon_2]/(\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2)$$

que l'on souhaite être la « restriction » de la comultiplication de \mathbf{G}_a : on veut

$$\Phi(\varepsilon) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2;$$

mais, ce morphisme n'est pas défini car on a

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1\varepsilon_2 \neq 0,$$

tout du moins en caractéristique différente de 2. Ainsi, ce qu'on a noté $\widehat{\mathbf{G}}_a^{[1]}$ n'est pas un schéma en groupes (pour la structure additive).

On peut voir d'une autre façon que $\widehat{\mathbf{G}}_a^{[1]}$ n'est pas un schéma en groupe : sur son foncteur des points. Si R est une k -algèbre, alors, les R -points de $\widehat{\mathbf{G}}_a^{[1]}$ sont

$$\widehat{\mathbf{G}}_a^{[1]}(R) := \text{Hom}_{\mathbf{Alg}_k}(k[\varepsilon]/\varepsilon^2, R) \simeq \{x \in R \mid x^2 = 0\}.$$

⁽¹⁾On met des guillemets autour de « groupe », car comme on ne va pas tarder à le découvrir, ce n'est pas un groupe !

⁽²⁾C'est-à-dire, géométriquement, on regarde le voisinage infinitésimal de 0 dans \mathbf{A}_k^1 .

⁽³⁾Cette fois-ci encore, avec guillemets !

Ce qu'on souhaitait, en fait, c'est que cet ensemble soit un sous-groupe de $(R, +)$. Or, c'est faux : la somme de deux éléments nilpotents d'ordre de nilpotence 2 est certes nilpotente, mais son ordre de nilpotence peut être plus grand.

(8.1.2) Le « groupe » $\widehat{\mathbf{G}}_a^{[1]}$ et ses actions. Néanmoins, on peut modifier un peu les choses de sorte qu'elles se passent mieux. En effet, on a un morphisme très similaire

$$\begin{aligned} m^* : \quad k[\varepsilon]/\varepsilon^2 &\longrightarrow k[\varepsilon_1, \varepsilon_2]/(\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2, \varepsilon_1\varepsilon_2) \\ \varepsilon &\longmapsto \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \end{aligned}$$

qu'on peut voir comme une sorte de comultiplication. Ainsi, au lieu de considérer le carré cartésien de $\widehat{\mathbf{G}}_a^{[1]}$, on considère le schéma

$$\mathrm{Spec} \, k[\varepsilon_1, \varepsilon_2]/(\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2, \varepsilon_1\varepsilon_2).$$

Plus généralement, on note

$$\widehat{\mathbf{G}}_a^{[1],i} := \mathrm{Spec} \left(k[\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i] /_{(\varepsilon_\ell \varepsilon_k)_{\ell,k}} \right),$$

qui est une « approximation » de la puissance i -ième $(\widehat{\mathbf{G}}_a^{[1]})^i$. Avec ces notations, la « multiplication » s'écrit

$$m : \widehat{\mathbf{G}}_a^{[1],2} \longrightarrow \widehat{\mathbf{G}}_a^{[1],1}.$$

On a aussi une counité et une coloï d'inverse. Ce sont

$$\begin{aligned} e^* : \quad k[\varepsilon]/\varepsilon^2 &\longrightarrow k \\ \varepsilon &\longmapsto 0 \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} i^* : \quad k[\varepsilon]/\varepsilon^2 &\longrightarrow k[\varepsilon]/\varepsilon^2 \\ \varepsilon &\longmapsto -\varepsilon \end{aligned}$$

Et donc, on a aussi une unité et une loi d'inverse :

$$e : \mathrm{Spec} \, k \longrightarrow \widehat{\mathbf{G}}_a^{[1],1} \quad \text{et} \quad i : \widehat{\mathbf{G}}_a^{[1],1} \longrightarrow \widehat{\mathbf{G}}_a^{[1],1}.$$

Fait 8.1.1. Ces données confèrent à $\widehat{\mathbf{G}}_a^{[1]}$ une sorte de structure de schéma en groupes, dans le sens où les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathbf{G}}_a^{[1],3} & \xrightarrow{\mathrm{Id} \times m} & \widehat{\mathbf{G}}_a^{[1],2} \\ \downarrow m \times \mathrm{Id} & & \downarrow m \\ \widehat{\mathbf{G}}_a^{[1],2} & \xrightarrow{m} & \widehat{\mathbf{G}}_a^{[1],1} \end{array} \tag{1}$$

$$\begin{array}{ccccc} \widehat{\mathbf{G}}_a^{[1],1} & \xrightarrow{\Delta} & \widehat{\mathbf{G}}_a^{[1],2} & \xrightarrow{\mathrm{Id} \times i} & \widehat{\mathbf{G}}_a^{[1],2} \xrightarrow{m} \widehat{\mathbf{G}}_a^{[1],1} \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \mathrm{Spec} \, k & & \end{array} \tag{2}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec} \, k \times_k \widehat{\mathbf{G}}_a^{[1],1} & \xrightarrow{e \times \mathrm{Id}} & \widehat{\mathbf{G}}_a^{[1],2} & \text{et} & \widehat{\mathbf{G}}_a^{[1],1} \times_k \mathrm{Spec} \, k & \xrightarrow{\mathrm{Id} \times e} & \widehat{\mathbf{G}}_a^{[1],2} \\ \uparrow & & \downarrow m & & \uparrow & & \downarrow m \\ \widehat{\mathbf{G}}_a^{[1],1} & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & \widehat{\mathbf{G}}_a^{[1],1} & & \widehat{\mathbf{G}}_a^{[1],1} & & \widehat{\mathbf{G}}_a^{[1],1} \end{array} \tag{3}$$

Démonstration. — La seule éventuelle difficulté pour démontrer ce fait est de comprendre comment sont définies les différentes flèches. Pour le premier diagramme, il suffit de vérifier la commutation de

$$\begin{array}{ccccc}
 & \varepsilon \longmapsto \varepsilon_1 + \varepsilon_2 & & & \\
 \varepsilon \downarrow & k[\varepsilon]/\varepsilon^2 \xrightarrow{m^*} k[\varepsilon_1, \varepsilon_2]/(\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2, \varepsilon_1 \varepsilon_2) & & \varepsilon_1 \downarrow & \varepsilon_2 \downarrow \\
 \varepsilon_1 + \varepsilon_2 & k[\varepsilon_1, \varepsilon_2]/(\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2, \varepsilon_1 \varepsilon_2) \xrightarrow{\quad} k[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3]/(\varepsilon_i \varepsilon_j)_{i,j} & & \varepsilon_1 + \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \\
 & \varepsilon_1 \longmapsto \varepsilon_1 & & & \\
 & \varepsilon_2 \longmapsto \varepsilon_2 + \varepsilon_3 & & &
 \end{array}$$

qui est évidente! Les autres diagrammes sont du même type, et on laisse le soin au lecteur de le vérifier. ■

Ainsi, on peut voir $\widehat{\mathbf{G}}_a^{[1]}$ un peu comme un groupe. Notre but est maintenant de montrer qu'on a une correspondance entre les « actions » de $\widehat{\mathbf{G}}_a^{[1]}$ sur un schéma X et les champs de vecteurs sur X . Précisons ce qu'on appelle action.

Définition 8.1.2. Soit X un schéma, défini au-dessus de k . Une (k -)action de $\widehat{\mathbf{G}}_a^{[1]}$ sur X est un morphisme

$$\sigma : \widehat{\mathbf{G}}_a^{[1]} \times X \longrightarrow X$$

tel que les deux diagrammes

$$\begin{array}{ccc}
 \widehat{\mathbf{G}}_a^{[1],2} \times X \xrightarrow{\text{Id} \times \sigma} \widehat{\mathbf{G}}_a^{[1]} \times X & & \text{et} & \text{Spec } k \times X \xrightarrow{e \times \text{Id}} \widehat{\mathbf{G}}_a^{[1]} \times X \\
 m \times \text{Id} \downarrow & & \downarrow \sigma & \uparrow & \downarrow \sigma \\
 \widehat{\mathbf{G}}_a^{[1]} \times X \xrightarrow{\sigma} X & & & X \xrightarrow{\text{Id}} X &
 \end{array}$$

commutent.

On peut alors démontrer :

Proposition 8.1.3. Soit k un anneau et soit X un k -schéma. Alors, les k -actions de $\widehat{\mathbf{G}}_a^{[1]}$ sur X sont en correspondance biunivoque avec les k -champs de vecteurs sur X .

Démonstration. — Partons d'un k -schéma X et d'un morphisme

$$\sigma : \widehat{\mathbf{G}}_a^{[1]} \times X \longrightarrow X$$

vérifiant les axiomes de la définition 8.1.2. La première chose à remarquer est que le schéma $\widehat{\mathbf{G}}_a^{[1]} \times X$ est très facile à comprendre. Par exemple, dans le cas affine, si A est une k -algèbre, alors les idéaux premiers de $A[\varepsilon]/\varepsilon^2$ sont en bijection avec ceux de A , via le morphisme

$$\begin{aligned}
 \text{Spec } A &\longrightarrow \text{Spec } A[\varepsilon]/\varepsilon^2 \\
 \mathfrak{p} &\longmapsto (\mathfrak{p}, \varepsilon)
 \end{aligned}$$

En effet, comme $\varepsilon^2 = 0$, l'élément ε appartient à tous les idéaux premiers de $A[\varepsilon]/\varepsilon^2$. En fait, cette flèche est un homéomorphisme. De façon générale, voici comment on peut décrire $\widehat{\mathbf{G}_a}^{[1]} \times X$. Comme espace topologique, c'est X ; son faisceau est

$$\forall U \subset X, \quad \mathcal{O}_{\widehat{\mathbf{G}_a}^{[1]} \times X}(U) = \mathcal{O}_X(U)[\varepsilon]/\varepsilon^2.$$

C'est pourquoi on note

$$X[\varepsilon]/\varepsilon^2 := \widehat{\mathbf{G}_a}^{[1]} \times X.$$

Ainsi, on part d'un morphisme

$$\sigma : X[\varepsilon]/\varepsilon^2 \longrightarrow X.$$

Voyons ce que les deux conditions de la définition d'une action de $\widehat{\mathbf{G}_a}^{[1]}$ imposent à ce morphisme σ . Le deuxième diagramme impose que σ , en tant qu'application, soit l'identité. Ainsi, pour chaque ouvert U de X , on a un morphisme

$$\begin{aligned} \varphi_U : \mathcal{O}_X(U) &\longrightarrow \mathcal{O}_X(U)[\varepsilon]/\varepsilon^2 \\ f &\longmapsto \psi_U(f) + d_U(f) \cdot \varepsilon \end{aligned}.$$

Ce second diagramme impose aussi que $\psi_U = \text{Id}$. Le fait que φ_U soit un morphisme de k -algèbres impose que

$$d_U : \mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U)$$

soit une k -dérivation de $\mathcal{O}_X(U)$.

Il nous reste à voir ce qu'impose le premier diagramme. Remarquons d'abord qu'on peut le réécrire

$$\begin{array}{ccc} X[\varepsilon_1, \varepsilon_2] & \longrightarrow & X[\varepsilon_1], \\ \downarrow & & \downarrow \\ X[\varepsilon_2] & \longrightarrow & X \end{array}$$

avec des notations évidentes. Toutes les flèches, en tant qu'applications ensemblistes, sont des identités (modulo l'identification de l'espace topologique sous-jacent à $X[\varepsilon]$ avec celui de X). Au niveau des faisceaux, si U est un ouvert de X , on a le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}_X(U)[\varepsilon_1, \varepsilon_2]/(\varepsilon_1^2, \varepsilon_1\varepsilon_2, \varepsilon_2^2) & \longleftarrow & \mathcal{O}_X(U)[\varepsilon_1]/\varepsilon_1^2 & \longleftarrow & \mathcal{O}_X(U) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{O}_X(U)[\varepsilon_2]/\varepsilon_2^2 & \longleftarrow & \mathcal{O}_X(U) & \longleftarrow & \mathcal{O}_X(U) \end{array}$$

Si on explicite les flèches, alors la commutation de ce diagramme signifie que, pour tout $f \in \mathcal{O}_X(U)$, on a

$$f + d_U(f) \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = (f + d_U(f) \cdot \varepsilon_2) + (d_U(f) + d_U(d_U(f)) \cdot \varepsilon_2) \cdot \varepsilon_1,$$

qui est une condition triviale. Ainsi, le premier diagramme n'impose aucune condition supplémentaire.

Évidemment, réciproquement, si $\partial : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X$ est un k -champ de vecteurs de X , *i.e.* une k -dérivation du faisceau \mathcal{O}_X , alors, on en déduit une action de $\widehat{\mathbf{G}_a}^{[1]}$ sur X . ■

(8.1.3) Deuxième essai : le « groupe » $\widehat{\mathbf{G}}_a$. Continuons dans la lancée de ce qu'on vient de faire. On a vu que $\widehat{\mathbf{G}}_a^{[1]}$ n'était pas un schéma en groupes. Qu'en est-il de $\mathrm{Spec} k[[t]]$, qu'on note $\widehat{\mathbf{G}}_a$? Pour le savoir il faut vérifier si on peut « étendre » le morphisme

$$\begin{aligned} k[t] &\longrightarrow k[t, u] \\ t &\longmapsto t + u \end{aligned},$$

correspondant à la loi de groupes de \mathbf{G}_a , à $k[[t]] \longrightarrow k[[t]] \otimes_k k[[u]]$. Intuitivement, on a envie de dire que

$$\langle\langle k[[t]] \otimes_k k[[u]] \simeq k[[t, u]] \rangle\rangle \quad (4)$$

et que le morphisme qu'on cherche est

$$\begin{aligned} k[[t]] &\longrightarrow k[[t, u]] \\ t &\longmapsto t + u \end{aligned}.$$

Cependant, l'identité (4) est fausse, et plusieurs difficultés vont apparaître. En voici quelques-unes :

— Première difficulté : On a $k[[t]] \otimes_k k[[u]] \not\simeq k[[t, u]]$. On sait néanmoins, par exemple grâce à la proposition III.4.7, page III.40 de [Bou70] que

$$k[[t]] \otimes_k k[[u]] \quad \text{s'injecte dans} \quad k[[t, u]].$$

Sous cette injection, on peut caractériser $k[[t]] \otimes_k k[[u]]$ ainsi

$$k[[t]] \otimes_k k[[u]] = \left\{ \sum_{i,j} \alpha_{i,j} \cdot t^i u^j \middle| \begin{array}{l} \exists N \in \mathbf{N}_{\geq 1} \\ \exists \mathbf{a}(1), \mathbf{b}(1), \dots, \mathbf{a}(N), \mathbf{b}(N) \in k^{\mathbf{N}} \\ \forall i, j \in \mathbf{N}, \alpha_{i,j} = \sum_{\ell=0}^N \mathbf{a}_i(\ell) \mathbf{b}_j(\ell) \end{array} \right\}.$$

Ainsi, les premiers exemples de séries formelles qui vivent dans $k[[t]] \otimes_k k[[u]]$ sont les séries formelles à variables séparées, ie celles dont les coefficients peuvent s'écrire

$$\alpha_{i,j} = a_i \cdot b_j \quad \forall i \forall j.$$

Viennent ensuite les séries formelles dont les coefficients peuvent s'écrire

$$\alpha_{i,j} = a_i \cdot b_j + c_i \cdot d_j \quad \forall i \forall j.$$

En général, on voit apparaître des séries formelles dont les coefficients sont des sommes de longueur N de produits élémentaires de type $a_i b_j$: on les appellera séries formelles de poids N . Maintenant, considérons les coefficients $\alpha_{i,j}$ d'une telle série formelle comme des nombres posés sur le quadrillage \mathbf{N}^2 du plan. Alors, intuitivement, si une série f vit dans $k[[t]] \otimes_k k[[u]]$ et qu'elle est de poids 1, ie qu'elle est à variables séparées, alors, ses coefficients sont déterminés par les valeurs des bords $\mathbf{N} \times 0$ et $0 \times \mathbf{N}$ du quart de plan \mathbf{N}^2 . Plus généralement, on pense que les coefficients d'une série formelle de poids N sont déterminés par les deux bandes de \mathbf{N}^2 de largeur N et de longueur infinie. On peut voir ainsi que, intuitivement,

$$k[[t]] \otimes_k k[[u]] \neq k[[t, u]].$$

On reviendra plus précisément sur ce point dans le paragraphe (8.2.1).

— Deuxième difficulté : On veut définir un morphisme

$$\begin{aligned} k[[t]] &\longrightarrow k[[t]] \otimes_k k[[u]] \\ t &\longmapsto t+u \end{aligned}$$

Pour le faire, il faut donc vérifier que pour toute série formelle

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i,$$

la série formelle

$$f(t+u) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (t+u)^i = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{i+j} C_{i+j}^i t^i u^j,$$

vit dans $k[[t]] \otimes_k k[[u]]$. Selon notre principe heuristique, on voit qu'en général, une telle série, n'est pas dans $k[[t]] \otimes_k k[[u]]$... Restons-en à ce niveau heuristique pour justifier que la loi de composition n'est pas définie par $\widehat{\mathbf{G}_a}$. On donnera une réponse précise à cette question dans le paragraphe (8.2.2).

— Troisième difficulté : On a calculé les R -points de $\text{Spec } k[\varepsilon]/\varepsilon^2$; c'est

$$(\text{Spec } k[\varepsilon]/\varepsilon^2)(R) = \{x \in R \mid x^2 = 0\}.$$

Évidemment, on a une formule analogue pour les R -points de $\text{Spec } k[\varepsilon]/\varepsilon^n$. Ainsi, on aurait bien aimé avoir une formule du type

$$(\text{Spec } k[[t]])(R) = \{x \in R \mid x \text{ est nilpotent}\},$$

d'autant plus qu'on a (*cf.* la proposition 9.9.2)

$$K[[t]] = \varprojlim_n K[\varepsilon]/\varepsilon^n.$$

Mais, cette formule est fausse. On a bien

$$(\text{Spec } k[[t]])(R) \subset \{x \in R \mid x \text{ est nilpotent}\}$$

mais, en général, l'inclusion est stricte. Pour le voir, il suffit de considérer le morphisme $\text{Id} : k[[t]] \longrightarrow k[[t]]$, qui envoie t sur un élément non-nilpotent.

— Quatrième difficulté : Autant le schéma $\text{Spec } k[[t]]$ est facile à comprendre, autant le schéma $\text{Spec } k[[t, u]]$ l'est beaucoup moins. Le premier n'a que deux points, un point dense et un point fermé. En revanche, $k[[t, u]]$ a beaucoup d'idéaux premiers. Par exemple, (0) , (t) et (u) , mais aussi $(\lambda t + \mu u)$ pour tous $(\lambda, \mu) \in k^2$, sont des idéaux premiers; on a donc déjà une famille de points paramétrés par \mathbf{P}_k^1 . Mais, on peut encore en trouver d'autres : $(t + u^2)$, $(t + \lambda u^2)$, $(t + \lambda u^n)$, etc. sont aussi des idéaux premiers.

Ces difficultés n'apparaissent pas par hasard. Elles sont là car on ne s'est pas placé dans le bon cadre. La section suivante (8.3) vient corriger cette erreur. Avant d'y venir, on propose au lecteur deux intermèdes d'algèbre commutative qui étudient avec plus de précision les difficultés qu'on vient de soulever. Plus précisément, dans le premier intermède (8.2.1), on calcule la k -algèbre $k[[t]] \otimes_k k[[u]]$; dans le second intermède (8.2.2), on montre que le morphisme

$$\begin{aligned} k[[t]] &\longrightarrow k[[t]] \otimes_k k[[u]] \\ t &\longmapsto t+u \end{aligned}$$

n'est pas défini. Ces intermèdes peuvent être sautés.

8.2 Deux intermèdes d'algèbre commutative

(8.2.1) Intermède 1 : retour à la k -algèbre $k[[t]] \otimes_k k[[u]]$. Dans la suite, k est un corps. Revenons à la k -algèbre $k[[t]] \otimes_k k[[u]]$. Dans le paragraphe précédent, on s'est contenté d'heuristiques. Dans celui-là, on entre dans les détails et on donne des résultats précis. Commençons par expliquer plus en détail pourquoi $k[[t]] \otimes_k k[[u]]$ s'injecte dans $k[[t, u]]$. Comme on l'a dit, cela repose (par exemple) sur une proposition de Bourbaki. Pour la commodité du lecteur, on donne une version allégée de cette proposition. Pour la démonstration, on renvoie à [Bou70, page III.40].

Proposition 8.2.1 ([Bou70, proposition III.4.7]). *Soit k un corps, soit Ω une k -algèbre et soient A et B deux sous- k -algèbres de Ω . On suppose qu'il existe une k -base $(e_i)_{i \in I}$ de A qui soit B -libre. Alors, le morphisme*

$$\begin{aligned} A \otimes_k B &\longrightarrow \Omega \\ a \otimes b &\longmapsto a \cdot b \end{aligned}$$

est injectif.

Cette proposition s'applique sans mal à notre cas, où

$$\Omega = k[[t, u]], \quad A = k[[t]] \quad \text{et} \quad B = k[[u]].$$

En effet, vérifions que si $(f_i)_{1 \leq i \leq N}$ est une famille k -libre de A , alors, c'est aussi une famille B -libre de Ω . Soient $(g_i)_{1 \leq i \leq N} \in B^N$ telle que

$$\sum_{i=1}^N g_i f_i = 0. \tag{5}$$

Supposons que l'un des g_i soit non-nul, et notons n_0 le plus petit indice tel que l'un des g_i ait son coefficient d'indice n_0 non-nul. On dispose d'un morphisme

$$k[[t, u]] \longrightarrow k[[t]][[u]] / (u^{n_0+1})$$

qui « tue » les u^i pour $i > n_0$. Si on l'applique à (5), on obtient :

$$\lambda_{1, n_0} f_1 + \cdots + \lambda_{N, n_0} f_N = 0,$$

où on a noté λ_{i, n_0} le coefficient d'indice n_0 de g_i . Comme l'un des λ_{i, n_0} est non-nul, on obtient ainsi une k -relation de liaison entre les f_i , ce qui est absurde. Ainsi, une k -base de A est B -libre si elle vue dans Ω , ce qui suffit à prouver :

Proposition 8.2.2. *Soit k un corps. Alors le morphisme*

$$\begin{aligned} i : \quad k[[t]] \otimes_k k[[u]] &\longrightarrow k[[t, u]] \\ f \otimes g &\longmapsto f \cdot g \end{aligned}$$

est injectif.

Continuons cette étude de $k[[t]] \otimes_k k[[u]]$ en formalisant la notion de poids d'une série formelle.

Définition 8.2.3. Soit $f \in k[[t, u]]$, qu'on écrit

$$f := \sum_{i,j=0}^{+\infty} \alpha_{i,j} \cdot t^i u^j.$$

(i) On dit que f est de poids fini si

$$\exists N \in \mathbf{N} \quad \exists \mathbf{a}(1), \mathbf{b}(1), \dots, \mathbf{a}(N), \mathbf{b}(N) \in k^N \quad \forall i, j \in \mathbf{N}, \alpha_{i,j} = \sum_{\ell=1}^N \mathbf{a}_i(\ell) \mathbf{b}_j(\ell).$$

(ii) Si f est de poids fini, on appelle poids de f , et on note $\text{poids}(f)$ l'entier

$$\text{poids}(f) := \min \left\{ N \in \mathbf{N} \mid \begin{array}{l} \exists \mathbf{a}(1), \mathbf{b}(1), \dots, \mathbf{a}(N), \mathbf{b}(N) \in k^N \\ \forall i, j \in \mathbf{N}, \alpha_{i,j} = \sum_{\ell=1}^N \mathbf{a}_i(\ell) \mathbf{b}_j(\ell) \end{array} \right\}.$$

Remarques. — Si $f \in k[[t]]$ et $g \in k[[u]]$ s'écrivent

$$f = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i t^i \quad \text{et} \quad g = \sum_{i=0}^{+\infty} b_i t^i,$$

alors, l'image de $f \otimes g$ par i est la série formelle

$$i(f \otimes g) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \alpha_{i,j} t^i u^j$$

avec $\forall i, j \in \mathbf{N}, \alpha_{i,j} = a_i b_j$. Autrement dit, $i(f \otimes g)$ est une série formelle de poids fini et inférieur ou égal à 1. En fait, plus généralement, on a cette caractérisation

L'image de $k[[t]] \otimes_k k[[u]]$ dans $k[[t, u]]$ est exactement composée des séries formelles de poids fini.

— Le lecteur pourra faire l'analogie entre les coefficients d'une série formelle de poids ≤ 1 , *ie* vérifiant $\forall i, j \in \mathbf{N}, \alpha_{i,j} = a_i b_j$, et les fonctions à variables séparées *ie* les fonctions $\varphi : U \rightarrow \mathbf{R}$, où U est un ouvert de \mathbf{R}^2 , vérifiant

$$\forall (x, y) \in U, \quad \varphi(x, y) = f(x) \cdot g(y).$$

— La seule série formelle de poids nul est la série formelle nulle. Les séries formelles de poids 1 sont exactement les tenseurs purs, *ie* les séries qui s'écrivent $g \otimes h$, avec $g \in k[[t]]$ et $h \in k[[u]]$.

— Si $\mathbf{a}(1), \mathbf{b}(1), \dots, \mathbf{a}(N), \mathbf{b}(N) \in k^N$ (vus comme des vecteurs ligne), il est plus commode d'écrire la condition

$$\forall i, j \in \mathbf{N}, \alpha_{i,j} = \sum_{\ell=0}^N \mathbf{a}_i(\ell) \mathbf{b}_j(\ell)$$

sous forme matricielle, en disant

$$\left({}^t \mathbf{a}(1) \ {}^t \mathbf{a}(2) \ \cdots \ {}^t \mathbf{a}(N) \right) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{b}(1) \\ \mathbf{b}(2) \\ \vdots \\ \mathbf{b}(N) \end{pmatrix} = (\alpha_{ji}),$$

en tant que matrices infinies. \diamond

Voici un premier lemme :

Lemme 8.2.4. *Soit $f \in k[[t, u]]$ une série formelle de poids $N \geq 1$, qu'on écrit*

$$f = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} \cdot t^i u^j.$$

Alors, il existe N indices distincts $i_1, \dots, i_N \in \mathbf{N}$ et N indices distincts $j_1, \dots, j_N \in \mathbf{N}$ tels que la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha_{j_1, i_1} & \alpha_{j_1, i_2} & \cdots & \alpha_{j_1, i_N} \\ \alpha_{j_2, i_1} & & & \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{j_N, i_1} & \alpha_{j_N, i_2} & \cdots & \alpha_{j_N, i_N} \end{pmatrix}$$

soit inversible.

Démonstration. — Raisonnons par l'absurde en supposant le contraire. On considère la matrice $(\alpha_{j,i})$, dont on note les colonnes C_1, C_2, \dots, C_i , etc. On commence par montrer, sous l'hypothèse absurde, que si i_1, \dots, i_N sont N indices distincts, dans \mathbf{N} , alors, les colonnes $C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_N}$ sont k -liées. C'est facile. Notons par exemple, pour $n \geq 0$,

$$V_n = \left\{ (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \in k^N \mid \forall 1 \leq j \leq n, \quad \sum_{\ell=1}^N \lambda_\ell (C_{i_\ell})_j = 0 \right\}.$$

C'est le k -espace vectoriel des relations de liaison entre les N colonnes de hauteur n , composées par les n premiers coefficients des C_{i_ℓ} . Les V_n forment une suite décroissante de sous- k -espaces vectoriels de k^N . On veut montrer que

$$\exists \underline{\lambda} \neq 0 \quad \text{et} \quad \underline{\lambda} \in \bigcap_n V_n.$$

La suite des dimensions $(d_n = \dim_k V_n)_{n \in N}$ est une suite décroissante d'entiers naturels. Elle est donc stationnaire. Si elle stationne en une valeur $d > 0$, alors c'est bon : la suite des V_n stationne aussi en un k -espace vectoriel non-nul. Sinon, c'est qu'il existe n tel que $V_n = (0)$. Autrement dit, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que les restrictions des C_i aux n premiers indices soient N vecteurs linéairement indépendants. Autrement dit, on a une matrice à n lignes et N colonnes de rang N . On sait dans ce cas qu'on peut extraire N lignes telles que la matrice obtenue soit inversible : c'est absurde.

Continuons notre démonstration. On considère le sous- k -espace vectoriel W de k^N engendré par les colonnes C_i . D'après le théorème de la base incomplète, on choisit M indices

i_1, \dots, i_M tels que la famille $(C_{i_1}, \dots, C_{i_M})$ soit une base de W . D'après ce qui précède, on sait que $M < N$. Soit maintenant $i \in \mathbf{N}$ quelconque. On peut écrire :

$$C_i = \lambda_i(1) \cdot C_{i_1} + \dots + \lambda_i(M) \cdot C_{i_M}.$$

Si on note $D(k)$ la colonne C_{i_k} , on trouve alors que le j -coefficent de C_i , qui est α_{ji} s'écrit

$$\alpha_{j,i} = \sum_{k=1}^M \lambda_i(k) D_j(k).$$

Autrement dit, la série formelle est de poids strictement inférieur à N , ce qui absurde. ■

Remarque. — Ce lemme prendrait très bien sa place dans la théorie des matrices infinies. Il porterait en l'occurrence sur les matrices infinies de rang fini. Il montre en fait qu'on peut aussi caractériser l'image de $k[[t]] \otimes_k k[[u]]$ dans $k[[t,u]]$ comme l'ensemble des séries formelles dont la matrice des coefficients est de rang fini. ♦

Muni de ce lemme, on peut maintenant préciser et démontrer l'heuristique⁽⁴⁾ énoncée au paragraphe précédent. En fait, il n'est pas suffisant de considérer les bandes de largeur N : il faut trouver N lignes et N colonnes qui conviennent.

Théorème 8.2.5. *Soit $f \in k[[t,u]]$ de poids $N \geq 1$. Alors, il existe N indices distincts $i_1, \dots, i_N \in \mathbf{N}$ et N indices distincts $j_1, \dots, j_N \in \mathbf{N}$ tels que la matrice*

$$M_{\underline{i},\underline{j}} = \begin{pmatrix} \alpha_{j_1,i_1} & \alpha_{j_1,i_2} & \cdots & \alpha_{j_1,i_N} \\ \alpha_{j_2,i_1} & & & \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{j_N,i_1} & \alpha_{j_N,i_2} & \cdots & \alpha_{j_N,i_N} \end{pmatrix}$$

soit inversible. Dans ce cas, on a

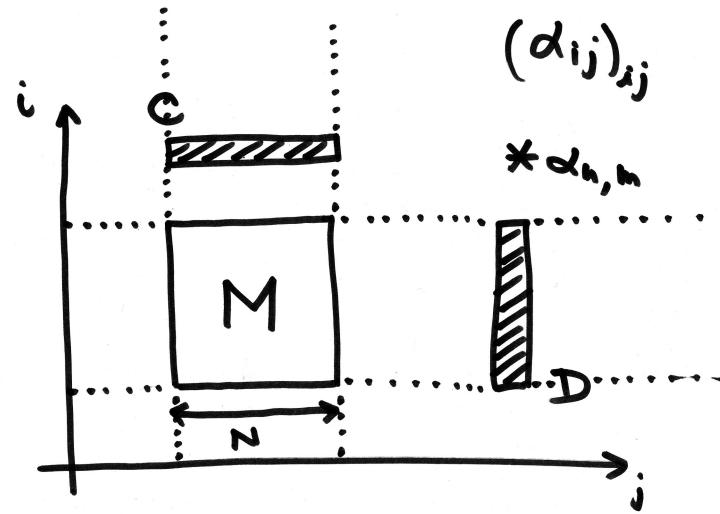
$$\forall (n,m) \in \mathbf{N}^2, \quad \alpha_{n,m} = (\alpha_{m,i_1} \quad \alpha_{m,i_2} \quad \cdots \quad \alpha_{m,i_N}) \cdot (M_{\underline{i},\underline{j}})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{j_1,n} \\ \alpha_{j_2,n} \\ \vdots \\ \alpha_{j_N,n} \end{pmatrix}.$$

En particulier, les coefficients $\alpha_{n,m}$ de f sont déterminés par les coefficients des N colonnes C_{i_1}, \dots, C_{i_N} et des N lignes L_{j_1}, \dots, L_{j_N} .

Remarque. — Comme un dessin vaut souvent mieux qu'un long discours, on a représenté dans la figure 14 la situation étudiée. Avec les notations du dessin, on a

$$\alpha_{n,m} = {}^t D M^{-1} {}^t C.$$

⁽⁴⁾Si f est de poids N , alors, intuitivement, les coefficients de f ne dépendent que des coefficients situés sur les bandes de largeur N .

FIG. 14 – Régularité des coefficients d'une série formelle de poids N .

◊

Démonstration. — Notre série formelle étant de poids $N \geq 1$, soient

$$\mathbf{a}(1), \mathbf{b}(1), \dots, \mathbf{a}(N), \mathbf{b}(N) \in k^N$$

(vus comme des vecteurs ligne) tels que

$$\forall j, i \in \mathbb{N}, \quad \alpha_{j,i} = \sum_{\ell=0}^N \mathbf{a}_j(\ell) \mathbf{b}_i(\ell).$$

Notons

$$X = (\mathbf{a}_m(1) \ \mathbf{a}_m(2) \ \dots \ \mathbf{a}_m(N)) \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_n(1) \\ \mathbf{b}_n(2) \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n(N) \end{pmatrix}$$

de telle sorte que

$$\alpha_{n,m} = XY.$$

Le lemme précédent nous fournit les indices i_1, \dots, i_N et j_1, \dots, j_N qui nous intéressent. On considère maintenant les matrices

$$B = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{i_1}(1) & \mathbf{b}_{i_2}(1) & \dots & \mathbf{b}_{i_N}(1) \\ \mathbf{b}_{i_1}(2) & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ \mathbf{b}_{i_1}(N) & \dots & & \mathbf{b}_{i_N}(N) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{j_1}(1) & \mathbf{a}_{j_1}(2) & \dots & \mathbf{a}_{j_1}(N) \\ \mathbf{a}_{j_2}(1) & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ \mathbf{a}_{j_N}(1) & \dots & & \mathbf{a}_{j_N}(N) \end{pmatrix}.$$

On a ainsi

$$XB = (\alpha_{m,i_1} \ \alpha_{m,i_2} \ \dots \ \alpha_{m,i_N}) \quad \text{et} \quad AY = \begin{pmatrix} \alpha_{j_1,n} \\ \alpha_{j_2,n} \\ \vdots \\ \alpha_{j_N,n} \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, le coefficient indexé par (ℓ, k) du produit AB est

$$(AB)_{\ell, k} = \mathbf{a}_{j_\ell}(1)\mathbf{b}_{i_k}(1) + \cdots + \mathbf{a}_{j_\ell}(N)\mathbf{b}_{i_k}(N) = \alpha_{j_\ell, i_k}.$$

Autrement dit, on a $AB = M_{\underline{i}, \underline{j}}$: c'est une matrice inversible. En particulier, A et B sont aussi des matrices inversibles. Enfin, on conclut en calculant

$$\begin{aligned} \alpha_{n,m} &= XY \\ &= XBB^{-1}A^{-1}AY \\ &= (XB)(AB)^{-1}(AY) \\ &= (\alpha_{m,i_1} \ \alpha_{m,i_2} \ \cdots \ \alpha_{m,i_N}) \cdot (M_{\underline{i}, \underline{j}})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{j_1,n} \\ \alpha_{j_2,n} \\ \vdots \\ \alpha_{j_N,n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

■

(8.2.2) Intermède 2 : retour au groupe « $\widehat{\mathbf{G}_a}$ ». Maintenant qu'on a donné une description précise de la k -algèbre $k[[t]] \otimes_k k[[u]]$, on va pouvoir démontrer que le morphisme

$$\begin{aligned} k[[t]] &\longrightarrow k[[t]] \otimes_k k[[u]] \\ t &\longmapsto t + u \end{aligned}$$

n'est pas défini. En particulier, contrairement à ce à quoi on s'attendait en premier lieu, la restriction de \mathbf{G}_a à $\text{Spec } k[[t]]$ ne définit pas un schéma en groupes. Heureusement, on verra dans ce qui suit comment remédier à ce (faux) problème. Commençons ce paragraphe par un lemme.

Lemme 8.2.6. Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Alors,

$$\det \left(\left(C_{i+j}^i \right)_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} \right) = 1.$$

Démonstration. — On note D_n la matrice (de taille $n+1$) dont on veut calculer le déterminant. Pour la commodité du lecteur, voici à quoi ressemble cette matrice, pour $n=10$, par exemple.

$$D_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & 28 & 36 & 45 & 55 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 56 & 84 & 120 & 165 & 220 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 & 126 & 210 & 330 & 495 & 715 \\ 1 & 6 & 21 & 56 & 126 & 252 & 462 & 792 & 1287 & 2002 \\ 1 & 7 & 28 & 84 & 210 & 462 & 924 & 1716 & 3003 & 5005 \\ 1 & 8 & 36 & 120 & 330 & 792 & 1716 & 3432 & 6435 & 11440 \\ 1 & 9 & 45 & 165 & 495 & 1287 & 3003 & 6435 & 12870 & 24310 \\ 1 & 10 & 55 & 220 & 715 & 2002 & 5005 & 11440 & 24310 & 48620 \end{pmatrix}.$$

On effectue sur cette matrice les transformations suivantes :

$$\begin{aligned} C_{n+1} &\leftarrow C_{n+1} - C_n \\ C_n &\leftarrow C_n - C_{n-1} \\ &\vdots \\ C_2 &\leftarrow C_2 - C_1 \end{aligned}$$

où on a noté C_i la i -ième colonne. D'après la relation de Pascal

$$C_k^i = C_{k-1}^{i-1} + C_k^i,$$

on obtient une matrice de la forme

$$\left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 2 & C_3^2 & & \vdots \\ & 3 & C_4^2 & & \\ \vdots & & \vdots & & \\ n-1 & C_{n-1}^2 & \cdots & & C_{2n-1}^n \end{array} \right).$$

En vertu de la même relation, et en effectuant les transformations

$$C_i \leftarrow C_i - C_{i-1} \text{ pour } i \geq 3 \text{ et en partant de la droite}$$

on tombe sur la matrice

$$\left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ \hline 2 & & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 3 & 2 & C_3^2 & & \vdots \\ & & 3 & C_4^2 & & \\ \vdots & & \vdots & & & \\ n-1 & & n-2 & C_{n-2}^2 & \cdots & C_{2n-2}^n \end{array} \right).$$

Ainsi, on comprend que, en procédant de même, on aura finalement réduit notre matrice D_n en une matrice diagonale, avec des 1 sur la diagonale, sauf en la dernière position, où le coefficient vaudra C_n^n . Autrement, on aura démontré que

$$\det D_n = 1,$$

ce qu'on voulait. ■

Fait 8.2.7. Soit k un corps. Le morphisme

$$\phi : \begin{aligned} k[[t]] &\longrightarrow k[[t, u]] \\ t &\longmapsto t + u \end{aligned}$$

ne se factorise pas par $i : k[[t]] \otimes_k k[[u]] \longrightarrow k[[t, u]]$.

Autrement dit, et c'est là où on voulait en venir, \mathbf{G}_a n'induit pas sur $\mathrm{Spec} k[[t]]$ de structure de schéma en groupes.

Démonstration. — On note $f = \sum_i t^i$. On va démontrer que $\phi(f) \in k[[t, u]]$ n'est pas une série de poids fini. Déjà, on calcule

$$\phi(f) = \sum_{i=0}^{\infty} (t+u)^i = \sum_{i,j \geq 0} C_{i+j}^i \cdot t^i u^j.$$

Supposons que $\phi(f)$ soit de poids fini. Notons N son poids. Le lemme 8.2.4 nous assure qu'on peut trouver N lignes et N colonnes telles que le « mineur » extrait soit inversible. Mais, le lemme 8.2.6 nous dit que les N premières lignes et les N premières colonnes suffisent. On note D_{N-1} cette matrice extraire, de taille N , inversible. Dans ce cas, le théorème 8.2.5 impose aux coefficients $(C_{i+j}^i)_{i,j \in \mathbf{N}}$ de vérifier une certaine relation. En particulier, pour $i = j = n$ (penser n grand), on a

$$C_{2n}^n = (C_n^0 \quad C_{n+1}^1 \quad \cdots \quad C_{n+N-1}^{N-1}) \cdot (D_{N-1})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} C_n^0 \\ C_{n+1}^1 \\ \vdots \\ C_{n+N-1}^{N-1} \end{pmatrix}.$$

Si on note $A \in \mathbf{R}_+$ la norme d'opérateur de la matrice $(D_{N-1})^{-1}$ subordonnée à la norme du *sup* sur \mathbf{R}^N , on a alors l'inégalité suivante :

$$C_{2n}^n \leq A \cdot \max(C_n^0, C_{n+1}^1, \dots, C_{n+N-1}^{N-1})^2, \quad (6)$$

et ce pour tout $n \in \mathbf{N}$. Or, on a

$$C_{n+j}^j \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^j}{j!}.$$

Donc,

$$\max(C_n^0, C_{n+1}^1, \dots, C_{n+N-1}^{N-1})^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{2(N-1)}}{(N-1)!^2}.$$

Par ailleurs, à l'aide de la formule de Stirling⁽⁵⁾, on trouve

$$C_{2n}^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{\pi}} \cdot 4^n.$$

Ces deux équivalents montrent que l'inégalité (6) est absurde. Ainsi, la série formelle à deux indéterminées $\phi(f)$ ne peut être de poids N . Donc, elle ne peut être de poids fini. ■

8.3 Les champs de vecteurs comme actions de groupe de $\widehat{\mathbf{G}_a}$: le bon cadre et les énoncés précis

Dans cette section, on reprend ce qu'on a dit sur le lien entre les actions de « \mathbf{G}_a formel » et les champs de vecteurs, mais dans le bon cadre cette fois-ci.

⁽⁵⁾ Qui donne l'équivalent $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

(8.3.1) Schémas formels. Ce bon cadre est celui des *schémas formels*, tel qu'il a été développé par Grothendieck (*cf.* [EGA_I, §11]). Intuitivement, un schéma formel est un schéma X entouré (éventuellement) d'un voisinage infinitésimal. Ainsi, si X est un schéma et si Y est une partie fermée de X , un exemple typique de schéma formel est *le complété de X le long de Y* , qu'on note $X_{/Y}$, ou \widehat{X} s'il n'y a pas d'ambiguïté, et qui correspond au sous-schéma fermé et réduit Y entouré de son voisinage infinitésimal dans X .

Tout comme les schémas, on peut voir les schémas formels soit comme des espaces localement annelés, soit comme des faisceaux sur le site Zariski \mathbf{Ann}^{op} . Si on note **FormSch** la catégorie des schémas formels, cela signifie que l'on dispose de deux foncteurs pleinement fidèles : d'une part

$$\mathbf{FormSch} \longrightarrow (\text{espaces localement annelés}),$$

qu'on pourrait appeler « réalisation géométrique » (ou « réalisation en espace localement annelé ») ; et, d'autre part,

$$\mathbf{FormSch} \longrightarrow \mathbf{Faisc}(\mathbf{Ann}_{\text{Zar}}^{\text{op}}),$$

qui est le foncteur des points. On ne donne pas plus de détails sur cette catégorie et on renvoie au paragraphe 11 de [EGA_I] le lecteur souhaitant plus d'informations.

(8.3.2) Le groupe formel $\widehat{\mathbf{G}}_a$. Parmi ces schémas formels, il en est un qui nous intéresse, c'est le *groupe additif formel*, qu'on note $\widehat{\mathbf{G}}_a$. Avec ce qu'on vient de dire, on a trois façons de le voir :

- Tout d'abord, on peut le voir comme le complété de $\mathbf{G}_a (= \text{Spec } \mathbf{Z}[t])$ le long de 0.
- Sous le foncteur « réalisation géométrique », on peut le voir comme l'espace localement annelé suivant : comme espace topologique, c'est un point ; puis, on munit ce point du faisceau $\mathbf{Z}[[t]]$.
- Le foncteur des points de $\widehat{\mathbf{G}}_a$ est :

$$\widehat{\mathbf{G}}_a(R) = \{x \in R \mid x \text{ est nilpotent}\}$$

pour tout anneau R .

Ce schéma formel est, en outre, un objet en groupes : c'est un groupe dans la catégorie des schémas formels, et on a deux façons de le voir. Tout d'abord, on peut voir que pour tout anneau R , l'ensemble $\widehat{\mathbf{G}}_a(R)$ est un groupe ; en effet, l'ensemble des éléments nilpotents d'un anneau est un sous-groupe de $(R, +)$. On peut aussi construire un morphisme

$$m : \widehat{\mathbf{G}}_a \times \widehat{\mathbf{G}}_a \longrightarrow \widehat{\mathbf{G}}_a$$

de la catégorie **FormSch**. Dans cette catégorie, le produit $\widehat{\mathbf{G}}_a \times \widehat{\mathbf{G}}_a$ est simplement un point muni du faisceau $\mathbf{Z}[[t, u]]$. Le morphisme m est ainsi caractérisé par son action sur les faisceaux. Il s'agit en l'occurrence de

$$\begin{aligned} k[[t]] &\longrightarrow k[[t, u]] \\ t &\longmapsto t + u \end{aligned} .$$

On dispose aussi, évidemment, d'une section unité. C'est

$$e : \text{Spec } \mathbf{Z} \longrightarrow \widehat{\mathbf{G}}_a,$$

qui envoie tous les points de $\text{Spec } \mathbf{Z}$ sur l'unique point de $\widehat{\mathbf{G}}_a$ et dont l'action sur les faisceaux est

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}[[t]] &\longrightarrow \mathbf{Z} \\ t &\longmapsto 0 \end{aligned} .$$

(8.3.3) Actions de $\widehat{\mathbf{G}_a}$ et champs de vecteurs. Soit maintenant X un schéma (au-dessus de la base $\text{Spec } \mathbf{Z}$). Une action de $\widehat{\mathbf{G}_a}$ sur X est simplement un morphisme (dans la catégorie **FormSch**)

$$\sigma : \widehat{\mathbf{G}_a} \times X \longrightarrow X$$

faisant commuter

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathbf{G}_a} \times \widehat{\mathbf{G}_a} \times X & \xrightarrow{\text{Id} \times \sigma} & \widehat{\mathbf{G}_a} \times X \\ m \times \text{Id} \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \widehat{\mathbf{G}_a} \times X & \xrightarrow{\sigma} & X \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } \mathbf{Z} \times_{\text{Spec } \mathbf{Z}} X & \xrightarrow{e \times \text{Id}} & \widehat{\mathbf{G}_a} \times X \\ \uparrow & & \downarrow \sigma \\ X & \xrightarrow{\text{Id}} & X \end{array}$$

Cette action σ et ces diagrammes peuvent être rendus plus explicites si l'on calcule les deux schémas formels $\widehat{\mathbf{G}_a} \times X$ et $\widehat{\mathbf{G}_a} \times \widehat{\mathbf{G}_a} \times X$. Pour le premier schéma formel $\widehat{\mathbf{G}_a} \times X$, il s'agit de l'espace topologique X qu'on munit du faisceau

$$\mathcal{O}_{\widehat{\mathbf{G}_a} \times X}(U) = \mathcal{O}_X(U)[[t]]$$

pour tout ouvert U de X , et on le note $X[[t]]$. Pour le second, on peut le caractériser de la même façon, et on le note $X[[t, u]]$. Le second diagramme nous dit que le morphisme

$$\sigma : X[[t]] \longrightarrow X$$

est l'identité en tant qu'application (modulo l'identification des espaces topologiques sous-jacents à X et $X[[t]]$). On dispose donc, pour tout ouvert U de X d'un morphisme

$$\varphi_U : \mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U)[[t]].$$

Notons D_0, D_1 , etc. les composantes de ce morphisme, de sorte qu'on ait

$$\begin{aligned} \varphi_U : \mathcal{O}_X(U) &\longrightarrow \mathcal{O}_X(U)[[t]] \\ f &\longmapsto D_0(f) + D_1(f) \cdot t + D_2(f) \cdot t^2 + \dots \end{aligned}$$

Le second diagramme impose de plus qu'on ait $D_0 = \text{Id}$. Enfin, le fait que φ_U soit un morphisme d'anneaux impose que pour toutes $f, g \in \mathcal{O}_X(U)$ on ait

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{+\infty} D_i(fg) \cdot t^i &= \left(\sum_{i=0}^{+\infty} D_i(f) \cdot t^i \right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} D_j(g) \cdot t^j \right) \\ &= \sum_{i,j=0}^{+\infty} D_i(f) D_j(g) \cdot t^{i+j}, \end{aligned}$$

et donc qu'on ait

$$\forall i \in \mathbf{N}, \quad \forall f, g \in \mathcal{O}_X(U), \quad D_i(fg) = \sum_{k+\ell=i} D_k(f) D_\ell(g).$$

Voyons maintenant ce qu'impose le premier diagramme. Toutes ses flèches, en tant qu'applications, sont l'identité de X (toujours modulo l'identification des espaces topologiques sous-jacents à X et $X[[t]]$). Au niveau des faisceaux, on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \sum_i D_i(f) \cdot u^i & \xleftarrow{\quad f \quad} & \\
 & & t & \xleftarrow{\quad t \quad} & \\
 t+u & \xrightarrow{\quad f \quad} & \mathcal{O}_X(U)[[t,u]] & \xleftarrow{\phi_1} & \mathcal{O}_X(U)[[t]] \\
 \uparrow & \uparrow & \uparrow \phi_2 & & \uparrow \varphi_U \\
 t & f & \mathcal{O}_X(U)[[t]] & \xleftarrow{\quad \varphi_U \quad} & \mathcal{O}_X(U)
 \end{array}$$

Ainsi, si $f \in \mathcal{O}_X(U)$, on a

$$\begin{aligned}
 \phi_1 \left(\sum_{i=0}^{+\infty} D_i(f) \cdot t^i \right) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} D_j(D_i(f)) \cdot u^j \right) \cdot t^i \\
 &= \sum_{i,j=0}^{+\infty} D_j(D_i(f)) \cdot u^j t^i \\
 &= \\
 \phi_2 \left(\sum_{i=0}^{+\infty} D_i(f) \cdot t^i \right) &= \sum_{i=0}^{+\infty} D_i(f) \cdot (t+u)^i \\
 &= \sum_{i,j=0}^{+\infty} C_{i+j}^i \cdot D_{i+j}(f) \cdot t^i u^j.
 \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\forall i, j \in \mathbf{N}, \quad C_{i+j}^i \cdot D_{i+j} = D_j \circ D_i.$$

Si on fait le bilan de tout ceci, on obtient enfin la correspondance attendue entre les actions de $\widehat{\mathbf{G}}_a$ sur X et les champs de vecteurs sur X :

Proposition 8.3.1. *Soit X un schéma. Alors, les actions de $\widehat{\mathbf{G}}_a$ sur X sont en bijection avec les champs de vecteurs de Hasse-Schmidt de X (autrement dit, les dérivations de Hasse-Schmidt de \mathcal{O}_X).*

En particulier, si X est un schéma défini sur \mathbf{Q} , on a une bijection entre les actions de $\widehat{\mathbf{G}}_a$ sur X et les champs de vecteurs sur X .

8.4 Espaces des feuilles

Dans ce qui suit, k est un anneau.

Maintenant qu'on a établi formellement le lien entre les champs de vecteurs et les actions de groupe, il est encore plus légitime pour aborder la question de l'espace des feuilles d'un schéma muni d'un champ de vecteurs de prendre pour référence le livre [MF82] de David Mumford. Dans ce livre, étant donné X un schéma muni d'une action d'un groupe algébrique G , Mumford définit plusieurs notions de quotient de X par G : les quotients catégoriques et les quotients géométriques, qui peuvent en outre être universels ou uniformes. On adapte au cas des champs de vecteurs ces définitions.

(8.4.1) Espace des feuilles « catégorique ». En fait, au lieu de suivre Mumford et de choisir le terme « catégorique », on a choisi le terme « grossier ». On a déjà défini les espaces des feuilles grossiers, dans le paragraphe (4.2.3). Pour la commodité du lecteur, rappelons cette définition.

Définition 8.4.1. Soit \mathcal{X} un k -schéma muni d'un k -champ de vecteurs. On appelle espace des feuilles grossier de \mathcal{X} tout k -schéma T , muni d'un k -morphisme

$$t : \mathcal{X} \longrightarrow (T, \vec{0})$$

de k -schémas munis de champ de vecteurs tel que, pour tout k -schéma T' et pour tout morphisme $\psi : \mathcal{X} \longrightarrow (T', \vec{0})$, il existe une unique factorisation f

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{\psi} & (T', \vec{0}) \\ t \downarrow & \nearrow f & \\ (T, \vec{0}) & & \end{array}$$

Comme on l'a vu dans le paragraphe (4.4.4), cet espace des feuilles peut être insuffisant : par exemple, l'espace des feuilles grossier d'un schéma quasi-simple \mathcal{X} ne « voit » que la trajectoire générique de \mathcal{X} .

(8.4.2) Espace des feuilles géométrique. C'est pourquoi on introduit un espace des feuilles plus fin. On définit :

Définition 8.4.2. Soit k une \mathbf{Q} -algèbre. Soit \mathcal{X} un k -schéma muni d'un k -champ de vecteurs. On appelle espace des feuilles géométrique de \mathcal{X} tout k -schéma T , muni d'un k -morphisme

$$t : \mathcal{X} \longrightarrow (T, \vec{0})$$

vérifiant :

- a) t est surjectif
- b) $\forall (x, y) \in X^2, \quad t(x) = t(y) \implies \text{Traj}_{\mathcal{V}}(x) = \text{Traj}_{\mathcal{V}}(y)$
- c) t est submersif, ie pour toute partie U de T , on a

$$U \text{ ouverte} \iff t^{-1}(U) \text{ ouverte}$$

- d) pour tout ouvert U de T ,

$$t^\#_U : \mathcal{O}_T(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(t^{-1}U)^\partial,$$

est un isomorphisme.

