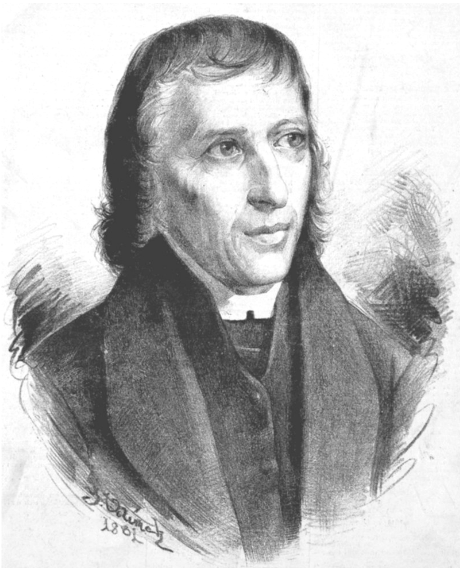
Chapitre 21

Continuité



Bernard BOLZANO
(1781 – 1848)

Karl WEIERSTRASS
(1815 – 1897)

Bolzano

La notion de fonction continue a mis du temps à émerger. C'est à Bolzano, un prêtre et mathématicien hongrois d'origine italienne, qu'on la doit :

$$f \text{ est continue en } a \overset{\Delta}{\text{ssi}}$$

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall x \in I,\ |x - a| \leqslant \delta \implies \big|f(x) - f(a)\big| \leqslant \varepsilon.}$$

Weierstrass

Attention, l'ensemble des fonctions continues contient des fonctions qui peuvent être très compliquées. Weierstrass (mathématicien allemand qui poursuivit le travail de fondation de l'analyse moderne) construisit une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est continue mais qui n'est nulle part dérivable !

Sommaire

I. Continuité 3

Dans tout ce chapitre, on considère I et J des intervalles tels que $\ell(I) > 0$ et $\ell(J) > 0$.

I. Continuité

1) Continuité

a) continuité en un point

Définition CTN.**1**
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. *Soit* $a \in I$. *(Ainsi,* f *est définie en* a*).*
On dit que f est continue en a $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

....

Autrement dit, quand x est très proche de a, $f(x)$ est très proche de $f(a)$.

Remarques

- Dans cette définition, on peut remplacer I par une réunion d'intervalles.
- En comparant cette définition à la définition de la limite d'une fonction en un point, on voit que

$$f \text{ est continue en } a \iff \lim_{t \to a} f(t) = f(a).$$

b) un premier exemple

Considérons

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lfloor x \rfloor. \end{cases}$$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

c) continuité sur I

Définition CTN. **2**

- *Soit* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$*. On dit que* f est continue (sur I) $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\forall a \in I, \quad f \textit{ est continue en } a.$$

- *On note* $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ *l'ensemble des fonctions continues sur* I*.*

Remarque

Soit $\varepsilon > 0$. On voit que pour être ε-proche de $f(a)$, il suffit d'être δ-proche de a.
Mais : δ dépend *a priori* de a :

- pour certains a, il faut que δ soit extrêmement petit ;
- pour d'autres a, des δ moyennement petits suffisent.

Fait CTN. **3**

La continuité est une « propriété locale ».
Autrement dit, si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$*, alors on a*

$$\begin{aligned} f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R}) &\iff \forall a \in I, \ f \textit{ est continue au } \mathscr{V}(a) \\ &\iff \forall a \in I, \ \exists \delta > 0 : \ f\big|_{I \cap]a-\delta, a+\delta[} \textit{ est continue.} \end{aligned}$$

Exemple

Ainsi, la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

est continue !

2) Prolongement par continuité

a) définition

Définition CTN. **4**

Soit $a \in \overline{I} \cap \mathbb{R}$ *et soit* $f : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$*. On suppose que* $\lim\limits_{\substack{t \to a \\ \neq}} f(t)$ *existe et est finie.*

Alors la fonction

$$\widetilde{f} : \begin{cases} I \cup \{a\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \textit{si } x \neq a \\ \lim\limits_{\substack{t \to a \\ \neq}} f(t) & \textit{si } x = a \end{cases} \end{cases}$$

est appelée prolongement par continuité de f en a*.*

Fait CTN. **5**

Dans cette situation, on a alors

1) $\widetilde{f}$ *est continue en* a *;*
2) *en particulier,* $f \in \mathscr{C}(I \setminus \{a\}, \mathbb{R}) \implies \widetilde{f} \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$.

