

DS 4  
CORRIGÉ

## Étude d'une suite de racines

### Application à l'optimalité d'un contrôle

#### Partie I – Un contrôle classique

1. Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme unitaire de degré  $n$  qu'on écrit

$$P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$

où  $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, a_k \in \mathbb{C}$ .

Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$  une racine de  $P$ .

Montrer que

$$\left( \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, |a_k| \leq 1 \right) \implies |\alpha| < 2.$$

On suppose que  $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, |a_k| \leq 1$ .

On raisonne par l'absurde et on suppose que  $|\alpha| \geq 2$ . On a

$$\alpha^n = - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \alpha^k.$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned} |\alpha^n| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k \alpha^k \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |\alpha|^k \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |\alpha|^k && \text{car } \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, |a_k| \leq 1 \\ &= \frac{|\alpha|^n - 1}{|\alpha| - 1} && (\text{car } |\alpha| \neq 1 \text{ car } |\alpha| \geq 2) \\ &\leq |\alpha|^n - 1 && (\text{car } |\alpha| - 1 \geq 1 \text{ donc } \frac{1}{|\alpha| - 1} \leq 1) \end{aligned}$$

C'est absurde.

## Partie II – Étude d’une fonction auxiliaire

Dans la suite, on considère la fonction

$$f_n : \begin{cases} [1, 2] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto t^{n+1} - 2t^n + 1. \end{cases}$$

2. (a) Étudier le signe de  $f'_n(t)$  pour  $t \in [1, 2]$ .

Soit  $t \in [1, 2]$ . On a  $f'_n(t) = (n+1)t^n - 2nt^{n-1} = t^{n-1}((n+1)t - 2n)$ .

Comme  $t \geq 0$ , on a

$$f'_n(t) \geq 0 \iff (n+1)t - 2n \geq 0 \iff t \geq \frac{2n}{n+1} = 2 - \frac{2}{n+1},$$

avec égalité si et seulement si  $t = 2 - \frac{2}{n+1}$ . D’où le tableau de signes :

$t$	1	$2 - \frac{2}{n+1}$	2
$f'_n(t)$		− 0 +	

- (b) En déduire la valeur de  $u_n$  telle que le tableau de variations de  $f_n$  soit

$t$	1	$2 - u_n$	2
$f_n$		$f_n(2 - u_n)$	

On précisera les valeurs en 1 et 2 mais on ne calculera pas  $f_n(2 - u_n)$ .

La valeur  $u_n := \frac{2}{n+1}$  convient. De plus, on a

$$f_n(1) = 0 \quad \text{et} \quad f_n(2) = 1.$$

On a alors le tableau de variations

$t$	1	$2 - \frac{2}{n+1}$	2
$f_n$	0	$f_n(2 - u_n)$	1

- (c) En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que  $f_n$  s'annule en un unique point sur  $]1, 2]$ .

Comme  $f_n$  est strictement décroissante sur  $[0, 2 - u_n]$  et que  $f_n(0) = 0$ , on a

$$f_n(2 - u_n) < 0.$$

Comme  $f_n(1) > 0$ , comme  $f_n$  est strictement croissante sur  $[0, 2 - u_n]$  et qu'elle est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique point dans  $[2 - u_n, 1]$  en lequel  $f_n$  s'annule.

De plus,  $f_n$  ne s'annule pas sur  $]0, 2 - u_n]$ . Finalement,

il existe un unique point dans  $]0, 1]$  en lequel  $f_n$  s'annule.

3. On note

$$m_n := 1 - \left(2 - \frac{2}{n+1}\right)^n \times \frac{2}{n+1}.$$

- (a) Sans justification, donner un équivalent simple de  $m_n$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

On trouve

$$m_n \sim -\frac{1}{e} \times \frac{2^{n+1}}{n}.$$

- (b) En déduire la limite de la suite  $(m_n)_n$ .

On a donc  $m_n \longrightarrow -\infty$ .

4. Dessiner l'allure de  $\mathcal{C}_{f_n}$ .

*On attend un dessin propre, schématique, sur lequel figurent quelques valeurs remarquables.*

Voici l'allure du graphe de  $f_6$ .



