DS 6

4 heures

- *Tout résultat ou raisonnement doit être clairement justifié, sauf mention du contraire.*
- *La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.*
- *La présentation de la copie sera prise en compte dans l'évaluation :*
  - ▷ *encadrez les résultats principaux ;*
  - ▷ *soulignez les résultats et arguments intermédiaires importants ;*
  - ▷ *soignez votre écriture ;*
  - ▷ *maintenez une marge dans vos copies, aérez vos copies ;*
  - ▷ *enfin, numérotez vos copies (et non vos pages).*
- *Les documents, calculatrices et autres appareils électroniques sont interdits.*
- *Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie en expliquant les initiatives que vous avez été amené à prendre.*

Suites polygéométriques

Convention et notation

- *Dans tout ce problème, de façon implicite, les espaces vectoriels considérés sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels et les applications linéaires sont $\mathbb{C}$-linéaires.*
- *Si E est un espace vectoriel, si $p \in \mathbb{N}^*$ et si $f_1, \ldots, f_p \in \mathrm{L}(E)$, on note*

$$\prod_{i=1}^{p} f_i \coloneqq f_p \circ f_{p-1} \circ \cdots \circ f_1.$$

Partie I – Étude d'une famille d'opérateurs.

Notations

- *On note T l'application définie par*

$$T : \begin{cases} \mathbb{C}[X] \longrightarrow \mathbb{C}[X] \\ \quad P \longmapsto P(X+1). \end{cases}$$

C'est une application linéaire.

- *Si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on note $T_{\alpha,\beta}$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$ défini par*

$$T_{\alpha,\beta} \coloneqq \alpha T + \beta \mathrm{Id}_{\mathbb{C}[X]}.$$

1. Exemples.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $T(X^n)$ dans la base canonique de $\mathbb{C}_n[X]$.

(b) Exprimer $T_{i,1}(X^2 + X + 1)$ dans la base $\left(1, X, X^2\right)$ de $\mathbb{C}_2[X]$.

2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer

$$\Big(\forall z \in \mathbb{C},\ P(z+1) = P(z)\Big) \implies P \text{ est constant.}$$

3. Montrer que T est un isomorphisme.

4. La famille des $T_{\alpha,\beta}$ commute.

Soient $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$T_{\alpha,\beta} \circ T_{a,b} = T_{a,b} \circ T_{\alpha,\beta}.$$

5. Interaction des $T_{\alpha,\beta}$ avec le degré.
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'espace $\mathbb{C}_n[X]$ est stable par $T_{\alpha,\beta}$.

(b) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul.
Exprimer $\deg T_{\alpha,\beta}(P)$ en fonction de $\deg(P)$ dans chacun des cas suivants :

(i) $(\alpha, \beta) = (0, 0)$.

(ii) $\alpha \neq -\beta$.

(iii) $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ et $\alpha = -\beta$.

6. Noyaux des $T_{\alpha,\beta}$.
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Déterminer $\ker(T_{\alpha,\beta})$.
On distinguera différents cas pour les valeurs de (α, β).

Partie II – Suites polygéométriques.

Notations

▷ *Si $u, v \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on rappelle que $u \times v$ désigne la suite définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ (u \times v)_n = u_n \times v_n.$$

▷ *Si $\alpha \in \mathbb{C}$, on note $\alpha^{\bullet}$ la suite définie par $\alpha^{\bullet} \coloneqq (\alpha^n)_{n \in \mathbb{N}}$.*

▷ *Si $P \in \mathbb{C}[X]$, on note $P(\bullet)$ la suite définie par $P(\bullet) \coloneqq \big(P(n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$.*

Définition

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que u est une suite polygéométrique $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\exists p \in \mathbb{N}^*, \ \exists(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{C}^p, \ \exists(P_1, \dots, P_p) \in \mathbb{C}[X]^p : \ \ u = \sum_{k=1}^{p} P_k(\bullet) \times \alpha_k^{\bullet}.$$

On note $\mathrm{PG}(\mathbb{C})$ l'ensemble des suites polygéométriques.

