Polynômes I

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 1.1

Calculer les expressions suivantes. On donnera le résultat sous forme de fraction irréductible.

a) $\dfrac{2}{3} - \dfrac{3}{2}$ ....

b) $\dfrac{7}{2} - \dfrac{8}{5} + \dfrac{1}{3}$ ....

c) $2 \times \dfrac{5}{3} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{8}{4}$ ....

d) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 - \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{5}$ ....

e) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2 - 3 \times \dfrac{-2}{3} - \dfrac{16}{9}$ ....

f) $\left(\dfrac{-1}{2}\right)^3 + \dfrac{2}{5} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2$ ....

Calcul 1.2

Résoudre les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} a + 2b = 1 \\ 3a - b = 2 \end{cases}$ ....

b) $\begin{cases} a - b + c = 6 \\ a + 3b + 2c = -4 \\ 3a + 3b - 3c = -12 \end{cases}$ ....

Evaluation des polynômes

Calcul 1.3 — Une petite mise en jambe.

Dans les cas suivants, calculer $P(a)$.

a) $P = 3 + 9X - X^2 - 5X^4$ et $a = 2$ ....

b) $P = 3X^5 - 4X^4 + 2X^2 - 3X + 2$ et $a = 1$ ....

c) $P = 3X^5 - 4X^4 + 2X^2 - 3X + 2$ et $a = -1$ ....

d) $P = 1 - 9X^2 + 10X$ et $a = -3$ ....

e) $P = 4X - 2X^2 + 9 - X^3$ et $a = -4$ ....

Calcul 1.4 — Avec des nombres rationnels.

Dans les cas suivants, calculer $P(a)$.

Les nombres rationnels seront donnés sous forme de fraction irréductible.

a) $P = 3X^3 - 4X^2 + 2$ et $a = \dfrac{2}{3}$ ....

b) $P = 5 - \dfrac{1}{2}X + \dfrac{2}{3}X^2 + 3X^3$ et $a = 3$ ....

c) $P = -4X^4 + \dfrac{2}{3}X^3 + 3X^2 - \dfrac{1}{2}X + 2$ et $a = -2$ ....

d) $P = \dfrac{1}{25}X^3 - X^2 - 3X + 1$ et $a = \dfrac{5}{3}$ ....

e) $P = \dfrac{1}{2}X - \dfrac{-2}{5}X^2 - 3X^3 + 1$ et $a = \dfrac{-4}{3}$ ....

Calcul 1.5

Dans les cas suivants, calculer $P(a)$.

Les nombres rationnels seront donnés sous forme de fraction irréductible.

a) $P = (3X^2 - 4X + 2)(X^5 - 3X + 2) - (X^2 - 1)$ et $a = 2$ ....

b) $P = \dfrac{1}{2} + 3X^5 - (4X^4 + 2X^2 - 3)(X^3 + 2) - \dfrac{1}{3}X^2$ et $a = -1$ ....

Calcul 1.6 — Pêle-mêle.

Dans les cas suivants, calculer $P(a)$.

Les nombres rationnels seront donnés sous forme irréductible et les racines carrées seront réduites.

a) $P = X^4 - 2X^3 - 2X^2$ et $a = 1 + \sqrt{3}$ ....

b) $P = \left(X^2 + 4\right)^2\left(3X - \dfrac{1}{2}\right)$ et $a = -\sqrt{2}$ ....

c) $P = \left(\sqrt{2}\left(X^2 - 1\right)^2 - 2\right)\left(3X - \dfrac{1}{2}\right) + 84X + 33$ et $a = 1 - \sqrt{2}$ ....

Opérations sur les polynômes

Calcul 1.7 — Développer, réduire et ordonner (I).

Développer, réduire et ordonner selon les puissances décroissantes de X les polynômes suivants.

a) $(X - 1)^2\left(X^2 + X + 1\right)$ ....

b) $(X + 2)(-2X + 7) - 2(2X - 3)$ ....

c) $X + \left(\dfrac{2}{3}X + 5\right)\left(X - \dfrac{3}{2}\right) + \dfrac{1}{5}$ ....

Calcul 1.8 — Développer réduire et ordonner (II).

Développer, réduire et ordonner selon les puissances croissantes de X les polynômes suivants.

a) $(X^3 - 5X + 2)(-2X^2 + 7X - 1)$ ....

b) $X - \left(X^3 - \dfrac{1}{2}X + 2\right)\left(-2X^2 + X - \dfrac{3}{4}\right) - 6X^2$ ....

c) $(X^2 + \sqrt{2}X + 1)(1 - \sqrt{2}X + X^2)$ ....