## Partie III – Premières propriétés de la suite des racines

5. (a) Soit  $t \in ]1, 2]$ . Montrer que

$$P_n(t) = 0 \iff f_n(t) = 0.$$

On calcule, comme  $t \neq 1$ ,

$$\begin{aligned} P_n(t) &= t^n - \sum_{k=0}^{n-1} t^k \\ &= t^n - \frac{t^n - 1}{t - 1} \\ &= \frac{t^n(t - 1) - t^n + 1}{t - 1} \\ &= \frac{t^{n+1} - 2t^n + 1}{t - 1} = \frac{f_n(t)}{t - 1}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien

$$P_n(t) = 0 \iff f_n(t) = 0.$$

- (b) En déduire que  $P_n$  possède une unique racine dans  $]1, +\infty[$ .

- Comme, d'après la question 2.(c),  $f_n$  possède un unique zéro dans  $]1, 2]$ , on en déduit que  $P_n$  possède une unique racine dans  $]1, 2]$ .
- Il nous reste à prouver que  $\forall t > 2$ ,  $P_n(t) \neq 0$ . Soit  $t > 2$ . On a

$$t^{n+1} > 2t^n \geq 2t^n - 1 \quad \text{donc} \quad t^{n+1} - 2t^n + 1 > 0$$

donc  $P_n(t) > 0$ .

Ainsi,

$$P_n \text{ possède une unique racine dans } ]1, +\infty[.$$

### Notation

Dans toute la suite du problème, pour tout  $n \geq 2$ , on note  $x_n$  cette unique racine.

6. Montrer que  $2 - \frac{2}{n+1} \leq x_n < 2$ .

Comme  $f\left(2 - \frac{2}{n+1}\right) < 0$  et  $f_n(2) > 0$ , le théorème des valeurs intermédiaires nous assure que l'unique zéro  $x_n$  de  $f_n$  vérifie nécessairement

$$2 - \frac{2}{n+1} \leq x_n < 2.$$

7. (a) Calculer  $x_2$ .

Le réel  $x_2$  est racine du polynôme  $X^2 - X - 1$  et vérifie  $x_2 > 1$ . On trouve  $x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

- (b) Montrer que  $x_2 > \frac{3}{2}$ .

On raisonne par équivalences. On a

$$\begin{aligned} x_2 > \frac{3}{2} &\iff \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > \frac{3}{2} \\ &\iff 1 + \sqrt{5} > 3 \\ &\iff \sqrt{5} > 2 \\ &\iff 5 > 4 \end{aligned} \quad \text{car } (\cdot)^2 \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+.$$

Donc, comme on a  $5 > 4$ , on a bien  $x_2 > \frac{3}{2}$ .

8. Montrer que  $x_n \rightarrow 2$ .

Comme on a  $\forall n \geq 2$ ,  $2 - \frac{2}{n+1} \leq x_n < 2$  et comme  $2 - \frac{2}{n+1} \rightarrow 2$ , par encadrement, on en déduit que

$$x_n \rightarrow 2.$$

## Partie IV – Optimalité du contrôle classique

9. Montrer que 2 contrôle les racines de  $\mathcal{E}$ .

Il s'agit d'une reformulation de la question 1..

10. Soit  $M \in \mathbb{R}_+$ . Montrer que

$$M \text{ contrôle les racines de } \mathcal{E} \implies M \geq 2.$$

Soit  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que  $M$  contrôle les racines de  $\mathcal{E}$ .

Comme  $P_n \in \mathcal{E}_n$  et comme  $x_n \in Z_{\mathbb{C}}(P_n)$ , on a (par définition de  $M$ )  $|x_n| \leq M$ .

En faisant tendre  $n \rightarrow \infty$ , on obtient

$$2 \leq M.$$

## Partie V – Un premier lemme

11. Montrer que

$$\delta_n \times p_n \longrightarrow \ell \implies (1 + \delta_n)^{p_n} \longrightarrow e^\ell.$$

Supposons que  $\delta_n \times p_n \longrightarrow \ell$ . On a

$$(1 + \delta_n)^{p_n} = \exp(p_n \ln(1 + \delta_n)).$$

De plus, comme  $\delta_n \longrightarrow 0$ , on a  $\ln(1 + \delta_n) \sim \delta_n$ , d'après le cours. Donc, on a

$$p_n \ln(1 + \delta_n) \sim p_n \times \delta_n \quad \text{et donc} \quad p_n \ln(1 + \delta_n) \longrightarrow \ell.$$

Comme  $\exp(\cdot)$  est continue en  $\ell$ , on a

$$(1 + \delta_n)^{p_n} = \exp(p_n \ln(1 + \delta_n)) \longrightarrow e^\ell.$$

### 12. Applications.

(a) (i) Soit  $n \geq 2$ . Montrer que  $n! \geq 3^{n-2}$ .