Le shift

▷ *Pour $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on note $\mathsf{S}(u)$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \ \ \mathsf{S}(u)_n = u_{n+1}$.*

▷ *On note encore*

$$\mathsf{S} : \begin{cases} \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ u \longmapsto \mathsf{S}(u). \end{cases}$$

C'est un endomorphisme de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

7. Premières propriétés.

(a) L'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ \alpha \longmapsto \alpha^{\bullet} \end{cases}$$

est-elle linéaire ?

(b) On note i l'application définie par

$$i : \begin{cases} \mathbb{C}[X] \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ P \longmapsto P(\bullet). \end{cases}$$

(i) L'application i est-elle linéaire ?

(ii) Montrer que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}[X] \arrow[r, "i"] \arrow[d, "T"'] & \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \arrow[d, "\mathsf{S}"] \\ \mathbb{C}[X] \arrow[r, "i"] & \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \end{tikzcd}$$

est commutatif.

8. Stabilité.

(a) Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$\mathsf{S}(P(\bullet) \times \alpha^{\bullet}) = \alpha \cdot T(P)(\bullet) \times \alpha^{\bullet}.$$

(b) En déduire que $\mathrm{PG}(\mathbb{C})$ est stable par S.

9. Exemple et non-exemple.

(a) Montrer que la suite $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas polygéométrique.

(b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles la suite $\big(\cos(n\theta)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est polygéométrique.

Partie III – Une preuve de liberté.

Dans cette partie, on fixe $p \in \mathbb{N}^*$ un entier non nul et $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{C}^*$ des nombres complexes deux à deux distincts et tous non nuls.

10. Un premier cas.
Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}^*$ des nombres complexes deux à deux distincts et tous non nuls.
Montrer que la famille

$$(\alpha^{\bullet}, \beta^{\bullet}, \gamma^{\bullet})$$

est libre.

11. On note

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{p-1} & \alpha_2^{p-1} & \cdots & \alpha_p^{p-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_p(\mathbb{C}).$$

Montrer que

$$(\alpha_1^{\bullet}, \dots, \alpha_p^{\bullet}) \text{ liée} \implies A \notin \mathrm{GL}_p(\mathbb{C}).$$

12. Montrer que la famille $(\alpha_1^{\bullet}, \dots, \alpha_p^{\bullet})$ est libre.

13. Soient $P_1, \dots, P_p \in \mathbb{C}[X]$ tels que

$$\sum_{i=1}^{p} P_i(\bullet) \times \alpha_i^{\bullet} = 0_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}}.$$

(a) Montrer que

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot T(P_i)(\bullet) \times \alpha_i^{\bullet} = 0_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}}.$$

(b) En déduire que

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \sum_{i=1}^{p} T_{\alpha_i, \lambda}(P_i)(\bullet) \times \alpha_i^{\bullet} = 0_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}}.$$

14. On note, pour $i \in [\![1, p]\!]$, $g_i \coloneqq \prod_{j=1}^{p} T_{\alpha_i, -\alpha_j}$.

(a) Soit $i \in [\![1, p]\!]$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall P \in \mathbb{C}_n[X], \ \ g_i(P) \in \mathbb{C}_{n-1}[X].$$

(b) De nouveau, soient $P_1, \dots, P_p \in \mathbb{C}[X]$ tels que $\sum_{i=1}^{p} P_i(\bullet) \times \alpha_i^{\bullet} = 0_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}}$.

Montrer que

$$\sum_{i=1}^{p} g_i(P_i)(\bullet) \times \alpha_i^{\bullet} = 0_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}}.$$

15. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'assertion

$$\mathscr{P}(n) \coloneqq \text{« } \forall P_1, \dots, P_p \in \mathbb{C}_n[X], \ \left(\sum_{i=1}^{p} P_i(\bullet) \times \alpha_i^{\bullet} = 0_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}} \implies \left(\forall i \in [\![1, p]\!], \ P_i = 0_{\mathbb{C}[X]} \right) \right) \text{ »}.$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathscr{P}(n)$ est vraie.

