DS 2

4 heures

- *Tout résultat ou raisonnement doit être clairement justifié, sauf mention du contraire.*
- *La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.*
- *La présentation de la copie sera prise en compte dans l'évaluation :*
  - ▷ *encadrez les résultats principaux ;*
  - ▷ *soulignez les résultats et arguments intermédiaires importants ;*
  - ▷ *soignez votre écriture ;*
  - ▷ *maintenez une marge dans vos copies, aérez vos copies ;*
  - ▷ *enfin, numérotez vos copies (et non vos pages).*
- *Les documents, calculatrices et autres appareils électroniques sont interdits.*
- *Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie en expliquant les initiatives que vous avez été amené à prendre.*
- *Ne rendez pas le sujet avec vos copies.*

Fonctions ouraliennes

Les parties de ce problème dépendent les unes des autres selon le schéma

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{I} & \longrightarrow & & & \mathbf{IV} \\ & & & & \searrow \\ & \mathbf{II} \longrightarrow & \mathbf{III} & \longrightarrow & \mathbf{V}. \end{array}$$

Partie I – Parties ouvertes.

Notations et définition

▷ *Si* $a \in \mathbb{C}$ *et si* $r > 0$, *on note*

$$\mathsf{B}(a, r) := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r \right\}$$

$$\textit{et} \quad \mathsf{B_f}(a, r) := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leqslant r \right\}.$$

▷ *Si* $U \subset \mathbb{C}$, *on dit que* U est ouverte (dans $\mathbb{C}$) $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\forall a \in U, \ \exists r > 0 : \mathsf{B}(a, r) \subset U.$$

▷ *On note* $\mathrm{Ouv}(\mathbb{C})$ *l'ensemble des parties ouvertes de* $\mathbb{C}$.

1. Soient $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. Représenter $\mathsf{B_f}(a, r)$ dans le plan complexe.

2. Soit $a \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$\forall r, s > 0, \quad r \leqslant s \implies \mathsf{B}(a, r) \subset \mathsf{B}(a, s).$$

3. Montrer que $\forall a \in \mathbb{C}, \ \{a\} \notin \mathrm{Ouv}(\mathbb{C})$.

4. Soit $a \in \mathbb{C}$ et soit $r > 0$.

(a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{C}, \quad x \in \mathsf{B}(a, r) \implies \mathsf{B}\big(x, r - |a - x|\big) \subset \mathsf{B}(a, r).$$

(b) Montrer que $\mathsf{B}(a, r) \in \mathrm{Ouv}(\mathbb{C})$.

5. Soient $U, V \in \mathrm{Ouv}(\mathbb{C})$. Montrer que $U \cap V \in \mathrm{Ouv}(\mathbb{C})$.

6. Soit I un ensemble non vide et soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille de parties de $\mathbb{C}$ telle que

$$\forall i \in I, \ U_i \in \mathrm{Ouv}(\mathbb{C}).$$

(a) Montrer que $\displaystyle\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathrm{Ouv}(\mathbb{C})$.

(b) Montrer par un contre-exemple qu'en général on n'a pas $\displaystyle\bigcap_{i \in I} U_i \in \mathrm{Ouv}(\mathbb{C})$.

Partie II – Fonctions ouraliennes.

Notations et définition

▷ *Si* $a \in \mathbb{C}$*, on note*

$$\mathbf{NE}(a) := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \mathrm{Re}(z) > \mathrm{Re}(a) \;\; et \;\; \mathrm{Im}(z) > \mathrm{Im}(a) \right\}$$

$$et \quad \mathbf{SO}(a) := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \mathrm{Re}(z) < \mathrm{Re}(a) \;\; et \;\; \mathrm{Im}(z) < \mathrm{Im}(a) \right\}.$$

▷ *Soit* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$*. On dit que* f est ouralienne $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\forall a \in \mathbb{C}, \forall z \in \mathbf{SO}(a), \quad f(z) \leqslant f(a).$$

7. Montrer que $\mathbf{SO}(-1) \neq \varnothing$.

8. Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On note

$$f : \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} \\ z \longmapsto \varphi(\mathrm{Re}(z)) \end{cases}$$

(a) Montrer que φ croissante $\implies$ f ouralienne.

(b) Montrer que f ouralienne $\implies$ φ croissante.

9. (a) Soit $a \in \mathbb{C}$ et soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$z \in \mathbf{SO}(a) \implies \mathrm{i}\overline{z} \in \mathbf{SO}(\mathrm{i}\overline{a}).$$

(b) Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ ouralienne. On note

$$g : \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} \\ z \longmapsto f(\mathrm{i}\overline{z}) \end{cases}$$

Montrer que g est ouralienne.

