

Transformation naturelle

Quelle est fin?

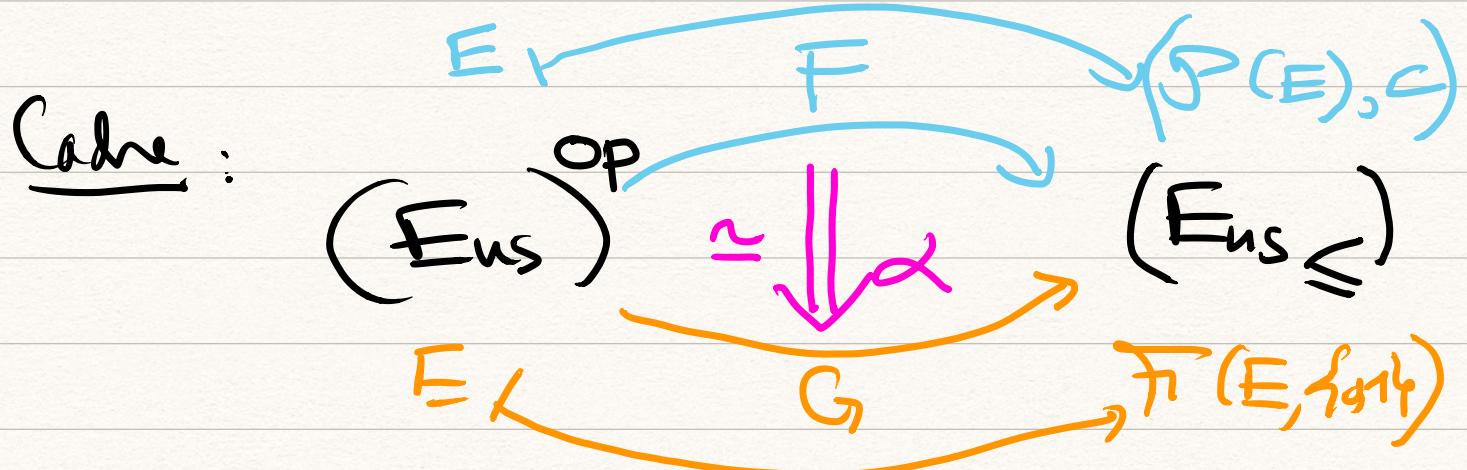
Idee : Qu'est-ce qu'un isomorphisme naturel?

Modèle : $E \times F \cong F \times E$

1) fin de l'étude de l'exemple

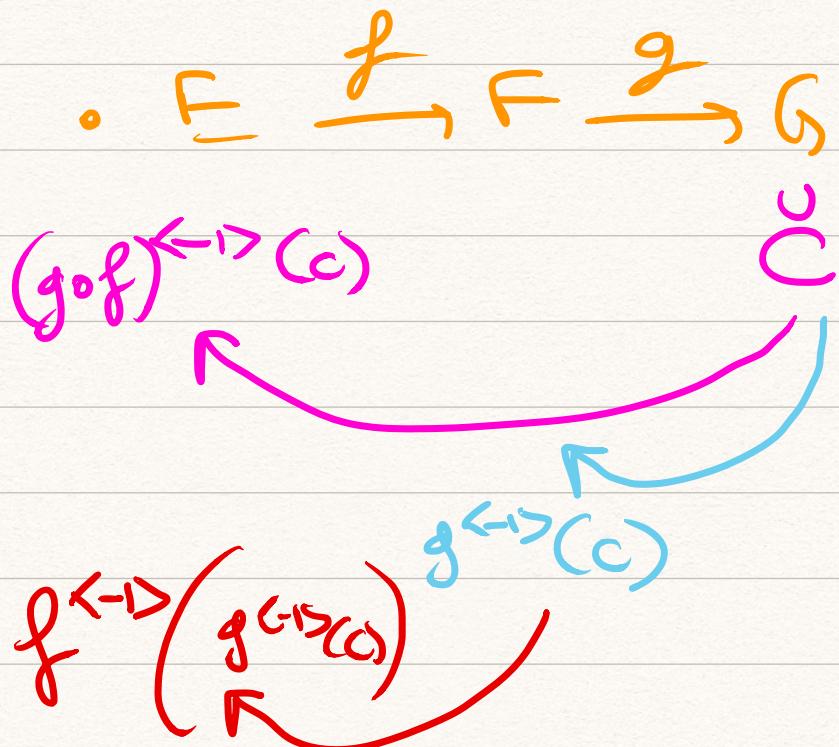
$$M_1 \quad \mathcal{P}(E) \cong \mathcal{T}(E, \text{Log}^1)$$

