Trois contrôles supplémentaires.

Corrigé

Dans tout ce problème,

- *on fixe $n \in \mathbb{N}^*$, un entier ;*
- *on fixe $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme complexe, unitaire, de degré n, qu'on écrit*

$$P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0,$$

où $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $a_k \in \mathbb{C}$;

- *on fixe $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine complexe de P, quelconque.*

Partie I – Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.
Le but de cette partie est de montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz, à savoir :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \times \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}.$$

1. Soient $A, B, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$(AB + \alpha\beta)^2 \leqslant \left(A^2 + \alpha^2\right)\left(B^2 + \beta^2\right).$$

On pose

$$D := \left(A^2 + \alpha^2\right)\left(B^2 + \beta^2\right) - (AB + \alpha\beta)^2.$$

On calcule :

$$\begin{aligned} D &= \left(A^2B^2 + A^2\beta^2 + B^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2\right) - \left(A^2B^2 + \alpha^2\beta^2 + 2AB\alpha\beta\right) \\ &= A^2\beta^2 + B^2\alpha^2 - 2AB\alpha\beta \\ &= (A\beta - B\alpha)^2. \end{aligned}$$

Donc, $D \geqslant 0$. $\boxed{\text{D'où le résultat.}}$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P(n)$ l'assertion

$$\text{« } \forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \times \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2} \text{ ».}$$

(a) Montrer que $P(1)$ est vraie.

Soient $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$. On a

$$x_1 y_1 \leqslant |x_1 y_1| = |x_1| \times |x_1| = \sqrt{x_1^2} \times \sqrt{y_1^2}.$$

$\boxed{\text{D'où } P(1).}$

(b) Montrer que $P(2)$ est vraie.

Soient $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. D'après la question **1.**, on a

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 \leqslant (x_1^2 + x_2^2) \times (y_1^2 + y_2^2).$$

On en déduit que

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 \leqslant |x_1 y_1 + x_2 y_2| \leqslant \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \times \sqrt{y_1^2 + y_2^2}.$$

$\boxed{\text{D'où } P(2).}$

(c) Montrer, en utilisant $P(2)$, que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(n) \implies P(n+1).$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $P(n)$ est vrai. Soit $(x_1, \dots, x_{n+1}), (y_1, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. On a

$$\sum_{k=1}^{n+1} x_k y_k = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k + x_{n+1} y_{n+1} \leqslant A_n B_n + x_{n+1} y_{n+1},$$

d'après l'hypothèse de récurrence, avec $A_n := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$ et $B_n := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$.
Or, grâce à $P(2)$ « appliquée à $A_n B_n + x_{n+1} y_{n+1}$ », on a

$$A_n B_n + x_{n+1} y_{n+1} \leqslant \sqrt{A_n^2 + x_{n+1}^2} \times \sqrt{B_n^2 + y_{n+1}^2}.$$

Donc, on a

$$\sum_{k=1}^{n+1} x_k y_k \leqslant \sqrt{A_n^2 + x_{n+1}^2} \times \sqrt{B_n^2 + y_{n+1}^2} \qquad \textit{ie} \qquad \sum_{k=1}^{n+1} x_k y_k \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n+1} x_k^2} \times \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}.$$

Ainsi, $P(n+1)$ est vraie. On a bien montré que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(n) \implies P(n+1).}$

(d) Conclure.

Par récurrence, on obtient que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n)$ est vraie. Ainsi,

$$\boxed{\text{l'inégalité de Cauchy-Schwarz est démontrée.}}$$

Partie II – Un premier contrôle

3. (a) Montrer que

$$|\alpha|^n \leqslant \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2} \times \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} \left(|\alpha|^k\right)^2}.$$

Comme α est une racine de P, on a

$$\alpha^n = \sum_{k=0}^{n-1} -a_k \alpha^k.$$

Avec l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\begin{aligned} |\alpha|^n = |\alpha^n| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} -a_k \alpha^k \right| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \, |\alpha|^k \leqslant \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2} \times \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} \left(|\alpha|^k\right)^2} \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. $\boxed{\text{D'où le résultat.}}$

(b) En déduire

$$|\alpha| \leqslant \sqrt{1 + |a_{n-1}|^2 + |a_{n-2}|^2 + \cdots + |a_1|^2 + |a_0|^2}.$$

On distingue deux cas.