16. Soit $N \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille de suites

$$\left(\left(n^k \alpha_i^n \right)_{n \in \mathbb{N}} \right)_{\substack{0 \leqslant k \leqslant N \\ 1 \leqslant i \leqslant p}}$$

est libre.

Bilan

On a démontré que la famille de suites $\left((n^i \alpha^n)_{n \in \mathbb{N}} \right)_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ \alpha \in \mathbb{C}^*}}$ *est libre.*

Partie IV – Suites récurrentes.

Notations

- ▷ *Dans cette partie, on fixe* $p \in \mathbb{N}^*$ *et* $a_0, a_1, \dots, a_p \in \mathbb{C}$.
- ▷ *On considère l'ensemble*

$$E \coloneqq \left\{ (u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \forall n \geqslant 0,\ u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \dots + a_0 u_n \right\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

- ▷ *On note*

$$P \coloneqq X^p - a_{p-1}X^{p-1} - \dots - a_0 \in \mathbb{C}[X]$$
$$\text{et} \quad P(\mathsf{S}) \coloneqq \mathsf{S}^p - a_{p-1}\mathsf{S}^{p-1} - \dots - a_0 \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}} \in \mathrm{L}\Big(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\Big).$$

17. Montrer que $E = \ker P(\mathsf{S})$.

18. Une majoration.
Montrer que $\ker P(\mathsf{S})$ est de dimension finie et que $\dim(\ker P(\mathsf{S})) \leqslant p$.

19. Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Calculer $\ker(\mathsf{S} - \alpha \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}})$ et en donner une base.

20. Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Donner une base de $\ker(\mathsf{S} - \alpha \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}})^2$.

21. Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Donner une base de $\ker(\mathsf{S} - \alpha \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}})^p$.
On attend une démonstration.

22. Structure des suites définies par récurrence.
On écrit

$$P = \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{p_k}.$$

où $r \in \mathbb{N}^*$ et où $\forall k \in [\![1, r]\!]$, $\alpha_k \in \mathbb{C}$ et $p_k \in \mathbb{N}^*$.
On admet que

$$\mathsf{S}^p - \sum_{i=1}^{p-1} a_i \mathsf{S}^i = \prod_{k=1}^{r} (\mathsf{S} - \alpha_k \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}})^{p_k}.$$

On suppose que $\forall k \in [\![1, r]\!]$, $\alpha_k \neq 0$.

(a) Donner une base de E.

(b) En déduire que $E \subset \mathrm{PG}(\mathbb{C})$.

Partie V – Suites périodiques.

Définition et notation

▷ *Soient $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On dit que u* est p-périodique $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = u_n.$$

On note $\mathrm{Per}_p(\mathbb{C})$ *l'ensemble des suites p-périodiques.*

▷ *Dans cette partie, on fixe $p \in \mathbb{N}^*$.*

23. (a) Montrer que $\mathrm{Per}_p(\mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

(b) Montrer que $\mathrm{Per}_p(\mathbb{C})$ est de dimension finie.

(c) Donner une base de $\mathrm{Per}_p(\mathbb{C})$.

24. Montrer que $\mathrm{Per}_p(\mathbb{C}) \subset \mathrm{PG}(\mathbb{C})$.

25. On considère la suite u définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que $u = \lambda \cdot \alpha^{\bullet} + \mu \cdot \beta^{\bullet}$.

26. On considère la suite u définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est un multiple de } p \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer $q \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_q) \in (\mathbb{C}^*)^q$ et $(P_1, \dots, P_q) \in \mathbb{C}[X]^q$ tels que

$$u = \sum_{i=1}^{q} P_i(\bullet) \times \alpha_i^{\bullet}.$$

Partie VI – Espaces de dimension finie stables par S.

Soit E un sous-espace de dimension finie de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ stable par S.

27. On note S' la restriction de S à E.
Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $(\mu_0, \dots, \mu_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$ tels que

$$\mathsf{S}'^p = \sum_{i=0}^{p-1} \mu_i \mathsf{S}'^i.$$

28. Montrer qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall u \in E,\ \ \mathsf{S}^{N_0}(u) \in \mathrm{PG}(\mathbb{C}).$$

FIN DU SUJET.