

Chapitre 8 : Fonctions usuelles

Dans ce chapitre, sauf mention explicite, I désigne un intervalle de \mathbb{R} .

I. Bijection et fonction réciproque

Déf. 1

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. L'image de I par f est

$$f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}.$$

Exemple 1

Soit $f : [0;2] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x - 2$.

Pour tout $x \in [0;2]$, $f'(x) = 2x + 1$.

f' est strictement positive sur $[0;2]$, donc f est strictement croissante :

x	0	2
$f(x)$	-2	4

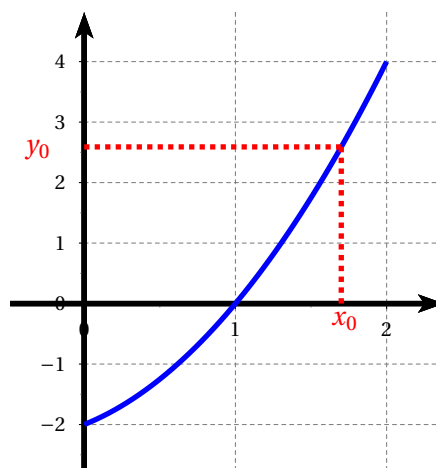
L'image de l'intervalle $[0;2]$ par f est

$$f([0;2]) = [-2;4].$$

Notons par ailleurs que :

- tout nombre $x \in [0;2]$ a une image dans $[-2;4]$;
- tout nombre $y_0 \in [-2;4]$ a un unique antécédent x_0 dans $[0;2]$.

Dans cette situation, on dit que f réalise une bijection de $[0;2]$ sur $[-2;4]$.



Définition 2

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f réalise une bijection de I sur J si :

- tout nombre $x \in I$ a une image $f(x)$ dans J ;
- tout nombre $y_0 \in J$ a un unique antécédent x_0 dans I .

De façon plus concise :

- $f(I) \subset J$;^a
- $\forall y_0 \in J, \exists ! x_0 \in I, f(x_0) = y_0$.

a. Rappel : \subset se lit « est inclus dans ».

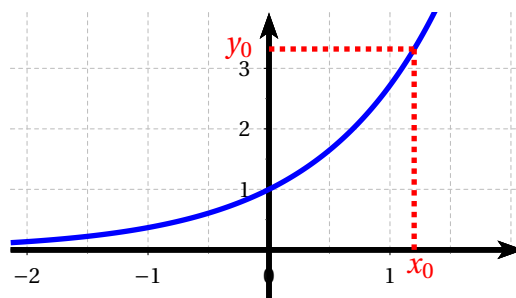
Exemple 2

La fonction \exp réalise une bijection de $]-\infty; +\infty[$ sur $]0; +\infty[$. On peut le voir

- soit sur le tableau de variations,
- soit sur la courbe représentative.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$\exp(x)$		y_0	$+\infty$

Diagramme du tableau de variations : une flèche pointe de 0 vers y_0 et une autre flèche pointe de x_0 vers $+\infty$.



Proposition 1

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et strictement monotone, alors :

1. $f(I)$ est un intervalle.
2. f réalise une bijection de I sur $f(I)$.



Exercices

Exercices 1 à 3

Définition 3



On suppose qu'une fonction f réalise une bijection de I sur J . Tout élément $y \in J$ a un unique antécédent x dans I . On pose alors $x = f^{-1}(y)$. On dit que la fonction

$$f^{-1} : J \rightarrow I, y \mapsto f^{-1}(y)$$

est la réciproque de f .

Exemple 3

La fonction \exp réalise une bijection de \mathbb{R} sur $]0; +\infty[$. Quelle est sa réciproque?