- Premier cas : on suppose que tous les a_k sont nuls. Dans ce cas, on a $P = X^n$; on a nécessairement $\alpha = 0$ et l'inégalité cherchée est vraie.
- Deuxème cas : on suppose qu'au moins un des a_k est non nul. On note

  $$M := \sqrt{1 + |a_{n-1}|^2 + |a_{n-2}|^2 + \cdots + |a_1|^2 + |a_0|^2}.$$

  Raisonnons par l'absurde et supposons $|\alpha| > M$. On a

  $$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \left(|\alpha|^k\right)^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(|\alpha|^2\right)^k \\ &= \frac{\left(|\alpha|^2\right)^n - 1}{|\alpha|^2 - 1} \ ; \end{aligned}$$

  en effet, comme $M > 1$, on a bien $|\alpha|^2 \neq 1$.

L'inégalité $|\alpha| > M$ entraîne $|\alpha|^2 > M^2$ par stricte croissance de $(\cdot)^2$ sur $\mathbb{R}_+$. On a donc

$$|\alpha|^2 > 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2$$

$$\text{et donc} \quad |\alpha|^2 - 1 > \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2 \quad \text{et donc} \quad \frac{1}{|\alpha|^2 - 1} < \frac{1}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2}$$

puisque $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2 \neq 0$. Enfin, on a

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2}{|\alpha|^2 - 1} < 1. \tag{$*$}$$

Or, en passant au carré l'inégalité de la question précédente, on a

$$|\alpha|^{2n} \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2 \times \sum_{k=0}^{n-1} \left(|\alpha|^k\right)^2 = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2}{|\alpha|^2 - 1} \times \left(\left(|\alpha|^2\right)^n - 1\right).$$

En composant avec $(*)$, on obtient

$$|\alpha|^{2n} < \left(|\alpha|^2\right)^n - 1$$

ce qui est absurde. $\boxed{\text{D'où le résultat.}}$

Partie III – Un deuxième contrôle

4. (a) Montrer que

$$\forall a > -1,\ \forall \alpha > 1,\ \ (1 + a)^{\alpha} \geqslant 1 + \alpha \times a.$$

Fixons $\alpha > 1$. On pose

$$\varphi : \begin{cases}]-1, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R} \\ a \longmapsto (1 + a)^{\alpha} - (1 + \alpha \times a). \end{cases}$$

Cette fonction est $\mathscr{C}^{\infty}$. Soit $a > -1$. On calcule :

$$\varphi'(a) = \alpha(1 + a)^{\alpha - 1} - \alpha = \alpha((1 + a)^{\alpha - 1} - 1).$$

On a

$$\begin{aligned}
\varphi'(a) > 0 &\iff (1+a)^{\alpha-1} > 1 && \text{(car } \alpha > 0\text{)}\\
&\iff (1+a) > 1 \\
& \qquad\qquad \text{(car } x \longmapsto x^{\frac{1}{\alpha-1}} \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*\text{)}\\
&\iff a > 0,
\end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si $a = 0$. D'où le tableau de signes et variations :

x	-1		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$	||	$-$	0	$+$	
φ	||	$\searrow$	$\varphi(0) = 0$	$\nearrow$	

Donc, $\varphi \geqslant 0$. On a bien montré que

$$\boxed{\forall a > -1,\ \forall \alpha > 1,\ \ (1+a)^{\alpha} \geqslant 1 + \alpha \times a.}$$

(b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $2^n \geqslant n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Si $n = 0$ ou $n = 1$, l'inégalité est vraie.
- Sinon, on applique le résultat précédent pour $a := 1$ et $\alpha := n$.