Calcul 1.9 — Composition de polynômes (I).

Étant donnés deux polynômes P et Q, on fabrique un polynôme, noté $P \circ Q$, en substituant l'expression de Q à l'indéterminée X dans P. Par exemple, pour $P = 4X^2 - 7X + 5$ et $Q = X^2 - 3$, on a

$$P \circ Q = 4\big(X^2 - 3\big)^2 - 7\big(X^2 - 3\big) + 5.$$

Dans les exemples suivants, donnez $P \circ Q$ sous forme développée en ordonnant selon les puissances croissantes de X.

a) $P = 2X + 1$ et $Q = 4X + 3$ ....

b) $P = 4X + 3$ et $Q = 2X + 1$ ....

c) $P = 2X - 1$ et $Q = 3X^2 - X + 1$ ....

Calcul 1.10 — Composition de polynômes (I).

Donner $P \circ Q$ sous forme développée en ordonnant selon les puissances croissantes de X.

a) $P = X^2 - X + 1$ et $Q = 2X - 1$ ....

b) $P = X^2 + 3X + 1$ et $Q = X^3 + X - 2$ ....

c) $P = X^3 + X - 2$ et $Q = X^2 + 3X + 1$ ....

Calcul 1.11 — Composition de polynômes (III).

Donner $P \circ Q$ sous forme développée en ordonnant selon les puissances croissantes de X.

a) $P = X^3 - \sqrt{2}X^2 - X$ et $Q = \sqrt{2}X + 1$ ....

b) $P = X^3 + 3X^2 + 3X + 1$ et $Q = X - 2$ ....

Calcul 1.12 — Composition de polynômes (IV).

Donner $P \circ Q$ sous forme développée en ordonnant selon les puissances croissantes de X.

a) $P = \left(X + 1 + \sqrt{3}\right)\left(2X - \sqrt{3}\right)$ et $Q = X^2 + 1$ ....

b) $P = \left(X^2 + 1\right)(2X - 3)$ et $Q = X^2 + \sqrt{2} - 1$ ....

Racines des polynômes

Calcul 1.13 — Racine ou pas ?

Dans les cas suivants, répondez « oui » ou « non » si le nombre a est racine du polynôme P.

a) $P = -4X^2 + 16X - 7$ et $a = \dfrac{-7}{2}$ ....

b) $P = X^3 - 3X^2 - 5X - 1$ et $a = -1$ ....

c) $P = X^3 - 3X^2 - 5X - 1$ et $a = 2 - \sqrt{5}$ ....

d) $P = X^4 + 17X^2 + 12X$ et $a = -2 - \sqrt{3}$ ....

Calcul 1.14 — Condition pour être racine.

Dans chacun des cas suivants, déterminer les valeurs de m pour que $P(a) = 0$.

a) $P = 6mX^5 - X^4 + (m+2)X^3 - X^2 - X + m$ et $a = 1$ ....

b) $P = X^2 - \left(m^2 + 2m - 1\right)X + 2m^3 - 2m$ et $a = 1 + m^2$ ....

c) $P = X^3 + (1 - 2m)X^2 - m(1+m)X + 2m^2(m-1)$ et $a = 2m + 1$ ....

Calculs plus avancés

Calcul 1.15

On considère le polynôme

$$P = X^5 - 5X^3 + \left(5 + \sqrt{17}\right)X^2 + 2X - 4.$$

Le nombre $a = -\sqrt{\dfrac{5 - \sqrt{17}}{2}}$ est-il une racine du polynôme P ? ....

Calcul 1.16

Soit P un polynôme de degré 4 tel que

$$P \circ (X+1) - P = X^3 \quad \text{et} \quad P(0) = 0.$$

a) Déterminer P (sous sa forme factorisée).

On pourra écrire $P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$; il s'agira alors de déterminer ses coefficients.

....

b) En déduire, pour n naturel non nul, une expression simple de $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$.

....

Calcul 1.17

Dans chacun des cas suivants, déterminer les valeurs de m pour que $P(a) = 0$.

a) $P = X^3 - \big(m^2+2\big)X - 2m^3 + 4m$ et $a = 2$ ....

b) $P = X^3 - \big(3m^2+2\big)X - 2m^3 + 4m$ et $a = -1+\sqrt{2}$ ....

