Chapitre 13 : Polynômes

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des scalaires.

I. Généralités

Définition 1

- On appelle polynôme toute expression de la forme

$$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k,$$

où les a_k sont des scalaires appelés coefficients de P, et X (l'indéterminée) peut désigner un scalaire, une matrice, une fonction, etc.

- La fonction polynomiale associée est la fonction

$$x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Remarque. On étudiera uniquement la situation où X est un scalaire. On identifiera le polynôme et la fonction polynomiale. On notera donc $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ en lieu et place de $x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

Exemples 1

1. $P(X) = 2X^2 - X + 1$ est un polynôme, dont les coefficients sont $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_2 = 2$.
2. $Q(X) = X^3 + 1 = 1 + 0X + 0X^2 + 1X^3$ est un polynôme.

Définition 2

On appelle :

- Polynôme nul le polynôme $P(X) = 0$.
- Polynôme constant tout polynôme de la forme $P(X) = a_0$, où a_0 est un scalaire.
- Monôme un polynôme de la forme $P(X) = a_k X^k$, où a_k est un scalaire.

Définition 3

- Si $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$, avec $a_n \neq 0$, on dit que le degré de P est égal à n.
  Le scalaire a_n est appelé coefficient dominant de P.
- Le polynôme P est dit unitaire (ou normalisé) si son coefficient dominant est égal à 1.
- Par convention, le degré du polynôme nul est égal à $-\infty$:
  $$\deg(0) = -\infty.$$
- On note $\deg(P)$ le degré d'un polynôme P.

Exemples 2

1. Le polynôme $P(X) = 2X^2 - X + 1$ est de degré 2.
2. Le polynôme $Q(X) = X^3 + 1$ est un polynôme unitaire de degré 3.

Déf. 4

- On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- Si $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré **au plus** n.

Exemple 3

Soient $P(X) = 2X^2 - X + 1$ et $Q(X) = X^3 + 1$. Alors $P \in \mathbb{R}_2[X]$ et $Q \in \mathbb{R}_3[X]$.

Mais on a aussi $P \in \mathbb{R}_3[X]$, car $\deg(P) \leq 3$.

On peut ajouter, soustraire, multiplier ou composer des polynômes, comme on le fait pour n'importe qu'elle fonction. Il y a tout de même quelque chose de particulier : lorsqu'on applique ces opérations à deux polynômes, on obtient encore un polynôme.

Proposition 1

La somme, la différence, le produit et la composée de deux polynômes est un polynôme.

Exemple 4

On pose $P(X) = 2X^2 - X - 1$ et $Q(X) = X^3 + 1$. Alors :

- $P(X) + Q(X) = 2X^2 - X - 1 + X^3 + 1 = X^3 + 2X^2 - X$.
  Le polynôme $P + Q$ est de degré 3.
- $$\begin{aligned} P(X) \times Q(X) &= \left(2X^2 - X - 1\right)\left(X^3 + 1\right) \\ &= 2X^2 \times X^3 + 2X^2 \times 1 - X \times X^3 \\ &\quad - X \times 1 - 1 \times X^3 - 1 \times 1 \\ &= 2X^5 + 2X^2 - X^4 - X - X^3 - 1 \\ &= 2X^5 - X^4 - X^3 + 2X^2 - X - 1. \end{aligned}$$
  Le polynôme $P \times Q$ est de degré $2 + 3 = 5$.
- $$\begin{aligned} P \circ Q(X) &= 2\left(X^3 + 1\right)^2 - \left(X^3 + 1\right) - 1 \\ &= 2\left(\left(X^3\right)^2 + 2 \times X^3 \times 1 + 1^2\right) - X^3 - 1 - 1 \\ &= 2X^6 + 4X^3 + 2 - X^3 - 2 \\ &= 2X^6 + 3X^3 \end{aligned}$$
  Le polynôme $P \circ Q$ est de degré $2 \times 3 = 6$.

Proposition 2

Si P et Q sont deux polynômes, alors :

1. $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.
2. $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$.

Remarques.

- Le point 1 de la proposition 2 précédente pose problème si l'un des deux polynômes est nul. Mais il reste vrai si l'on adopte les conventions

$$(-\infty) + n = n + (-\infty) = (-\infty) + (-\infty) = -\infty.$$

Remarques.