Comme on peut s'y attendre, un espace des feuilles *géométrique* est en particulier un espace des feuilles *grossier*.

Proposition 8.4.3. *Soit k une \mathbf{Q} -algèbre. Soit \mathcal{X} un k -schéma muni d'un k -champ de vecteurs. Soit $t : \mathcal{X} \rightarrow (T, \vec{0})$ un espace des feuilles géométrique pour \mathcal{X} . Alors, c'est aussi un espace des feuilles grossier.*

Démonstration. — Soit en effet T' un k -schéma, et soit $f : \mathcal{X} \rightarrow (T', \vec{0})$. On cherche une factorisation

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{f} & (T', \vec{0}) \\ t \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ (T, \vec{0}) & & \end{array}$$

D'abord, d'après ce qu'on a dit dans le paragraphe 4.2.2, on sait que

$$\forall (x, y) \in X^2, \quad \text{Traj}_{\mathcal{V}}(x) = \text{Traj}_{\mathcal{V}}(y) \implies f(x) = f(y) = f(\text{Traj}_{\mathcal{V}}(x)).$$

On peut donc factoriser f , en tant qu'application ensembliste, par t , en posant, pour tout $x \in X$:

$$\bar{f}(t(x)) = f(x).$$

Comme t est submersive, l'application \bar{f} est continue si, et seulement si, $t \circ \bar{f}$ l'est, ce qui est le cas. Il ne reste plus qu'à définir l'action sur les faisceaux. Supposons, pour simplifier, qu'on ait

$$\mathcal{O}_T(U) = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(t^{-1}U)^{\partial}.$$

Soit U un ouvert de T' . On dispose du morphisme

$$\mathcal{O}_{T'}(U) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(f^{-1}U)$$

d'anneaux différentiels. Comme $\mathcal{O}_{T'}$ est un faisceau d'anneaux constants, ce morphisme se factorise uniquement par

$$\mathcal{O}_{T'}(U) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(f^{-1}U)^{\partial} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(f^{-1}U).$$

Or,

$$\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(f^{-1}U)^{\partial} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}((t \circ \bar{f})^{-1}U)^{\partial} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}\left(t^{-1}(\bar{f}^{-1}U)\right)^{\partial} = \mathcal{O}_T(\bar{f}^{-1}U).$$

On a donc bien construit la factorisation que l'on voulait, et on voit de plus qu'elle est unique. ■

(8.4.3) Espaces des feuilles universels. Terminons ce paragraphe par une dernière définition.

Définition 8.4.4. *Soit k une \mathbf{Q} -algèbre et soit \mathcal{X} un k -schéma muni d'un k -champ de vecteurs. Soit T un k -schéma et*

$$t : \mathcal{X} \rightarrow (T, \vec{0})$$

un k -morphisme. On dit que cette donnée est un espace des feuilles universel grossier (resp. un espace des feuilles universel géométrique) si, pour tout k -schéma T' et pour tout k -morphisme $T' \rightarrow T$, dans le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} \times_{T, \vec{0}} (T', \vec{0}) & \xrightarrow{t'} & (T', \vec{0}) \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \mathcal{X} & \xrightarrow{t} & (T, \vec{0}) \end{array},$$

le morphisme $t' : \mathcal{X} \times_{T, \vec{0}} (T', \vec{0}) \longrightarrow (T', \vec{0})$ est un espace des feuilles grossier (resp. géométrique) de $\mathcal{X} \times_{T, \vec{0}} (T', \vec{0})$.

8.5 Espace des feuilles géométrique et faisceau de Carrà Ferro

Dans cette section, on va montrer que l'espace des feuilles géométrique, quand il existe, est nécessairement l'ensemble des trajectoires muni du faisceau des constantes de Carrà Ferro. Commençons par quelques compléments sur l'application $\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}$ et sur l'ensemble des points invariants, inspirés par cette problématique.

(8.5.1) L'ensemble $X^{\vec{\mathcal{V}}}$ des feuilles : définition et topologie. Commençons par réinterpréter rapidement l'application $\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}$ et le faisceau de Carrà Ferro, à la lumière du point de vue de « l'espace des feuilles ». Tout d'abord, on introduit la notation suivante :

$$X^{\vec{\mathcal{V}}} := \left\{ x \in X \mid x \text{ est invariant sous } \vec{\mathcal{V}} \right\}.$$

C'est l'ensemble des feuilles de \mathcal{X} . Évidemment, c'est l'analogue pour X de ce que $\text{diff-Spec } A$ est à $\text{Spec } A$:

$$\text{diff-Spec } A \subset \text{Spec } A \quad // \quad X^{\vec{\mathcal{V}}} \subset X.$$

On munit $X^{\vec{\mathcal{V}}}$ de la topologie induite par la topologie Zariski de X . Remarquons cependant que, dans le cas où elle est définie, la topologie de Carrà Ferro induit la même topologie :

Fait 8.5.1. *Soit X un \mathbf{Q} -schéma muni d'un champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$. Alors, la topologie de Zariski et la topologie de Carrà Ferro induisent la même topologie sur $X^{\vec{\mathcal{V}}}$.*

Démonstration. — D'abord, comme la topologie de Carrà Ferro est incluse dans celle de Zariski, on a bien qu'un ouvert U de $X^{\vec{\mathcal{V}}}$ pour la topologie induite par Carrà Ferro est aussi un ouvert pour la topologie induite par Zariski. Réciproquement, soit U un ouvert de X . Montrons que

$$U \cap X^{\vec{\mathcal{V}}} = U^\delta \cap X^{\vec{\mathcal{V}}}.$$

On aura ainsi qu'un ouvert de $X^{\vec{\mathcal{V}}}$ induit par Zariski est aussi un ouvert induit par Carrà Ferro. Déjà, on a

$$U \cap X^{\vec{\mathcal{V}}} \subset U^\delta \cap X^{\vec{\mathcal{V}}}.$$

Soit maintenant $x \in U^\delta \cap X^{\vec{\mathcal{V}}}$. D'après la caractérisation 6.1.8, comme $x \in U^\delta$, on a $\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x) \in U$. Mais, comme $x \in X^{\vec{\mathcal{V}}}$, on a $\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x) = x$. Donc, on a $x \in U$, ce qu'on voulait. ■

(8.5.2) **Submersivité de l'application $\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}$.** On dispose, par ailleurs, de l'application

$$\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}} : X \longrightarrow X^{\vec{\mathcal{V}}},$$

application qui est surjective. Pour la légèreté des notations, on note aussi

$$t := \text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}.$$

En fait, l'application $\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}$ est submersive. Cela signifie au choix l'une des trois propriétés suivantes :

- Soit U une partie de $X^{\vec{\mathcal{V}}}$. Alors, U est un ouvert de $X^{\vec{\mathcal{V}}}$ si, et seulement si, $t^{-1}U$ est un ouvert (Zariski ou Carrà Ferro, cela ne change rien) de X
- Soit Y un espace topologique et $f : X^{\vec{\mathcal{V}}} \longrightarrow Y$ une application. Alors, f est continue si, et seulement si, $f \circ t : X \longrightarrow Y$ l'est.
- La topologie de $X^{\vec{\mathcal{V}}}$ est ce qu'on appelle la *topologie quotient* de $X^{\vec{\mathcal{V}}}$, relativement à l'application $\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}} : X \longrightarrow X^{\vec{\mathcal{V}}}$. En particulier, cette application est continue.

Montrons par exemple la première de ces propriétés. Soit U une partie de $X^{\vec{\mathcal{V}}}$. Supposons que U soit ouverte. Montrons que

$$t^{-1}U = \{x \in X \mid \text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x) \in U\}.$$

est un ouvert de X . Plus précisément, comme U est un ouvert de $X^{\vec{\mathcal{V}}}$, on peut trouver un ouvert V de X tel que

$$U = V \cap X^{\vec{\mathcal{V}}}.$$

Montrons que $t^{-1}U = V^\delta$:

$$\begin{aligned} x \in t^{-1}U &\iff \text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x) \in U \\ &\iff \text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x) \in V \cap X^{\vec{\mathcal{V}}} \\ &\iff \text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x) \in V \\ &\iff x \in V^\delta, \end{aligned}$$

ce dernier point découlant de la caractérisation 6.1.8. Réciproquement, soit toujours U une partie de $X^{\vec{\mathcal{V}}}$. Supposons que $t^{-1}U$ soit ouverte et montrons que U l'est aussi. Pour cela, il suffit de voir que $U = t^{-1}U \cap X^{\vec{\mathcal{V}}}$, ce qui évident car

$$\begin{aligned} x \in t^{-1}U \cap X^{\vec{\mathcal{V}}} &\iff \text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x) \in U \quad \text{et} \quad x = \text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x) \\ &\iff x \in U. \end{aligned}$$

Finalement, on a montré :

Proposition 8.5.2. *Soit X un \mathbf{Q} -schéma muni d'un champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$. Alors, l'application*

$$\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}} : X \longrightarrow X^{\vec{\mathcal{V}}}$$

est continue. Par ailleurs, si U est une partie de $X^{\vec{\mathcal{V}}}$, on a

$$U \text{ ouvert de } X^{\vec{\mathcal{V}}} \iff \text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}^{-1}(U) \text{ ouvert de } X.$$

Au passage, on en déduit :

Proposition 8.5.3. Soit X un \mathbf{Q} -schéma muni d'un champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$. Alors, l'application $\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}} : X \longrightarrow X^{\vec{\mathcal{V}}}$ est ouverte.

Démonstration. — On garde les notations de l'énoncé. Soit U un ouvert de X . On veut montrer que $t(U)$ est un ouvert de $X^{\vec{\mathcal{V}}}$. D'après la proposition précédente, il suffit de montrer que

$$t^{-1}(t(U))$$

est un ouvert de X . Or, il s'agit de U^δ , qui est bien un ouvert. ■

(8.5.3) Quel faisceau sur $X^{\vec{\mathcal{V}}}$? Il y a trois façons de munir l'ensemble $X^{\vec{\mathcal{V}}}$ d'un faisceau, dont deux d'entre elles s'avèrent être équivalentes. Voici ces trois possibilités :

- (i) On dispose de l'application surjective $\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}} : X \longrightarrow X^{\vec{\mathcal{V}}}$, qui nous a permis de munir $X^{\vec{\mathcal{V}}}$ de la topologie quotient. Dans la même optique, on peut munir $X^{\vec{\mathcal{V}}}$ du faisceau quotient. C'est simplement le faisceau défini par

$$\mathcal{F}_1(U) := \mathcal{O}_X(t^{-1}U)$$

pour tout ouvert U de $X^{\vec{\mathcal{V}}}$. Il s'agit d'un faisceau en anneaux différentiels (plus précisément, en \mathbf{Q} -algèbres différentielles). C'est aussi le poussé en avant par t de \mathcal{O}_X :

$$\mathcal{F}_1 = t_* \mathcal{O}_X.$$

- (ii) L'espace topologique $X^{\vec{\mathcal{V}}}$ est un sous-espace de X . On peut donc le munir du faisceau induit. Ce dernier est défini comme suit : pour tout ouvert U de $X^{\vec{\mathcal{V}}}$, on pose

$$\mathcal{A}(U) = \varinjlim_{\substack{U \subset V \\ V \text{ ouvert de } X}} \mathcal{O}_X(V).$$

En général, \mathcal{A} n'est pas un faisceau, c'est juste un préfaisceau. Le faisceau induit est, par définition, le faisceau associé à \mathcal{A} . Cependant, cette définition est ambiguë. En effet, on a deux topologies distinctes sur X . Si on munit X de la topologie de Carrà Ferro, alors, la limite inductive

$$\varinjlim_{\substack{U \subset V \\ V \text{ ouvert Carrà Ferro de } X}} \mathcal{O}_X(V)$$

peut être calculée aisément. En effet, il existe un plus petit ouvert Carrà Ferro contenant U : c'est justement $t^{-1}U$ ou, ce qui revient au même, U_Δ . On a alors

$$\varinjlim_{\substack{U \subset V \\ V \text{ ouvert Carrà Ferro de } X}} \mathcal{O}_X(V) = \mathcal{O}_X(t^{-1}U).$$

Ainsi, si on note $i_{\text{CF}} : X^{\vec{\mathcal{V}}} \longrightarrow X$ l'inclusion quand on munit X de la topologie de Carrà Ferro, on pose

$$\mathcal{F}_2 := (i_{\text{CF}})^{-1} \mathcal{O}_X.$$

On vient de montrer que

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 \quad \text{ie} \quad t_* \mathcal{O}_X = (i_{\text{CF}})^{-1} \mathcal{O}_X.$$

Ce faisceau est l'analogue dans le cas non-affine de $\mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(\text{CF})}$ qu'on a défini et étudié dans le paragraphe (6.5.3).

(iii) Dans le cas où l'on munit X de la topologie de Zariski, la limite inductive est plus difficile à calculer et est *a priori* différente. Si l'on note $i_{\text{Zar}} : X^{\mathcal{V}} \longrightarrow X$ l'inclusion, avec X muni de la topologie de Zariski, on a peut alors poser

$$\mathcal{F}_3 := (i_{\text{Zar}})^{-1} \mathcal{O}_X.$$

Ce faisceau est l'analogue dans le cas non-affine du faisceau de Keigher $\mathcal{O}_{\text{diff-Spec } A}^{(\text{Keigher})}$ qu'on a défini et étudié dans le paragraphe (6.5.2). On va revenir dans le paragraphe suivant sur ce cas-là.

(8.5.4) Le faisceau sur $X^{\mathcal{V}}$. Cependant, compte tenu du théorème 7.3.1, qui dit que les constantes de Carrà Ferro, de Kovacic et de Keigher sont les mêmes dans le cas réduit, compte tenu aussi de la définition d'un espace des feuilles géométrique, et enfin, compte tenu du fait qu'il est naturel de considérer sur l'espace des feuilles les « intégrales premières », on munit plutôt l'espace $X^{\mathcal{V}}$ du faisceau *des constantes*, défini par

$$\mathcal{O}_{X^{\mathcal{V}}} (U) := \mathcal{O}_{\mathcal{X}} (t^{-1} U)^{\partial}$$

pour tout ouvert U . C'est un faisceau en anneaux, et pas en anneaux différentiels.

Remarque. — Revenons au fait que le faisceau induit par \mathcal{O}_X sur $X^{\mathcal{V}}$ dépend du choix de la topologie sur X . Ce n'est plus le cas si on cherche à restreindre à $X^{\mathcal{V}}$ le faisceau des constantes de \mathcal{O}_X (quand X est réduit) :

Fait 8.5.4. *Soit \mathcal{X} un \mathbf{Q} -schéma réduit muni d'un champ de vecteurs. Alors,*

$$(i_{CF})^{-1} (\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\partial}) = (i_{\text{Zar}})^{-1} (\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\partial}) = t_* \mathcal{O}_X^{\partial}$$

Démonstration. — On garde les notations de l'énoncé. On sait déjà que $(i_{CF})^{-1} \mathcal{O}_{\mathcal{X}} = t_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$, et cette égalité est encore valable quand on passe aux constantes. Soit U un ouvert de $X^{\mathcal{V}}$. Calculons la limite

$$\varinjlim_{\substack{U \subset V \\ V \text{ ouvert Zariski de } X}} \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\partial} (V).$$

Soit V un ouvert Zariski contenant U . On a donc $U^{\delta} \subset V^{\delta}$. Ainsi, on dispose d'un morphisme

$$i_V : \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\partial} (V) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\partial} (U^{\delta}) :$$

on part de $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\partial} (V)$; grâce à la proposition 7.3.3, on prolonge f en $\tilde{f} \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\partial} (V^{\delta})$; puis, on restreint \tilde{f} à U^{δ} . Cette famille de morphismes (i_V) est compatible. Vérifions qu'elle fait de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\partial}$ la limite inductive qu'on veut calculer. Soit donc B un anneau différentiel muni d'une collection compatible de morphismes

$$f_V : \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\partial} (V) \longrightarrow B.$$

On veut montrer que ces morphismes se factorisent par $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\partial} (U^{\delta})$. Pour commencer, remarquons que, comme U^{δ} est un ouvert Zariski de X , on dispose déjà d'un morphisme

$$f_{U^{\delta}} : \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\partial} (U^{\delta}) \longrightarrow B.$$

Soit V un ouvert Zariski de X contenant U . Tout ce qu'il faut montrer est donc que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\partial}(V) & & \\ i_V \searrow & f_V \swarrow & \\ & \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\partial}(U^\delta) & \xrightarrow{f_{U^\delta}} B \end{array}$$

commute. Or, dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\partial}(V) & & & & \\ \downarrow \text{prolong} & \nearrow i_V & \searrow f_V & & \\ & \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\partial}(U^\delta) & \xrightarrow{f_{U^\delta}} & B, & \\ \text{①} & \nearrow \text{restric} & \searrow & & \\ \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\partial}(V^\delta) & & f_{V^\delta} & & \end{array}$$

le diagramme ① commute par définition de i_V , le diagramme ② commute car les f_W forment une famille compatible de morphismes, et le grand triangle

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\partial}(V) & & \\ \downarrow \text{prolong} & & \\ \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\partial}(V^\delta) & \xrightarrow{f_{V^\delta}} & B \end{array}$$

commute pour la même raison, et car les morphismes de prolongation et de restriction sont inverses l'un de l'autre. Ainsi, le dernier triangle

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\partial}(V) & & \\ i_V \searrow & f_V \swarrow & \\ & \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\partial}(U^\delta) & \xrightarrow{f_{U^\delta}} B \end{array}$$

est bien commutatif, ce qu'on voulait. ■

◇

(8.5.5) L'espace des feuilles géométrique est l'ensemble des feuilles $X^{\vec{\mathcal{V}}}$ muni du faisceau $\mathcal{O}_{X^{\vec{\mathcal{V}}}}$. Tout ceci étant fait, on peut en venir au résultat qui nous intéresse : quand il existe, l'espace des feuilles géométrique est exactement l'ensemble $X^{\vec{\mathcal{V}}}$ qu'on vient d'étudier, muni du faisceau qu'on vient de définir, et de l'application

$$\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}} : X \longrightarrow X^{\vec{\mathcal{V}}}.$$

Théorème 8.5.5. Soit $\mathcal{X} = (X, \vec{\mathcal{V}})$ un \mathbf{Q} -schéma muni d'un champ de vecteurs. Supposons que \mathcal{X} admette un espace des feuilles géométrique

$$t : \mathcal{X} \longrightarrow (T, \vec{0}).$$

Alors, T est isomorphe à $X^{\vec{\mathcal{V}}}$, en tant qu'espace annelé.

Remarques. — Évidemment, dans cet énoncé, $X^{\bar{\mathcal{V}}}$, est muni du faisceau qu'on vient de définir.

— Comme corollaire de ce théorème, si \mathcal{X} admet un espace des feuilles géométrique, alors l'espace annelé

$$(X^{\bar{\mathcal{V}}}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(t^{-1}-)^{\partial})$$

est un schéma. Réciproquement, si ce dernier est un schéma, alors c'est un espace des feuilles géométrique. ◇

Démonstration. — On garde les notations de l'énoncé. Soit

$$t : \mathcal{X} \longrightarrow (T, \vec{0})$$

un espace des feuilles géométrique pour \mathcal{X} . Construisons pour commencer une bijection ϕ entre T et $X^{\bar{\mathcal{V}}}$. On sait, d'après ce qu'on a dit dans le paragraphe 4.2.2, que si $\text{Traj}_{\bar{\mathcal{V}}}(x) = \text{Traj}_{\bar{\mathcal{V}}}(y)$, alors $t(x) = t(y)$. On peut donc factoriser

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{t} & T \\ \text{Traj}_{\bar{\mathcal{V}}} \downarrow & \nearrow \phi & \\ X^{\bar{\mathcal{V}}}. & & \end{array}$$

Par ailleurs, comme t est surjective, d'après l'axiome **a)** de la définition 8.4.2, il en est de même pour ϕ . Le fait que ϕ soit injective est assuré par l'axiome **b)**.

Montrons que ϕ est un homéomorphisme. Cela vient du fait que les deux applications

$$t : X \longrightarrow T \quad \text{et} \quad \text{Traj}_{\bar{\mathcal{V}}} : X \longrightarrow X^{\bar{\mathcal{V}}}$$

sont submersives. Ainsi, ϕ est continue car t l'est, et ϕ^{-1} est continue car $\text{Traj}_{\bar{\mathcal{V}}}$ l'est.

Maintenant, on montre que cette factorisation ϕ s'étend aux faisceaux. On veut construire, pour tout ouvert U de T un morphisme

$$\mathcal{O}_T(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{X^{\bar{\mathcal{V}}}}(\phi^{-1}U).$$

Or, par définition,

$$\mathcal{O}_{X^{\bar{\mathcal{V}}}}(\phi^{-1}U) = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}\left(\text{Traj}_{\bar{\mathcal{V}}}^{-1}\phi^{-1}U\right)^{\partial} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(t^{-1}U)^{\partial}.$$

Ce morphisme doit factoriser

$$\mathcal{O}_T(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(t^{-1}U).$$

Comme ce dernier est un morphisme d'anneaux différentiels, et que le premier anneau est constant, cette factorisation est évidente. Par ailleurs, l'axiome **d)** assure que cette factorisation est un isomorphisme. ■

(8.5.6) Le couple $(X^{\mathcal{V}}, \mathcal{O}_{X^{\mathcal{V}}})$ est toujours un espace localement annelé. Ainsi, quand $(X^{\mathcal{V}}, \mathcal{O}_{X^{\mathcal{V}}})$ est un schéma, c'est l'espace des feuilles géométrique de \mathcal{X} . Néanmoins, ce n'est pas toujours le cas. Cependant, on a toujours :

Proposition 8.5.6. Soit \mathcal{X} un \mathbf{Q} -schéma réduit muni d'un champ de vecteurs. Alors, $(X^{\mathcal{V}}, \mathcal{O}_{X^{\mathcal{V}}})$ est un espace localement annelé.

Le principe de la démonstration qui suit est le même que celle qui précède : on peut prolonger les sections constantes à un ouvert invariant. En fait, on démontre un lemme un peu plus général, à savoir que les germes du faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\partial}$, quand on le restreint à la topologie de Carrà Ferro, sont des anneaux locaux. Comme les anneaux de germes d'un faisceau et de sa restriction sont isomorphes, on en déduira le résultat voulu. Ainsi, on prouve :

Lemme 8.5.7. Soit \mathcal{X} un \mathbf{Q} -schéma réduit muni d'un champ de vecteurs. On munit X de la topologie de Carrà Ferro et on note $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{(CF)}$ le faisceau induit par $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$. Alors,

$$(X, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{(CF), \partial})$$

est un espace localement annelé.

Démonstration. — On garde les notations de l'énoncé. Soit $x \in X$. On veut montrer que l'anneau

$$\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}^{(CF), \partial}$$

est local. Pour cela, il suffit de montrer que l'ensemble des éléments non-inversibles de cet anneau forme un idéal. Si $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{X},x}^{(CF), \partial}$ est non-inversible et si $\lambda \in \mathcal{O}_{\mathcal{X},x}^{(CF), \partial}$ est quelconque, on a bien que λf est non-inversible. Soit $g \in \mathcal{O}_{\mathcal{X},x}^{(CF), \partial}$ un second élément non-inversible. Il suffit donc de prouver que $f + g$ est encore non-inversible. Supposons que $f + g$ soit inversible, d'inverse h . Soit donc U un ouvert invariant de X contenant x , tel qu'on puisse écrire

$$f, g \text{ et } h \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\partial}(U) \quad \text{et} \quad (f + g) \cdot h = 1.$$

En particulier, on ne peut avoir⁽⁶⁾ $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$. Supposons par exemple que $f(x) \neq 0$. Ainsi, f , en tant que germe Zariski est inversible : il existe V un ouvert Zariski de X contenu dans U et contenant x et une section $\ell \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(V)$ tels que

$$f \cdot \ell = 1.$$

Par ailleurs, on a $(f \cdot \ell)' = 0 = f \cdot \ell'$, et donc, en multipliant par ℓ , on a $\ell' = 0$. Ainsi, $\ell \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\partial}(V)$. Si on prolonge ces sections constantes f et ℓ définies au-dessus de V en des sections \tilde{f} et $\tilde{\ell}$ définies au-dessus de V^{δ} , en vertu de la proposition 7.3.3, on a alors

$$\tilde{f} \cdot \tilde{\ell} = 1,$$

et ainsi, f , vu comme élément de $\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}^{(CF), \partial}$ est inversible, ce qui est absurde. Donc, $\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}^{(CF), \partial}$ est bien un anneau local. ■

⁽⁶⁾Les évaluations $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$, pour lesquelles on a $(f(x) + g(x)) \cdot h(x) = 1$, sont faites pour la topologie Zariski, *i.e.* sont les résidus des germes vivant dans $\mathcal{O}_{X,x}$.

8.6 Calcul de l'espace des feuilles universel géométrique des schémas simples

Dans cette section, on réinterprète les résultats du chapitre (5) à la lumière de la notion d'espace des feuilles universel. On montre :

Théorème 8.6.1. *Soit \mathcal{S} un \mathbf{Q} -schéma muni d'un champ de vecteurs, simple. On suppose que \mathcal{S} possède un $C_{\mathcal{S}}$ -point. Alors le morphisme*

$$\varphi_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \longrightarrow (C_{\mathcal{S}}, \vec{0}),$$

défini dans le paragraphe (4.3.4), est un espace des feuilles universel géométrique pour \mathcal{S} .

Démonstration. — Soit donc X_0 un schéma au-dessus de $C_{\mathcal{S}}$. On reprend les notations du paragraphe (5.4.1) : on considère le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{t} & (X_0, \vec{0}) \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \mathcal{S} & \longrightarrow & (C_{\mathcal{S}}, \vec{0}) \end{array} .$$

On veut montrer que $t : \mathcal{X} \longrightarrow (X_0, \vec{0})$ est un espace des feuilles géométrique pour \mathcal{X} . On doit donc vérifier que les quatre points **a)**, **b)**, **c)** et **d)** de la définition 8.4.2 sont satisfaits.

a) Le premier point est une conséquence de la proposition (3.5.2) (ii) de [EGA I] : les morphismes surjectifs sont stables par changement de base. Or le morphisme $\mathcal{S} \longrightarrow C_{\mathcal{S}}$ est surjectif, puisque $C_{\mathcal{S}}$ n'a qu'un point. Donc, il en est de même pour t .

b) Soient maintenant $x, y \in \mathcal{X}$ tels que $t(x) = t(y)$. On veut montrer que $\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x) = \text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(y)$. Déjà, comme on sait que

$$t(x) = t(\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x)),$$

on peut supposer en outre que x et y sont des feuilles de \mathcal{X} . Changeons nos notations et considérons donc deux feuilles η_1 et η_2 telles que $t(\eta_1) = t(\eta_2)$. On en déduit que $\eta_1 = \eta_2$, par exemple d'après le lemme 5.5.1, si \mathcal{S} possède un $C_{\mathcal{S}}$ -point (on utilise le fait que X_0 est isomorphe à toute fibre de \mathcal{X} au-dessus d'un $C_{\mathcal{S}}$ -point). On aurait pu aussi démontrer ce point sans utiliser le fait que \mathcal{S} possède un $C_{\mathcal{S}}$ -point, en montrant une version non-affine de la proposition 5.3.4.

c) Montrons maintenant que t est submersive. Déjà, t étant continue, on a bien

$$U \text{ ouvert} \implies t^{-1}(U) \text{ ouvert.}$$

Montrons le sens réciproque. Soit donc U une partie de X_0 . Remarquons que $t^{-1}(U)$ est une partie de X invariante sous le champ de vecteurs $\vec{\mathcal{V}}$: si $x \notin t^{-1}(U)$, alors $\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x) \notin t^{-1}(U)$. En effet, supposons que $\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x) \in t^{-1}(U)$: cela signifie que

$$t(\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x)) \in U.$$

Comme on sait que $t(\text{Traj}_{\vec{\mathcal{V}}}(x)) = t(x)$, on a donc $t(x) \in U$ et donc $x \in t^{-1}(U)$. Ainsi, si on suppose que $t^{-1}(U)$ est ouvert, pour montrer que U l'est, on sait d'emblée que $t^{-1}(U)$ est

en outre un ouvert *invariant* de X . De plus, comme t est surjective, on a $t(t^{-1}(U)) = U$. Il suffit donc de montrer que

$$V \text{ ouvert invariant de } X \implies t(V) \text{ ouvert de } X_0. \quad (7)$$

Par ailleurs, on peut se ramener, comme ce qu'on a fait dans le chapitre (5), au cas où X_0 et \mathcal{S} sont affines. Dans ce cas, on doit donc montrer que le morphisme

$$t : \mathrm{Spec}(A \otimes_C K) \longrightarrow \mathrm{Spec} A$$

vérifie la propriété (7), quand K est un anneau différentiellement simple et où $C = C_K$. Soit donc V un ouvert invariant de $\mathrm{Spec}(A \otimes_C K)$. Il existe ainsi J , un idéal *différentiel* de $A \otimes_C K$ tel que

$$V = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A \otimes_C K) \mid J \not\subseteq \mathfrak{p}\}.$$

Notons $i : A \longrightarrow A \otimes_C K$. Montrons que

$$t(V) = \{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec} A \mid i^{-1}(J) \not\subseteq \mathfrak{q}\}.$$

On procède par double inclusion. Remarquons d'abord, si $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec} A$, qu'on a, en vertu du lemme 5.3.2,

$$\mathfrak{q} = i^{-1}(i(\mathfrak{q})).$$

De plus, puisqu'on dispose par hypothèse d'un morphisme $K \longrightarrow C$, le corollaire 5.3.7 s'applique et nous dit que $(i(\mathfrak{q}))$ est un idéal différentiel *premier*. Venons-en à l'égalité annoncée : soit donc $\mathfrak{q} \in t(V)$. Il existe ainsi $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A \otimes_C K)$, avec $J \not\subseteq \mathfrak{p}$, tel que $\mathfrak{q} = i^{-1}\mathfrak{p}$. Supposons qu'on ait $i^{-1}(J) \subset \mathfrak{q}$. Alors, on aurait

$$(i(i^{-1}J)) \subset (i(\mathfrak{q})),$$

et donc, d'après le lemme 5.3.3,

$$J \subset (i(\mathfrak{q})).$$

Or, comme $\mathfrak{q} = i^{-1}\mathfrak{p}$, on a

$$(i(\mathfrak{q})) \subset \mathfrak{p}.$$

Ainsi, on aurait $J \subset \mathfrak{p}$, ce qui est absurde. Donc, on a bien

$$t(V) \subset \{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec} A \mid i^{-1}(J) \not\subseteq \mathfrak{q}\}.$$

Réciproquement, soit $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec} A$ tel que $i^{-1}(J) \not\subseteq \mathfrak{q}$. D'après ce qu'on a dit, on a

$$\mathfrak{q} = i^{-1}(i(\mathfrak{q})),$$

où $(i(\mathfrak{q}))$ est un idéal premier. Par ailleurs, si on avait $J \subset (i(\mathfrak{q}))$, on aurait $i^{-1}(J) \subset i^{-1}(i(\mathfrak{q}))$ et donc, d'après le lemme 5.3.2, on aurait $i^{-1}(J) \subset \mathfrak{q}$, ce qui est absurde. Ainsi, on a bien l'égalité voulue — et donc, t est bien submersive.

d) Enfin, il nous reste à montrer que les sections de \mathcal{O}_{X_0} correspondent aux sections constantes de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$. Là aussi, on peut se ramener au cas où X_0 est affine et au cas où la base \mathcal{S} l'est également. De plus, comme X_0 possède une base d'ouverts affines, il suffit de montrer que les deux anneaux

$$A \quad \text{et} \quad C_{A \otimes_C K}$$

sont isomorphes, avec des notations similaires au point précédent. Ce point est une application directe de la proposition 1.5.1 : on a

$$C_{A \otimes_C K} = C_K \otimes_C A = C \otimes_C A = A.$$

■

Remarque. — Sous réserve que l'énoncé 5.3.8 soit vrai, le théorème précédent est vrai sans l'hypothèse que \mathcal{S} possède un $C_{\mathcal{S}}$ -point. ◇

Sixième partie

Schémas différentiels : le point de vue fonctoriel

Chapitre 9

Espaces algébro-différentiels

Motivation. Soit k un anneau différentiel. Comme on l'a expliqué dans l'introduction, il est naturel, dans le but de trouver la catégorie des k -schémas différentiels, d'introduire et d'étudier la catégorie suivante

$$\mathbf{Esp}_k^\partial := \mathbf{Fun}(\mathbf{Alg}_k^\partial, \mathbf{Ens})$$

dont les objets sont les foncteurs covariants de la catégorie \mathbf{Alg}_k^∂ des k -algèbres différentielles dans la catégorie \mathbf{Ens} des ensembles. On les appelle *k-espaces algébro-différentiels*.

Cette idée est une application du *yoga des foncteurs* : grâce au lemme de Yoneda, si \mathcal{C} est une catégorie quelconque, on peut plonger \mathcal{C} dans la catégorie des foncteurs $\widehat{\mathcal{C}} := \mathbf{Fun}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Ens})$ — et se placer dans $\widehat{\mathcal{C}}$ pour étudier \mathcal{C} . Une telle démarche est classique en ce qui concerne la théorie des schémas. Ainsi, par exemple :

- Dans leur livre [DG70], Michel Demazure et Pierre Gabriel définissent un schéma comme un foncteur

$$X : \mathbf{Ann} \longrightarrow \mathbf{Ens}$$

vérifiant un certain nombre de propriétés.

- C'est aussi l'approche que choisissent Bertrand Toën et Michel Vaquié pour généraliser la théorie des schémas, dans [TV09].
- Dans le séminaire [SGA3I] sur les schémas en groupes, une bonne partie de l'exposé II de Michel Demazure, « Fibrés tangents. Algèbres de Lie » est fait dans le cadre général des foncteurs en groupes $\mathbf{Sch}_S \longrightarrow \mathbf{Grp}$.
- Ce yoga des foncteurs est sous-jacent dans la généralisation de la théorie des schémas que constitue la *théorie des champs algébriques*. Ces objets ont été introduits pour la première fois par Pierre Deligne et David Mumford, dans [DM69], afin de définir précisément \mathcal{M}_g , l'espace de modules des courbes de genre g . Le lecteur intéressé par cette théorie des champs algébriques pourra consulter le livre de référence [LMB00].

À notre connaissance, un tel point de vue n'a pas encore été adopté en ce qui concerne les schémas différentiels.

Résumé du chapitre. Ce chapitre est essentiellement descriptif, dans la mesure où l'on y montre comment on peut définir de nombreux concepts géométriques (dont la dérivée logarithmique associée à un groupe) dans le cadre très général de la catégorie \mathbf{Esp}_k^∂ .

On y montre ainsi que la catégorie des k -espaces algébro-différentiels, vérifie les propriétés suivantes. *Dans la liste qui suit, k est un anneau différentiel* (éventuellement défini au-dessus de \mathbf{Q}), X et Y sont deux k -espaces algébro-différentiels et $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme de k -espaces algébro-différentiels.

- Si S est un autre k -espace algébro-différentiel et que X et Y sont munis de morphismes

$$\begin{array}{ccc} X & & Y \\ & \searrow & \swarrow \\ & S & \end{array},$$

alors, on peut définir $X \times_S Y$. C'est un k -espace algébro-différentiel, muni de deux morphismes

$$\begin{array}{ccc} X \times_S Y & \xrightarrow{p_Y} & Y \\ p_X \downarrow & & \\ X & & \end{array},$$

qui en font un produit fibré de X et Y au-dessus de S .

- On définit les points de X . Si x est un point de X , on note⁽¹⁾ « $x \in X$ ». On attache à tout point $x \in X$ sa k -algèbre différentielle résiduelle, qu'on note $\kappa(x)$. On a alors que

$$X(K) = \{x \in X \mid \kappa(x) = K\}.$$

- On peut associer à X son *algèbre des fonctions régulières*, notée $\mathcal{O}(X)$ qui est une k -algèbre différentielle. Si $\varphi \in \mathcal{O}(X)$ et si $x \in X$, on peut considérer l'*évaluation de φ en x* . Il s'agit de ce qu'on note $\varphi(x) \in \kappa(x)$. En fait, $\mathcal{O}(-)$ est un foncteur covariant de \mathbf{Esp}_k^∂ dans $(\mathbf{Alg}_k^\partial)^{\text{op}}$. On note $f^\# : \mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}(X)$ l'image par $\mathcal{O}(-)$ du morphisme $f : X \rightarrow Y$.
- Si $x \in X$, on peut considérer, de même $f(x)$. Il s'agit d'un point $f(x) \in Y$, qui a la même k -algèbre résiduelle que x . On définit pour f la propriété d'être *injectif* et d'être *surjectif* :

$$\begin{aligned} f \text{ injectif} &\iff \forall (x, y) \in X^2, \quad f(x) = f(y) \implies x = y \\ f \text{ surjectif} &\iff \forall y \in Y, \exists x \in X \mid f(x) = y \end{aligned}$$

On montre : f surjectif $\implies f^\#$ injectif.

- Si A est une k -algèbre différentielle, on définit diff-Spec A , le spectre différentiel de A . Il s'agit d'un k -espace algébro-différentiel. Il vérifie

$$\mathcal{O}(\underline{\text{diff-Spec } A}) \simeq A.$$

On dit que X est un k -schéma différentiel affine s'il existe A tel que X soit isomorphe à diff-Spec A . En fait, on a défini un foncteur covariant

$$\underline{\text{diff-Spec}} : (\mathbf{Alg}_k^\partial)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Esp}_k^\partial.$$

⁽¹⁾On prendra garde au fait que cette notation, dans ce cadre, ne signifie pas que x est un élément de X (ce dernier « n'est pas un ensemble »).

Ce foncteur établit une équivalence de catégories entre $(\mathbf{Alg}_k^\partial)^{\text{op}}$ et la catégorie des k -schémas différentiels affines. Plus généralement,

$$(\mathbf{Alg}_k^\partial)^{\text{op}} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{diff-Spec } \in \omega} \\ \xleftarrow{\mathcal{O}(-) \in *} \end{array} \mathbf{Esp}_k^\partial$$

est une adjonction.

- Si X et Y sont des k -schémas différentiels affines, alors

$$f^\# : \mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(X) \text{ surjectif} \implies f \text{ injectif.}$$

- Si $x \in X$, on définit $T_x X$, l'espace tangent à X en x . C'est un $\kappa(x)$ -espace algébro-différentiel. Le morphisme f induit un morphisme

$$T_x f : T_x X \longrightarrow T_{f(x)} Y,$$

appelé *différentielle de f en x* , et qui est un morphisme de $\kappa(x)$ -espaces algébro-différentiels.

- On définit le *fibré tangent à X*

$$\begin{array}{ccc} TX & & \\ \downarrow \pi_X & & \\ X & & \end{array} .$$

Il est muni d'une section canonique, appelée *dérivée de X* et notée $\partial_X : X \longrightarrow TX$. Cette dérivée permet de considérer, si \vec{V} est un champ de vecteurs sur X , ie si $s := \vec{V}$ est une section du fibré tangent, l'analogue des équations différentielles du type

$$\dot{y} = \vec{V}(y)$$

ainsi que d'y associer un k -espace algébro-différentiel qui encode ses solutions.

- Si $x \in X$, on définit le *voisinage formel de x dans X* , qu'on note $\widehat{X, x}$. C'est un $\kappa(x)$ -espace algébro-différentiel. Le morphisme f induit un morphisme sur les voisinages formels

$$f_x : \widehat{X, x} \longrightarrow \widehat{Y, f(x)}.$$

On définit aussi *l'anneau (différentiel) des germes formels en x* , noté $\widehat{\mathcal{O}_{X,x}}$. C'est une $\kappa(x)$ -algèbre différentielle.

- On définit ce que c'est pour X d'être un k -espace algébro-différentiel en *groupes, anneaux, λ -modules*, où $\lambda : \mathbf{Alg}_k^\partial \longrightarrow \mathbf{Ann}$ est un foncteur. Un k -espace algébro-différentiel en groupes est aussi appelé un *k -groupe algébro-différentiel*
- Si G est un k -groupe algébro-différentiel, on définit ce qu'est une *action à gauche de G sur X* ainsi que ce que c'est pour X d'être un G -torseur.
- On note $\omega(k)$ l'anneau sous-jacent à k . On construit un foncteur

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Sch}_{\omega(k)} & \longrightarrow & \mathbf{Esp}_k^\partial \\ X & \longmapsto & X^{\text{diff}} \end{array} .$$

On montre que : X affine $\implies X^{\text{diff}}$ différentiellement affine.

À côté de ces constructions et propriétés, on exhibe de nombreux exemples de k -espaces algébro-différentiels, associés à des considérations naturelles en algèbre différentielle. En particulier, pour plusieurs types d'équations différentielles, on sait construire un k -espace algébro-différentiel qui encode les solutions. On dispose ainsi des *espaces affines différentiels* $\mathbf{A}_k^{\partial,n}$, des groupes $GL_{n,k}^{\text{diff}}$ et $GL_{n,k}^{\text{cte}}$. Ce dernier est défini par

$$GL_{n,k}^{\text{cte}}(K) := GL_n(C_K)$$

pour toute k -algèbre différentielle K . On a vu aussi que si X est un schéma, on sait lui associer un k -espace algébro-différentiel X^{diff} : en ce sens, les k -espaces algébro-différentiels (en fait, les k -schémas différentiels) généralisent les schémas. Enfin, pour donner un dernier exemple, si P_1, \dots, P_m sont des polynômes algébro-différentiels et qu'on s'intéresse au système d'équations différentielles non-linéaires

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} P_1(f_1, \dots, f_n) = 0 \\ \vdots \\ P_m(f_1, \dots, f_n) = 0 \end{cases}$$

alors on peut considérer le k -espace algébro-différentiel $X_{(P_i)_i}$, qui encode les solutions de (\mathcal{S}) . Cela signifie que pour toute k -algèbre différentielle K , on a :

$$X_{(P_i)_i}(K) := \left\{ f = (f_i)_{1 \leq i \leq n} \in K^n \mid f \text{ est solution de } (\mathcal{S}) \right\}.$$

On peut alors caractériser la platitude différentielle du système (\mathcal{S}) en des termes relatifs à $X_{(P_i)_i}$. La platitude d'un système d'équations différentielles linéaires a été introduite par Michel Fliess, Jean Lévine, Philippe Martin et Pierre Rouchon dans [FLMR92] puis étudiée dans l'article fondateur [FLMR95]. C'est une notion qui a de nombreuses applications industrielles. L'approche des espaces algébro-différentiels permet d'interpréter cette notion comme suit :

Définition. Soit k un anneau différentiel et soient P_1, \dots, P_m des polynômes algébro-différentiels en n variables, à coefficients dans k . On dit que le système

$$\begin{cases} P_1(f_1, \dots, f_n) = 0 \\ P_2(f_1, \dots, f_n) = 0 \\ \vdots \\ P_m(f_1, \dots, f_n) = 0 \end{cases}$$

est différentiellement plat s'il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que le k -espace algébro-différentiel $Sol_{(P_i)_i}$ soit birationnel à $\mathbf{A}_k^{\partial,p}$.

Enfin, pour finir la présentation de ce chapitre, disons quelques mots sur l'algèbre de Lie et la dérivée logarithmique d'un k -groupe algébro-différentiel G . Pour définir ceux-ci, on a besoin de supposer qu'ils vérifient une condition de type Schlessinger, qu'on appelle ici la *condition (S)*. Cette condition porte sur un certain diagramme, qu'on astreint à être cartésien. La proposition 2.1.4 sur les cubes cartésiens nous permet de munir Lie (G) de sa structure de groupe abélien. On peut alors définir la *dérivée logarithmique de G* : c'est un morphisme

$$l\delta : G \longrightarrow \text{Lie}(G)$$

qui permet, entre autres, de généraliser la notion d'équation différentielle linéaire au cas d'un k -groupe algébro-différentiel G quelconque, et d'envisager par ce biais une généralisation de la théorie de Galois différentielle de Kolchin.

9.1 Introduction

(9.1.1) « Foncteur des solutions ». Si X/k est un schéma défini sur k , on lui associe un foncteur (covariant) qu'on note, provisoirement, F_X :

$$F_X : \begin{array}{c} \mathbf{Alg}_k \longrightarrow \mathbf{Ens} \\ K \longmapsto F_X(K) \end{array} .$$

Avant de définir précisément ce foncteur, donnons-en une description intuitive. Si X est le schéma des solutions d'un système d'équations polynomiales ; plus précisément, si X est le schéma des solutions $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ des équations polynomiales

$$\left\{ \begin{array}{lcl} P_1(\underline{x}) & = & 0 \\ P_2(\underline{x}) & = & 0 \\ \vdots & & \\ P_m(\underline{x}) & = & 0 \end{array} \right.$$

où les P_j vivent dans $k[X_1, \dots, X_n]$, ie si X est le schéma affine

$$X = \text{Spec } A \quad \text{avec} \quad A := k[X_1, \dots, X_n] / (P_1, \dots, P_m),$$

alors, dans ce cas, le foncteur $F_X : \mathbf{Alg}_k \longrightarrow \mathbf{Ens}$ est défini par

$$F_X(K) = \{\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in K^n \mid \forall j, P_j(\underline{a}) = 0\}.$$

Autrement dit, dans ce cas typique, $F_X(K)$ est l'ensemble des solutions dans K des équations polynomiales considérées. $F_X : \mathbf{Alg}_k \longrightarrow \mathbf{Ens}$ est donc le foncteur des solutions du système d'équations $(P_i(\underline{x}) = 0)_{i \leq m}$.

(9.1.2) Foncteur des points. Ce « foncteur des solutions » est en fait un foncteur des points. En effet, on peut vérifier qu'une solution $\underline{a} \in K^n$ des équations $(P_j)_j$ correspond à un k -morphisme de A dans k — et réciproquement. Il y a donc une bijection entre les solutions dans K^n des équations $(P_j)_j$ et les $(\text{Spec } K)$ -points⁽²⁾ de X . Ainsi, le foncteur des solutions, qu'on a défini ci-dessus dans un cas particulier, peut être défini en général comme le foncteur des points de la catégorie des schémas, restreint à la catégorie des schémas affines :

$$F_X : \begin{array}{c} \mathbf{Alg}_k \longrightarrow \mathbf{Ens} \\ K \longmapsto X(K) := \text{Hom}_{\mathbf{Sch}}(\text{Spec } K, X) \end{array}$$

(9.1.3) Un schéma est déterminé par son foncteur des solutions. On sait⁽³⁾ que le foncteur qui à X associe F_X est pleinement fidèle. Autrement dit, les foncteurs covariants $\mathbf{Alg}_k \longrightarrow \mathbf{Ens}$ généralisent les schémas⁽⁴⁾. C'est cette remarque qui fonde notre approche fonctorielle du problème des schémas différentiels.

⁽²⁾Par abus de langage, si X/k est un schéma et K une k -algèbre, on appelle aussi les $(\text{Spec } K)$ -points de X des K -points. On fera le même abus de langage dans le cas algébro-différentiel.

⁽³⁾On verra d'ailleurs dans la section (11.2) une généralisation de ce résultat au cas différentiel.

⁽⁴⁾Cette observation accompagne d'ailleurs différentes généralisations des schémas, établies à la suite d'Alexandre Grothendieck : espaces algébriques, champs algébriques, etc.

(9.1.4) À la recherche des schémas différentiels. Notre problème de départ est de définir l'analogue différentiel des schémas. De même qu'on a décrit dans le paragraphe **(9.1.1)** un exemple typique de ce qu'est un schéma, on peut donner un exemple de ce que *serait* un schéma différentiel typique. Ce serait, si k est un anneau différentiel de base et si P_1, \dots, P_m sont des équations algébro-différentielles, *ie* si

$$\forall j, \quad P_j \in k[X_1, X'_1, \dots, X_1^{(i)}, \dots, X_2, \dots, X_2^{(i)}, \dots, X_m, \dots] :$$

ce serait le « schéma différentiel » des solutions des $(P_j)_j$. Par exemple, si on considère deux équations P_1 et P_2 qui s'écrivent

$$P_1 = 2X_1X'_1 - (X''_2)^2 \quad \text{et} \quad P_2 = X_1^{(4)} - X_2^3$$

et si K est un k -algèbre différentielle, alors l'ensemble des solutions dans K^2 de ces équations est

$$Sol_{(P_1, P_2)}(K) := \left\{ \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in K^2 \middle| \begin{array}{l} 2f_1f_1' - (f_2'')^2 = 0 \\ f_1^{(4)} - f_2^3 = 0 \end{array} \right\}.$$

Le schéma différentiel correspondant serait alors l'objet qui « encoderait » de façon synthétique tous les ensembles $Sol_{(P_1, P_2)}(K)$.

(9.1.5) Notre point de vue. Vu ce qu'on a expliqué dans la partie précédente, il semble clair que, même sans savoir ce que sont les schémas différentiels, si l'on note cette catégorie inconnue **diff Sch** $_k$, on dispose d'un foncteur qui à un « schéma différentiel » X défini sur k associe son foncteur des points, qu'on note

$$\begin{aligned} F_- : \quad & \mathbf{diff Sch}_k \longrightarrow \mathbf{Fun}(\mathbf{Alg}_k^\partial, \mathbf{Ens}) \\ & X \longmapsto F_X \end{aligned}$$

et qui est pleinement fidèle. On note aussi $F_X = X(-)$. Ainsi, notre approche du problème de la définition des schémas différentiels se fera « par le haut » : commencer par étudier, de façon très générale, les foncteurs covariants $\mathbf{Alg}_k^\partial \longrightarrow \mathbf{Ens}$ pour ensuite imposer des critères « de représentabilité » à ces foncteurs et étudier les propriétés de la catégorie restreinte et de ses objets.

9.2 Espaces algébro-différentiels

Définition 9.2.1. Soit k un anneau différentiel. Un espace algébro-différentiel défini sur k est un foncteur covariant de la catégorie \mathbf{Alg}_k^∂ des k -algèbres différentielles dans la catégorie \mathbf{Ens} des ensembles. On dit aussi : k -espace algébro-différentiel. On note :

$$X : \mathbf{Alg}_k^\partial \longrightarrow \mathbf{Ens}.$$

Soient X et Y deux espaces algébro-différentiels. Un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ est une transformation naturelle de X dans Y .

La catégorie des k -espaces algébro-différentiels est notée \mathbf{Esp}_k^∂ .

On a choisi de faire dépendre notre définition du choix préalable d'un anneau différentiel k . On aurait pu définir, évidemment, les *espaces algébro-différentiels* comme les foncteurs de la catégorie \mathbf{Ann}^∂ des anneaux différentiels dans \mathbf{Ens} . Puis étant donné un espace algébro-différentiel « de base » S : un S -espace algébro-différentiel est un espace algébro-différentiel X muni d'un morphisme (dit *structural*)

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \downarrow & & \\ S & & \end{array} .$$

On retrouve alors la notion de k -espace algébro-différentiel en considérant pour S le foncteur S_k défini par $S_k(K) = \text{Hom}_{\mathbf{Ann}^\partial}(k, K)$. On va voir que ce foncteur S_k n'a rien de mystérieux mais correspond simplement « au point » k . Remarquons par ailleurs que les notions d'espace algébro-différentiel et de \mathbf{Z} -espace algébro-différentiel coïncident (avec \mathbf{Z} muni de sa seule dérivation, la dérivation nulle).

(9.2.1) Schémas différentiels affines. Autant la question de la définition des schémas différentiels se pose, autant la définition des schémas différentiels *affines* ne se pose pas :

Définition 9.2.2. Soit k un anneau différentiel. Un espace k -algébro-différentiel est dit affine si, en tant que foncteur $\mathbf{Alg}_k^\partial \rightarrow \mathbf{Ens}$, il est représentable. On appelle aussi k -schémas différentiels affines ces objets.

Réiproquement, si $A \in \mathbf{Alg}_k^\partial$, on appelle spectre différentiel de A et on note diff-Spec A l'espace algébro-différentiel défini par

$$\forall K \in \mathbf{Alg}_k^\partial \quad (\underline{\text{diff-Spec}} A)(K) := \text{Hom}_{\mathbf{Alg}_k^\partial}(A, K)$$

Plus précisément, on a défini un foncteur covariant

$$\underline{\text{diff-Spec}} : (\mathbf{Alg}_k^\partial)^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Esp}_k^\partial ,$$

l'image des flèches par diff-Spec se définissant facilement. Si $\varphi : A \rightarrow B$ est un morphisme de k -algèbres différentielles, on note diff-Spec $\varphi : \underline{\text{diff-Spec}} B \rightarrow \underline{\text{diff-Spec}} A$.

(9.2.2) Produit de deux espaces algébro-différentiels. Soit k un anneau différentiel. La catégorie \mathbf{Esp}_k^∂ admet les produits. C'est l'un des avantages d'avoir considéré une classe aussi générale d'objets. Plus précisément, si X et Y sont deux espaces k -algébro-différentiels, on notera $X \times Y$ le k -espace algébro-différentiel défini par

$$(X \times Y)(K) := X(K) \times Y(K) \quad \text{pour toute } k\text{-algèbre différentielle } K.$$

Il est muni de deux morphismes

$$p_1 : X \times Y \rightarrow X \quad \text{et} \quad p_2 : X \times Y \rightarrow Y$$

appelés *projections canoniques*. Le triplet $(X \times Y, p_1, p_2)$ est un produit de X et Y dans la catégorie \mathbf{Esp}_k^∂ . On définit de même le produit fibré $X \times_S Y$.

(9.2.3) Points d'un k -espace algébro-différentiel. Intuitivement, nos espaces algébro-différentiels sont des espaces géométriques dont on s'est donné, pour chaque extension K du « corps » de base, l'ensemble des points à coordonnées dans K . Si on avait l'assurance que tous ces points ont leur coordonnées dans un « corps » commun, on pourrait alors les mettre tous sur un même plan. Ce n'est pas le cas. On fait néanmoins la définition suivante, unifiante, qui nous permettra de formuler de nombreux énoncés de manière concise et parlante.