On raisonne par récurrence.

- On pose, pour  $n \geq 2$ ,  $\mathcal{P}(n)$  : «  $n! \geq 3^{n-2}$  ».

- Déjà,  $\mathcal{P}(2)$  est vraie. En effet, on a  $2! = 2$  et  $3^{2-2} = 1$ .

- Montrons que  $\forall n \geq 2$ ,  $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$ .

Soit  $n \geq 2$  tel que  $\mathcal{P}(n)$ . On a  $n! \geq 3^{n-2}$ . On a donc  $(n+1)! \geq 3^{n-2}(n+1)$ . Or, comme  $n \geq 2$ , on a  $n+1 \geq 3$  et donc

$$(n+1)! \geq 3^{n-2}(n+1) \geq 3^{n-2} \times 3 = 3^{(n+1)-2}.$$

Donc,  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

Ainsi, d'après le principe de récurrence, on a  $\boxed{\forall n \geq 2, n! \geq 3^{n-2}}.$

(ii) En déduire que

$$\left(1 + \frac{1}{n!}\right)^{2^n} \longrightarrow 1.$$

On a donc

$$0 \leq \frac{2^n}{n!} \leq \frac{2^n}{3^{n-2}} = \frac{1}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^n \longrightarrow 0.$$

Donc, d'après la question 12.(a)(i), on a

$$\boxed{\left(1 + \frac{1}{n!}\right)^{2^n} \longrightarrow e^0 = 1.}$$

(b) Déterminer la limite de la suite de terme général

$$\left(1 + \frac{1}{n^n}\right)^{(n+1)^n}.$$

Déjà, on a

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Comme  $\frac{1}{n} \times n \rightarrow 1$ , d'après la question **12.**(a)(i) avec «  $p_n = n$  » et «  $\delta_n = \frac{1}{n}$  », on a

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e^1 = e.$$

Donc, on a

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} \rightarrow e.$$

Donc, en réappliquant la question **12.**(a)(i) avec «  $p_n = (n+1)^n$  » et «  $\delta_n = n^n$  », on obtient

$$\boxed{\left(1 + \frac{1}{n^n}\right)^{(n+1)^n} \rightarrow e^e.}$$

### 13. Le premier lemme.

Montrer que

$$\delta_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \implies (1 + \delta_n)^n \rightarrow 1.$$

Supposons que  $\delta_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ . On a donc  $\delta_n \times n \rightarrow 0$ . Donc, en appliquant la question **12.**(a)(i), on obtient

$$\boxed{(1 + \delta_n)^n \rightarrow e^0 = 1.}$$

## Partie VI – Un deuxième lemme

14. On suppose que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\delta_n \neq 0$  et que  $\delta_n = O\left(\frac{1}{2^n}\right)$ .

(a) Montrer que

$$\frac{(1 + \delta_n)^n - 1}{n\delta_n} = 1 + \frac{\delta_n}{n} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \delta_n^{k-2}.$$

D'après la formule du binôme de Newton, on a

$$(1 + \delta_n)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \delta_n^k = 1 + n\delta_n + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \delta_n^k.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \frac{(1 + \delta_n)^n - 1}{n\delta_n} &= \frac{n\delta_n + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \delta_n^k}{n\delta_n} \\ &= 1 + \frac{1}{n} \times \frac{\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \delta_n^k}{\delta_n} \\ &= 1 + \frac{\delta_n}{n} \times \frac{\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \delta_n^k}{\delta_n^2} \\ &= 1 + \frac{\delta_n}{n} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \delta_n^{k-2}, \end{aligned}$$

ce qu'on voulait démontrer.

