Généralités sur l'exponentielle II

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 1.1 — Des factorisations.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser les expressions suivantes.

a) $x^2 - 16$ ....

b) $x^2 + 6x + 9$ ....

c) $2x^2 - \dfrac{1}{2}$ ....

d) $4x^2 - 1$ ....

e) $(x+3)^2 + 2x + 6$ ....

f) $(3x-2)^2 - 36$ ....

Calcul 1.2 — Des fractions de fractions.

Mettre les nombres suivants sous forme de fraction irréductible.

a) $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{7}}$ ....

b) $\dfrac{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{3}}$ ....

c) $\dfrac{\frac{1}{2} + \frac{2}{5}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}$ ....

d) $\dfrac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}}$ ....

e) $\dfrac{\frac{1}{3} - \frac{1}{5}}{1 + \frac{1}{3}}$ ....

f) $\dfrac{\frac{1}{2} - 3}{\frac{1}{9} + 1}$ ....

Propriétés de l'exponentielle

Calcul 1.3

Simplifier les expressions suivantes en les mettant sous la forme $\exp(A)$.

a) $\exp(2)\exp(3)$ ....

b) $\exp(-1)\exp(4)$ ....

c) $\dfrac{\exp(4)}{\exp(3)}$ ....

d) $\dfrac{\exp(6)\exp(-1)}{\exp(2)\exp(3)}$ ....

e) $\exp(3)^2\exp(4)$ ....

f) $\dfrac{\exp(2)^4\exp(-3)}{\exp(-2)^5}$ ....

Calcul 1.4

Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier les expressions suivantes en les mettant sous la forme $\exp(A)$.

a) $\exp(x)\exp(-2x)$ ....

b) $\dfrac{\exp(x)^2}{\exp(-x)}$ ....

c) $\exp(x)\exp(-1)$ ....

d) $\exp\left(\dfrac{x}{2}\right)^4$ ....

Calcul 1.5 — Avec des identités remarquables.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier $\big(\exp(x)+\exp(-x)\big)^2 - \big(\exp(x)-\exp(-x)\big)^2$ ....

Équations et inéquations

Dans les exercices suivants, on attend les réponses sous la forme « $x = a$ » ou « $x \geqslant a$ » ou « $x > a$ », etc.

Calcul 1.6

Résoudre les équations et inéquations suivantes.

a) $\exp(3x+12) = 1$ ....

b) $\exp(2x-6) > 1$ ....

c) $\exp\big(x^2\big) = \mathrm{e}$ ....

d) $\exp(5x) \leqslant \mathrm{e}$ ....

e) $\dfrac{1}{\exp(x)+1} = \dfrac{2}{\exp(x)+3}$ ....

f) $\exp(x)^2 = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ ....

Calcul 1.7

Résoudre les inéquations suivantes.

a) $\exp(x^2) < \exp(x)^5$ ....

b) $\exp(x)^2\exp(-2) \geqslant \mathrm{e}$ ....

c) $\dfrac{1}{1-\exp(x)} < \dfrac{2}{\exp(x)+2}$ ....

d) $\dfrac{\exp(x)^3}{\mathrm{e}} < \exp(x)$ ....

Calcul 1.8

Résoudre les inéquations suivantes.

a) $\exp(2x+7) \leqslant \exp(x)^4$ ....

b) $1 \leqslant \exp(x)^3\exp(5) \leqslant \mathrm{e}^4$ ....

c) $\dfrac{1}{\exp(2x)-\mathrm{e}} < \dfrac{1}{\exp(2x)+1}$ .....

d) $\dfrac{\exp(2x)^4}{\mathrm{e}} \geqslant \exp(x+1)$ ....

Calcul 1.9 — Avec une équation auxiliaire.

Résoudre les équations suivantes.

Dans chaque cas on pourra poser $X = \exp(x)$ et résoudre une équation auxiliaire.

a) $\exp(2x) - 2\exp(x) + 1 = 0$ ....

b) $\exp(x) + \exp(-x) = 2$ ....

c) $\exp(2x) + 2\exp(x) - 3 = 0$ ....

d) $\exp(2x) - (1 + \mathrm{e})\exp(x) + \mathrm{e} = 0$ ....

Calcul 1.10 — Un système exponentiel.

