

---

# Chapitre 13 : Polynômes

---

Dans tout le chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Les éléments de  $\mathbb{K}$  sont appelés des scalaires.

## I. Généralités

### Définition 1

- On appelle polynôme toute expression de la forme

$$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n = \sum_{k=0}^n a_k X^k,$$

où les  $a_k$  sont des scalaires appelés coefficients de  $P$ , et  $X$  (l'indéterminée) peut désigner un scalaire, une matrice, une fonction, etc.

- La fonction polynomiale associée est la fonction

$$x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

**Remarque.** On étudiera uniquement la situation où  $X$  est un scalaire. On identifiera le polynôme et la fonction polynomiale. On notera donc  $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  en lieu et place de  $x \mapsto$

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

### Exemples 1

1.  $P(X) = 2X^2 - X + 1$  est un polynôme, dont les coefficients sont  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = -1$ ,  $a_2 = 2$ .
2.  $Q(X) = X^3 + 1 = 1 + 0X + 0X^2 + 1X^3$  est un polynôme.

### Définition 2

On appelle :

- Polynôme nul le polynôme  $P(X) = 0$ .
- Polynôme constant tout polynôme de la forme  $P(X) = a_0$ , où  $a_0$  est un scalaire.
- Monôme un polynôme de la forme  $P(X) = a_k X^k$ , où  $a_k$  est un scalaire.

### Définition 3

- Si  $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$ , avec  $a_n \neq 0$ , on dit que le degré de  $P$  est égal à  $n$ .  
Le scalaire  $a_n$  est appelé coefficient dominant de  $P$ .
- Le polynôme  $P$  est dit unitaire (ou normalisé) si son coefficient dominant est égal à 1.
- Par convention, le degré du polynôme nul est égal à  $-\infty$  :  
 $\deg(0) = -\infty$ .
- On note  $\deg(P)$  le degré d'un polynôme  $P$ .

### Exemples 2

1. Le polynôme  $P(X) = 2X^2 - X + 1$  est de degré 2.
2. Le polynôme  $Q(X) = X^3 + 1$  est un polynôme unitaire de degré 3.

### Déf. 4

- On note  $\mathbb{K}[X]$  l'ensemble des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .
- Si  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathbb{K}_n[X]$  l'ensemble des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$  de degré **au plus**  $n$ .

### Exemple 3

Soient  $P(X) = 2X^2 - X + 1$  et  $Q(X) = X^3 + 1$ . Alors  $P \in \mathbb{R}_2[X]$  et  $Q \in \mathbb{R}_3[X]$ .  
Mais on a aussi  $P \in \mathbb{R}_3[X]$ , car  $\deg(P) \leq 3$ .

On peut ajouter, soustraire, multiplier ou composer des polynômes, comme on le fait pour n'importe quelle fonction. Il y a tout de même quelque chose de particulier : lorsqu'on applique ces opérations à deux polynômes, on obtient encore un polynôme.

### Proposition 1

La somme, la différence, le produit et la composée de deux polynômes est un polynôme.

### Exemple 4

On pose  $P(X) = 2X^2 - X - 1$  et  $Q(X) = X^3 + 1$ . Alors :

- |   |  |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>P(X) + Q(X) = 2X^2 - X - 1 + X^3 + 1 = X^3 + 2X^2 - X</math>.<br/>Le polynôme <math>P + Q</math> est de degré 3.</li> <li>• <math display="block">\begin{aligned} P(X) \times Q(X) &amp;= (2X^2 - X - 1)(X^3 + 1) \\ &amp;= 2X^2 \times X^3 + 2X^2 \times 1 - X \times X^3 \\ &amp;\quad - X \times 1 - 1 \times X^3 - 1 \times 1 \\ &amp;= 2X^5 + 2X^2 - X^4 - X - X^3 - 1 \\ &amp;= 2X^5 - X^4 - X^3 + 2X^2 - X - 1. \end{aligned}</math></li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Le polynôme <math>P \times Q</math> est de degré <math>2 + 3 = 5</math>.</li> <li>• <math display="block">\begin{aligned} P \circ Q(X) &amp;= 2(X^3 + 1)^2 - (X^3 + 1) - 1 \\ &amp;= 2\left((X^3)^2 + 2 \times X^3 \times 1 + 1^2\right) - X^3 - 1 - 1 \\ &amp;= 2X^6 + 4X^3 + 2 - X^3 - 2 \\ &amp;= 2X^6 + 3X^3 \end{aligned}</math><br/>Le polynôme <math>P \circ Q</math> est de degré <math>2 \times 3 = 6</math>.</li> </ul> |
|---|--|