Définition 9.2.3. Soient k un anneau différentiel et X un k -espace algébro-différentiel. On appelle point de X tout couple $x = (K, p)$ où K est une k -algèbre différentielle et où $p \in X(K)$. La k -algèbre différentielle K sera appelée k -algèbre résiduelle de x et notée $\kappa(x)$. On commettra l'abus de notation suivant : au lieu de dire « x est un point de X », on notera « $x \in X$ ».

Si k est un anneau différentiel, si X et Y sont deux k -espaces algébro-différentiels, si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme et si $x = (K, p)$ est un point de X , alors on notera $f(x)$ le point $(K, f_K(p))$.

9.3 Algèbre des fonctions régulières d'un espace algébro-différentiel

Dans la formulation moderne des géométries, si X est un « espace géométrique », une donnée essentielle pour comprendre X et « travailler » avec X est le faisceau structural de X . C'est la donnée, pour tout ouvert U de X , de l'algèbre $\mathcal{O}_X(U)$ des « fonctions régulières sur U », ainsi que des morphismes de restriction. Comme exemple paradigmique, on peut considérer une variété différentielle M et, pour tout ouvert U , les \mathbf{R} -algèbres $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbf{R})$.

Pour l'instant, si X est un k -espace algébro-différentiel, on ne sait pas encore définir ce qu'est un ouvert U de X . En revanche, on sait définir l'algèbre des fonctions régulières *globales*.

Notation 9.3.1. Soit k un anneau différentiel ; on note $\mathbf{A}_k^{\partial,1}$ et on appelle droite (algébro-différentielle) affine sur k le k -espace algébro-différentiel défini par

$$\mathbf{A}_k^{\partial,1}(K) := K$$

pour toute k -algèbre différentielle K . Une autre façon de le voir est de dire que $\mathbf{A}_k^{\partial,1} = \omega_k^\partial$ est le foncteur oubli de \mathbf{Alg}_k^∂ .

Proposition-Définition 9.3.2. Soit X un k -espace algébro-différentiel. L'algèbre des fonctions régulières sur X , notée $\mathcal{O}(X)$, est

$$\mathcal{O}(X) := \text{Hom}_{\mathbf{Esp}_k^\partial}(X, \mathbf{A}_k^{\partial,1}).$$

Cet ensemble est muni de l'unique structure de k -algèbre différentielle telle que : pour toute k -algèbre différentielle K et pour tout $x \in X$, l'application

$$\begin{aligned} \text{év}_x : \quad & \mathcal{O}(X) \longrightarrow \kappa(x) \\ & \varphi \longmapsto \varphi(x) \end{aligned}$$

soit un morphisme de k -algèbres différentielles.

Démonstration. — Soient φ_1 et φ_2 deux éléments de $\mathcal{O}(X)$. On veut construire, pour commencer, une nouvelle fonction régulière, $\varphi_1 + \varphi_2$. On la définit ainsi : si K est une k -algèbre différentielle, on doit définir

$$(\varphi_1 + \varphi_2)_K : X(K) \longrightarrow K.$$

On pose, naturellement : $(\varphi_1 + \varphi_2)_K(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ pour tout $x \in X(K)$. On remarque, par ailleurs, que cette définition est imposée par la condition « $\varphi \mapsto \varphi(x)$ est un morphisme ». On vérifie facilement que l'objet défini vit bien dans $\mathcal{O}(K)$. On procède de même pour le reste de la structure de k -algèbre différentielle. ■

(9.3.1) Fonctorialité de $\mathbf{X} \mapsto \mathcal{O}(\mathbf{X})$. Soient X et Y deux k -espaces algébro-différentiels et soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme. Quand on conçoit « intuitivement » les éléments de $\mathcal{O}(-)$ comme des fonctions régulières, on comprend que f rapatrie les éléments de $\mathcal{O}(Y)$ sur $\mathcal{O}(X)$. Techniquement, il n'y a aucun obstacle, on voit les choses sur le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{A}_k^{\partial,1} & \\ & \downarrow \varphi & : \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

à $\varphi \in \mathcal{O}(Y)$, on associe $\varphi \circ f \in \mathcal{O}(X)$. Formellement,

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(-) : \mathbf{Esp}_k^\partial &\longrightarrow (\mathbf{Alg}_k^\partial)^{\text{op}} \\ X &\longmapsto \mathcal{O}(X) \end{aligned}$$

est un foncteur covariant. On note $f^\# : \mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$ l'image par $\mathcal{O}(-)$ de f . On peut alors démontrer :

Proposition 9.3.3. *Soit k un anneau différentiel. Alors,*

$$(\mathbf{Alg}_k^\partial)^{\text{op}} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{diff-Spec } \in \omega} \\ \xleftarrow{\mathcal{O}(-) \in *} \end{array} \mathbf{Esp}_k^\partial$$

est une adjonction.

Démonstration. — Soient k un anneau différentiel, $X \in \mathbf{Esp}_k^\partial$ et $A \in \mathbf{Alg}_k^\partial$. On veut montrer qu'on a une bijection (fonctorielle) entre

$$\text{Hom}_{(\mathbf{Alg}_k^\partial)^{\text{op}}}(\mathcal{O}(X), A) \quad \text{et} \quad \text{Hom}_{\mathbf{Esp}_k^\partial}(X, \underline{\text{diff-Spec}} A)$$

donc entre

$$\text{Hom}_{\mathbf{Alg}_k^\partial}(A, \mathcal{O}(X)) \quad \text{et} \quad \text{Hom}_{\mathbf{Esp}_k^\partial}(X, \underline{\text{diff-Spec}} A).$$

On construit ces bijections comme suit :

- Si $f : X \longrightarrow \underline{\text{diff-Spec}} A$ est un morphisme (de \mathbf{Esp}_k^∂), on lui associe le morphisme de k -algèbres différentielles $\phi : A \longrightarrow \mathcal{O}(X)$ défini comme suit : si $a \in A$, $\phi(a)$ est définie par, pour tout $K \in \mathbf{Alg}_k^\partial$:

$$\begin{aligned} \phi(a)_K := & X(K) \longrightarrow K \\ & p \longmapsto f_K(p) \bullet a. \end{aligned}$$

En effet, par définition, $f_K(p)$ est un élément de $(\underline{\text{diff-Spec}} A)(K) = \text{Hom}_{\mathbf{Alg}_k^\partial}(A, K)$.

— Réciproquement, si $\phi : A \longrightarrow \mathcal{O}(X)$ est un morphisme, on définit $f : X \longrightarrow \underline{\text{diff-Spec}} A$ en posant, pour tout $K \in \mathbf{Alg}_k^\partial$:

$$\begin{aligned} X(K) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Alg}_k^\partial}(A, K) \\ f_K := \quad p &\longmapsto \begin{array}{c} A \longrightarrow K \\ a \longmapsto \phi(a)_K \bullet p \end{array} . \end{aligned}$$

Il est ensuite facile de vérifier que ces applications sont bien définies, et qu'il s'agit là de bijections réciproques et fonctorielles. ■

(9.3.2) Algèbre des fonctions régulières d'un schéma différentiel affine. Dans le cas des schémas, si on note \mathcal{O}_X le faisceau structural d'un schéma X , il est bien connu qu'on a

$$A \simeq \Gamma(\text{Spec } A, \mathcal{O}_{\text{Spec } A}).$$

Comme on peut s'y attendre, dans le cas différentiel, les choses vont également bien se passer : l'algèbre des fonctions régulières de $\underline{\text{diff-Spec}} A$ est isomorphe à A . Plus précisément :

Proposition 9.3.4. *Soit k un anneau différentiel et soit A une k -algèbre différentielle. Alors, le morphisme*

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\underline{\text{diff-Spec}} A) &\longrightarrow A \\ T &\longmapsto T_A(\text{Id}_A) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de k -algèbres différentielles.

Démonstration. — L'inverse est

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow \mathcal{O}(\underline{\text{diff-Spec}} A) \\ y &\longmapsto \left(\begin{array}{c} \text{Hom}_{\mathbf{Alg}_k^\partial}(A, K) \longrightarrow K \\ \varphi \longmapsto \varphi(y) \end{array} \right)_{K \in \mathbf{Alg}_k^\partial} . \end{aligned}$$

Ce résultat est un cas particulier du lemme de Yoneda (*cf.* la proposition 2.2.1). ■

Ainsi on a :

Proposition 9.3.5. *Pour tout anneau différentiel k , la catégorie des k -schémas différentiels affines est équivalente à $(\mathbf{Alg}_k^\partial)^{\text{op}}$.*

(9.3.3) Si X et Y sont deux k -espaces algébro-différentiels, on vient de voir qu'on peut associer à tout morphisme $\varphi : X \longrightarrow Y$ un morphisme de k -algèbres différentielles,

$$\varphi^\# : \mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(X).$$

Quelles propriétés de φ peut-on lire sur $\varphi^\#$? Et réciproquement? Avant de répondre à cette question, définissons ce que sont pour nous l'injectivité et la surjectivité d'un morphisme de \mathbf{Esp}_k^∂ .

Définition 9.3.6. Soient k un anneau différentiel, X et Y deux k -espaces algébro-différentiels et $\varphi : X \rightarrow Y \in \text{Hom}_{\text{Esp}_k^{\partial}}(X, Y)$.

On dit que φ est injectif si φ_K l'est pour toute k -algèbre différentielle K . On note alors $\varphi : X \hookrightarrow Y$. De même, on dit que φ est surjectif et on note $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ si φ_K est surjectif pour toute k -algèbre différentielle K .

Remarque. — Ainsi, avec le formalisme des points « $x \in X$ » de X , on peut énoncer ce qui précède comme suit :

$$\begin{array}{lll} f \text{ injectif} & \iff & \forall (x, y) \in X^2, \quad f(x) = f(y) \implies x = y \\ f \text{ surjectif} & \iff & \forall y \in Y, \exists x \in X \mid f(x) = y. \end{array}$$

◊

On peut alors énoncer :

Proposition 9.3.7. Soit k un anneau différentiel.

a) Soient $A, B \in \text{Alg}_k^{\partial}$ et $\varphi : A \twoheadrightarrow B$ un morphisme surjectif de k -algèbres différentielles. Alors

$$\underline{\text{diff-Spec}} \varphi : \underline{\text{diff-Spec}} B \longrightarrow \underline{\text{diff-Spec}} A$$

est injectif.

b) Soient $X, Y \in \text{Esp}_k^{\partial}$ et $f : X \twoheadrightarrow Y$ un morphisme surjectif de k -espaces algébro-différentiels. Alors,

$$f^{\#} : \mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$$

est injectif.

Démonstration. — Pour le a) : soit K une k -algèbre différentielle. Soient $x, y \in (\underline{\text{diff-Spec}} B)(K)$ tels que $(\underline{\text{diff-Spec}} \varphi)_K(x) = (\underline{\text{diff-Spec}} \varphi)_K(y)$. Cela signifie que $x, y : B \longrightarrow K$ sont deux morphismes tels que, après composition avec φ ,

$$A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow[x]{y} K$$

ils coïncident. Ainsi, tout élément de B étant atteint par φ , les deux flèches x et y sont bien égales.

Pour le b), la démonstration est très semblable. Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{O}(Y)$ tels que $f^{\#}(\varphi) = f^{\#}(\psi)$. Montrons que $\varphi = \psi$. Soit K une k -algèbre différentielle. Alors, après composition, les deux flèches

$$X(K) \xrightarrow{f_K} Y(K) \xrightarrow[\psi_K]{\varphi_K} K$$

coïncident. Comme tout élément de $Y(K)$ est atteint par f_K , les deux flèches φ_K et ψ_K sont égales. Ainsi, $\varphi = \psi$. ■

(9.3.4) Ce qu'on n'a pas. Attention, si X et Y sont deux k -espaces algébro-différentiels et que $\varphi : X \hookrightarrow Y$, alors, le morphisme associé $\varphi^\# : \mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$ n'est pas nécessairement surjectif, même lorsqu'on suppose X et Y affines. Si on suppose que $X = \underline{\text{diff-Spec}} A$ et $Y = \underline{\text{diff-Spec}} B$, tout ce qu'on sait sur ce morphisme

$$\varphi^\# : B \longrightarrow A,$$

c'est que c'est un épimorphisme ; c'est même exactement ce que nous dit l'injectivité de $X \hookrightarrow Y$. En effet, si K est une k -algèbre différentielle et si $f, g : A \longrightarrow K$ sont deux morphismes qui coïncident après composition avec $\varphi^\#$, alors, comme $\varphi : X \longrightarrow Y$ est injective, on a : $f = g$. Or, dans la catégorie des k -algèbres différentielles, les épimorphismes ne sont pas forcément surjectifs. Par exemple,

$$\mathbf{Z}[x] \longrightarrow \mathbf{Z}(x)$$

où $x' = 1$ est un épimorphisme mais n'est pas surjectif. En fait, de façon plus générale, pour tout anneau différentiel A et pour toute partie multiplicative S de A , le morphisme canonique $A \longrightarrow S^{-1}A$ est un épimorphisme dans \mathbf{Ann}^d . En fait, il est bien connu que, dans la catégorie des anneaux, les épimorphismes ne sont pas surjectifs — le lecteur pourra voir à ce sujet la courte introduction de Pierre Samuel à son séminaire 1967-68 d'algèbre commutative.

9.4 Espaces algébro-différentiels en groupes, anneaux, modules

Dans cette partie, on va définir les *espaces algébro-différentiels en modules*. Intuitivement, il s'agit des espaces algébro-différentiels qui sont aussi des espaces vectoriels (ou des modules). Par exemple, si on regarde le cas non-différentiel, il est clair que k^n a une structure de schéma et qu'en même temps, « c'est un espace vectoriel ». L'approche considérée est naturelle quand on connaît la définition d'un schéma en groupes. En effet, rappelons :

Définition 9.4.1. Un schéma en groupes est un schéma G muni d'un foncteur \mathcal{G} qui fasse commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{Grp} & \\ \mathbf{Sch}^{\text{op}} & \xrightarrow{\mathcal{G}} & \mathbf{Ens} \\ & \searrow \omega & \\ & G(-) & \end{array}$$

où on a noté $\omega : \mathbf{Grp} \longrightarrow \mathbf{Ens}$ le foncteur oubli.

Avant d'en venir à cette question, il convient de faire quelques rappels sur les modules.

(9.4.1) Rappels sur les modules. Soit A un anneau unitaire⁽⁵⁾. Un A -module M est un *groupe abélien* muni d'une application $A \times M \longrightarrow M$, qui à (a, m) associe $a \cdot m$, et qui vérifie :

$$\forall a \in A, \quad \forall (m_1, m_2) \in M^2 \quad a \cdot (m_1 + m_2) = a \cdot m_1 + a \cdot m_2 \quad (1)$$

$$\forall (a_1, a_2) \in A^2, \quad \forall m \in M \quad (a_1 + a_2) \cdot m = a_1 \cdot m + a_2 \cdot m \quad (2)$$

$$\forall (a_1, a_2) \in A^2, \quad \forall m \in M \quad (a_1 a_2) \cdot m = a_1 \cdot (a_2 \cdot m) \quad (3)$$

$$\forall m \in M \quad 1 \cdot m = m \quad (4)$$

⁽⁵⁾ A n'est pas forcément commutatif.

Une application $f : M_1 \rightarrow M_2$ est dite A -linéaire si

$$\forall a \in A, \quad \forall (m_1, m_2) \in M^2 \quad f(a \cdot m_1 + m_2) = a \cdot f(m_1) + f(m_2) \quad (5)$$

Classiquement, on peut définir plus élégamment les A -modules. Pour cela, il faut remarquer que $\text{End}_{\mathbf{Grp}}(M)$ a une structure d'anneau (unitaire mais en général non-commutatif) : si $f_1, f_2 \in \text{End}_{\mathbf{Grp}}(M)$, la somme de f_1 et f_2 est faite « point par point » et le produit correspond au composé $f_1 \circ f_2$; l'unité multiplicative de $\text{End}_{\mathbf{Grp}}(M)$ est Id_M . Dès lors, on peut définir comme suit un A -module, ainsi que les applications linéaires :

Définition 9.4.2. Soit A un anneau. Un A -module M est un groupe abélien muni d'un morphisme d'anneaux unitaires $\varphi_M : A \rightarrow \text{End}_{\mathbf{Grp}}(M)$.

Une application A -linéaire f entre deux A -modules M_1 et M_2 est un morphisme $f : M_1 \rightarrow M_2$ de groupes abéliens qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \text{End}_{\mathbf{Grp}}(M_1) & \\ \varphi_{M_1} \nearrow & \swarrow f \circ & \\ A & & \text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(M_1, M_2) \\ \varphi_{M_2} \searrow & \nearrow \circ f & \\ & \text{End}_{\mathbf{Grp}}(M_2) & \end{array}$$

Dans l'équivalence de ces définitions, la propriété (1) correspond au fait que le morphisme φ_M est à valeurs dans $\text{End}_{\mathbf{Grp}}(M)$; la propriété (2) : au fait que φ_M est un morphisme de groupes abéliens (pour la structure additive); la propriété (3) : au fait que φ_M est un morphisme de monoïdes (pour les structures multiplicatives); enfin, la propriété (4) correspond au fait que φ_M est un morphisme unitaire.

(9.4.2) Schémas en modules. La propriété d'être, pour un schéma X , en modules (comprendre : en espaces vectoriels) se teste et se définit sur le foncteur des points $X(-)$. Ainsi, on va plutôt définir la propriété d'« être en modules », plus généralement, pour un foncteur $F : \mathbf{Ann} \rightarrow \mathbf{Ens}$ ou pour un foncteur $F : \mathbf{Alg}_k \rightarrow \mathbf{Ens}$. Un tel foncteur est appelé un k -foncteur (*en ensembles*). Pour ce faire, on va calquer la démarche qui précède.

Définition 9.4.3. Soit k un anneau. Un k -foncteur en groupes abéliens est un k -foncteur $F : \mathbf{Alg}_k \rightarrow \mathbf{Ens}$ muni d'une factorisation \mathcal{F} :

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{GrAb} & \\ \mathcal{F} \nearrow & \searrow \omega & \\ \mathbf{Alg}_k & \xrightarrow{F} & \mathbf{Ens} \end{array} .$$

Les morphismes entre k -foncteurs en groupes abéliens sont les morphismes qui se factorisent par $\omega : \mathbf{GrAb} \rightarrow \mathbf{Ens}$.

On définit de même les k -foncteurs en anneaux (non-nécessairement commutatifs) et leurs morphismes.

(9.4.3) Transformations naturelles vues comme foncteurs. Avant de continuer, une petite parenthèse s'impose. Considérons deux catégories \mathcal{C} et \mathcal{D} ainsi que deux foncteurs (covariants) $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$. Alors, $\text{Hom}(F, G)$, l'ensemble des transformations naturelles de F dans G , peut être vu comme un foncteur de \mathcal{C} dans **Ens**. On le définit par

$$\underline{\text{Hom}}(F, G)(X) := \text{Hom}_{\mathbf{Fun}(\mathcal{C}/X, \mathcal{D})}(F|_X, G|_X) \quad \text{où :}$$

- si X est un objet de \mathcal{C} , on a noté \mathcal{C}/X la catégorie des objets de \mathcal{C} au-dessus de X .
- si X est un objet de \mathcal{C} , on a noté $F|_X$ la restriction de $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ à \mathcal{C}/X .

Considérons maintenant (F, \mathcal{F}) un k -foncteur en groupes abéliens. Alors, on peut munir

$$\underline{\text{End}}_{\mathbf{Grp}}(\mathcal{F})$$

d'une structure de k -foncteur en anneaux. En effet, d'après ce qu'on vient de dire, on peut déjà voir $\underline{\text{End}}_{\mathbf{Grp}}(\mathcal{F})$ comme un k -foncteur (en ensembles). Il s'agit ensuite de munir, pour chaque $K \in \mathbf{Alg}_k$, l'ensemble

$$\underline{\text{End}}_{\mathbf{Grp}/K}(\mathcal{F}_K)$$

d'une structure d'anneau. Pour cela, on définit $\varphi_K + \psi_K$ « point par point » et en prenant $\varphi_K \circ \psi_K$ pour le produit. Ainsi,

$$\underline{\text{End}}_{\mathbf{Grp}}(\mathcal{F}) : \mathbf{Alg}_k \longrightarrow \mathbf{AnnNC}$$

est un k -foncteur en anneaux (**AnnNC** désigne la catégorie des anneaux unitaires non-nécessairement commutatifs). On peut maintenant définir :

Définition 9.4.4. Soit k un anneau. Un k -foncteur en modules est un k -foncteur en groupes abéliens (M, \mathcal{M}) muni d'un morphisme de k -foncteurs en anneaux

$$\varphi_{\mathcal{M}} : \omega_{k, \mathbf{Ann}} \longrightarrow \underline{\text{End}}_{\mathbf{Grp}}(\mathcal{M}),$$

où on a noté $\omega_{k, \mathbf{Ann}} : \mathbf{Alg}_k \longrightarrow \mathbf{AnnNC}$ le foncteur oubli.

Si $(M_1, \mathcal{M}_1, \varphi_{\mathcal{M}_1})$ et $(M_2, \mathcal{M}_2, \varphi_{\mathcal{M}_2})$ sont deux k -foncteurs en modules, on dit que $f : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ est une application linéaire si elle est un morphisme de k -foncteurs en groupes abéliens et qu'elle fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \underline{\text{End}}_{\mathbf{Grp}}(\mathcal{M}_1) & \\ \varphi_{M_1} \nearrow & \swarrow f^\circ & \\ \omega_{k, \mathbf{Ann}} & & \underline{\text{Hom}}_{\mathbf{Grp}}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) \\ \varphi_{M_2} \searrow & \swarrow \circ f & \\ & \underline{\text{End}}_{\mathbf{Grp}}(\mathcal{M}_2) & \end{array}$$

de k -foncteurs en groupes abéliens.

(9.4.4) Remarque importante. Dans la définition qui précède, on peut remplacer le foncteur $\omega_{k, \mathbf{Ann}}$ par n'importe quel foncteur $\lambda : \mathbf{Alg}_k \rightarrow \mathbf{AnnNC}$. On obtient alors les notions de k -foncteur en λ -modules et d'application λ -linéaire.

(9.4.5) Cas différentiel. On va maintenant transposer ce qui vient d'être fait pour le cas algébrique dans le cas différentiel : on traite d'abord le cas « constant », puis on traite le cas « en foncteur ».

Définition 9.4.5. Un groupe différentiel est un groupe M muni d'un endomorphisme $\partial_M \in \text{End}_{\mathbf{Grp}}(M)$.

Si (M_1, ∂_{M_1}) et (M_2, ∂_{M_2}) sont deux groupes différentiels, un morphisme f entre (M_1, ∂_{M_1}) et (M_2, ∂_{M_2}) est un morphisme de groupes $f : M_1 \rightarrow M_2$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{\partial_{M_1}} & M_1 \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ M_2 & \xrightarrow{\partial_{M_2}} & M_2 \end{array}$$

Un groupe différentiel est dit abélien si le groupe sous-jacent est abélien.

Soit (M, ∂_M) un groupe différentiel abélien. Alors, $\text{End}_{\mathbf{Grp}}(M)$ — attention, on s'intéresse ici à *tous* les morphismes de groupes, pas seulement à ceux qui sont différentiels — peut être muni d'une structure d'*anneau différentiel* en posant :

$$\begin{aligned} \partial_{\text{End}_{\mathbf{Grp}}(M)} : \quad & \text{End}_{\mathbf{Grp}}(M) \longrightarrow \text{End}_{\mathbf{Grp}}(M) \\ & f \longmapsto \partial_M f - f \partial_M \end{aligned}$$

On vérifie facilement que, lorsqu'on munit $\text{End}_{\mathbf{Grp}}(M)$ de sa structure canonique de groupe abélien, $\partial_{\text{End}_{\mathbf{Grp}}(M)}$ est bien un morphisme de groupes, et donc, que la structure obtenue est bien un groupe différentiel abélien. Avec cette définition, on a la caractérisation suivante, si $f \in \text{End}_{\mathbf{Grp}}(M)$:

$$f \text{ est un morphisme de groupes différentiels} \iff \partial_{\text{End}_{\mathbf{Grp}}(M)}(f) = 0.$$

Si on munit $\text{End}_{\mathbf{Grp}}(M)$ de sa structure canonique d'anneau unitaire, on a :

Fait 9.4.6. $(\text{End}_{\mathbf{Grp}}(M), \partial_{\text{End}_{\mathbf{Grp}}(M)})$ est un anneau différentiel unitaire.

Démonstration. — Il suffit de vérifier la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned} \partial_{\text{End}_{\mathbf{Grp}}(M)}(f_1) f_2 + f_1 \partial_{\text{End}_{\mathbf{Grp}}(M)}(f_2) &= (\partial_M f_1 - f_1 \partial_M) f_2 + f_1 (\partial_M f_2 - f_2 \partial_M) \\ &= \partial_M f_1 f_2 - f_1 \partial_M f_2 + f_1 \partial_M f_2 - f_1 f_2 \partial_M \\ &= \partial_M f_1 f_2 - f_1 f_2 \partial_M \\ &= \partial_{\text{End}_{\mathbf{Grp}}(M)}(f_1 f_2) \end{aligned}$$

■

Définition 9.4.7. Soit k un anneau différentiel. Un k -module différentiel est un groupe différentiel abélien (M, ∂_M) muni d'un morphisme d'anneaux différentiels unitaires

$$\varphi_M : k \longrightarrow (\text{End}_{\mathbf{Grp}}(M), \partial_{\text{End}_{\mathbf{Grp}}(M)}).$$

On définit les morphismes de k -modules différentiels comme d'habitude, avec le diagramme « en losange ».

Vérifions que cette définition coïncide bien avec la définition classique de module différentiel. En effet, suivant par exemple la définition I.1.6 de [vdPS03], si k est un anneau différentiel, on dit que (M, ∂) est un *module différentiel* (au sens « classique ») si M est un k -module et si

$$\forall m \in M, \quad \forall f \in k, \quad \partial(fm) = f'm + f\partial(m).$$

Partons d'abord d'un k -module différentiel (au sens « classique ») (M, ∂) . Pour commencer, on note que (M, ∂) est bien un groupe abélien différentiel. Puis, on associe à (M, ∂) un morphisme

$$\begin{aligned} k &\longrightarrow \text{End}_{\mathbf{Grp}}(M) \\ \Phi_\partial : f &\longmapsto \begin{cases} M \longrightarrow M \\ m \longmapsto fm \end{cases} \end{aligned}$$

Vérifions que Φ_∂ est bien un morphisme d'anneaux différentiels. D'un côté, on a :

$$\Phi_\partial(f')(m) = f'm.$$

Et de l'autre :

$$(\partial_{\text{End}_{\mathbf{Grp}}(M)}(\Phi_\partial(f)))(m) = (\partial\Phi_\partial(f) - \Phi_\partial(f)\partial)(m) = \partial(fm) - f\partial(m).$$

Les deux coïncident bien : le morphisme Φ_∂ ainsi défini est bien un morphisme d'anneaux différentiels. Réciproquement, si on part de (M, ∂) un groupe abélien différentiel et si on se donne un morphisme d'anneaux différentiels $k \longrightarrow \text{End}_{\mathbf{Grp}}(M)$, d'une part ce morphisme définit une structure de k -module pour M et, d'autre part, le fait qu'il soit différentiel impose la relation que l'on souhaite vérifier.

Nous sommes enfin suffisamment équipés, techniquement et conceptuellement, pour aborder le cas des espaces algébro-différentiels.

Définition 9.4.8. Soit k un anneau différentiel et soit X un k -espace algébro-différentiel. On dit que :

- X est en groupes si on munit X d'une factorisation \mathcal{X} :

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{Grp} & \\ \mathcal{X} \nearrow & & \searrow \omega \\ \mathbf{Alg}_k^\partial & \xrightarrow[X]{} & \mathbf{Ens} \end{array}$$

On dit aussi que X est un k -groupe algébro-différentiel.

- X est en groupes abéliens si on munit X d'une factorisation \mathcal{X} :

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{GrAb} & \\ \mathcal{X} \nearrow & & \searrow \omega \\ \mathbf{Alg}_k^\partial & \xrightarrow[X]{} & \mathbf{Ens} \end{array}$$

- X est en anneaux si on munit X d'une factorisation \mathcal{X} :

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{AnnNC} & \\ \mathcal{X} \nearrow & & \searrow \omega \\ \mathbf{Alg}_k^\partial & \xrightarrow[X]{} & \mathbf{Ens} \end{array}$$

Les morphismes d'espaces algébro-différentiels en groupes, groupes abéliens, anneaux sont les morphismes d'espaces algébro-différentiels qui se factorisent par les foncteurs oubli respectifs.

On enchaîne sur la définition des k -espaces algébro-différentiels en « espaces vectoriels ».

Définition 9.4.9. Soit k un anneau différentiel et soit X un k -espace algébro-différentiel. Soit

$$\lambda : \mathbf{Alg}_k^\partial \longrightarrow \mathbf{AnnNC}$$

un foncteur. On dit que X est en λ -modules si X est en groupes abéliens et est muni d'une flèche

$$\varphi_X : \lambda \longrightarrow \underline{\mathrm{End}_{\mathbf{GrpE}sp_k^\partial}(X)}$$

d'espaces algébro-différentiels en anneaux.

Si $V_1 = (X_1, \mathcal{X}_1, \varphi_{X_1})$ et V_2 sont deux espaces algébro-différentiels en λ -modules, un morphisme $f : V_1 \longrightarrow V_2$ est un morphisme entre les espaces algébro-différentiels en groupes abéliens sous-jacents qui fasse commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{End}_{\mathbf{GrpE}sp_k^\partial}(\mathcal{X}_1) & \\ \varphi_{X_1} \nearrow & \swarrow f \circ & \\ \lambda \searrow & & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp-Fun}}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) \\ \varphi_{X_2} \searrow & \swarrow \circ f & \\ & \mathrm{End}_{\mathbf{GrpE}sp_k^\partial}(\mathcal{X}_2) & \end{array}$$

(9.4.6) Remarques sur la définition 9.4.9. On utilisera la définition ci-dessus en particulier lorsque λ est $\omega : \mathbf{Alg}_k^\partial \longrightarrow \mathbf{AnnNC}$, le foncteur oubli, ou lorsque c'est le *foncteur C_- des constantes*

$$\begin{aligned} C_- : \quad & \mathbf{Alg}_k^\partial \longrightarrow \mathbf{AnnNC} \\ & K \longmapsto C_K \end{aligned}.$$

Dans la même veine, on aurait pu définir les espaces algébro-différentiels en *modules différentiels* et, plus généralement, si $\lambda : \mathbf{Alg}_k^\partial \longrightarrow \mathbf{AnnNC}^\partial$, les espaces algébro-différentiels en λ -modules différentiels.

9.5 Exemples d'espaces algébro-différentiels

À ce stade, on peut déjà donner de nombreux exemples d'espaces algébro-différentiels, qui illustrent comment des questions naturelles peuvent être encodées dans ces « objets géométriques ».

(9.5.1) Le point k . Commençons par un k -espace algébro différentiel qui peut paraître un peu étrange : on s'intéresse aux espaces $X \in \mathbf{Esp}_k^\partial$ tels que pour toute k -algèbre K , $X(K)$ est un singleton. Voilà un exemple plus explicite d'un tel espace X : il suffit de considérer diff-Spec k . En effet, pour toute k -algèbre différentielle K , l'ensemble

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_k^\partial}(k, K)$$

est réduit à un seul élément (à savoir $k \longrightarrow K$, le morphisme structural de K). En fait, tous les k -espaces algébro-différentiels X dont l'ensemble des K -points $X(K)$ est réduit à un singleton pour toute k -algèbre différentielle K sont isomorphes à diff-Spec k . On appelle diff-Spec k : *le point k* , et on le note aussi, si cela n'induit pas de confusion : k .

(9.5.2) Espaces affines algébro-différentiels. De la même façon qu'on a les espaces affines \mathbf{A}_k^n en théorie des schémas, on a les *espaces affines différentiels* en géométrie algébro-différentielle ; ils sont définis par, si k est un anneau différentiel et si $n \in \mathbf{N}$:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{A}_k^{\partial,n} : \mathbf{Alg}_k^\partial &\longrightarrow \mathbf{Ens} \\ K &\longmapsto K^n \end{aligned}}.$$

Comme on l'a vu plus haut, le foncteur $\mathbf{A}_k^{\partial,1}$ égale le foncteur oubli ω_k^∂ . Ces espaces algébro-différentiels ont une structure en modules ; mieux, ils ont une structure en modules différentiels. Ce sont des schémas différentiels affines : $\mathbf{A}_k^{\partial,n}$ est représentable par la k -algèbre différentielle

$$k\langle y_1, \dots, y_n \rangle := k \left[\left(y_i^{(j)} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ j \in \mathbf{N}}} \right]$$

munie de la dérivation définie par

$$\left(y_i^{(j)} \right)' = y_i^{(j+1)}.$$

En effet, dans le cas $n = 1$ par exemple, se donner un morphisme $\varphi : k\langle y \rangle \longrightarrow K$ équivaut à se donner un élément $a \in K$, à savoir l'image de y par φ ; il n'y a aucune autre contrainte.

(9.5.3) Espace algébro-différentiel associé à une équation différentielle linéaire sous forme vectorielle. Soient k un corps différentiel (on peut aussi considérer un anneau différentiel) et soit $A \in M_n(k)$. On s'intéresse à l'équation différentielle $Y' = AY$. On cherche un « objet géométrique » qui encode les solutions de cette équation. On peut d'abord définir :

$$\boxed{\begin{aligned} Sol_A : \mathbf{Alg}_k^\partial &\longrightarrow \mathbf{Ens} \\ K &\longmapsto \{Y \in K^n \mid Y' = AY\} \end{aligned}}.$$

C'est un espace algébro-différentiel en (C_-) -modules : pour toute k -algèbre différentielle K , l'ensemble des vecteurs de K^n solutions, à savoir $Sol_A(K)$, est un C_K -module — rappelons que C_K désigne l'anneau des constantes de K . Cet objet Sol_A permet de déceler certains faits concernant l'équation $Y' = AY$. Par exemple,

$$Y' = AY \text{ a des solutions rationnelles} \iff Sol_A \text{ a des points rationnels.}$$

Sol_A est un schéma différentiel affine, représentable par la k -algèbre différentielle

$$k[Sol_A] := k[y_1, y_2, \dots, y_n]$$

où la dérivée est définie par

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}' := A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Certains de ces espaces algébro-différentiels Sol_A sont remarquables, pour des valeurs particulières de A et n . Ainsi, si $n = 1$ et si la matrice A est la matrice à une entrée nulle, Sol_A est le foncteur qui associe à K l'ensemble sous-jacent à C_K : si on note $\omega : \mathbf{Ann} \longrightarrow \mathbf{Ens}$ le foncteur oubli, on a

$$\boxed{\begin{aligned} Sol_{(0)} = \omega \circ C_- : \mathbf{Alg}_k^\partial &\longrightarrow \mathbf{Ens} \\ K &\longmapsto \omega(C_K) \end{aligned}}.$$

On peut choisir un autre point de vue. En effet, quand on s'intéresse à une équation $Y' = AY$, on peut soit regarder ses solutions, soit regarder ses *matrices fondamentales de solutions*. On pose donc :

$$\boxed{X_A : \begin{array}{c} \mathbf{Alg}_k^\partial \longrightarrow \mathbf{Ens} \\ K \longmapsto \{U \in GL_n(K) \mid U' = AU\} \end{array}}$$

Contrairement au cas précédent, l'espace algébro-différentiel X_A n'a pas de structure en modules. X_A est un schéma différentiel affine, représentable par la k -algèbre

$$k[X_A] := k \left[(u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \right]_{\det(u_{i,j})}$$

où la dérivée est donnée par

$$\begin{pmatrix} u_{1,1} & \cdots & u_{1,n} \\ u_{2,1} & \cdots & u_{2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n,1} & \cdots & u_{n,n} \end{pmatrix}' := A \begin{pmatrix} u_{1,1} & \cdots & u_{1,n} \\ u_{2,1} & \cdots & u_{2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n,1} & \cdots & u_{n,n} \end{pmatrix}$$

et où on a localisé la k -algèbre différentielle $k \left[(u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \right]$ par rapport à $\det(u_{i,j})$.

(9.5.4) Groupe linéaire, différentiel et constant. Soit k un anneau différentiel. On définit ainsi le *groupe linéaire différentiel d'ordre n* , qu'on note $GL_{n,k}^{\text{diff}}$:

$$\boxed{GL_{n,k}^{\text{diff}} : \begin{array}{c} \mathbf{Alg}_k^\partial \longrightarrow \mathbf{Ens} \\ K \longmapsto GL_n(K) \end{array}}$$

Évidemment, c'est un espace algébro-différentiel en groupes. C'est aussi un schéma différentiel affine : $GL_{n,k}^{\text{diff}}$ est représentable par la k -algèbre différentielle

$$k [GL_{n,k}^{\text{diff}}] := k \left\langle (u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \right\rangle_{\det(u_{i,j})}$$

obtenue en localisant $k \left\langle (u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \right\rangle$ par rapport à la partie multiplicative engendrée par $\det(u_{i,j})$.

Autant le précédent objet était « classique » autant celui qui vient est spécifique au monde différentiel. C'est le *groupe linéaire en constantes d'ordre n* . On le note $GL_{n,k}^{\text{cte}}$ et il est défini par

$$\boxed{GL_{n,k}^{\text{cte}} : \begin{array}{c} \mathbf{Alg}_k^\partial \longrightarrow \mathbf{Ens} \\ K \longmapsto GL_n(C_K) \end{array}}$$

Il est évident que

$$GL_n(C_K) = \left\{ U \in GL_n(K) \mid U' = (0)_{i,j} \right\}$$

mais cela permet de voir que l'espace algébro-différentiel $GL_{n,k}^{cte}$ est égal à X_A lorsque A est la matrice nulle ! On voit ainsi que c'est, lui aussi, un schéma différentiel affine. Évidemment, c'est un espace algébro-différentiel en groupes. Si K est une k -algèbre différentielle, le groupe $GL_{n,k}^{cte}(K)$ peut être interprété comme le groupe des automorphismes, dans une catégorie qu'il faut préciser, d'un certain objet. En effet, si on considère K^n muni de sa structure canonique de K -module différentiel, alors, il y a une bijection entre $GL_{n,k}^{cte}(K) = GL_n(C_K)$ et le groupe des automorphismes de K^n vu comme K -module différentiel. Cela vient du fait que $\varphi \in \text{Aut}(K^n, \partial)$, comme tout automorphisme linéaire de K^n est caractérisé par les $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in K^{n^2}$ vérifiant

$$\varphi(\varepsilon_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji} \cdot \varepsilon_j,$$

où les ε_k forment la base canonique de K^n . Comme, par ailleurs, on doit avoir

$$\begin{aligned} \varphi(\varepsilon'_i) &= \varphi(0) = 0 \\ &= \left(\sum_{j=1}^n a_{ji} \cdot \varepsilon_j \right)' \\ &= \sum_{j=1}^n a'_{ji} \cdot \varepsilon_j + \sum_{j=1}^n a_{ji} \cdot \varepsilon'_j \\ &= \sum_{j=1}^n a'_{ji} \cdot \varepsilon_j \end{aligned}$$

les a_{ij} sont forcément des constantes.

(9.5.5) Espace algébro-différentiel associé à une équation algébro-différentielle. On vient de voir, plus haut, qu'on peut associer un schéma différentiel affine à toute équation différentielle linéaire, sous forme vectorielle. On s'attend, naturellement, à ce qu'on puisse faire la même chose lorsqu'on considère des équations différentielles linéaires *sous forme scalaire*. En fait, en se plaçant dans le cadre scalaire, on va voir qu'on peut traiter un cas beaucoup plus général, celui des *équations algébro-différentielles*.

Définition 9.5.1. Soit k un anneau différentiel. L'anneau des polynômes algébro-différentiels à n variables est la k -algèbre différentielle définie par

$$k\langle X_1, \dots, X_n \rangle := k \left[\left(X_1^{(j)} \right)_{j \in \mathbb{N}}, \dots, \left(X_n^{(j)} \right)_{j \in \mathbb{N}} \right]$$

et munie de la dérivation $\partial(X_i^{(j)}) = X_i^{(j+1)}$.

Comme dans le cas des polynômes, on dispose d'une flèche d'évaluation. On la définit naturellement : si K est une k -algèbre différentielle et si $\underline{f} = (f_1, \dots, f_n) \in K^n$ on pose :

$$\begin{array}{ccc} \text{év}_{\underline{f}} : & k\langle X_1, \dots, X_n \rangle & \longrightarrow K \\ & X_i & \longmapsto f_i \end{array}$$

puis on étend le morphisme par linéarité et par dérivation — on a déjà vu que cette algèbre représentait le foncteur $K \mapsto K^n$: ainsi, définir un morphisme revient à donner l'image des X_i . La flèche $\text{év}_{\underline{f}}$ est un morphisme dans le sens où on a

$$\begin{aligned}\text{év}_{\underline{f}}(P + Q) &= \text{év}_{\underline{f}}(P) + \text{év}_{\underline{f}}(Q) \\ \text{év}_{\underline{f}}(PQ) &= \text{év}_{\underline{f}}(P)\text{év}_{\underline{f}}(Q) \\ \text{év}_{\underline{f}}(P') &= (\text{év}_{\underline{f}}(P))'.\end{aligned}$$

Cependant, on n'a évidemment pas $\text{év}_{\underline{f}+g}(P) = \text{év}_{\underline{f}}(P) + \text{év}_{\underline{g}}(P)$: cela signifie exactement qu'on s'intéresse à des équations différentielles qui ne sont pas forcément linéaires. On note aussi :

$$P(\underline{f}) := \text{év}_{\underline{f}}(P).$$

Soit k un anneau différentiel et soient $P_1, \dots, P_r \in k\langle X_1, \dots, X_m \rangle$ des polynômes algébro-différentiels. On pose :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \text{Alg}_k^\partial & \longrightarrow & \mathbf{Ens} \\ \text{Sol}_{(P_i)_i} : & K \longmapsto & \left\{ \underline{f} = (f_1, \dots, f_n) \in K^n \mid \forall 1 \leq i \leq r, \quad P_i(\underline{f}) = 0 \right\} \end{array}}.$$

C'est un schéma différentiel affine, représentable par la k -algèbre différentielle

$$k\langle X_1, \dots, X_n \rangle / \langle P_1, \dots, P_m \rangle$$

où on a noté $\langle P_1, \dots, P_m \rangle$ l'idéal différentiel engendré par les polynômes algébro-différentiels P_1, \dots, P_m . En effet, un morphisme (différentiel) de cette k -algèbre différentielle vers K est déterminé par la donnée de $\underline{f} = (f_1, \dots, f_n)$ formée des images de X_i , vérifiant $P_i(\underline{f}) = 0$ pour tout i .

Plus généralement, au lieu de considérer m équations algébro-différentielles, on peut définir un espace algébro-différentiel à partir de tout idéal différentiel I de $k\langle X_1, \dots, X_n \rangle$. Dans le cas classique, algébrique mais non-différentiel, les deux points de vue sont équivalents ; cela vient du fait que tout idéal I de $k[X_1, \dots, X_n]$ peut s'écrire $I = (f_1, \dots, f_m)$, pour un $m \in \mathbf{N}_{>0}$ et des $f_i \in k[X_1, \dots, X_n]$ bien choisis — comme l'affirme le théorème de la base de Hilbert. Dans le cas différentiel, on n'a pas de tel théorème : il existe des idéaux différentiels de $k\langle X_1, \dots, X_n \rangle$ qui ne sont pas différentiellement de type fini. Par exemple, Ritt a montré, dans [Rit34], que l'idéal différentiel $\langle y^{(i)}y^{(i+1)} \rangle_{i \in \mathbf{N}_{\geq 1}}$ de $k\langle y \rangle$ n'est pas différentiellement de type fini.

Comme cet espace algébro-différentiel est l'analogue non-linéaire de Sol_A , une question se pose naturellement : quel est l'analogue non-linéaire — s'il existe — de X_A ? Cette question est liée à la théorie des systèmes intégrables.

(9.5.6) Voir un schéma affine comme un schéma différentiel affine : oubli de structure et adjonction. La question qu'on se pose maintenant est la suivante. De la même façon qu'on peut voir un schéma séparé de type fini au-dessus de \mathbf{C} comme une variété \mathbf{C} -analytique ; de la même façon qu'on peut voir un groupe algébrique défini au-dessus de \mathbf{C} comme un groupe de Lie ; etc. : peut-on, dans la mesure où les espaces algébro-différentiels généralisent les schémas, voir un schéma comme un espace algébro-différentiel ?

La réponse est triviale. Dans ce qui suit, on note ω le foncteur « oubli de la structure différentielle », $\omega : \mathbf{Ann}^\partial \longrightarrow \mathbf{Ann}$. Soit k un anneau différentiel et X un schéma défini au-dessus de $\omega(k)$. Alors, on peut voir X comme un k -espace algébro-différentiel, en considérant :

$$\boxed{\begin{aligned} X^{\text{diff}} : \mathbf{Alg}_k^\partial &\longrightarrow \mathbf{Ens} \\ K &\longmapsto X(\omega(K)) \end{aligned}}$$

En fait, on a construit un foncteur :

$$\begin{aligned} (-)^{\text{diff}} : \mathbf{Sch} &\longrightarrow \mathbf{Esp}_k^\partial \\ X &\longmapsto X^{\text{diff}} \end{aligned}$$

Cette même question est moins triviale s'il s'agit de schémas (classiques ou différentiels) *affines*. On peut la poser ainsi : si X est un schéma affine, X^{diff} est-il un schéma différentiel affine ; autrement dit : le foncteur $K \mapsto X(\omega(K))$ est-il représentable ? À supposer que ce soit le cas, on disposerait alors pour toute $\omega(k)$ -algèbre A d'une k -algèbre différentielle A^{diff} telle que

$$(\mathrm{Spec} A)^{\text{diff}} \simeq \underline{\mathrm{diff-Spec}}(A^{\text{diff}}).$$

On aurait donc, par définition, pour toute k -algèbre différentielle K un isomorphisme φ_K entre $(\mathrm{Spec} A)^{\text{diff}}(K)$ et $\underline{\mathrm{diff-Spec}}(A^{\text{diff}})(K)$, donc entre

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_{\omega(k)}}(A, \omega(K)) \quad \text{et} \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_k^\partial}(A^{\text{diff}}, K).$$

Sous cette forme, on voit que notre problème est de déterminer si $\omega : \mathbf{Alg}_k^\partial \longrightarrow \mathbf{Alg}_{\omega(k)}$ admet un adjoint à gauche. La réponse est :

Proposition 9.5.2. *Le foncteur d'oubli $\omega : \mathbf{Alg}_k^\partial \longrightarrow \mathbf{Alg}_{\omega(k)}$ admet un adjoint à gauche.*

Démonstration. — Ce résultat est déjà démontré dans [Kei75]. On en donne ici une démonstration plus détaillée. Soit k un anneau différentiel. On veut construire un foncteur

$$\begin{aligned} (-)^{\text{diff}} : \mathbf{Alg}_{\omega(k)} &\longrightarrow \mathbf{Alg}_k^\partial \\ A &\longmapsto A^{\text{diff}} \end{aligned}$$

Imaginons un instant que, en tant que $\omega(k)$ -algèbre, A soit un sous-anneau de A^{diff} . Ce qu'on veut, c'est que, si K est une k -algèbre différentielle, il y ait « autant d'éléments » entre

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_{\omega(k)}}(A, \omega(K)) \quad \text{et} \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_k^\partial}(A^{\text{diff}}, K).$$

Ainsi, partons d'un morphisme de $\omega(k)$ -algèbres $\varphi : A \longrightarrow \omega(K)$. On veut associer à ce φ un unique morphisme différentiel $\varphi^{\text{diff}} : A^{\text{diff}} \longrightarrow K$. C'est-à-dire, on se pose la question :

$$\forall \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_{\omega(k)}}(A, \omega(K)), \quad (\exists !) \ ? \ \varphi^{\text{diff}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_k^\partial}(A^{\text{diff}}, K) \quad | \quad \begin{array}{c} A \xrightarrow{\varphi} K \\ i \downarrow \quad \nearrow \varphi^{\text{diff}} \\ A^\partial \end{array}$$

Intuitivement, l'unicité de la flèche φ^{diff} impose que A engende A^{diff} différentiellement : si les a', a'', \dots quel que soit $a \in A$, engendent A^{diff} , le morphisme φ^{diff} est entièrement déterminé par φ , puisqu'on doit avoir $\varphi^{\text{diff}}(a') = (\varphi^{\text{diff}}(a))' = (\varphi(a))'$ ainsi que les relations pour les

dérivées seconde, troisième, etc. C'est pourquoi il est naturel de penser, comme premier candidat pour A^{diff} , à l'anneau différentiel A auquel on ajoute des symboles a', a'', a''', \dots pour tous les $a \in A$ — et qu'on munit de la dérivée évidente. Cependant, ce n'est pas assez car, en procédant ainsi, la dérivée ne vérifie pas les relations d'additivité ni de Leibniz : on a créé trop de symboles — si les symbole a'_1 et a'_2 existent, pas besoin de créer le symbole a'_3 , quand $a_3 = a_1 + a_2$, par exemple.

Ainsi, étant donné A une $\omega(k)$ -algèbre, on considère d'abord $k\langle A \rangle$ la k -algèbre différentielle des polynômes algébro-différentiels en les variables $(a)_{a \in A}$. Pour être explicite, un élément typique de cette algèbre est par exemple

$$a(b'')^3(c^{(47)})^2 - d^2(a')^7e^{(8)} + b^{15}(c''')^2d'$$

où a, b, c, d, e sont des éléments de A . Il faut ensuite quotienter $k\langle A \rangle$ par les relations algébriques entre les éléments de A .

Pour ce faire, on considère l'algèbre des polynômes classiques (*i.e* non-différentiels) $\omega(k)[A]$ en les indéterminées $(a)_{a \in A}$. Un morphisme de $k[A]$ vers une $\omega(k)$ -algèbre R est déterminée par la donnée de $|A|$ éléments de R — ou, plus précisément, par la famille $(r_a)_{a \in A} \in R^A$ des images des indéterminées $(a)_{a \in A}$. Ainsi, on dispose d'un morphisme canonique surjectif

$$\begin{aligned} p : & k[A] \longrightarrow A \\ & a \longmapsto a \end{aligned}.$$

L'*idéal des relations algébriques de A* est alors, par définition

$$\text{RelAlg}(A) := \ker(p : k[A] \longrightarrow A).$$

On dispose aussi d'une flèche canonique (morphisme de $\omega(k)$ -algèbres) et injective

$$k[A] \longrightarrow k\langle A \rangle$$

qui nous permet de voir $\text{RelAlg}(A)$ comme un sous-ensemble de $k\langle A \rangle$. On pose alors

$$A^{diff} := k\langle A \rangle / \langle \text{RelAlg}(A) \rangle.$$

La flèche p passe au quotient et donne une flèche

$$k[A] / \text{RelAlg}(A) \longrightarrow A^{diff}.$$

Or, comme p est surjective, on a

$$k[A] / \text{RelAlg}(A) \xrightarrow{\sim} A.$$

Ainsi, on a une flèche canonique $i : A \longrightarrow A^{diff}$.

Soit maintenant K une k -algèbre différentielle. Vérifions que l'application

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbf{Alg}_k^{\partial}}(A^{diff}, K) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Alg}_{\omega(k)}}(A, \omega(K)) \\ \psi &\longmapsto \psi \circ i \end{aligned}$$

est bijective. Commençons par l'injectivité. Soient ψ_1 et ψ_2 deux telles flèches qui « restreintes » à A coïncident. On veut montrer qu'elles sont égales : c'est évident puisque A engendre différentiellement A^{diff} . Pour la surjectivité, soit $\psi : A \longrightarrow \omega(K)$ un morphisme de $\omega(k)$ -algèbres. On veut étendre ψ à A^{diff} . Un morphisme de k -algèbres différentielles

$k\langle A \rangle \longrightarrow K$ est déterminé par la famille $(r_a)_{a \in A}$ des images des indéterminées $(a)_{a \in A}$. On définit donc

$$\tilde{\psi} : \begin{array}{ccc} k\langle A \rangle & \longrightarrow & K \\ a & \longmapsto & \psi(a) \end{array}.$$

Il faut vérifier que $\tilde{\psi}$ passe au quotient, ce qui est évident : une relation $R \in \text{RelAlg}(A)$ étant nulle dans A , son image par ψ l'est encore. On a ainsi construit l'adjoint que l'on cherchait.

■

9.6 La platitude des systèmes abordée *via* les espaces algébro-différentiels

(9.6.1) Système différentiellement plats. La notion de *système différentiellement plat* a été introduite par Michel Fliess, Jean Lévine, Philippe Martin et Pierre Rouchon dans [FLMR92] puis dans [FLMR95]. Pour une introduction à ce sujet, le lecteur pourra consulter [MMR02]. Les systèmes différentiels plats ont de nombreuses applications en automatique, théorie du contrôle et aussi dans le monde industriel.

Cette notion est abordée dans [FLMR95] *via* l'algèbre différentielle, tandis que dans [MMR02], elle l'est par une approche plus géométrique. Nous proposons ici une troisième approche qui s'appuie sur la notion d'espace algébro-différentiel. Avant d'en venir à cette approche, donnons un exemple de système différentiellement plat, dû à Pierre Rouchon.

Dans les deux paragraphes qui suivent, on utilise la notation \dot{y} , usuelle en automatique. Rappelons qu'on dénote par ce symbole la dérivée de y . De même, \ddot{y} désigne la dérivée seconde de y .