Démonstration. —

1) En effet, on a alors
$$\lim_{t \to a} \widetilde{f}(t) = \widetilde{f}(a).$$
La fonction $\widetilde{f}(\cdot)$ est donc bien continue en a.
2) Si on suppose de plus f continue en tout $x \neq a$, comme f et $\widetilde{f}$ coïncident sur $I \setminus \{a\}$, alors la fonction $\widetilde{f}(\cdot)$ est continue aussi en dehors de a ; donc, elle est continue sur I.

■

b) exemple : la fonction sinus cardinal

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3) Caractérisations séquentielles

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $a \in I$.

Théorème CTN.6

$$f \text{ est continue en } a \quad \Longleftrightarrow \quad \forall (x_n)_n \in I^{\mathbb{N}},\ \Big(x_n \longrightarrow a \implies f(x_n) \longrightarrow f(a)\Big).$$

Démonstration. — ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

.... ■

4) Image par une fonction continue d'une suite convergente

a) les limites passent aux fonctions continues

> ♛ **Corollaire** Ⓣ CTN.**7**
> *Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite et soit f une fonction qui est continue en ℓ. Alors*
> $$u_n \longrightarrow \ell \quad \Longrightarrow \quad f(u_n) \longrightarrow f(\ell).$$

Démonstration. — Il s'agit juste d'une des implications du théorème **??**. ■

b) application aux suites définies par récurrence

> **Corollaire** CTN.**8**
> - *Soit $f : I \longrightarrow I$ une fonction continue et soit $(u_n)_n \in I^{\mathbb{N}}$ une suite telle que*
> $$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$
> *Alors,*
> $$\boxed{u_n \longrightarrow \ell \quad \Longrightarrow \quad f(\ell) = \ell.}$$
> - *Autrement dit, si une suite f-définie par récurrence converge, sa limite est un point fixe de f.*

Démonstration. — On suppose que $u_n \longrightarrow \ell$. On a donc $f(u_n) \longrightarrow \ell$ puisque f est continue en ℓ. Or, de plus, on a $f(u_n) = u_{n+1} \longrightarrow \ell$ par extraction. Donc, par unicité de la limite, on a $f(\ell) = \ell$. ■

5) Caractérisation séquentielle des limites

Proposition CTN.**9**
Soit $a \in \overline{I}$ un point au voisinage duquel on regarde les limites envisagées.
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
Alors, on a

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \quad \iff \quad \Big(\forall (u_n)_n \in I^{\mathbb{N}}, \quad u_n \longrightarrow a \implies f(u_n) \longrightarrow \ell\Big).$$

Démonstration. — Elle est identique à celle du théorème **??**. ■

6) Opérations sur les fonctions continues

Proposition CTN.**10**
Soient $f, g \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

1) $f + \lambda g \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$
2) $fg \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$
3) *Si* $\forall x \in I,\ g(x) \neq 0$, *alors* $\frac{1}{g}$ *et* $\frac{f}{g}$ *sont continues.*

Démonstration. — ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

∎

> **Remarque**
> Ainsi, $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre commutative.

7) Composition des fonctions continues

Proposition CTN.**11**
On se place dans la situation

$$I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}.$$

On a alors

$$\left.\begin{array}{l} f : I \longrightarrow J \text{ continue} \\ g : J \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue} \end{array}\right\} \implies g \circ f : I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue.}$$

Pour démontrer cette proposition, on va énoncer et démontrer une « version ponctuelle » de ce résultat.