### Proposition 2

Si  $P$  et  $Q$  sont deux polynômes, alors :

1.  $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$ .
2.  $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$ .

### Remarques.

- Le point 1 de la proposition 2 précédente pose problème si l'un des deux polynômes est nul. Mais il reste vrai si l'on adopte les conventions

$$(-\infty) + n = n + (-\infty) = (-\infty) + (-\infty) = -\infty.$$

### Remarques.

- ⚠  $\deg(P + Q)$  n'est pas forcément égal à  $\max(\deg(P), \deg(Q))$ .  
Par exemple, si  $P(X) = X + 1$  et  $Q(X) = -X + 1$ , alors  $P$  et  $Q$  sont de degré 1, mais leur somme  $P(X) + Q(X) = 2$  est de degré 0.
- Le point 2 de la proposition 2 s'interprète en disant que  $\mathbb{K}_n[X]$  est stable par addition.



### Exercices

Exercices 1 à 5

## II. Arithmétique des polynômes

Déf. 5

Soient  $A, B$  dans  $\mathbb{K}[X]$ , avec  $B \neq 0$ . S'il existe  $C$  dans  $\mathbb{K}[X]$  tel que  $A = B \times C$ , on dit que  $A$  est un multiple de  $B$ , ou que  $B$  est un diviseur de  $A$ . On note  $B|A$ .

### Exemple 5

$(X+1)(X-3) = X^2 - 2X - 3$ , donc  $X+1$  et  $X-3$  sont des diviseurs de  $X^2 - 2X - 3$ .

### Remarque.

Tout polynôme constant non nul divise n'importe quel autre polynôme. Par exemple, 2 divise  $X^2 - 2X - 3$ , car

$$X^2 - 2X - 3 = 2 \left( \frac{1}{2}X^2 - X - \frac{3}{2} \right).$$

### Proposition 3

Soient  $A, B$  dans  $\mathbb{K}[X]$ , avec  $A \neq 0$ . Si  $B|A$  alors  $\deg(B) \leq \deg(A)$ .

### Proposition 4 (division euclidienne)

Soient  $A, B$  dans  $\mathbb{K}[X]$ , avec  $B \neq 0$ . Il existe un unique couple  $Q, R$  dans  $\mathbb{K}[X]$  tel que  $A = BQ + R$  et  $\deg(R) < \deg(B)$ .

On dit que  $Q$  est le quotient et  $R$  le reste dans la division euclidienne de  $A$  par  $B$ .

Pour déterminer  $Q$  et  $R$ , on pose la division :

### Exemple 6

On effectue la division euclidienne de  $A(X) = 2X^3 - 5X^2 + 5X - 4$  par  $B(X) = X^2 - 2X + 1$  :

$$\begin{array}{r|l}
 2X^3 - 5X^2 + 5X - 4 & X^2 - 2X + 1 \\
 \underline{2X^3 - 4X^2 + 2X} & 2X - 1 \\
 -X^2 + 3X - 4 & \\
 \underline{-X^2 + 2X - 1} & \\
 X - 3 & 
 \end{array}$$

Conclusion :  $A = BQ + R$ , avec

$$Q(X) = 2X - 1, \quad R(X) = X - 3.$$

### Remarques.

- On s'arrête quand le degré du reste est strictement inférieur à celui de  $B$ .
- On descend bien tous les termes à chaque étape dans la colonne de gauche.

