

DS 5

4 heures

- *Tout résultat ou raisonnement doit être clairement justifié, sauf mention du contraire.*
- *La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.*
- *La présentation de la copie sera prise en compte dans l'évaluation :*
 - ▷ *encadrez les résultats principaux ;*
 - ▷ *soulignez les résultats et arguments intermédiaires importants ;*
 - ▷ *soignez votre écriture ;*
 - ▷ *maintenez une marge dans vos copies, aérez vos copies ;*
 - ▷ *enfin, numérotez vos copies (et non vos pages).*
- *Les documents, calculatrices et autres appareils électroniques sont interdits.*
- *Pour répondre à une question, vous pouvez admettre des résultats issus des questions précédentes en le signalant.*
- *Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie en expliquant les initiatives que vous avez été amené à prendre.*
- *Ne rendez pas le sujet avec vos copies.*

Propreté et nilpotence

Données générales

- Dans tout ce sujet, \mathbb{K} désigne un corps, égal à \mathbb{R} ou \mathbb{C} .
- Sauf mention du contraire, les espaces vectoriels seront toujours, de façon sous-entendue, des \mathbb{K} -espaces vectoriels.

Notations générales

- Soit E un espace vectoriel.
 - ▷ On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .
 - ▷ Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

⊗ Si $k \in \mathbb{N}^*$, on note

$$f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}.$$

⊗ Par convention, on pose $f^0 := \text{Id}_E$.

⊗ Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme s'écrivant $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_dX^d$, avec $d \in \mathbb{N}$ et avec $\forall i \in \llbracket 0, d \rrbracket, a_i \in \mathbb{K}$, on note

$$P(f) := a_0 \text{Id}_E + a_1f + \cdots + a_df^d.$$

▷ Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$ et pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, on a

$$(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f).$$

• De même, si A est une matrice carrée de taille $n \in \mathbb{N}^*$,

▷ pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ s'écrivant $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_dX^d$, avec $d \in \mathbb{N}$ et avec $\forall i \in \llbracket 0, d \rrbracket, a_i \in \mathbb{K}$, on note

$$P(A) := a_0\text{I}_n + a_1A + \cdots + a_dA^d;$$

▷ pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, on a

$$(PQ)(A) = P(A) \times Q(A).$$

• Si $P \in \mathbb{K}[X]$, on note $Z_{\mathbb{K}}(P)$ l'ensemble des racines de P dans \mathbb{K} .

Donnée générale

Dans la suite, on fixe E un espace vectoriel.

Partie I – Préliminaire

1. Une liberté.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts.

Soient $x_1, \dots, x_p \in E$ tous non nuls et tels que

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad f(x_i) = \lambda_i x_i.$$

Montrer que la famille (x_1, \dots, x_p) est libre.

Partie II – Espaces propres

Notations et définitions

Pour $f \in \mathcal{L}(E)$ et pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on note

$$E_\lambda(f) := \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E).$$

C'est un sous-espace vectoriel de E appelé espace propre pour λ de f .

Données

Dans cette partie, on fixe $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

2. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

(a) Montrer que

$$E_\lambda(f) \cap E_\mu(g) \subset E_{\lambda\mu}(f \circ g).$$

(b) En déduire que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad E_\lambda(f) \subset E_{\lambda^k}(f^k).$$

(c) Calculer $E_{\lambda^k}(f^k)$ pour $k = 0$.

3. Soit $x \in E$. Montrer que

$$f(x) = \lambda x \quad \implies \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad f^k(x) = \lambda^k x.$$

4. Quelques cas particuliers.

Dans cette question, on pourra répondre sans justification.

(a) On suppose que $E_0(f) = \{0_E\}$. Que peut-on dire de f ?

(b) On suppose que $E_1(f) = E$. Que peut-on dire de f ?

(c) On suppose que $E_0(f) = E$. Que peut-on dire de f ?

5. Étude d'un exemple.

Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

On considère $p \in \mathcal{L}(E)$ le projecteur de E sur F parallèlement à G et on pose

$$f := \mu \text{Id}_E + (\lambda - \mu)p.$$

On rappelle que, comme d'habitude, sauf mention du contraire, toutes vos réponses doivent être justifiées.

- (a) Que vaut $E_\lambda(f)$?
- (b) Que vaut $E_\mu(f)$?
- (c) Soit $\theta \in \mathbb{K} \setminus \{\lambda, \mu\}$. Que vaut $E_\theta(f)$?