Proposition CTN.**12**
On se place dans la situation

$$I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}.$$

et l'on considère $a \in I$. On peut alors représenter la situation de la manière suivante

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "f"] & J \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \\
\boldsymbol{a} \arrow[r, bend left, "\boldsymbol{f}"] \arrow[rr, bend right, "\boldsymbol{g\circ f}"'] & \boldsymbol{f(a)} \arrow[r, bend left, "\boldsymbol{g}"] & \boldsymbol{g(f(a))}.
\end{tikzcd}$$

On a alors

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ continue en } a \\ g \text{ continue en } f(a) \end{array}\right\} \implies g \circ f \text{ continue en } a.$$

Démonstration. —

∎

II. Continuité des fonctions usuelles

1) Les fonctions constantes

Fait CTN.**13**
Soit $c \in \mathbb{R}$. *Alors,* $\widetilde{c} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est continue.*

Démonstration. — On peut procéder à la « δ-ε » ou par caractérisation séquentielle. ■

2) La fonction $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ est continue

Fait CTN.**14**
On a $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Démonstration. — On peut procéder à la « δ-ε » ou par caractérisation séquentielle. ■

3) Les fonctions polynomiales sont continues

Proposition CTN.**15**
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. *Alors, la fonction polynomiale*

$$\widetilde{P} : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto P(t) \end{cases}$$

est continue.

Démonstration. — On a

$$\widetilde{P}(\cdot) = P\big(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\big).$$

Ainsi, comme $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre, on a bien $\widetilde{P}(\cdot) \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. ■

4) Les fonctions lipschitziennes sont continues

a) définition

Définition CTN.**16**
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

1) *Soit* $C \geqslant 0$.
On dit que f *est* C*-lipschitzienne* $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\boxed{\forall x, y \in I, \quad \big|f(x) - f(y)\big| \leqslant C|x - y|.}$$

2) *On dit que* f *est lipschitzienne* $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\exists C \geqslant 0 : f \text{ est } C\text{-lipschitzienne.}$$

Exercice CTN.**17**

1) *Montrer que l'ensemble des fonctions lipschitziennes est un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2) *Soit* $C \geqslant 0$.
L'ensemble des fonctions C*-lipschitziennes est-il un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *?*

b) les fonctions lipschitziennes sont continues

Proposition CTN. **18**
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. *Alors,*
$$f \text{ lipschitzienne} \implies f \text{ continue.}$$

Démonstration. — ....

....

....

....

....

.... ■

Remarque ★

- Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.
- On dit que f *est localement lipschitzienne* $\overset{\Delta}{ssi}$
$$\forall a \in I, \exists \delta > 0 : \quad f\big|_{I\cap]a-\delta,a+\delta[} \text{ est lipschitzienne.}$$
- Une fonction lipschitzienne est localement lipschitzienne.
- On laisse le lecteur montrer (à titre d'exercice) que
$$f \text{ localement lipschitzienne} \implies f \text{ continue.}$$

5) Fonctions trigonométriques

a) sinus et cosinus sont 1-lipschitziennes

Lemme CTN. **19**
On a
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \big|\sin(x)\big| \leqslant |x|.}$$

Démonstration. — On a démontré cette inégalité dans le chapitre de trigonométrie. ■

Proposition-Réflexe CTN. **20**

1) *Les fonctions* $\sin(\cdot)$ *et* $\cos(\cdot)$ *sont* 1- *lipschtziennes.*
2) *Autrement dit, pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$, *on a*
$$\big|\sin(x) - \sin(y)\big| \leqslant |x - y|$$
$$\big|\cos(x) - \cos(y)\big| \leqslant |x - y|.$$

Démonstration. —
- Soient $x, y \in \mathbb{R}$.
- Rappelons qu'on a

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x+y}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x-y}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x-y}{2}}\right) = 2\mathrm{i} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x+y}{2}} \sin\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

- On a donc, en passant à la partie imaginaire,

$$\sin(x) - \sin(y) = -2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

- On a donc

$$\left|\sin(x) - \sin(y)\right| \leqslant 2\left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \leqslant 2\left|\frac{x-y}{2}\right| = |x-y|$$

  d'après le lemme **??**.
- Donc, on a

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)\right| \leqslant \left|\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \left(\frac{\pi}{2} - y\right)\right| = |x-y|.$$

  Autrement dit, on a

$$\left|\cos(x) - \cos(y)\right| \leqslant |x-y|.$$

■

b) les fonctions trigonométriques sont continues

Proposition CTN.**21**
1) *On a* $\sin(\cdot) \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2) *On a* $\cos(\cdot) \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
3) *Si on note* $\mathsf{D}_{\tan}$ *le domaine de définition de* $\tan(\cdot)$, *alors on a* $\tan(\cdot) \in \mathscr{C}\big(\mathsf{D}_{\tan}, \mathbb{R}\big)$.