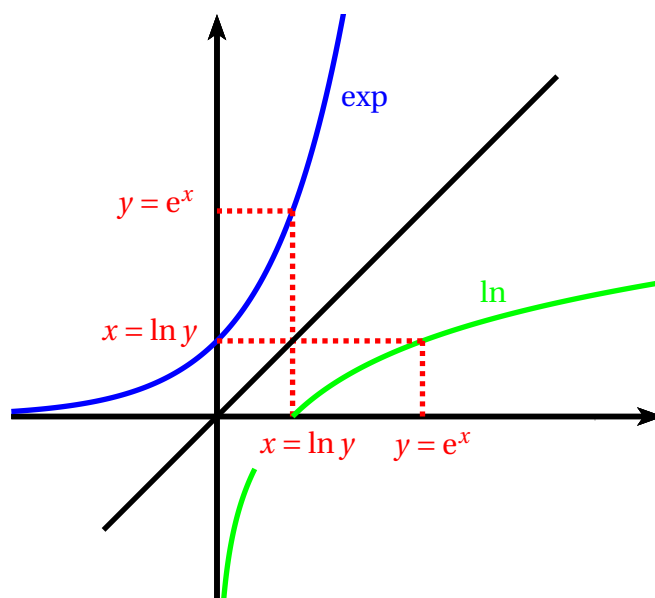
Pour le savoir, on prend y dans $]0; +\infty[$ et on cherche son antécédent par \exp ; autrement dit, on résout l'équation

$$e^x = y.$$

On sait bien que la solution est

$$x = \ln y,$$

donc la réciproque de la fonction \exp est la fonction \ln . Avec les notations de la définition 3, si on pose $f = \exp$, alors $f^{-1} = \ln$.





Méthode

Dans la situation où f réalise une bijection de I sur J , pour déterminer sa réciproque, on prend y dans J et on résout l'équation $f(x) = y$. La solution $x = \dots$ nous donne l'expression de f^{-1} .

Proposition 2

Soit $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow I$. La fonction f réalise une bijection de réciproque g si, et seulement si :

$$\forall x \in I, g \circ f(x) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in J, f \circ g(y) = y.$$

Remarque.

La courbe d'une fonction et de sa réciproque sont toujours symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exemple 4

Les fonctions \exp et \ln sont réciproques l'une de l'autre et l'on a bien

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in]0; +\infty[, e^{\ln y} = y.$$



Exercices

Exercices 4 à 6

Théorème 1

Soit f une bijection de I sur J , soit $y_0 \in J$ et soit $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en y_0 et

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Remarques.

- Le théorème est illustré sur la figure ci-contre.
- Il est plus habituel de noter x la variable. Puisque $x_0 = f^{-1}(y_0)$ dans le théorème ci-dessus, on peut écrire :

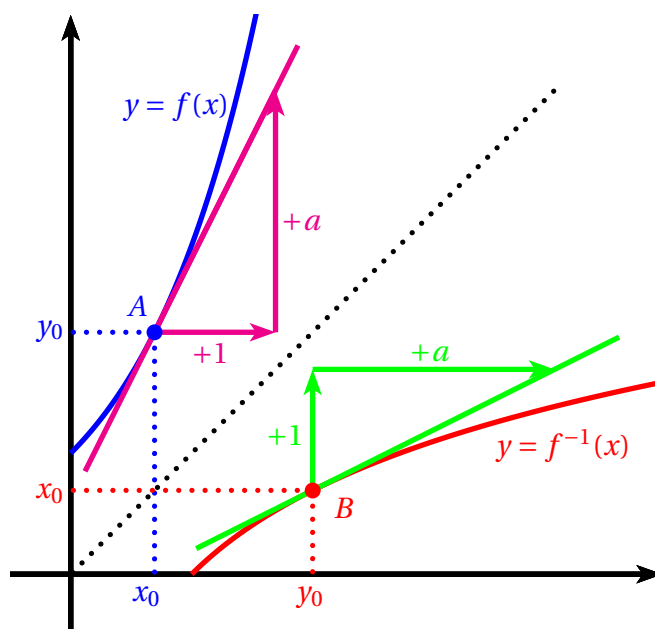
$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$



Exercices

Exercices 7 et 8

Par raison de symétrie, les pentes des tangentes en A et en B sont inverses l'une de l'autre : la pente de la tangente en A vaut a , celle de la tangente en B vaut $\frac{1}{a}$.



II. Fonctions puissances

Dans cette section, on se réfère aux propriétés de l'exponentielle et du logarithme rappelées dans le chapitre 3 et on utilise ces connaissances pour donner la définition rigoureuse des puissances. On explique par exemple ce que signifie $5^{\frac{1}{2}}$, ou 3^0 .