Réponses mélangées

$7+8X$ $\quad -2X^2 - X + 20$ $\quad -\dfrac{178}{27}$ $\quad -\sqrt{2} + (2\sqrt{2}-4)X + (6-2\sqrt{2})X^2 + 2\sqrt{2}X^3$ $\quad (a,b) = \left(\dfrac{5}{7}, \dfrac{1}{7}\right)$

0 $\quad$ Oui $\quad m = 1$ $\quad -1 - X + X^2 - X^3 + 2X^4 + X^6$ $\quad (a,b,c) = (1,-3,2)$ $\quad -18(1+6\sqrt{2})$

$\dfrac{31}{6}$ $\quad 0$ $\quad 18\sqrt{2} - 28 + (26-18\sqrt{2})X^2 + (6\sqrt{2}-9)X^4 + 2X^6$ $\quad$ Oui $\quad m = \dfrac{1}{8}$ $\quad -63$ $\quad m \in \left\{-2, \dfrac{-1}{3}\right\}$

$\dfrac{-1}{45}$ $\quad 165$ $\quad 1 - 2X + 6X^2$ $\quad \dfrac{367}{45}$ $\quad m \in \left\{-\sqrt{2}, -1, \sqrt{2}\right\}$ $\quad 7+8X$ $\quad 0$

$\dfrac{67}{30}$ $\quad -\dfrac{35}{6}$ $\quad m \in \left\{1, \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}, 1-2\sqrt{2}\right\}$ $\quad -2 + 19X - 39X^2 + 9X^3 + 7X^4 - 2X^5$

$-\dfrac{1}{40}$ $\quad X^4 - X^3 - X + 1$ $\quad \dfrac{181}{2}$ $\quad 12X + 31X^2 + 45X^3 + 30X^4 + 9X^5 + X^6$ $\quad -\dfrac{5}{6}$

25 $\quad$ Non $\quad 3 - 6X + 4X^2$ $\quad \dfrac{10}{9}$ $\quad 1 + X^4$ $\quad -\dfrac{163}{3}$ $\quad$ Oui $\quad$ Non

$\dfrac{2}{3}X^2 + 5X - \dfrac{73}{10}$ $\quad -110$ $\quad -1 + 3X - 3X^2 + X^3$ $\quad \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$ $\quad 0$

$1 + (6+\sqrt{3})X + 2X^4$ $\quad \dfrac{3}{2} - \dfrac{11}{8}X - \dfrac{3}{2}X^2 - \dfrac{1}{4}X^3 - X^4 + 2X^5$ $\quad \dfrac{2}{3}$ $\quad P = \dfrac{(X-1)^2X^2}{4}$

▶ Réponses et corrigés page 6

Fiche nº 1. Polynômes I

Réponses

1.1 a) .... $\boxed{-\dfrac{5}{6}}$

1.1 b) .... $\boxed{\dfrac{67}{30}}$

1.1 c) .... $\boxed{\dfrac{31}{6}}$

1.1 d) .... $\boxed{\dfrac{-1}{45}}$

1.1 e) .... $\boxed{\dfrac{2}{3}}$

1.1 f) .... $\boxed{-\dfrac{1}{40}}$

1.2 a) .... $\boxed{(a,b) = \left(\dfrac{5}{7}, \dfrac{1}{7}\right)}$

1.2 b) .... $\boxed{(a,b,c) = (1,-3,2)}$

1.3 a) .... $\boxed{-63}$

1.3 b) .... $\boxed{0}$

1.3 c) .... $\boxed{0}$

1.3 d) .... $\boxed{-110}$

1.3 e) .... $\boxed{25}$

1.4 a) .... $\boxed{\dfrac{10}{9}}$

1.4 b) .... $\boxed{\dfrac{181}{2}}$

1.4 c) .... $\boxed{-\dfrac{163}{3}}$

1.4 d) .... $\boxed{-\dfrac{178}{27}}$

1.4 e) .... $\boxed{\dfrac{367}{45}}$

1.5 a) .... $\boxed{165}$

1.5 b) .... $\boxed{-\dfrac{35}{6}}$

1.6 a) .... $\boxed{0}$

1.6 b) .... $\boxed{-18(1+6\sqrt{2})}$

1.6 c) .... $\boxed{0}$

1.7 a) .... $\boxed{X^4 - X^3 - X + 1}$

1.7 b) .... $\boxed{-2X^2 - X + 20}$

1.7 c) .... $\boxed{\dfrac{2}{3}X^2 + 5X - \dfrac{73}{10}}$

1.8 a) .... $\boxed{-2 + 19X - 39X^2 + 9X^3 + 7X^4 - 2X^5}$

1.8 b) .... $\boxed{\dfrac{3}{2} - \dfrac{11}{8}X - \dfrac{3}{2}X^2 - \dfrac{1}{4}X^3 - X^4 + 2X^5}$