- ⚠ $\deg(P+Q)$ n'est pas forcément égal à $\max(\deg(P), \deg(Q))$.
  Par exemple, si $P(X) = X + 1$ et $Q(X) = -X + 1$, alors P et Q sont de degré 1, mais leur somme $P(X) + Q(X) = 2$ est de degré 0.
- Le point 2 de la proposition 2 s'interprète en disant que $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par addition.

Exercices

Exercices 1 à 5

II. Arithmétique des polynômes

Déf. 5

Soient A, B dans $\mathbb{K}[X]$, avec $B \neq 0$. S'il existe C dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $A = B \times C$, on dit que A est un multiple de B, ou que B est un diviseur de A. On note $B|A$.

Exemple 5

$(X+1)(X-3) = X^2 - 2X - 3$, donc $X+1$ et $X-3$ sont des diviseurs de $X^2 - 2X - 3$.

Remarque.

Tout polynôme constant non nul divise n'importe quel autre polynôme. Par exemple, 2 divise $X^2 - 2X - 3$, car

$$X^2 - 2X - 3 = 2\left(\frac{1}{2}X^2 - X - \frac{3}{2}\right).$$

Proposition 3

Soient A, B dans $\mathbb{K}[X]$, avec $A \neq 0$. Si $B|A$ alors $\deg(B) \leq \deg(A)$.

Proposition 4 (division euclidienne)

Soient A, B dans $\mathbb{K}[X]$, avec $B \neq 0$. Il existe un unique couple Q, R dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$.

On dit que Q est le quotient et R le reste dans la division euclidienne de A par B.

Pour déterminer Q et R, on pose la division :

Exemple 6

On effectue la division euclidienne de $A(X) = 2X^3 - 5X^2 + 5X - 4$ par $B(X) = X^2 - 2X + 1$:

$$\begin{array}{rr|l}
 & 2X^3 - 5X^2 + 5X - 4 & X^2 - 2X + 1 \\
\cline{3-3}
- & 2X^3 - 4X^2 + 2X & 2X - 1 \\
\cline{2-2}
 & -X^2 + 3X - 4 & \\
- & -X^2 + 2X - 1 & \\
\cline{2-2}
 & X - 3 &
\end{array}$$

Conclusion : $A = BQ + R$, avec

$$Q(X) = 2X - 1 \qquad , \qquad R(X) = X - 3.$$

Remarques.

- On s'arrête quand le degré du reste est strictement inférieur à celui de B.
- On descend bien tous les termes à chaque étape dans la colonne de gauche.

Proposition 5

Dans la situation de la division euclidienne, on a l'équivalence :

$$A \text{ divisible par } B \iff R = 0.$$

Exercices

Exercices 6 à 10

III. Racines d'un polynôme

Déf.6 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine de P si $P(\alpha) = 0$.

Exemple 7

Le polynôme $P(X) = X^3 + X$ peut être vu comme un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ou comme un polynôme de $\mathbb{C}[X]$.

$P(X) = X\left(X^2+1\right)$, donc P a :

- une seule racine dans $\mathbb{R}$, qui est 0 ;
- trois racines dans $\mathbb{C}$: 0, i et $-$i.

Proposition 6

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On a l'équivalence :

$$\alpha \text{ racine de } P \iff (X-\alpha) | P(X).$$

Démonstration

On pose la division euclidienne de $P(X)$ par $X - \alpha$:

$$P(X) = (X-\alpha)Q(X) + R(X).$$

On sait que $\deg(R) < \deg(X-\alpha)$, donc R est un polynôme constant :

$$\exists c \in \mathbb{K},\ R(X) = c.$$

La division euclidienne se réécrit alors :

$$P(X) = (X-\alpha)Q(X) + c.$$

Il reste à remarquer que $P(\alpha) = (\alpha-\alpha)Q(a) + c = c$ pour pouvoir conclure à l'aide d'équivalences :

$$\alpha \text{ racine de } P \iff P(\alpha) = 0 \iff c = 0 \iff R(X) = 0 \iff (X-\alpha)|P(X).$$

Exercices

Exercices 11 à 17

Déf. 7 Étant donnée une racine α d'un polynôme P non nul, on définit son ordre de multiplicité comme le plus grand entier m tel que $(X-\alpha)^m$ divise P.