Partie III – Valeurs propres

Notations et définitions

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une valeur propre de f ssi

$$\exists x \in E \setminus \{0_E\} : f(x) = \lambda x.$$

- On note $\text{VP}(f)$ l'ensemble des valeurs propres de f . Autrement dit, on pose

$$\text{VP}(f) := \left\{ \lambda \in \mathbb{K} \mid \exists x \in E \setminus \{0_E\} : f(x) = \lambda x \right\}.$$

- On a donc, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{VP}(f) &\iff E_\lambda(f) \neq \{0_E\} \\ &\iff f - \lambda \text{Id}_E \text{ n'est pas injectif.} \end{aligned}$$

On pourra utiliser cette équivalence librement dans la suite.

Données

Dans cette partie, on fixe $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

6. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\lambda \in \text{VP}(f) \implies \lambda^k \in \text{VP}(f^k).$$

7. Soit $\lambda \in \text{VP}(f)$ une valeur propre de f . On suppose que $f \in \text{GL}(E)$.

- (a) Montrer que $\lambda \neq 0$.
- (b) Montrer que

$$\lambda^{-1} \in \text{VP}(f^{-1}).$$

8. Comparaison de $\text{VP}(g \circ f)$ et $\text{VP}(f \circ g)$.

Montrer que

$$\lambda \neq 0 \implies \left(\lambda \in \text{VP}(f \circ g) \implies \lambda \in \text{VP}(g \circ f) \right).$$

9. Un calcul dans $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$.

On note

$$\gamma_f : \begin{cases} \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ u \longmapsto f \circ u. \end{cases}$$

C'est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

Montrer que

$$\text{VP}(\gamma_f) = \text{VP}(f).$$

On pourra admettre que tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire.

Partie IV – L'exemple de la dérivation

Notations

Dans cette partie, on se place dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on note $E := \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on considère

$$D : \begin{cases} E \longrightarrow E \\ f \longmapsto f'. \end{cases}$$

L'application D est un endomorphisme de E .

On rappelle que, comme d'habitude, toutes vos réponses doivent être justifiées.

10. (a) Calculer $\text{Ker}(D)$.

(b) Calculer $\text{Im}(D)$.

11. (a) Montrer que $0 \in \text{VP}(D)$.

(b) Montrer que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \exists f \in E \setminus \{\widetilde{0}\} : f' = \lambda f.$$

(c) Montrer que $\text{VP}(D) = \mathbb{R}$.

12. Montrer que $\text{VP}(D^2) = \mathbb{R}$.

13. Déterminer $\text{VP}(D^3)$.

Partie V – Polynômes annulateurs : exemples matriciels

Donnée et notations

- Dans cette partie, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$.
- Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note

$$\varepsilon_i := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow i\text{-ième position}$$

le i -ième vecteur de la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{K})$.

14. Dans cette question, on se place dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on pose

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$A^2 + \alpha A + \beta I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

15. L'exemple des matrices compagnons.

Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$.

On pose

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

et on pose

$$P := X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k.$$

- (a) Soit $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.
 - (i) Calculer $A \times \varepsilon_i$.
 - (ii) Calculer $A^i \times \varepsilon_1$.
- (b) Calculer $P(A) \times \varepsilon_1$.
- (c) Calculer $P(A)$.

Partie VI – Polynômes annulateurs : cas des endomorphismes

Notations et définitions

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

- On pose

$$\text{Ann}(f) := \left\{ P \in \mathbb{K}[X] \mid P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)} \right\}.$$

- Les éléments $P \in \text{Ann}(f)$ sont appelés polynômes annulateurs de f .

Donnée

Dans cette partie, on fixe $f \in \mathcal{L}(E)$.

16. Soit $P \in \text{Ann}(f)$.

Montrer que

$$P(0) \neq 0 \implies f \in \text{GL}(E).$$

17. Valeurs propres et polynômes annulateurs (I).

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

- (a) Soit $x \in E$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $f(x) = \lambda x$.

Montrer que

$$P(f)(x) = P(\lambda)x.$$

- (b) Montrer que

$$P \in \text{Ann}(f) \implies \text{VP}(f) \subset Z_{\mathbb{K}}(P).$$

18. Valeurs propres et polynômes annulateurs (II).

On suppose que $E \neq \{0_E\}$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$. Montrer que

$$\prod_{i=1}^p (X - \lambda_i) \in \text{Ann}(f) \implies \exists i \in \llbracket 1, p \rrbracket : \lambda_i \in \text{VP}(f).$$

19. Cas de la dérivation.

Comme dans la partie IV, on se place dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on considère

$$E := \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad D : \begin{cases} E \longrightarrow E \\ f \longmapsto f'. \end{cases}$$

- (a) Montrer que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad P(D) = 0_{\mathcal{L}(E)} \implies P = 0_{\mathbb{R}[X]}.$$

- (b) Que vaut $\text{Ann}(D)$?