(9.6.2) Un exemple. On s'intéresse au système non-linéaire d'équations différentielles :

$$\dot{x}_1 - (\dot{x}_2)^2 - (\dot{x}_3)^2 = 0.$$

On a trois inconnues x_1 , x_2 et x_3 pour une seule équation : le système est sous-déterminé. Étant donné un triplet de solutions (x_1, x_2, x_3) , on pose :

$$\begin{cases} y_1 := x_1 - (x_2 + ix_3)(\dot{x}_2 - i\dot{x}_3) \\ y_2 := x_2 - ix_3 \end{cases}$$

où i désigne une racine carrée de -1 dans \mathbf{C} . On peut alors mener les calculs suivants. Par définition,

$$\dot{x}_1 = \overbrace{(x_2 + ix_3)}^{\bullet} \cdot \overbrace{(x_2 - ix_3)}^{\bullet}.$$

Par conséquent,

$$\overbrace{x_1 - (x_2 + ix_3) \cdot \overbrace{(x_2 - ix_3)}^{\bullet}}^{\bullet} = - (x_2 + ix_3) \cdot \overbrace{(x_2 - ix_3)}^{\bullet\bullet},$$

ce qui s'écrit aussi

$$\dot{y}_1 = -(x_2 + ix_3) \ddot{y}_2.$$

Ainsi, en tenant compte de $y_2 = x_2 - ix_3$, on a

$$x_3 = \frac{\frac{\dot{y}_1}{\ddot{y}_2} + y_2}{-2i}.$$

On en déduit facilement

$$x_2 = \frac{y_2 - \frac{\dot{y}_1}{\ddot{y}_2}}{2} \quad \text{et} \quad x_1 = y_1 - y_2 \frac{\dot{y}_1}{\ddot{y}_2}.$$

Réiproquement, on vérifie que si K est un **C**-algèbre différentielle, et si y_1 , y_2 et y_3 sont des éléments quelconques de K , vérifiant seulement $\ddot{y}_2 \neq 0$, et si on définit x_1 , x_2 et x_3 par les formules ci-dessus, alors on a

$$\dot{x}_1 - (\dot{x}_2)^2 - (\dot{x}_3)^2 = 0.$$

Les fonctions y_1 et y_2 associées aux x_i sont appelées des *sorties plates du système*. Elles paramétrisent les solutions. Ce système est un exemple de système différentiellement plat.

(9.6.3) La platitude via les espaces algébro-différentiels. Réinterprétons ce qui précède en nos termes. Notre anneau différentiel de base est $k = \mathbf{C}$. On note P le polynôme algébro-différentiel défini par

$$P(X_1, X_2, X_3) = X'_1 - (X'_2)^2 - (X'_3)^2.$$

On s'intéresse au **C**-espace algébro-différentiel Sol_P , qu'on a défini au paragraphe (9.5.5). C'est un sous-espace algébro-différentiel de $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{\partial,3}$. On définit un morphisme

$$f : \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{\partial,3} \longrightarrow \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{\partial,2}$$

en posant, pour toute **C**-algèbre différentielle K :

$$f_K : \begin{aligned} \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{\partial,3}(K) &\longrightarrow \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{\partial,2}(K) \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto (x_1 - (x_2 + ix_3)(x_2' - ix_3'), x_2 - ix_3) \end{aligned}$$

On veut maintenant construire « la réciproque » de f . Les calculs du paragraphe précédent montrent que pour définir cette réciproque, il faut pouvoir inverser « \ddot{y}_2 ». Si K est un corps et si $y_2 \in K$, une condition nécessaire et suffisante pour faire cela est $y''_2 \neq 0$. Plus généralement, si K est une **C**-algèbre différentielle quelconque, cela est équivalent à $y''_2 \in K^\times$. On considère maintenant V le sous-objet de $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{\partial,2}$ défini par

$$V(K) := \{(y_1, y_2) \in K^2 \mid y''_2 \in K^\times\} \quad \text{pour toute } \mathbf{C}\text{-algèbre différentielle } K.$$

Puis on définit un morphisme

$$g : V \longrightarrow \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{\partial,3}$$

en posant, pour toute **C**-algèbre différentielle K :

$$g_K : \begin{aligned} V(K) &\longrightarrow \mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{\partial,3}(K) \\ (y_1, y_2) &\longmapsto \left(y_1 - y_2 \frac{y'_1}{y''_2}, \quad \frac{y_2 - \frac{y'_1}{y''_2}}{2}, \quad \frac{\frac{y'_1}{y''_2} + y_2}{-2i} \right). \end{aligned}$$

Enfin, on considère U le sous-objet de Sol_P défini par

$$U(K) := \{(x_1, x_2, x_3) \in Sol_P(K) \mid (x_2 - ix_3)'' \in K^\times\}$$

pour toute \mathbf{C} -algèbre différentielle K . Les calculs précédents montrent alors que f et g sont des isomorphismes réciproques l'un de l'autre entre V et U . Ceci nous amène à la définition suivante :

Définition 9.6.1. Soit k un anneau différentiel et soient P_1, \dots, P_m des polynômes algébro-différentiels en n variables, à coefficients dans k . On dit que le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} P_1(f_1, \dots, f_n) & = & 0 \\ P_2(f_1, \dots, f_n) & = & 0 \\ \vdots & & \\ P_m(f_1, \dots, f_n) & = & 0 \end{array} \right.$$

est différentiellement plat s'il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que le k -espace algébro-différentiel $Sol_{(P_i)_i}$ soit « birationnel » à $\mathbf{A}_k^{\partial, p}$.

Précisons ce que signifie le terme « birationnel » : il signifie qu'il existe deux « ouverts denses » $U \hookrightarrow Sol_{(P_i)_i}$ et $V \hookrightarrow \mathbf{A}_p^{\partial, k}$ qui soient isomorphes en tant que k -espaces algébro-différentiels. Cependant, on n'a pas défini ce qu'est un ouvert d'un espace algébro-différentiel ; mais, on le fera dans le chapitre suivant (*cf.* la section (10.3)). En fait, il suffit même dans notre cas de définir ce qu'est un ouvert d'un espace algébro-différentiel affine, ce qui est plus simple.

9.7 Torseurs pour les espaces algébro-différentiels

(9.7.1) Groupe des automorphismes. Si \mathcal{C} est une catégorie et si X est un objet de \mathcal{C} , alors, on peut définir $\text{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$:

$$\text{Aut}_{\mathcal{C}}(X) := \left\{ X \xrightarrow{f} X \middle| \begin{array}{l} \exists X \xrightarrow{g} X \\ f \circ g = g \circ f = \text{Id}_X \end{array} \right\}.$$

C'est évidemment un groupe. Mais, ce groupe n'est pas forcément un objet de la catégorie de départ. Par exemple, si k est un corps et V un k -espace vectoriel, alors $\text{Aut}(V)$ n'a pas de structure « naturelle » de k -espace vectoriel ; si k est un anneau commutatif unitaire, $\text{Aut}_{\mathbf{Ann}}(k)$ n'a pas de structure « naturelle » d'anneau commutatif unitaire⁽⁶⁾, etc.

Dans le cas des espaces algébro-différentiels, ce n'est pas le cas ! Si k est un anneau différentiel et si X est un k -espace algébro-différentiel, alors $\text{Aut}_{\mathbf{Esp}_k^{\partial}}(X)$ apparaît naturellement comme l'ensemble des k -points d'un k -espace algébro-différentiel (en groupes).

Expliquons ceci en nous plaçant dans le cadre plus général des préfaisceaux au-dessus d'une catégorie. Ainsi, plus généralement, si \mathcal{C} est une catégorie et si $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Ens}$ est un préfaisceau sur \mathcal{C} , on définit le préfaisceau

$$\underline{\text{Aut}}(F)$$

⁽⁶⁾En particulier, le groupe de Galois d'une extension de corps galoisienne n'a pas de structure naturelle de corps.

comme suit. Si X est un objet de \mathcal{C} , on peut considérer la catégorie relative $\mathcal{C}^{\text{op}}/X$ et la restriction $F|_X$ de F à cette catégorie ; c'est le foncteur

$$F|_X : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{\text{op}}/X & \longrightarrow & \mathbf{Ens} \\ Y/X & \longmapsto & F(Y) \end{array}.$$

Le préfaisceau Aut(F) est alors défini par

$$\underline{\text{Aut}}(F)(X) := \text{Aut}(F|_X)$$

pour tout objet X de \mathcal{C} . C'est bien un préfaisceau car tout morphisme $X \rightarrow Y$ induit un foncteur « de changement de base » $\mathcal{C}^{\text{op}}/X \rightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}/Y$ et donc induit un morphisme

$$\text{Aut}(F|_Y) \rightarrow \text{Aut}(F|_X).$$

Si \mathcal{C} possède un objet final e , alors : Aut(F)(e) = Aut_{PréFaisc(\mathcal{C})(F).}

Ce qui précède s'applique aux k -espaces algébro-différentiels en considérant $\mathcal{C} = (\mathbf{Alg}_k^{\partial})^{\text{op}}$. La catégorie $(\mathbf{Alg}_k^{\partial})^{\text{op}}$ possède bien un objet final, à savoir k . Dans la suite, on notera encore Aut _{$\mathbf{Esp}_k^{\partial}$} (X) le k -espace algébro-différentiel ainsi défini. On peut vérifier qu'on dispose alors d'un morphisme « d'évaluation des automorphismes »

$$\text{Aut}_{\mathbf{Esp}_k^{\partial}}(X) \times X \rightarrow X.$$

En fait, de façon plus générale (et de façon similaire), si k est un anneau différentiel et si X et Y sont deux k -espaces algébro-différentiels, l'ensemble $\text{Hom}_{\mathbf{Esp}_k^{\partial}}(X, Y)$ peut être vu comme un k -espace algébro-différentiel, qu'on notera encore $\text{Hom}_{\mathbf{Esp}_k^{\partial}}(X, Y)$. On dispose encore de « morphismes d'évaluation »

$$\text{Hom}_{\mathbf{Esp}_k^{\partial}}(X, Y) \times Y \rightarrow Y,$$

et de flèches de composition

$$\text{Hom}_{\mathbf{Esp}_k^{\partial}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathbf{Esp}_k^{\partial}}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Esp}_k^{\partial}}(X, Z),$$

qui, sous ce point de vue, sont elles aussi des morphismes de k -espaces algébro-différentiels.

(9.7.2) Actions. Soit k un anneau différentiel. Soient G un k -groupe algébro-différentiel et X un k -espace algébro-différentiel. Une action à gauche de G sur X est un morphisme

$$G \times X \rightarrow X$$

tel que pour toute k -algèbre différentielle K , la flèche induite sur les K -points définisse une action à gauche de $G(K)$ sur $X(K)$. Dans le cas qui nous intéresse, on peut néanmoins donner une définition plus élégante de cette notion, dans l'esprit de ce que l'on a fait dans la section (9.4) :

Définition 9.7.1. Soit k un anneau différentiel, soit G un k -groupe algébro-différentiel en groupes et soit X un k -espace algébro-différentiel. Une action à gauche de G sur X est un morphisme

$$G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbf{Esp}_k^{\partial}}(X)$$

de k -groupes algébro-différentiels. On dit alors que X est un G -espace algébro-différentiel.

Soient k un anneau différentiel, G un k -espace algébro-différentiel et X un k -espace algébro-différentiel. Soit $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbf{Esp}_k^{\partial}}(X)$ une action à gauche de G sur X . Soient K une k -algèbre différentielle, $x \in X(K)$ et $g \in G(K)$: autrement dit, en faisant l'abus de notation annoncé au paragraphe 9.2.3, soit alors $(g, x) \in G \times X$. On note

$$g \cdot x := (K, \varphi_K(g)(x)).$$

C'est un point de X . Si Y est un autre G -espace algébro-différentiel, un morphisme $f : X \rightarrow Y$ sera alors dit G -équivariant si le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Aut}_{\mathbf{Esp}_k^{\partial}}(X) & & \\ \nearrow & f \circ & \searrow \\ G & & \text{Hom}_{\mathbf{Esp}_k^{\partial}}(X, Y) \\ \searrow & \circ f & \nearrow \\ & \text{Aut}_{\mathbf{Esp}_k^{\partial}}(Y) & \end{array}$$

commute. Autrement dit, si

$$\forall (g, x) \in G \times X, \quad f(g \cdot x) = g \cdot f(x).$$

On voit dans la forme de cette assertion la puissance et l'intérêt des définitions et des notations introduites en 9.2.3. On peut alors définir les torseurs.

Définition 9.7.2. Soient k un anneau différentiel, G un k -groupe algébro-différentiel et X un k -espace algébro-différentiel muni d'une action à gauche $G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbf{Esp}_k^{\partial}}(X)$ de G . On dit que X est un G -torseur si X est non-vide (ie si X a au moins un point) et si la flèche

$$G \times X \rightarrow X \times X$$

est un isomorphisme de k -espaces algébro-différentiels.

Cette flèche se définit aisément sur les points. C'est :

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \times X \\ (g, x) &\longmapsto (g \cdot x, x). \end{aligned}$$

Un k -espace algébro-différentiel non-vide est un G -torseur si, et seulement si, pour toute k -algèbre différentielle K , ou bien $X(K)$ est vide, ou bien l'action à gauche de $G(K)$ sur $X(K)$ fait de $X(K)$ un $G(K)$ -torseur.

On peut alors énoncer :

Proposition 9.7.3. Soit k un anneau différentiel et soit $A \in M_n(k)$. Alors, l'action à gauche de $GL_{n,k}^{cte}$ sur X_A définie par

$$\forall (C, U) \in GL_{n,k}^{cte} \times X_A, \quad C \cdot U = UC^{-1}$$

fait de X_A un $GL_{n,k}^{cte}$ -torseur.

Démonstration. — Soit K une k -algèbre différentielle. Supposons que $X_A(K)$ soit non-vide. Soient U_1 et U_2 dans $X_A(K)$. Montrons qu'il existe une unique matrice $C \in GL_n(C_K)$ telle que $U_1 = U_2 C^{-1}$. Cette matrice, si elle existe, et nécessairement unique puisqu'égale à

$(U_2^{-1}U_1)^{-1} = U_1^{-1}U_2$. Montrons qu'elle existe, en vérifiant que cette dernière matrice est toujours à coefficients constants :

$$\begin{aligned}(U_1^{-1}U_2)' &= -U_1^{-1}U_1'U_1^{-1}U_2 + U_1^{-1}U_2' \\ &= -U_1^{-1}AU_1U_1^{-1}U_2 + U_1^{-1}AU_2 \\ &= -U_1^{-1}AU_2 + U_1^{-1}AU_2 = 0.\end{aligned}$$

Enfin, il est classique que X_A est non-vide. ■

9.8 Espaces tangents des espaces algébro-différentiels

Pour définir les espaces tangents des espaces algébro-différentiels, on utilise les rappels faits dans la section (3.1) sur l'espace tangent en un point d'un schéma. Plus précisément, c'est le dernier point de vue, celui des points à valeurs dans l'algèbre non-réduite $k[\varepsilon]/\varepsilon^2$, que l'on va adopter. On ne l'a pas construit, mais, dans le cadre des schémas, on peut définir, si k est un anneau et si X est un k -schéma, un espace tangent « global » :

$$\begin{array}{ccc} TX & . & \\ \downarrow p & & \\ X & & \end{array}$$

Intuitivement, un point de TX est alors un couple (x, \vec{v}) , où x est « un point de X » et où \vec{v} est « un élément » de $T_x X$; de même⁽⁷⁾, si K est une k -algèbre, les K -points de TX correspondent à $X(K[\varepsilon]/\varepsilon^2)$.

On se place maintenant dans le cadre algébro-différentiel. Soit donc k un anneau différentiel. La première question qu'on se pose est :

Quel est l'analogie différentiel de $k[\varepsilon]/\varepsilon^2$?

Il y a, en effet, plusieurs choix possibles. Tout d'abord, l'anneau $k[\varepsilon]/\varepsilon^2$ possède une infinité de structures de k -algèbres différentielles. La dérivée de ε^2 est nécessairement nulle et on a donc : $2 \cdot \varepsilon\varepsilon' = 0$. Ainsi, en supposant que la caractéristique de k n'est pas 2, on voit que ε' appartient nécessairement à (ε) . Réciproquement, n'importe quel élément de (ε) convient comme dérivée pour ε . Autrement dit :

Fait 9.8.1. *Soit k un anneau différentiel de caractéristique différente de 2. Alors, la seule façon de munir $k[\varepsilon]/\varepsilon^2$ d'une structure de k -algèbre différentielle consiste à poser :*

$$\varepsilon' = \lambda\varepsilon \quad \text{avec } \lambda \in k.$$

En dehors de cette infinité de choix possibles, il y a encore un autre analogue différentiel de $k[\varepsilon]/\varepsilon^2$. Son avantage sur les analogues précédents est qu'il n'y a qu'un choix possible pour la dérivée de ε . Il s'agit de la k -algèbre différentielle

$$k\langle\varepsilon\rangle/\langle\varepsilon^2\rangle.$$

où $k\langle\varepsilon\rangle := k[\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \dots]$ est la k -algèbre de polynômes différentiels en la variable ε et où $\langle\varepsilon^2\rangle$ est l'idéal différentiel engendré par ε^2 . L'inconvénient de cette algèbre est qu'elle est beaucoup plus compliquée que celles qu'on a introduites plus haut !

En fait, le bon analogue est $k[\varepsilon]/\varepsilon^2$ avec $\varepsilon' = 0$, comme le montre la proposition suivante, dont on mesurera l'importance plus loin.

⁽⁷⁾Pour que le résultat soit strictement vrai, il faut faire des hypothèses sur le morphisme $\overline{i_x}$.

Proposition 9.8.2. Soient k un anneau différentiel possédant une primitive de 1 et A une k -algèbre différentielle engendrée au-dessus de k par un élément $\varepsilon \in A$ vérifiant $\varepsilon^2 = 0$. Une condition nécessaire est suffisante pour que l'application

$$\begin{aligned} k &\longrightarrow A \\ f &\longmapsto f + \varepsilon \cdot f' \end{aligned}$$

soit un morphisme de k -algèbres différentielles est que $\varepsilon' = 0$.

Démonstration. — Une telle application est toujours un morphisme d'algèbres puisque

$$(f + \varepsilon \cdot f')(g + \varepsilon \cdot g') = fg + \varepsilon \cdot (f'g + g'f) + \varepsilon^2 f'g' = fg + \varepsilon(fg)'.$$

Pour qu'en plus ce morphisme respecte les structures différentielles, il faut que

$$(f + \varepsilon \cdot f')' = f' + \varepsilon \cdot f''$$

$$\text{et donc que } \varepsilon' \cdot f' = 0 \quad \text{pour tout } f \in A.$$

En considérant $f \in k$ tel que $f' = 1$, on voit que ε' est nécessairement nul. ■

Ceci étant dit, lorsqu'on considérera dans la suite la k -algèbre $k[\varepsilon]/\varepsilon^2$ et qu'on voudra la voir comme k -algèbre différentielle, on la munira toujours de la dérivée définie par $\varepsilon' = 0$. On peut maintenant en venir à la définition :

Définition 9.8.3. Soient k un anneau différentiel et X un k -espace algébro-différentiel. Le fibré tangent de X , noté TX est le k -espace algébro-différentiel défini par

$$TX(K) := X(K[\varepsilon]/\varepsilon^2) \quad \text{pour toute } k\text{-algèbre différentielle } K.$$

Il est muni d'un morphisme canonique, qu'on appelle projection canonique de TX ,

$$\begin{array}{ccc} TX & \longrightarrow & . \\ \downarrow \pi_X & & \\ X & & \end{array}$$

La flèche π_X est définie comme suit. On dispose, pour toute k -algèbre différentielle K , d'un morphisme de k -algèbres différentielles

$$\begin{aligned} p_{\varepsilon=0} : \quad K[\varepsilon]/\varepsilon^2 &\longrightarrow K \\ \varepsilon &\longmapsto 0 \end{aligned}.$$

Par fonctorialité, ce morphisme induit, si X est un k -espace algébro-différentiel, une flèche

$$X(K[\varepsilon]/\varepsilon^2) \longrightarrow X(K).$$

Autrement dit, ce morphisme induit une flèche $(\pi_X)_K : TX(K) \longrightarrow X(K)$. Comme, pour tout morphisme de k -algèbres différentielles $\phi : K_1 \longrightarrow K_2$, le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} K_2 & & TX(K_2) & \xrightarrow{(\pi_X)_{K_2}} & X(K_2) \\ \uparrow \phi & & TX(\phi) \uparrow & & \uparrow X(\phi) \\ K_1 & & TX(K_1) & \xrightarrow{(\pi_X)_{K_1}} & X(K_1) \end{array}$$

commute, la collection de flèches $((\pi_X)_K)_K$ définit bien un morphisme de k -espaces algébro-différentiels

$$\begin{array}{ccc} TX & \cdot \\ \downarrow \pi_X & & \\ X & & \end{array}$$

Intuitivement, un « point de TX » consiste en un couple (x, \vec{v}) où « x est un point de X » et où « \vec{v} est un vecteur tangent à X en x ». Le morphisme π_X est alors simplement la flèche qui à (x, \vec{v}) associe x .

(9.8.1) Espace tangent en un point. Pour rendre ceci plus formel, il nous faut définir ce qu'est l'espace tangent en un point. On commence par une définition provisoire :

Soit k un anneau différentiel et X un k -espace algébro-différentiel. Soit $x \in X$. On appelle espace tangent provisoire à X au point x , noté $T_x^{(prov)}X$, l'image inverse de x par π_X :

$$T_x^{(prov)}X := \{v \in TX \mid \pi_X(v) = x\}.$$

Cet objet $T_x^{(prov)}X$ est un ensemble. Plus précisément, si K est une k -algèbre différentielle et si $x \in X(K)$, alors, on a :

$$T_x^{(prov)}X \subset X(K[\varepsilon]/\varepsilon^2).$$

C'est un peu insatisfaisant. On peut en fait faire mieux et définir un espace tangent T_xX qui est un K -espace algébro-différentiel vérifiant

$$T_xX(K) = T_x^{(prov)}X.$$

On procède comme suit : si L est une K -algèbre différentielle, ie si l'on dispose d'un morphisme $K \rightarrow L$, alors on dispose naturellement d'une flèche $X(K) \rightarrow X(L)$ qui nous permet de voir les K -points de X comme des L -points. Ainsi, on définit $T_xX(L)$ comme l'ensemble des L -points v de TX tel que $\pi_X(v)$ coïncide avec x dans $X(L)$. Plus précisément, si on note $i : X(K) \rightarrow X(L)$, on a donc le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X(K) & & \\ \searrow i & & \\ & X(L); & \\ & \nearrow (\pi_X)_L & \\ TX(L) & & \end{array}$$

on pose alors :

$$T_xX(L) := \{v \in TX(L) \mid (\pi_X)_L(v) = i(x)\}.$$

Définition 9.8.4. Soient k un anneau différentiel, X un k -espace algébro-différentiel et soit $x \in X$ un point de X . L'espace tangent à X en x est le $\kappa(x)$ -espace algébro-différentiel défini tel que ci-dessus. On le note T_xX .

(9.8.2) Champs de vecteurs. Maintenant qu'on sait ce qu'est l'espace tangent à X en un point, on peut définir les champs de vecteurs ; intuitivement, ce sont les applications qui à tout « point x de X » associent « de façon régulière » « un vecteur tangent X en x ». Techniquement :

Définition 9.8.5. Soient k un anneau différentiel et X un k -espace algébro-différentiel. Un champ de vecteurs défini sur X est une section s de π_X , autrement dit un morphisme

$$\begin{array}{ccc} TX & & \\ s \swarrow \downarrow \pi_X & , & \\ X & & \end{array}$$

vérifiant $\pi_X \circ s = \text{Id}_X$.

Évidemment, si X est un k -espace algébro-différentiel, si $s = \vec{\mathcal{V}}$ est un champ de vecteurs défini sur X et si $x \in X$ est un point de X , on peut définir

$$\vec{\mathcal{V}}(x) \in T_x X.$$

C'est simplement l'image de x par s .

(9.8.3) Fonctorialité du fibré tangent. La construction qui à $X \in \mathbf{Esp}_k^\partial$ associe son fibré tangent TX est fonctorielle. En effet, si k est un anneau différentiel, si X et Y sont deux espaces algébro-différentiels et $\varphi : X \longrightarrow Y$ un morphisme entre eux, on définit facilement

$$T\varphi : TX \longrightarrow TY$$

comme suit : si K est une k -algèbre différentielle, sur les K -points, il s'agit tout simplement de la flèche

$$\begin{array}{ccc} (T\varphi)_K & : & TX(K) \longrightarrow TY(K) \\ \parallel & & \parallel \\ \varphi_{K[\varepsilon]/\varepsilon^2} & : & X(K[\varepsilon]/\varepsilon^2) \longrightarrow Y(K[\varepsilon]/\varepsilon^2) \end{array}$$

Elle porte un nom :

Définition 9.8.6. Soient k un anneau différentiel, X et Y deux k -espaces algébro-différentiels et $\varphi : X \longrightarrow Y$ un morphisme entre X et Y . La différentielle de φ , notée $T\varphi$ est l'image de φ par le foncteur « fibré tangent ». On a

$$T\varphi : TX \longrightarrow TY.$$

On vérifie facilement que la différentielle de φ fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} TX & \xrightarrow{T\varphi} & TY \\ \downarrow \pi_X & & \downarrow \pi_Y \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array} :$$

c'est une conséquence de la « fonctorialité » de la flèche φ . Cela signifie simplement que, si K est une k -algèbre différentielle, alors $(T\varphi)_K$ envoie $T_x X(K)$ dans $T_{\varphi(x)} Y(K)$. On note et définit alors :

Définition 9.8.7. Soient k un anneau différentiel, X et Y deux k -espaces algébro-différentiels et $\varphi : X \longrightarrow Y$ un morphisme entre X et Y . Soit $x \in X$ un point de X . La différentielle de φ en x , notée $T_x\varphi$ est la « restriction » de $T\varphi$ à T_xX . On a :

$$T_x\varphi : T_xX \longrightarrow T_{\varphi(x)}Y .$$

(9.8.4) Dérivation des points. Une nouveauté, dans le cadre des espaces algébro-différentiels, par rapport au cadre non-différentiel, est qu'on peut dériver les points ! Plus précisément : si k est un anneau différentiel et K une k -algèbre différentielle, on considère le morphisme (*cf.* la proposition 9.8.2) :

$$\begin{aligned} K &\longrightarrow K[\varepsilon]/\varepsilon^2 \\ f &\longmapsto f + f'\varepsilon . \end{aligned}$$

qu'on note $\exp(\varepsilon\partial)_1$. On a :

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\text{Id}_K} & K \\ \parallel & & \parallel \\ K & \xrightarrow{\exp(\varepsilon\partial)_1} & K[\varepsilon]/\varepsilon^2 \xrightarrow{p_{\varepsilon=0}} K \end{array}$$

de sorte qu'on peut définir :

Définition 9.8.8. Soient k un anneau différentiel et X un k -espace algébro-différentiel. On appelle dérivée de X , qu'on note ∂_X le morphisme

$$X \xrightarrow{\partial_X} TX$$

induit par $\exp(\varepsilon\partial)_1$. C'est un champ de vecteurs défini sur X . Si $f \in X$, on note aussi

$$\nabla f := \partial_X(f) .$$

Cette notion de dérivation sur X nous permet de transposer au cas algébro-différentiel le cadre des équations différentielles autonomes associées à un champ de vecteurs. En effet, classiquement, si M est une variété différentielle et si $\vec{\mathcal{V}}$ est un champ de vecteurs défini sur M , on peut regarder l'équation différentielle

$$\dot{y} = \vec{\mathcal{V}}(y) .$$

C'est le type d'équations différentielles auquel on s'intéressait dans le paragraphe (3.4) sur le théorème de Cauchy-Lipschitz. Dans le cas algébro-différentiel, si k est un anneau différentiel, si X est un k -espace algébro-différentiel et si $\vec{\mathcal{V}}$ est un champ de vecteurs défini sur X , on définit comme suit le k -espace algébro-différentiel des solutions de $\dot{y} = \vec{\mathcal{V}}(y)$:

$$\boxed{\begin{aligned} X_{\dot{y} = \vec{\mathcal{V}}(y)} &\xrightarrow{\text{Alg}_k^\partial} \text{Ens} \\ X_\bullet &: K \longmapsto \left\{ f \in X(K) \mid \nabla f = \vec{\mathcal{V}}(f) \right\} . \end{aligned}}$$

9.9 Espaces tangents d'ordre supérieur et voisinage formel d'un point

(9.9.1) Généralisation aux ordres supérieurs. Tout ce qu'on vient de faire peut être généralisé aux ordres supérieurs. Soient k une \mathbf{Q} -algèbre différentielle⁽⁸⁾, K une k -algèbre différentielle et $n \in \mathbf{N}_{\geq 1}$ un entier non-nul quelconque. Au lieu de considérer la suite

$$K \xrightarrow{\exp(\varepsilon\partial)_1} K[\varepsilon]/\varepsilon^2 \xrightarrow{p_{\varepsilon=0}} K ,$$

on considère la suite, plus générale :

$$K \xrightarrow{\exp(\varepsilon\partial)_n} K[\varepsilon]/\varepsilon^{n+1} \xrightarrow{p_{\varepsilon=0}} K ,$$

définie par

$$\exp(\varepsilon\partial)_n(f) := \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}}{i!} \varepsilon^i \quad \text{et} \quad p_{\varepsilon=0} \left(\sum_{i=0}^n a_i \varepsilon^i \right) := a_0 .$$

Le fait que $\exp(\varepsilon\partial)_n$ soit un morphisme découle du lemme 9.9.3, qu'on démontrera plus loin. Avec ces notations, on définit :

Définition 9.9.1. Soient k une \mathbf{Q} -algèbre différentielle et X un k -espace algébro-différentiel. Le n -ième fibré tangent de X , qu'on note $T^n X$ est le k -espace algébro-différentiel défini par

$$T^n X(K) := X(K[\varepsilon]/\varepsilon^n) \quad \text{pour toute } k\text{-algèbre différentielle } K .$$

Il est muni d'une flèche canonique, qu'on appelle projection canonique de $T^n X$

$$\begin{array}{ccc} T^n X & & \\ \downarrow \pi_{X,n} & & \\ X & & \end{array}$$

induite par le morphisme $p_{\varepsilon=0}$. L'application $X \mapsto T^n X$ est fonctorielle. Si Y est un autre k -espace algébro-différentiel et $\varphi : X \longrightarrow Y$ un morphisme, on appelle n -ième différentielle de φ l'image par T^n de ce morphisme

$$T^n \varphi : T^n X \longrightarrow T^n Y .$$

On dispose d'une section canonique de $\pi_{X,n}$, qu'on appelle n -ième dérivée de X et qu'on note

$$\begin{array}{ccc} T^n X & & . \\ \uparrow \partial_X^n & \downarrow \pi_{X,n} & \\ X & & \end{array}$$

Si K est une k -algèbre différentielle et si $f \in X(K)$, on note aussi

$$\nabla_n f := \partial_X^n(f) .$$

⁽⁸⁾On pourrait se passer de cette hypothèse — pour considérer juste k un anneau différentiel, quitte à considérer des dérivations de Hasse-Schmidt au lieu des dérivations classiques.

(9.9.2) Passage à la limite. En fait, on peut rassembler en une seule construction ce qu'on vient de faire pour chaque $n \in \mathbf{N}_{\geq 1}$. Pour ce faire, on a besoin du lemme suivant. L'application $\exp \varepsilon \partial$ apparaît, entre autres, dans [Gilo2].

(9.9.3) Lemme. Soient k une \mathbf{Q} -algèbre différentielle et K une k -algèbre différentielle. Alors, l'application

$$\begin{aligned} K &\longrightarrow K[[\varepsilon]] \\ \exp(\varepsilon \partial) : f &\longmapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}}{i!} \varepsilon^i \end{aligned}$$

est un morphisme d'anneaux différentiels.

Avant d'en venir à la preuve de ce lemme, faisons quelques remarques sur $K[[\varepsilon]]$. C'est l'anneau des séries formelles en la variable ε , dont la dérivée est définie par $\varepsilon' = 0$. Contrairement à ce qui précède, et à ce que la notation pourrait laisser croire, l'élément ε n'est pas nilpotent. On a noté la variable ε — et non t ou x , comme le voudrait l'usage — car cette algèbre $K[[\varepsilon]]$ généralise, d'une certaine manière les $K[\varepsilon]/\varepsilon^n$. On va voir en effet que les espaces algébro-différentiels qu'on construira par son entremise sont fortement liés aux fibrés tangents d'ordre n , les $T^n X$. De plus, s'il est vrai que, formellement, dans ce cadre, ε n'est pas nilpotent, c'est-à-dire que, s'il est vrai qu'on n'a pas

$$\exists N \in \mathbf{N}, \quad \varepsilon^N = 0,$$

on a en revanche que

$$\ll \varepsilon^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \text{ suffisamment rapidement} \gg.$$

En effet, pour tout $(a_i)_{i \in \mathbf{N}} \in K^{\mathbf{N}}$, la série $\sum_i a_i \varepsilon^i$ « converge » ! Enfin, de la même manière qu'on a pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $m \geq n$ un morphisme de troncature

$$p_{m \rightarrow n} : K[\varepsilon]/\varepsilon^m \longrightarrow K[\varepsilon]/\varepsilon^n,$$

on a aussi, pour tout $n \in \mathbf{N}$, un morphisme

$$\begin{aligned} K[[\varepsilon]] &\longrightarrow K[\varepsilon]/\varepsilon^n \\ p_{\infty \rightarrow n} : \sum_{i=0}^{\infty} a_i \varepsilon^i &\longmapsto \sum_{i=0}^{n-1} a_i \varepsilon^i. \end{aligned}$$

de troncature. L'existence de ces morphismes de nature analogue n'est en fait pas du tout un hasard — et on terminera sur ce point pour illustrer l'analogie entre $K[[\varepsilon]]$ et les $K[\varepsilon]/\varepsilon^n$. En effet :

Proposition 9.9.2. Soit K un anneau différentiel. Alors, $K[[\varepsilon]]$, muni des morphismes $p_{\infty \rightarrow n}$, est la limite projective — dans la catégorie \mathbf{Ann}^∂ — du système des $K[\varepsilon]/\varepsilon^n$, muni des flèches $p_{m \rightarrow n}$. On écrit :

$$K[[\varepsilon]] = \varprojlim_n K[\varepsilon]/\varepsilon^n.$$

Démonstration. — Il suffit de vérifier que, si A est un anneau différentiel et si $(\varphi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une famille de morphismes, avec $\varphi_n \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}^\partial}(A, K[\varepsilon]/\varepsilon^n)$ pour tout n , vérifiant

$$\begin{array}{ccc} \forall n \in \mathbf{N}, \forall m \geq n & A & \xrightarrow{\varphi_m} K[\varepsilon]/\varepsilon^m \\ & \searrow \varphi_n & \downarrow p_{m \rightarrow n} \\ & K[\varepsilon]/\varepsilon^n & \end{array}$$

alors, il existe un unique morphisme $\varphi : A \longrightarrow K[[\varepsilon]]$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\varphi_m} & K[[\varepsilon]]/\varepsilon^m \\
 \parallel & & \parallel \\
 A & \xrightarrow{\varphi} K[[\varepsilon]] & \xrightarrow{p_{\infty \rightarrow m}} K[[\varepsilon]]/\varepsilon^m \\
 & & \searrow p_{\infty \rightarrow n} \\
 & & K[[\varepsilon]]/\varepsilon^n
 \end{array} .$$

La construction de ce morphisme φ se fait ainsi : pour chaque $f \in A$, les « polynômes tronqués de longueur n » $\varphi_n(f)$ sont compatibles les uns avec les autres, d'après la condition de commutation imposée aux φ_n . Ils définissent donc une unique série formelle qui s'envoie sur eux : c'est cet élément qu'on appelle $\varphi(f)$. On vérifie facilement que ce φ convient. ■

Revenons à notre lemme :

Démonstration du lemme 9.9.3. — Démontrons que

$$\exp(\varepsilon \partial)(fg) = \exp(\varepsilon \partial)(f) \cdot \exp(\varepsilon \partial)(g).$$

Soit $i \in \mathbf{N}$: dans la série de gauche, le coefficient de ε^i est $\frac{(fg)^{(i)}}{i!}$; dans la série de droite, c'est :

$$\sum_{k+l=i} \frac{f^{(k)}}{k!} \frac{g^{(l)}}{l!}.$$

Les deux quantités sont bien égales, car la formule de Leibniz dit exactement que

$$(fg)^{(i)} = \sum_{j=0}^i \binom{j}{i} f^{(j)} g^{(i-j)}.$$

■

Tout ceci nous permet de définir les objets suivants :

Définition 9.9.3. Soient k une \mathbf{Q} -algèbre différentielle et X un k -espace algébro-différentiel. On définit comme précédemment $T^\infty X$ le fibré tangent infini par

$$T^\infty X(K) := X(K[[\varepsilon]]) \quad \text{pour toute } k\text{-algèbre différentielle } K.$$

Il est muni d'une flèche canonique, qu'on appelle projection canonique de $T^\infty X$

$$\begin{array}{ccc}
 T^\infty X & & \\
 \downarrow \pi_{X,\infty} & & \\
 X & &
 \end{array}$$

induite par le morphisme $p_{\varepsilon=0}$. L'application $X \mapsto T^\infty X$ est fonctorielle. Si Y est un autre k -espace algébro-différentiel et $\varphi : X \longrightarrow Y$ un morphisme, on appelle différentielle infinie de φ l'image par T^∞ de ce morphisme

$$T^\infty \varphi : T^\infty X \longrightarrow T^\infty Y.$$

On dispose d'une section canonique de $\pi_{X,\infty}$, qu'on appelle dérivée infinie de X et qu'on note

$$\begin{array}{ccc}
 T^\infty X & & \\
 \downarrow \pi_{X,\infty} & \nearrow \delta_X^\infty & \\
 X & &
 \end{array}$$

Si K est une k -algèbre différentielle et si $f \in X(K)$, on note aussi

$$\nabla_\infty f := \partial_X^\infty(f).$$

(9.9.4) Voisinage formel. Cette notion d'espace tangent d'ordre infini est en fait reliée à la notion de voisinage formel. Fixons k une \mathbf{Q} -algèbre différentielle, X un k -espace algébro-différentiel ; fixons K une k -algèbre différentielle et $x \in X(K)$ un K -point de X . De même qu'on a défini $T_x X$, on pourrait en effet définir les espaces tangents à X en x d'ordre supérieur, les $T_x^n X$. Puis, de même que $K[[\varepsilon]]$ est la limite projective des $K[\varepsilon]/\varepsilon^n$, on peut concevoir « intuitivement » l'ensemble

$$\{v \in T^\infty X(K) \mid (\pi_{X,\infty})(v) = x\}$$

comme la limite inductive (c'est-à-dire la réunion avec identification des éléments qui sont censés être égaux) des $T_x^n X(K)$. Il s'agit donc, intuitivement, de la réunion des approximations successives de l'espace X au voisinage de x . Ainsi, on définit :

Définition 9.9.4. Soient k une \mathbf{Q} -algèbre différentielle, X un k -espace algébro-différentiel et $x \in X$. On appelle voisinage formel de x (dans X) et on note $\widehat{X,x}$ le $\kappa(x)$ -espace algébro-différentiel défini par :

$$\widehat{X,x}(K) := \left\{ x_\infty \in T(K[[\varepsilon]]) \mid \begin{array}{l} \text{l'image par } (\pi_{X,\infty})_K \text{ de } x_\infty \\ \text{égale l'image par } X(\kappa(x)) \longrightarrow X(K) \text{ de } x \end{array} \right\}$$

pour toute $\kappa(x)$ -algèbre différentielle K .

On pourra faire le rapprochement entre cet objet et le complété formel d'un schéma le long d'une partie fermée, tel qu'il est défini dans le paragraphe §10.8 [EGA I] ou dans la section II.9 de [Har77]. Via ce point de vue, on a donc accès à un objet qui peut jouer le rôle de l'anneau différentiel des germes en x de fonctions régulières de X . C'est

Définition 9.9.5. Soient k une \mathbf{Q} -algèbre différentielle, X un k -espace algébro-différentiel et $x \in X$. On appelle anneau (différentiel) des germes formels en x , et on note $\widehat{\mathcal{O}_{X,x}}$ la $\kappa(x)$ -algèbre différentielle

$$\widehat{\mathcal{O}_{X,x}} := \mathcal{O}(\widehat{X,x}).$$

On peut définir dans cet anneau l'idéal \mathfrak{M}_x des fonctions qui s'annulent en x . En effet, x peut être vu comme un point de $\widehat{X,x}$; plus précisément, x peut être vu comme un $\kappa(x)$ -point de $\widehat{X,x}$. On dispose du morphisme d'inclusion $i : \kappa(x) \longrightarrow \kappa(x)[[\varepsilon]]$. Il induit une flèche $X(\kappa(x)) \longrightarrow X(\kappa(x)[[\varepsilon]])$. On vérifie alors facilement que l'image de x par cette flèche est bien dans $\widehat{X,x}(\kappa(x))$. L'idéal \mathfrak{M}_x est alors simplement défini par

$$\mathfrak{M}_x := \left\{ \varphi \in \widehat{\mathcal{O}_{X,x}} \mid \varphi(x) = 0 \right\}.$$

9.10 Dérivée logarithmique d'un k -groupe algébro-différentiel

(9.10.1) Algèbre de Lie. Soit k un anneau différentiel et G un k -groupe algébro-différentiel, c'est-à-dire : soit G un foncteur

$$G : \mathbf{Alg}_k^\partial \longrightarrow \mathbf{Grp}.$$

De tels objets sont, on l'a déjà dit, très généraux. On veut construire l'« algèbre de Lie » de G — et on veut que cette « algèbre de Lie » soit une algèbre de Lie, c'est-à-dire qu'elle soit de façon naturelle un k -module muni d'un crochet de Lie. Avant de s'intéresser aux structures que portent un tel objet, définissons-le : comme espace k -algébro-différentiel, l'algèbre de Lie est l'espace tangent de G en e :

$$\langle \text{Lie } (G) := T_e G \rangle.$$

Plus précisément, comme G est un k -groupe, pour toute k -algèbre différentielle K , l'ensemble $G(K)$ porte une structure de groupe. On note e_K le neutre du groupe $G(K)$. Lorsqu'on écrit simplement e , il s'agit de e_k . On parlera aussi de *section unité* e , dans la mesure où la donnée des unités e_K pour toute K -algèbre différentielle K définit un morphisme $\underline{\text{diff-Spec}} k \rightarrow G$:

$$\begin{array}{ccc} & G & \\ e \swarrow & \downarrow & \\ & k & \end{array}$$

Ainsi, l'algèbre de Lie de G est définie par, si K est une k -algèbre différentielle,

$$\text{Lie } (G)(K) := \left\{ p \in G(K[\varepsilon]/\varepsilon^2) \mid \begin{array}{l} G(K[\varepsilon]/\varepsilon^2) \xrightarrow{p_{\varepsilon=0}} G(K) \\ p \mapsto e_K \end{array} \right\}.$$

Comme G est un foncteur de la catégorie \mathbf{Alg}_k^∂ dans \mathbf{Grp} , au morphisme de k -algèbres différentielles $p_{\varepsilon=0}^K : K[\varepsilon]/\varepsilon^2 \rightarrow K$ correspond un morphisme *de groupes*, qu'on note encore ici, abusivement

$$p_{\varepsilon=0}^K : G(K[\varepsilon]/\varepsilon^2) \rightarrow G(K).$$

En particulier, la définition de $\text{Lie } (G)$ peut s'écrire :

$$\text{Lie } (G)(K) = \text{Ker } (p_{\varepsilon=0}^K).$$

On voit ainsi que $\text{Lie } (G)$ est naturellement muni d'une structure de k -groupe algébro-différentiel. Cette structure de groupe correspond à l'addition de deux vecteurs tangents. Malheureusement, il n'y a aucune raison *a priori* pour que cette loi de groupe soit commutative.

Avant de passer à la suite, rappelons que si

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ & \downarrow p & \\ B & \xrightarrow{q} & C \end{array}$$

est un diagramme de la catégorie \mathbf{Ens} ou \mathbf{Grp} , alors, un produit fibré de A et B au-dessus de C est

$$A \times_C B = \{(a, b) \in A \times B \mid p(a) = q(b)\},$$

muni des projections évidentes.

(9.10.2) Condition de Schlessinger. Commençons par remarquer que le carré de groupes suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Lie}(G)(K) & \longrightarrow & G(K[\varepsilon]/\varepsilon^2) \\ \downarrow & & \downarrow p_{\varepsilon=0} \\ \{e_K\} & \longrightarrow & G(K) \end{array}$$

est cartésien. Dans ces conditions très générales, aucun élément ne permet de nous assurer que la loi de groupe de $\mathrm{Lie}(G)$ est commutative. On va donc imposer, à cet effet, des conditions sur le foncteur G . Ces conditions sont à rapprocher de la condition (E) que donne Michel Demazure dans la définition 3.5 de son exposé II dans [SGA3I] — ainsi que des conditions que Michael Schlessinger énonce dans [Sch68].

Définition 9.10.1. Soient k un anneau différentiel et G un k -groupe algébro-différentiel. On dit que G vérifie la propriété (S) si pour toute k -algèbre différentielle K , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G(K[\varepsilon_1, \varepsilon_2]/(\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2, \varepsilon_1\varepsilon_2)) & \xrightarrow{\varepsilon_2=0} & G(K[\varepsilon_1]/\varepsilon_1^2) \\ \varepsilon_1=0 \downarrow & & \downarrow \varepsilon_1=0 \\ G(K[\varepsilon_2]/\varepsilon_2^2) & \xrightarrow{\varepsilon_2=0} & G(K) \end{array}$$

est cartésien.

(9.10.3) Première remarque. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K[\varepsilon_1, \varepsilon_2]/(\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2, \varepsilon_1\varepsilon_2) & \xrightarrow{\varepsilon_2=0} & K[\varepsilon_1]/\varepsilon_1^2 \\ \varepsilon_1=0 \downarrow & & \downarrow \varepsilon_1=0 \\ K[\varepsilon_2]/\varepsilon_2^2 & \xrightarrow{\varepsilon_2=0} & K \end{array}$$

est un diagramme cartésien⁽⁹⁾ de k -algèbres différentielles. Ainsi ce que l'on demande est que le foncteur G conserve son caractère cartésien. En particulier, si G transforme tout carré cartésien en carré cartésien, alors G vérifie la condition (S). C'est en particulier le cas si G est représentable :

Fait 9.10.2. Soit k un anneau différentiel. Si G est k -groupe algébro-différentiel représentable, alors G vérifie la condition (S).

⁽⁹⁾ Ceci n'est pas en contradiction avec ce qu'on a dit dans le paragraphe (8.1.1) : si A est un anneau, alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A[\varepsilon_1, \varepsilon_2]/(\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2) & \longleftarrow & A[\varepsilon_2]/\varepsilon_2^2 \\ \uparrow & & \uparrow \\ A[\varepsilon_1]/\varepsilon_1^2 & \longleftarrow & A \end{array}$$

est cocartésien et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A[\varepsilon_1, \varepsilon_2]/(\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2, \varepsilon_1\varepsilon_2) & \longrightarrow & A[\varepsilon_2]/\varepsilon_2^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ A[\varepsilon_1]/\varepsilon_1^2 & \longrightarrow & A \end{array}$$

est cartésien.

Démonstration. — En fait, si G est représentable, G commute à toutes les limites car G admet un adjoint à gauche. Cet adjoint est

$$\begin{aligned} A^- : \mathbf{Ens} &\longrightarrow \mathbf{Alg}_k^\partial, \\ E &\longmapsto A^E, \end{aligned}$$

comme on le vérifie facilement (A^E désigne la k -algèbre différentielle des fonctions de E dans A). ■

(9.10.4) Deuxième remarque. On n'a pas précisé s'il s'agissait d'un diagramme cartésien dans la catégorie **Ens** ou dans **Grp**. En fait, les deux conditions sont équivalentes. Plus précisément, et plus généralement, on sait en effet qu'un *carré commutatif dans **Grp** est cartésien dans **Ens** si, et seulement si, il l'est dans **Grp***.

La condition (S) entraîne en particulier que :

$$\begin{aligned} G(K[\varepsilon_1, \varepsilon_2]/(\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2, \varepsilon_1\varepsilon_2)) \\ \text{est isomorphe, en tant que groupe, à} \\ G(K[\varepsilon_1]/\varepsilon_1^2) \times_{G(K)} G(K[\varepsilon_2]/\varepsilon_2^2). \end{aligned}$$

Si l'on demande en plus que cet isomorphisme soit compatible avec les morphismes de projections, alors, la condition (S) est équivalente à cet énoncé.

On a alors la proposition :

Proposition 9.10.3. Soient k un anneau différentiel, G un k -groupe algébro-différentiel vérifiant la propriété (S) et K une k -algèbre différentielle. Alors, le groupe

$$\left\{ g \in G(K[\varepsilon]/\varepsilon^2) \mid \begin{array}{l} G(K[\varepsilon]/\varepsilon^2) \xrightarrow{p_{\varepsilon=0}} G(K) \\ g \longmapsto e_K \end{array} \right\}$$

est commutatif. Autrement dit, $\text{Lie}(G)$ est un k -groupe algébro-différentiel commutatif.

Démonstration. — Soient k un anneau différentiel et G un k -groupe algébro-différentiel vérifiant la propriété (S) . Soit K une k -algèbre différentielle. Pour les besoins de cette démonstration, on note

$$\begin{aligned} L(K[\varepsilon]/\varepsilon^2) &= \{x \in G(K[\varepsilon]/\varepsilon^2) \mid p_{\varepsilon=0}(x) = e_K\} \\ L(K[\varepsilon_1, \varepsilon_2]/(\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2, \varepsilon_1\varepsilon_2)) &= \left\{x \in G(K[\varepsilon_1, \varepsilon_2]/(\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2, \varepsilon_1\varepsilon_2)) \mid \begin{array}{l} p_{\varepsilon_1=0}(x) = e_K \\ p_{\varepsilon_2=0}(x) = e_K \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on note aussi, très provisoirement, et pour des raisons de légèreté :

$$\begin{aligned} G &:= G(K) & G_\varepsilon &:= G(K[\varepsilon]/\varepsilon^2) & G_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} &:= G(K[\varepsilon_1, \varepsilon_2]/(\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2, \varepsilon_1\varepsilon_2)) \\ e &:= \{e_K\} & L_\varepsilon &:= L(K[\varepsilon]/\varepsilon^2) & L_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} &:= L(K[\varepsilon_1, \varepsilon_2]/(\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2, \varepsilon_1\varepsilon_2)) \end{aligned}$$

Avec ces notations, et en utilisant le formalisme des carrés cartésiens, on peut exprimer une partie de ce qui précède (et en particulier le fait que G vérifie la propriété (S)) « au niveau

K ») en disant que, dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 L_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} & \xrightarrow{\quad} & G_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} & & \\
 \searrow & & \downarrow & \nearrow & \\
 & L_{\varepsilon_1} & \xrightarrow{\quad} & G_{\varepsilon_1} & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 L_{\varepsilon_2} & \dashrightarrow & G_{\varepsilon_2} & \xrightarrow{\quad} & G \\
 \searrow & & \searrow & & \searrow \\
 e & & & & G
 \end{array},$$

les trois faces définies ainsi que la tranche sont toutes des carrés cartésiens. La proposition 2.1.4 s'applique donc : toutes les faces et toutes les tranches de ce cube sont cartésiennes. En particulier : le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 L(K[\varepsilon_1, \varepsilon_2]/(\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2, \varepsilon_1\varepsilon_2)) & \xrightarrow{\varepsilon_2=0} & L(K[\varepsilon_1]/\varepsilon_1^2) \\
 \varepsilon_1=0 \downarrow & & \downarrow \varepsilon_1=0 \\
 L(K[\varepsilon_2]/\varepsilon_2^2) & \xrightarrow{\varepsilon_2=0} & \{e_K\}
 \end{array}$$

est cartésien, c'est-à-dire que $L(K[\varepsilon_1, \varepsilon_2]/(\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2, \varepsilon_1\varepsilon_2))$ est isomorphe, en tant que groupe, à $L(K[\varepsilon_1]/\varepsilon_1^2) \times L(K[\varepsilon_2]/\varepsilon_2^2)$.

Ceci étant vu, définissons maintenant

$$i_1 : \begin{aligned} K[\varepsilon_1]/\varepsilon_1^2 &\longrightarrow K[\varepsilon_1, \varepsilon_2]/(\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2, \varepsilon_1\varepsilon_2) \\ \varepsilon_1 &\longmapsto \varepsilon_1 \end{aligned} ,$$

qui est un morphisme de k -algèbres différentielles. Par fonctorialité, ce morphisme nous donne une flèche

$$L_{\varepsilon_1} \longrightarrow L_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}.$$

Cette flèche, modulo l'isomorphisme entre $L_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ et $L_{\varepsilon_1} \times L_{\varepsilon_2}$, correspond à l'injection du premier facteur $L_{\varepsilon_1} \longrightarrow L_{\varepsilon_1} \times L_{\varepsilon_2}$. En effet, elle est définie par « sa restriction » à chacun des facteurs, et on a

$$L(p_{\varepsilon_2=0} \circ i_1) = \text{Id}_{L_{\varepsilon_1}} \quad \text{et} \quad L(p_{\varepsilon_1=0} \circ i_1)(x) = e_{L_{\varepsilon_2}} \quad \forall x \in L_{\varepsilon_1}.$$

De même, on définit une flèche i_2 , qui par fonctorialité donne une flèche $L_{\varepsilon_2} \longrightarrow L_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$, qui correspond à l'injection du second facteur.