Exemple 8

$$\begin{aligned} P(X) &= X^3-2X^2+X = X\left(X^2-2X+1\right) \\ &= X(X-1)^2, \end{aligned}$$

donc :

- 0 est d'ordre de multiplicité 1 ;
- 1 est d'ordre de multiplicité 2.

Proposition 7

Si un polynôme non nul $P \in \mathbb{K}[X]$ admet p racines distinctes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, dont les ordres de multiplicité respectifs sont $m_1, m_2, \ldots, m_p$, alors

$$(X-\alpha_1)^{m_1}(X-\alpha_2)^{m_2}\cdots\left(X-\alpha_p\right)^{m_p} \text{ divise } P.$$

Exemple 9

Soit P un polynôme de degré 5 admettant :

- une 1re racine, 4, d'ordre de multiplicité 3 ;
- une 2e racine, -1, d'ordre de multiplicité 2.

Alors P est nécessairement de la forme

$$P(X) = \lambda(X-4)^3(X+1)^2,$$

avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

Proposition 8

Un polynôme de degré $n \geq 1$ a au maximum n racines.

Exemple 10

Si $P(x) = 0$ pour tout $x \in [0;1]$, alors P a une infinité de racines ; et donc P est le polynôme nul.

Proposition 9

Si $P \in \mathbb{R}[X]$ admet une racine complexe α, alors $\overline{\alpha}$ est aussi racine de P, avec la même multiplicité.

Exercices

Exercices 18 à 21

IV. Décomposition en produit de facteurs irréductibles

Déf.8 Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ s'il est de degré supérieur ou égal à 1 et si ses seuls diviseurs sont les λ et les λP, avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Exemples 11

1. Le polynôme $P(X) = 2X+1$ est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ – comme tous les polynômes de degré 1.
2. Le polynôme $P(X) = X^2+1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, mais il n'est pas irréductible dans $\mathbb{C}[X]$, puisque
$$X^2+1 = (X+\mathrm{i})(X-\mathrm{i}).$$

Proposition 10

Si $\deg(P) \geq 2$ et si P admet une racine dans $\mathbb{K}$, alors il n'est pas irréductible.

Attention

La réciproque est fausse : par exemple, $\left(X^2+1\right)\left(X^2+2\right)$ n'admet pas de racine dans $\mathbb{R}$, mais il n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, car il est divisible par X^2+1 et par X^2+2.

Théorème 1 (théorème de d'Alembert-Gauss)

Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1 admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Exemple 12

D'après le théorème 1, l'équation $z^5+3z-1=0$ a au moins une solution dans $\mathbb{C}$. En revanche, le théorème 1 ne dit rien sur la valeur de cette solution.

Proposition 11

1. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.
2. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 n'admettant pas de racine réelle.

Théorème 2 (théorème fondamental de l'arithmétique)

Tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1 se décompose de manière unique en produit d'une constante non nulle et de polynômes irréductibles unitaires à l'ordre des facteurs près.

Exemple 13

Prenons $P(X)=X^6-X^2$. On peut écrire les décompositions :

- dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P(X)=X^6-X^2=X^2\left(X^4-1\right)=X^2\left(X^2-1\right)\left(X^2+1\right)=\underbrace{X\cdot X(X+1)(X-1)\left(X^2+1\right)}_{\text{facteurs irréductibles}},$$

- dans $\mathbb{C}[X]$:

$$P(X)=\underbrace{X\cdot X(X+1)(X-1)(X+\mathrm{i})(X-\mathrm{i})}_{\text{facteurs irréductibles}}.$$

Définition 9

Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit scindé sur $\mathbb{K}$ s'il peut s'écrire comme un produit

$$P(X) = \lambda (X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_n),$$

où tous les α_i sont dans $\mathbb{K}$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Proposition 12

Tous les polynômes non nuls $P \in \mathbb{C}[X]$ sont scindés sur $\mathbb{C}$.

Exemple 14

$P(X) = X^2 + 1 = (X + \mathrm{i})(X - \mathrm{i})$ est scindé sur $\mathbb{C}$ (mais pas sur $\mathbb{R}$).