Dans tous les cas, on a $\boxed{2^n \geqslant n.}$

5. On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ C \longmapsto C^{n+1} - 2C + 1. \end{cases}$$

(a) Étudier les variations de f et déterminer le réel $w_n \geqslant 0$ tel que le tableau de variations de f soit

C	0		w_n		$+\infty$
f		$\searrow$	$f(w_n)$	$\nearrow$	

La fonction f est $\mathscr{C}^{\infty}$. Soit $C \geqslant 0$. On a $f'(C) = (n+1)C^n - 2$ et donc

$$f'(C) > 0 \iff C > \sqrt[n]{\frac{2}{n+1}},$$

avec égalité si et seulement si $C = \sqrt[n]{\frac{2}{n+1}}$.

D'où le tableau de signes et variations, en posant $\boxed{w_n := \sqrt[n]{\frac{2}{n+1}}}$:

C	0		$\sqrt[n]{\frac{2}{n+1}}$		$+\infty$
$f'(C)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(w_n)$	$\nearrow$	

(b) Montrer que f est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Montrons que $\frac{1}{2} \leqslant w_n$. On raisonne par équivalence. On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \leqslant w_n &\iff \frac{1}{2} \leqslant \sqrt[n]{\frac{2}{n+1}} \\ &\iff \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{2}{n+1} \qquad \text{(car } (\cdot)^n \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*\text{)} \\ &\iff n+1 \leqslant 2^{n+1}. \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité étant vraie d'après la question **4.** (b), on a

$$\left[0, \frac{1}{2}\right] \subset [0, w_n].$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } \left[0, \frac{1}{2}\right].}$

(c) Soit $C \geqslant 0$. Montrer que

$$f(C) \leqslant 0 \implies C \geqslant \frac{1}{2}.$$

On veut montrer que $f(C) \leqslant 0 \implies C \geqslant \frac{1}{2}$. On va montrer la contraposée

$$C < \frac{1}{2} \implies f(C) < 0.$$

On suppose $C < \frac{1}{2}$. Comme $C \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et comme f est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, on a donc $f(C) > f\left(\frac{1}{2}\right)$. Or, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} > 0$; donc $f(C) > 0$.

Ainsi, on a bien montré que $\boxed{f(C) \leqslant 0 \implies C \geqslant \frac{1}{2}.}$

(d) Montrer que

$$\forall C \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}, \quad C \times \frac{C^n - 1}{C - 1} \geqslant 1 \implies C \geqslant \frac{1}{2}.$$

On distingue deux cas.

- Premier cas : on suppose que $C > 1$. Dans ce cas, il n'y a rien à faire : que la prémisse soit vraie ou non, on aura toujours

$$C \times \frac{C^n - 1}{C - 1} \geqslant 1 \implies C \geqslant \frac{1}{2}.$$

- Deuxième cas : on suppose que $C < 1$. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} C \times \frac{C^n - 1}{C - 1} \geqslant 1 &\iff C \times (C^n - 1) \leqslant C - 1 \\ &\iff f(C) \leqslant 0. \end{aligned}$$

  Ainsi, on veut montrer que $f(C) \leqslant 0 \implies C \geqslant \frac{1}{2}$, ce qu'on a montré dans la question précédente.

Dans tous les cas, on a montré que

$$\boxed{\forall C \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}, \quad C \times \frac{C^n - 1}{C - 1} \geqslant 1 \implies C \geqslant \frac{1}{2}.}$$

6. On suppose $\alpha \neq 0$. Montrer que

$$1 \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{|a_k|^{\frac{1}{n-k}}}{|\alpha|} \right)^{n-k}.$$

On a déjà vu qu'on a (puisque $P(\alpha) = 0$)

$$|\alpha|^n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \, |\alpha|^k.$$