naturellement



$$Rg : E \xrightarrow{f} F$$

$$\begin{array}{ccc} f^{\leftarrow\rightarrow} & & \\ \mathcal{F}(F) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{F}(E) \\ B & \mapsto & f^{\leftarrow\rightarrow}(B) \end{array}$$



a $\mathcal{F}(G) \xrightarrow{f^{\leftarrow\rightarrow}} \mathcal{F}(F)$

$$(g \circ f)^{\leftarrow\rightarrow} \quad \downarrow f^{\leftarrow\rightarrow} \quad \downarrow f^{\leftarrow\rightarrow}$$

$$\mathcal{F}(E)$$

comute.

$$\bullet D\mathcal{C} \bar{m} : (\mathbb{E}_{us})^{op} \longrightarrow (\mathbb{E}_{us}^{\leq})$$

$$E \longmapsto \mathcal{F}(E, \delta_0, \nu)$$

$$\begin{aligned} f &\leq g \\ \Leftrightarrow & \\ \forall x \in E, f(x) &\leq g(x) \end{aligned}$$

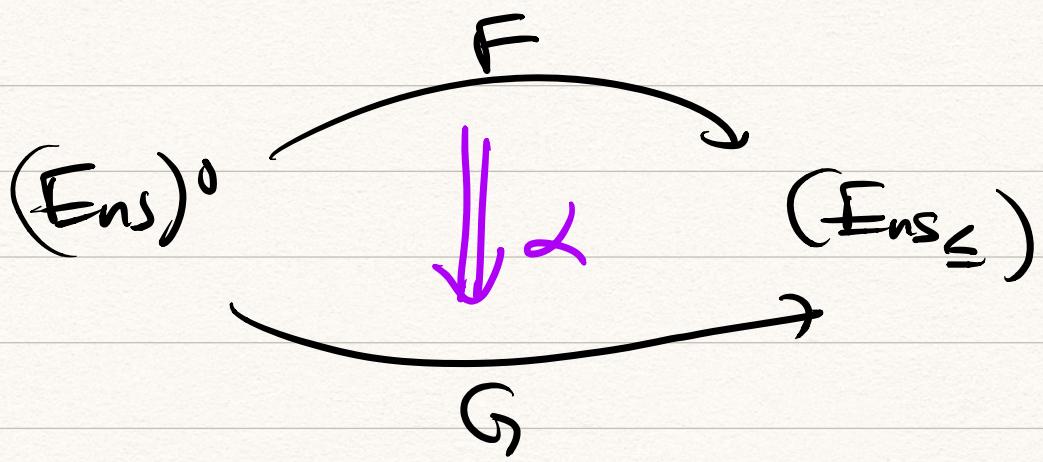
Clear bien catégoriel

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} \{g, 1\}$$

$$\begin{aligned} f &\rightsquigarrow f \circ f \\ \mathcal{F}(F, \delta_0, \nu) &\longrightarrow \mathcal{F}(E, \delta_0, \nu) \\ G(F) &\longrightarrow G(E) \end{aligned}$$

• Vérifiez que $F(\cdot) \cong G(\cdot)$

• On construit une transformation naturelle



Il peut tout ensemble E , il nous faut définir

$$\begin{array}{ccc} & F(E) & \\ \alpha_E \downarrow & & \\ & G(E) & \end{array}$$

à

$$\mathcal{P}(E)$$

$$\begin{array}{ccc} \alpha_E & \downarrow & \text{et } \alpha_E \text{ constante} \\ & & \\ & \mathcal{F}(E, \lambda_0, \nu_0) & \end{array}$$

On prend $\mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{F}(E, \lambda_0, \nu_0)$

$\alpha_E: A \rightarrow M_A$

On a : $A \subset B \Rightarrow \mathbb{M}_A \leq \mathbb{M}_B$.

Donc : $\mathcal{D}_E = \mathcal{S}(E) \rightarrow \mathcal{T}(E, \delta_0, \gamma)$
est lassable.