(b) Montrer que

$$\left| \frac{\delta_n}{n} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \delta_n^{k-2} \right| \leq \frac{2^n |\delta_n|}{n} \text{ APCR.}$$

Comme  $\delta_n = O\left(\frac{1}{2^n}\right)$ , on a  $\delta_n \rightarrow 0$ ; et donc on a  $|\delta_n| \leq 1$  APCR.

Soit donc  $N_0$  tel que pour tout  $n \geq N_0$ , on a  $|\delta_n| \leq 1$ .

Soit  $n \geq N_0$ . On calcule :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\delta_n}{n} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \delta_n^{k-2} \right| &\leq \frac{|\delta_n|}{n} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} |\delta_n|^{k-2} \\ &\leq \frac{|\delta_n|}{n} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} && (\text{car pour tout } \ell \geq 0, |\delta_n|^\ell \leq 1) \\ &\leq \frac{|\delta_n|}{n} \underbrace{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}}_{=2^n} = \frac{2^n |\delta_n|}{n}. \end{aligned}$$



Donc, on a

$$\left| \frac{\delta_n}{n} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \delta_n^{k-2} \right| \leq \frac{2^n |\delta_n|}{n} \text{ APCR.}$$

(c) **Le deuxième lemme.**

En déduire que

$$(1 + \delta_n)^n - 1 \sim n\delta_n \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Comme  $\delta_n = O\left(\frac{1}{2^n}\right)$ , la suite  $(2^n \delta_n)_n$  est bornée. Donc, on a

$$\frac{2^n |\delta_n|}{n} \rightarrow 0$$

et donc

$$\frac{\delta_n}{n} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \delta_n^{k-2} \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Donc, d'après la question 14.(a), on a  $\frac{(1 + \delta_n)^n - 1}{n\delta_n} \rightarrow 1$ , ie  $(1 + \delta_n)^n - 1 \sim n\delta_n$ , ie :

$$(1 + \delta_n)^n - 1 = n\delta_n + o(n\delta_n).$$

Finalement, on a

$$(1 + \delta_n)^n = 1 + n\delta_n + o(n\delta_n).$$

## 15. Un raffinement.

Montrer que

$$(1 + \delta_n)^n = 1 + n\delta_n + \frac{n^2 \delta_n^2}{2} + o(n^2 \delta_n^2) \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

En utilisant la formule de Newton, de même que dans la question 14.(a), on a

$$\frac{\left((1 + \delta_n)^n - (1 + n\delta_n)\right) - \frac{n(n+1)}{2} \delta_n^2}{\frac{n(n+1)}{2} \delta_n^2} = 1 + \frac{2\delta_n}{n(n+1)} \sum_{k=3}^n \binom{n}{k} \delta_n^{k-3}.$$

Or, on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{2\delta_n}{n(n+1)} \sum_{k=3}^n \binom{n}{k} \delta_n^{k-3} \right| &\leq \frac{2|\delta_n|}{n(n+1)} \sum_{k=3}^n \binom{n}{k} && \text{APCR} \\ &\leq \frac{2|\delta_n|}{n(n+1)} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \\ &= \frac{2|\delta_n| 2^n}{n(n+1)} \rightarrow 0 && \text{car } \delta_n = O\left(\frac{1}{2^n}\right). \end{aligned}$$

Donc, on a

$$\left((1 + \delta_n)^n - (1 + n\delta_n)\right) \sim \frac{n(n+1)}{2} \delta_n^2.$$

Or, comme  $n = o(n^2)$ , on a  $n\delta_n^2 = o(n^2\delta_n^2)$ ; et donc

$$\frac{n(n+1)}{2} \delta_n^2 = \frac{n^2\delta_n^2 + n\delta_n^2}{2} \sim \frac{n^2\delta_n^2}{2}.$$

Finalement, on a

$$\left((1 + \delta_n)^n - (1 + n\delta_n)\right) \sim \frac{n^2\delta_n^2}{2}$$

c'est-à-dire

$$(1 + \delta_n)^n = 1 + n\delta_n + \frac{n^2\delta_n^2}{2} + o(n^2\delta_n^2).$$

## Partie VII – Étude de la suite des racines

On rappelle que la suite  $(x_n)_n$  introduite dans la partie **III**. vérifie la relation suivante

$$\forall n \geq 2, \quad x_n^{n+1} - 2x_n^n + 1 = 0.$$

et qu'on a démontré que  $x_n \rightarrow 2$ .