Démonstration. —

1) et 2) Comme ces fonctions sont lipschitziennes, elles sont continues.

3) Cela découle des résultats concernant les opérations sur les fonctions continues.

■

6) Logarithme

a) définition

Définition CTN.**22**
On rappelle que si $x > 0$, *on pose*

$$\ln(x) := \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

On dispose ainsi de $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$

b) lipschitzianité du logarithme sur $[a, +\infty[$

Lemme CTN.**23**
Soit $a > 0$. *Alors, la fonction* $\ln\big|_{[a,+\infty[}$ *est lipschitzienne.*

Démonstration. — ....

....

....

....

....

....

....

....

....

.... ∎

c) le logarithme est continu

> **Proposition** CTN. **24**
> *La fonction* $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ *est continue.*

Démonstration. —

- Soit $x > 0$. Montrons que $\ln(\cdot)$ est continue en x.
- Soit $a > 0$ tel que $a < x$ (on peut prendre $a := \frac{x}{2}$). On sait que $\ln\big|_{[a,+\infty[}$ est continue.
- Comme $x \in [a, +\infty[$, on en déduit que $\ln\big|_{[a,+\infty[}$ est continue en x.
- Donc : $\ln(\cdot)$ est continue en x.

Ainsi, $\ln(\cdot)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. ∎

7) Exponentielle

> **Proposition** CTN. **25**
> *La fonction* $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ *est continue.*

Démonstration. — Par définition, $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est la bijection réciproque de $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$. Comme $\ln(\cdot)$ est continue, d'après le théorème de la bijection réciproque (qui sera démontré au paragraphe **??**), on en déduit que $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est continue. ∎

8) Fonctions puissance

a) continuité des fonctions puissance sur $\mathbb{R}_+^*$

> **Proposition** CTN. **26**
> *Soit* $a \in \mathbb{R}$. *La fonction*
> $$\mathsf{p}_a : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^a \end{cases}$$
> *est continue.*

Démonstration. —

- Tout simplement, la fonction p_a est composée de fonctions continues.
- On note

$$f_a : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto a\ln(x). \end{cases}$$

  La fonction f_a est continue.
- On a $\mathsf{p}_a = \exp \circ f_a$. Ainsi, par composition, p_a est continue.

■

b) la fonction racine

Proposition CTN.**27**
La fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

est continue.

Démonstration. —

- Sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $\sqrt{\cdot} = \mathsf{p}_{1/2}$.
- Il suffit donc de montrer la fonction racine est continue en 0.
  - ▷ On raisonne par l'absurde et on suppose qu'elle ne l'est pas. Fixons donc $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$\forall \delta > 0,\ \exists x \in [0, \delta[\ :\ \sqrt{x} > \varepsilon_0.$$

  - ▷ Posons $\delta_0 \coloneqq \left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^2$. On a $\delta_0 > 0$; fixons donc $x_0 \in [0, \delta_0[$ tel que $\sqrt{x_0} > \varepsilon_0$.
  - ▷ Comme la fonction $\sqrt{\cdot}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$\varepsilon_0 < \sqrt{x_0} \leqslant \sqrt{\delta_0} = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^2} = \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

    C'est absurde.
  - ▷ Ainsi, la fonction $\sqrt{\cdot}$ est continue en 0.

■

III. Grands théorèmes pour les fonctions continues

1) Théorème des valeurs intermédiaires

a) un lemme

Lemme CTN.**28**
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue et soient* $a, b \in I$ *tels que* $a < b$. *Alors*

$$\left.\begin{array}{l} f(a) \leqslant 0 \\ f(b) \geqslant 0 \end{array}\right\} \implies \exists c \in [a,b] : f(c) = 0.$$

Démonstration. — ....