Pour vérifier q cette famille
de morphismes est une transformation
naturelle, on doit vérifier q
c'est compatible aux flots - f_E :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\mathcal{D}_E} & \mathcal{T}(E, \delta_0, \gamma) \\ \downarrow f & \uparrow f^{-1} & \downarrow \mathbb{M}_A \\ F & , & \mathcal{T}(F, \delta_0, \gamma) \\ & A \longleftarrow \mathbb{M}_A & \\ & B \longleftarrow \mathbb{M}_B & \end{array}$$

comme.

démo:

$$\text{Hg } \prod_{x \in f^{-1}(B)} (x) = \prod_B \circ f(x)$$

since $x \in E$

$n \in f^{-1}(B)$: $\hat{\exists} f(x) \in B$

$$\text{then } \prod_B (f(x)) = 1 \quad \text{ok}$$

$n \in f^{-1}(B)$: other

■

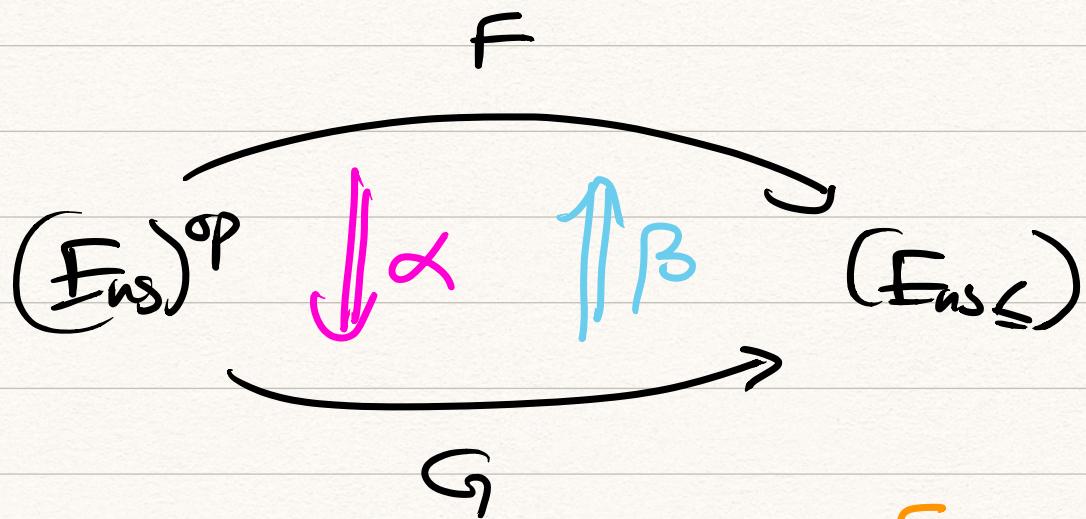
• Transformable neq

$$\beta_E = \mathcal{F}(E, \{0,1\}) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$$

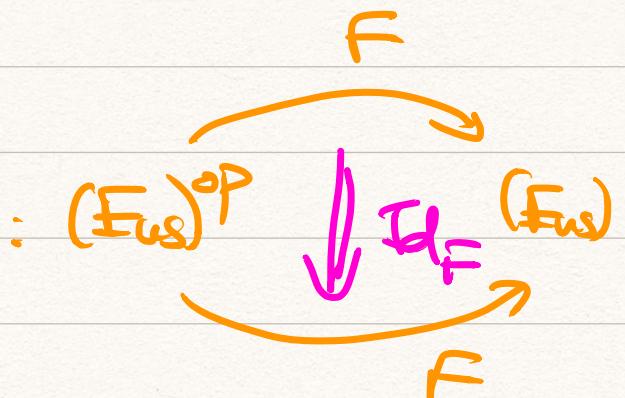
$$(f: E \rightarrow \{0,1\}) \longleftarrow f^{\leftrightarrow}(\{1\})$$

(β_E) $E \in (E_{\text{as}})^{\text{op}}$ est une transfo
naturelle.

Bilan



$$\text{Mq } \beta \circ \alpha = \text{Id}_F$$



i.e.

$$1 \underset{A}{\Downarrow} \leftrightarrow (\alpha \gamma \beta) = 1 \quad : F \rightarrow F$$

$$1 \underset{f}{\Downarrow} \leftrightarrow (f_1 f_2) = f \quad : G \rightarrow G$$

■

2) Autres exemples

Le bidual

$$(k - ev) \xrightarrow{Jd(k - ev)} (k - ev)$$

(.)^{**}

Rq : on a

$$(.)^*: (k - ev)^{op} \longrightarrow (k - ev)$$

Le foncteur dual renverse les flèches

$$\begin{array}{ccc} V & \longleftarrow & V^* \\ \downarrow f & \nearrow w & \downarrow pof = \downarrow ik \\ W & \xrightarrow{\quad} & V^* \\ \downarrow w & \nearrow f & \downarrow pof \\ \varphi: W \rightarrow K & & \end{array}$$