**16.** (a) Montrer que  $f_n(x_{n+1}) > 0$ .

Soit  $t \in [1, 2]$ . On a

$$\begin{aligned} f_n(t) &= t^n(t-2) + 1 \\ f_{n+1}(t) &= t^{n+1}(t-2) + 1. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \frac{f_{n+1}(t)}{t} + 1 - \frac{1}{t} \\ &= \frac{f_{n+1}(t)}{t} + \frac{t-1}{t}. \end{aligned}$$

Donc, on calcule

$$\begin{aligned} f_n(x_{n+1}) &= \frac{f_{n+1}(x_{n+1})}{x_{n+1}} + \frac{x_{n+1} - 1}{x_{n+1}} \\ &= \frac{x_{n+1} - 1}{x_{n+1}}. \end{aligned}$$

Comme  $x_{n+1} > 1$ , on obtient  $f_n(x_{n+1}) > 0$ .

(b) En déduire que  $(x_n)_n$  est strictement croissante.

- Déjà, on a vu que  $\forall t \in ]1, x_n], f_n(t) \leq 0$ .
- Par conséquent, on a  $x_{n+1} > x_n$ .
- Ainsi, la suite  $(x_n)_n$  est strictement croissante.

17. On considère la suite  $(\varepsilon_n)_n$  définie par

$$\forall n \geq 2, x_n = 2 - \varepsilon_n.$$

(a) Montrer que  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ .

On a montré dans la question 8. que  $x_n \rightarrow 2$ . On a donc  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ .

(b) Montrer que

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2^n} \frac{1}{\left(1 - \frac{\varepsilon_n}{2}\right)^n}.$$

On réécrit la relation fondamentale de  $x_n$ , à savoir

$$x_n^n \times (x_n - 2) = -1$$

en forçant à apparaître  $\varepsilon_n$ . On obtient

$$(2 - \varepsilon_n)^n \times \varepsilon_n = 1 \quad \text{donc} \quad 2^n \left(1 - \frac{\varepsilon_n}{2}\right)^n \varepsilon_n = 1.$$

Donc,

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2^n} \frac{1}{\left(1 - \frac{\varepsilon_n}{2}\right)^n}.$$

(c) En déduire que

$$\varepsilon_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \quad \text{APCR.}$$

Comme  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , on a  $1 - \frac{\varepsilon_n}{2} \rightarrow 1$ . Donc, on a

$$1 - \frac{\varepsilon_n}{2} \geq \frac{2}{3} \quad \text{APCR.}$$

Donc, on a

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{\varepsilon_n}{2}\right)^n} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad \text{APCR.}$$

Donc, on a

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2^n} \frac{1}{\left(1 - \frac{\varepsilon_n}{2}\right)^n} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \text{ APCR.}$$

(d) En déduire que  $\varepsilon_n \sim \frac{1}{2^n}$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Comme par ailleurs on a  $\forall n \geq 2, \varepsilon_n > 0$  (puisque  $\forall n, x_n < 2$ ), on en déduit que (à partir d'un certain rang) :

$$n |\varepsilon_n| = n \varepsilon_n \leq n \left(\frac{3}{4}\right)^n \rightarrow 0.$$

Le premier lemme, de la question **13.**, s'applique donc : on a

$$\left(1 - \frac{\varepsilon_n}{2}\right)^n \rightarrow e^0 = 1.$$

Par conséquent, on a  $\boxed{\varepsilon_n \sim \frac{1}{2^n}}$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

**18.** On considère la suite  $(\alpha_n)_n$  définie par

$$\forall n \geq 2, x_n = 2 - \frac{1}{2^n} + \alpha_n.$$

(a) (i) Montrer que  $2^n \alpha_n = 1 - 2^n \varepsilon_n$ .

On a  $x_n = 2 - \varepsilon_n = 2 - \frac{1}{2^n} + \alpha_n$ . Par conséquent, on a

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2^n} - \alpha_n.$$

Donc,

$$2^n \varepsilon_n = 1 - 2^n \alpha_n \quad \text{donc} \quad \boxed{2^n \alpha_n = 1 - 2^n \varepsilon_n.}$$

(ii) En déduire que  $\alpha_n = o\left(\frac{1}{2^n}\right)$ .