### Proposition 5

Dans la situation de la division euclidienne, on a l'équivalence :

$$A \text{ divisible par } B \iff R = 0.$$



### Exercices

Exercices 6 à 10

## III. Racines d'un polynôme

Déf.6

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ . On dit que  $\alpha \in \mathbb{K}$  est une racine de  $P$  si  $P(\alpha) = 0$ .

### Exemple 7

Le polynôme  $P(X) = X^3 + X$  peut être vu comme un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  ou comme un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$ .

$P(X) = X(X^2 + 1)$ , donc  $P$  a :

- une seule racine dans  $\mathbb{R}$ , qui est 0 ;
- trois racines dans  $\mathbb{C}$  : 0,  $i$  et  $-i$ .

### Proposition 6

Soient  $P \in \mathbb{K}[X]$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$ . On a l'équivalence :

$$\alpha \text{ racine de } P \iff (X - \alpha) | P(X).$$

### Démonstration

On pose la division euclidienne de  $P(X)$  par  $X - \alpha$  :

$$P(X) = (X - \alpha)Q(X) + R(X).$$

On sait que  $\deg(R) < \deg(X - \alpha)$ , donc  $R$  est un polynôme constant :

$$\exists c \in \mathbb{K}, R(X) = c.$$

La division euclidienne se réécrit alors :

$$P(X) = (X - \alpha)Q(X) + c.$$

Il reste à remarquer que  $P(\alpha) = (\alpha - \alpha)Q(\alpha) + c = c$  pour pouvoir conclure à l'aide d'équivalences :

$$\alpha \text{ racine de } P \iff P(\alpha) = 0 \iff c = 0 \iff R(X) = 0 \iff (X - \alpha) | P(X).$$



## Exercices

Exercices 11 à 17

Déf. 7

Étant donnée une racine  $\alpha$  d'un polynôme  $P$  non nul, on définit son ordre de multiplicité comme le plus grand entier  $m$  tel que  $(X - \alpha)^m$  divise  $P$ .

### Exemple 8

$$P(X) = X^3 - 2X^2 + X = X(X^2 - 2X + 1) \\ = X(X - 1)^2,$$

donc :

- 0 est d'ordre de multiplicité 1 ;
- 1 est d'ordre de multiplicité 2.

### Proposition 7

Si un polynôme non nul  $P \in \mathbb{K}[X]$  admet  $p$  racines distinctes  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ , dont les ordres de multiplicité respectifs sont  $m_1, m_2, \dots, m_p$ , alors

$$(X - \alpha_1)^{m_1} (X - \alpha_2)^{m_2} \dots (X - \alpha_p)^{m_p} \text{ divise } P.$$

### Exemple 9

Soit  $P$  un polynôme de degré 5 admettant :

- une 1<sup>re</sup> racine, 4, d'ordre de multiplicité 3 ;
- une 2<sup>e</sup> racine,  $-1$ , d'ordre de multiplicité 2.

Alors  $P$  est nécessairement de la forme

$$P(X) = \lambda(X - 4)^3(X + 1)^2,$$

avec  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

### Proposition 8

Un polynôme non nul de degré  $n$  a au maximum  $n$  racines.

### Exemple 10

Si  $P(x) = 0$  pour tout  $x \in [0; 1]$ , alors  $P$  a une infinité de racines ; et donc  $P$  est le polynôme nul.

### Proposition 9

Si  $P \in \mathbb{R}[X]$  admet une racine complexe  $\alpha$ , alors  $\bar{\alpha}$  est aussi racine de  $P$ , avec la même multiplicité.



## Exercices

Exercices 18 à 21

# IV. Décomposition en produit de facteurs irréductibles

Déf. 8

Un polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$  est dit irréductible dans  $\mathbb{K}[X]$  s'il est de degré supérieur ou égal à 1 et si ses seuls diviseurs sont les  $\lambda P$ , avec  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ .

### Exemples 11

1. Le polynôme  $P(X) = 2X + 1$  est irréductible dans  $\mathbb{K}[X]$  – comme tous les polynômes de degré 1.
2. Le polynôme  $P(X) = X^2 + 1$  est irréductible dans  $\mathbb{R}[X]$ , mais il n'est pas irréductible dans  $\mathbb{C}[X]$ , puisque

$$X^2 + 1 = (X + i)(X - i).$$

### Proposition 10

Si  $\deg(P) \geq 2$  et si  $P$  admet une racine dans  $\mathbb{K}$ , alors il n'est pas irréductible.



### Attention

La réciproque est fautive : par exemple,  $(X^2 + 1)(X^2 + 2)$  n'admet pas de racine dans  $\mathbb{R}$ , mais il n'est pas irréductible dans  $\mathbb{R}[X]$ , car il est divisible par  $X^2 + 1$  et par  $X^2 + 2$ .

### Théorème 1 (théorème de d'Alembert-Gauss)

Tout polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  de degré supérieur ou égal à 1 admet au moins une racine dans  $\mathbb{C}$ .

### Exemple 12

D'après le théorème 1, l'équation  $z^5 + 3z - 1 = 0$  a au moins une solution dans  $\mathbb{C}$ . En revanche, le théorème 1 ne dit rien sur la valeur de cette solution.

### Proposition 11

1. Les polynômes irréductibles de  $\mathbb{C}[X]$  sont les polynômes de degré 1.
2. Les polynômes irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 n'admettant pas de racine réelle.

### Théorème 2 (théorème fondamental de l'arithmétique)

Tout polynôme de  $\mathbb{K}[X]$  de degré supérieur ou égal à 1 se décompose de manière unique en produit d'une constante non nulle et de polynômes irréductibles unitaires à l'ordre des facteurs près.

### Exemple 13

Prenons  $P(X) = X^6 - X^2$ . On peut écrire les décompositions :

- dans  $\mathbb{R}[X]$  :

$$P(X) = X^6 - X^2 = X^2(X^4 - 1) = X^2(X^2 - 1)(X^2 + 1) = \underbrace{X \cdot X(X+1)(X-1)(X^2+1)}_{\text{facteurs irréductibles}},$$

- dans  $\mathbb{C}[X]$  :

$$P(X) = \underbrace{X \cdot X(X+1)(X-1)(X+i)(X-i)}_{\text{facteurs irréductibles}}.$$

**Définition 9**

Un polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$  est dit scindé sur  $\mathbb{K}$  s'il peut s'écrire comme un produit

$$P(X) = \lambda (X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_n),$$

où tous les  $\alpha_i$  sont dans  $\mathbb{K}$  et  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ .

**Proposition 12**

Tous les polynômes non nuls  $P \in \mathbb{C}[X]$  sont scindés sur  $\mathbb{C}$ .

**Exemple 14**

$P(X) = X^2 + 1 = (X + i)(X - i)$  est scindé sur  $\mathbb{C}$  (mais pas sur  $\mathbb{R}$ ).

**Exemple 15**

On sait que les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $z^3 = 1$  sont  $e^{i\frac{0\pi}{3}} = 1$ ,  $e^{i\frac{2\pi}{3}}$  et  $e^{i\frac{4\pi}{3}}$ , donc  $X^3 - 1$  se factorise comme le produit de polynômes de degré 1 :

$$X^3 - 1 = (X - 1) \left( X - e^{i\frac{2\pi}{3}} \right) \left( X - e^{i\frac{4\pi}{3}} \right).$$

Il est scindé sur  $\mathbb{C}$ , comme tous les polynômes de  $\mathbb{C}[X]$ .

**Proposition 13**

Si

$$\begin{aligned} P(X) &= a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \\ &= \lambda (X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_n) \end{aligned}$$

est scindé sur  $\mathbb{K}$ , alors :

1.  $\alpha_1 \times \cdots \times \alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{\lambda}$  ;
2.  $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{\lambda}$ .