Partie VII – Cas des espaces \mathbb{K}^n

Donnée

Dans cette partie, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

Notations et rappels

- On note $\mathbb{K}^n := M_{n,1}(\mathbb{K})$.
- Soit $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ une application linéaire. On rappelle que

$$\text{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{K}^n}\} \iff \text{Im}(f) = \mathbb{K}^n \iff f \in \text{GL}(\mathbb{K}^n).$$

- On rappelle également qu'une famille libre de \mathbb{K}^n possède nécessairement au plus n éléments.

20. Soient $f, g : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ des applications linéaires.

(a) Montrer que

$$g \circ f \text{ injective} \implies f \circ g \text{ injective}.$$

(b) En utilisant la question 8., montrer que

$$\text{VP}(f \circ g) = \text{VP}(g \circ f).$$

Résultat admis

On admet pour la suite de cette partie que :

$$\forall f \in L(\mathbb{K}^n), \text{Ann}(f) \neq \{0_{\mathbb{K}[X]}\}.$$

Ce résultat sera démontré dans la partie suivante.

21. Montrer que $\text{Ann}(f) \neq \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$ est faux en général (c'est-à-dire quand E n'est pas nécessairement égal à un des espaces \mathbb{K}^n).

On donnera un contre-exemple.

22. Les valeurs propres sont en nombre fini.

Soit $f \in L(\mathbb{K}^n)$.

(a) Montrer que $\text{VP}(f)$ est un ensemble fini.

(b) Mieux, montrer que

$$\text{Card}(\text{VP}(f)) \leq n.$$

23. Une caractérisation des nilpotents.

On rappelle qu'un endomorphisme $f \in L(E)$ est dit *nilpotent* ssi $\exists k \in \mathbb{N} : f^k = 0_{L(E)}$.

Soit $f \in L(\mathbb{K}^n)$.

(a) Montrer que

$$f \text{ nilpotent} \implies \text{VP}(f) = \{0\}.$$

(b) On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Montrer que

$$\text{VP}(f) = \{0\} \implies f \text{ nilpotent}.$$

Partie VIII – Polynômes annulateurs locaux

Dans cette partie, on va montrer le résultat admis dans la partie VII.

Notation

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit $x \in E$. On pose

$$\text{Ann}^{[x]}(f) := \left\{ P \in \mathbb{K}[X] \mid P(f)(x) = 0_E \right\}.$$

Donnée

Dans cette partie, on fixe $f \in \mathcal{L}(E)$.

24. Soit $x \in E$.

Laquelle des deux assertions suivantes est-elle vraie en général :

$$\text{Ann}^{[x]}(f) \subset \text{Ann}(f) \quad \text{ou bien} \quad \text{Ann}(f) \subset \text{Ann}^{[x]}(f) ?$$

On montrera l'assertion vraie.

25. Soient F, G des espaces vectoriels et soit $\varphi : F \longrightarrow G$ une application linéaire.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $(x_1, \dots, x_p) \in F^p$.

Laquelle des deux assertions suivantes est-elle vraie en général :

$$\begin{aligned} (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_p)) \text{ libre} &\implies (x_1, \dots, x_p) \text{ libre} \\ &\text{ou bien} \\ (x_1, \dots, x_p) \text{ libre} &\implies (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_p)) \text{ libre ?} \end{aligned}$$

On montrera l'assertion vraie.

26. Soit $x \in E$. Montrer que

$$\text{Ann}^{[x]}(f) \neq \{0_{\mathbb{K}[X]}\} \iff \text{la famille } (f^k(x))_{k \in \mathbb{N}} \text{ est liée.}$$

27. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ une famille génératrice de E .

(a) En considérant l'application linéaire

$$\varphi : \begin{cases} \underline{\mathbb{K}}^p \longrightarrow E \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} \longmapsto \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i, \end{cases}$$

montrer que

$$\forall x \in E, \text{Ann}^{[x]}(f) \neq \{0_{\mathbb{K}[X]}\}.$$

(b) En déduire que $\text{Ann}(f) \neq \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$.

FIN DU SUJET.