10. Soient $a, b \in \mathbb{C}$.

(a) Montrer que

$$\mathbf{NE}(a) \cap \mathbf{SO}(b) \neq \varnothing \implies b \in \mathbf{NE}(a).$$

(b) Montrer que

$$b \in \mathbf{NE}(a) \implies \mathbf{NE}(a) \cap \mathbf{SO}(b) \neq \varnothing.$$

Partie III – Points de rupture.

Notations et définitions

Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction ouralienne et soit* $d > 0$*.*

- *On dit que* a est un point de d-rupture de f $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\forall (x, y) \in \mathbf{SO}(a) \times \mathbf{NE}(a), \ \ f(y) - f(x) \geqslant d.$$

- *On note* $\mathsf{R}_d(f)$ *l'ensemble des points de* d*-rupture de* f*.*
- *On note*

$$\mathsf{R}(f) \coloneqq \bigcup_{d>0} \mathsf{R}_d(f).$$

- *Si* $a \in \mathsf{R}(f)$*, on dit que* a est un point de rupture de f.

11. Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction ouralienne. Montrer que

$$\forall d_1, d_2 > 0, \quad d_1 \leqslant d_2 \implies \mathsf{R}_{d_2}(f) \subset \mathsf{R}_{d_1}(f).$$

12. Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction ouralienne. Montrer que

$$\mathsf{R}(f) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathsf{R}_{\frac{1}{n}}(f).$$

13. Soient $f, g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions ouraliennes.

(a) Soit $d > 0$. Montrer que

$$\mathsf{R}_d(f) \cup \mathsf{R}_d(g) \subset \mathsf{R}_d(f + g).$$

(b) En déduire que

$$\mathsf{R}(f) \cup \mathsf{R}(g) \subset \mathsf{R}(f + g).$$

Partie IV – Ouverts denses.

Définition et notations

▷ *Si* $X \subset \mathbb{C}$, *on dit que* X est dense (dans $\mathbb{C}$) $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$

$$\forall a \in \mathbb{C}, \forall \varepsilon > 0, \exists x \in X : |a - x| \leqslant \varepsilon.$$

▷ *On note*

$$\mathsf{Boules} := \left\{ \mathsf{B}(a, r) \ ; \ (a, r) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+^* \right\}$$

$$\textit{et} \quad \mathsf{Boules}_\mathsf{f} := \left\{ \mathsf{B}_\mathsf{f}(a, r) \ ; \ (a, r) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+^* \right\}.$$

14. Soit X une partie de $\mathbb{C}$.

(a) Montrer que

$$X \text{ dense dans } \mathbb{C} \iff \forall B \in \mathsf{Boules}, \ B \cap X \neq \varnothing.$$

(b) Montrer que

$$X \text{ dense dans } \mathbb{C} \iff \mathscr{P}(\mathbb{C} \setminus X) \cap \mathsf{Boules} = \varnothing.$$

15. (a) Soient U, V des ouverts denses de $\mathbb{C}$. Montrer que $U \cap V$ est dense dans $\mathbb{C}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $U_1, \dots, U_n$ des ouverts denses de $\mathbb{C}$.

Montrer que $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ est dense dans $\mathbb{C}$.

16. Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)_n, (b_n)_n \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ ]a_{n+1}, b_{n+1}[\ \subset \ ]a_n, b_n[\quad \text{et} \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}}]a_n, b_n[= \varnothing.$$

On admet la propriété suivante :

Théorème. *Soit* $(a_n)_n \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$ *et soit* $(r_n)_n \in (\mathbb{R}_+^*)^\mathbb{N}$ *tels que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathsf{B}_\mathsf{f}(a_{n+1}, r_{n+1}) \subset \mathsf{B}_\mathsf{f}(a_n, r_n).$$

Alors, $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathsf{B}_\mathsf{f}(a_n, r_n) \neq \varnothing$.

17. Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses de $\mathbb{C}$. Montrer que $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ est dense dans $\mathbb{C}$.

Partie V – Densité des points réguliers.

Cette partie n'est à aborder que si l'ensemble du reste du sujet a été traité.

Dans cette partie, on fixe $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction ouralienne.

Définition et notation

- ▷ *Si* $a \in \mathbb{C}$, *on dit que* a est un point régulier de f $\overset{\Delta}{\text{ssi}}$ $a \notin \mathsf{R}(f)$.
- ▷ *On note* $\mathsf{Reg}(f)$ *l'ensemble des points réguliers de* f.

18. Soit $d > 0$. Montrer que $\mathbb{C} \setminus \mathsf{R}_d(f)$ est dense dans $\mathbb{C}$.

19. Soit $d > 0$. Montrer que $\mathbb{C} \setminus \mathsf{R}_d(f)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.

20. Montrer que $\mathsf{Reg}(f)$ est dense dans $\mathbb{C}$.

FIN DU SUJET.