Résoudre le système d'équations suivant d'inconnue (x, y) :

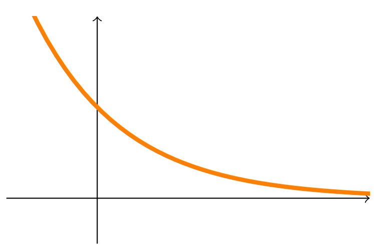
$$(S) \quad \begin{cases} \exp(x-1) + \exp(y+1) = 2 \\ \exp(x) + \exp(y) = \dfrac{\mathrm{e}^2+1}{\mathrm{e}} \end{cases}$$ ....

Représentation graphique d'une fonction exponentielle

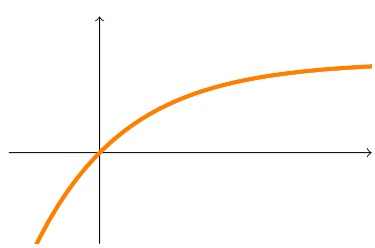
Entraînement 1.11

On considère les trois allures de courbes ci-dessous.

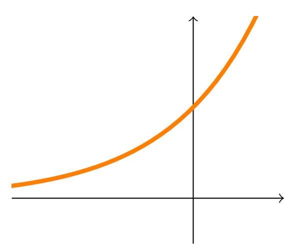
courbe 1



courbe 2



courbe 3



Pour chacune des fonctions suivantes, identifier la courbe qui correspond.

Les réponses possibles sont : « courbe 1 », « courbe 2 », « courbe 3 », « aucune ».

a) $x \longmapsto \exp(2x)$ ....

b) $x \longmapsto \exp(-x)$ ....

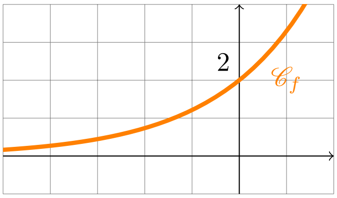
c) $x \longmapsto 2 - \exp(-x)$ ....

d) $x \longmapsto 1 - \exp(-x)$ ....

Entraînement 1.12

Voici la courbe représentative d'une fonction f.

Parmi les trois expressions suivantes, laquelle correspond à la fonction f ?



(a) $f(x) = \mathrm{e}^x$ (b) $f(x) = 2\mathrm{e}^x$ (c) $f(x) = 1 + \mathrm{e}^x$

....

Calculs plus avancés

Calcul 1.13

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq 0$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{kx}$ ....

Calcul 1.14

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier l'expression $\mathrm{e} \times \mathrm{e}^2 \times \cdots \times \mathrm{e}^n$ ....

Calcul 1.15 — Simplification ?

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$ et $g(x) = x + \sqrt{x^2+1}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. A-t-on $g\big(f(x)\big) = \mathrm{e}^x$? ....

Réponses mélangées

$\dfrac{1-\mathrm{e}^{nx}}{1-\mathrm{e}^x}$ 4 $(x+3)(x+5)$ $\exp\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)$ $\exp(3)$ $(2x-1)(2x+1)$

$x < \dfrac{1}{2}$ $x = 0$ ou $x = 1$ $x = 0$ $-\dfrac{5}{3} \leqslant x \leqslant -\dfrac{1}{3}$ $\exp(-x)$ aucune $x = -\dfrac{1}{2}$

$(x-4)(x+4)$ $x \geqslant \dfrac{2}{7}$ (b) $\dfrac{21}{8}$ $\exp(x-1)$ courbe 2 $x \geqslant \dfrac{3}{2}$

$\exp(15)$ $0 < x < 5$ $x > 0$ $(3x-8)(3x+4)$ $\dfrac{14}{5}$ $\exp(3x)$ $x < \dfrac{1}{2}$

$2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$ $x = 0$ 1 $-\dfrac{9}{4}$ 7 $x > 3$ courbe 3 $x \leqslant \dfrac{1}{5}$

$(x,y) = (1,-1)$ $\exp(5)$ $(x+3)^2$ $x = -4$ $\exp(2x)$ $x = 1$ ou $x = -1$

$x = 0$ $\dfrac{1}{10}$ $x = 0$ oui $x \geqslant \dfrac{7}{2}$ $\dfrac{6}{5}$ e courbe 1 $\exp(10)$