**Exemple 16**

Le polynôme  $P(X) = X^3 + 3X + 1$  a trois racines  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  dans  $\mathbb{C}$  (deux d'entre elles pouvant être égales). On ne connaît pas ces racines, mais on est certain que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{a_2}{\lambda} = -\frac{0}{1} = 0.$$

**Exercices**

Exercices 22 à 27

## V. Polynôme dérivé

### Définition 10

Le polynôme dérivé de

$$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n = \sum_{k=0}^n a_kX^k$$

est

$$P'(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ a_1 + 2a_2X + \cdots + na_nX^{n-1} = \sum_{k=1}^n ka_kX^{k-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

### Remarques.

- Il y a bien sûr un lien avec la dérivée de la fonction polynomiale  $x \mapsto \sum_{k=0}^n a_kx^k$ . Toutes les formules habituelles de dérivation (somme, produit, composée, etc.) restent valables.
- On définit de même la dérivée seconde, troisième, etc. La dérivée  $k$ -ième de  $P$  peut être notée  $P^{(k)}$ .

### Exemple 17

Si  $P(X) = X^3 - 4X^2 + 5X - 7$ , alors :

$$P^{(0)}(X) = X^3 - 4X^2 + 5X - 7$$

$$P^{(1)}(X) = 3X^2 - 8X + 5$$

$$P^{(2)}(X) = 6X - 8$$

$$P^{(3)}(X) = 6$$

$$P^{(k)}(X) = 0 \text{ pour tout } k \geq 4$$

On remarque que le degré baisse de 1 unité à chaque fois que l'on dérive.

### Exemple 18

Si  $P(X) = X^4$ , alors :

$$P^{(0)}(X) = X^4$$

$$P^{(1)}(X) = 4X^3$$

$$P^{(2)}(X) = 12X^2$$

$$P^{(3)}(X) = 24X$$

$$P^{(4)}(X) = 24$$

$$P^{(k)}(X) = 0 \text{ pour tout } k \geq 5$$

### Proposition 14

Si  $P(X) = X^n$ , alors

$$P^{(k)}(X) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k} & \text{si } k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}.$$



### Exemple 19

Prenons  $P(X) = 2 + 5X - 4X^2 + X^3$ .

On a

$$P'(X) = 5 - 8X + 3X^2, \quad P''(X) = -8 + 6X, \quad P^{(3)}(X) = 6,$$

donc

$$P(0) = 2, \quad P'(0) = 5, \quad P''(0) = -8, \quad P^{(3)}(0) = 6.$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} P(X) &= 2 + 5X - 4X^2 + X^3 \\ &= P(0) + P'(0)X + \frac{P''(0)}{2}X^2 + \frac{P^{(3)}(0)}{6}X^3 \\ &= \frac{P^{(0)}(0)}{0!}(X-0)^0 + \frac{P^{(1)}(0)}{1!}(X-0)^1 + \frac{P^{(2)}(0)}{2!}(X-0)^2 + \frac{P^{(3)}(0)}{3!}(X-0)^3. \end{aligned}$$

### Proposition 15 (formule de Taylor en 0)

Si  $P \in \mathbb{K}[X]$  est de degré  $n$ , alors :

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k.$$

Autrement dit,  $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  avec  $a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$ .

La formule de Taylor a un corollaire important :

### Proposition 17

On considère un polynôme non nul  $P \in \mathbb{K}[X]$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $\alpha$  est racine de  $P$  d'ordre de multiplicité  $m$  ;
- $P^{(0)}(\alpha) = P^{(1)}(\alpha) = \dots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$  et  $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$ .

### Proposition 16 (formule de Taylor en $\alpha$ )

Si  $P \in \mathbb{K}[X]$  est de degré  $n$ , alors pour tout  $\alpha \in \mathbb{K}$  :

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k.$$

### Exemple 20

Si  $P$  est un polynôme de  $\mathbb{K}_3[X]$  tel que  $P(2) = P'(2) = P''(2) = P^{(3)}(2) = 0$ , alors  $P$  est le polynôme nul. En effet :

$$\begin{aligned} P(X) &= \sum_{k=0}^3 \frac{P^{(k)}(2)}{k!} (X-2)^k \\ &= P(2) + P'(2)(X-2)^1 + \frac{P''(2)}{2}(X-2)^2 + \frac{P^{(3)}(2)}{6}(X-2)^3 \\ &= 0 + 0(X-2) + 0(X-2)^2 + 0(X-2)^3 = 0. \end{aligned}$$

### Exemple 21

1 est une racine évidente du polynôme  $P(X) = X^8 - 2X + 1$ . Est-ce une racine simple ?