Comme  $\varepsilon_n \sim \frac{1}{2^n}$ , on a  $1 - 2^n \varepsilon_n \rightarrow 0$  ie on a  $2^n \alpha_n \rightarrow 0$ , ie

$$\boxed{\alpha_n = o\left(\frac{1}{2^n}\right).}$$

(b) Montrer que

$$2^n \alpha_n \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{\alpha_n}{2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{\alpha_n}{2}\right)^n - 1.$$

On force à apparaître  $\alpha_n$  dans la relation fondamentale de  $x_n$ . On a

$$x_n^{n+1} = 2x_n^n - 1 \quad ie \quad \left(2 - \frac{1}{2^n} + \alpha_n\right)^{n+1} = 2\left(2 - \frac{1}{2^n} + \alpha_n\right)^n - 1.$$

Donc,

$$2^{n+1} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{\alpha_n}{2}\right)^{n+1} = 2^{n+1} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{\alpha_n}{2}\right)^n - 1. \quad (*)$$

Afin de simplifier les calculs, on pose

$$A(n) := 1 - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{\alpha_n}{2}.$$

On a

$$\begin{aligned} 2^{n+1} A(n)^{n+1} &= 2^{n+1} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{\alpha_n}{2}\right) \times A(n)^n \\ &= 2^{n+1} A(n)^n - A(n)^n + 2^n \alpha_n A(n)^n. \end{aligned}$$

Donc, (\*) se réécrit

$$2^{n+1} A(n)^n - A(n)^n + 2^n \alpha_n A(n)^n = 2^{n+1} A(n)^n - 1.$$

Ainsi, on a  $2^n \alpha_n A(n)^n = A(n)^n - 1$  et donc

$$\boxed{2^n \alpha_n \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{\alpha_n}{2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{\alpha_n}{2}\right)^n - 1.}$$

(c) En déduire que  $\alpha_n \sim -\frac{n}{2 \times 4^n}$ .

• Déjà, comme  $\alpha_n = o\left(\frac{1}{2^n}\right)$ , on a

$$-\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{\alpha_n}{2} \sim -\frac{1}{2^{n+1}} = O\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

• Donc, le deuxième lemme, prouvé dans la question 14.(c), s'applique ; on a

$$\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{\alpha_n}{2}\right)^n - 1 \sim -\frac{n}{2^{n+1}} \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

• En particulier, on a  $\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{\alpha_n}{2}\right)^n \sim 1$ .

• Par conséquent, l'égalité de la question 18.(b) donne

$$2^n \alpha_n \sim -\frac{n}{2^{n+1}}.$$

• Ainsi, on a  $\boxed{\alpha_n \sim -\frac{n}{2 \times 4^n}}.$

**19.** Donner le terme suivant du développement asymptotique de  $x_n$ .

- Déjà, on considère la suite  $\beta_n$  définie par

$$\forall n \geq 2, \quad x_n = 2 - \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2 \times 4^n} + \beta_n.$$

- Par des raisonnements similaires à ceux de la question **18.**(a)(ii), on a

$$\beta_n = o\left(\frac{n}{4^n}\right).$$

- On écrit

$$x_n = 2 \left( 1 - \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{n}{4^{n+1}} + \frac{\beta_n}{2} \right).$$

et on pose

$$B(n) := 1 - \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{n}{4^{n+1}} + \frac{\beta_n}{2}.$$

de sorte que  $x_n = 2B(n)$ .