Exemple 15

On sait que les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^3 = 1$ sont $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{0\pi}{3}} = 1$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$, donc $X^3 - 1$ se factorise comme le produit de polynômes de degré 1 :

$$X^3 - 1 = (X - 1)\left(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\right)\left(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}\right).$$

Il est scindé sur $\mathbb{C}$, comme tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$.

Proposition 13

Si

$$\begin{aligned} P(X) &= a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \\ &= \lambda (X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_n) \end{aligned}$$

est scindé sur $\mathbb{K}$, alors :

1. $\alpha_1 \times \cdots \times \alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{\lambda}$;
2. $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{\lambda}$.

Exemple 16

Le polynôme $P(X) = X^3 + 3X + 1$ a trois racines α_0, α_1, α_2 dans $\mathbb{C}$ (deux d'entre elles pouvant être égales). On ne connaît pas ces racines, mais on est certain que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{a_2}{\lambda} = -\frac{0}{1} = 0.$$

Exercices

Exercices 22 à 27

V. Polynôme dérivé

Définition 10

Le polynôme dérivé de

$$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

est

$$P'(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ a_1 + 2a_2 X + \cdots + n a_n X^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarques.

- Il y a bien sûr un lien avec la dérivée de la fonction polynomiale $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Toutes les formules habituelles de dérivation (somme, produit, composée, etc.) restent valables.
- On définit de même la dérivée seconde, troisième, etc. La dérivée k-ième de P peut être notée $P^{(k)}$.

Exemple 17

Si $P(X) = X^3 - 4X^2 + 5X - 7$, alors :

$$\begin{aligned} P^{(0)}(X) &= X^3 - 4X^2 + 5X - 7 \\ P^{(1)}(X) &= 3X^2 - 8X + 5 \\ P^{(2)}(X) &= 6X - 8 \\ P^{(3)}(X) &= 6 \\ P^{(k)}(X) &= 0 \text{ pour tout } k \geq 4 \end{aligned}$$

On remarque que le degré baisse de 1 unité à chaque fois que l'on dérive.

Exemple 18

Si $P(X) = X^4$, alors :

$$\begin{aligned} P^{(0)}(X) &= X^4 \\ P^{(1)}(X) &= 4X^3 \\ P^{(2)}(X) &= 12X^2 \\ P^{(3)}(X) &= 24X \\ P^{(4)}(X) &= 24 \\ P^{(k)}(X) &= 0 \text{ pour tout } k \geq 5 \end{aligned}$$

Proposition 14

Si $P(X) = X^n$, alors

$$P^{(k)}(X) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k} & \text{si } k \in [\![0, n]\!] \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}.$$

Exemple 19

Prenons $P(X)=2+5X-4X^2+X^3$.
On a
$$P'(X)=5-8X+3X^2 \quad , \quad P''(X)=-8+6X \quad , \quad P^{(3)}(X)=6,$$
donc
$$P(0)=2 \quad , \quad P'(0)=5 \quad , \quad P''(0)=-8 \quad , \quad P^{(3)}(0)=6.$$
On peut donc écrire :
$$\begin{aligned}P(X)&=2+5X-4X^2+X^3\\&=P(0)+P'(0)X+\frac{P''(0)}{2}X^2+\frac{P^{(3)}(0)}{6}X^3\\&=\frac{P^{(0)}(0)}{0!}(X-0)^0+\frac{P^{(1)}(0)}{1!}(X-0)^1+\frac{P^{(2)}(0)}{2!}(X-0)^2+\frac{P^{(3)}(0)}{3!}(X-0)^3.\end{aligned}$$

Proposition 15 (formule de Taylor en 0)

Si $P\in\mathbb{K}[X]$ est de degré n, alors :
$$P(X)=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(0)}{k!}X^k.$$
Autrement dit, $P(X)=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ avec $a_k=\frac{P^{(k)}(0)}{k!}$.