Pour le savoir, on dérive :

$$P'(X) = 8X^7 - 2,$$

puis on remplace :

$$P'(1) = 8 \times 1^7 - 2 = 6.$$

$P(1) = 0$  et  $P'(1) \neq 0$ , donc 1 est racine simple de  $P$ .



**Exercices**

Exercices 28 à 31

## VI. Exercices

### Exercice 1.

On considère le polynôme  $P(X) = X^2 - X - 1$ . Calculer  $(P(X))^2$  et  $P \circ P(X)$ .

### Exercice 2.

Quel est le degré du polynôme

$$P(X) = (X^5 + 1)^2 - X^{10} ?$$

Et du polynôme

$$Q(X) = (1 + X^2)(2 + X^2)(3 + X^2) - (3X + X^3)^2 ?$$

### Exercice 3.

Déterminer tous les polynômes du 2<sup>nd</sup> degré vérifiant  $P(1) = 0$ ,  $P(-1) = 2$ .

### Exercice 4 (✂).

- Exemple.** Soit  $P(X) = X^4 - 3X^2 + 5$ . Prouver que  $P$  est pair et déterminer un polynôme  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P(X) = Q(X^2)$ .
- Cas général.** Montrer qu'un polynôme  $P \in \mathbb{R}_4[X]$  est pair si, et seulement si, il existe un polynôme  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P(X) = Q(X^2)$ .

### Exercice 5 (III ✂).

Déterminer les polynômes  $P \in \mathbb{C}[X]$  tels que

$$P(X^2) = (X^2 + 1)P(X).$$

### Exercice 6 (III).

Donner sans justification tous les diviseurs dans  $\mathbb{R}[X]$  du polynôme

$$P(X) = (X - 1)(X - 2)(X - 3).$$

### Exercice 7 (III).

Effectuer la division euclidienne de :

- $A(X) = 2X^3 - 7X^2 + 13X - 5$  par  $B(X) = 2X - 1$ .
- $A(X) = X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 27X + 38$  par  $B(X) = X^2 - X - 7$ .

### Exercice 8 (III).

Sans la poser, déterminer le reste dans la division euclidienne de  $X^5 + X + 2$  par  $X - 1$ .

### Exercice 9 (✂).

Sans la poser, déterminer le reste dans la division euclidienne de  $X^5 - 3X + 1$  par  $X^2 + 1$ .

### Exercice 10.

Montrer que la courbe de la fonction  $f : x \mapsto \frac{2x^3 + x^2}{x^2 + 2}$  admet une asymptote oblique en  $+\infty$  et en  $-\infty$ . Donner son équation réduite.

### Exercice 11 (III).

Déterminer les racines dans  $\mathbb{R}$ , puis dans  $\mathbb{C}$ , du polynôme  $P(X) = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$ .

### Exercice 12 (III).

Soit  $P(X) = X^3 - 2X^2 + 5X - 1$ .

- Prouver que  $P$  admet une seule racine dans  $\mathbb{R}$  (on ne demande pas de trouver sa valeur).
- Prouver que  $P$  admet deux racines conjuguées dans  $\mathbb{C}$ .

### Exercice 13 (III).

Rappeler les racines dans  $\mathbb{C}$  des polynômes

$$P(X) = X^6 - 1, \quad Q(X) = X^8 - 1.$$

### Exercice 14 (III).

Sans poser la division, démontrer que  $(X - 1)$  divise  $P(X) = 2 - 3X^2 + 5X^3 + X^6 - 4X^7 - X^9$ .

### Exercice 15 (III).

Déterminer tous les polynômes  $P(X) = aX^3 + X^2 + bX + 1$  divisibles par  $X + 1$ .