► Réponses et corrigés page 5

Fiche n° 1. Généralités sur l'exponentielle II

Réponses

1.1 a) .... $\boxed{(x-4)(x+4)}$

1.1 b) .... $\boxed{(x+3)^2}$

1.1 c) .... $\boxed{2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)}$

1.1 d) .... $\boxed{(2x-1)(2x+1)}$

1.1 e) .... $\boxed{(x+3)(x+5)}$

1.1 f) .... $\boxed{(3x-8)(3x+4)}$

1.2 a) .... $\boxed{\frac{21}{8}}$

1.2 b) .... $\boxed{\frac{14}{5}}$

1.2 c) .... $\boxed{\frac{6}{5}}$

1.2 d) .... $\boxed{7}$

1.2 e) .... $\boxed{\frac{1}{10}}$

1.2 f) .... $\boxed{-\frac{9}{4}}$

1.3 a) .... $\boxed{\exp(5)}$

1.3 b) .... $\boxed{\exp(3)}$

1.3 c) .... $\boxed{\mathrm{e}}$

1.3 d) .... $\boxed{1}$

1.3 e) .... $\boxed{\exp(10)}$

1.3 f) .... $\boxed{\exp(15)}$

1.4 a) .... $\boxed{\exp(-x)}$

1.4 b) .... $\boxed{\exp(3x)}$

1.4 c) .... $\boxed{\exp(x-1)}$

1.4 d) .... $\boxed{\exp(2x)}$

1.5 .... $\boxed{4}$

1.6 a) .... $\boxed{x=-4}$

1.6 b) .... $\boxed{x>3}$

1.6 c) .... $\boxed{x=1 \text{ ou } x=-1}$

1.6 d) .... $\boxed{x\leqslant \frac{1}{5}}$

1.6 e) .... $\boxed{x=0}$

1.6 f) .... $\boxed{x=-\frac{1}{2}}$

1.7 a) .... $\boxed{0<x<5}$

1.7 b) .... $\boxed{x\geqslant \frac{3}{2}}$

1.7 c) .... $\boxed{x>0}$

1.7 d) .... $\boxed{x<\frac{1}{2}}$

1.8 a) .... $\boxed{x\geqslant \frac{7}{2}}$

1.8 b) .... $\boxed{-\frac{5}{3}\leqslant x\leqslant -\frac{1}{3}}$

1.8 c) .... $\boxed{x<\frac{1}{2}}$

1.8 d) .... $\boxed{x\geqslant \frac{2}{7}}$

1.9 a) .... $\boxed{x=0}$

1.9 b) .... $\boxed{x=0}$

1.9 c) .... $\boxed{x=0}$

1.9 d) .... $\boxed{x=0 \text{ ou } x=1}$

1.10 .... $\boxed{(x,y)=(1,-1)}$

1.11 a) .... $\boxed{\text{courbe 3}}$

1.11 b) .... $\boxed{\text{courbe 1}}$

1.11 c) .... $\boxed{\text{aucune}}$

1.11 d) .... $\boxed{\text{courbe 2}}$

1.12 .... $\boxed{\text{b}}$

1.13 .... $\boxed{\frac{1-\mathrm{e}^{nx}}{1-\mathrm{e}^{x}}}$

1.14 .... $\boxed{\exp\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)}$

1.15 .... $\boxed{\text{oui}}$

Corrigés

1.1 c) On a $2x^2-\frac{1}{2}=2\left(x^2-\frac{1}{4}\right)^2=2\left(x^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)=2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

1.1 d) On a $4x^2-1=(2x)^2-1^2=(2x-1)(2x+1)$.

1.1 e) On a $(x+3)^2+2x+6=(x+3)(x+3)+2(x+3)=(x+3)(x+3+2)=(x+3)(x+5)$.

1.1 f) On a $(3x-2)^2 - 36 = (3x-2)^2 - 6^2 = (3x-2-6)(3x-2+6) = (3x-8)(3x+4)$.

1.2 b) On a $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}-\frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{3}{6}=\dfrac{4}{6}}{\frac{9}{12}-\frac{4}{12}} = \dfrac{7}{6} \times \dfrac{12}{5} = \dfrac{14}{5}$.

1.3 a) On a $\exp(2)\exp(3) = \exp(2+3) = \exp(5)$.

1.3 c) On a $\dfrac{\exp(4)}{\exp(3)} = \exp(4-3) = \exp(1) = \mathrm{e}$.

1.3 d) On trouve $\exp(0) = 1$.

1.3 e) On a $\exp(3)^2\exp(4) = \exp(3\times 2)\exp(4) = \exp(6+4) = \exp(10)$.

1.5 On utilise l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ avec

$$a = \exp(x) + \exp(-x) \qquad \text{et} \qquad b = \exp(x) - \exp(-x).$$

On a $a - b = 2\exp(-x)$ et $a + b = 2\exp(x)$. On trouve donc

$$(\exp(x)+\exp(-x))^2 - (\exp(x)-\exp(-x))^2 = 2\exp(-x)2\exp(x) = 4\exp(-x)\exp(x) = 4\exp(0) = 4.$$

1.6 a) On a les équivalences : $\exp(3x+12) = 1 \iff 3x+12 = 0 \iff 3x = -12 \iff x = -4$.