Déf. 4

Pour tout $x > 0$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

Exemple 5

En prenant la définition ci-dessus : $2^3 = e^{3 \ln 2}$. C'est étonnant, car cela semble très éloigné de la définition habituelle. Et pourtant, d'après les propriétés du logarithme et de l'exponentielle :

$$2^3 = e^{3 \ln 2} = e^{\ln 2 + \ln 2 + \ln 2} = e^{\ln 2} \times e^{\ln 2} \times e^{\ln 2} = 2 \times 2 \times 2 = 8.$$

Ouf, on retombe bien sur la définition habituelle!

L'exemple qui précède se généralise :

Proposition 3

Pour tout $x > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}$.

Remarques.

- Pour tout $x > 0$: $x^0 = e^{0 \ln x} = e^0 = 1$.
- On retrouve sans peine toutes les propriétés des puissances (entières) que vous avez vues au collège, et qui sont généralisées dans la proposition 4 (ci-dessous).
- Pour tout $x > 0$, $x^\alpha > 0$ (puisque c'est une exponentielle).

Proposition 4

Pour tous $x > 0$, $y > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{llll} 1. & (xy)^\alpha = x^\alpha \times y^\alpha. & 2. & \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}. & 3. & x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \times x^\beta. & 4. & (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}. \end{array}$$

On démontre le point 1 (les autres points se démontrent de façon analogue) :

Démonstration (du point 1)

D'après la définition 4 et d'après les propriétés du logarithme et de l'exponentielle :

$$(xy)^\alpha = e^{\alpha \ln(xy)} = e^{\alpha(\ln x + \ln y)} = e^{\alpha \ln x + \alpha \ln y} = e^{\alpha \ln x} \times e^{\alpha \ln y} = x^\alpha \times y^\alpha.$$

L'intérêt principal de la définition 4 est de calculer x^α lorsque α n'est pas un entier. Voyons cela

avec des exemples :

Exemples 6

1. Combien vaut $a = 5^{\frac{1}{2}}$? Pour le savoir, on calcule a^2 en utilisant la proposition 4 :

$$a^2 = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 5^{\frac{1}{2} \times 2} = 5^1 = 5.$$

Or le seul nombre positif dont le carré vaut 5 est $\sqrt{5}$, donc

$$a = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}.$$

Avec le même calcul, on démontre facilement que pour tout $x > 0$, $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

2. $2^{\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}} \times (2^2)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}} = 2^{\frac{3}{6} + \frac{4}{6}} = 2^{\frac{7}{6}}$.

Remarques.

- Dans la définition 4, x est un réel strictement positif. On s'autorise également à calculer x^α lorsque x est strictement négatif, mais uniquement quand α est un entier, en reprenant la définition habituelle (celle du collège). On pose également $0^\alpha = 0$ pour tout $\alpha > 0$.
- Le point 1 des exemples 6 se généralise : si $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x^{\frac{1}{n} \times n} = x^1 = x$. On dit que $x^{\frac{1}{n}}$ est la racine n -ième de x ; on note $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ (voir exercices).



Exercices

Exercices 9 à 13

Proposition 5

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction

$$f :]0; +\infty[\rightarrow]0; +\infty[, x \mapsto x^\alpha$$

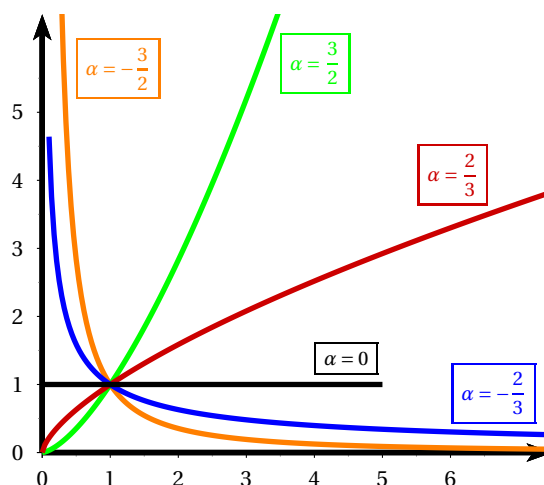
est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Proposition 6

La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est :

- strict. croissante sur $]0; +\infty[$ si $\alpha > 0$;
- strict. décroissante sur $]0; +\infty[$ si $\alpha < 0$;
- constante égale à 1 si $\alpha = 0$.