1.8 c) .... $\boxed{1 + X^4}$

1.9 a) .... $\boxed{7 + 8X}$

1.9 b) .... $\boxed{7 + 8X}$

1.9 c) .... $\boxed{1 - 2X + 6X^2}$

1.10 a) .... $\boxed{3 - 6X + 4X^2}$

1.10 b) .... $\boxed{-1 - X + X^2 - X^3 + 2X^4 + X^6}$

1.10 c) .... $\boxed{\begin{array}{r} 12X + 31X^2 + 45X^3 + 30X^4 \\ +9X^5 + X^6 \end{array}}$

1.11 a) .... $\boxed{\begin{array}{r} -\sqrt{2} + (2\sqrt{2} - 4)X + (6 - 2\sqrt{2})X^2 \\ +2\sqrt{2}X^3 \end{array}}$

1.11 b) .... $\boxed{-1 + 3X - 3X^2 + X^3}$

1.12 a) .... $\boxed{1 + (6 + \sqrt{3})X + 2X^4}$

1.12 b) .... $\boxed{\begin{array}{r} 18\sqrt{2} - 28 + (26 - 18\sqrt{2})X^2 \\ +(6\sqrt{2} - 9)X^4 + 2X^6 \end{array}}$

1.13 a) .... Non

1.13 b) .... Oui

1.13 c) .... Oui

1.13 d) .... Non

1.14 a) .... $\boxed{m = \frac{1}{8}}$

1.14 b) .... $\boxed{m = 1}$

1.14 c) .... $\boxed{m \in \left\{-2, \frac{-1}{3}\right\}}$

1.15 .... $\boxed{\text{Oui}}$

1.16 a) .... $\boxed{P = \frac{(X-1)^2X^2}{4}}$

1.16 b) .... $\boxed{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}$

1.17 a) .... $\boxed{m \in \left\{-\sqrt{2}, -1, \sqrt{2}\right\}}$

1.17 b) .... $\boxed{m \in \left\{1, \frac{\sqrt{2}-1}{2}, 1-2\sqrt{2}\right\}}$

Corrigés

1.3 a) Pour calculer $P(a)$, on remplace dans l'expression de P l'indéterminée X par la valeur a. On a donc ici, $P(2) = 3 + 9 \times 2 - 2^2 - 5 \times 2^4 = -63$.

....

1.3 b) On peut observer que pour calculer $P(1)$, il suffit de faire la somme des coefficients du polynôme P.

On a donc, ici, $P(1) = 3 - 4 + 2 - 3 + 2 = 0$.

....

1.3 c) On peut observer que pour calculer $P(-1)$, il suffit de faire la somme des coefficients des termes de degré pair à laquelle on soustrait la somme des coefficients des termes de degré impair.

On a donc, ici, $P(1) = -3 - 4 + 2 + 3 + 2 = 0$.

....

1.6 a) Pour effectuer moins de calculs, on peut observer que $P = X^2\big(X^2 - 2X - 2\big)$. Ce qui permet d'éviter de calculer $a^4 = \big(a^2\big)^2$ et $a^3 = a \times a^2$. Comme $a^2 = 4+2\sqrt{3}$, on obtient alors $a^2 - 2a - 2 = 4 + 2\sqrt{3} - 2(1+\sqrt{3}) - 2 = 0$, puis $P(a) = a^2\big(a^2 - 2a - 2\big) = 0$.

....

1.6 c) Il faut y aller tranquillement et pas à pas en calculant

$$a^2 - 1 = 2(1-\sqrt{2}) \quad \text{puis} \quad (a^2-1)^2 = 4(3-2\sqrt{2}) \quad \text{puis} \quad \sqrt{2}\big(a^2-1\big)^2 - 2 = 12\sqrt{2} - 18$$
$$\text{et} \quad \left(\sqrt{2}\big(a^2-1\big)^2 - 2\right)\left(3a - \frac{1}{2}\right) = 84\sqrt{2} - 117.$$

On trouve finalement $P(a) = 0$.

Voici une solution plus astucieuse et très élégante. On peut également, en remarquant que $a^2 - 1 = 2a$ *et* $\sqrt{2} = 1 - a$, *écrire que* $P(a) = \big((1-a)(2a)^2 - 2\big)\left(3a - \frac{1}{2}\right) + 84a + 33$. *Puis développer cette expression en prenant soin de remplacer* a^2 *par* $1 + 2a$ *à chaque étape du calcul, pour trouver finalement* $P(a) = 0$.

....