En divisant par $|\alpha|^n$ cette inégalité, on obtient

$$1 \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \, |\alpha|^{k-n}.$$

Or, si $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a

$$|a_k| \, |\alpha|^{k-n} = \frac{|a_k|}{|\alpha|^{n-k}} = \left(\frac{|a_k|^{\frac{1}{n-k}}}{|\alpha|} \right)^{n-k}.$$

Donc, on a bien

$$\boxed{1 \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{|a_k|^{\frac{1}{n-k}}}{|\alpha|} \right)^{n-k}.}$$

7. Dans cette question, on pose

$$A := \max\Big(|a_{n-1}|\,,\ |a_{n-2}|^{\frac{1}{2}}\,,\ |a_{n-3}|^{\frac{1}{3}}\,,\ \ldots,\ |a_1|^{\frac{1}{n-1}}\,,\ |a_0|^{\frac{1}{n}}\Big).$$

(a) On suppose $\alpha \neq 0$ et on note $C := \dfrac{A}{|\alpha|}$.

(i) Simplifier l'expression $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} C^{n-k}$.

On a (en posant $\ell = n-k$) : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} C^{n-k} = \sum_{\ell=1}^{n} C^{\ell}$. On distingue deux cas.

- Premier cas : on suppose que $C = 1$. On a alors $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} C^{n-k} = 1.}$
- Deuxième cas : on suppose que $C \neq 1$. On a alors $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} C^{n-k} = C \times \frac{C^n - 1}{C-1}.}$

(ii) On suppose que $C \neq 1$. Montrer que $C \times \dfrac{C^n-1}{C-1} \geqslant 1$.
On utilisera la question **6.**

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. D'après la définition de A, on a $|a_k|^{\frac{1}{n-k}} \leqslant A$ et donc

$$\left(\frac{|a_k|^{\frac{1}{n-k}}}{|\alpha|}\right)^{n-k} \leqslant \left(\frac{A}{|\alpha|}\right)^{n-k} = C^{n-k}.$$

Donc, en sommant et d'après la question **6.**, on obtient $1 \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} C^{n-k}$. Ainsi, en utilisant la question précédente, on obtient : $\boxed{1 \leqslant C \times \dfrac{C^n-1}{C-1}.}$

(b) Montrer que

$$|\alpha| \leqslant 2 \times \max\Big(|a_{n-1}|\,,\ |a_{n-2}|^{\frac{1}{2}}\,,\ |a_{n-3}|^{\frac{1}{3}}\,,\ \ldots,\ |a_1|^{\frac{1}{n-1}}\,,\ |a_0|^{\frac{1}{n}}\Big).$$

On distingue plusieurs cas.

- Premier cas : on suppose que $\alpha = 0$. L'inégalité à démontrer est alors vraie.
- Deuxième cas : on suppose que $C = 1$. On a en particulier $C \geqslant \dfrac{1}{2}$.

- Dernier cas : on suppose que $C \neq 1$. D'après la question **7.** (a) (ii), on a $1 \leqslant C \times \dfrac{C^n - 1}{C - 1}$.

  D'après la question **5.** (d), on a donc $C \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Or, $C \geqslant \dfrac{1}{2}$ s'écrit également $|\alpha| \leqslant 2A$, *ie*

$$\boxed{|\alpha| \leqslant 2 \times \max\Big(|a_{n-1}|\,,\ |a_{n-2}|^{\frac{1}{2}}\,,\ |a_{n-3}|^{\frac{1}{3}}\,,\ \ldots,\ |a_1|^{\frac{1}{n-1}}\,,\ |a_0|^{\frac{1}{n}}\Big).}$$

Partie IV – Parties convexes de $\mathbb{C}$

- **Segments complexes.**

  Si $a, b \in \mathbb{C}$, *on notera* $\boxed{a, b} := \Big\{ta + (1-t)b\ ;\ t \in [0,1]\Big\}$.

  ▷ *On a* $\boxed{a, b} \subset \mathbb{C}$.

  ▷ *L'ensemble* $\boxed{a, b}$ *est appelé* segment complexe d'extrémités a et b.