Proposition 7 (croissances comparées)

Soient $\alpha > 0, \beta > 0$.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-\beta x} = 0.$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{\beta x} = 0.$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0.$

4. $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} x^\alpha \ln x = 0.$

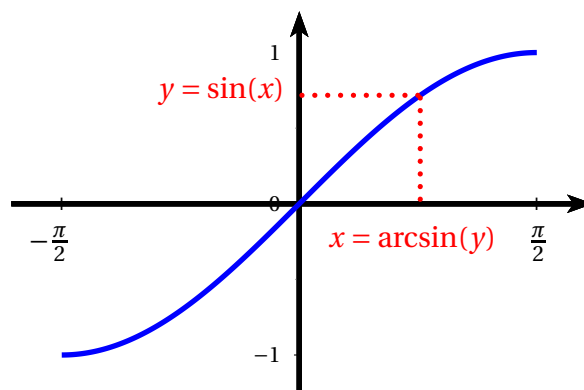
III. Fonctions circulaires réciproques

On commence avec la fonction arcsin, dont on détaille l'étude. On ira ensuite plus rapidement pour arccos et arctan.

Définition 5

La restriction de la fonction \sin à $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1; 1]$. On appelle arcsin sa fonction réciproque. On a donc :

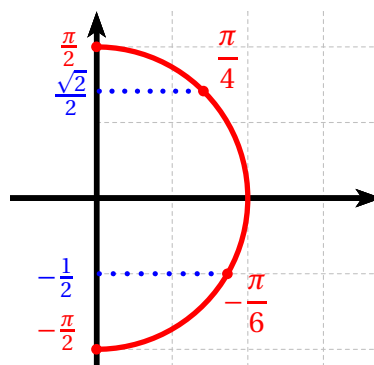
- $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \arcsin(\sin x) = x.$
- $\forall y \in [-1; 1], \sin(\arcsin y) = y.$



Remarque. On note $\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]}$ la restriction de \sin à $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Exemples 7

1. $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$
2. $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$, donc $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}.$



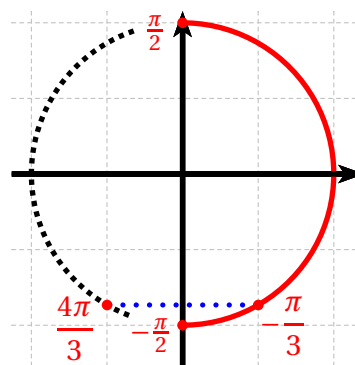
Attention

On n'a pas toujours $\arcsin(\sin x) = x$! Cela n'est vrai que quand $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Par exemple :

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = -\frac{\pi}{3}$$

(on se ramène dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ pour pouvoir calculer).



Exercices

Exercices 14 et 15

Proposition 8

La fonction arcsin est dérivable sur $] -1; 1[$ et pour tout $x \in] -1; 1[$:

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration (🦋)

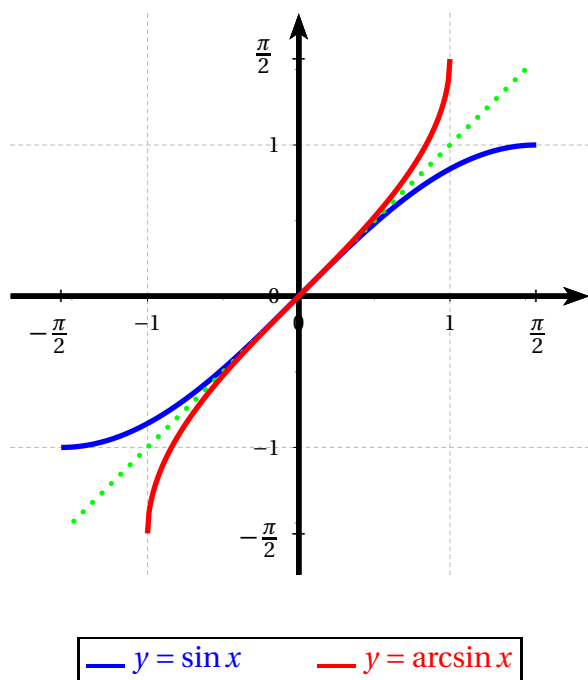
Soit $y_0 \in] -1; 1[$ et soit $x_0 = \arcsin(y_0)$; on a donc $x_0 \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.