1.7 a) On utilise l'identité remarquable $(X-1)^2 = X^2 - 2X + 1$. Ainsi, on peut écrire :

$$(X-1)^2\big(X^2+X+1\big) = \big(X^2-2X+1\big)\big(X^2+X+1\big) = X^4 - X^3 - X + 1.$$

Pour être « efficace », il suffit de rechercher directement le coefficient du terme d'un degré donné (sachant que $(aX^n)(bX^p) = abX^{n+p}$). Par exemple, dans l'expression finale et en utilisant l'étape intermédiaire, le coefficient du terme de degré 2 est donné par $1 \times 1 + (-2) \times 1 + 1 \times 1 = 0$. Ici, l'étape intermédiaire n'étant pas compliquée (à effectuer et à retenir), on peut (éventuellement) se passer de l'écrire.

1.9 a) On a $P \circ Q = 2(4X+3)+1$.

1.10 a) On a $P \circ Q = (2X-1)^2 - (2X-1) + 1$.

1.14 a) On a $P(1) = 8m - 1$. Ainsi $P(1) = 0$ si et seulement si $m = \dfrac{1}{8}$.

1.14 b) On a $P(1+m^2) = \big(1+m^2\big)^2 - \big(m^2+2m-1\big)(1+m^2) + 2m^3 - 2m = 2 - 4m + 2m^2 = 2(1-m)^2$. Ainsi, $P(1+m^2) = 0$ si et seulement si $m = 1$.

1.14 c) Les calculs donnent $P(2m+1) = 3m^2 + 7m + 2$. Or les solutions de l'équation algébrique du second degré $3m^2 + 7m + 2 = 0$ sont -2 et $\dfrac{-1}{3}$. Ainsi, $P(2m+1) = 0$ si et seulement si $m \in \left\{-2, \dfrac{-1}{3}\right\}$.

1.15 Observez que $\big(5+\sqrt{17}\big)a^2 - 4 = 0$ et que $a^5 - 5a^3 + 2a = a\big(a^4 - 5a^2 + 2\big)$. Il s'agit donc voir si $a^4 - 5a^2 + 2 = 0$. Ce qui est bien le cas. Ainsi a est une racine de P.

1.16 a) Comme P est de degré 4, il s'écrit $P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$. On a déjà $e = P(0) = 0$. Par ailleurs, $P \circ (X+1) = aX^4 + (4a+b)X^3 + (6a+3b+c)X^2 + (4a+3b+2c+d)X + a+b+c+d$. Ainsi, on a $P \circ (X+1) - P = 4aX^3 + (6a+3b)X^2 + (4a+3b+2c)X + a+b+c+d$. En identifiant les coefficients avec ceux de X^3. On obtient alors le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} 4a & = & 1 \\ 6a+3b & = & 0 \\ 4a+3b+2c & = & 0 \\ a+b+c+d & = & 0 \end{array}\right.,$$

dont l'unique solution est donnée par $a = c = \dfrac{1}{4}$, $b = -\dfrac{1}{2}$, et $d = 0$. D'où, $P = \dfrac{1}{4}X^4 - \dfrac{1}{2}^3 + \dfrac{1}{4}X^2 = \dfrac{(X-1)^2X^2}{4}$.

1.16 b) Comme, pour tout naturel $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $P(k+1) - P(k) = k^3$, on a alors

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 &= (P(2) - P(1)) + (P(3) - P(2)) + \cdots + (P(n+1) - P(n)) \\ &= -P(1) + P(n+1) = P(n+1) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

1.17 a) On a $P(2) = -2(m^3 + m^2 - 2m - 2)$. En observant que -1 est une solution de $m^3 + m^2 - 2m - 2 = 0$, on obtient la factorisation $m^3 + m^2 - 2m - 2 = (m+1)(m^2-2) = (m+1)(m-\sqrt{2})(m+\sqrt{2})$. Ainsi, 2 est racine de P si et seulement si $m \in \big\{-\sqrt{2}, -1, \sqrt{2}\big\}$.

1.17 b) On a $P(\sqrt{2}-1) = -2m^3 + 3(1-\sqrt{2})m^2 + 4m + 3\sqrt{2} - 5$. En observant que 1 est une solution évidente de $-2m^3 + 3(1-\sqrt{2})m^2 + 4m + 3\sqrt{2} - 5 = 0$, on obtient la factorisation suivante

$$\begin{aligned} -2m^3 + 3(1-\sqrt{2})m^2 + 4m + 3\sqrt{2} - 5 &= (m-1)\big(-2m^2 + (1-3\sqrt{2})m + 5 - 3\sqrt{2}\big) \\ &= (m-1)(m + 2\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} - 1 - 2m). \end{aligned}$$

Ainsi, $\sqrt{2} - 1$ est racine de P si et seulement si $m \in \left\{1, \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}, 1 - 2\sqrt{2}\right\}$.