■

b) théorème des valeurs intermédiaires

Théorème CTN.**29**
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et soient $a, b \in I$ tels que $a < b$.
Soit $y \in \mathbb{R}$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors,

$$\boxed{y \text{ est atteint par } f(\cdot).}$$

Plus précisément,

$$\exists c \in [a, b] : y = f(c).$$

Démonstration. —
- Si $f(a) \leqslant f(b)$, on pose et $g := f(\cdot) - \tilde{y}$.
  - ▷ On a alors $g(a) \leqslant 0$ et $g(b) \geqslant 0$.
  - ▷ Donc, grâce au lemme **??**, g s'annule en un point $c \in [a, b]$.
  - ▷ On a alors $f(c) = y$: donc, y est atteint par $f(\cdot)$.
- Si $f(a) \geqslant f(b)$: on pose $g := -f$.
  - ▷ On a $g(a) \leqslant g(b)$. De plus $-y$ est compris entre $g(a)$ et $g(b)$.
  - ▷ Donc, en appliquant le cas précédent, $-y$ est atteint par g ; de là, y est atteint par f.

■

c) version plus abstraite du TVI

Théorème CTN.**30**
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Démonstration. — Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $J \subset I$ un intervalle. Montrons que

$$f[J] \text{ est encore un intervalle.}$$

- Montrons que $f[J]$ une partie convexe de $\mathbb{R}$, *ie* montrons que

$$\forall y, y' \in f[J], \quad [y, y'] \subset f[J].$$

  - ▷ Soient $y, y' \in f[J]$ qu'on écrit $y = f(x)$ et $y' = f(x')$ avec $x, x' \in J$.
  - ▷ Soit $z \in [y, y']$. Montrons que $z \in f[J]$.
  - ▷ On note $x_{\mathsf{min}} := \mathsf{min}(x, x')$ et $x_{\mathsf{max}} := \mathsf{min}(x, x')$.
  - ▷ Si $x_{\mathsf{min}} = x_{\mathsf{max}}$, on a $x = x'$ et donc $y = y'$. Ainsi, $z = y \in f[J]$.
  - ▷ Sinon, on a $x_{\mathsf{min}} < x_{\mathsf{max}}$, on est dans le cas du théorème **??** : fixons donc $c \in [x_{\mathsf{min}}, x_{\mathsf{max}}]$ tel que $z = f(c)$.
  - ▷ Comme $x_{\mathsf{min}}, x_{\mathsf{max}} \in J$ et comme J est un intervalle, on a $[x_{\mathsf{min}}, x_{\mathsf{max}}] \subset J$. Donc, $c \in J$.
  - ▷ Donc, $z = f(c) \in f[J]$.
- D'après la classification du cours des parties convexes de $\mathbb{R}$, comme $f[J]$ est une partie convexe, on sait que $f[J]$ est un intervalle.

■

Remarque
- La réciproque est fausse.
- *Ie*, une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui transforme les intervalles en intervalles n'est pas nécessairement continue.

2) Théorème des bornes atteintes

a) une fonction continue sur un segment y est bornée

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Lemme CTN. **31**
Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. *Alors,*

$$f \text{ continue} \implies f \text{ bornée.}$$

Démonstration. — ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

b) théorème des bornes atteintes

Théorème CTN. **32**
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue. Alors,*

$$\boxed{f \text{ est bornée et atteint ses bornes.}}$$

Autrement dit,

1) *les bornes* $\inf\limits_{t\in[a,b]} f(t)$ *et* $\sup\limits_{t\in[a,b]} f(t)$ *existent ;*
2) *il existe* $x_{\mathsf{min}}, x_{\mathsf{max}} \in [a,b]$ *tels que*
$$f(x_{\mathsf{min}}) = \inf_{t\in[a,b]} f(t) \quad \textit{et} \quad f(x_{\mathsf{max}}) = \sup_{t\in[a,b]} f(t) \ ;$$
3) *autrement dit,* $\min\limits_{t\in[a,b]} f(t)$ *et* $\max\limits_{t\in[a,b]} f(t)$ *existent.*

c) contre-exemples

d) démonstration du théorème des bornes atteintes

Démonstration. —

3) Théorème des fonctions continues injectives

Théorème CTN.**33**
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors,

$$f \text{ injective} \implies f \text{ strictement monotone.}$$

Démonstration. — ....

4) Théorème de la bijection monotone

Théorème CTN.**34**
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement monotone. On note $J := f(I)$.
D'après le TVI, on sait que J est un intervalle.
Alors,
$$f^{-1} : J \longrightarrow I \text{ est continue.}$$

Démonstration. — ....

■

IV. Continuité uniforme

Cf. cours

V. Norme infinie

Cf. cours

VI. Extension à $\mathbb{C}$

Cf. cours