La fonction $x \mapsto \sin x$ est dérivable en x_0 et $(\sin)'(x_0) = \cos x_0$. Or $\cos x_0 \neq 0$, car $x_0 \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, donc d'après le théorème 1, arcsin est dérivable en y_0 et

$$(\arcsin)'(y_0) = \frac{1}{\cos(x_0)} = \frac{1}{\cos(\arcsin(y_0))}.$$

On a vu dans l'exercice 15 que $\cos(\arcsin(y_0)) = \sqrt{1-y_0^2}$, donc on obtient la formule attendue :

$$(\arcsin)'(y_0) = \frac{1}{\cos(\arcsin(y_0))} = \frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}}.$$



x	-1	1
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$+$
$\arcsin x$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$

⚠ arcsin n'est dérivable ni en 1, ni en -1 (les tangentes à la courbe sont verticales).



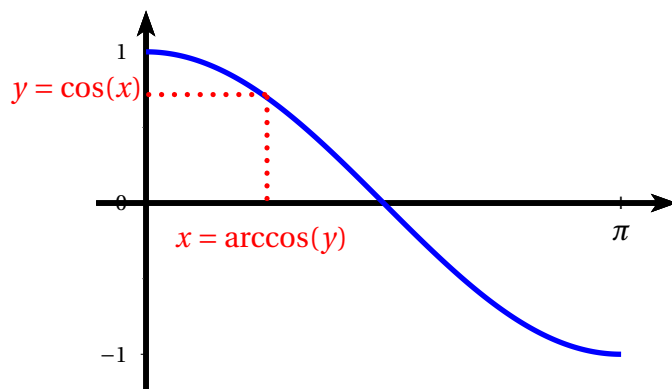
Exercices

Exercices 16 et 17

Définition 6

La restriction de la fonction \cos à $[0; \pi]$ réalise une bijection de $[0; \pi]$ sur $[-1; 1]$. On appelle \arccos sa fonction réciproque. On a donc :

- $\forall x \in [0; \pi], \arccos(\cos x) = x.$
- $\forall y \in [-1; 1], \cos(\arccos y) = y.$

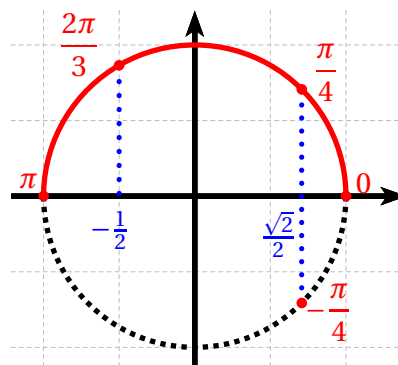


Attention

L'ensemble de définition des fonctions \arccos et \arcsin n'est pas le même.

Exemples 8

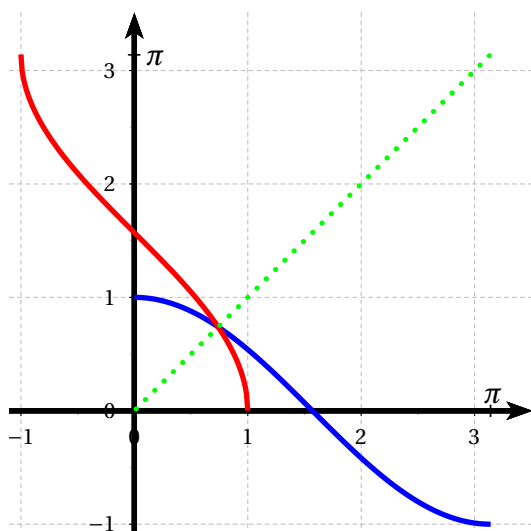
1. $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$
2. $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$, donc $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}.$
3. $\blacktriangle \arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \arccos\left(\cos \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$