- **Parties convexes de $\mathbb{C}$.**

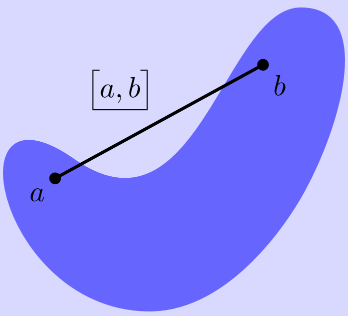
  Soit $X \subset \mathbb{C}$. *On dira que* X est une partie convexe de $\mathbb{C}$ *quand*

$$\forall (a, b) \in X^2,\ \boxed{a, b} \subset X.$$

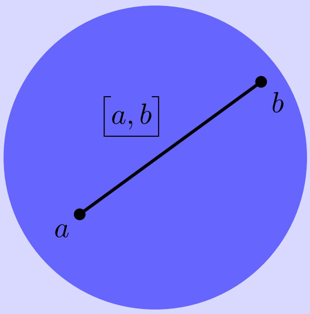
8. Exemples de parties convexes.

(a) Sans justification, donner, en les dessinant, des exemples de parties convexes et des exemples de parties non convexes.

- Voici une partie non convexe de $\mathbb{C}$:



- Voici une partie convexe de $\mathbb{C}$:



(b) *Dans cette question, on attend des justifications rapides.*

(i) L'ensemble vide est-il une partie convexe de $\mathbb{C}$?

$\boxed{\text{Oui.}}$ En effet, on sait qu'une assertion quantifiée universellement sur le vide est toujours vraie.

(ii) L'ensemble $\mathbb{C}$ est-il convexe ?

$\boxed{\text{Oui}}$ puisqu'il est affirmé dans l'énoncé que pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, on a $\boxed{a, b} \subset \mathbb{C}$.

(c) On note $\mathbb{H} := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \operatorname{Im}(z) \geqslant 0 \right\}$. Montrer que $\mathbb{H}$ est convexe.

Soient $a, b \in \mathbb{H}$ et soit $t \in [0, 1]$. On calcule :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(ta + (1-t)b) &= \operatorname{Im}(ta) + \operatorname{Im}((1-t)b) && \text{(par additivité)} \\ &= t\operatorname{Im}(a) + (1-t)\operatorname{Im}(b). && \text{(car } t \text{ et } (1-t) \text{ sont réels)} \end{aligned}$$

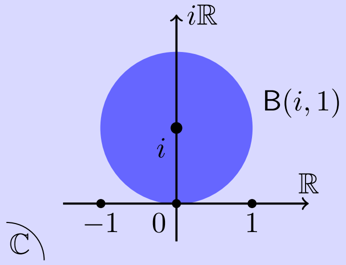
- Comme $t \geqslant 0$ et $\operatorname{Im}(a) \geqslant 0$, on a $t\operatorname{Im}(a) \geqslant 0$.
- De même, comme $1 - t \geqslant 0$ et $\operatorname{Im}(b) \geqslant 0$, on a $(1-t)\operatorname{Im}(b) \geqslant 0$.

Ainsi, on a $\operatorname{Im}(ta + (1-t)b) \geqslant 0$. Donc, $ta + (1-t)b \in \mathbb{H}$.
Finalement, $\boxed{\mathbb{H} \text{ est convexe.}}$

(d) Si $a \in \mathbb{C}$ et si $r > 0$, on note

$$\mathsf{B}(a, r) := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - a| \leqslant r \right\}.$$

(i) Représenter $\mathsf{B}(i, 1)$.



(ii) Soient $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. Montrer que $\mathsf{B}(a, r)$ est convexe.