Action de $(.)^{**}$ sur les flèches

(avec $(.)^{**} = (.)^* \circ (.)^*$)

$$V \xrightarrow{f} W$$

$$W^* \xrightarrow{tf} V^*$$

$$\varphi: W \rightarrow K$$

$$\varphi \circ f: V \xrightarrow{f} W \rightarrow K$$

$$V^{**} \longrightarrow W^{***}$$

$$V^{**} \longrightarrow W^{***}$$

$$T: V^* \rightarrow K$$

$$W^* \xrightarrow{tf} V^* \xrightarrow{T} K$$

$$\varphi \xrightarrow{\quad} T(\varphi \circ f)$$

On va définir une transformation naturelle

$$(k\text{-ev}) \xrightarrow{\text{Id}(k\text{-ev})} (k\text{-ev})$$

$$(k\text{-ev}) \xrightarrow{(\cdot)^*} (k\text{-ev})$$

$$\text{Fe} \quad \alpha_V : V \xrightarrow{\quad} V^{**}$$

$$n \longmapsto \begin{pmatrix} V^* & \longrightarrow K \\ \downarrow & \longmapsto \varphi(\gamma) \end{pmatrix}$$

Fait: α est une transformation naturelle.

Fait: quand on restreint α à $(K\text{-ev})_{\text{d-finie}}$ (^{noté} $(K\text{-evf})$)
on obtient un β naturel entre V et V^{**}

3) Autre exemple

On a tjs $G \rightarrow G^{ab}$
où G grp et G^{ab} est l'abélianisé
de G .

Rappel :

$$1^{\circ}) \quad G^{ab} := \frac{G}{D(G)}$$

$$2^{\circ}) \quad D(G) := \langle [g,h] ; g, h \in G \rangle$$

$$\text{a } [g,h] := g^{-1}h^{-1}gh$$

$$3^{\circ}) \quad [g,h] = e \Leftrightarrow g, h \text{ commutent}$$

Für: G^{ab} kommutativ

~~$\pi: G \longrightarrow G^{ab}$~~

$a, b \in G^{ab}$ entspricht
 $n = \pi(a)$
 $g = \pi(b)$

$$[n, g]_{G^{ab}} = [\pi(a), \pi(b)]$$

$$= \pi([a, b]_G)$$

$\rightarrow eD(G)$

$$= e$$

Beha: G^{ab} abelian



4) $(\text{ex}) D(G) \triangleleft G$.

50) Canadien et symé

G^{ab} est le quotient de G ,
où l'on a perdu le moins
d'info qui n'est rien.

Propriété universelle:

$\{ \forall H \text{ abélien}, \exists \varphi: G \rightarrow H$

$\exists ! \text{ facteuris}^0 \quad G \xrightarrow{\pi} G^{ab} \xrightarrow{\varphi} H$

$\exists \varphi: G^{ab} \rightarrow H$

Prop: $G \longrightarrow G^{ab}$ est
une transformat⁰ naturelle.



Rq $D(G)$ est plein caractéristiq

$H \leq G$: H caractéristiq
csgr

\Leftrightarrow

$H \notin \text{Aut}(G)$, $\ell(H) \subset H$.

• H plein caractéristiq

csgr $H \notin \text{End}(G)$, $\ell(H) \subset H$.

• $S_n \longrightarrow S_n^{\text{ab}} := S_n / D(S_n)$

$D(S_n) = A_n$

$S_n / A_n \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

• $\boxed{S_n \longrightarrow S_n^{\text{ab}}}$ c'est la signature

$$\bullet D(\mathrm{GL}_n) = \mathrm{SL}_n \quad \mathrm{GL}_n / \mathrm{SL}_n = k.$$

$$\boxed{\mathrm{GL}_n \longrightarrow \mathrm{GL}_n^{ab}}$$

clat le
dictionnaire

$$\bullet \mathbb{F}_1 : \text{corps à 1 él.}$$

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_1) \cong S_n$$

$$\mathrm{det} : \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_1) \longrightarrow \mathbb{F}_1$$

$$\sigma \longmapsto \underline{\underline{\epsilon(\sigma)}}$$