Proposition 9

La fonction \arccos est dérivable sur $] -1; 1[$ et pour tout $x \in] -1; 1[$:

$$(\arccos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$



— $y = \cos x$ — $y = \arccos x$

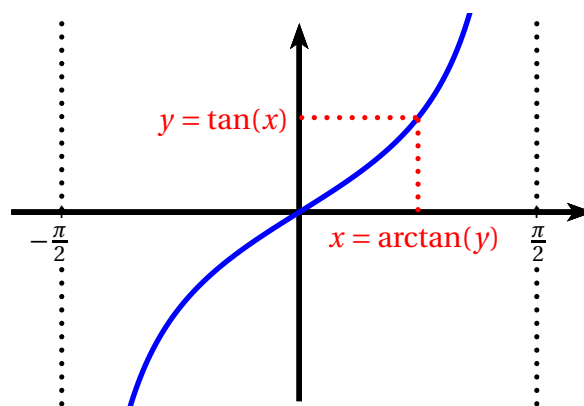
x	-1	1
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		
$\arccos x$	π	0

\blacktriangle \arccos n'est dérivable ni en 1 , ni en -1

Définition 7

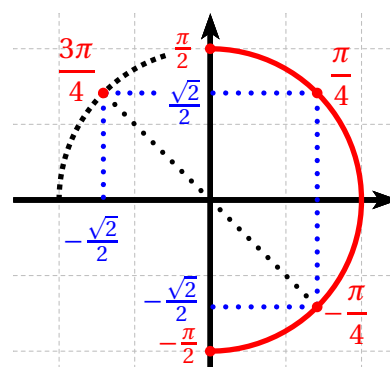
La restriction de la fonction \tan à $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ sur \mathbb{R} . On appelle \arctan sa fonction réciproque. On a donc :

- $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, $\arctan(\tan x) = x$.
- $\forall y \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan y) = y$.



Exemples 9

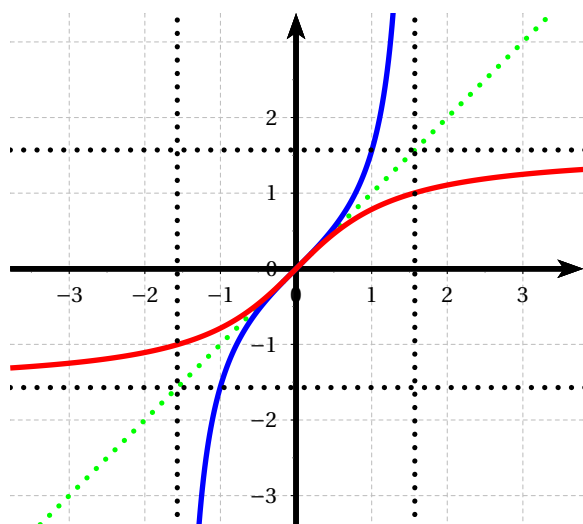
1. $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, donc $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.
2. ⚠ La fonction \tan est π -périodique, donc $\arctan(\tan(\frac{3\pi}{4})) = \arctan(\tan(-\frac{\pi}{4})) = -\frac{\pi}{4}$.



Proposition 10

La fonction \arctan est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$



— $y = \tan x$ — $y = \arctan x$

x	$-\infty$	$+\infty$
$\frac{1}{1+x^2}$	+	
$\arctan x$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$



Exercices

Exercices 18 à 21

IV. Injection, surjection, bijection

On revient sur la notion de bijection, que nous avons étudiée dans la section 1.

Définition 8

Une fonction $f : I \rightarrow J$ est dite injective si deux réels distincts dans I ont des images distinctes.

De façon plus concise :

$$\forall x_1 \in I, \forall x_2 \in I, (x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2))$$

Remarque. Il revient au même de dire que tout $y_0 \in J$ a au plus un antécédent dans I .