Soient $\alpha, \beta \in \mathsf{B}(a, r)$ et soit $t \in [0, 1]$.
Montrons que $t\alpha + (1-t)\beta \in \mathsf{B}(a, r)$.
Pour commencer, remarquons astucieusement que

$$a = (t + (1-t)) \times a = ta + (1-t)a.$$

On calcule

$$\begin{aligned}
\Big|a-(t\alpha+(1-t)\beta)\Big| &= \Big|\underbrace{(t+(1-t))a}_{\text{l'astuce}}-(t\alpha+(1-t)\beta)\Big| \\
&= \Big|t(a-\alpha)+(1-t)(a-\beta)\Big| \\
&\leqslant \Big|t(a-\alpha)\Big|+\Big|(1-t)(a-\beta)\Big| && \text{(par inégalité triangulaire)} \\
&= t\times|a-\alpha|+(1-t)\times|a-\beta| && \text{(car } t \text{ et } (1-t) \text{ sont } \geqslant 0) \\
&\leqslant t\times r+(1-t)\times r && (\text{car } \alpha,\beta\in \mathsf{B}(a,r)) \\
&= r.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a $t\alpha+(1-t)\beta\in \mathsf{B}(a,r)$ et donc :

$$\boxed{\mathsf{B}(a,r) \text{ est convexe.}}$$

9. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{C}$.
On note

$$\Delta^n := \left\{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in[0,1]^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\right\}.$$

$$\mathscr{H}(\alpha_1,\dots,\alpha_n) := \left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i\alpha_i \;;\; (\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\Delta^n\right\}.$$

Montrer que $\mathscr{H}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ est convexe.

Soient $a,b\in\mathscr{H}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$. On écrit

$$a=\sum_{i=1}^n \lambda_i\alpha_i \quad \text{et} \quad b=\sum_{i=1}^n \mu_i\alpha_i,$$

où $(\lambda_i)_i\in\Delta^n$ et $(\mu_i)_i\in\Delta^n$.
Soit maintenant $t\in[0,1]$. Montrons que $ta+(1-t)b\in\mathscr{H}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$.
On écrit :

$$\begin{aligned}
ta+(1-t)b &= t\times\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\alpha_i\right)+(1-t)\times\left(\sum_{i=1}^n \mu_i\alpha_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^n (t\lambda_i+(1-t)\mu_i)\alpha_i.
\end{aligned}$$

Fixons $i\in[\![1,n]\!]$. Comme $t\geqslant 0$ et $1-t\geqslant 0$, on a

$$0\leqslant t\lambda_i\leqslant t \qquad \text{et} \qquad 0\leqslant (1-t)\mu_i\leqslant 1-t.$$

En sommant ces inégalités, on a $t\lambda_i+(1-t)\mu_i\in[0,1]$.

Posons donc $\rho_i := t\lambda_i + (1-t)\mu_i$. On a alors

$$ta + (1-t)b = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \alpha_i.$$

et $\forall i \in [\![1, n]\!], \rho_i \in [0, 1]$.
De plus, on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \rho_i &= \sum_{i=1}^{n} t\lambda_i + (1-t)\mu_i \\ &= t \times \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}_{=1} + (1-t) \times \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \mu_i}_{=1} = t + (1-t) = 1.\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $(\rho_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \Delta^n$ et $ta + (1-t)b \in \mathscr{H}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.
Finalement, on a bien montré que

$$\boxed{\mathscr{H}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \text{ est convexe.}}$$

10. Soit X une partie convexe de $\mathbb{C}$, soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in X$.
Montrer que

$$\mathscr{H}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \subset X.$$

On raisonne par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$\mathscr{P}(n) : \text{« } \forall (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in X^n,\ \mathscr{H}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \subset X. \text{ »}$$

