DEVOIR LIBRE 10
Autour de Young et de Hölder

À rendre pour le jeudi 28 novembre 2024

Ce sujet de DL a été donné en DS il y a quelques années.

Je suis autonome.
Je fais le DL entièrement seul, par moi-même.

Peu importe si je ne trouve pas. Ce qui compte, c'est : je le fais seul.

En effet, le jour J, vous serez seul face au DS !

William Henry YOUNG (1863 – 1942)
Mathématicien anglais.
Entre autres, il est connu pour la formule de Taylor-Young.

Autour de Young et de Hölder

Notations générales

- *On rappelle que si $a > 0$ et si $p \in \mathbb{R}$, on pose $a^p := \mathsf{exp}(p \,\mathsf{ln}(a))$.*
- *Si $p > 0$, on pose aussi $0^p := 0$.*
- *Dans la suite, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$.*

Partie I – Étude d'une fonction auxiliaire

Notations

- *Dans cette partie, on fixe $A, B, \alpha, \beta > 0$.*
- *On considère la fonction f définie par*

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{A}{x^\alpha} + Bx^\beta. \end{array} \right.$$

1. Montrer qu'il existe $x_{\min} \in \mathbb{R}_+^*$ tel qu'on ait

$$\begin{array}{|c|c|ccccc|} \hline x & 0 & & x_{\min} & & +\infty \\ \hline f & \| & \searrow & & \nearrow & \\ & \| & & f(x_{\min}) & & \\ \hline \end{array}$$

On fixe ce $x_{\min}$ dans la suite.

2. Montrer que

$$f(x_{\min}) = A \times \left(\frac{\alpha + \beta}{\beta} \right) \times \left(\frac{\beta B}{\alpha A} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}.$$

Partie II – Inégalités de Young, de Hölder et de Minkowski

3. Inégalité de Young.
Soient $p, q > 0$ tels que
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

(a) (i) Montrer que
$$\forall a, b > 0, \quad ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\cdot$$

(ii) L'inégalité précédente peut-elle être une égalité ou bien a-t-on
$$\forall a, b > 0, \quad ab < \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \ ?$$

(b) Montrer que
$$\forall a, b \geqslant 0, \quad ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\cdot$$

4. Soient $p, q > 0$ tels que
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Soient $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$.
On pose
$$g : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{1}{px^p} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^p + \dfrac{x^q}{q} \sum_{k=1}^{n} b_k^q. \end{array} \right.$$

(a) En utilisant la question **3.**, montrer que
$$\forall x > 0, \quad \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant g(x).$$

(b) **Inégalité de Hölder.**
En déduire que
$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q \right)^{1/q}.$$

5. Inégalité de Minkowski.
Soit $p > 1$. Montrer que
$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p \right)^{1/p}.$$

Partie III – Réécritures et généralisations

Notations et définitions

- *On adopte des notations concises pour les éléments de* $\mathbb{R}^n$.
  - ▷ *Si* $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, *le* n*-uplet* $(a_1, \dots, a_n)$ *sera noté simplement* $\mathbf{a}$.
  - ▷ *De même, on écrira*
  $$\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n),$$
  etc.
  - ▷ *Si* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ *sont deux* n*-uplets, on pose*
  $$\mathbf{a} + \mathbf{b} \coloneqq (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n).$$
- *Si* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$,
  - ▷ *on note, pour* $p > 0$,
  $$\|\mathbf{a}\|_p \coloneqq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p}.$$
  - ▷ *si* $p < 0$ *et si tous les* a_k *sont non-nuls, on définit de même* $\|\mathbf{a}\|_p$.

6. Soient $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

(a) Soient $p, q > 0$ tels que
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$
Montrer que
$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|_1 \leqslant \|\mathbf{a}\|_p \times \|\mathbf{b}\|_q.$$

(b) **Inégalité triangulaire**.
Soit $p > 1$. Montrer que
$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|_p \leqslant \|\mathbf{a}\|_p + \|\mathbf{b}\|_p.$$

7. Soient $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

(a) **Inégalité de Hölder généralisée.**
Soient $p, q, r > 0$ tels que
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}.$$
En utilisant la question **4.**(b), montrer que
$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|_r \leqslant \|\mathbf{a}\|_p \times \|\mathbf{b}\|_q.$$

(b) **Inégalité de Hölder négative.**
Soient $p > 0$ et $q < 0$ tels que
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$
On suppose que $\forall k \in [\![1, n]\!],\ b_k \neq 0$. Montrer que
$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|_1 \geqslant \|\mathbf{a}\|_p \times \|\mathbf{b}\|_q.$$

Partie IV – Inégalité inverse de Young

Notation
Dans cette partie, on considère la fonction S *définie par*

$$\mathsf{S} : \begin{cases}]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{x^{\frac{1}{x-1}}}{\mathsf{e} \times \ln\left(x^{\frac{1}{x-1}}\right)}. \end{cases}$$

On admet que $\mathsf{S}(\cdot)$ *est bien définie et que* $\mathsf{S} > 0$.

8. Calculs de limites.

(a) Montrer que
$$\frac{\ln(x)}{x-1} \underset{x \to 1}{\longrightarrow} 1.$$

(b) En déduire la limite de $\mathsf{S}(x)$ quand $x \to 1^+$.

9. On considère la fonction

$$\varphi : \begin{cases}]1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \Big(\ln(x) - x + 1\Big)\Big(1 - \dfrac{1}{x} - \ln(x)\Big). \end{cases}$$

Dresser le tableau de signes de φ.

10. Dérivée logarithmique.
Si $f :]1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est dérivable, on note

$$\mathsf{dL}(f) := \frac{f'}{f}.$$

Calculer $\mathsf{dL}\Big(\lambda \times \dfrac{f}{g}\Big)$, pour $f, g :]1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ dérivables et $\lambda > 0$.

11. (a) Dresser le tableau de variations de $\ln \circ \mathsf{S}$ sur $]1,+\infty[$.

(b) En déduire que
$$\forall x > 1, \;\; \mathsf{S}(x) > 1.$$

12. (a) Soit $x \in]0,1[$. Donner une expression simple de $\mathsf{S}\Big(\dfrac{1}{x}\Big)$.

(b) Montrer que
$$\forall x \in]0,1[, \;\; \mathsf{S}(x) > 1.$$

Notation

Dans la suite de cette partie, on considère la fonction $\widetilde{\mathsf{S}}$ *définie par*

$$\widetilde{\mathsf{S}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \mathsf{S}(x) & \textit{si } x \neq 1 \\ 1 & \textit{sinon.} \end{cases} \end{array} \right.$$

13. Soit $\lambda \in [0, 1]$.

(a) Montrer que

$$\forall a > 0, \quad (1 - \lambda)a + \lambda \leqslant \widetilde{\mathsf{S}}(a) a^{1-\lambda}.$$

On pourra introduire la fonction définie par

$$f_a(\lambda) = \frac{(1 - \lambda)a + \lambda}{a^{1-\lambda}}.$$

(b) **Inégalité inverse de Young.**
Soient $p, q > 0$ tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Montrer que

$$\forall a, b > 0, \quad \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \leqslant \widetilde{\mathsf{S}}\left(\frac{a^p}{b^q}\right) \times ab.$$