Définition 9

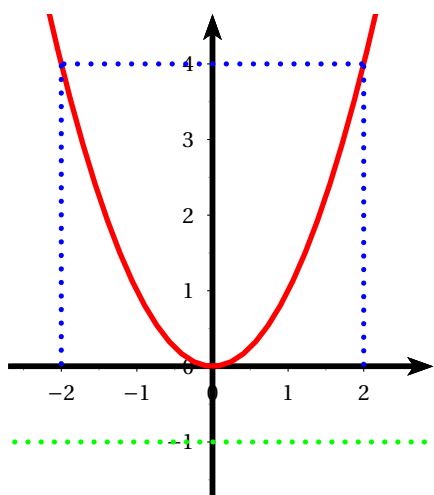
Une fonction $f : I \rightarrow J$ est dite surjective si tout réel dans J a au moins un antécédent dans I .

De façon plus concise :

$$\forall y_0 \in J, \exists x_0 \in I, f(x_0) = y_0.$$

Exemple 10

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.



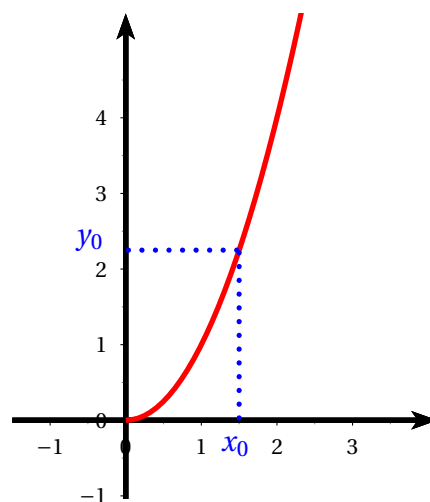
La fonction f n'est ni injective, ni surjective :

- elle n'est pas injective, car (par exemple) -2 et 2 ont la même image :

$$f(-2) = f(2) = 4.$$

- elle n'est pas surjective, car (par exemple) -1 n'a pas d'antécédent.

Soit $f : [0; +\infty[\rightarrow [0; +\infty[, x \mapsto x^2$.



La fonction f est à la fois injective et surjective : tout $y_0 \in [0; +\infty[$ a un unique antécédent dans $[0; +\infty[$. Cet antécédent est $x_0 = \sqrt{y_0}$.

On dit que f est bijective.

On revient vers la notion de bijection :

Déf. 10

Une fonction $f : I \rightarrow J$ est dite bijective si elle est à la fois injective et surjective. Autrement dit : tout réel $y_0 \in J$ a exactement un antécédent x_0 dans I . Ou de façon plus concise :

$$\forall y_0 \in J, \exists! x_0 \in I, f(x_0) = y_0.$$

On retrouve bien la définition de la section 1.

V. Exercices

Exercice 1 (III).

Soit $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{-x}$.

1. Construire le tableau de variations de f en faisant apparaître la limite en $+\infty$.
2. Recopier et compléter les pointillés :

f réalise une bijection de sur

Exercice 2 (III).

Soit $f : [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin x$.

1. Construire le tableau de variations de f .
2. Recopier et compléter les pointillés :

f réalise une bijection de sur

Exercice 3 (III).

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow]0; +\infty[, x \mapsto x^2$.

La fonction f réalise-t-elle une bijection de \mathbb{R} sur $]0; +\infty[$?

Exercice 4 (III).

On reprend la fonction de l'exercice 1. Quelle est la bijection réciproque ?

Exercice 5 (III).

Soit $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln(1+x)$.

1. Construire le tableau de variations de f en faisant apparaître la limite en $+\infty$.
2. Recopier et compléter les pointillés :

f réalise une bijection de sur

3. Déterminer la bijection réciproque.

Exercice 6 (III).

Soient $f :]0; +\infty[\rightarrow]0; +\infty[, x \mapsto x^2$ et $g :]0; +\infty[\rightarrow]0; +\infty[, x \mapsto \sqrt{x}$.

Prouver que les fonctions f et g sont les réciproques l'une de l'autre. Construire leurs courbes représentatives dans un même repère.

Exercice 7 (VIII).