1.6 b) On a les équivalences :

$$\exp(2x-6) > 1 \iff \exp(2x-6) > \exp(0) \iff 2x-6 > 0 \iff 2x > 6 \iff x > 3.$$

1.6 c) On a $\exp\big(x^2\big) = \mathrm{e} \iff x^2 = 1 \iff x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -1$.

1.6 d) Comme précédemment avec $\mathrm{e} = \exp(1)$.

1.6 e) On a $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1} = \dfrac{2}{\mathrm{e}^x+3} \iff 2(\mathrm{e}^x+1) = \mathrm{e}^x + 3 \iff \mathrm{e}^x = 1 \iff x = 0$.

1.6 f) On a $\exp(x)^2 = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \iff \mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{-1} \iff 2x = -1 \iff x = -\dfrac{1}{2}$.

1.7 a) On a

$$\begin{aligned}\exp(x^2) < \exp(x)^5 &\iff \exp(x^2) < \exp(5x) \iff x^2 < 5x \iff x^2 - 5x < 0\\ &\iff x(x-5) < 0 \iff 0 < x < 5.\end{aligned}$$

1.7 b) On a

$$\begin{aligned}\exp(x)^2\exp(-2) \geqslant \mathrm{e} &\iff \exp(2x-2) \geqslant \exp(1) \iff 2x-2 \geqslant 1 \iff 2x \geqslant 3\\ &\iff x \geqslant \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

1.7 c) On a

$$\frac{1}{1-\mathrm{e}^x} < \frac{2}{\mathrm{e}^x+2} \iff \frac{1}{1-\mathrm{e}^x} - \frac{2}{\mathrm{e}^x+2} < 0 \iff \frac{\mathrm{e}^x+2-2(1-\mathrm{e}^x)}{(1-\mathrm{e}^x)(\mathrm{e}^x+2)} < 0 \iff \frac{3\mathrm{e}^x}{(1-\mathrm{e}^x)(\mathrm{e}^x+2)} < 0.$$

Or, on a $3\mathrm{e}^x > 0$ et $\mathrm{e}^x + 2 > 0$. Donc la fraction est du signe de $1 - \mathrm{e}^x$. On a donc :

$$\frac{1}{1-\mathrm{e}^x} < \frac{2}{\mathrm{e}^x+2} \iff 1-\mathrm{e}^x < 0 \iff 1 < \mathrm{e}^x \iff 0 < x.$$

1.7 d) On a

$$\frac{\exp(x)^3}{\mathrm{e}} < \exp(x) \iff \frac{\exp(3x)}{\exp(1)} < \exp(x) \iff \exp(3x-1) < \exp(x)$$
$$\iff 3x-1 < x \iff 2x < 1 \iff x < \frac{1}{2}.$$

1.8 c) On a

$$\frac{1}{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}} < \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}+1} \iff \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}} - \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}+1} < 0 \iff \frac{\mathrm{e}^{2x}+1-\left(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}\right)}{(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e})(\mathrm{e}^{2x}+1)} < 0 \iff \frac{1+\mathrm{e}}{(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e})(\mathrm{e}^{2x}+1)} < 0.$$

Or, on a $1+\mathrm{e} > 0$ et $\mathrm{e}^{2x}+1 > 0$. Donc la fraction est du signe de $\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}$. On a donc :

$$\frac{1}{\exp(2x)-\mathrm{e}} < \frac{1}{\exp(2x)+1} \iff \mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e} < 0 \iff 2x < 1 \iff x < \frac{1}{2}.$$

1.9 a) On pose $y = \exp(x)$. On a $\exp(2x) = \exp(x)^2 = y^2$. On résout donc :

$$y^2 - 2y + 1 = 0 \iff (y-1)^2 = 0 \iff y = 1 \iff \exp(x) = 1 \iff x = 0.$$

1.9 b) En multipliant par e^x qui est non nul, on se ramène à l'équation précédente :

$$\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} = 2 \iff \mathrm{e}^x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x\exp(-x) = 2\mathrm{e}^x \iff \exp(2x) + \exp(0) - 2\mathrm{e}^x = 0 \iff \exp(2x) - 2\mathrm{e}^x + 1 = 0.$$

1.9 c) On pose $y = \mathrm{e}^x$ et on résout l'équation $y^2 + 2y - 3 = 0$.