Considérons maintenant la flèche

$$\Phi : \begin{aligned} K[\varepsilon_1, \varepsilon_2]/(\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2, \varepsilon_1\varepsilon_2) &\longrightarrow K[\varepsilon]/\varepsilon^2 \\ a + b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 &\longmapsto a + (b_1 + b_2)\varepsilon \end{aligned} ,$$

dont on vérifie facilement qu'il s'agit d'un morphisme de k -algèbres différentielles. On a alors, en identifiant $K[\varepsilon_1]/\varepsilon_1^2$ et $K[\varepsilon_2]/\varepsilon_2^2$ à $K[\varepsilon]/\varepsilon^2$,

$$\Phi \circ i_1 = \Phi \circ i_2 = \text{Id}_{K[\varepsilon]/\varepsilon},$$

de telle sorte que Φ , par fonctorialité de $L : \mathbf{Alg}_k^\partial \longrightarrow \mathbf{Grp}$ et modulo l'isomorphisme entre $L_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ et $L_{\varepsilon_1} \times L_{\varepsilon_2}$, définit un morphisme de groupes

$$m : L_\varepsilon \times L_\varepsilon \longrightarrow L_\varepsilon$$

qui vérifie $m(g, e) = g$ et $m(e, h) = h$. En particulier, pour tout $(g, h) \in \text{Lie}(G)(K)$, on a

$$\begin{aligned} m(g, h) &= m((g, e)(e, h)) = gh \\ &= m((e, h)(g, e)) = hg. \end{aligned}$$

Par conséquent, le groupe $\text{Lie}(G)(K)$ est commutatif. ■

(9.10.5) Structure d'« espace vectoriel » sur $\text{Lie}(G)$. Soient k un anneau différentiel, G un k -groupe algébro-différentiel vérifiant la condition (S) et K une k -algèbre différentielle. Soit $\lambda \in C_K$ une constante de K . On définit

$$\begin{array}{ccc} m_\lambda : & K[\varepsilon]/\varepsilon^2 & \longrightarrow K[\varepsilon]/\varepsilon^2 \\ & a + b\varepsilon & \longmapsto a + \lambda b\varepsilon \end{array}.$$

Comme on a pris le soin de choisir $\lambda \in K$ tel que $\lambda' = 0$, cette flèche est bien un morphisme de k -algèbres différentielles. Elle définit donc par fonctorialité

$$\overline{m_\lambda} : \text{Lie}(G)(K) \longrightarrow \text{Lie}(G)(K),$$

qui est un morphisme de groupes. C'est cette flèche qu'on va choisir comme flèche de « scalarisation par λ ». Pour que ces flèches définissent bien une structure d'espace vectoriel sur $\text{Lie}(G)$, conformément aux prescriptions faites dans la définition 9.4.8, on doit vérifier les propriétés suivantes :

- a) $\overline{m_1} = \text{Id}_{\text{Lie}(G)(K)}$
- b) $\overline{m_{\lambda\mu}} = \overline{m_\lambda} \circ \overline{m_\mu}$
- c) $\forall \vec{v} \in \text{Lie}(G)(K), \quad \overline{m_{\lambda+\mu}}(\vec{v}) = \overline{m_\lambda}(\vec{v}) + \overline{m_\mu}(\vec{v})$

Les propriétés a) et b) sont simples à vérifier : elles sont vraies pour les morphismes de k -algèbres différentielles m_λ , et donc, par fonctorialité, sont satisfaites. Pour la propriété c), on utilise la remarque suivante. On a vu, dans la démonstration de la proposition 9.10.3, que la loi de composition sur $\text{Lie}(G)(K)$ correspond, après identifications, au morphisme

$$\Phi : \begin{array}{c} K[\varepsilon_1, \varepsilon_2]/(\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2, \varepsilon_1\varepsilon_2) \longrightarrow K[\varepsilon]/\varepsilon^2 \\ a + b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 \longmapsto a + (b_1 + b_2)\varepsilon \end{array}.$$

En ces termes, ce qu'on doit vérifier, c'est la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} K[\varepsilon]/\varepsilon^2 & & \\ \downarrow m_\lambda \times m_\mu & \searrow m_{\lambda+\mu} & \\ K[\varepsilon_1]/\varepsilon_1^2 \times_K K[\varepsilon_2]/\varepsilon_2^2 & & \\ \downarrow \iota & & \\ K[\varepsilon_1, \varepsilon_2]/(\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2, \varepsilon_1\varepsilon_2) & \xrightarrow{\Phi} & K[\varepsilon]/\varepsilon^2 \end{array},$$

qui est évidente. Par conséquent, on peut énoncer :

Proposition 9.10.4. *Si k est un anneau différentiel et si G est un k -groupe algébro-différentiel vérifiant la condition (S) , on équipe $\text{Lie}(G)$ d'un structure de C_- -espace vectoriel.*

(9.10.6) Dérivées logarithmiques. Soit k un anneau différentiel et G un k -groupe différentiel. On définit deux morphismes de k -schémas différentiels, appelés *dérivée logarithmique à droite de G* et *dérivée logarithmique à gauche de G* , notés respectivement $l\delta_{droite}$ et $l\delta_{gauche}$ comme suit. Soit K une k -algèbre différentielle. On dispose des deux morphismes de k -algèbres différentielles suivants :

$$i : \begin{array}{c} K \longrightarrow K[\varepsilon]/\varepsilon^2 \\ f \longmapsto f \end{array} \quad \text{et} \quad \exp(\varepsilon\partial)_1 : \begin{array}{c} K \longrightarrow K[\varepsilon]/\varepsilon^2 \\ f \longmapsto f + f'\varepsilon \end{array}.$$

On considère alors l'application

$$\begin{array}{ccccccc} G(K) & \xrightarrow{(\text{Id}, inv)} & G(K) \times G(K) & \xrightarrow{(\exp(\varepsilon\partial)_1, i)} & G(K[\varepsilon]/\varepsilon^2) \times G(K[\varepsilon]/\varepsilon^2) & \xrightarrow{m} & G(K[\varepsilon]/\varepsilon^2) \\ g & \longmapsto & (g, g^{-1}) & \longmapsto & (g + g'\varepsilon, g^{-1}) & \longmapsto & (1 + g'g^{-1}\varepsilon) \end{array}$$

(la deuxième ligne de ce diagramme est à comprendre « avec des guillemets »). L'image de tout $g \in G(K)$ par cette application est dans $\text{Lie}(G)(K)$. Cela résulte uniquement de la fonctorialité de G . En effet, on part de $g \in G(K)$ et on construit successivement les éléments

$$\begin{array}{ll} (g, g^{-1}) & \in G(K) \times G(K) \\ (\exp(\varepsilon\partial)_1(g), i(g^{-1})) & \in G(K[\varepsilon]/\varepsilon^2) \times G(K[\varepsilon]/\varepsilon^2) \\ \exp(\varepsilon\partial)_1(g) \cdot i(g^{-1}) & \in G(K[\varepsilon]/\varepsilon^2). \end{array}$$

On dispose d'un morphisme de groupes $p_{\varepsilon=0} : G(K[\varepsilon]/\varepsilon^2) \longrightarrow G(K)$, et l'on se demande si l'image de $\exp(\varepsilon\partial)_1(g) \cdot i(g^{-1})$ par ce morphisme vaut 1. Or, on a

$$p_{\varepsilon=0}(\exp(\varepsilon\partial)_1(g) \cdot i(g^{-1})) = p_{\varepsilon=0}(\exp(\varepsilon\partial)_1(g)) \cdot p_{\varepsilon=0}(i(g^{-1}))$$

et

$$K \xrightarrow{\exp(\varepsilon\partial)_1} K[\varepsilon]/\varepsilon^2 \xrightarrow{p_{\varepsilon=0}} K = K \xrightarrow{i} K[\varepsilon]/\varepsilon^2 \xrightarrow{p_{\varepsilon=0}} K = \text{Id}_K$$

de telle sorte que

$$p_{\varepsilon=0}(\exp(\varepsilon\partial)_1(g) \cdot i(g^{-1})) = g \cdot g^{-1} = 1.$$

Par ailleurs, l'application qu'on construit ainsi est fonctorielle, car elle est une composition de foncteurs (m , inv , $\exp(\varepsilon\partial)$, etc.). On l'appelle *dérivée logarithmique à gauche de G* . Intuitivement, on a

$$\langle l\delta_{gauche}(g) = g'g^{-1} \rangle.$$

De la même façon, on définit la *dérivée logarithmique à droite de G* . Lorsqu'on ne précise ni « à gauche » ni « à droite », ou lorsqu'on écrit simplement $l\delta$, il s'agira toujours, par convention, de la dérivée logarithmique à gauche de G .

Définition 9.10.5. Soit k un anneau différentiel et G un k -groupe différentiel. Ce qui précède définit la dérivée logarithmique de G , notée

$$l\delta : G \longrightarrow \text{Lie}(G).$$

(9.10.7) G -équations différentielles linéaires. Cette dérivée logarithmique nous permet de généraliser les équations différentielles linéaires vectorielles. En effet, si k est un anneau différentiel et si $A \in M_n(k)$, l'équation $Y' = AY$, ou plus exactement l'équation différentielle $U' = AU$ avec $U \in GL_n(K)$, peut être lue :

$$U'U^{-1} = A \quad ie \quad l\delta(U) = A,$$

l'élément $A \in M_n(k)$ étant vu comme $A \in \text{Lie}(GL_{n,k}^{\text{diff}})(k)$.

Ainsi, on peut généraliser ces équations comme suit. Soient k un anneau différentiel et G un k -groupe algébro-différentiel. Soit $a \in \text{Lie}(G)(k)$. On peut alors considérer l'équation différentielle

$$l\delta(g) = a.$$

On définit alors X_a , le k -espace algébro-différentiel de ses solutions par :

$$X_a(K) := \{g \in G(K) \mid l\delta(g) = a\}$$

pour toute k -algèbre différentielle K .

Septième partie

Schémas différentiels : le point de vue relatif

Introduction

Dans le chapitre (9) sur les espaces algébro-différentiels, on a vu les avantages du point de vue fonctoriel pour aborder la question des schémas différentiels : sa grande souplesse, sa grande généralité, son caractère universel. On a aussi vu, cependant, quelles étaient les lacunes de cette approche : sa trop grande généralité. La catégorie \mathbf{Esp}_k^∂ qu'on y a étudiée contient certes *a priori* la catégorie des schémas différentiels ; mais elle est trop grande.

Le point de vue relatif de Toën et Vaquié

Or il se trouve, que dans un article récent [TV09], Bertrand Toën et Michel Vaquié ont développé une approche de la théorie des schémas complètement fonctorielle, et très générale. Cette approche s'applique *a priori* aux schémas différentiels — c'est ceci qui nous a amené à nous intéresser à ces travaux. Expliquons la démarche⁽¹⁰⁾ de [TV09].

Étant donné $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1})$ une catégorie monoïdale symétrique, par ailleurs supposée complète, cocomplète et fermée (*ie* possédant des Hom internes pour la structure monoïdale \otimes), on dispose d'une notion de monoïde commutatif dans \mathcal{C} . Il s'agit simplement d'objets A de \mathcal{C} munis de morphismes $A \otimes A \rightarrow A$ et $\mathbf{1} \rightarrow A$ vérifiant certaines conditions. L'exemple prototypique d'un tel triplet $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1})$ est le suivant : $(\mathbf{Z}\text{-Mod}, \otimes, \mathbf{Z})$. Dans ce cas, les monoïdes commutatifs dans $(\mathbf{Z}\text{-Mod}, \otimes, \mathbf{Z})$ ne sont rien d'autre que les anneaux commutatifs ! Ainsi, partant de $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1})$ une donnée vérifiant les conditions précitées, Toën et Vaquié définissent la catégorie

$$\mathbf{Comm}(\mathcal{C})$$

des monoïdes commutatifs dans \mathcal{C} .

C'est dans ce contexte que les deux auteurs construisent leur géométrie algébrique relative (à cette donnée \mathcal{C}) : ils remplacent la catégorie des anneaux \mathbf{Ann} , qui est à la base de la théorie des schémas, par la catégorie $\mathbf{Comm}(\mathcal{C})$. Il s'agit alors de généraliser la définition des schémas dans ce cadre. Le point de vue qu'ils adoptent est alors le point de vue fonctoriel : pour eux, les schémas au-dessus de \mathcal{C} seront des foncteurs (covariants)

$$\mathbf{Comm}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Ens} :$$

intuitivement, leurs foncteurs des points. Leur approche permet de définir d'un même geste plusieurs catégories de schémas *sous* $\mathrm{Spec} \mathbf{Z}$, parmi lesquelles la catégorie des schémas au-dessus de \mathbf{F}_1 .

Décrivons rapidement comment ils s'y prennent. Le lecteur intéressé pourra, outre l'article [TV09], consulter l'article d'exposition [PL09], consacré à la géométrie au-dessus de

⁽¹⁰⁾Leur approche s'inscrit dans le cadre de la *géométrie algébrique relative*, telle qu'elle a été initiée par les travaux de Monique Hakim (*cf.* [Hak72]).

\mathbf{F}_1 et dont une partie porte sur ces travaux. Tout d'abord, si les \mathcal{C} -schémas sont difficiles *a priori* à définir, il n'en est rien des \mathcal{C} -schémas affines. On peut définir la catégorie des \mathcal{C} -schémas affines comme la catégorie opposée de $\mathbf{Comm}(\mathcal{C})$. On la note $\mathbf{Aff}_{\mathcal{C}}$. On dispose alors du foncteur (covariant)

$$\mathrm{Spec}_{\mathcal{C}} : \mathbf{Comm}(\mathcal{C})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Aff}_{\mathcal{C}},$$

qui n'est rien d'autre qu'une notation pour le foncteur identité ! Puis :

(TV₁) La catégorie $\mathbf{Aff}_{\mathcal{C}}$ peut être munie naturellement d'une prétopologie de Grothendieck, appelée la *topologie plate*. Cette prétopologie est sous-canonical. Désormais, les \mathcal{C} -schémas ne seront plus à chercher parmi les foncteurs $\mathbf{Comm}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Ens}$, mais dans la catégorie plus restreinte des faisceaux au-dessus de $\mathbf{Aff}_{\mathcal{C}}$ pour la prétopologie plate. On note cette dernière $\mathbf{Faisc}_{\mathcal{C}}$.

(TV₂) Dans la catégorie $\mathbf{Aff}_{\mathcal{C}}$, on peut encore définir ce que signifie que $U \longrightarrow X$ est une *immersion ouverte Zariski*, *i.e.* dans le cas où U et X sont des \mathcal{C} -schémas affines. La définition qui est proposée repose sur le fait que, dans \mathbf{Sch} , un morphisme entre deux schémas est une immersion ouverte si, et seulement si, c'est un monomorphisme plat de présentation finie⁽¹¹⁾, et que toutes ces notions peuvent être transposées⁽¹²⁾ dans $\mathbf{Comm}(\mathcal{C})$.

(TV₃) La notion d'immersion ouverte se généralise ensuite aux faisceaux : on peut encore donner un sens à « $U \longrightarrow X$ est une immersion ouverte » quand $U, X \in \mathbf{Faisc}_{\mathcal{C}}$. Les immersions ouvertes sont stables par changement de base et par composition. Cette notion d'immersion ouverte permet alors aux auteurs de définir une nouvelle prétopologie sur $\mathbf{Faisc}_{\mathcal{C}}$: la prétopologie de Zariski.

(TV₄) On peut alors définir les \mathcal{C} -schémas : ce sont des faisceaux pour la prétopologie plate qui admettent un recouvrement Zariski par des objets représentables.

Le point de vue relatif appliqué aux schémas différentiels

Évidemment, pour le mathématicien qui s'intéresse aux schémas différentiels, l'article [TV09] est très intéressant : le triplet

$$(\mathbf{Z}\text{-Mod diff}, \otimes, \mathbf{Z}),$$

c'est-à-dire la catégorie monoïdale des \mathbf{Z} -modules *différentiels*, satisfait aux hypothèses de leur théorie. Ainsi, sans aucun effort, uniquement en appliquant les résultats de [TV09], on obtient une catégorie des schémas différentiels, *a priori* convenable car naturelle. Néanmoins, on peut, dans notre cadre, simplifier⁽¹³⁾ cette construction. Ainsi, dans le chapitre (10) qui suit, où l'on va définir les « fonct- ∂ -schémas »⁽¹⁴⁾, on va suivre un plan similaire à $(\mathbf{TV}_i)_{i=1\dots 4}$ avec, cependant, des moyens un peu différents :

⁽¹¹⁾Il s'agit du théorème (17.9.1) de [EGA_{IV.4}].

⁽¹²⁾Il s'agit de l'argument-clé qui permet la construction des \mathcal{C} -schémas ; on renvoie à l'article [TV09] pour les détails.

⁽¹³⁾La définition des immersions ouvertes qu'on donnera est plus simple que la définition générale de [TV09].

⁽¹⁴⁾I.e., les schémas différentiels définis sous le point de vue fonctoriel.

- La prétopologie dont on munira la catégorie des fonct- ∂ -schémas affines, qu'on notera

$$\mathbf{PréFaisc}_k^{\partial, rep}$$

ne sera pas la prétopologie plate mais la prétopologie Zariski, qu'on pourra définir plus facilement. Cette prétopologie est sous-canonical. On notera $\mathbf{Faisc}_{\text{Zar}, k}^\partial$ la catégorie de faisceaux correspondante.

- Pour définir les immersions ouvertes, au lieu de prendre pour modèles les morphismes $\text{Spec}^\partial B \rightarrow \text{Spec}^\partial A$ qui sont des immersions ouvertes, on prendra le modèle plus général des morphismes

$$U \rightarrow \text{Spec}^\partial A$$

qui sont des immersions ouvertes. On sait en effet, dans ce cas, qu'il existe nécessairement un idéal I de A qui détermine l'immersion. Remarquons ici qu'on aurait pu donner une autre définition des immersions ouvertes : remplacer les idéaux I par des idéaux différentiels I . On n'a pas choisi cette définition, car cette autre notion d'immersion ouverte, qui aurait pu sembler plus intéressante *a priori*, passe à côté, en réalité, d'objets intéressants. Plus précisément, choisir de définir les immersions ouvertes par des idéaux différentiels plutôt que des idéaux quelconques, c'est choisir la topologie des ouverts Zariski invariants (autrement dit, les ouverts Carrà Ferro) plutôt que les ouverts Zariski quelconques. Or, on veut par la suite définir les schémas différentiels comme les « espaces » qui peuvent être recouverts par des objets affines (*i.e.* représentables). Ainsi, les schémas différentiels devraient en particulier avoir un recouvrement affine invariant. Imaginons que la bonne notion de schéma différentiel soit celle de schéma muni d'un champ de vecteurs : *il est alors faux qu'un schéma X muni d'un champ de vecteurs admette toujours un recouvrement affine invariant* ; c'est en particulier le cas si X n'est pas affine et n'admet qu'un seul ouvert invariant non-vide.

- Cette notion d'immersion ouverte $U \rightarrow \text{Spec}^\partial A$ se généralise aux morphisme de faisceaux $U \rightarrow X$ quelconques, de la même manière que dans [TV09]. On vérifie alors que les immersions ouvertes sont aussi stables par composition et changement de base. On obtient une prétopologie sur $\mathbf{Faisc}_{\text{Zar}, k}^\partial$.
- Enfin, on peut définir, là aussi comme dans [TV09], ce qu'on a appelé les *fonct- ∂ -schémas* : ce seront les faisceaux qui peuvent être recouverts par des objets affines.

Les schémas différentiels vus comme espaces annelés

Ainsi, l'approche relative de Toën et Vaquié nous fournit d'une façon naturelle une notion de schéma différentiel, et ceux-ci sont des foncteurs. Cependant, on aimerait pouvoir voir aussi ces objets comme des espaces topologiques, munis d'un faisceau en anneaux différentiels. Or, il est connu, depuis les travaux de Michel Demazure et de Pierre Gabriel (voir [SGA3I], [Dem86] mais surtout [DG70] et son paragraphe I, §1, n° 4) que l'on peut voir les schémas soit comme des espaces localement annelés, soit comme des foncteurs $\mathbf{Alg}_k \rightarrow \mathbf{Ens}$.

Dans le cadre beaucoup plus général de la géométrie algébrique relative, étant donné un triplet $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1})$, est-il possible d'associer à un \mathcal{C} -schéma un espace topologique — ou mieux, un espace topologique muni d'un faisceau à valeurs dans $\mathbf{Comm}(\mathcal{C})$? Cette question est posée dans [TV09], et quelques indications sont données, mais c'est Florian Marty, dans [Mar07], qui s'est attaqué à cet aspect du point de vue relatif.

Intermède sur les lieux. Plus précisément, la question de trouver un espace topologique sous-jacent à un \mathcal{C} -schéma peut-être posée comme suit. Si X est un espace topologique, on associe classiquement à X la catégorie des ouverts de X , notée $\mathbf{Ouv}(X)$: ses objets sont les ouverts U de X ; $\text{Hom}(U, V)$ est vide si $U \not\subseteq V$ et n'a qu'une flèche si $U \subset V$. Ainsi, on peut aussi voir $\mathbf{Ouv}(X)$ comme un ensemble partiellement ordonné. Mieux, $\mathbf{Ouv}(X)$ peut être vu comme un treillis : pour tous ouverts U et V de X , le couple (U, V) possède une borne inférieure

$$U \wedge V := U \cap V$$

et une borne supérieure

$$U \vee V := U \cup V.$$

Encore mieux, toute famille finie $(U_i)_{i=1,\dots,n}$ d'ouverts possède une borne inférieure, et toute famille quelconque $(W_i)_{i \in I}$ d'ouverts possède une borne supérieure :

$$\bigwedge_{i=1}^n U_i := \bigcap_{i=1}^n U_i, \quad \text{et} \quad \bigvee_{i \in I} W_i := \bigcup_{i \in I} W_i.$$

Par ailleurs, ces deux opérations satisfont à la loi de distributivité suivante :

$$U \wedge \bigvee_i V_i = \bigvee_i (U \wedge V_i).$$

Ceci nous amène à la définition :

Définition. On appelle lieu (locale en Anglais) un treillis (E, \wedge, \vee) , admettant des bornes supérieures quelconques et tel que

$$a \wedge \bigvee_i b_i = \bigvee_i (a \wedge b_i).$$

pour tout $a \in E$ et pour toute famille $(b_i)_i$ d'éléments de E .

Ainsi, les lieux généralisent les espaces topologiques. Le lecteur intéressé par les lieux et leurs liens avec les espaces topologiques pourra consulter [MLM94] et son chapitre IX. Maintenant, étant donné un triplet $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1})$, et étant donné un faisceau plat X au-dessus de $\mathbf{Comm}(\mathcal{C})^{\text{op}}$, on peut considérer l'ensemble des sous-foncteurs de X qui sont des immersions ouvertes Zariski. On le note $\mathbf{Lieu}_{\text{Zar}}(X)$. On voudrait alors montrer deux choses :

- Cet ensemble $\mathbf{Lieu}_{\text{Zar}}(X)$ est un lieu.
- Il existe un espace topologique $|X|$ tel que le lieu $\mathbf{Lieu}_{\text{Zar}}(X)$ soit isomorphe au lieu $\mathbf{Ouv}(|X|)$, du moins dans les cas où X est un préfaisceau représentable, ou dans le cas où X est un \mathcal{C} -schéma.

C'est l'approche que suit Marty dans [Mar07]. Sous des hypothèses supplémentaires que doit vérifier le triplet $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1})$, il montre que ces deux points précédents sont bien réalisés.

Revenons à nos problèmes de schémas différentiels. D'une part, la construction que nous proposons des fonct- ∂ -schémas est similaire dans l'esprit à la construction de [TV09], mais différente dans les détails⁽¹⁵⁾. D'autre part, les hypothèses supplémentaires requises dans [Mar07] ne sont pas satisfaites dans le cas

$$(\mathbf{Z}\text{-Mod diff}, \otimes, \mathbf{Z}) :$$

⁽¹⁵⁾ Elle est vraisemblablement équivalente, mais ceci mérite une preuve.

plus précisément, dans ce cas, les objets de présentation finie ne sont pas stables par produit tensoriel. De plus, on souhaiterait associer à fonct- ∂ -schéma non pas seulement un espace topologique, mais, mieux, un espace différentiellement annelé. Pour ces trois raisons, on n'a pas pu appliquer les résultats de [Mar07] — et on s'est attaqué à la question d'associer un k -schéma muni d'un k -champ de vecteurs à un k -fonct- ∂ -schéma.

C'est l'objet du chapitre (11) qui suit. Les méthodes qu'on utilise sont à la fois inspirées de [DG70], notamment en ce qui concerne la construction de l'adjonction

$$\mathbf{E}sp_k^\partial \begin{array}{c} \xrightarrow{|-| \in *} \\ \xleftarrow[h_- \in \omega]{} \end{array} \mathbf{E}spLocAnn_k^\partial$$

et en même temps plus abstraites, plus catégoriques, dans la continuité de [TV09]. Finalement, on montre que ces deux points de vue, le point de vue fonctoriel et le point de vue des espaces annelés sont équivalents : la catégorie des k -fonct- ∂ -schémas est équivalente à la catégories des k -schémas munis d'un k -champ de vecteurs :

Théorème. *Soit k un anneau différentiel. Alors,*

$$fonct\text{-}\partial\text{-}\mathbf{Sch}_k \begin{array}{c} \xrightarrow{|-|} \\ \xleftarrow[h_-]{} \end{array} \mathbf{Sch}_k^\partial .$$

est une équivalence de catégories.

Chapitre 10

Définition des fonct- ∂ -schémas

Dans ce chapitre et le suivant, on va utiliser les résultats et rappels du chapitre (2) « Quelques points de théorie des catégories ». Le lecteur est supposé à l'aise avec ces notions.

10.1 Prétopologie de Zariski sur $(\mathbf{Alg}_k^\partial)^{\text{op}}$

On a l'habitude de voir, si k est juste un anneau (*i.e.* pas un anneau différentiel), la catégorie $(\mathbf{Alg}_k)^{\text{op}}$ d'un point de vue géométrique : c'est (à équivalence près) la catégorie des k -schémas affines. En tant que catégorie « géométrique », les objets ont vocation à avoir une topologie. C'est pourquoi on va chercher à munir

$$(\mathbf{Alg}_k^\partial)^{\text{op}},$$

en s'inspirant du cas non-différentiel, d'une prétopologie de Grothendieck.

(10.1.1) Isomorphisme de recouvrements. Avant d'en venir à nos k -algèbres différentielles, on introduit une notion qui nous rendra la tâche plus aisée. Soit \mathcal{C} une catégorie admettant les produits fibrés. Soit X un objet de \mathcal{C} et soient

$$\mathcal{X} = \left\{ X_i \xrightarrow{f_i} X \right\}_i \quad \text{et} \quad \mathcal{Y} = \left\{ Y_j \xrightarrow{g_j} X \right\}_j$$

deux ensembles de morphismes de \mathcal{C} dont le codomaine est X . Alors, on dit que $\{X_i \rightarrow X\}_i$ est *isomorphe* à $\{Y_j \rightarrow X\}_j$ s'il existe une bijection

$$\Phi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$$

et, pour tout $f_i \in \mathcal{X}$, un isomorphisme

$$\varphi_i : X_i \longrightarrow Y_j,$$

où $g_j : Y_j \rightarrow X$ désigne l'image par Φ de f_i , et faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_i & & \\ \downarrow \varphi_i & \searrow f_i & \\ Y_j & \nearrow g_j & \\ & & X \end{array}$$

Dans tout ce qui suit, k est un anneau différentiel.

(10.1.2) **Prétopologie de Zariski.** On veut mettre une prétopologie sur la catégorie

$$(\mathbf{Alg}_k^\partial)^{\text{op}}.$$

Ainsi, il nous faut, pour chaque k -algèbre différentielle A définir la famille des recouvrements de A . Si l'on oublie la structure différentielle de A , on se retrouve avec un anneau A . Naturellement, on pense plutôt au schéma $\text{Spec } A$. On veut donc définir les recouvrements de $\text{Spec } A$. Or on sait que

Proposition 10.1.1. *Soit A un anneau. Alors, les ouverts distingués $D(f) := \text{Spec } A \setminus V(f)$ forment une base d'ouverts de $\text{Spec } A$, quand f parcourt A . De plus, on a :*

$$\bigcup_{i \in I} D(f_i) = \text{Spec } A \iff (f_i)_{i \in I} = A$$

Remarque. — On désigne par $(f_i)_{i \in I}$ l'idéal de A engendré par les f_i . \diamond

Par ailleurs, les ouverts $D(f)$ de $\text{Spec } A$ sont naturellement isomorphes en tant que schémas à $\text{Spec } A_f$ et, via cet isomorphisme, l'inclusion de $D(f)$ dans $\text{Spec } A$ s'identifie à $\text{Spec } i_f$ où $i_f : A \rightarrow A_f$ est le morphisme de localisation. C'est ainsi qu'on définit :

Définition 10.1.2. *Soit k un anneau différentiel. La prétopologie de Zariski, définie sur $(\mathbf{Alg}_k^\partial)^{\text{op}}$, est la prétopologie définie par*

$$\text{Recouvr}(A) := \left\{ \{A \rightarrow B_i\}_{i \in I} \mid \begin{array}{l} \exists (f_i)_{i \in I} \in A^I \mid (f_i)_{i \in I} = A \\ \text{et } \{A \rightarrow B_i\}_i \text{ isomorphe à } \{A \rightarrow A_{f_i}\}_i \end{array} \right\}$$

pour toute k -algèbre différentielle A .

Remarque. — Autrement dit, on commence par mettre dans les recouvrements ceux qu'on désire : les analogues différentiels des familles couvrantes qui sont caractérisées par la proposition 10.1.1. Puis, comme cela ne suffit pas, on y ajoute tous les recouvrements qui sont isomorphes à l'un des tels recouvrements. \diamond

Vérifions qu'il s'agit d'une prétopologie.

Tout d'abord, si A est une k -algèbre différentielle et si $A \rightarrow B$ est un isomorphisme, alors $\{A \rightarrow B\}$ est bien un recouvrement de A , car c'est une famille (en l'occurrence formée d'un seul élément) de morphismes isomorphe à $A \rightarrow A_1$.

Soit A une k -algèbre différentielle et soit $\{A \rightarrow B_i\}_i$ un recouvrement de A . Soit donc (f_i) une famille d'éléments de A tels que $(f_i)_i = A$ et soit (φ_i) une famille d'isomorphismes entre les B_i et les A_{f_i} , qui fasse commuter les bons diagrammes. Soit alors C une autre k -algèbre différentielle et soit $A \xrightarrow{\psi} C$ un morphisme. Remarquons d'abord que pour tout i , le carré

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & C_{\psi(f_i)} \\ \uparrow \psi & & \uparrow \\ A & \longrightarrow & A_{f_i} \end{array}$$

est cartésien. On peut alors démontrer (si on veut le faire proprement, il suffit d'utiliser la proposition 2.1.4) que si l'on dispose d'une famille de carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & C_i \\ \psi \uparrow & & \uparrow \\ A & \longrightarrow & B_i \end{array}$$

alors, les familles $\{C \rightarrow C_i\}$ et $\{C \rightarrow C_{\psi(i)}\}$ sont isomorphes. Comme il est clair par ailleurs que l'idéal engendré par les $\psi(f_i)$ est C tout entier, on en déduit que

$$\{C \rightarrow C_i\} \in \text{Recouvr}(C),$$

ce qu'on voulait démontrer.

Enfin, il reste à montrer que les « recouvrements se recollent » bien. Soient A une k -algèbre différentielle, $\{A \rightarrow A_i\}$ un recouvrement de A et, pour chaque i , $\{A_i \rightarrow B_{ij}\}$ un recouvrement de A_i . Par ailleurs, soit $(f_i)_i$ une famille d'éléments engendrant A telle que $\{A \rightarrow A_i\}$ soit isomorphe à $\{A \rightarrow A_{f_i}\}$ via les morphismes $\varphi_i : A_i \rightarrow A_{f_i}$. Et, soit, pour chaque i , une famille $(g_{ij})_j$ d'éléments de A_i telle que $\{A_i \rightarrow B_{ij}\}$ soit isomorphe à $\{A_i \rightarrow (A_i)_{g_{ij}}\}$. Pour commencer, remarquons que via l'isomorphisme φ_i , l'élément g_{ij} peut être vu comme un élément de A_{f_i} ; on écrit

$$\varphi_i(g_{ij}) = \frac{r_{ij}}{f_i^{n_j}}.$$

On peut alors remarquer que l'anneau B_{ij} est isomorphe à $A_{r_{ij}f_i}$ et, plus précisément, que la composée des morphismes $A \rightarrow A_i \rightarrow B_{ij}$ est isomorphe à la flèche de localisation $A \rightarrow A_{r_{ij}f_i}$. Il nous reste alors, pour conclure que $\{A \rightarrow B_{ij}\}_{ij}$ est bien un recouvrement de A , à vérifier que la famille des

$$(r_{ij} \cdot f_i)_{ij}$$

engendre bien A . D'abord, comme les g_{ij} engendent B_{ij} , on a que les $\frac{r_{ij}}{f_i^{n_j}}$ engendent A_{f_i} . Il existe donc une famille de λ_j , éléments de A , et d'entiers m_j tels que

$$\sum_j \frac{\lambda_j}{f_i^{m_j}} \cdot \frac{r_{ij}}{f_i^{n_j}} = 1.$$

Comme la somme est en fait finie, on peut considérer la plus grande puissance $f_i^{N_i}$ qui intervient aux dénominateurs, et multiplier l'égalité ci-dessous par $f_i^{N_i+1}$. On obtient :

$$\sum_j \mu_j \cdot r_{ij} \cdot f_i = f_i^{N_i+1},$$

où les μ_j sont dans A . On en déduit ainsi, dans un premier temps, que l'idéal de A engendré par les $r_{ij} \cdot f_i$ contient la famille des $f_i^{N_i+1}$. Le lemme suivant permet alors de conclure.

Lemme 10.1.3. *Soit A un anneau et soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de A tels que $(f_i)_{i \in I} = A$. Soit $(M_i) \in \mathbf{N}^I$ une famille d'entiers naturels. Alors,*

$$\left(f_i^{M_i} \right)_{i \in I} = A.$$

Démonstration. — Remarquons d'abord qu'on peut se ramener au cas où la famille $(f_i)_{i \in I}$ est finie. En effet, si cette famille engendre A , cela signifie qu'il existe un entier $n \in \mathbf{N}_{>0}$, n indices $i_1, \dots, i_n \in I$ ainsi que n éléments $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans A tels que

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k f_{i_k} = 1.$$

La famille *finie* des $(f_{i_k})_{1 \leq k \leq n}$ engendre alors aussi A . Supposons ainsi que I est un ensemble fini. Soit $(\lambda_i)_{i \in I} \in A^I$ telle que

$$\sum_{i \in I} \lambda_i f_i = 1.$$

On note $M = \sum_{i \in I} M_i$. On a alors

$$\left(\sum_{i \in I} \lambda_i f_i \right)^M = 1.$$

Or,

$$\left(\sum_{i \in I} \lambda_i f_i \right)^M = \sum_{\substack{(k_i)_{i \in I} \in \{0, \dots, M\}^I \\ \sum_{i \in I} k_i = M}} \binom{M}{(k_i)_{i \in I}} \prod_{i \in I} \lambda_i^{k_i} f_i^{k_i}$$

et, dans cette somme, nécessairement un au moins des exposants k_i est supérieur ou égal à M_i (sinon, on ne pourrait avoir $\sum_{i \in I} k_i = M$). Ainsi, on peut écrire

$$\sum_{i \in I} \mu_i \cdot f_i^{M_i} = 1$$

où les μ_i sont des éléments de A bien choisis. En particulier, l'idéal engendré par les $f_i^{M_i}$ est A tout entier, ce qu'on voulait démontrer. ■

(10.1.3) Un critère pour les faisceaux Zariski. Maintenant qu'on a vérifié que les choix qu'on a faits définissent bien une prétopologie, on va pouvoir s'intéresser aux *faisceaux Zariski* c'est-à-dire aux faisceaux au-dessus de

$$(\mathbf{Alg}_k^\partial)^{\text{op}}$$

pour la prétopologie Zariski. Il s'agit de foncteurs *covariants* $F : \mathbf{Alg}_k^\partial \longrightarrow \mathbf{Ens}$ vérifiant les bonnes hypothèses. Le critère ci-dessous allège ces hypothèses.

Proposition 10.1.4. *Soit $F : \mathbf{Alg}_k^\partial \longrightarrow \mathbf{Ens}$ un foncteur. Pour que F soit un faisceau pour la prétopologie de Zariski, il faut et il suffit que pour toute k -algèbre différentielle A et pour toute famille finie $(f_i)_{i \in I} \in A^I$ d'éléments engendrant A , la suite*

$$F(A) \longrightarrow \prod_{i \in I} F(A_{f_i}) \rightrightarrows \prod_{i,j \in I} F(A_{f_i \cdot f_j})$$

soit un égalisateur.

Démonstration. — La condition est évidemment nécessaire car si $(f_i)_{i \in I}$ est une famille (finie) engendrant A , alors, d'une part, $\{A \rightarrow A_{f_i}\}_i$ est bien un recouvrement de A et, d'autre part, le fait que le carré

$$\begin{array}{ccc} A_{f_i} & \longrightarrow & A_{f_i \cdot f_j} \\ \uparrow & & \uparrow \\ A & \longrightarrow & A_{f_j} \end{array}$$

soit cocartésien nous permet de voir $A_{f_i f_j}$ comme un produit fibré de A_{f_i} par A_{f_j} au-dessus de A dans $(\text{Alg}_k^\partial)^{\text{op}}$.

Montrons maintenant que cette condition est suffisante. On montre d'abord, qu'il suffit de vérifier la condition « d'égalisation » pour les familles quelconque $(f_i)_{i \in I}$ d'éléments engendrant A . On montrera ensuite qu'il suffit de vérifier cette condition pour les familles finies. Soient

$$A \longrightarrow B \xrightarrow[p_2]{p_1} C \quad \text{et} \quad A' \longrightarrow B' \xrightarrow[p'_2]{p'_1} C'$$

deux suites, reliées entre elles par des bijections

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & B & \xrightarrow[p_2]{p_1} & C \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A' & \longrightarrow & B' & \xrightarrow[p'_2]{p'_1} & C' \end{array}$$

qui transforment les p_i en p'_i . Alors, il est évident que l'une des deux suites est un égalisateur si, et seulement si, l'autre suite l'est également. Partons maintenant d'un objet A , d'un recouvrement $\{A \rightarrow A_i\}$. On se donne aussi des anneaux B_{ij} et des morphismes tels que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} A_i & \longrightarrow & B_{ij} \\ \uparrow & & \uparrow \\ A & \longrightarrow & A_j \end{array}$$

soient cartésiens. Enfin, on se donne une famille d'éléments $(f_i)_i$ telle que les collections $\{A \rightarrow A_i\}$ et $\{A \rightarrow A_{f_i}\}$ soient isomorphes. Si on recense tous les diagrammes cartésiens qu'on a, on peut les disposer dans le cube suivant, dont toutes les faces qui sont complètes sont cartésiennes

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & A & \searrow & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ A_j & \longrightarrow & A_i & \longrightarrow & A_{f_i} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B_{ij} & \longrightarrow & A_{f_j} & \longrightarrow & A_{f_i \cdot f_j} \end{array} .$$

D'après la proposition 2.1.4, on sait qu'on peut compléter ce diagramme par une flèche $B_{ij} \longrightarrow A_{f_i \cdot f_j}$ qui fasse commuter entièrement le cube, et telle que toutes les faces et les tranches soient cartésiennes. Ces flèches, qui sont des isomorphismes (puisque les flèches

$A_i \rightarrow A_{f_i}$ le sont) nous fournissent donc, après application du foncteur F , des bijections

$$\begin{array}{ccccc} F(A) & \xrightarrow{\quad} & \prod_{i \in I} F(A_i) & \xrightarrow[p_1]{p_2} & \prod_{i,j \in I} F(B_{ij}) \\ \parallel & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ F(A) & \xrightarrow{\quad} & \prod_{i \in I} F(A_{f_i}) & \xrightarrow[p_1]{p_2} & \prod_{i,j \in I} F(A_{f_i \cdot f_j}) \end{array} .$$

Comme, par hypothèse, la deuxième ligne est un égalisateur, la première est en aussi une : ainsi, F est bien un faisceau pour la prétopologie de Zariski, ce qui achève notre preuve dans le cas des familles quelconques.

Montrons maintenant qu'il suffit de vérifier l'hypothèse « d'égalisation » pour les familles finies pour qu'elle soit vérifiée pour toutes les familles. Soit donc $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de A qui engendre A tout entier. On sait, comme on l'a vu dans le début de la preuve du lemme 10.1.3, qu'il existe un sous-ensemble *fini* J tel que la sous-famille $(f_i)_{i \in J}$ engendre encore A . Par hypothèse, on sait donc que la suite

$$F(A) \xrightarrow{i} \prod_{i \in J} F(A_{f_i}) \xrightarrow[p]{q} \prod_{i,j \in J} F(A_{f_i \cdot f_j})$$

est un égalisateur. On veut montrer que la suite

$$F(A) \xrightarrow{i'} \prod_{i \in I} F(A_{f_i}) \xrightarrow[p']{q'} \prod_{i,j \in I} F(A_{f_i \cdot f_j})$$

en est aussi un. Pour commencer, il est facile de voir que l'injectivité de i entraîne l'injectivité de i' . Ensuite, il faut montrer que l'image de i' tombe dans le noyau du couple (p', q') . C'est-à-dire, si $x \in F(A)$, si $i, j \in I$, on veut montrer que

$$(x|_{A_{f_i}})_{|A_{f_i \cdot f_j}} = (x|_{A_{f_j}})_{|A_{f_i \cdot f_j}} .$$

Pour le vérifier, il suffit, si nécessaire, d'ajouter au sous-ensemble J les éléments i et j , et d'utiliser la propriété « d'égalisation » pour $J \cup \{i, j\}$. Enfin, il faut montrer que si $(x_i)_i$ est une famille, avec

$$\forall i \in I \quad x_i \in F(A_{f_i}),$$

et qui vérifie

$$\forall (i, j) \in I^2 \quad (x_i)_{|A_{f_i \cdot f_j}} = (x_j)_{|A_{f_i \cdot f_j}},$$

alors il existe $x \in F(A)$ tel que $x|_{A_{f_i}} = x_i$, quel que soit i . Soit donc $i \in I$. On ajoute i au sous-ensemble J . La sous-famille $(x_k)_{k \in J \cup \{i\}}$ vérifie encore la « condition de recouvrement ». Par conséquent, il existe un $x \in F(A)$ tel que $x|_{A_{f_k}} = x_k$ pour tout k dans $J \cup \{i\}$. Malheureusement, ce x dépend de i . Mais, d'après l'injectivité de la flèche i , tous ces x sont égaux — et on a donc trouvé un $x \in F(A)$ qui convient, ce qui achève notre preuve. ■

(10.1.4) Sous-canonicité de Zariski. On montre maintenant que la prétopologie de Zariski est sous-canonique :

Proposition 10.1.5. *Soit k un anneau différentiel. Alors, la prétopologie de Zariski sur $(\text{Alg}_k^\partial)^{\text{op}}$ est sous-canonique.*

Démonstration. — Soit A une k -algèbre différentielle. Ainsi, ce qu'on veut montrer est que le préfaisceau h_A défini par

$$h_A(B) := \text{Hom}_{\mathbf{Alg}_k^\partial}(A, B)$$

est un faisceau. Autrement dit, grâce à la proposition 10.1.4, il suffit de montrer que pour toute k -algèbre différentielle B , pour toute famille finie $(f_i)_{i \in I}$ d'éléments de B engendrant B , la suite

$$h_A(B) \longrightarrow \prod_{i \in I} h_A(B_{f_i}) \xrightarrow[p_2]{p_1} \prod_{i,j \in I} h_A(B_{f_i \cdot f_j})$$

est un égalisateur. Autrement dit, vu la définition du préfaisceau h_A , on veut montrer que la suite

$$\text{Hom}_{\mathbf{Alg}_k^\partial}(A, B) \longrightarrow \prod_{i \in I} \text{Hom}_{\mathbf{Alg}_k^\partial}(A, B_{f_i}) \xrightarrow[p_2]{p_1} \prod_{i,j \in I} \text{Hom}_{\mathbf{Alg}_k^\partial}(A, B_{f_i \cdot f_j})$$

est un égalisateur. Or, on a toujours

$$\prod_{i \in I} \text{Hom}(X, X_i) \simeq \text{Hom}\left(X, \prod_{i \in I} X_i\right)$$

de telle sorte que ce qu'on veut monter, en fait, est que la suite

$$\text{Hom}_{\mathbf{Alg}_k^\partial}(A, B) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Alg}_k^\partial}(A, \prod_{i \in I} B_{f_i}) \xrightarrow[p_2]{p_1} \text{Hom}_{\mathbf{Alg}_k^\partial}(A, \prod_{i,j \in I} B_{f_i \cdot f_j})$$

est un égalisateur. Enfin, et le lecteur pourra s'en convaincre⁽¹⁾, pour démontrer ce dernier point, il suffit de montrer que la suite

$$B \longrightarrow \prod_{i \in I} B_{f_i} \xrightarrow[p_2]{p_1} \prod_{i,j \in I} B_{f_i \cdot f_j}$$

est un égalisateur. C'est l'objet de la proposition qui suit. ■

Proposition 10.1.6. *Soit B un anneau et soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille finie d'éléments qui engendrent B . Alors, la suite*

$$B \xrightarrow{i} \prod_{i \in I} B_{f_i} \xrightarrow[i_2]{i_1} \prod_{i,j \in I} B_{f_i \cdot f_j}$$

est un égalisateur.

Remarque. — Évidemment, la proposition est encore vraie si on considère une famille quelconque $(f_i)_{i \in I}$ qui engendre A . ◇

Démonstration. — En fait, le lecteur avisé pourra voir dans cette proposition le fait que le faisceau structural du schéma $\text{Spec } B$ est bien un faisceau. On se propose de redémontrer le

⁽¹⁾ Voici deux façons pour s'en convaincre :

- 1) On peut le vérifier à la main.
- 2) On peut le voir comme suit. Le fait que la suite $A \longrightarrow B \rightrightarrows C$ soit un égalisateur est équivalent au fait que le morphisme $A \longrightarrow \lim(B \rightrightarrows C)$ soit un isomorphisme. Ainsi, il suffit de voir que le foncteur h_A commute aux limites. Pour cela, il suffit de prouver que h_A admet un adjoint à gauche. On a vu dans la démonstration du fait 9.10.2 que c'était bien le cas.

résultat, qui apparaît ici comme un résultat d'algèbre commutative, par des moyens directs. De plus, la preuve qu'on donne est effective.

Avant d'en venir à la démonstration, posons quelques petites notations. Notons bien que la famille $(f_i)_{i \in I}$ est finie. Comme elle engendre B soit $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille vérifiant

$$\sum_{i \in I} \lambda_i f_i = 1.$$

Première chose à vérifier : la flèche i est injective. Soit donc $x \in B$ un élément qui est nul dans tous les B_{f_i} . Cela signifie que, pour tout i , il existe $N_i \in \mathbf{N}$ tel que

$$f_i^{N_i} \cdot x = 0.$$

Or on sait, d'après le lemme 10.1.3, que la famille $(f_i^{N_i})$ engendre B tout entier. En particulier, il existe une famille $(\mu_i)_{i \in I} \in B^I$ telle que

$$\sum_{i \in I} \mu_i \cdot f_i^{N_i} = 1.$$

En multipliant cette égalité par x , on obtient que $x = 0$, ce qu'on voulait.

Deuxième chose à vérifier : que les familles d'éléments $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} B_{f_i}$ qui ont la même image par i_1 et i_2 « se recollent », ie qu'ils proviennent d'un élément x par la flèche i . Soit donc

$$x_i := \frac{a_i}{f_i^{n_i}}$$

une famille d'éléments vérifiant

$$\forall (i, j) \in I^2, \quad x_i = x_j \quad \text{dans } B_{f_i \cdot f_j}.$$

Ainsi, il existe une famille $(N_{i,j})_{(i,j) \in I^2} \in \mathbf{N}^{I^2}$ d'entiers telle que

$$\forall (i, j) \in I^2, \quad (f_j^{n_j} a_i - a_j f_i^{n_i}) \cdot (f_i f_j)^{N_{i,j}} = 0.$$

On cherche un y dans B tel que

$$\forall i \in I, \quad y = \frac{a_i}{f_i^{n_i}} \quad \text{dans } B_{f_i}.$$

Une autre façon, plus astucieuse, d'écrire la relation que l'on cherche, est de dire que l'on veut que, pour un $M \in \mathbf{N}$ bien choisi (c'est-à-dire suffisamment grand) :

$$\forall i \in I, \quad \frac{y}{(\sum_{k \in I} \lambda_k f_k)^M} = \frac{a_i}{f_i^{n_i}} \quad \text{dans } A_{f_i}.$$

Autrement dit, on veut que, pour chaque i , il existe un entier P_i tel que

$$\left(f_i^{n_i} \cdot y - a_i \cdot \left(\sum_{k \in I} \lambda_k f_k \right)^M \right) \cdot f_i^{P_i} = 0.$$

Selon la même idée que celle utilisée dans la preuve du lemme 10.1.3, si l'on prend M suffisamment grand (plus précisément, si l'on prend M supérieur ou égal à $(n\alpha + \sum_j n_j)$, où α est un entier qu'on fixera plus loin dans la preuve), alors, on est assuré que dans chacun des termes de la somme

$$\left(\sum_{k \in I} \lambda_k f_k \right)^M = \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbf{N}^I \\ |\mathbf{k}|=M}} \binom{M}{\mathbf{k}} \prod_{j \in I} \lambda_j^{k_j} \cdot f_j^{k_j}$$

apparaît au moins un terme $f_i^{n_i+\alpha}$. Ainsi, en notant

$$\left(\sum_{k \in I} \lambda_k f_k \right)^M = \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbf{N}^I \\ |\mathbf{k}|=M}} C_{\mathbf{k}} \cdot f_{i(\mathbf{k})}^{n_{i(\mathbf{k})}+\alpha}$$

— où les $C_{\mathbf{k}}$ sont dans B et où les $i(\mathbf{k})$ sont des éléments de I bien choisis⁽²⁾ — on peut écrire

$$\begin{aligned} A(i) &:= \left(f_i^{n_i} \cdot y - a_i \cdot \left(\sum_{k \in I} \lambda_k f_k \right)^M \right) \cdot f_i^{P_i} \\ &= \left(f_i^{n_i} \cdot y - \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbf{N}^I \\ |\mathbf{k}|=M}} C_{\mathbf{k}} \cdot a_i \cdot f_{i(\mathbf{k})}^{n_{i(\mathbf{k})}+\alpha} \right) \cdot f_i^{P_i} \\ &= f_i^{n_i+P_i} \cdot y - \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbf{N}^I \\ |\mathbf{k}|=M}} C_{\mathbf{k}} \cdot \left((f_{i(\mathbf{k})}^{n_{i(\mathbf{k})}} \cdot a_i - a_{i(\mathbf{k})} \cdot f_i^{n_i}) f_{i(\mathbf{k})}^\alpha f_i^{P_i} + a_{i(\mathbf{k})} \cdot f_i^{n_i+P_i} f_{i(\mathbf{k})}^\alpha \right) \end{aligned}$$

Or, si α et P_i sont plus grands que $N_{i,i(\mathbf{k})}$, vu qu'on a

$$\forall (i,j) \in I^2, \quad (f_j^{n_j} a_i - a_j f_i^{n_i}) \cdot (f_i f_j)^{N_{i,j}} = 0.$$

on peut alors écrire

$$\begin{aligned} A(i) &= f_i^{n_i+P_i} \cdot y - \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbf{N}^I \\ |\mathbf{k}|=M}} C_{\mathbf{k}} \cdot a_{i(\mathbf{k})} \cdot f_i^{n_i+P_i} f_{i(\mathbf{k})}^\alpha \\ &= f_i^{n_i+P_i} \cdot \left(y - \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbf{N}^I \\ |\mathbf{k}|=M}} C_{\mathbf{k}} \cdot a_{i(\mathbf{k})} \cdot f_{i(\mathbf{k})}^\alpha \right). \end{aligned}$$

Ainsi, le $y \in B$ qu'on cherche, qui recolle entre eux les $\frac{a_i}{f_i^{n_i}}$, est égal à

$$y := \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbf{N}^I \\ |\mathbf{k}|=M}} C_{\mathbf{k}} \cdot a_{i(\mathbf{k})} \cdot f_{i(\mathbf{k})}^\alpha$$

où, si l'on note $N = \max_{i,j} N_{i,j}$, on a pris

$$\alpha := N \quad \text{et} \quad M := n\alpha + \sum_{j=1}^n n_j.$$

D'après ce qui précède, on a bien :

$$\forall i \in I, \quad y = \frac{a_i}{f_i^{n_i}} \quad \text{dans } B_{f_i},$$

ce qu'on voulait. ■

⁽²⁾ On pourra choisir, par exemple :

$$i(\mathbf{k}) \text{ tel que } k_{i(\mathbf{k})} = \max_j k_j \quad \text{et} \quad C_{\mathbf{k}} := \binom{M}{\mathbf{k}} \cdot \left(\prod_{j \neq i(\mathbf{k})} \lambda_j^{k_j} f_j^{k_j} \right) \cdot f_{i(\mathbf{k})}^{k_{i(\mathbf{k})}-n_{i(\mathbf{k})}-\alpha}.$$

(10.1.5) Une notation. On notera comme suit la catégorie des faisceaux sur \mathbf{Alg}_k^∂ pour la prétopologie de Zariski :

$$\mathbf{Faisc}_{\text{Zar}, k}^\partial := \mathbf{Faisc} \left((\mathbf{Alg}_k^\partial)^{\text{op}} + \text{Zariski} \right).$$

À l'occasion, on pourra appeler ces objets des *k-faisceaux Zariski* ou même des *faisceaux Zariski*.

10.2 Les schémas sont des faisceaux Zariski

Dans cette section, k n'est plus un anneau différentiel mais juste un anneau. On y fait un détour par le cas non-différentiel.

(10.2.1) La prétopologie de Zariski sur $(\mathbf{Alg}_k)^{\text{op}}$. On définit sur $(\mathbf{Alg}_k)^{\text{op}}$ une prétopologie de Grothendieck de façon tout à fait similaire à ce qu'on a fait dans la section (10.1). Ainsi, si A est une k -algèbre, on définit comme suit la collection $\text{Recouvr}(A)$ des recouvrements de A . D'abord, on considère les recouvrements « distingués » de A . Ceux sont les ensembles

$$\{A \longrightarrow A_{f_i}\}_i$$

de flèches de localisation, où la famille des f_i engendre A . Puis, on dit qu'un recouvrement de A est un ensemble de morphismes $\{A \longrightarrow B_i\}_i$ isomorphe à un recouvrement « distingué ».