Soit $y_0 \in]0; +\infty[$. En utilisant le théorème 1, prouver que la fonction \ln est dérivable en y_0 et que $(\ln)'(y_0) = \frac{1}{y_0}$.

Exercice 8 (VIII).

Soit $y_0 \in]0; +\infty[$. En utilisant le théorème 1, prouver que la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable en y_0 et calculer $g'(y_0)$.

Exercice 9 (III).

1. Prouver que les nombres suivants sont égaux :

- $A = 2^{\frac{3}{10}} \times 2^{\frac{1}{5}}$.
- $B = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^3 \times 2^{-1}$.
- $C = \frac{4^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{5}{6}}}$.

2. Démontrer que pour tout $x \geq 0$: $x^{\frac{3}{2}} = x\sqrt{x}$.

Exercice 10 (III).

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1. Calculer la dérivée de la fonction $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^\alpha$.
2. Construire le tableau de variations de f et calculer ses limites en 0 et en $+\infty$. On distinguera les cas $\alpha > 0$ et $\alpha < 0$.

Exercice 11.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la réciproque de la fonction $f :]0; +\infty[\rightarrow]0; +\infty[, x \mapsto x^n$.
2. Calculer $9^{\frac{1}{2}}$ et $1000^{\frac{1}{3}}$.

Exercice 12 (VIII).

Soit $\alpha > 0$. En utilisant l'un des résultats de croissance comparée du chapitre 3, démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$.

Exercice 13 (III VIII).

Soit $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^x$.

1. Prouver que $f'(x) = (\ln x + 1)x^x$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.
2. Construire le tableau de variations de f . Calculer ses limites en 0 et en $+\infty$.

Exercice 14 (III).

Calculer :

1. $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$.
2. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
3. $\sin(\arcsin(0,85))$.
4. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$.
5. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$.
6. $\cos(2\arcsin(0,5))$.

Exercice 15 (III).Soit $x \in [-1; 1]$

1. Quel est le signe de $\cos(\arcsin x)$?
2. Compléter les pointillés :

$$\cos^2(\arcsin x) + \sin^2(\arcsin x) = \dots\dots$$

3. En déduire que

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}.$$

Exercice 16 (III).Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \arcsin(\sin x)$.

1. Étudier la parité et la périodicité de f .
2. Soit $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$. Combien vaut $f(x)$?
3. Soit $x \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$. Encadrer $\pi - x$, puis prouver que $f(x) = \pi - x$.
4. Construire la courbe représentative de la fonction f .

Exercice 17 (III).

Démontrer l'égalité :

$$\arcsin\left(\frac{7}{25}\right) = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) - \arcsin\left(\frac{3}{5}\right).$$

Indication : Calculer le sin de chacun des deux membres.**Exercice 18 (III).**

Calculer :

1. $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$.
2. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
3. $\cos(\arccos(0,85))$.
4. $\arccos\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$.
5. $\arccos\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right)$.
6. $\cos(2\arccos(0,5))$.

Exercice 19 (III).Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \arccos(\cos x)$.

1. Étudier la parité et la périodicité de f .
2. Soit $x \in [0; \pi]$. Combien vaut $f(x)$?
3. Construire la courbe représentative de la fonction f .

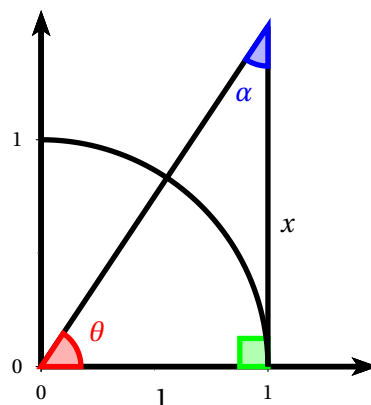
Exercice 20 (III).

Calculer :

1. $\arctan(-1)$.
2. $\arctan(\sqrt{3})$.
3. $\tan(\arctan(10))$.
4. $\arctan\left(\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.

Exercice 21.

1. Sur la figure ci-dessous, exprimer $\tan \theta$ et $\tan \alpha$ en fonction de x .



2. Compléter les pointillés : pour tout $x > 0$,

$$\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \dots\dots$$