Le discriminant de cette équation de dégré 2 vaut $\Delta = 2^2 + 4 \times 3 = 16 = 4^2$. On obtient donc comme solutions $y_1 = \dfrac{-2+4}{2} = 1$ et $y_2 = \dfrac{-2-4}{2} = -3$. On a donc

$$\exp(2x) + 2\exp(x) - 3 = 0 \quad\iff\quad \Big(\mathrm{e}^x = 1 \ \text{ ou } \ \underbrace{\mathrm{e}^x = -3}_{\text{impossible}}\Big) \quad\iff\quad x = 0.$$

1.9 d) On pose $y = \mathrm{e}^x$ et on résout l'équation $y^2 - (1+\mathrm{e})y + \mathrm{e} = 0$.

Le discriminant de cette équation de dégré 2 vaut $\Delta = (1+\mathrm{e})^2 - 4\mathrm{e} = 1 + 2\mathrm{e} + \mathrm{e}^2 - 4\mathrm{e} = 1 - 2\mathrm{e} + \mathrm{e}^2 = (1-\mathrm{e})^2 = (\mathrm{e}-1)^2$ avec $\mathrm{e} - 1 > 0$ car $\mathrm{e} \approx 2{,}7$.

On obtient donc comme solutions $y_1 = \dfrac{1+\mathrm{e}+(\mathrm{e}-1)}{2} = \mathrm{e}$ et $y_2 = \dfrac{1+\mathrm{e}-(\mathrm{e}-1)}{2} = 1$. On a donc

$$\exp(2x) - (1+\mathrm{e})\exp(x) + \mathrm{e} = 0 \quad\iff\quad \Big(\mathrm{e}^x = \mathrm{e} \ \text{ ou } \ \mathrm{e}^x = 0\Big) \quad\iff\quad \Big(x = \mathrm{e} \ \text{ ou } \ x = 1\Big).$$

1.10 On remarque que $\exp(x-1) = \exp(-1)\exp(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}\mathrm{e}^x$ et de même : $\exp(y+1) = \mathrm{e}\mathrm{e}^y$.

Pour la première ligne, on a donc

$$\frac{1}{\mathrm{e}}\mathrm{e}^x + \mathrm{e}\mathrm{e}^y = 2 \iff \mathrm{e}^y = \frac{2}{\mathrm{e}} - \frac{1}{\mathrm{e}^2}\mathrm{e}^x.$$

Le système (S) est donc équivalent à :

$$(S) \iff \begin{cases} \mathrm{e}^y & = \dfrac{2}{\mathrm{e}} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\mathrm{e}^x \\ \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\mathrm{e}^x + \dfrac{2}{\mathrm{e}} & = \dfrac{\mathrm{e}^2+1}{\mathrm{e}} \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{e}^y = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \\ \mathrm{e}^x = \mathrm{e} \end{cases} \iff (x,y) = (1,-1).$$

....

1.11 a) La courbe 3 est la seule courbe correspondant à une exponentielle croissante.

....

1.11 b) La courbe 1 est la seule courbe correspondant à une exponentielle décroissante.

....

1.11 c) On peut penser à la courbe 2 mais la valeur en $x = 0$ ne correspond pas.

....

1.12 La courbe a l'allure d'une exponentielle croissante donc les trois réponses sont plausibles. Cependant, d'après la courbe :

- on a $f(0) = 2$ ce qui permet d'éliminer la réponse a.
- et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ ce qui permet d'éliminer c.

....

1.13 Déjà, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{kx} = \sum_{k=0}^{n-1} (\mathrm{e}^x)^k.$$

C'est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $q = \mathrm{e}^x \neq 1$ car $x \neq 0$. Ainsi, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\mathrm{e}^x)^k = \frac{1-(\mathrm{e}^x)^n}{1-\mathrm{e}^x} = \frac{1-\mathrm{e}^{nx}}{1-\mathrm{e}^x}.$$

....

1.14 On a $\mathrm{e} \times \mathrm{e}^2 \times \cdots \times \mathrm{e}^n = \mathrm{e}^{1+2+\cdots+n} = \mathrm{e}^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

....

1.15 On calcule

$$g\big(f(x)\big) = f(x) + \sqrt{f(x)^2+1} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 + 1}.$$

Or, on a $\left(\dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 + 1 = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x}}{4} + 1 = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 2 + \mathrm{e}^{-2x} + 4}{4} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} + 2 + \mathrm{e}^{-2x}}{4} = \left(\dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2$.

Comme $\dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \geqslant 0$ on a donc : $\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 + 1} = \sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ et donc

$$g\big(f(x)\big) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} + \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \mathrm{e}^x.$$

....