On vérifie comme dans la partie (10.1) qu'il s'agit bien d'une prétopologie de Grothendieck. On appelle cette prétopologie *la prétopologie de Zariski* de $(\mathbf{Alg}_k)^{\text{op}}$. On dispose d'un critère analogue à la proposition 10.1.4 pour vérifier qu'un préfaisceau $F : \mathbf{Alg}_k \longrightarrow \mathbf{Ens}$ est un faisceau Zariski.

(10.2.2) Les schémas sont des faisceaux Zariski. Soit X un k -schéma. On considère $h_X = X(-) : \mathbf{Alg}_k \longrightarrow \mathbf{Ens}$ le foncteur des points de X , tel qu'on l'a défini dans le paragraphe (9.1.2). On montre que c'est un faisceau Zariski.

Proposition 10.2.1. Soit k un anneau. Soit X un k -schéma. Alors, le préfaisceau h_X est un faisceau pour la prétopologie de Zariski.

Démonstration. — Soient X et Y deux schémas. Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de Y qui recouvrent Y . Alors, on sait que se donner un morphisme f de Y dans X , c'est la même chose que se donner, pour tout i , un morphisme f_i de U_i dans X , tel que f_i et f_j coïncident sur $U_i \cap U_j$ pour tous i, j .

Dès lors, si K est une k -algèbre et si $(f_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments engendrant A , il est facile de vérifier que la suite

$$\text{Hom}_{\mathbf{Sch}}(\text{Spec } K, X) \longrightarrow \prod_{i \in I} \text{Hom}_{\mathbf{Sch}}(\text{Spec } K_{f_i}, X) \rightrightarrows \prod_{i, j \in I} \text{Hom}_{\mathbf{Sch}}(\text{Spec } K_{f_i \cdot f_j}, X)$$

est un égalisateur, dans la mesure où les schémas $\text{Spec } K_{f_i}$ s'identifient aux ouverts $D(f_i)$ de $\text{Spec } K$, et que les schémas $\text{Spec } K_{f_i \cdot f_j}$ s'identifient aux intersections $D(f_i) \cap D(f_j)$. Le critère pour qu'un préfaisceau Zariski soit un faisceau s'applique alors, ce qui conclut la preuve. ■

En fait, on peut caractériser, parmi les faisceaux Zariski, ceux qui sont isomorphes au foncteur des points d'un schéma. Ceci est fait dans [DG70], et c'est ce qu'on va faire, pour le cas différentiel, dans la suite de ce chapitre et dans le chapitre suivant (11).

10.3 Immersions ouvertes dans $\mathbf{Faisc}((\mathbf{Alg}_k^\partial)^{\text{op}})$

Dans toute cette section, k est un anneau différentiel.

(10.3.1) Faisceaux ou préfaisceaux ? Quelques remarques, avant d'aborder la question des immersions ouvertes, sur la catégorie \mathbf{Esp}_k^∂ , c'est-à-dire sur la catégorie $\mathbf{PréFaisc}((\mathbf{Alg}_k^\partial)^{\text{op}})$. Comme on l'a dit et vu dans le chapitre (9), on s'efforce de concevoir les objets $F \in \text{ob}(\mathbf{Esp}_k^\partial)$, c'est-à-dire les foncteurs

$$F : \mathbf{Alg}_k^\partial \longrightarrow \mathbf{Ens}$$

comme des objets de nature géométrique. On a vu dans ce même chapitre (9) qu'avec ce point de vue, on était capable de définir un certain nombre d'outils géométriques relatifs à ces objets F : points, anneau (différentiel) des sections globales, espaces tangents, voisinages formels, etc. Cependant, il nous manquait une notion importante : celle de topologie. L'objet de cette section est de combler cette lacune. En fait, on va plutôt définir une *prétopologie de Grothendieck*.

Néanmoins, pour ce faire, on va devoir se restreindre à une sous-catégorie de \mathbf{Esp}_k^∂ , à savoir la catégorie des faisceaux Zariski au-dessus de $(\mathbf{Alg}_k^\partial)^{\text{op}}$. Rappelons qu'un faisceau Zariski au-dessus de $(\mathbf{Alg}_k^\partial)^{\text{op}}$ est un foncteur

$$F : \mathbf{Alg}_k^\partial \longrightarrow \mathbf{Ens}$$

tel que pour toute k -algèbre différentielle A et pour toute famille finie $(f_i)_i$ d'éléments de A qui engendent A , la suite

$$F(A) \longrightarrow \prod_i F(A_{f_i}) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(A_{f_i f_j})$$

soit un égalisateur. Comme on l'a dit, on notera cette catégorie

$$\mathbf{Faisc}_{\text{Zar}, k}^\partial := \mathbf{Faisc}((\mathbf{Alg}_k^\partial)^{\text{op}} + \text{Zariski}).$$

Cette catégorie est en fait un « lieu pertinent » pour chercher et construire la catégorie des schémas différentiels. En effet, d'après la proposition 10.2.1 (et aussi d'après l'analogie non-différentiel de la proposition 11.2.1, à savoir que le foncteur des points restreint aux schémas affines est pleinement fidèle), on sait que la catégorie des schémas est une sous-catégorie pleine de la catégorie des faisceaux sur $(\mathbf{Alg}_k)^{\text{op}}$ pour la prétopologie de Zariski. On est ainsi dans la situation suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Fun}(\mathbf{Alg}_k, \mathbf{Ens}) = \mathbf{PréFaisc}((\mathbf{Alg}_k^\partial)^{\text{op}}) & \dashrightarrow & \mathbf{Esp}_k^\partial \\ \cup & & \cup \\ \mathbf{Faisc}_{\text{Zar}}((\mathbf{Alg}_k)^{\text{op}}) & \dashrightarrow & \mathbf{Faisc}_{\text{Zar}, k}^\partial \\ \cup & & \cup \\ \mathbf{Sch}_k & \dashrightarrow & ? \end{array}$$

On est ainsi assuré que la catégorie des schémas différentiels que l'on recherche est une sous-catégorie de la catégorie des faisceaux $\mathbf{Faisc}_{\text{Zar}, k}^\partial$.

Rappelons que, si A est une k -algèbre différentielle, on note $\underline{\text{diff-Spec}} A$ le k -espace algébro-différentiel représenté par A , ie :

$$(\underline{\text{diff-Spec}} A)(K) := \text{Hom}_{\mathbf{Alg}_k^\partial}(A, K).$$

On a donc deux notations, $\underline{\text{diff-Spec}} A$ et h_A pour le même objet.

(10.3.2) Immersions ouvertes : motivation. Soit $F \in \mathbf{Esp}_k^\partial$ et soient G un autre k -espace algébro-différentiel, ainsi que

$$f : G \longrightarrow F$$

un morphisme. On veut définir dans quel cas f est une immersion ouverte.

- D'abord, par analogie avec l'axiome de stabilité par changement de base des prétopologies de Grothendieck, on attend d'une telle notion d'immersion ouverte qu'elle vérifie : si le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G' & \xrightarrow{f'} & F' \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \xrightarrow{f} & F \end{array}$$

est cartésien et que f est une immersion ouverte, alors il en est de même pour f' . En d'autres termes, on attend de la notion d'immersion ouverte qu'elle soit *stable par changement de base*.

- Par ailleurs, on s'attend, si f est une immersion ouverte, à ce que G soit un sous-objet de F . Autrement dit, à ce que

$$f_K : G(K) \longrightarrow F(K)$$

soit injectif pour toute k -algèbre différentielle K . Compte tenu de la proposition 2.6.1, cette condition équivaut à « f est un monomorphisme (dans \mathbf{Alg}_k^∂) ».

- Enfin, *a priori*, on a déjà une notion d'immersion ouverte (les immersions ouvertes Zariski) dans le cas des objets représentables. En effet, si A est une k -algèbre différentielle, on sait définir les fermés Zariski de $\text{Spec } A$ à l'aide des idéaux⁽³⁾ de A . On peut déduire de cette définition une caractérisation sur le foncteur des points des immersions ouvertes. Plus précisément, on sait alors que les immersions ouvertes de $\text{Spec } A$ (ou plus exactement, leur foncteur des points) sont toutes isomorphes aux foncteurs du type

$$\begin{aligned} (\underline{\text{diff-Spec}} A)_I(K) &:= \{\phi : A \longrightarrow K \mid (\phi(I)) = K\} \\ &\subset (\underline{\text{diff-Spec}} A)(K) \end{aligned}$$

pour toute k -algèbre différentielle K , où I est un idéal de A . En effet, considérons un morphisme $\phi : A \longrightarrow K$ et $f : \text{Spec } K \longrightarrow \text{Spec } A$ le morphisme de schémas correspondant. Soient I un idéal de A et U l'ouvert de $\text{Spec } A$ qu'il définit. Alors, le morphisme f se factorise par l'inclusion $U \hookrightarrow \text{Spec } A$ si, et seulement si,

$$\begin{aligned} \forall x \in \text{Spec } K, \quad f(x) &\notin V(I) \\ \text{ie} \quad \forall \mathfrak{p} \text{ idéal premier de } K, \quad I &\not\subseteq f(\mathfrak{p}) \\ \text{ie} \quad \forall \mathfrak{p} \text{ idéal premier de } K, \quad I &\not\subseteq \phi^{-1}(\mathfrak{p}). \end{aligned}$$

⁽³⁾pas forcément différentiels

Or, cette dernière assertion est équivalente à

$$(\phi(I)) = K.$$

En effet, dans un sens, supposons que $\phi(I)$ engendre K . Soit \mathfrak{p} un idéal de A tel que $I \subset \phi^{-1}(\mathfrak{p})$. Alors, $\phi(I) \subset \mathfrak{p}$ et donc $\mathfrak{p} = K$: ainsi, \mathfrak{p} ne peut être un idéal premier. Réciproquement, supposons que tout idéal premier vérifie $I \not\subset \phi^{-1}(\mathfrak{p})$. Si l'idéal $(\phi(I))$ n'est pas égal à K , on peut trouver un idéal premier \mathfrak{p}_0 tel que $(\phi(I)) \subset \mathfrak{p}_0$. On a alors $I \subset \phi^{-1}(\mathfrak{p}_0)$, ce qui est absurde.

Avant de continuer, remarquons que le k -espace algébro-différentiel $(\underline{\text{diff-Spec}} A)_I$ ne dépend que du radical de I :

Proposition 10.3.1. *Soient k un anneau différentiel, A une k -algèbre différentielle et I, J deux idéaux de A . Alors,*

$$(\underline{\text{diff-Spec}} A)_I = (\underline{\text{diff-Spec}} A)_J \iff \sqrt{I} = \sqrt{J}.$$

Démonstration. — Démontrons cet avatar d'un résultat bien connu. On garde les notations de l'énoncé. Supposons $\sqrt{I} = \sqrt{J}$ et montrons que $(\underline{\text{diff-Spec}} A)_I \subset (\underline{\text{diff-Spec}} A)_J$. Soit donc K une k -algèbre différentielle et $\phi \in (\underline{\text{diff-Spec}} A)_I(K)$; $\phi : A \rightarrow K$ un morphisme tel que $\phi(I)$ engendre K . Soient donc $x_1, \dots, x_n \in I$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ tels que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \phi(x_i) = 1.$$

Comme les x_i sont dans I , ils sont aussi dans \sqrt{J} : soient donc $k_1, \dots, k_n \in \mathbf{N}$ tels que, pour tout i , $x_i^{k_i} \in J$. On pose, comme on commence à en avoir l'habitude, $N = \sum_{i=1}^n k_i$. On a alors

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \phi(x_i) \right)^N = 1;$$

on sait que dans cette somme, tous les membres vont comporter au moins un facteur du type $\phi(x_i^{k_i}) \in \phi(J)$. Ainsi, on voit que $\phi(J)$ engendre K . Donc, $\phi \in (\underline{\text{diff-Spec}} A)_J(K)$, ce qu'on voulait.

Réciproquement, supposons que $(\underline{\text{diff-Spec}} A)_I = (\underline{\text{diff-Spec}} A)_J$ et montrons que $I \subset \sqrt{J}$. Soit donc $x \in I$. On considère le morphisme de localisation $\phi : A \rightarrow A_x$. On a $\phi \in (\underline{\text{diff-Spec}} A)_I(A_x)$, puisque $x \in I$. On a donc $\phi \in (\underline{\text{diff-Spec}} A)_J(A_x)$. Soient donc $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in A$, $k_1, \dots, k_n \in \mathbf{N}$ et $x_1, \dots, x_n \in J$ tels que

$$\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{x^{k_i}} \cdot x_i = 1 \quad \text{dans } A_x.$$

Il existe donc $N \in \mathbf{N}$ et des $\tilde{\lambda}_i$ tels que

$$\sum_{i=1}^n \tilde{\lambda}_i \cdot x_i = x^N \quad \text{dans } A.$$

Ainsi, $x^N \in J$, ie $x \in \sqrt{J}$, ce qu'on voulait. ■

(10.3.3) Immersions ouvertes : définition. Revenons à la définition des immersions ouvertes. On pose :

Définition 10.3.2. Soit k un anneau différentiel. Soient F et G deux k -espaces algébro-différentiels et soit

$$f : G \longrightarrow F$$

un morphisme. On dit que f est une immersion ouverte si

(i) f est un monomorphisme dans \mathbf{Esp}_k^∂ .

(ii) pour toute k -algèbre différentielle A et pour toute flèche $\underline{\text{diff-Spec}} A \longrightarrow F$, il existe un idéal I de A et une flèche $(\underline{\text{diff-Spec}} A)_I \longrightarrow G$ qui rendent le carré

$$\begin{array}{ccc} (\underline{\text{diff-Spec}} A)_I & \xhookrightarrow{\quad} & \underline{\text{diff-Spec}} A \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \xrightarrow{f} & F \end{array}$$

cartésien dans \mathbf{Esp}_k^∂ .

Remarques. — On peut alors vérifier, et c'est l'objet du paragraphe suivant, que tous les morphismes « isomorphes » à

$$(\underline{\text{diff-Spec}} A)_I \longrightarrow \underline{\text{diff-Spec}} A,$$

où A est une k -algèbre différentielle et où I est un idéal de A , sont bien des immersions ouvertes.

— Remarquons aussi que, dans cette définition, on a fait le choix, dans une certaine mesure, de ne pas tenir compte du caractère différentiel de l'anneau A : les ouverts de $\text{Spec } A$ qu'on choisit sont tous les ouverts Zariski et pas seulement les ouverts Zariski invariants. On aurait pu, dans cette définition, remplacer la condition « il existe I un idéal de A » par « il existe I un idéal différentiel de A ». La situation aurait alors été complètement différente : on aurait muni nos objets de la topologie de Carrà Ferro. Cela est *a priori* positif *mais*, quand on dira qu'un schéma est un faisceau recouvert par des objets affines, cela sera embêtant : en effet, un schéma X muni d'un champ de vecteurs peut très bien ne pas admettre de recouvrement Carrà Ferro par des affines...

— Cette définition, d'une certaine manière, est un entre-deux entre les approches de [DG70] et de [TV09]. En effet, on s'est inspiré de la définition 3.6 du chapitre 1 de [DG70] pour $(\underline{\text{diff-Spec}} A)_I$, et on s'est inspiré de l'approche fonctorielle (avec les carrés cartésiens) de [TV09] pour passer du cas affine au cas d'un préfaisceau quelconque. ◇

(10.3.4) Immersions ouvertes : le cas affine. Commençons notre étude des immersions ouvertes par un cas simple : étant donné $A \in \mathbf{Alg}_k^\partial$, quelles sont les immersions ouvertes de $\underline{\text{diff-Spec}} A$? Comme on s'y attend, ce sont les morphismes du type

$$(\underline{\text{diff-Spec}} A)_I \longrightarrow \underline{\text{diff-Spec}} A,$$

avec I idéal de A . Plus précisément :

Proposition 10.3.3. Soit $A \in \mathbf{Alg}_k^\partial$. Alors, un morphisme $F \longrightarrow \underline{\text{diff-Spec}} A$ est une immersion ouverte si, et seulement si, il est isomorphe à un morphisme du type

$$(\underline{\text{diff-Spec}} A)_I \longrightarrow \underline{\text{diff-Spec}} A,$$

avec I un idéal de A .

Démonstration. — La condition est évidemment nécessaire. Soient $A \in \mathbf{Alg}_k^\partial$ et I un idéal de A . Montrons donc que $(\underline{\text{diff-Spec}} A)_I \rightarrow \underline{\text{diff-Spec}} A$ est une immersion ouverte. Soit donc $B \in \mathbf{Alg}_k^\partial$ et soit

$$\underline{\text{diff-Spec}} B \rightarrow \underline{\text{diff-Spec}} A$$

un morphisme. Il vient d'un morphisme $\phi : A \rightarrow B$ de k -algèbres différentielles. On cherche un idéal J de B . On prend, naturellement $J = (\phi(I))$. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (\underline{\text{diff-Spec}} B)_J & \longrightarrow & \underline{\text{diff-Spec}} B \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\underline{\text{diff-Spec}} A)_I & \longrightarrow & \underline{\text{diff-Spec}} A \end{array}$$

est bien défini, et il n'est pas difficile de vérifier que c'est un carré cartésien. ■

(10.3.5) Immersions ouvertes dans le cas affine, un cas particulier. Démontrons le lemme suivant, dont on aura besoin par la suite :

Lemme 10.3.4. *Soient k un anneau différentiel, A une k -algèbre différentielle et I, J deux idéaux de A . Alors, le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} (\underline{\text{diff-Spec}} A)_{IJ} & \longrightarrow & (\underline{\text{diff-Spec}} A)_I \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ (\underline{\text{diff-Spec}} A)_J & \longrightarrow & \underline{\text{diff-Spec}} A \end{array}$$

est cartésien dans $\mathbf{Faisc}_{Zar,k}^\partial$ et dans \mathbf{Esp}_k^∂ .

Démonstration. — On garde les notations de l'énoncé. Il suffit de le prouver dans \mathbf{Esp}_k^∂ , car le foncteur oubli commute aux limites. Puis, il suffit de le vérifier « points par points », car les limites dans \mathbf{Esp}_k^∂ se calculent « points par points ». Soit donc K une k -algèbre différentielle. On veut montrer que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (\underline{\text{diff-Spec}} A)_{IJ}(K) & \longrightarrow & (\underline{\text{diff-Spec}} A)_I(K) \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ (\underline{\text{diff-Spec}} A)_J(K) & \longrightarrow & (\underline{\text{diff-Spec}} A)(K) \end{array}$$

est cartésien dans \mathbf{Ens} . Pour montrer ceci, il suffit de montrer que, si $\phi : A \rightarrow K$ est un morphisme, on a

$$((\phi(I)) = K \quad \text{et} \quad (\phi(J)) = K) \iff ((\phi(IJ)) = K).$$

Le sens \iff est évident. Montrons le sens \implies . On suppose que $(\phi(I)) = K$ et $(\phi(J)) = K$. Soient des $\lambda_i, \mu_j \in K$, des $x_i \in I$ et des $y_j \in J$ tels que

$$\sum_i \lambda_i \phi(x_i) = 1 \quad \text{et} \quad \sum_j \mu_j \phi(y_j) = 1.$$

En multipliant ces deux égalités, on obtient

$$\sum_{i,j} \lambda_i \mu_j \phi(x_i y_j) = 1.$$

Comme les $x_i y_j$ sont dans IJ , on en déduit que $\phi(IJ) = K$, ce qui conclut la preuve. ■

(10.3.6) Immersions ouvertes : stabilité par changement de base. On démontre :

Proposition 10.3.5. Soit k un anneau différentiel et soit

$$\begin{array}{ccc} G' & \xrightarrow{f'} & F' \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ G & \xrightarrow{f} & F \end{array}$$

un carré cartésien de k -espaces algébro-différentiels. Alors, si f est une immersion ouverte, f' en est aussi une.

Démonstration. — On reprend les notations de l'énoncé. Déjà, grâce à la proposition 2.1.5, on sait que f' est un monomorphisme. Soit maintenant A une k -algèbre différentielle et $\underline{\text{diff-Spec}} A \rightarrow F'$ un morphisme. Considérons alors le produit fibré $G' \times_{F'} \underline{\text{diff-Spec}} A$, de sorte que le carré

$$\begin{array}{ccc} G' \times_{F'} \underline{\text{diff-Spec}} A & \longrightarrow & \underline{\text{diff-Spec}} A \\ \downarrow & & \downarrow \\ G' & \longrightarrow & F' \end{array}$$

soit cartésien. En le « collant » au carré cartésien de l'énoncé, on obtient un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} G' \times_{F'} \underline{\text{diff-Spec}} A & \longrightarrow & \underline{\text{diff-Spec}} A \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \xrightarrow{f} & F \end{array}$$

Par unicité du produit fibré et car f est une immersion ouverte, on sait alors qu'il existe un idéal I de A tel que

$$G' \times_{F'} \underline{\text{diff-Spec}} A \simeq (\underline{\text{diff-Spec}} A)_I,$$

ce qu'on voulait en fait montrer. ■

(10.3.7) Immersions ouvertes : le cas des faisceaux. Si on a commencé par définir les immersions ouvertes dans le cadre très général des espaces k -algébro-différentiels, on va voir que pour qu'elles vérifient de bonnes propriétés, on va devoir se restreindre aux faisceaux. La définition 10.3.2 s'adapte très bien à la catégorie $\mathbf{Fais}_{\text{Zar},k}^{\partial}$, comme on va le voir dans ce qui suit.

Pour commencer, si F et G sont deux tels faisceaux et que $f : F \rightarrow G$ est un morphisme, on sait, par exemple en vertu des propositions 2.6.1 et 2.6.3, que f est un monomorphisme « vu dans $\mathbf{Esp}_k^{\partial}$ » si, et seulement si, il en est un « vu dans $\mathbf{Fais}_{\text{Zar},k}^{\partial}$ ».

Par ailleurs, les objets $(\underline{\text{diff-Spec}} A)_I$ sont bien des faisceaux :

Proposition 10.3.6. Soient k un anneau différentiel, A une k -algèbre différentielle et I un idéal de A . Alors, le k -espace algébro-différentiel

$$(\underline{\text{diff-Spec}} A)_I$$

est un faisceau pour la prétopologie Zariski de $(\mathbf{Alg}_k^{\partial})^{\text{op}}$.

Démonstration. — On sait déjà — c'est la proposition 10.1.5 — que le préfaisceau $\underline{\text{diff-Spec}} A$ est un faisceau. Soit donc I un idéal de A . Soit K une k -algèbre différentielle. On va appliquer le critère 10.1.4 afin de vérifier que $(\underline{\text{diff-Spec}} A)_I$ est un faisceau. Soit donc $(f_j)_{j \in J}$ une famille finie d'éléments de K qui l'engendre. On veut montrer que la suite

$$(\underline{\text{diff-Spec}} A)_I(K) \xrightarrow{i} \prod_{j \in J} (\underline{\text{diff-Spec}} A)_I(K_{f_j}) \xrightarrow[p]{q} \prod_{i,j \in J} (\underline{\text{diff-Spec}} A)_I(K_{f_i \cdot f_j})$$

est un égalisateur. Car $\underline{\text{diff-Spec}} A$ est un faisceau, on vérifie facilement que l'application i est injective. Soit maintenant

$$\phi_j : A \longrightarrow K_{f_j}$$

une famille de morphismes tels que, pour tout j , $\phi_j(I)$ engendre l'idéal plein de K_{f_j} , et qui ont la même image par p et q . Comme $\underline{\text{diff-Spec}} A$ est un faisceau, il existe donc un morphisme

$$\phi : A \longrightarrow K$$

qui factorise tous les morphismes ϕ_j . Ce qu'on doit vérifier est que l'image $\phi(I)$ engendre bien K . Soit $j \in J$ un indice. On sait que $\phi_j(I)$ engendre K_{f_j} . Il existe donc des $\lambda_k \in K$, des entiers n_k et des éléments $x_k \in I$ tels que

$$\sum_k \frac{\lambda_k}{f_j^{n_k}} \phi_j(x_k) = 1 \quad \text{dans } K_{f_j}.$$

On en déduit qu'il existe des μ_k dans K et un entier N tels que

$$\sum_k \mu_k \phi_j(x_k) = f_j^N \quad \text{dans } K.$$

Le lemme 10.1.3 permet alors de conclure. ■

Maintenant, soit $G \longrightarrow F$ un morphisme entre deux faisceaux, soit A est une k -algèbre différentielle et soit I un idéal de A . On s'intéresse à l'éventuel caractère cartésien du diagramme

$$\begin{array}{ccc} (\underline{\text{diff-Spec}} A)_I & \hookrightarrow & \underline{\text{diff-Spec}} A \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \xrightarrow{f} & F \end{array}$$

On a :

$$\begin{array}{ccc} (\underline{\text{diff-Spec}} A)_I & \hookrightarrow & \underline{\text{diff-Spec}} A \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \xrightarrow{f} & F \end{array} \quad \text{est cartésien dans } \text{Esp}_k^\partial$$

⇓

$$\begin{array}{ccc} (\underline{\text{diff-Spec}} A)_I & \hookrightarrow & \underline{\text{diff-Spec}} A \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \xrightarrow{f} & F \end{array} \quad \text{est cartésien dans } \text{Fais}_{\text{Zar}, k}^\partial.$$

Le sens « haut \implies bas » est vrai car le foncteur oubli $\mathbf{Fais}_{\text{Zar},k}^\partial \rightarrow \mathbf{Esp}_k^\partial$ est pleinement fidèle. Le sens « bas \implies haut » repose quant à lui sur l'existence d'un adjoint à gauche au foncteur oubli $\mathbf{Fais}_{\text{Zar},k}^\partial \rightarrow \mathbf{Esp}_k^\partial$. Rappelons que cet adjoint, comme on l'a vu au paragraphe (2.6.6), est le foncteur « faisceau associé ». En effet, dans le cas très général où un foncteur F possède un adjoint à gauche⁽⁴⁾, on sait que F commute aux limites quelconques. C'est le théorème 2.5.2, qu'on a rappelé dans la partie 2. On peut appliquer ce théorème à un type de limite particulière ; si $\omega : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est un foncteur qui admet un adjoint à gauche, on a

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Y \end{array} \quad \text{cartésien dans } \mathcal{C} \implies \begin{array}{ccc} \omega(X') & \longrightarrow & \omega(Y') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \omega(X) & \longrightarrow & \omega(Y) \end{array} \quad \text{cartésien dans } \mathcal{D}.$$

On en déduit l'équivalence qu'on voulait démontrer.

Si on fait le bilan de ces trois faits, on peut énoncer :

Proposition 10.3.7. *Soit k un anneau différentiel. Soient F et G deux k -faisceaux Zariski. Soit $f : G \rightarrow F$ un morphisme. Alors, f est une immersion ouverte si, et seulement si, les conditions suivantes sont vérifiées :*

- (i) f est un monomorphisme dans $\mathbf{Fais}_{\text{Zar},k}^\partial$.
- (ii) pour toute k -algèbre A et pour toute flèche $\underline{\text{diff-Spec}} A \rightarrow F$, il existe un idéal I de A et une flèche $(\underline{\text{diff-Spec}} A)_I \rightarrow G$ qui rendent le carré

$$\begin{array}{ccc} (\underline{\text{diff-Spec}} A)_I & \hookrightarrow & \underline{\text{diff-Spec}} A \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \xrightarrow{f} & F \end{array}$$

cartésien dans $\mathbf{Fais}_{\text{Zar},k}^\partial$.

Autrement dit, si on avait défini la notion d'être une immersion ouverte directement dans la catégorie des faisceaux, alors, on aurait obtenu une définition équivalente.

Remarque. — En fait, le point (ii) entraîne le point (i) : on pourrait démontrer que, dans le cadre général d'une catégorie munie d'une prétopologie de Grothendieck sous-canonical, on a l'équivalence suivante : pour tous $X, Y \in \mathbf{Faisc}(\mathcal{C})$,

$X \rightarrow Y$ est un mono (*resp.* un épi, un iso)

\Updownarrow

$\forall Y_0 \in \mathcal{C}$, le morphisme $X \times_Y h_{Y_0} \rightarrow h_{Y_0}$, dans

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y h_{Y_0} & \longrightarrow & h_{Y_0} \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

est un mono (*resp.* un épi, un iso).

◊

⁽⁴⁾Le cas typique d'un foncteur qui possède un adjoint à gauche est un « foncteur oubli ». C'est l'exemple qu'on conseille d'avoir en tête face à un « foncteur qui admet un adjoint à gauche ».

(10.3.8) Immersions ouvertes : stabilité par composition. Dans ce paragraphe, on démontre cette propriété, *pour les faisceaux*. Pour démontrer que les immersions ouvertes sont stables par composition, on va utiliser un petit peu de machinerie de théorie des catégories. Ainsi, on se donne deux immersions ouvertes

$$H \longrightarrow G \quad \text{et} \quad G \longrightarrow F,$$

où F , G et H sont des faisceaux Zariski. Avant de passer à la partie la plus difficile, remarquons que la composée de ces morphismes est bien un monomorphisme, en tant que composé de deux monomorphismes.

Puis, soit A une k -algèbre différentielle et $\underline{\text{diff-Spec}} A \longrightarrow F$ un morphisme. On sait, par définition, qu'il existe un idéal I tel que le carré

$$\begin{array}{ccc} (\underline{\text{diff-Spec}} A)_I & \longrightarrow & \underline{\text{diff-Spec}} A \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \longrightarrow & F \end{array}$$

soit cartésien. Ainsi, la question qu'on se pose peut se réduire au lemme suivant :

Lemme 10.3.8. Soit k un anneau différentiel. Soient G et H deux faisceaux Zariski au-dessus de Alg_k^∂ . Soit $H \longrightarrow G$ une immersion ouverte. Soient A une k -algèbre différentielle et I un idéal de A . Soit

$$(\underline{\text{diff-Spec}} A)_I \longrightarrow G$$

un morphisme. Alors, il existe un idéal J de A , contenu dans I , et un morphisme

$$(\underline{\text{diff-Spec}} A)_J \longrightarrow H$$

tels que le carré

$$\begin{array}{ccc} (\underline{\text{diff-Spec}} A)_J & \longrightarrow & (\underline{\text{diff-Spec}} A)_I \\ \downarrow & & \downarrow \\ H & \longrightarrow & G \end{array}$$

soit cartésien, dans $\text{Fais}^\partial_{Zar,k}$.

Remarque. — Autrement dit, ce lemme dit qu'on peut étendre la propriété fondamentale des immersions ouvertes : non seulement elle s'applique à tous les morphismes $\underline{\text{diff-Spec}} A \longrightarrow G$ mais aussi à tous les morphismes $(\underline{\text{diff-Spec}} A)_I \longrightarrow G$, pour tout idéal I . \diamond

Avant de démontrer ce lemme, indiquons comment l'on va procéder. D'abord, on constate que $(\underline{\text{diff-Spec}} A)_I$ est la limite inductive des $\underline{\text{diff-Spec}} A_f$ pour $f \in I$. En appliquant la propriété d'immersion ouverte à $\underline{\text{diff-Spec}} A_f$, on obtient un idéal J_f de A_f qui rend cartésien le carré

$$\begin{array}{ccc} (\underline{\text{diff-Spec}} A_f)_{J_f} & \longrightarrow & \underline{\text{diff-Spec}} A_f \\ \downarrow & & \downarrow \\ H & \longrightarrow & G \end{array}$$

On a envie de prendre la limite inductive de ces carrés cartésiens. On remarque alors que, pour un certain idéal I_f de A , les espaces $(\underline{\text{diff-Spec}} A_f)_{J_f}$ et $(\underline{\text{diff-Spec}} A)_{I_f}$ sont isomorphes.

On considère alors la limite inductive (cofiltrante) des carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccc} (\underline{\text{diff-Spec}} A)_{I_f} & \longrightarrow & \underline{\text{diff-Spec}} A_f \\ \downarrow & & \downarrow \\ H & \longrightarrow & G \end{array}$$

et on conclut :

- en calculant la limite inductive $\varinjlim_f (\underline{\text{diff-Spec}} A)_{I_f}$
- puis en montrant que cette limite inductive (cofiltrante) commute au produit cartésien.

Malheureusement, on ne pourra pas appliquer le théorème très général 2.6.8 de commutation de limites finies et de colimites filtrantes, car les colimites dont il s'agit ici sont cofiltrantes et non pas filtrantes.

Avant de suivre ce programme, on énonce et démontre plusieurs petits lemmes.

Lemme 10.3.9. $(\underline{\text{diff-Spec}} A)_I$ est la limite inductive des $\underline{\text{diff-Spec}} A_f$ pour $f \in I$, dans la catégorie $\mathbf{Fais}_{\text{Zar},k}^\partial$ des faisceaux Zariski.

Remarque. — C'est important de prendre la limite des $\underline{\text{diff-Spec}} A_f$ dans $\mathbf{Fais}_{\text{Zar},k}^\partial$. Si on avait cherché la limite dans \mathbf{Esp}_k^∂ , le résultat n'aurait pas été le même. \diamond

Démonstration du lemme 10.3.9. — Plus précisément, on considère la (petite) catégorie

$$\mathbf{IdéauxPrinc}(I)$$

dont les objets sont les $f \in I$. Pour les morphismes, on met une flèche (et une seule) dans $\text{Hom}(f,g)$ si (f) est inclus dans (g) . On considère alors le foncteur

$$\Phi : \mathbf{IdéauxPrinc}(I) \longrightarrow \mathbf{Fais}_{\text{Zar},k}^\partial$$

qui à $f \in I$ associe l'espace $\underline{\text{diff-Spec}} A_f$. Si $(g) \subset (f)$, on a bien un morphisme $A_f \longrightarrow A_g$ et donc un morphisme $\underline{\text{diff-Spec}} A_g \longrightarrow \underline{\text{diff-Spec}} A_f$. Le résultat apparaît alors comme un cas particulier du lemme 10.3.12 qu'on démontrera plus loin. ■

Lemme 10.3.10. Soient k un anneau différentiel, A une k -algèbre, $f \in A$ un élément de A et J_f un idéal de A_f . On note $i_f : A \longrightarrow A_f$ la flèche de localisation. Alors, en posant

$$I_f := (f) \cap i_f^{-1}(J_f) \subset A,$$

on a que

$$(\underline{\text{diff-Spec}} A_f)_{J_f} \longrightarrow (\underline{\text{diff-Spec}} A)_{I_f}$$

est un isomorphisme.

Démonstration du lemme 10.3.10. — Définissons d'abord ce morphisme. Soit K une k -algèbre et

$$\phi \in (\underline{\text{diff-Spec}} A_f)_{J_f}(K) :$$

$\phi : A_f \longrightarrow K$ est un morphisme tel que $\phi(J_f)$ engendre K . On associe à ϕ un morphisme

$$\phi' := \phi \circ i_f : A \longrightarrow A_f \longrightarrow K.$$

Il nous reste à vérifier que $\phi'(I_f)$ engendre bien K . Comme $\phi(J_f)$ engendre K , il existe des $\lambda_i \in K$, des $x_i \in A$ et des $n_i \in \mathbf{N}$ tels que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \phi\left(\frac{x_i}{f^{n_i}}\right) = 1$$

et tels que pour tout i , $\frac{x_i}{f^{n_i}} \in J_f$. En multipliant par une puissance de $\phi(f)$ suffisamment grande, on obtient une nouvelle égalité :

$$\sum_{i=1}^n \mu_i \phi(fx_i) = \phi(f)^N,$$

où les $\mu_i \in K$ et où $N \in \mathbf{N}$. De plus, les éléments $y_i := fx_i$ sont dans $(f) \cap i_f^{-1}(J_f)$. Par conséquent, l'idéal engendré par $\phi'(I_f)$ contient $\phi(f)^N$. Or, ce dernier élément est inversible, car ϕ' se factorise par $i_f : A \longrightarrow A_f$. Ainsi, le morphisme

$$(\underline{\text{diff-Spec}} A_f)_{J_f} \longrightarrow (\underline{\text{diff-Spec}} A)_{I_f}$$

est bien défini.

Montrons qu'il est bijectif. D'abord, il est clairement injectif : si deux morphisme ϕ_1 et $\phi_2 : A_f \longrightarrow K$ ont la même « restriction » à A , alors, ils sont égaux⁽⁵⁾. Montrons qu'il est surjectif : soit $\phi : A \longrightarrow K$ un morphisme tel que $\phi(I_f)$ engendre K . On montre d'abord que ϕ se factorise par $i_f : A \longrightarrow A_f$, en montrant que $\phi(f)$ est inversible dans K . Comme $\phi(J_f)$ engendre K , il existe des éléments x_i dans A et des éléments λ_i dans K tels que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \phi(fx_i) = 1,$$

où de plus les fx_i sont dans I_f . En « détachant le $\phi(f)$ », on voit bien que ce dernier est inversible dans K . Il nous faut montrer maintenant que le morphisme $\phi' : A_f \longrightarrow K$ ainsi obtenu vérifie que $\phi'(J_f)$ engendre K . C'est évident, au vu de la précédente équation, puisque les fx_i , en tant qu'éléments de I_f sont aussi des éléments de J_f . ■

Pour énoncer le lemme qui vient, on va avoir besoin de la définition suivante. Pour commencer, si A est un anneau, on note $\mathbf{Idéaux}(A)$ la catégorie des idéaux de A . Ses objets sont les idéaux de A ; pour les morphismes, on pose

$$\text{Hom}_{\mathbf{Idéaux}(A)}(I, J) = \{\subset\} \text{ si } I \subset J \quad \text{et} \quad \text{Hom}_{\mathbf{Idéaux}(A)}(I, J) = \emptyset \text{ sinon.}$$

La catégorie $\mathbf{Idéaux}(A)$ est donc associée à l'ensemble ordonné des idéaux. On définit :

Définition 10.3.11. Soit A un anneau. Soit \mathcal{I} une petite catégorie et

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{I} & \longrightarrow & \mathbf{Idéaux}(A) \\ i & \longmapsto & I_i \end{array}$$

un foncteur (covariant). On dit que Φ est fortement cofiltrant si

$$\forall i, j \in \text{ob}(\mathcal{I}) \quad \forall (x_i, x_j) \in I_i \times I_j \quad \exists \ell \in \text{ob}(\mathcal{I}) \quad \exists \ell \rightarrow i \quad \exists \ell \rightarrow j \quad | \quad x_i \cdot x_j \in I_\ell.$$

⁽⁵⁾Autrement dit, $A \longrightarrow A_f$ est un épimorphisme.

On peut alors énoncer :

Lemme 10.3.12. *Soit A une k -algèbre différentielle et soit \mathcal{I} une petite catégorie. Soit*

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{I} & \longrightarrow & \mathbf{Idéaux}(A) \\ i & \longmapsto & I_i \end{array}$$

un foncteur fortement cofiltrant. Alors, dans la catégorie $\mathbf{Fais}_{Zar,k}^\partial$, on a

$$\varinjlim_{i \in \mathcal{I}} (\underline{\text{diff-Spec } A})_{I_i} = (\underline{\text{diff-Spec } A})_I,$$

où l'idéal I est défini par

$$I := \sum_{i \in \mathcal{I}} I_i.$$

Remarque. — Ce lemme généralise le lemme 10.3.9, dans la mesure où $\underline{\text{diff-Spec } A_f}$ est isomorphe à $(\underline{\text{diff-Spec } A})_{(f)}$, où l'idéal I est bien égal à

$$I = \sum_{f \in I} (f),$$

et dans la mesure où la famille $(f)_{f \in I}$ est fortement cofiltrante. \diamondsuit

Démonstration du lemme 10.3.12. — D'abord, comme, pour tout $i \in \text{ob}(\mathcal{I})$, on a $I_i \subset I$, on a bien une collection « compatible » de morphismes

$$(\underline{\text{diff-Spec } A})_{I_i} \longrightarrow (\underline{\text{diff-Spec } A})_I.$$

Montrons qu'il s'agit bien de la limite inductive qu'on veut calculer. Soit X un k -faisceau Zariski, muni d'une collection « compatible » de morphismes

$$\varphi_i : (\underline{\text{diff-Spec } A})_{I_i} \longrightarrow X.$$

On veut en déduire une unique flèche $\varphi : (\underline{\text{diff-Spec } A})_I \longrightarrow X$. Soit donc K une k -algèbre différentielle et $\phi \in (\underline{\text{diff-Spec } A})_I(K)$; c'est-à-dire, $\phi : A \longrightarrow K$ est un morphisme tel que $\phi(I)$ engendre K . On veut lui associer un élément $x \in X(K)$. On va procéder par recollement : pour construire l'élément $x \in X(K)$, comme X est un faisceau, il suffit de construire une famille x_i , avec $x_i \in X(K_{g_i})$, où $(g_i)_i$ est une famille qui engendre K , et où les x_i « coïncident sur les intersections ».

Comme $\phi(I)$ engendre K , il existe des $\lambda_i \in K$ et des $f_i \in I$ tels que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \phi(f_i) = 1. \tag{1}$$

Chaque $f_i \in I$, par définition de l'idéal I , peut s'écrire

$$f_i = g_{i,1} + g_{i,2} + \cdots + g_{i,k_i}$$

où chaque $g_{i,j}$ est un élément d'un $I_{m(i,j)}$. Ainsi, en réorganisant l'identité (1), on peut écrire

$$\sum_{i=1}^m \mu_i \phi(g_i) = 1$$

où $\mu_i \in K$ et où $g_i \in I_{n(i)}$, où $n(i)$ est un élément bien choisi de notre petite catégorie cofiltrante \mathcal{I} . On voit ainsi que la famille des $\phi(g_i)$ engendre K , et donc que les $K \rightarrow K_{\phi(g_i)}$ forment un recouvrement de K . Soit alors i compris entre 1 et n . On va associer à ϕ un élément de $X(K_{\phi(g_i)})$. Si on considère le morphisme

$$\phi_i := A \rightarrow K \rightarrow K_{\phi(g_i)},$$

alors, on a bien que $\phi_i(I_{n(i)})$ engendre K_{g_i} . En effet, cet ensemble contient $\phi(g_i)$, qui est inversible. Ainsi, on a $\phi_i \in (\underline{\text{diff-Spec}} A)_{I_{n(i)}}(K_{\phi(g_i)})$. Grâce au morphisme

$$\varphi_{n(i)} : (\underline{\text{diff-Spec}} A)_{I_{n(i)}} \rightarrow X,$$

donné par hypothèse, on obtient un élément $x_i \in X(K_{\phi(g_i)})$.

Montrons que cette famille $(x_i)_i$ est compatible. Soient donc i et j deux entiers. Comme le foncteur Φ est fortement cofiltrant, on sait qu'il existe un élément $\ell \in \mathcal{I}$ tel que

$$\ell \rightarrow n(i), \quad \ell \rightarrow n(j) \quad \text{et tel que} \quad g_i \cdot g_j \in I_\ell$$

En particulier, on a donc

$$I_\ell \subset I_{n(i)} \quad \text{et} \quad I_\ell \subset I_{n(j)}.$$

Et donc, on a aussi les deux morphismes correspondant

$$(\underline{\text{diff-Spec}} A)_{I_\ell} \rightarrow (\underline{\text{diff-Spec}} A)_{I_{n(i)}} \quad \text{et} \quad (\underline{\text{diff-Spec}} A)_{I_\ell} \rightarrow (\underline{\text{diff-Spec}} A)_{I_{n(j)}}.$$

On veut montrer que les images de $x_i \in X(K_{\phi(g_i)})$ et de $x_j \in X(K_{\phi(g_j)})$ dans $X(K_{\phi(g_i)\phi(g_j)})$, obtenues grâce aux morphismes

$$K_{\phi(g_i)} \rightarrow K_{\phi(g_i)\phi(g_j)} \quad \text{et} \quad K_{\phi(g_j)} \rightarrow K_{\phi(g_i)\phi(g_j)},$$

sont égales. Or, le morphisme $\phi_{ij} : A \rightarrow K \rightarrow K_{\phi(g_i)\phi(g_j)}$ est un élément de

$$(\underline{\text{diff-Spec}} A)_{I_\ell}(K_{\phi(g_i)\phi(g_j)}),$$

puisque $g_i \cdot g_j \in I_\ell$. Par conséquent, par compatibilité de la famille de morphismes φ_i , les « restrictions » de x_i et x_j à $X(K_{\phi(g_i)\phi(g_j)})$ sont égales à l'image par φ_ℓ de ϕ_{ij} dans $X(K_{\phi(g_i)\phi(g_j)})$, et donc sont égales entre elles. C'est ce qu'on voit dans le diagramme commutatif suivant, où on a noté U_i les ouverts $K_{\phi(g_i)}$:

$$\begin{array}{ccccc}
& & x_i & & \\
& \cap & & & \\
& \phi_i & \nearrow & \searrow & \\
(\underline{\text{diff-Spec } A})_I(K_{\phi(g_i)}) & \xrightarrow{\quad} & (\underline{\text{diff-Spec } A})_{I_{n(i)}}(K_{\phi(g_i)}) & \xrightarrow{\varphi_{n(i)}} & X(K_{\phi(g_i)}) \\
& \cap & & & \\
& \phi|_{U_i} & \nearrow & \searrow & \\
& \cap & & & \\
& (\underline{\text{diff-Spec } A})_{I_{n(i)}}(K_{\phi(g_i)\phi(g_j)}) & & & \\
& \nwarrow & & \nearrow & \\
& & (\underline{\text{diff-Spec } A})_{I_\ell}(K_{\phi(g_i)\phi(g_j)}) & & \\
& & \xrightarrow{\varphi_\ell} & & X(K_{\phi(g_i)\phi(g_j)}) \\
& & \nwarrow & \nearrow & \\
& & (\underline{\text{diff-Spec } A})_I(K) & & \\
& \cup & & & \\
& \phi & & & x_i|_{U_i \cap U_j}
\end{array}$$

Ainsi, les x_i se recollent bien, et comme X est un faisceau, donnent un élément de $X(K)$,

celui qu'on cherchait. L'unicité du morphisme $\varphi : (\underline{\text{diff-Spec}} A)_I \rightarrow X$ ainsi construit se démontre de la même manière. ■

On peut enfin en venir à la démonstration du lemme 10.3.8.

Démonstration du lemme 10.3.8. — Rappelons un peu de quoi il s'agit. Soient F et G deux faisceaux, reliés entre eux par une immersion ouverte

$$H \longrightarrow G.$$

Soient A une k -algèbre différentielle, I un idéal de A ; on se donne aussi un morphisme

$$(\underline{\text{diff-Spec}} A)_I \longrightarrow G.$$

Ce qu'on veut montrer est qu'il existe un idéal J , inclus dans I , et des morphismes, qui font du carré

$$\begin{array}{ccc} (\underline{\text{diff-Spec}} A)_J & \hookrightarrow & (\underline{\text{diff-Spec}} A)_I \\ \downarrow & & \downarrow \\ H & \longrightarrow & G \end{array}$$

un carré cartésien.

On procède comme indiqué lors du schéma de preuve qu'on a donné après l'énoncé du lemme. Soit $f \in I$. On dispose d'un morphisme $\underline{\text{diff-Spec}} A_f \longrightarrow (\underline{\text{diff-Spec}} A)_I$, donc d'un morphisme vers G . Par conséquent, par définition d'une immersion ouverte, il existe un idéal J_f de A_f tel qu'on ait un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} (\underline{\text{diff-Spec}} A_f)_{J_f} & \longrightarrow & \underline{\text{diff-Spec}} A_f \\ \downarrow & & \downarrow \\ H & \longrightarrow & G \end{array}$$

Grâce au lemme 10.3.10, on sait que ce diagramme peut aussi s'écrire

$$\begin{array}{ccc} (\underline{\text{diff-Spec}} A)_{I_f} & \longrightarrow & \underline{\text{diff-Spec}} A_f \\ \downarrow & & \downarrow \\ H & \longrightarrow & G \end{array}$$

où $I_f := (f) \cap i_f^{-1}(J_f)$. En fait, pour pouvoir utiliser la proposition 10.3.1, on va remplacer les idéaux I_f par leurs radicaux $\sqrt{I_f}$. Comme dans la preuve du lemme 10.3.9, on considère la petite catégorie cofiltrante $\text{IdéauxPrinc}(I)$ attachée à l'idéal I . On a un foncteur

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \text{IdéauxPrinc}(I) & \longrightarrow & \text{Idéaux}(A) \\ f & \longmapsto & \sqrt{I_f} \end{array} .$$

Montrons qu'il est fortement cofiltrant. Pour commencer, établissons le lien entre I_{fg} et I_f . Si on empile les deux carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccc} (\underline{\text{diff-Spec}} A)_{I_f} & \longrightarrow & \underline{\text{diff-Spec}} A_f \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ H & \longrightarrow & G \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & \underline{\text{diff-Spec}} A_{fg} \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ (\underline{\text{diff-Spec}} A)_{I_f} & \longrightarrow & \underline{\text{diff-Spec}} A_f \end{array} ,$$

par unicité du produit fibré, on trouve que $Y = (\underline{\text{diff-Spec}} A)_{I_{fg}}$; comme par ailleurs $(\underline{\text{diff-Spec}} A_{fg}) = (\underline{\text{diff-Spec}} A_f)_{(g)}$, on a donc

$$\begin{array}{ccc} (\underline{\text{diff-Spec}} A)_{I_{fg}} & \longrightarrow & (\underline{\text{diff-Spec}} A_f)_{(g)} \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ (\underline{\text{diff-Spec}} A)_{I_f} & \longrightarrow & \underline{\text{diff-Spec}} A_f \end{array} .$$

Or, d'après la définition de J_f et le lemme 10.3.4, on a aussi

$$\begin{array}{ccc} (\underline{\text{diff-Spec}} A_f)_{(g) \cdot J_f} & \longrightarrow & (\underline{\text{diff-Spec}} A_f)_{(g)} \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ (\underline{\text{diff-Spec}} A_f)_{J_f} & \longrightarrow & \underline{\text{diff-Spec}} A_f \end{array} .$$

Enfin, d'après le lemme 10.3.10, on a

$$(\underline{\text{diff-Spec}} A_f)_{(g) \cdot J_f} = (\underline{\text{diff-Spec}} A)_{K_{fg}} \quad \text{avec} \quad K_{fg} = i_f^{-1}((g) \cdot J_f) \cap (f),$$

où $i_f : A \rightarrow A_f$ est la flèche de localisation. Par conséquent, d'après la proposition 10.3.1, on a

$$\sqrt{I_{fg}} = \sqrt{i_f^{-1}((g) \cdot J_f) \cap (f)} = \sqrt{i_g^{-1}((f) \cdot J_g) \cap (g)}.$$

Montrons à l'aide de ces égalités que Φ est fortement cofiltrant. Soient donc $f, g \in I$ et soient $x \in I_f$ et $y \in I_g$: on a un n tel que $x^n \in I_f$ et $y^n \in I_g$. Pour commencer, il est facile de vérifier que

$$\sqrt{I_{fg}} \subset \sqrt{I_f} \quad \text{et} \quad \sqrt{I_{fg}} \subset \sqrt{I_g}.$$

Montrons donc que $xy \in \sqrt{I_{fg}}$. Comme $x^n \in I_f$, on peut écrire

$$x^n = \lambda \cdot f \quad \text{et} \quad i_f(x^n) \in J_f,$$

avec $\lambda \in A$. De même, on a $y^n = \mu g$ avec $\mu \in A$. On a donc

$$(xy)^n = \lambda \mu g \cdot f \quad \text{donc} \quad (xy)^n \in (f).$$

De plus, on a

$$i_f((xy)^n) = \underbrace{i_f(x^n)}_{\in J_f} \cdot \underbrace{i_f(y^n)}_{=\mu g \in (g)} \quad \text{donc} \quad i_f((xy)^n) \in (g) \cdot J_f.$$

Donc, on a bien

$$xy \in \sqrt{i_f^{-1}((g) \cdot J_f) \cap (f)} = \sqrt{I_{fg}},$$

ce qu'on voulait.

Considérons maintenant les diagrammes cartésiens

$$\begin{array}{ccc} (\underline{\text{diff-Spec}} A)_{\sqrt{I_f}} & \longrightarrow & \underline{\text{diff-Spec}} A_f \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ H & \longrightarrow & G \end{array} .$$

On prend leur limite inductive (dans la catégorie $\text{Faisc}_{\text{Zar}, k}^\partial$). On obtient le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim_{f \in I} \left((\underline{\text{diff-Spec}} A)_{\sqrt{I_f}} \right) & \longrightarrow & \varinjlim_{f \in I} \underline{\text{diff-Spec}} A_f \\ \downarrow & & \downarrow \\ H & \xrightarrow{\quad} & G \end{array}$$

dont on veut montrer que c'est un carré cartésien. Ceci se fait comme pour la démonstration du lemme 10.3.12 :

- 1) On considère pour commencer un faisceau X muni de deux flèches

$$p : X \longrightarrow \varinjlim_{f \in I} \underline{\text{diff-Spec}} A_f \quad \text{et} \quad q : X \longrightarrow H$$

qui coïncident au-dessus de G . On veut construire une unique factorisation

$$X \longrightarrow \varinjlim_{f \in I} \left((\underline{\text{diff-Spec}} A)_{\sqrt{I_f}} \right)$$

de ces morphismes.

- 2) On sait, d'après le lemme 10.3.12 que

$$\varinjlim_{f \in I} \underline{\text{diff-Spec}} A_f = (\underline{\text{diff-Spec}} A)_I.$$

- 3) Soient K une k -algèbre différentielle, $x \in X(K)$. On cherche à associer à ce x un

$$y \in \varinjlim_{f \in I} \left((\underline{\text{diff-Spec}} A)_{\sqrt{I_f}} \right) (K).$$

Soit $\phi \in (\underline{\text{diff-Spec}} A)_I (K)$ l'image de x par p . Soient $g_i \in I$ tels que les $\phi(g_i)$ engendrent K . On considère le recouvrement $(K \longrightarrow K_{\phi(g_i)})_i$ de K . On note U_i l'ouvert de K correspondant à $K_{\phi(g_i)}$.