- Donc, on a

$$\begin{aligned} x_n^n (2 - x_n) &= 2^n B(n)^n \left( \frac{1}{2^n} + \frac{n}{2 \times 4^n} - \beta_n \right) \\ &= B(n)^n + \frac{nB(n)^n}{2^{n+1}} - 2^n B(n)^n \beta_n. \end{aligned}$$

- Ainsi, la relation fondamentale  $x_n^n (2 - x_n) = 1$  de  $x_n$  s'écrit

$$\boxed{\frac{nB(n)^n}{2^{n+1}} - 2^n B(n)^n \beta_n = 1 - B(n)^n.} \quad (**)$$

- Maintenant, utilisons le raffinement du deuxième lemme donné dans la question **15.** On pose

$$\delta_n := -\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{n}{4^{n+1}} + \frac{\beta_n}{2}.$$

On a

$$\begin{aligned} B(n)^n &= (1 + \delta_n)^n \\ &= 1 + n\delta_n + \frac{n^2\delta_n^2}{2} + o\left(n^2\delta_n^2\right). \end{aligned}$$

Comme  $\delta_n \sim -\frac{1}{2^{n+1}}$ , on peut écrire ce développement asymptotique

$$\boxed{B(n)^n = 1 + n\delta_n + \frac{n^2\delta_n^2}{2} + o\left(\frac{n^2}{4^n}\right).} \quad (1)$$

- On a

$$n\delta_n = -\frac{n}{2^{n+1}} - \frac{n^2}{4^{n+1}} + \frac{n\beta_n}{2}.$$

Comme  $\beta_n = o\left(\frac{n}{4^n}\right)$ , on a

$$\frac{n\beta_n}{2} = o\left(\frac{n^2}{4^n}\right).$$

On a donc

$$\boxed{n\delta_n = -\frac{n}{2^{n+1}} - \frac{n^2}{4^{n+1}} + o\left(\frac{n^2}{4^n}\right).} \quad (2)$$

- Travaillons maintenant sur le terme  $\delta_n^2$  : on a  $\delta_n \sim -\frac{1}{2^{n+1}}$ . Donc, on a

$$\delta_n^2 \sim \frac{1}{4^{n+1}} \quad ie \quad \delta_n^2 = \frac{1}{4^{n+1}} + o\left(\frac{1}{4^n}\right).$$

Donc, on a

$$\boxed{\frac{n^2\delta_n^2}{2} = \frac{n^2}{2 \times 4^{n+1}} + o\left(\frac{n^2}{4^n}\right).} \quad (3)$$

- Bilan : après simplification, en utilisant (1), (2) et (3), on a

$$\boxed{B(n)^n = 1 - \frac{n}{2^{n+1}} - \frac{n^2}{2 \times 4^{n+1}} + o\left(\frac{n^2}{4^n}\right).}$$

- En particulier, on a

$$\frac{nB(n)^n}{2^{n+1}} = \frac{n}{2^{n+1}} - \frac{n^2}{4^{n+1}} - \frac{n^3}{2 \times 8^{n+1}} + o\left(\frac{n^3}{8^n}\right).$$

Comme  $\frac{n^3}{2 \times 8^{n+1}} = o\left(\frac{n^2}{4^n}\right)$ , on a donc

$$\boxed{\frac{nB(n)^n}{2^{n+1}} = \frac{n}{2^{n+1}} - \frac{n^2}{4^{n+1}} + o\left(\frac{n^2}{4^n}\right).}$$

- Or, l'identité (\*\*) est

$$\frac{nB(n)^n}{2^{n+1}} - 2^n B(n)^n \beta_n = 1 - B(n)^n ;$$

on a donc

$$\left( \frac{n}{2^{n+1}} - \frac{n^2}{4^{n+1}} + o\left(\frac{n^2}{4^n}\right) \right) - 2^n B(n)^n \beta_n = \frac{n}{2^{n+1}} + \frac{n^2}{2 \times 4^{n+1}} + o\left(\frac{n^2}{4^n}\right).$$

- Donc, on a

$$-2^n B(n)^n \beta_n = \frac{3n^2}{2 \times 4^{n+1}} + o\left(\frac{n^2}{4^n}\right)$$

donc

$$-2^n B(n)^n \beta_n \sim \frac{3n^2}{2 \times 4^{n+1}}.$$

Comme  $B(n)^n \sim 1$  (d'après le premier lemme) et donc  $-2^n B(n)^n \beta_n \sim -2^n \beta_n$ , on a donc

$$\boxed{\beta_n \sim -\frac{3n^2}{8^{n+1}}}.$$

- Conclusion : on a donc

$$\boxed{x_n = 2 - \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2 \times 4^n} - \frac{3n^2}{8^{n+1}} + o\left(\frac{n^2}{8^n}\right)}.$$