- Montrons que $\mathscr{P}(1)$ est vraie. Soit $\alpha \in X$. Comme $\Delta^1 = \{1\}$, on a $\mathscr{H}(\alpha) = \{\alpha\}$.
  On a bien $\mathscr{H}(\alpha) \subset X$.
- Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$.
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$.
  Soient $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) \in X^{n+1}$. Montrons que $\mathscr{H}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) \subset X$.
  Soit $x \in \mathscr{H}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$; on écrit

  $$x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \alpha_i$$

  avec $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1} \in \Delta^{n+1}$.
  On distingue deux cas.
  - ▷ Premier cas : on suppose que $\lambda_1 = 1$. On a alors $x = \alpha_1$ et donc $x \in X$.
  - ▷ Deuxième cas : on suppose que $\lambda_1 < 1$. On écrit alors :

  $$\begin{aligned}x &= \lambda_1 \alpha_1 + \sum_{i=2}^{n+1} \lambda_i \alpha_i \\ &= \lambda_1 \alpha_1 + (1-\lambda_1) \sum_{i=2}^{n+1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_1} \alpha_i\end{aligned}$$

Or, on a

$$\sum_{i=2}^{n+1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_1} = \frac{1}{1-\lambda_1}\left(\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i\right) - \lambda_1\right) = \frac{1}{1-\lambda_1}(1-\lambda_1) = 1.$$

Comme par ailleurs il est clair que $\forall i \in [\![2, n+1]\!]$, $\dfrac{\lambda_i}{1-\lambda_1} \geqslant 0$, on a donc

$$\left(\frac{\lambda_i}{1-\lambda_1}\right)_{2 \leqslant i \leqslant n+1} \in \Delta^n.$$

Or, d'après $\mathscr{P}(n)$, on sait que $\mathscr{H}(\alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}) \subset X$. Donc, $\displaystyle\sum_{i=2}^{n+1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_1}\alpha_i \in X$. Notons $\beta := \displaystyle\sum_{i=2}^{n+1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_1}\alpha_i$. Comme X est convexe, on a $\lambda_1\alpha_1 + (1-\lambda_1)\beta \in X$. Autrement dit, on a $x \in X$.

On a bien montré que $\mathscr{H}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) \subset X$: $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.

- Par récurrence, on obtient $\boxed{\text{le résultat voulu.}}$

Partie V – Théorème de Gauss-Lucas

- *Dans cette partie, on considère de nouveau notre polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, unitaire, de degré $n \geqslant 1$. On l'écrit*
$$P = \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i).$$
où $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$.
- *Si $Q \in \mathbb{C}[X]$, on désigne par $\mathsf{Z}_{\mathbb{C}}(Q)$ l'ensemble des racines complexes de Q.*

11. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $P(z) \neq 0$.

(a) Montrer que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ z - \alpha_i \neq 0$.

Soit $i_0 \in [\![1, n]\!]$. Si on avait $z - \alpha_{i_0} = 0$ alors on aurait $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(z - \alpha_i) = 0$ *ie* $P(z) = 0$, ce qui est exclu par hypothèse. Donc, on a

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!],\ z - \alpha_i \neq 0.}$$

(b) Montrer que

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z-\alpha_i}.$$

On pourra commencer par calculer P'.

Commençons par calculer P'. Déjà, on peut remarquer que puisque P est le produit de n facteurs de degré 1, calculer sa dérivée revient à appliquer $n-1$ fois successives la formule de dérivation du produit de deux polynômes. Après calcul, on trouve

$$\boxed{P' = \sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ j\neq i}} (X-\alpha_j).}$$

On laisse le lecteur se convaincre de la véracité cette formule, en regardant sur des exemples où n est petit. La démonstration formelle se ferait par récurrence.

Cette formule est importante : il faut la retenir.

Par conséquent, on a

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ j\neq i}} (z-\alpha_j)}{\displaystyle\prod_{1\leqslant j\leqslant n} (z-\alpha_j)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\displaystyle\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ j\neq i}} (z-\alpha_j)}{\displaystyle\prod_{1\leqslant j\leqslant n} (z-\alpha_j)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z-\alpha_i}.$$

12. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $P'(z) = 0$ et $P(z) \neq 0$.