### Exercice 16 (✂).

Déterminer les polynômes  $P \in \mathbb{R}_2[X]$  divisibles par  $(X + 1)$  et tels que les restes dans les divisions euclidiennes de  $P$  par  $(X - 2)$  et  $(X - 3)$  sont égaux.

**Exercice 17 (✖).**

1. Soient  $z_1, z_2$  dans  $\mathbb{C}$ . Démontrer l'équivalence des propositions a et b :

$$\text{a. } \begin{cases} z_1 + z_2 = 2 \\ z_1 \times z_2 = 5 \end{cases}$$

b.  $z_1$  et  $z_2$  sont les solutions de l'équation

$$z^2 - 2z + 5 = 0.$$

2. Déterminer tous les couples de complexes  $(z_1, z_2)$  vérifiant le système a.

**Exercice 18 (⏏).**

Déterminer tous les polynômes unitaires de degré 4 admettant :

- une 1<sup>re</sup> racine,  $-3$ , d'ordre de multiplicité 2;
- une 2<sup>e</sup> racine,  $1$ , d'ordre de multiplicité 1.

**Exercice 19 (⏏).**

Soit  $P \in \mathbb{R}_3[X]$  tel que  $P(3) = P(2) = P(1) = P(0)$ . On pose  $Q(X) = P(X) - P(0)$ .

1. Calculer  $Q(0)$ ,  $Q(1)$ ,  $Q(2)$  et  $Q(3)$ .
2. Que peut-on en déduire pour  $Q$  ? Et pour  $P$  ?

**Exercice 20 (✖).**

Prouver que si deux polynômes  $P, Q$  de  $\mathbb{K}_3[X]$  coïncident sur au moins 4 valeurs distinctes, alors ils sont égaux.

**Exercice 21 (✖).**

Soit  $P \in \mathbb{R}_4[X]$ . Démontrer la proposition : si  $\alpha$  est racine de  $P$ , alors  $\bar{\alpha}$  est également racine de  $P$ .

**Exercice 22 (⏏).**

Décomposer  $X^6 - 1$  en produit de facteurs irréductibles :

1. dans  $\mathbb{R}[X]$ ,
2. dans  $\mathbb{C}[X]$ .

**Exercice 23 (⏏).**

Vérifier que  $i$  est racine du polynôme  $P(X) = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$ . En déduire une décomposition de  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$ , puis dans  $\mathbb{C}[X]$ .

**Exercice 24 (⏏).**

Vérifier que  $1 + i$  est racine du polynôme  $P(X) = X^4 + 4$ . En déduire une décomposition de  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$ , puis dans  $\mathbb{C}[X]$ .

**Exercice 25 (⏏).**

1. Démontrer que  $X^{16} - 2X^8 + 1$  est divisible par  $X^2 - 1$ .
2. Démontrer que  $X^{16} - 2X^8 + 1$  est divisible par  $X^2 + 1$ .

**Exercice 26 (⏏).**

Soit  $P(X) = X^3 - 6X^2 - 5X + 2$ . Calculer la somme et le produit des racines de  $P$ .

**Exercice 27 (⏏).**

On admet que  $1, \frac{1}{2}$  et  $-3$  sont des racines de  $P(X) = 6X^4 + 11X^3 - 21X^2 + X + 3$ . Déterminer la dernière racine de  $P$  de deux façons différentes :

- en utilisant la formule pour le produit des racines;
- en utilisant la formule pour la somme des racines.

**Exercice 28.**

Déterminer un polynôme  $P$  tel que

$$P(0) = 1, P'(0) = 2, P^{(2)}(0) = 4, P^{(3)}(0) = 8.$$

**Exercice 29 (⏏).**

Montrer que le polynôme  $P(X) = 1 - X + X^2 - 9X^9 + 8X^{10}$  est divisible par  $(X - 1)^2$ .

**Exercice 30 (⏏).**

Montrer que  $-1$  est racine du polynôme

$$P(X) = 8X^9 + 9X^8 - 1$$

et déterminer son ordre.

**Exercice 31 (⏏).**

On considère un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$ . Exprimer le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X - 1)^2$  en fonction de  $P(1)$  et de  $P'(1)$ .