- 4) Plutôt que de chercher à construire y , on construit une famille y_i , comme suit : la restriction $\phi|_{U_i}$ provient d'un élément de $\underline{\text{diff-Spec}} A_{g_i} (K_{\phi(g_i)})$. On utilise alors le caractère cartésien du diagramme

$$\begin{array}{ccc} (\underline{\text{diff-Spec}} A)_{\sqrt{I_{g_i}}} & \longrightarrow & \underline{\text{diff-Spec}} A_{g_i} \\ \downarrow & & \downarrow \\ H & \xrightarrow{\quad} & G \end{array}$$

pour obtenir un élément dans $(\underline{\text{diff-Spec}} A)_{\sqrt{I_{g_i}}} (K_{\phi(g_i)})$, qu'on envoie par la flèche canonique dans

$$\varinjlim_{f \in I} \left((\underline{\text{diff-Spec}} A)_{\sqrt{I_f}} \right) (K_{\phi(g_i)}).$$

C'est ainsi qu'on obtient l'élément y_i .

- 5) Il faut enfin vérifier que les y_i coïncident sur les intersections des U_i : pour cela, on procède comme précédemment en raisonnant dans $K_{\phi(g_i)\phi(g_j)}$. Les y_i se recollent en un y , et il faut vérifier que cela définit un morphisme et qu'il est unique.

Ainsi, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{colim}_{f \in I} \left((\operatorname{diff-Spec} A)_{\sqrt{I_f}} \right) & \longrightarrow & \operatorname{colim}_{f \in I} \operatorname{diff-Spec} A_f \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ H & \xrightarrow{\quad} & G \end{array}$$

est cartésien. On conclut en utilisant le lemme 10.3.12 qui nous permet de l'écrire aussi

$$\begin{array}{ccc} (\operatorname{diff-Spec} A)_J & \longrightarrow & (\operatorname{diff-Spec} A)_I, \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ H & \xrightarrow{f} & G \end{array}$$

où l'idéal J est défini par

$$J := \sum_{f \in I} \sqrt{I_f} = \sum_{f \in I} \sqrt{(f) \cap i_f^{-1}(J_f)}.$$

Ceci achève la démonstration. ■

Ainsi, maintenant que le lemme 10.3.8 est démontré, on en déduit aisément la proposition suivante :

Proposition 10.3.13. *Soient k un anneau différentiel, X , Y et Z trois k -faisceaux Zariski et soient*

$$f : X \longrightarrow Y \quad \text{et} \quad g : Y \longrightarrow Z$$

deux immersions ouvertes. Alors, la composée $g \circ f : X \longrightarrow Z$ est aussi une immersion ouverte.

10.4 La prétopologie de Zariski sur $\mathbf{Faisc}_{\mathrm{Zar},k}^{\partial}$

(10.4.1) La prétopologie de Zariski sur $\mathbf{Faisc}_{\mathrm{Zar},k}^{\partial}$: définition. Maintenant qu'on dispose de la notion d'immersion ouverte, on souhaite définir la notion de *recouvrement*. Intuitivement, on va procéder comme suit. Soit F un k -faisceau Zariski. Alors, un ensemble de morphismes

$$\{F_i \longrightarrow F\}_i$$

sera dit un recouvrement si, d'une part, toutes les flèches $F_i \longrightarrow F$ sont des immersions ouvertes et si, d'autre part, cette famille « recouvre F » en un sens qu'il nous reste à définir. On pose :

Définition 10.4.1. *La prétopologie de Zariski sur $\mathbf{Faisc}_{\mathrm{Zar},k}^{\partial}$ est la prétopologie définie par*

$$Recouvr(F) = \left\{ \{F_i \longrightarrow F\}_i \left| \begin{array}{l} \forall i, F_i \longrightarrow F \text{ est une immersion ouverte} \\ \text{et} \\ \coprod_i F_i \longrightarrow F \text{ est un épimorphisme} \\ \text{(de faisceaux)} \end{array} \right. \right\}$$

pour tout k -faisceau Zariski F .

(10.4.2) C'est bien une prétopologie. Vérifions qu'il s'agit d'une prétopologie de Grothendieck. La condition sur les isomorphismes ne pose pas de problème : si $G \rightarrow F$ est un isomorphisme, c'est bien une immersion ouverte et c'est aussi un épimorphisme.

Vérifions maintenant la condition « de stabilité par changement de base ». D'abord, notons qu'on a montré dans la proposition 10.3.5 que les immersions ouvertes sont stables par changement de base. Il s'agit donc de montrer que la propriété de recouvrement est encore satisfaite. Soit F un k -faisceau Zariski et soit $f : G \rightarrow F$ un morphisme. Soit

$$\left\{ F_i \xrightarrow{f_i} F \right\}_i$$

un recouvrement de F . Notons G_i un produit fibré de F_i par G au-dessus de F . On veut montrer que le morphisme

$$\coprod_i G_i \rightarrow G$$

est un épi. Or, les colimites commutent aux changements de base. En effet, de façon plus générale, si \mathcal{C} est un site, si $S \in \text{Faisc}(\mathcal{C})$ et si $X_0 \in \text{Faisc}(\mathcal{C})/S$, on sait (voir la proposition 1, page 136 de [MLM94]) que le foncteur

$$\begin{aligned} - \times_S X_0 : \quad & \text{Faisc}(\mathcal{C})/S \longrightarrow \text{Faisc}(\mathcal{C})/S \\ & X \longmapsto X \times_S X_0 \end{aligned}$$

admet un adjoint à droite. On a donc

$$\coprod_i G_i \simeq \left(\coprod_i F_i \right) \times_F G.$$

Ainsi, le morphisme dont on veut montrer le caractère épi est le morphisme φ' du diagramme

$$\begin{array}{ccc} (\coprod_i F_i) \times_F G & \xrightarrow{\varphi'} & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_i F_i & \xrightarrow{\varphi} & F \end{array}$$

On peut alors appliquer la proposition 2.6.6 qui nous dit que le caractère épi d'un morphisme est stable par changement de base, dans les catégories de faisceaux : on a donc bien que

$$\coprod_i G_i \rightarrow G$$

est un épi. On a ainsi montré que les recouvrements étaient stables par changement de base.

Enfin, il nous reste à montrer que les recouvrements sont stables « par composition ». Soient donc F un k -faisceau Zariski, $\{F_i \rightarrow F\}_i$ un recouvrement de F et, pour tout i ,

$$\{G_{i,j} \rightarrow F_i\}_j$$

un recouvrement de F_i . On veut montrer que la famille $\{G_{i,j} \rightarrow F\}_{ij}$ est un recouvrement de F . D'abord, ces morphismes sont tous des immersions ouvertes, d'après la proposition 10.3.13. Passons donc à la propriété « épi ». On sait que, pour tout i ,

$$\coprod_j G_{i,j} \rightarrow F_i$$

est un épi. Donc, grâce à la proposition 2.5.4, on sait que

$$\coprod_i \left(\coprod_j G_{i,j} \right) \longrightarrow \coprod_i F_i$$

est un épi. Donc, comme la composée de deux épi est un épi, on a que

$$\coprod_{i,j} G_{i,j} \longrightarrow F$$

est un épi. Ainsi, $\{G_{i,j} \longrightarrow F\}_{ij}$ est un recouvrement de F .

10.5 Définition des fonct- ∂ -schémas et caractérisation

Munis de tout ce qui précède, il n'est plus difficile, maintenant de définir les schémas différentiels, d'un point de vue fonctoriel; l'analogie avec la définition des schémas par les espaces annelés est ainsi portée jusqu'au bout.

(10.5.1) Fonct- ∂ -schémas. Voici la définition :

Définition 10.5.1. Soit k un anneau différentiel. Soit $X \in \mathbf{Fais}_{\text{Zar},k}^{\partial}$. On dit que X est un k -fonct- ∂ -schéma si X peut-être recouvert par des objets représentables. Autrement s'il existe une famille de k -algèbres différentielles $(A_i)_{i \in I}$ et des immersions ouvertes $h_{A_i} \longrightarrow X$ telles que

$$\{h_{A_i} \longrightarrow X\}_{i \in I}$$

soit un recouvrement Zariski de X .

On note $\text{fonct-}\partial\text{-Sch}_k$ la catégorie des k -fonct- ∂ -schémas. C'est une sous-catégorie pleine de $\mathbf{Fais}_{\text{Zar},k}^{\partial}$.

(10.5.2) Une caractérisation des fonct- ∂ -schémas. Soit X un fonct- ∂ -schéma. Alors, d'après la définition, il existe une famille de k -algèbres différentielles A_i et des immersions ouvertes $h_{A_i} \longrightarrow X$ telles que

$$\coprod_i h_{A_i} \longrightarrow X$$

soit un épimorphisme. D'après la proposition 2.6.7, cela implique que X est la colimite de

$$\coprod_i h_{A_i} \times_X \coprod_i h_{A_i} \longrightarrow \coprod_i h_{A_i}.$$

Or, on sait que dans une catégorie de faisceaux, les colimites commutent aux changements de base. Ainsi, on peut écrire

$$\coprod_i h_{A_i} \times_X \coprod_i h_{A_i} \simeq \coprod_{i,j} h_{A_i} \times_X h_{A_j}.$$

Si on note $U_{ij} = h_{A_i} \times_X h_{A_j}$, alors les deux morphismes

$$U_{ij} \longrightarrow h_{A_i} \quad \text{et} \quad U_{ij} \longrightarrow h_{A_j}$$

sont des immersions ouvertes, car ce sont les immersions ouvertes $h_{A_j} \rightarrow X$ et $h_{A_i} \rightarrow X$ après changements de base. Ainsi, si X est un schéma, on peut trouver une famille de k -algèbres différentielles h_{A_i} , des immersions ouvertes $h_{A_i} \rightarrow X$ et des faisceaux U_{ij} , avec des immersions ouvertes $U_{ij} \rightarrow h_{A_i}$ et $U_{ij} \rightarrow h_{A_j}$, tels que le morphisme

$$\operatorname{colim} \left(\coprod_{i,j} U_{ij} \rightrightarrows \coprod_i h_{A_i} \right) \rightarrow X$$

soit un isomorphisme.

Chapitre 11

Équivalence des deux points de vue

Dans ce chapitre, on va montrer que la catégorie des fonct- ∂ -schémas, telle qu'on vient de la définir, et celle des schémas munis d'un champ de vecteurs sont équivalentes. Pour ce faire, on va suivre une méthode qui est très classique pour ce genre de problème. En effet, on va voir qu'on dispose d'une adjonction $(|-|, h_-)$ entre \mathbf{Esp}_k^∂ et $\mathbf{EspLocAnn}_k^\partial$:

$$\mathbf{Esp}_k^\partial \begin{array}{c} \xrightarrow{|-|\epsilon^*} \\[-1ex] \xleftarrow[h_-\in\omega]{} \end{array} \mathbf{EspLocAnn}_k^\partial.$$

Par ailleurs, on a défini deux sous-catégories :

- d'une part, \mathbf{Sch}_k^∂ , la catégorie des k -schémas munis d'un champ de vecteurs, qui est une sous-catégorie de $\mathbf{EspLocAnn}_k^\partial$.
- d'autre part, $\text{fonct-}\partial\text{-}\mathbf{Sch}_k$, la catégorie des k -fonct- ∂ -schémas, qui est une sous-catégorie de \mathbf{Esp}_k^∂ .

Notre stratégie pour montrer qu'elles sont équivalentes est de montrer d'abord qu'on peut restreindre les deux foncteurs $|-|$ et h_- à ces deux catégories ; puis, de montrer que ces foncteurs, une fois restreints, réalisent une équivalence de catégories.

En fait, de façon plus précise, pour réaliser ce programme, on va d'abord s'attaquer à des sous-catégories de \mathbf{Esp}_k^∂ et de $\mathbf{EspLocAnn}_k^\partial$ moins compliquées. Ainsi, on va d'abord montrer l'équivalence entre, d'un côté, les schémas affines munis d'un champ de vecteurs et, de l'autre, les foncteurs représentables : c'est le cas affine. Puis, on va faire la même chose pour les « ouverts des affines » : c'est le cas quasi-affine. Enfin, on pourra traiter le cas général.

11.1 Une adjonction entre \mathbf{Esp}_k^∂ et $\mathbf{EspLocAnn}_k^\partial$

On dispose d'une catégorie, \mathbf{Esp}_k^∂ , qu'on peut voir aussi comme la catégorie

$$\mathbf{PréFaisc}((\mathbf{Alg}_k^\partial)^{\text{op}})$$

(pour la prétopologie de Zariski, par exemple, mais aussi pour n'importe quelle prétopologie). On introduit dans cette section une autre catégorie $\mathbf{EspLocAnn}_k^\partial$, celle des espaces différentiellement localement annelés. Ces deux catégories sont reliées entre elles par le foncteur des points. Le but de cette section et des suivantes est de comparer ces deux catégories, voire dans quelle mesure elles sont « proches » l'une de l'autre.

Dans cette section, « proche » veut dire qu'elles sont « adjointes l'une à l'autre », mais dans les sections qui suivent, on verra que, quitte à faire quelques restrictions, on peut obtenir un foncteur pleinement fidèle et même une équivalence.

(11.1.1) Espaces différentiellement localement annelés. De la même façon qu'on définit les espaces localement annelés, on peut définir les espaces *differentiellement localement annelés*. C'est simple, un *espace différentiellement localement annelé* est un espace topologique muni d'un faisceau en anneaux différentiels dont les anneaux de germes sont des anneaux locaux⁽¹⁾. Intuitivement, il faut y penser comme un « espace » muni d'un champ de vecteurs. De façon plus précise, si k est un anneau différentiel, un k -*espace différentiellement localement annelé* est un espace topologique muni d'un faisceau en k -algèbres différentielles dont les anneaux de germes sont des anneaux locaux. Par ailleurs, un morphisme d'espaces différentiellement localement annelés est astreint à être local, comme pour les espaces localement annelés. On obtient ainsi une catégorie, qu'on note $\mathbf{EspLocAnn}_k^\partial$.

Cette catégorie est *cocomplète*. Cela signifie que toutes les limites inductives existent dans $\mathbf{EspLocAnn}_k^\partial$. Plus précisément, cela veut dire que pour toute petite catégorie I et pour tout foncteur $F : I \rightarrow \mathbf{EspLocAnn}_k^\partial$, la colimite (*ie* la limite inductive)

$$\varinjlim F$$

existe. Pour le montrer, on utilise la fameuse caractérisation des catégories cocomplètes :

Théorème 11.1.1 (Corollary 2, p. 109 de [ML71]). *Soit \mathcal{C} une catégorie. Alors, \mathcal{C} est (co)complète si, et seulement si, elle admet les (co)produits et les (co)noyaux.*

Ainsi, on va montrer :

Théorème 11.1.2. *La catégorie $\mathbf{EspLocAnn}_k^\partial$ est cocomplète.*

Démonstration. — Cette démonstration reprend dans le cas différentiel la preuve de la proposition 1.6 du chapitre I de [DG70]. D'abord, la catégorie $\mathbf{EspLocAnn}_k^\partial$ admet clairement les coproduits. En effet, si $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ est une famille d'espaces différentiellement localement annelés, on construit facilement son coproduit : pour être bref, il s'agit de l'espace topologique

$$\coprod_{i \in I} X_i$$

⁽¹⁾Précisons bien, on veut que les anneaux de germes soient des anneaux locaux, *sans tenir compte de la structure différentielle*. Dans ses articles, par exemple dans [Kei75] ou [Kei82b], Keigher considère les espaces différentiellement annelés dont les anneaux de germes sont des anneaux locaux dont l'unique idéal maximal est différentiel.

muni du faisceau de k -algèbres différentielles \mathcal{O} défini par

$$\forall i \in I, \quad \mathcal{O}|_{X_i} = \mathcal{O}_i.$$

Montrons maintenant que $\text{EspLocAnn}_k^\partial$ admet les conoyaux. On considère ainsi deux morphismes

$$f, g : (X, \mathcal{O}_X) \rightrightarrows (Y, \mathcal{O}_Y)$$

entre deux espaces. On veut montrer qu'il existe un k -espace différentiellement localement annelé (Z, \mathcal{O}_Z) muni d'un morphisme *local*

$$p : (Y, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow (Z, \mathcal{O}_Z)$$

tel que $p \circ f = p \circ g$ et qui soit universel pour cette propriété. Construisons d'abord l'espace topologique sous-jacent de ce k -espace différentiellement localement annelé. Évidemment⁽²⁾, il s'agit du conoyau des deux morphismes

$$f, g : X \rightrightarrows Y$$

dans la catégorie **Top**. C'est l'espace Y dont on identifie, pour tout $x \in X$, les éléments $f(x)$ et $g(x)$. Plus formellement, on considère la relation d'équivalence $\mathcal{R}_{f,g}$ sur Y engendrée par la relation

$$\forall x \in X, \quad f(x) \mathcal{R}_{f,g} g(x).$$

Il s'agit de la plus petite partie $\mathcal{R}_{f,g} \subset Y \times Y$, vérifiant les axiomes des relations d'équivalence, et telle que

$$\forall x \in X, \quad (f(x), g(x)) \in \mathcal{R}_{f,g}.$$

Puis, on pose $Z := X/\mathcal{R}_{f,g}$, l'espace quotient. Cet espace topologique est muni d'une flèche $p : Y \longrightarrow Z$. Munissons maintenant Z d'un faisceau. Les morphismes f et g viennent, en tant que morphismes d'espaces *annelés*, avec des morphismes de faisceaux, qu'on note $f^\#$ et $g^\#$. Soit W un ouvert de Z . On note $V := p^{-1}(W)$. On remarque d'abord, comme $p(f(x)) = p(g(x))$ pour tout $x \in X$, que $f^{-1}(V) = g^{-1}(V)$. On note U cet ouvert. On définit alors

$$\mathcal{O}_Z(W) := \{\varphi \in \mathcal{O}_Y(V) \mid f^\#(\varphi) = g^\#(\varphi)\}$$

avec les morphismes de restriction naturels. On peut alors compléter facilement l'application p par un morphisme $p^\#$ pour en faire un morphisme d'espaces annelés.

Puis, il faut montrer que les anneaux de germes de (Z, \mathcal{O}_Z) sont locaux. Pour cela, on va d'abord faire une remarque générale sur les espaces *localement annelés*. Soit donc (A, \mathcal{O}_A) un tel espace, et soient U un ouvert de A et $\varphi \in \mathcal{O}_A(U)$. On définit

$$D(\varphi) := \{x \in U \mid \varphi(x) \neq 0\} \subset U.$$

C'est un ouvert de A . En effet, si $x \in U$, cela signifie que $\varphi(x) \neq 0$, *i.e.* que φ n'appartient pas à l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{A,x}$. Autrement dit, puisque $\mathcal{O}_{A,x}$ est local, cela signifie que l'image de φ dans $\mathcal{O}_{A,x}$ est inversible. En dernier lieu, cela signifie qu'il existe un ouvert V contenant x , et qu'il existe $\psi \in \mathcal{O}_A(V)$ tel que

$$\varphi|_{V \cap U} \cdot \psi|_{V \cap U} = 1.$$

⁽²⁾ En effet, le foncteur oubli $\omega : \text{EspLocAnn}_k^\partial \longrightarrow \text{Top}$ admet un adjoint à droite. Cet adjoint est

$$\begin{aligned} \text{Top} &\longrightarrow \text{EspLocAnn}_k^\partial \\ X &\longmapsto (X, k) \end{aligned},$$

où on a noté k le faisceau constant de tige k . Cela vient du fait que k est un objet initial dans Alg_k^∂ .

Ceci permet de voir que $\forall x \in V \cap U, \varphi(x) \neq 0$, et donc que $V \cap U \subset D(\varphi) : D(\varphi)$ est bien un ouvert de A . On a alors le fait suivant :

$$\exists \psi \in \mathcal{O}_A(D(\varphi)) \quad \psi \cdot \varphi|_{D(\varphi)} = 1.$$

En effet, comme on vient de le voir, pour tout $x \in D(\varphi)$, on peut trouver un inverse à φ sur un ouvert U_x contenant x . Ces inverses se recollent, par unicité de l'inverse, et c'est ainsi qu'on obtient cet inverse à φ sur $D(\varphi)$ tout entier.

Revenons à notre problème initial, montrer que les anneaux de germes de (Z, \mathcal{O}_Z) sont locaux. Soient W un ouvert de Z , $V := p^{-1}(Z)$ et $U := f^{-1}(V) = g^{-1}(V)$. Soit $\varphi \in \mathcal{O}_Z(W)$. Par définition, φ est un élément de $\mathcal{O}_Y(V)$ tel que $f^\#(\varphi) = g^\#(\varphi)$. Ce dernier point permet de voir que, pour tout $x \in X$, si $\varphi(f(x)) = 0$, alors $\varphi(g(x)) = 0$; en effet, on a

$$\forall x \in X, \quad \varphi(f(x)) = 0 \iff f^\#(\varphi)(x) = 0.$$

Ainsi, l'ouvert $D(\varphi) \subset V$ est stable par $\mathcal{R}_{f,g}$. Soit $z \in W$. On note φ_z l'image de φ dans l'anneau des germes $\mathcal{O}_{Z,z}$. On a alors

$$\varphi_z \text{ est inversible} \iff p^{-1}(z) \subset D(\varphi).$$

En effet, si φ_z est inversible, cela veut dire qu'il existe un ouvert W' de Z contenant z et $\psi \in \mathcal{O}_Z(W')$ tel que $\psi \cdot \varphi = 1$. En ramenant cette égalité sur Y , on trouve un ouvert V' de Y contenant $p^{-1}(z)$ et $\psi \in \mathcal{O}_Y(V')$ tels que, sur V' , on ait $\varphi \cdot \psi = 1$. En particulier, $V' \subset D(\varphi)$ et donc $p^{-1}(z) \subset D(\varphi)$. Réciproquement, si $p^{-1}(z) \subset D(\varphi)$, alors $D(\varphi)$, qui est invariant par $\mathcal{R}_{f,g}$ comme on l'a dit, correspond à un ouvert de Z contenant z . Par ailleurs, on a vu que sur cet ouvert $D(\varphi)$ on pouvait inverser φ . Ainsi, on a bien que φ_z est inversible.

Ceci dit, on peut maintenant montrer que $\mathcal{O}_{Z,z}$ est local : on montre que l'ensemble des éléments non-inversibles est stable par addition. Soient donc $\varphi, \varphi' \in \mathcal{O}_{Z,z}$, tous deux non-inversibles. Soit W un ouvert de Z contenant z et sur lequel on a deux représentants (qu'on note encore φ et φ') des germes. On note $V := p^{-1}(W)$; on a

$$p^{-1}(z) \not\subset D(\varphi) \quad \text{et} \quad p^{-1}(z) \not\subset D(\varphi').$$

Soient donc y_1 et y_2 dans $p^{-1}(z)$ tels que

$$\varphi(y_1) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(y_2) = 0.$$

Ainsi, y_1 et y_2 sont tous les deux envoyés par p sur z . Idéalement, cela veut dire que le couple (y_1, y_2) est tel qu'il existe $x \in X$ tel que

$$(y_1, y_2) = (f(x), g(x)).$$

Dans ce cas, on pourrait conclure d'après ce qu'on a dit que

$$\varphi(y_2) = \varphi(g(x)) = \varphi(f(x)) = \varphi(y_1) = 0.$$

Cependant, en général, tout ce qu'on sait, c'est qu'il existe des éléments a_1, \dots, a_m de Y et des x_1, \dots, x_m dans X tels que

$$\begin{aligned} (y_1, a_1) &= \begin{cases} (f(x_1), g(x_1)) \\ \text{ou} \\ (g(x_1), f(x_1)) \end{cases}, & (a_1, a_2) &= \begin{cases} (f(x_2), g(x_2)) \\ \text{ou} \\ (g(x_2), f(x_2)) \end{cases}, \\ (a_2, a_3) &= \begin{cases} (f(x_3), g(x_3)) \\ \text{ou} \\ (g(x_3), f(x_3)) \end{cases}, & \dots, & (a_m, y_2) = \begin{cases} (f(x_m), g(x_m)) \\ \text{ou} \\ (g(x_m), f(x_m)) \end{cases}. \end{aligned}$$

Mais, on peut encore conclure que $\varphi(y_2) = 0$. Donc, on a $(\varphi + \psi)(y_2) = 0$, donc

$$p^{-1}(z) \not\subseteq D(\varphi + \psi),$$

donc $\varphi + \psi$ n'est pas inversible. Ainsi, on a montré que $\mathcal{O}_{Z,z}$ est un anneau local. On montre de la même façon que le morphisme p est local.

Une fois tout ceci fait, il n'est pas difficile de montrer que (Z, \mathcal{O}_Z) est effectivement le conoyau qu'on cherchait. ■

(11.1.2) Spectres différentiels. Toujours si k est un anneau différentiel, et si K est une k -algèbre différentielle, alors, on associe à K un k -espace différentiellement localement annelé : c'est le *spectre (différentiel) de K* , et on le note $\mathrm{Spec}^\partial K$. Il s'agit du schéma $\mathrm{Spec} K$ (donc en particulier de l'espace localement annelé $\mathrm{Spec} K$), dont on munit le faisceau structural de la dérivation induite par la dérivation de l'anneau K . Ainsi, on définit ainsi un foncteur

$$\mathrm{Spec}^\partial : (\mathbf{Alg}_k^\partial)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{EspLocAnn}_k^\partial.$$

(11.1.3) Foncteur du foncteur des points. C'est avec les spectres différentiels qu'on définit une nouveau foncteur. C'est

$$h_- : \mathbf{EspLocAnn}_k^\partial \longrightarrow \mathbf{Esp}_k^\partial.$$

Rappelons qu'on désigne par \mathbf{Esp}_k^∂ la catégorie des k -espaces algébro-différentiels, c'est-à-dire des foncteurs (covariants) de \mathbf{Alg}_k^∂ dans \mathbf{Ens} . Ce foncteur h_- est défini comme suit : si X est un k -espace différentiellement localement annelé, alors on définit

$$h_X := \begin{array}{ccc} \mathbf{Alg}_k^\partial & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{Ens} \\ K \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathbf{EspLocAnn}_k^\partial} \left(\mathrm{Spec}^\partial K, X \right) & . \end{array}$$

(11.1.4) L'adjonction. On a alors :

Proposition 11.1.3. Soit k un anneau différentiel. Alors, le foncteur

$$h_- : \mathbf{EspLocAnn}_k^\partial \longrightarrow \mathbf{Esp}_k^\partial$$

possède un adjoint à gauche.

Démonstration. — Soit k un anneau différentiel. On part d'un k -espace algébro-différentiel $F : \mathbf{Alg}_k^\partial \rightarrow \mathbf{Ens}$. On veut lui associer un k -espace différentiellement localement annelé.

Commençons par attacher à F une catégorie. Rappelons qu'on a défini dans le paragraphe (9.2.3) ce qu'est un *point* de F : c'est un couple $x = (K, p)$ où K est une k -algèbre différentielle et où $p \in F(K)$. Si $x = (K, p)$ et $y = (L, q)$ sont deux points de F , un morphisme entre x et y est un morphisme de k -algèbres différentielles

$$\varphi : K \longrightarrow L$$

tel que $F(\varphi) : F(K) \rightarrow F(L)$ envoie x sur y . On obtient ainsi une catégorie, qu'on note **points**(F). On dispose d'un foncteur

$$\begin{aligned} \Phi_F : \mathbf{points}(F) &\longrightarrow \mathbf{EspLocAnn}_k^\partial \\ x = (K, p) &\longmapsto \mathrm{Spec}^\partial K \end{aligned}$$

On pose alors, en vertu du théorème 11.1.2 (pour l'appliquer en toute rigueur, il faudrait, comme c'est fait dans [DG70], parler d'*univers*, ce que nous ne ferons pas)

$$|F| := \underset{\substack{x=(K,p) \\ \in \mathbf{points}(F)}}{\operatorname{colim}} \Phi_F = \underset{\substack{x=(K,p) \\ \in \mathbf{points}(F)}}{\operatorname{colim}} \mathrm{diff-Spec} K.$$

Ainsi, si l'on prend la convention, pour tout $X \in \mathrm{ob}(\mathbf{EspLocAnn}_k^\partial)$ de noter encore X le foncteur constant

$$\begin{aligned} X : \mathbf{points}(F) &\longrightarrow \mathbf{EspLocAnn}_k^\partial \\ x = (K, p) &\longmapsto X \end{aligned}$$

qui à tout objet associe X et à toute flèche Id_X , alors on a une transformation naturelle

$$i_F : \Phi_F \longrightarrow |F|$$

telle que, pour tout objet X de $\mathbf{EspLocAnn}_k^\partial$ et toute transformation naturelle $i : \Phi_F \longrightarrow X$, il existe une unique factorisation $f : |F| \longrightarrow X$ qui fasse commuter

$$\begin{array}{ccc} \Phi_F & \xrightarrow{i} & X \\ & \searrow i_F & \nearrow f \\ & |F| & \end{array} .$$

C'est ce k -espace différentiellement localement annelé qui est notre candidat pour définir l'adjoint à gauche de h_- . Si G est un autre k -espace algébro-différentiel et si $\varphi : F \longrightarrow G$ est un morphisme entre eux deux, φ induit un foncteur

$$\varphi : \mathbf{points}(F) \longrightarrow \mathbf{points}(G)$$

qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{points}(F) & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{points}(G) \\ & \searrow \Phi_F & \swarrow \Phi_G \\ & \mathbf{EspLocAnn}_k^\partial & \end{array} .$$

On voit de la sorte que la transformation naturelle $i_G : \Phi_G \longrightarrow |G|$ induit une transformation naturelle $\Phi_F \longrightarrow |F|$. Cette dernière, par propriété universelle, induit donc un morphisme $|F| \longrightarrow |G|$. On a donc défini un foncteur.

Pour vérifier que ce foncteur est un adjoint à gauche de h_- , il suffit de construire une bijection fonctorielle entre

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{EspLocAnn}_k^\partial}(|F|, Y) \quad \text{et} \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{Esp}_k^\partial}(F, h_Y),$$

pour tous $F \in \mathbf{Esp}_k^\partial$ et $Y \in \mathbf{EspLocAnn}_k^\partial$. Se donner un morphisme de $|F|$ vers Y , c'est se donner une collection de morphismes compatibles

$$\varphi_x : \mathrm{Spec}^\partial K \longrightarrow Y$$

pour tout $x \in F(K)$. Donc, c'est se donner un morphisme de foncteurs $F \rightarrow h_Y$. ■

Remarque. — On peut aussi montrer que c'est une adjonction en construisant une unité et une counité. C'est-à-dire, on construit deux transformations naturelles

$$\eta : \text{Id}_{\mathbf{E}sp_k^\partial} \rightarrow (h_- \circ |\cdot|) \quad \text{et} \quad \varepsilon : (|\cdot| \circ h_-) \rightarrow \text{Id}_{\mathbf{E}sp\mathbf{Loc}\mathbf{Ann}_k^\partial}.$$

Commençons par définir η . Soit donc F un k -espace algébro-différentiel quelconque. On veut construire un morphisme

$$F \rightarrow h_{|F|}.$$

Cela équivaut à chercher à définir une collection « compatible » d'applications

$$f_R : F(R) \rightarrow h_{|F|}(R)$$

pour toute k -algèbre différentielle R . Soit donc R une telle algèbre et $p \in F(R)$. On veut définir $f_R(p)$. Or, se donner un tel p , c'est exactement se donner un $x = (R, p) \in \mathbf{points}(F)$. On dispose alors d'une flèche canonique

$$i_x : \text{Spec}^\partial R \rightarrow |F|,$$

c'est-à-dire d'un élément $\in h_{|F|}(R)$, ce qu'on voulait. On laisse le lecteur vérifier que ces applications sont compatibles et que cela définit bien une transformation naturelle η .

Définissons maintenant ε . Soit X un k -espace différentiellement localement annelé. On veut construire un morphisme

$$|h_X| \rightarrow X.$$

D'après la propriété universelle de la limite inductive, il suffit de définir une transformation naturelle $\Phi_{h_X} \rightarrow X$. Autrement dit, il suffit de définir, pour toute k -algèbre différentielle R et pour $p \in h_X(R)$, un morphisme

$$\text{Spec}^\partial R \rightarrow X$$

et que cette donnée soit compatible. Or, se donner $p \in h_X(R)$, c'est exactement se donner un tel morphisme. C'est ainsi qu'on définit ε . On laisse le lecteur vérifier que η et ε sont une unité et une counité. ◇

11.2 Le foncteur des points h_- est pleinement fidèle

Dans cette section, on continue l'étude comparative de $\mathbf{E}sp_k^\partial$ et $\mathbf{E}sp\mathbf{Loc}\mathbf{Ann}_k^\partial$. On va montrer que le foncteur des points h_- , quand il est restreint à \mathbf{Sch}_k^∂ est pleinement fidèle. Rappelons avant la définition de \mathbf{Sch}_k^∂ .

(11.2.1) Schémas avec champ de vecteurs : deux points de vue possibles. On dit qu'un k -espace différentiellement localement annelé est un k -schéma avec k -champ de vecteurs s'il est localement isomorphe, en tant que k -espace différentiellement localement annelé, à un espace du type $\text{Spec}^\partial K$, où K est une k -algèbre différentielle. De façon équivalente, on peut voir un k -schéma avec champ de vecteurs comme un k -schéma X muni d'une k -dérivation $\partial : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$ de son faisceau structural.

(11.2.2) La pleine fidélité. On a alors :

Proposition 11.2.1. *Soit k un anneau différentiel. Alors, le foncteur*

$$h_- : \mathbf{Sch}_k^\partial \longrightarrow \mathbf{Esp}_k^\partial$$

est pleinement fidèle.

Pour démontrer cette proposition, on utilise le lemme suivant de recollement (qu'on a déjà utilisé) :

Lemme 11.2.2. *Soit k un anneau différentiel et soient X et Y deux k -espaces différentiellement localement annelés. Soit $(V_i)_{i \in I}$ une base d'ouverts de X et soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille de morphismes $f_i : V_i \longrightarrow Y$ telle que*

$$\forall (i, j) \in I^2, \quad V_i \subset V_j \implies f_i = f_j|_{V_i}.$$

Alors, il existe une unique $f : X \longrightarrow Y$ telle que $\forall i \in I, f|_{V_i} = f_i$.

Démonstration de la proposition. — Soient donc X et Y deux k -schémas munis de champs de vecteurs et soit

$$f : h_X \longrightarrow h_Y$$

un morphisme entre les deux foncteurs des points associés à X et à Y . On veut montrer que f provient d'une unique application φ entre X et Y . Soit U un ouvert affine de X . Plus précisément soit R une k -algèbre différentielle et soit ψ un isomorphisme entre $\mathrm{Spec}^\partial R$ et U :

$$\mathrm{Spec}^\partial R \xrightarrow{\psi} U \xhookrightarrow{i} X .$$

On obtient ainsi un morphisme $i \circ \psi : \mathrm{Spec}^\partial R \longrightarrow X$, autrement dit, un élément de $h_X(R)$. Si f provient d'un morphisme $\varphi : X \longrightarrow Y$ alors le diagramme suivant doit commuter

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Spec}^\partial R & \xrightarrow{\psi} & U & \xrightarrow{i} & X \\ & \searrow & \downarrow & \nearrow & \\ & & f(i \circ \psi) & & \varphi \end{array} \longrightarrow Y .$$

Autrement dit, on doit avoir

$$\varphi|_U = f(i \circ \psi) \circ \psi^{-1}.$$

Ainsi, à tout ouvert affine U de X , on associe un morphisme

$$\varphi_U : U \longrightarrow Y .$$

égal à $f(i \circ \psi) \circ \psi^{-1}$ (on vérifie, en utilisant que f est un foncteur, que le morphisme φ_U ne dépend pas du choix de R ni du choix de ψ). Montrons que la collection de morphismes $(\varphi_U)_U$ vérifie les hypothèses du lemme 11.2.2 : on pourra alors les recoller en un morphisme « global » $\varphi : X \longrightarrow Y$. Soient donc U et V deux ouverts affines de X tels que $V \subset U$. On fixe les notations

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}^\partial R & \xrightarrow{\psi} & U \xhookrightarrow{i} X \\ & & \uparrow j \\ \mathrm{Spec}^\partial R' & \xrightarrow{\psi'} & V \end{array}$$

Soit $g : R \rightarrow R'$ le morphisme de k -algèbres différentielles qui correspond à j , via les isomorphismes ψ et ψ' . Il permet de compléter le diagramme précédent en un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}^\partial R & \xrightarrow{\psi} & U \hookrightarrow X \\ \mathrm{Spec}^\partial g \uparrow & & j \uparrow \\ \mathrm{Spec}^\partial R' & \xrightarrow{\psi'} & V \end{array}$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned} \varphi_V &= f(i \circ j \circ \psi') \circ \psi'^{-1} \\ &= f(i \circ \psi \circ \mathrm{Spec}^\partial g) \circ \psi'^{-1} \\ &= f(i \circ \psi) \circ \mathrm{Spec}^\partial g \circ \psi'^{-1} \\ &= f(i \circ \psi) \circ \psi^{-1} \circ j \\ &= \varphi_U \circ j. \end{aligned}$$

Cela signifie exactement que $\varphi_{U|V} = \varphi_V$: le lemme s'applique donc et on peut conclure. ■

11.3 Le cas affine

Maintenant, on en vient à la preuve du résultat attendu : l'équivalence entre les fonct-schémas et les schémas munis d'un champ de vecteurs. Comme on l'a expliqué dans l'introduction, on montre d'abord l'équivalence entre les objets affines.

(11.3.1) La situation. On dispose des foncteurs suivants, qui forment des adjonctions :

$$\begin{array}{ccccc} & & (\mathrm{Alg}_k^\partial)^{\mathrm{op}} & & \\ & \swarrow \omega \ni h_- & & \searrow \mathrm{Spec}^\partial \in \omega & \\ \mathrm{Esp}_k^\partial & \xrightleftharpoons[\quad | - | \in * \quad]{\quad h_- \in \omega \quad} & & & \mathrm{EspLocAnn}_k^\partial \\ & \uparrow \mathcal{O}(-) \in * & & \downarrow * \ni \mathcal{O}(-) & \end{array}$$

L'adjonction du côté gauche a été établie dans la proposition 9.3.3. L'adjonction du côté droit a été mentionnée dans le paragraphe (3.3.3). Enfin, l'adjonction de la base est l'objet de la proposition 11.1.3. Ce diagramme de catégories et les adjonctions dont on dispose entre elles va nous servir dans la suite.

(11.3.2) Notations. Introduisons quelques notations. On considère d'abord la catégorie des k -espaces algébro-différentiels représentables. On la note

$$\mathrm{PréFaisc}^{\mathrm{rep}} \left((\mathrm{Alg}_k^\partial)^{\mathrm{op}} \right).$$

Pour éviter que le texte ne soit trop chargé, on notera cette catégorie

$$\mathrm{PréFaisc}_k^{\partial, \mathrm{rep}}.$$

D'un autre côté, on note $\mathbf{SchAff}_k^\partial$ la catégorie des k -schémas affines munis d'un champ de vecteurs. La première chose à faire est de montrer que les foncteurs $| - |$ et h_- peuvent être restreints à ces deux sous-catégories. Autrement dit, on veut montrer que si X est représentable, alors $|X|$ est affine, et que si S est affine, alors h_S est représentable.

(11.3.3) Restriction de $| - |$ et h_- aux affines. Pour montrer qu'on peut bien restreindre ces foncteurs aux objets affines, notre outil principal est la proposition suivante :

Proposition 11.3.1. *Soit k un anneau différentiel. Alors,*

(i) Les deux foncteurs

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{Alg}_k^\partial)^{op} & \xrightarrow{\text{Spec}^\partial} & \mathbf{EspLocAnn}_k^\partial \\ & \searrow h_- & \swarrow | - | \\ & \mathbf{Esp}_k^\partial & \end{array}$$

sont isomorphes.

(ii) Les deux foncteurs

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{Alg}_k^\partial)^{op} & \xrightarrow{h_-} & \mathbf{Esp}_k^\partial \\ & \searrow \text{Spec}^\partial & \swarrow h_- \\ & \mathbf{EspLocAnn}_k^\partial & \end{array}$$

sont isomorphes.

Démonstration. — Démontrons d'abord le point (i). Soit donc A une k -algèbre différentielle. On veut construire, fonctoriellement, un isomorphisme entre $|h_A|$ et $\text{Spec}^\partial A$. Par définition, on a

$$\begin{aligned} |h_A| &= \varinjlim_{(K,p) \in \mathbf{points}(h_A)} \text{Spec}^\partial K \\ &= \varinjlim_{\text{Hom}_{\mathbf{Alg}_k^\partial}(A,K)} \text{Spec}^\partial K. \end{aligned}$$

Montrons que cette limite inductive « est égale » à $\text{Spec}^\partial A$. Pour cela, il faut d'abord construire, pour tout $K \in \mathbf{Alg}_k^\partial$ et pour tout $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbf{Alg}_k^\partial}(A,K)$, un morphisme

$$\text{Spec}^\partial K \longrightarrow \text{Spec}^\partial A,$$

ce qui est évident par fonctorialité de Spec^∂ . Puis, il faut montrer que cet objet est universel : si X est un k -espace localement différentiellement annelé, muni d'un collection compatible de morphismes

$$\Phi_{K,f} : \text{Spec}^\partial K \longrightarrow X$$

pour tout $K \in \mathbf{Alg}_k^\partial$ et tout $f \in \text{Hom}_{\mathbf{Alg}_k^\partial}(A,K)$, alors on peut construire un unique morphisme

$$\text{Spec}^\partial A \longrightarrow X$$

factorisant ces $\Phi_{K,f}$. On vérifie facilement que cet unique morphisme est $\Phi_{A,\text{Id}} : \text{Spec}^\partial A \longrightarrow X$. Ceci prouve que $\text{Spec}^\partial A$ est isomorphe à $|h_A|$; on vérifie facilement que cet isomorphisme est fonctoriel. D'où l'assertion (i).

Pour le point (ii) maintenant, il faut montrer qu'on a un isomorphisme fonctoriel entre $h_{\text{Spec}^\partial A}$ et h_A , pour tout A . Or,

$$\begin{aligned} h_{\text{Spec}^\partial A}(R) &= \text{Hom}_{\mathbf{EspLocAnn}_k^\partial}(\text{Spec}^\partial R, \text{Spec}^\partial A) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathbf{Alg}_k^\partial}(A, \mathcal{O}(\text{Spec}^\partial R)) \quad \text{car } (\mathcal{O}(-), \text{Spec}^\partial) \text{ est une adjonction} \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathbf{Alg}_k^\partial}(A, R) \\ &= h_A(R). \end{aligned}$$

D'où l'assertion (ii). ■

Par conséquent, l'image par $|-|$ d'un préfaisceau représentable est un schéma affine, et le foncteur des points d'un schéma affine est représentable. Ainsi, on peut restreindre notre couple de foncteurs $(|-|, h_-)$ peut être restreint en

$$\mathbf{PréFaisc}_k^{\partial, \text{rep}} \xrightleftharpoons[\substack{h_- \\ | - |}]{\substack{| - | \\ \longleftarrow}} \mathbf{SchAff}_k^\partial.$$

D'après la proposition 2.4.8, on sait que $(|-|, h_-)$ est encore une adjonction.

(11.3.4) Équivalence entre les schémas affines munis d'un champ de vecteurs et les k -espaces algébro-différentiels représentables. La proposition suivante améliore cette assertion :

Proposition 11.3.2. *Soit k un anneau différentiel. Alors,*

$$\mathbf{PréFaisc}_k^{\partial, \text{rep}} \xrightleftharpoons[\substack{h_- \\ | - |}]{\substack{| - | \\ \longleftarrow}} \mathbf{SchAff}_k^\partial$$

est une équivalence de catégories.

Démonstration. — On est dans la situation suivante :

$$\begin{array}{ccccc} & & (\mathbf{Alg}_k^\partial)^{\text{op}} & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ \mathbf{Alg}_k^\partial & \xrightleftharpoons[\substack{\mathcal{O}(-) \\ h_-}]{\substack{h_- \\ \longleftarrow}} & \mathbf{PréFaisc}_k^{\partial, \text{rep}} & \xrightleftharpoons[\substack{h_- \\ | - |}]{\substack{| - | \\ \longleftarrow}} & \mathbf{SchAff}_k^\partial \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & \mathbf{SchAff}_k^\partial & & \end{array}$$

Par ailleurs, on sait que

$$\mathbf{Alg}_k^\partial \xrightleftharpoons[\substack{\mathcal{O}(-) \\ h_-}]{\substack{h_- \\ \longleftarrow}} \mathbf{PréFaisc}_k^{\partial, \text{rep}} \quad \text{et} \quad \mathbf{Alg}_k^\partial \xrightleftharpoons[\substack{\mathcal{O}(-) \\ \text{Spec}^\partial}]{\substack{\text{Spec}^\partial \\ \longleftarrow}} \mathbf{SchAff}_k^\partial$$

sont des équivalences de catégories (*cf.* en particulier la proposition 9.3.4). De plus, on a montré que les deux diagrammes

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{Alg}_k^\partial)^{\text{op}} & \xrightarrow{\text{Spec}^\partial} & \mathbf{SchAff}_k^\partial \\ \searrow h_- & & \swarrow | - | \\ & \mathbf{PréFaisc}_k^{\partial, \text{rep}} & \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{Alg}_k^\partial)^{\text{op}} & \xrightarrow{h_-} & \mathbf{PréFaisc}_k^{\partial, \text{rep}} \\ & \searrow \text{Spec}^\partial & \swarrow h_- \\ & \mathbf{SchAff}_k^\partial & \end{array}$$

commutent à isomorphisme près. On est exactement dans les conditions du lemme 2.3.2, qui nous dit que

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{PréFaisc}_k^{\partial, \text{rep}} & \xrightleftharpoons[h_-]{|-|} & \mathbf{SchAff}_k^\partial \end{array}$$

est une équivalence de catégories. ■

11.4 Le cas quasi-affine

(11.4.1) Notations. Comme dans la section précédente, on introduit quelques notations. D'abord, On considère la catégorie des k -schémas quasi-affines. C'est la sous-catégorie pleine de $\mathbf{EspLocAnn}_k^\partial$ formée des objets isomorphes à des ouverts de schémas affines. On la note

$$\mathbf{SchQuasiAff}_k^\partial.$$

De même, on considère la catégorie des k -espaces algébro-différentiels quasi-affines. On la note

$$\mathbf{PréFaisc}_k^{\text{quasi-aff}}\left((\mathbf{Alg}_k^\partial)^{\text{op}}\right).$$

Pour éviter que le texte ne soit trop chargé, on la notera aussi

$$\mathbf{PréFaisc}_k^{\partial, \text{quasi-aff}}.$$

C'est la sous-catégorie pleine de \mathbf{Esp}_k^∂ dont les objets sont isomorphes aux préfaisceaux du type $(\underline{\text{diff-Spec } A})_I$, pour $A \in \mathbf{Alg}_k^\partial$ et I idéal de A .

(11.4.2) La nouvelle situation. Dans la section précédente, ce qui nous a beaucoup aidé à montrer l'équivalence voulue était l'existence des adjonctions

$$\begin{array}{ccccc} & & (\mathbf{Alg}_k^\partial)^{\text{op}} & & \\ & \nearrow \omega \ni h_- & & \swarrow \text{Spec}^\partial \in \omega & \\ \mathbf{Esp}_k^\partial & \xrightleftharpoons[h_- \in \omega]{\mathcal{O}(-) \in *} & & \xrightleftharpoons[* \ni \mathcal{O}(-)]{} & \mathbf{EspLocAnn}_k^\partial \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ & & | - | \in * & & \end{array}$$

qui se restreignaient à des équivalences sur les objets affines. Dans notre nouvelle situation, on ne va pas pouvoir trouver une catégorie « algébrique » \mathcal{C} qui puisse prendre la place de $(\mathbf{Alg}_k^\partial)^{\text{op}}$. Néanmoins, on va pouvoir s'approcher un tant soit peu de cette situation. On note \mathcal{C}_k la catégorie définie par :

- a) les objets de \mathcal{C}_k sont les couples (A, I) où A est une k -algèbre différentielle et où I est un idéal de A ;

b) si (A, I) et (B, J) sont de tels objets, on pose

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_k}((A, I), (B, J)) = \left\{ \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_k^\partial}(A, B) \mid \varphi(I) \supset J \right\}.$$

On a alors des foncteurs de $\mathcal{C}_k^{\text{op}}$ dans \mathbf{Esp}_k^∂ et dans $\mathbf{EspLocAnn}_k^\partial$, définis comme on l'imagine :

— Un premier foncteur $\underline{\text{diff-Spec}} : \mathcal{C}_k^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Esp}_k^\partial$ défini sur les objets par

$$\underline{\text{diff-Spec}}(A, I) = (\underline{\text{diff-Spec}} A)_I.$$

— Un second foncteur $\text{Spec}^\partial : \mathcal{C}_k^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{EspLocAnn}_k^\partial$, qui à un couple (A, I) associe l'ouvert de $\text{Spec}^\partial A$ associé à l'idéal I , muni du champ de vecteurs induit.

On est donc dans la situation :

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{C}_k^{\text{op}} & \\ \swarrow \text{diff-Spec} & & \searrow \text{Spec}^\partial \\ \mathbf{Esp}_k^\partial & \xleftarrow[h_- \in \omega]{\quad} & \mathbf{EspLocAnn}_k^\partial \\ \downarrow | - | \in * & & \end{array}.$$

On va maintenant montrer que les foncteurs $| - |$ et h_- peuvent être restreints aux objets quasi-affines.

(11.4.3) Restriction du foncteur $| - |$ aux préfaisceaux quasi-affines. On a :

Proposition 11.4.1. *Les deux foncteurs, de $\mathcal{C}_k^{\text{op}}$ dans \mathbf{Esp}_k^∂ ,*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_k^{\text{op}} & \xrightarrow{\text{Spec}^\partial} & \mathbf{EspLocAnn}_k^\partial \\ \searrow \underline{\text{diff-Spec}} & & \swarrow | - | \\ \mathbf{Esp}_k^\partial & & \end{array}$$

sont isomorphes.

Démonstration. — Soient donc A une k -algèbre différentielle et I un idéal de A . On veut construire, fonctoriellement, un isomorphisme entre $|\underline{\text{diff-Spec}}(A, I)|$ et $\text{Spec}^\partial(A, I)$. Par définition, on a

$$\begin{aligned} |\underline{\text{diff-Spec}}(A, I)| &= \underset{\substack{(K, p) \in \\ \text{points}(\underline{\text{diff-Spec}}(A, I))}}{\underset{\longrightarrow}{\mathrm{colim}}} \text{Spec}^\partial K \\ &= \underset{\substack{\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_k^\partial}(A, K) \\ (\varphi(I)) = K}}{\underset{\longrightarrow}{\mathrm{colim}}} \text{Spec}^\partial K \end{aligned}$$

Montrons que cette limite inductive « est égale » à $\text{Spec}^\partial(A, I)$. Pour cela, il faut d'abord construire, pour tout $K \in \mathbf{Alg}_k^\partial$ et pour tout $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_k^\partial}(A, K)$ vérifiant $(\phi(I)) = K$, un morphisme

$$\text{Spec}^\partial K \rightarrow \text{Spec}^\partial(A, I).$$

D'abord, par fonctorialité, on a bien un morphisme $f : \text{Spec}^\partial K \rightarrow \text{Spec}^\partial A$. Il s'agit donc de montrer que ce morphisme « tombe » dans l'ouvert défini par I , mais c'est ce qu'on a

expliqué dans le paragraphe (10.3.2). Ainsi, le morphisme $\mathrm{Spec}^\partial K \rightarrow \mathrm{Spec}^\partial(A, I)$ est bien défini. Par ailleurs, il est clair que cette collection de morphismes est bien compatible.

Maintenant, il faut montrer que cet objet est universel : si X est un k -espace localement différentiellement annelé, muni d'une collection compatible de morphismes

$$\Phi_{K,f} : \mathrm{Spec}^\partial K \rightarrow X$$

pour tout $K \in \mathbf{Alg}_k^\partial$ et tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_k^\partial}(A, K)$ vérifiant $(f(I)) = K$, alors on peut construire un unique morphisme $\mathrm{Spec}^\partial(A, I) \rightarrow X$. Pour obtenir ce morphisme, il suffit de considérer pour tout $f \in A$ le morphisme $i_f : A \rightarrow A_f$. On a bien

$$i_f \in (\underline{\mathrm{diff-Spec}}\, A)_I(A_f),$$

de sorte qu'on dispose d'un morphisme

$$\Phi_{A_f, i_f} : \mathrm{Spec}^\partial A_f \rightarrow X.$$

Ce morphisme peut aussi être vu comme

$$\Phi_f : D(f) \rightarrow X.$$

Puisque ces morphismes se recollent (comme on le vérifie en considérant deux éléments $f, g \in I$ et leur produit fg), et comme les $D(f)$ pour $f \in I$ forment un recouvrement de $\mathrm{Spec}^\partial(A, I)$, on peut ainsi construire un morphisme

$$\mathrm{Spec}^\partial(A, I) \rightarrow X.$$

Cette construction montre de plus qu'un tel morphisme $\mathrm{Spec}^\partial(A, I) \rightarrow X$ qui factorise les $\Phi_{K,f}$ est unique. Ainsi, on a bien

$$|\underline{\mathrm{diff-Spec}}\, (A, I)| = \underset{(\varphi(I))=K}{\mathrm{colim}}_{\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_k^\partial}(A, K)} \mathrm{Spec}^\partial K.$$

Comme cet isomorphisme est fonctoriel, on obtient l'isomorphisme entre foncteurs attendu. ■

(11.4.4) Restriction du foncteur h_- aux schémas quasi-affines munis d'un champ de vecteurs. Montrons maintenant que le foncteur des points d'un quasi-affine est quasi-affine :

Proposition 11.4.2. *Les deux foncteurs, de \mathcal{C}_k^{op} dans \mathbf{Esp}_k^∂ ,*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_k^{op} & \xrightleftharpoons[\mathrm{Spec}^\partial]{\text{diff-Spec}} & \mathbf{Esp}_k^\partial \\ & \searrow & \swarrow h_- \\ & \mathbf{EspLocAnn}_k^\partial & \end{array}$$

sont isomorphes.