Montrer que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|z-\alpha_i|^2}\right) \times z = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|z-\alpha_i|^2} \times \alpha_i \; .$$

Comme $P'(z) = 0$, d'après la question **11.**(b), on a

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z-\alpha_i} = 0.$$

Or, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\frac{1}{z-\alpha_i} = \frac{\overline{z-\alpha_i}}{(z-\alpha_i)\overline{(z-\alpha_i)}} = \frac{\overline{z-\alpha_i}}{|z-\alpha_i|^2}$$

et, en conjuguant,

$$\overline{\frac{1}{z-\alpha_i}} = \frac{z-\alpha_i}{|z-\alpha_i|^2}.$$

Donc, en sommant, on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \overline{\frac{1}{z-\alpha_i}} &= \overline{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z-\alpha_i}} = 0 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{z-\alpha_i}{|z-\alpha_i|^2}.\end{aligned}$$

Donc, on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{z}{|z-\alpha_i|^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{|z-\alpha_i|^2},$$

qui se réécrit

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|z-\alpha_i|^2}\right) \times z = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|z-\alpha_i|^2} \times \alpha_i\ .}$$

13. Théorème de Gauss-Lucas.

En déduire que

$$\mathsf{Z}_{\mathbb{C}}(P') \subset \mathscr{H}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Soit z une racine de P'. On pose, pour $i_0 \in [\![1, n]\!]$,

$$\lambda_{i_0} := \frac{\dfrac{1}{|z-\alpha_{i_0}|^2}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|z-\alpha_i|^2}}.$$

Déjà, on a bien $\forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i \geqslant 0$. De plus, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Donc, on a bien

$$(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \Delta^n.$$

Dans la question précédente, on a montré que $z = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i$.

Ainsi, on a bien $z \in \mathscr{H}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. D'où

$$\boxed{\mathsf{Z}_{\mathbb{C}}(P') \subset \mathscr{H}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).}$$

Partie VI – Contrôles

Soient $Q \in \mathbb{C}[X]$ *et* $M \geqslant 0$.
On dit que M contrôle les racines de Q *quand*

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}, \quad Q(\alpha) = 0 \implies |\alpha| \leqslant M.$$

14. Troisième contrôle.

Soit $M \in \mathbb{R}_+$.

(a) Montrer que

$$M \text{ contrôle les racines de } P \implies M \text{ contrôle les racines de } P'.$$

Supposons que M contrôle les racines de P. On écrit

$$P = \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)$$

où $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$.
Soit $\gamma \in \mathbb{C}$ une racine de P'. D'après la question **13.**, soit $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \Delta^n$ tel que

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i.$$

On calcule

$$\begin{aligned} |\gamma| &= \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i \right| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \, |\alpha_i| = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, |\alpha_i| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i M = M \times \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}_{=1} = M. \end{aligned}$$

Ainsi, M contrôle les racines de P'. Par conséquent, on a bien

$$\boxed{M \text{ contrôle les racines de } P \implies M \text{ contrôle les racines de } P'.}$$

(b) La réciproque est-elle vraie ?

Non : $\boxed{\text{la réciproque est fausse.}}$
Par exemple, si on considère le polynôme $P := X^2 - 1$, alors $P' = 2X$ et 0 contrôle les racines de P' alors que 0 ne contrôle pas les racines de P'.

15. Un contrôle sur le contrôle.

Soit $M \in \mathbb{R}_+$. Montrer que

$$M \text{ contrôle les racines de } P \implies M \geqslant \frac{|a_{n-1}|}{n}.$$

Supposons que M contrôle les racines de P. Par récurrence immédiate, pour tout $k \in \mathbb{N}$, M contrôle les racines de $P^{(k)}$. Or, après calcul, on trouve que

$$P^{(n-1)} = n!X + (n-1)!a_{n-1},$$

dont l'unique racine est $\dfrac{-a_{n-1}}{n}$. On a donc $\left|\dfrac{-a_{n-1}}{n}\right| \leqslant M$, ce qui se réécrit

$$\boxed{M \geqslant \frac{|a_{n-1}|}{n}.}$$