Démonstration. — Soient A une k -algèbre différentielle et I un idéal de A . On cherche cette fois-ci un isomorphisme (fonctoriel) entre $h_{\mathrm{Spec}^\partial(A, I)}$ et $\underline{\mathrm{diff-Spec}}\, (A, I)$. Or, ce qu'on a expliqué dans le paragraphe (10.3.2) peut se formuler

$$h_{\mathrm{Spec}^\partial(A, I)}(K) \simeq \left\{ \phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_k^\partial}(A, K) \mid (\phi(I)) = K \right\},$$

pour tout k -algèbre différentielle K , ce qui est exactement ce qu'on voulait. ■

(11.4.5) **Équivalence entre les objets quasi-affines.** D'après ce qui précède, et d'après la proposition 2.4.8, l'adjonction

$$\mathbf{Esp}_k^\partial \begin{array}{c} \xrightarrow{|-|} \\ \xleftarrow{h_-} \end{array} \mathbf{SchLocAnn}_k^\partial$$

peut donc être restreinte en une adjonction

$$\mathbf{PréFaisc}_k^{\partial, \text{quasi-aff}} \begin{array}{c} \xrightarrow{|-|} \\ \xleftarrow{h_-} \end{array} \mathbf{SchQuasiAff}_k^\partial.$$

On veut montrer qu'il s'agit en fait d'une équivalence de catégories. Pour ce faire, on va utiliser le lemme suivant de théorie des catégories, qu'on a démontré dans le paragraphe (2.4.7), et dont on rappelle ici l'énoncé :

Lemme 11.4.3. Soit

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F \in *} \\ \xleftarrow{G \in \omega} \end{array} \mathcal{D}$$

une adjonction dont on note $\eta : \text{Id}_{\mathcal{C}} \longrightarrow GF$ et $\varepsilon : FG \longrightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$ l'unité e et la counité. Soit \mathcal{E} une troisième catégorie et soient

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{E} & \\ f \swarrow & & \searrow g \\ \mathcal{C} & & \mathcal{D} \end{array}$$

deux foncteurs essentiellement surjectifs. On suppose de plus qu'on a

$$\phi : F \circ f \longrightarrow g \quad \text{et} \quad \psi : G \circ g \longrightarrow f$$

deux isomorphismes de foncteurs faisant commuter les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} G \circ F \circ f \xrightarrow{G\phi} G \circ g & & F \circ G \circ g \xrightarrow{F\psi} F \circ f \\ \eta f \uparrow \quad \swarrow \psi & & \varepsilon g \downarrow \quad \swarrow \phi \\ f & & g \end{array} \quad \text{et} \quad$$

Alors, (F, G) est une équivalence de catégories.

Proposition 11.4.4. Soit k un anneau différentiel. Alors,

$$\mathbf{PréFaisc}_k^{\partial, \text{quasi-aff}} \begin{array}{c} \xrightarrow{|-|} \\ \xleftarrow{h_-} \end{array} \mathbf{SchQuasiAff}_k^\partial$$

est une équivalence de catégories.

Démonstration. — On applique le lemme précédent avec les données :

- pour les catégories : $\mathcal{C} = \mathbf{PréFaisc}_k^{\partial, \text{quasi-aff}}$, $\mathcal{D} = \mathbf{SchQuasiAff}_k^\partial$ et $\mathcal{E} = \mathcal{C}_k^{\text{op}}$;
- pour les foncteurs : F est le foncteur $|-$ de réalisation géométrique et G est h_- le foncteur des points ;

- pour les morphismes de foncteurs η et ε , on renvoie à la construction de l'adjonction $(|-|, h_-)$; on précisera dans la démonstration ce qu'est η .

Attardons-nous un peu sur les foncteurs f et g , ainsi que sur les isomorphismes ϕ et ψ , qu'on vient de définir dans les propositions 11.4.1 et 11.4.2. Si (A, I) est un objet de $\mathcal{C}_k^{\text{op}}$, on note $U_{A,I}$ l'ouvert de $\text{Spec}^\partial A$ défini par l'idéal I . Avec ces notations, le foncteur g est

$$g : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}_k^{\text{op}} & \longrightarrow & \mathbf{SchQuasiAff}_k^\partial \\ (A, I) & \longmapsto & U_{A,I} \end{array}$$

et, le foncteur f est

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}_k^{\text{op}} & \longrightarrow & \mathbf{PréFaisc}_k^{\partial, \text{quasi-aff}} \\ (A, I) & \longmapsto & (\underline{\text{diff-Spec } A})_I \end{array} .$$

Par définition, ces deux foncteurs sont bien essentiellement surjectifs. Venons-en aux morphismes de foncteurs ϕ et ψ . Tout simplement, pour ϕ , il s'agit de la famille des

$$\phi_{(A,I)} : |(\underline{\text{diff-Spec } A})_I| \longrightarrow U_{A,I},$$

tels que définis dans la proposition 11.4.1 — et de même pour ψ .

Pour que le lemme s'applique, on doit vérifier que les deux diagrammes commutent. Faisons-le pour le premier diagramme :

$$\begin{array}{ccc} G \circ F \circ f & \xrightarrow{G\phi} & G \circ g . \\ \eta f \downarrow & \nearrow \psi & \\ f & & \end{array}$$

Les objets de ce diagramme sont des foncteurs de $\mathcal{C}_k^{\text{op}}$ dans $\mathbf{PréFaisc}_k^{\partial, \text{quasi-aff}}$. Soit donc (A, I) un objet de $\mathcal{C}_k^{\text{op}}$. Ce qu'on veut vérifier est la commutativité de

$$\begin{array}{ccc} h|_{(\underline{\text{diff-Spec } A})_I} & \xrightarrow{h_- \circ \phi} & h_{U_{A,I}} . \\ \eta \uparrow & \swarrow \psi & \\ (\underline{\text{diff-Spec } A})_I & & \end{array}$$

Soit donc K un objet de \mathbf{Alg}_k^∂ . On veut vérifier la commutativité de

$$\begin{array}{ccc} h|_{(\underline{\text{diff-Spec } A})_I}(K) & \xrightarrow{h_- \circ \phi} & h_{U_{A,I}}(K) . \\ \eta \uparrow & \swarrow \psi & \\ \left\{ u \in \text{Hom}_{\mathbf{Alg}_k^\partial}(A, K) \mid (u(I)) = K \right\} & & \end{array}$$

Fixons $u \in \text{Hom}_{\mathbf{Alg}_k^\partial}(A, K)$ tel que $(u(I)) = K$. L'image de u par η est le morphisme canonique

$$i_u : \text{Spec}^\partial K \longrightarrow |(\underline{\text{diff-Spec } A})_I|,$$

donné par la limite inductive. L'image par ϕ de ce morphisme est le morphisme

$$j : \text{Spec}^\partial K \longrightarrow |(\underline{\text{diff-Spec } A})_I| \longrightarrow U_{A,I},$$

qui est le morphisme correspondant à $u \in \text{Hom}_{\mathbf{Alg}_k^\partial}(A, K)$. Enfin, l'image par ψ de j est le morphisme u . Donc, le diagramme commute.

On montre de même que l'autre diagramme commute. Ainsi, le lemme s'applique et montre que

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{PréFaisc}_k^{\partial, \text{quasi-aff}} & \xrightarrow{|-|} & \mathbf{SchQuasiAff}_k^\partial \\ & \xleftarrow{h_-} & \end{array}$$

est une équivalence de catégories, ce qu'on voulait. ■

(11.4.6) Image des immersions ouvertes par les foncteurs h_- et $|-$. Avant de continuer notre programme pour démontrer l'équivalence de catégories dans le cas général, on démontre dans ce paragraphe que les foncteurs h_- et $|-$ transforment les immersions ouvertes en immersions ouvertes, dans le cas où le but de ces immersions est affine ou représentable. On commence par :

Lemme 11.4.5. Soit k un anneau différentiel. Soit A une k -algèbre différentielle et soit $U_{A,I}$ l'ouvert de $\text{Spec } A$, défini par l'idéal I . Alors, le morphisme

$$h_{U_{A,I}} \longrightarrow h_{\text{Spec}^\partial A}$$

est une immersion ouverte. Plus précisément, c'est une immersion ouverte isomorphe à

$$(\underline{\text{diff-Spec }} A)_I \longrightarrow h_A.$$

Démonstration. — Tout a été déjà dit : si K est une k -algèbre différentielle, un élément $x \in h_{U_{A,I}}(K)$ correspond à un morphisme $\varphi : A \longrightarrow K$ tel que $\varphi(I)$ engendre K en tant qu'idéal. Ce morphisme φ est envoyé dans $h_A(K)$ par l'inclusion. ■

Lemme 11.4.6. Soit A une k -algèbre différentielle et soit I un idéal de A , définissant l'immersion ouverte $(\underline{\text{diff-Spec }} A)_I \longrightarrow h_A$. Alors, le morphisme

$$|(\underline{\text{diff-Spec }} A)_I| \longrightarrow |h_A|$$

est une immersion ouverte. Plus précisément, c'est une immersion ouverte isomorphe à

$$U_{A,I} \longrightarrow \text{Spec}^\partial A.$$

Démonstration. — En effet, le morphisme $|(\underline{\text{diff-Spec }} A)_I| \longrightarrow |h_A|$, via les identifications

$$|(\underline{\text{diff-Spec }} A)_I| \simeq U_{A,I} \quad \text{et} \quad |h_A| \simeq \text{Spec}^\partial A,$$

correspond au morphisme qui envoie l'ouvert $D(f)$ de $U_{A,I}$ dans $\text{Spec}^\partial A$, pour tout $f \in I$.

■

11.5 La réalisation géométrique d'un fonct- ∂ -schéma est un schéma muni d'un champ de vecteurs

On montre dans cette partie que le foncteur $| - | : \mathbf{Esp}_k^\partial \longrightarrow \mathbf{EspLocAnn}_k^\partial$ peut être restreint en un foncteur

$$| - | : \text{fonct-}\partial\text{-Sch}_k \longrightarrow \mathbf{Sch}_k^\partial.$$

Il suffit de montrer que l'image par $| - |$ d'un fonct- ∂ -schéma est un schéma muni d'un champ de vecteurs. Soit donc $X \in \text{fonct-}\partial\text{-Sch}_k$ un tel objet. D'après ce qu'on a dit au paragraphe (10.5.2), on peut trouver une famille de k -algèbres différentielles A_i , des immersions ouvertes $h_{A_i} \longrightarrow X$ et des faisceaux $U_{i,j}$, avec des immersions ouvertes $U_{i,j} \longrightarrow h_{A_i}$ et $U_{i,j} \longrightarrow h_{A_j}$, telles que le morphisme

$$\text{colim} \left(\coprod_{i,j} U_{i,j} \rightrightarrows \coprod_i h_{A_i} \right) \longrightarrow X$$

est un isomorphisme⁽³⁾. Or, le foncteur $| - | \in * (h_-) : \mathbf{EspLocAnn}_k^\partial$: c'est un foncteur admettant un adjoint à droite. Donc, il commute avec les colimites. Mais, la colimite que l'on considère est calculée dans $\mathbf{Faisc}_{\text{Zar},k}^\partial$ et non dans $\mathbf{PréFaisc}((\mathbf{Alg}_k^\partial)^{\text{op}})$; et, le foncteur h_- est à valeurs dans $\mathbf{PréFaisc}$; donc, pour l'instant, on ne peut pas conclure.

(11.5.1) Le foncteur des points est un faisceau. Pour conclure, il faudrait que l'adjonction qu'on ait soit :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Faisc}_{\text{Zar},k}^\partial & \xrightarrow{| - | \in *} & \mathbf{EspLocAnn}_k^\partial \\ & \xleftarrow[h_- \in \omega]{} & \end{array}$$

Pour obtenir cette adjonction, en vertu de la proposition 2.4.8, il suffit de montrer que le foncteur des points h_X d'un espace différentiellement localement annelé est un faisceau Zariski. C'est l'objet de la proposition qui suit.

Proposition 11.5.1. *Soit k un anneau différentiel et soit X un k -espace différentiellement localement annelé. Alors, le préfaisceau $h_X \in \mathbf{Esp}_k^\partial$ est un faisceau pour la prétopologie de Zariski.*

Démonstration. — Soit X un tel espace. Soit $A \in \mathbf{Alg}_k^\partial$ soit $(f_i)_i$ une famille d'éléments de A qui l'engendre (en tant que A -module). Il suffit, en vertu de la proposition 10.1.4 de montrer que la suite

$$h_X(A) \longrightarrow \prod_{i \in I} h_X(A_{f_i}) \rightrightarrows \prod_{i,j \in I} h_X(A_{f_i \cdot f_j})$$

est un égalisateur. C'est bien le cas, car se donner un morphisme de $\text{Spec}^\partial A$ dans X , c'est la même chose que se donner une famille de morphismes $\text{Spec}^\partial A_{f_i} \longrightarrow X$ qui coïncident sur les $\text{Spec}^\partial A_{f_i \cdot f_j}$. ■

⁽³⁾C'est-à-dire : au lieu de revenir à la définition d'un fonct- ∂ -schéma, on peut d'emblée voir X comme la colimite

$$X = \text{colim} \left(\coprod_{i,j} U_{i,j} \rightrightarrows \coprod_i h_{A_i} \right),$$

où toutes les flèches qui interviennent, et en particulier, celles de h_{A_i} vers X , sont des immersions ouvertes.

(11.5.2) **Retour au problème initial.** Ainsi, on dispose bien d'une adjonction

$$\mathbf{Faisc}_{\mathrm{Zar},k}^{\partial} \begin{array}{c} \xrightarrow{|-\infty|} \\[-1ex] \xleftarrow[h_{-}\in\omega]{} \end{array} \mathbf{EspLocAnn}_k^{\partial}.$$

Puis, partant de X un fonct- ∂ -schéma, on se donne les k -algèbres différentielles A_i , les immersions ouvertes $h_{A_i} \rightarrow X$ et les ouverts $U_{i,j}$, tels que le morphisme

$$\mathrm{colim} \left(\coprod_{i,j} U_{i,j} \rightrightarrows \coprod_i h_{A_i} \right) \rightarrow X$$

soit un isomorphisme. Cette fois-ci, on peut bien invoquer l'argument qu'un foncteur admettant un foncteur adjoint à droite commute aux colimites (la proposition 2.5.3) : le morphisme

$$\mathrm{colim} \left(|\coprod_{i,j} U_{i,j}| \rightrightarrows |\coprod_i h_{A_i}| \right) \rightarrow |X|$$

est un isomorphisme. En réappliquant cet argument aux coproduits qui apparaissent dans ce diagramme, on obtient que

$$\mathrm{colim} \left(\coprod_{i,j} |U_{i,j}| \rightrightarrows \coprod_i |h_{A_i}| \right) \rightarrow |X|$$

est un isomorphisme. Or, on a vu dans les paragraphes précédent que les $|U_{i,j}| \rightarrow |h_{A_i}|$ sont des immersions ouvertes (c'est le lemme 11.4.5) et que les $|h_{A_i}|$ sont isomorphes aux $\mathrm{Spec}^{\partial} A_i$ (c'est la proposition 11.3.1). Ainsi, on est ramené au problème suivant : soient $(A_i)_i$ une famille de k -algèbre différentielles et soit pour tous i, j un k -espace différentiellement localement annelé $V_{i,j}$, muni de deux immersions ouvertes

$$V_{i,j} \rightarrow \mathrm{Spec}^{\partial} A_i \quad \text{et} \quad V_{i,j} \rightarrow \mathrm{Spec}^{\partial} A_j.$$

Est-ce que la colimite de

$$\coprod_{i,j} V_{i,j} \rightrightarrows \coprod_i \mathrm{Spec}^{\partial} A_i$$

est un schéma, muni d'un k -champ de vecteurs ? La réponse est oui, car cette colimite peut être calculée facilement : il s'agit du recollement des $\mathrm{Spec}^{\partial} A_i$ le long des ouverts $V_{i,j}$: il s'agit bien d'un schéma, muni d'un k -champ de vecteurs. Ainsi, on a prouvé :

Proposition 11.5.2. *Soit k un anneau différentiel. Soit X un fonct- ∂ -schéma. Alors, la réalisation géométrique $|X|$ de X est un schéma muni d'un k -champ de vecteurs.*

11.6 Le foncteur des points d'un schéma muni d'un champ de vecteurs est un fonct- ∂ -schéma

On s'intéresse maintenant au sens réciproque de cette restriction d'adjonction. Soit donc k un anneau différentiel, et soit X un k -schéma muni d'un k -champ de vecteurs. On veut montrer que h_X est un k -fonct- ∂ -schéma. Comme X est un k -schéma muni d'un k -champ de vecteurs, on peut trouver des k -algèbres $\mathrm{Spec}^{\partial} A_i$, des immersions ouvertes $\mathrm{Spec}^{\partial} A_i \rightarrow X$ telles que le morphisme

$$\coprod_i \mathrm{Spec}^{\partial} A_i \rightarrow X$$

soit un épimorphisme. Appliquons le foncteur h_- à ce morphisme. On obtient un morphisme

$$h_{\coprod_i \mathrm{Spec}^\partial A_i} \longrightarrow h_X.$$

Pour montrer que h_X est bien un k -fonct- ∂ -schéma, on va procéder en trois étapes :

1. D'abord, on va montrer que

$$h_{\coprod_i \mathrm{Spec}^\partial A_i} \simeq \coprod_i h_{\mathrm{Spec}^\partial A_i}.$$

Comme on sait par ailleurs, grâce à la proposition 11.3.1, que $h_{\mathrm{Spec}^\partial A_i}$ est isomorphe à h_{A_i} , on aura donc un morphisme

$$\coprod_i h_{A_i} \longrightarrow h_X.$$

2. Ce morphisme est induit par une famille de morphismes $h_{A_i} \longrightarrow h_X$. La deuxième étape de notre démonstration consistera à montrer que ces morphismes sont des immersions ouvertes.

3. Enfin, on montrera que $\coprod_i h_{A_i} \longrightarrow h_X$ est un épimorphisme.

Cela suffira à montrer que h_X est bien un k -fonct- ∂ -schéma, car c'est exactement la définition d'un fonct- ∂ -schéma. Allons-y !

(11.6.1) Premier point : le foncteur h_- commute aux coproduits pour les objets affines. On déduit ce premier point d'un lemme plus général, qui nous servira par la suite.

Lemme 11.6.1. *Soit k un anneau différentiel. Soient A_i des k -algèbres différentielles et, pour tous i, j , soit $U_{i,j}$ un k -espace localement différentiellement annelé, muni de deux immersions ouvertes*

$$U_{i,j} \longrightarrow \mathrm{Spec}^\partial A_i \quad \text{et} \quad U_{i,j} \longrightarrow \mathrm{Spec}^\partial A_j.$$

Alors,

$$h \left(\mathrm{colim} \left(\coprod_{i,j} U_{i,j} \rightrightarrows \coprod_i \mathrm{Spec}^\partial A_i \right) \right) = \mathrm{colim} \left(\coprod_{i,j} h(U_{i,j}) \rightrightarrows \coprod_i h(\mathrm{Spec}^\partial A_i) \right)$$

dans $\mathbf{Fais}_{\mathrm{Zar}, k}^\partial$.

Remarques. — Dans l'énoncé qui précède, on a noté $h(X)$ au lieu de h_X , pour les différents $X \in \mathbf{EspLocAnn}_k^\partial$ qui apparaissent, afin de rendre le résultat plus lisible.

— Autrement dit, le foncteur h_- commute à certaines colimites particulières : les noyaux $X_1 \rightrightarrows X_0$ où X_0 est un coproduit d'objets affines, et les deux flèches $X_1 \longrightarrow X_0$ sont induites par une collection d'immersions ouvertes. On sait déjà que h_- , en tant que foncteur admettant un adjoint à gauche, commute aux limites.

— Voyons comment on peut déduire le résultat qui nous intéresse du lemme. Soit $(A_i)_i$ une famille de k -algèbre différentielles. On applique le lemme avec les ouverts $U_{i,j} := \emptyset$. On obtient :

$$\begin{aligned} h\left(\coprod_i \mathrm{Spec}^\partial A_i\right) &= h\left(\mathrm{colim}\left(\coprod_{i,j} \emptyset \rightrightarrows \coprod_i \mathrm{Spec}^\partial A_i\right)\right) \\ &= \mathrm{colim}\left(\coprod_{i,j} h(\emptyset) \rightrightarrows \coprod_i h(\mathrm{Spec}^\partial A_i)\right) \\ &= \mathrm{colim}\left(\coprod_{i,j} \emptyset \rightrightarrows \coprod_i h(\mathrm{Spec}^\partial A_i)\right) \\ &= \coprod_i h(\mathrm{Spec}^\partial A_i), \end{aligned}$$

ce qu'on voulait. \diamond

Démonstration du lemme 11.6.1. — On garde les notations de l'énoncé. La colimite

$$\mathrm{colim}\left(\coprod_{i,j} U_{i,j} \rightrightarrows \coprod_i \mathrm{Spec}^\partial A_i\right),$$

comme on l'a déjà remarqué, est le schéma (défini au-dessus de k , avec un k -champ de vecteurs) obtenu par recollement des $\mathrm{Spec}^\partial A_i$ le long des ouverts $U_{i,j}$. Notons X ce schéma. Ce qu'on veut montrer est que le foncteur des points de X , qu'on note ici $h(X)$ est la colimite

$$\mathrm{colim}\left(\coprod_{i,j} h(U_{i,j}) \rightrightarrows \coprod_i h(\mathrm{Spec}^\partial A_i)\right).$$

Soit donc F , un faisceau Zariski, muni d'une flèche

$$f : \coprod_i h(\mathrm{Spec}^\partial A_i) \longrightarrow F$$

qui fasse commuter le diagramme

$$\coprod_{i,j} h(U_{i,j}) \rightrightarrows \coprod_i \mathrm{Spec}^\partial h(A_i) \longrightarrow F.$$

On veut montrer que cette flèche f se factorise uniquement par

$$\coprod_i h(\mathrm{Spec}^\partial A_i) \longrightarrow h(X).$$

Ainsi, on veut construire un morphisme

$$h_X \longrightarrow F.$$

Soit donc R une k -algèbre différentielle. On va définir le morphisme $h_X(R) \longrightarrow F(R)$, en utilisant le fait que F est un faisceau. Soit donc $\varphi \in h_X(R)$; c'est-à-dire, soit $\varphi : \mathrm{Spec}^\partial R \longrightarrow X$ un morphisme. Dans le paragraphe (11.6.3), sous les mêmes hypothèses, on prouvera que

$$\coprod_i h(\mathrm{Spec}^\partial A_i) \longrightarrow h(X)$$

est un épimorphisme. On prouvera même, plus précisément, que l'on peut trouver un recouvrement $\{R \longrightarrow R_{g_\ell}\}_{\ell \in L}$ de R tel que, pour tout ℓ , le morphisme

$$\varphi_\ell : \mathrm{Spec}^\partial R_{g_\ell} \longrightarrow \mathrm{Spec}^\partial R \longrightarrow X$$

tombe dans un ouvert $\text{Spec}^\partial A_i$ de X . Pour $\ell \in L$, notons $i(\ell) \in I$ un indice tel le morphisme ci-dessus tombe dans $\text{Spec}^\partial A_{i(\ell)}$. Ensuite, grâce au morphisme

$$f : \coprod_i h(\text{Spec}^\partial A_i) \longrightarrow F$$

qu'on s'est donné, on envoie ces morphismes φ_ℓ dans $F(R_{g_\ell})$. On note x_ℓ ces éléments : on a donc une famille

$$(x_\ell)_\ell \in \prod_\ell F(R_{g_\ell}).$$

On veut montrer qu'on peut reconstruire à partir de cette famille $(x_\ell)_\ell$ un élément $x \in F(R)$. Comme F est un faisceau, il suffit de vérifier que les x_ℓ se recollent. Soient donc ℓ_1 et ℓ_2 deux indices. Les deux restrictions $x_{\ell_1|_{\ell_1, \ell_2}}$ et $x_{\ell_2|_{\ell_1, \ell_2}}$, sont les images par f des deux morphismes

$$\begin{aligned} \text{Spec}^\partial R_{g_{\ell_1} \cdot g_{\ell_2}} &\longrightarrow \text{Spec}^\partial R_{g_{\ell_1}} \xrightarrow{\varphi_{\ell_1}} X \\ \text{et} \quad \text{Spec}^\partial R_{g_{\ell_1} \cdot g_{\ell_2}} &\longrightarrow \text{Spec}^\partial R_{g_{\ell_2}} \xrightarrow{\varphi_{\ell_2}} X \end{aligned}$$

Comme ces deux morphismes sont en fait les images du même morphisme

$$\text{Spec}^\partial R_{g_{\ell_1} \cdot g_{\ell_2}} \longrightarrow U_{i(\ell_1), i(\ell_2)}$$

par les deux flèches

$$\coprod_{i,j} h(U_{i,j}) \rightrightarrows \coprod_i \text{Spec}^\partial h(A_i)$$

et comme F égalise ces deux flèches, on a bien que $x_{\ell_1|_{\ell_1, \ell_2}} = x_{\ell_2|_{\ell_1, \ell_2}}$, dans $X(R_{g_{\ell_1} \cdot g_{\ell_2}})$. Comme F est un faisceau, on peut reconstruire un $x \in F(R)$. Ainsi, on a construit un morphisme

$$h_X \longrightarrow F.$$

On vérifie ensuite qu'il vérifie les bonnes propriétés (c'est une factorisation) et qu'il est unique. ■

(11.6.2) Deuxième point : le foncteur h_- préserve les immersions ouvertes. Le point 2. du plan de notre preuve est une conséquence de la proposition suivante :

Proposition 11.6.2. *Soit k un anneau différentiel, soit X un k -schéma muni d'un k -champ de vecteurs. Soit $U \longrightarrow X$ une immersion ouverte. Alors, le morphisme*

$$h_U \longrightarrow h_X,$$

dans $\mathbf{Fais}_{Zar,k}^\partial$, est une immersion ouverte.

Démonstration. — On garde les notations de l'énoncé. La première chose à montrer est que le morphisme $h_U \longrightarrow h_X$ est un monomorphisme. Or, comme $U \longrightarrow X$ est une immersion ouverte (en tant qu'espaces annelés), il est facile de voir que c'est un monomorphisme. Par ailleurs, comme h_- admet un adjoint à gauche, d'après la proposition 2.4.10, il envoie les monomorphismes sur les monomorphismes. Donc,

$$h_U \longrightarrow h_X$$

est un monomorphisme (dans **PréFaisc** ou dans **Faisc**, c'est pareil).

Soit donc A une k -algèbre différentielle et soit $\varphi : h_A \rightarrow h_X$ un morphisme. Rappelons qu'on cherche un idéal I de A et un morphisme qui fasse de

$$\begin{array}{ccc} (\underline{\text{diff-Spec}} A)_I & \longrightarrow & h_A \\ \downarrow & & \downarrow \\ h_U & \longrightarrow & h_X \end{array}$$

un carré cartésien. Rappelons aussi, pour lever toute confusion, que les deux notations h_A et $\underline{\text{diff-Spec}} A$ représentent le même objet. Or, on a vu dans la proposition 11.2.1 que le foncteur

$$h_- : \mathbf{Sch}_k^\partial \rightarrow \mathbf{Esp}_k^\partial$$

est pleinement fidèle. Comme par ailleurs, les objets h_A et $h_{\text{Spec}^\partial A}$ sont isomorphes, cela veut dire que la flèche $h_A \rightarrow h_X$ provient d'un morphisme $\text{Spec}^\partial A \rightarrow X$ de \mathbf{Sch}_k^∂ . Considérons-le dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}^\partial A & & . \\ \downarrow & & \\ U & \longrightarrow & X \end{array}$$

Ce diagramme peut être complété en un diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \text{Spec}^\partial A \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ U & \longrightarrow & X \end{array}$$

Or, on sait que les changements de base préservent les immersions ouvertes (*cf.* par exemple [EGA I, Corollaire (4.3.2)]) : ainsi, le morphisme du haut est une immersion ouverte. On peut donc écrire ce dernier diagramme

$$\begin{array}{ccc} U_{A,I} & \longrightarrow & \text{Spec}^\partial A , \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ U & \longrightarrow & X \end{array}$$

où I est un idéal de A . Maintenant, on souhaite appliquer le foncteur h_- à ce diagramme. Comme h_- admet un adjoint à gauche, il commute aux limites ; donc, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} h_{U_{A,I}} & \longrightarrow & h_{\text{Spec}^\partial A} \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ h_U & \longrightarrow & h_X \end{array}$$

est cartésien. Enfin, compte tenu du fait que le foncteur h_- transforme les morphismes $U_{A,I} \rightarrow \text{Spec}^\partial A$ en les morphismes (isomorphes à) $(\underline{\text{diff-Spec}} A)_I \rightarrow \underline{\text{diff-Spec}} A$, comme on l'a montré dans la proposition 11.4.5, on obtient donc un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} (\underline{\text{diff-Spec}} A)_I & \longrightarrow & h_A . \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ h_U & \longrightarrow & h_X \end{array}$$

Ainsi, on a bien montré que $h_U \rightarrow h_X$ est une immersion ouverte. ■

(11.6.3) Troisième point : le morphisme $\coprod_i h_{A_i} \rightarrow h_X$ est un épimorphisme. Rapelons que X est un k -schéma, muni d'un k -champ de vecteurs, et que X est recouvert par les $\text{Spec}^\partial A_i$. Pour montrer que

$$\coprod_i h_{A_i} \rightarrow h_X,$$

est un épimorphisme, on utilise le critère donné par la proposition 2.6.5. Soit donc B une k -algèbre différentielle, et soit $\varphi \in h_X(B)$: φ est un morphisme $\text{Spec}^\partial B \rightarrow X$. On veut montrer qu'il existe un recouvrement

$$\{B \rightarrow B_{f_i}\}_i$$

de B tel que pour tout i , le morphisme $\text{Spec}^\partial B_{f_i} \rightarrow X$ se factorise par $\coprod_i \text{Spec}^\partial A_i \rightarrow X$. Ce n'est pas compliqué à voir ; voici comment on peut procéder :

- a) D'abord, on considère U_i l'image inverse de $\text{Spec}^\partial A_i$ dans $\text{Spec}^\partial B$ par φ . Comme $\text{Spec}^\partial A_i$ est un ouvert de X , U_i est un ouvert de $\text{Spec}^\partial B$.
- b) Chacun de ces ouverts U_i peut être recouvert par une famille d'ouverts distingués. On note $(f_j(i))_j$ une famille d'éléments de B tels que les $D(f_j(i))_j$ recouvrent U_i
- c) Comme les U_i recouvrent $\text{Spec}^\partial B$, la famille

$$\{B \rightarrow B_{f_j(i)}\}_{i,j}$$

est un recouvrement de B .

- d) Considérons maintenant la restriction du morphisme φ à $\text{Spec}^\partial B_{f_j(i)}$. Cela veut dire que l'on regarde le morphisme composé

$$\varphi_{i,j} : \text{Spec}^\partial B_{f_j(i)} \rightarrow \text{Spec}^\partial B \rightarrow \text{Spec}^\partial X.$$

On veut montrer qu'il se factorise par $\coprod_i \text{Spec}^\partial A_i \rightarrow X$. C'est simple à voir car, par construction, le morphisme $\text{Spec}^\partial B_{f_j(i)} \rightarrow \text{Spec}^\partial B$ tombe dans U_i et donc, le morphisme

$$\text{Spec}^\partial B_{f_j(i)} \rightarrow \text{Spec}^\partial X$$

tombe dans $\text{Spec}^\partial A_i$. Donc, on peut factoriser le morphisme $\varphi_{i,j}$ par $\text{Spec}^\partial A_i \rightarrow X$, donc en particulier par $\coprod_i \text{Spec}^\partial A_i \rightarrow X$.

Ainsi, $\coprod_i h_{A_i} \rightarrow h_X$ est bien un épimorphisme.

(11.6.4) Conclusion. Ainsi, on a montré :

Proposition 11.6.3. Soit k un anneau différentiel et soit X un schéma muni d'un k -champ de vecteurs. Alors, le foncteur des points de X , h_X , est un k -fonct- ∂ -schéma.

11.7 Le cas général

(11.7.1) Introduction : la situation dans laquelle on se trouve. On vient de voir, dans les deux sections précédentes, que les foncteurs $| - |$ et h_- envoient schémas sur schémas. Par conséquent, compte tenu de la proposition 2.4.8, qui dit la restriction d'une adjonction est encore une adjonction, on a une adjonction

$$\begin{array}{ccc} & | - | & \\ \text{fonct-}\partial\text{-Sch}_k & \xrightleftharpoons[\quad h_- \quad]{} & \text{Sch}_k^\partial . \end{array}$$

On veut montrer que c'est un équivalence de catégories.

(11.7.2) Le théorème et sa démonstration. On peut enfin en venir au résultat annoncé.

Théorème 11.7.1. Soit k un anneau différentiel. Alors,

$$\begin{array}{ccc} \text{fonct-}\partial\text{-Sch}_k & \xrightleftharpoons[\substack{|-| \\ h_-}]{} & \mathbf{Sch}_k^\partial. \end{array}$$

est une équivalence de catégories.

Démonstration. — On dispose, comme on l'a vu lors de la construction de l'adjonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Esp}_k^\partial & \xrightleftharpoons[\substack{|-| \\ h_-}]{} & \mathbf{EspLocAnn}_k^\partial \end{array}$$

dans le paragraphe (11.1.4), de deux morphismes (l'unité et la counité de l'adjonction)

$$\eta_F : F \longrightarrow h_{|F|} \quad \text{et} \quad \varepsilon_X : |h_X| \longrightarrow X$$

pour $F \in \mathbf{Esp}_k^\partial$ et $X \in \mathbf{EspLocAnn}_k^\partial$. Montrer que l'adjonction considérée est une équivalence de catégories, c'est exactement montrer que lorsque F est un k -fonct- ∂ -schéma, η_F est un isomorphisme et que, lorsque X est un k -schéma muni d'un k -champ de vecteurs, ε_X est aussi un isomorphisme.

Soit donc F , pour commencer, un k -fonct- ∂ -schéma. Comme on l'a vu dans le paragraphe (10.5.2), on peut voir F comme la colimite suivante :

$$\text{colim} \left(\coprod_{i,j} U_{i,j} \rightrightarrows \coprod_i h_{A_i} \right) \xrightarrow{\sim} F.$$

Comme $| - |$ admet un adjoint à droite, il commute aux colimites. Ainsi, comme on l'a déjà dit, on a donc :

$$\text{colim} \left(\coprod_{i,j} |U_{i,j}| \rightrightarrows \coprod_i |h_{A_i}| \right) \xrightarrow{\sim} |F|.$$

Appliquons maintenant le foncteur h_- , qu'on note pour l'occasion $h(-)$, à cette colimite. Compte tenu du lemme 11.6.1, on a

$$\text{colim} \left(\coprod_{i,j} h(|U_{i,j}|) \rightrightarrows \coprod_i h(|h_{A_i}|) \right) \xrightarrow{\sim} h(|F|).$$

Enfin, pour conclure, on utilise les propositions 11.3.2 et 11.4.4, qui disent que $| - |$ et $h(-)$ constituent une équivalence de catégories pour les objets affines et quasi-affines : pour tous i, j , les morphismes

$$\eta_{U_{i,j}} : U_{i,j} \longrightarrow h(|U_{i,j}|) \quad \text{et} \quad \eta_{h_{A_i}} : h_{A_i} \longrightarrow h(|h_{A_i}|)$$

sont des isomorphismes. Ainsi, dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{colim} \left(\coprod_{i,j} U_{i,j} \rightrightarrows \coprod_i h_{A_i} \right) & \xrightarrow{\sim} & F \\ \downarrow \eta_{\text{colim}} & & \downarrow \eta_F, \\ \text{colim} \left(\coprod_{i,j} h(|U_{i,j}|) \rightrightarrows \coprod_i h(|h_{A_i}|) \right) & \xrightarrow{\sim} & h(|F|) \end{array}$$

on vient de montrer que toutes les flèches sont des isomorphismes, sauf pour η_F ; donc, η_F est un isomorphisme, ce qu'on voulait montrer.

Passons maintenant à la counité. Soit X un k -schéma muni d'un k -champ de vecteurs. Considérons le morphisme

$$\varepsilon_X : |h(X)| \longrightarrow X.$$

On applique $h(-)$ à ce morphisme. On obtient $h(|h(X)|) \longrightarrow h_X$. Puis, d'après les axiomes de l'unité et de la counité, le morphisme composé

$$h(X) \xrightarrow{\eta_{h(X)}} h(|h(X)|) \xrightarrow{h(\varepsilon_X)} h(X)$$

est l'identité de h_X . Par ailleurs, on vient de voir que $\eta_{h(X)}$ est un isomorphisme. Donc, $h(\varepsilon_X)$ est un isomorphisme. Or, d'après la proposition 11.2.1, le foncteur h_- est pleinement fidèle. Donc, ε_X est un isomorphisme, ce qu'on voulait démontrer. ■

Bibliographie

Références générales

- [EGA_I] A. GROTHENDIECK – « Éléments de géométrie algébrique. I. Le langage des schémas », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1960), no. 4, p. 228.
- [EGA_{IV.1}] A. GROTHENDIECK, « Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. I », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1964), no. 20, p. 259.
- [EGA_{IV.4}] A. GROTHENDIECK, « Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1967), no. 32, p. 361.
- [SGA_{3I}] *Schémas en groupes. I : Propriétés générales des schémas en groupes* – Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962/64 (SGA 3). Dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 151, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

Livres, Chapitres de livres et articles

- [Ben] F. BENOIST – « Some notions of D-algebraic geometry ».
- [Ben06] F. BENOIST, « Additional structure on algebraic groups in Hasse fields », *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* **13** (2006), no. 5, p. 959–967.
- [BGK⁺87] A. BOREL, P.-P. GRIVEL, B. KAUP, A. HAEFLIGER, B. MALGRANGE & F. EHLERS – *Algebraic D-modules*, Perspectives in Mathematics, vol. 2, Academic Press Inc., Boston, MA, 1987.
- [Bou70] N. BOURBAKI – *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitres 1 à 3*, Hermann, Paris, 1970.
- [Bou85] N. BOURBAKI, *Éléments de mathématique*, Masson, Paris, 1985, Algèbre commutative. Chapitres 1 à 4. [Commutative algebra. Chapters 1–4], Reprint.
- [Bui82] A. BUIUM – « Ritt schemes and torsion theory », *Pacific J. Math.* **98** (1982), no. 2, p. 281–293.
- [Bui86] A. BUIUM, *Differential function fields and moduli of algebraic varieties*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1226, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [Bui92] A. BUIUM, *Differential algebraic groups of finite dimension*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1506, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [Bui94] A. BUIUM, *Differential algebra and Diophantine geometry*, Actualités Mathématiques. [Current Mathematical Topics], Hermann, Paris, 1994.
- [Car78] G. CARRÀ – « Sullo spettro differenziale di un anello differenziale », *Matematiche (Catania)* **33** (1978), no. 1, p. 1–17 (1980).

- [Cas72] P. J. CASSIDY – « Differential algebraic groups », *Amer. J. Math.* **94** (1972), p. 891–954.
- [CF85] G. CARRÀ FERRO – « The ring of global sections of the structure sheaf on the differential spectrum », *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* **30** (1985), no. 10, p. 809–814.
- [CF90] G. CARRÀ FERRO, « Kolchin schemes », *J. Pure Appl. Algebra* **63** (1990), no. 1, p. 13–27.
- [CS07] P. J. CASSIDY & M. F. SINGER – « Galois theory of parameterized differential equations and linear differential algebraic groups », in *Differential equations and quantum groups*, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., vol. 9, Eur. Math. Soc., Zürich, 2007, p. 113–155.
- [Dem86] M. DEMAZURE – *Lectures on p -divisible groups*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 302, Springer-Verlag, Berlin, 1986, Reprint of the 1972 original.
- [DG70] M. DEMAZURE & P. GABRIEL – *Groupes algébriques. Tome I : Géométrie algébrique, généralités, groupes commutatifs*, Masson & Cie, Éditeur, Paris, 1970, Avec un appendice *Corps de classes local* par Michiel Hazewinkel.
- [DM69] P. DELIGNE & D. MUMFORD – « The irreducibility of the space of curves of given genus », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1969), no. 36, p. 75–109.
- [Dyc] T. DYCKERHOFF – « Differential Galois theory of schemes ».
- [FLMR92] M. FLIESS, J. LÉVINE, P. MARTIN & P. ROUCHON – « Sur les systèmes non linéaires différentiellement plats », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **315** (1992), no. 5, p. 619–624.
- [FLMR95] M. FLIESS, J. LÉVINE, P. MARTIN & P. ROUCHON, « Flatness and defect of non-linear systems : introductory theory and examples », *Internat. J. Control* **61** (1995), no. 6, p. 1327–1361.
- [Gil02] H. GILLET – « Differential algebra—a scheme theory approach », in *Differential algebra and related topics (Newark, NJ, 2000)*, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2002, p. 95–123.
- [Hak72] M. HAKIM – *Topos annelés et schémas relatifs*, Springer-Verlag, Berlin, 1972, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 64.
- [Har77] R. HARTSHORNE – *Algebraic geometry*, GTM, no. 52, Springer-Verlag, 1977.
- [HS37] H. HASSE & F. K. SCHMIDT – « Noch eine Begründung der Theorie der höheren Differentialquotienten in einem algebraischen Funktionenkörper einer Unbestimmten. », *J. Reine Angew. Math.* **177** (1937), p. 215–237 (German).
- [HS08] C. HARDOUIN & M. F. SINGER – « Differential Galois theory of linear difference equations », *Math. Ann.* **342** (2008), no. 2, p. 333–377.
- [Jou79] J. P. JOUANOLOU – *Équations de Pfaff algébriques*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 708, Springer, Berlin, 1979.
- [Kap57] I. KAPLANSKY – *An introduction to differential algebra*, Actualités Sci. Ind., No. 1251 = Publ. Inst. Math. Univ. Nancago, No. 5, Hermann, Paris, 1957.
- [Kei75] W. F. KEIGHER – « Adjunctions and comonads in differential algebra », *Pacific J. Math.* **59** (1975), no. 1, p. 99–112.
- [Kei77] W. F. KEIGHER, « Prime differential ideals in differential rings », in *Contributions to algebra (collection of papers dedicated to Ellis Kolchin)*, Academic Press, New York, 1977, p. 239–249.
- [Kei78] W. F. KEIGHER, « Quasi-prime ideals in differential rings », *Houston J. Math.* **4** (1978), no. 3, p. 379–388.

- [Kei81] W. F. KEIGHER, « On the quasi-affine scheme of a differential ring », *Adv. in Math.* **42** (1981), no. 2, p. 143–153.
- [Kei82a] W. F. KEIGHER, « Differential rings constructed from quasiprime ideals », *J. Pure Appl. Algebra* **26** (1982), no. 2, p. 191–201.
- [Kei82b] W. F. KEIGHER, « Differential schemes and premodels of differential fields », *J. Algebra* **79** (1982), no. 1, p. 37–50.
- [Kei83] W. F. KEIGHER, « On the structure presheaf of a differential ring », *J. Pure Appl. Algebra* **27** (1983), no. 2, p. 163–172.
- [Kol73] E. R. KOLCHIN – *Differential algebra and algebraic groups*, Academic Press, New York, 1973, Pure and Applied Mathematics, Vol. 54.
- [Kol80] E. R. KOLCHIN, « On universal extensions of differential fields », *Pacific J. Math.* **86** (1980), no. 1, p. 139–143.
- [Kol85] E. R. KOLCHIN, *Differential algebraic groups*, Pure and Applied Mathematics, vol. 114, Academic Press Inc., Orlando, FL, 1985.
- [Kol86] E. R. KOLCHIN, « Differential algebraic groups », in *Group theory, Beijing 1984*, Lecture Notes in Math., vol. 1185, Springer, Berlin, 1986, p. 155–174.
- [Kol99] E. KOLCHIN – *Selected works of Ellis Kolchin with commentary*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999, Commentaries by Armand Borel, Michael F. Singer, Bruno Poizat, Alexandru Buium and Phyllis J. Cassidy, Edited and with a preface by Hyman Bass, Buium and Cassidy.
- [Kov02a] J. J. KOVACIC – « Differential schemes », in *Differential algebra and related topics (Newark, NJ, 2000)*, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2002, p. 71–94.
- [Kov02b] J. J. KOVACIC, « Global sections of diffspec », *J. Pure Appl. Algebra* **171** (2002), no. 2-3, p. 265–288.
- [Kov03] J. J. KOVACIC, « The differential Galois theory of strongly normal extensions », *Trans. Amer. Math. Soc.* **355** (2003), no. 11, p. 4475–4522 (electronic).
- [Kov06] J. J. KOVACIC, « Geometric characterization of strongly normal extensions », *Trans. Amer. Math. Soc.* **358** (2006), no. 9, p. 4135–4157 (electronic).
- [KS06] M. KASHIWARA & P. SCHAPIRA – *Categories and sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 332, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [Lan02] S. LANG – *Algebra*, third éd., Graduate Texts in Mathematics, vol. 211, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [Lan08] P. LANDESMAN – « Generalized differential Galois theory », *Trans. Amer. Math. Soc.* **360** (2008), no. 8, p. 4441–4495.
- [LMB00] G. LAUMON & L. MORET-BAILLY – *Champs algébriques*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 39, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [Mag94] A. R. MAGID – *Lectures on differential Galois theory*, University Lecture Series, vol. 7, American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.
- [Mar07] F. MARTY – « Relative zariski open objects », 2007.
- [Mat82] H. MATSUMURA – « Integrable derivations », *Nagoya Math. J.* **87** (1982), p. 227–245.
- [Mat89] H. MATSUMURA, *Commutative ring theory*, second éd., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 8, Cambridge University Press, Cambridge, 1989, Translated from the Japanese by M. Reid.

- [MF82] D. MUMFORD & J. FOGARTY – *Geometric invariant theory*, second éd., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete [Results in Mathematics and Related Areas], vol. 34, Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- [ML71] S. MAC LANE – *Categories for the working mathematician*, Springer-Verlag, New York, 1971, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 5.
- [MLM94] S. MAC LANE & I. MOERDIJK – *Sheaves in geometry and logic*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 1994, A first introduction to topos theory, Corrected reprint of the 1992 edition.
- [MMR02] P. MARTIN, R. M. MURRAY & P. ROUCHON – « Flat systems », in *Mathematical control theory, Part 1, 2 (Trieste, 2001)*, ICTP Lect. Notes, VIII, Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste, 2002, p. 705–768 (electronic).
- [Pil97] A. PILLAY – « Some foundational questions concerning differential algebraic groups », *Pacific J. Math.* **179** (1997), no. 1, p. 179–200.
- [PL09] J. L. PENA & O. LORSCHEID – « Mapping \mathbf{F}_1 -land : an overview of geometries over the field with one element », 2009.
- [Pom94] J.-F. POMMARET – *Partial differential equations and group theory*, Mathematics and its Applications, vol. 293, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1994, New perspectives for applications.
- [Rad71] N. RADU – « Sur la décomposition primaire des idéaux différentiels », *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* **16** (1971), p. 1419–1425.
- [Rit34] J. F. RITT – *Differential equations from the algebraic standpoint*, Amer. Math. Soc. Colloq. Pub., no. 14, Amer. Math. Soc., 1934.
- [Ros72] M. ROSENLIGHT – « Integration in finite terms », *Amer. Math. Monthly* **79** (1972), p. 963–972.
- [Sch68] M. SCHLESSINGER – « Functors of Artin rings », *Trans. Amer. Math. Soc.* **130** (1968), p. 208–222.
- [Sch72] H. SCHUBERT – *Categories*, Springer-Verlag, New York, 1972, Translated from the German by Eva Gray.
- [TV09] B. TOËN & M. VAQUIÉ – « Au-dessous de $\mathrm{Spec} \mathbf{Z}$ », *J. K-Theory* **3** (2009), no. 3, p. 437–500.
- [Ume96] H. UMEMURA – « Galois theory of algebraic and differential equations », *Nagoya Math. J.* **144** (1996), p. 1–58.
- [vdPS03] M. VAN DER PUT & M. F. SINGER – *Galois theory of linear differential equations*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 328, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [Voj07] P. VOJTA – « Jets via Hasse-Schmidt derivations », in *Diophantine geometry*, CRM Series, vol. 4, Ed. Norm., Pisa, 2007, p. 335–361.
- [Wei46] A. WEIL – *Foundations of Algebraic Geometry*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 29, American Mathematical Society, New York, 1946.

Index

A

- Action de groupe algébro-différentiel ... 235
Adjoint (foncteur) 15, 17, 36, 45–48, 50, 51,
61, 88, 217, 230, 248, 259, 267, 278,
289, 295, 297, 303, 307, 310, 316

C

- Carré cartésien .. 17, 37, 38, 41, 42, 60, 247,
249, 272, 274–276, 280
Catégorie des faisceaux au-dessus d'un site
16, 60, 62, 278, 289
Cauchy-Lipschitz (théorème de) 90, 91, 123,
148, 149
Champ de vecteurs ... 14, 79, 83, 86, 89, 96,
98, 181, 192–195, 240
Cocomplète (catégorie) 51, 294
Colimite 51, 61, 62, 108, 160, 161, 164, 200,
201, 247, 280, 282, 294, 298, 302
Complète (catégorie) 51
Conoyau 51, 295–297
Constantes (anneau des) 12, 25, 31, 32, 108,
110, 173, 204
Constantes (faisceau des) 107, 108, 116, 170,
173, 196, 201
Coproduit 28, 51, 52, 294

D

- Décomposé (\mathcal{S} -schéma muni d'un champ de
vecteurs) 124
Dérivation 24, 26, 71–77, 79, 97
Dérivation de Hasse-Schmidt 6, 11, 14,
95–98, 195, 242
Dérivée logarithmique 10, 16, 245–252
Dynamique propre (schéma sans) 12,
124–125

E

- Égalisateur 155, 264, 267
Épimorphisme ... 16, 50–52, 55, 59–61, 220,
278, 281, 288
Équivariant (morphisme) 236
Espace algébro-différentiel 15, 209, 214, 297
Espace algébro-différentiel en modules . 225

Espace des feuilles géométrique 14, 196–197,
202

- Espace des feuilles grossier 11, 106, 110,
111, 117, 118, 122, 141, 196
Espace des feuilles universel 197, 205
Espace différentiellement annelé 85, 107
Espace localement différentiellement annelé
17, 111, 293, 294, 297
Espace tangent .. 15, 70–77, 80, 89, 237–241

F

- Faisceau associé à un préfaisceau 57
Faisceau au-dessus d'un site . 52, 54, 57, 59,
61, 256, 264, 270, 276, 282
Faisceau de Carrà Ferro 9, 13, 159–162, 170,
200, 204
Faisceau de Keigher ... 9, 13, 159–162, 164,
170, 201
Faisceau de Kovacic 9, 13, 164–166, 170
Fermé invariant 12
Feuille 11, 12, 81–83, 121, 198
Fonct- ∂ -schémas 16, 290
Foncteur en groupes abéliens 221
Foncteur en modules 222
Fonctions régulières (algèbre des) .. 216–220
Fortement cofiltrant (foncteur) 281

G

- Générisation 90, 91
Galois (théorie de — différentielle) 121, 212
Germes formels (anneau différentiel des) 245
 $\widehat{\mathbf{G}}_a$ 192–195
Groupe algébro-différentiel 224
Groupe différentiel 223

H

- Halo 156, 158

I

- Idéal différentiel 12, 26, 29, 121, 126,
130–132, 147, 153, 229
Idéal premier 27, 29, 30
Immersion ouverte ... 16, 256, 257, 271–288,
309, 314

- Invariant (fermé) 147–151
 Invariant (ouvert) 147–151
 Invariant (point) voir Feuille
- L**
- Lieu 258
 Limite 51, 62, 243, 247
 Longueur d'un élément de $A \otimes_C K$ 128
- M**
- Minimal (idéal premier) 92, 153
 Monomorphisme 42, 50, 55, 57, 272, 274, 276, 278
- N**
- Noyau 51
- O**
- Orbite 157–158
 Ouvert invariant 12
- P**
- Plat (module) 31, 32
 Plat (système différentiellement) 15, 232–234
 Pleinement fidèle (foncteur) 300
 Poids d'une série formelle 186, 187
 Point d'un espace algébro-différentiel 216, 219, 297–299
 Polynôme algébro-différentiel 228, 231
 Préfaisceau au-dessus d'un site 52, 54, 55, 57
 Prétopologie 16, 53, 57, 256, 262, 270, 288
 Prétopologie de Zariski 262–270, 288
 Produit 51, 88, 215
- Q**
- Quasi-simple (anneau différentiel) 12, 113–115, 117
 Quasi-simple (schéma muni d'un champ de vecteurs) 112–119
- R**
- Radical d'un idéal 26, 27, 92, 153, 273
 Relations algébriques (idéal des) 231
- S**
- Schéma différentiel affine 215
 Schéma formel 193
 Schlessinger (condition de) 247
 Série formelle 17, 243
 Séries formelles (anneau de) 183, 185–192
 Simple (anneau différentiel) 11, 27, 104, 105, 107, 109, 110, 114, 122, 128, 130–132, 206
 Simple (schéma muni d'un champ de vecteurs) 11, 12, 104–105, 108, 122, 205
 Site 52, 53
 Sous-canonique (prétopologie) 57, 256, 257, 266
 Spécialisation 90, 91, 147
 Spectre différentiel 9, 145, 159
- T**
- Toën et Vaquié (approche de) 7, 10, 209, 255–256, 274
 Topologie de Carrà Ferro 13, 152–154, 198, 200, 204, 257
 Topologie de Kolchin 159
 Torseur 236
 Trajectoire d'un point 11, 82, 91, 95, 97, 123, 161, 199, 200
- U**
- Univers 298
- V**
- Voisinage formel 245
- Y**
- Yoneda (lemme de) 44, 209, 218