Proposition 16 (formule de Taylor en α)

Si $P\in\mathbb{K}[X]$ est de degré n, alors pour tout $\alpha\in\mathbb{K}$:
$$P(X)=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k.$$

Exemple 20

Si P est un polynôme de $\mathbb{K}_3[X]$ tel que $P(2)=P'(2)=P''(2)=P^{(3)}(2)=0$, alors P est le polynôme nul. En effet :
$$\begin{aligned}P(X)&=\sum_{k=0}^{3}\frac{P^{(k)}(2)}{k!}(X-2)^k\\&=P(2)+P'(2)(X-2)^1+\frac{P''(2)}{2}(X-2)^2+\frac{P^{(3)}(2)}{6}(X-2)^3\\&=0+0(X-2)+0(X-2)^2+0(X-2)^3=0.\end{aligned}$$

La formule de Taylor a un corollaire important :

Proposition 17

On considère un polynôme non nul $P\in\mathbb{K}[X]$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- α est racine de P d'ordre de multiplicité m ;
- $P^{(0)}(\alpha)=P^{(1)}(\alpha)=\cdots=P^{(m-1)}(\alpha)=0$ et $P^{(m)}(\alpha)\neq 0$.

Exemple 21

1 est une racine évidente du polynôme $P(X)=X^8-2X+1$. Est-ce une racine simple?

Pour le savoir, on dérive :
$$P'(X)=8X^7-2,$$
puis on remplace :
$$P'(1)=8\times 1^7-2=6.$$
$P(1)=0$ et $P'(1)\neq 0$, donc 1 est racine simple de P.

Exercices

Exercices 28 à 31

VI. Exercices

Exercice 1.
On considère le polynôme $P(X) = X^2 - X - 1$. Calculer $(P(X))^2$ et $P \circ P(X)$.

Exercice 2.
Quel est le degré du polynôme

$$P(X) = \left(X^5+1\right)^2 - X^{10}\ ?$$

Et du polynôme

$$Q(X) = \left(1+X^2\right)\left(2+X^2\right)\left(3+X^2\right) - \left(3X+X^3\right)^2\ ?$$

Exercice 3.
Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}_2[X]$ vérifiant $P(1) = 0$, $P(-1) = 2$.

Exercice 4 (🏅).

1. **Exemple.** Soit $P(X) = X^4 - 3X^2 + 5$. Prouver que P est pair et déterminer un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = Q\left(X^2\right)$.
2. **Cas général.** Montrer qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}_4[X]$ est pair si, et seulement s'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = Q\left(X^2\right)$.

Exercice 5 (🏛 🏅).
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que

$$P\left(X^2\right) = \left(X^2+1\right)P(X).$$

Exercice 6 (🏛).
Donner sans justification tous les diviseurs dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme

$$P(X) = (X-1)(X-2)(X-3).$$

Exercice 7 (🏛).
Effectuer la division euclidienne de :

1. $A(X) = 2X^3 - 7X^2 + 13X - 5$ par $B(X) = 2X - 1$.
2. $A(X) = X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 27X + 38$ par $B(X) = X^2 - X - 7$.

Exercice 8 (🏛).
Sans la poser, déterminer le reste dans la division euclidienne de $X^5 + X + 2$ par $X - 1$.

Exercice 9 (🏅).
Sans la poser, déterminer le reste dans la division euclidienne de $X^5 - 3X + 1$ par $X^2 + 1$.

Exercice 10.
Montrer que la courbe de la fonction $f : x \mapsto \frac{2x^3+x^2}{x^2+2}$ admet une asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$. Donner son équation réduite.

Exercice 11 (🏛).
Déterminer les racines dans $\mathbb{R}$, puis dans $\mathbb{C}$, du polynôme $P(X) = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$.

Exercice 12 (🏛).
Soit $P(X) = X^3 - 2X^2 + 5X - 1$.

1. Prouver que P admet une seule racine dans $\mathbb{R}$ (on ne demande pas de trouver sa valeur).
2. Prouver que P admet deux racines conjuguées dans $\mathbb{C}$.

Exercice 13 (🏛).
Rappeler les racines dans $\mathbb{C}$ des polynômes

$$P(X) = X^6 - 1\ ,\ Q(X) = X^8 - 1.$$

Exercice 14 (🏛).
Sans poser la division, démontrer que $(X-1)$ divise $P(X) = 2 - 3X^2 + 5X^3 + X^6 - 4X^7 - X^9$.

Exercice 15 (🏛).
Déterminer tous les polynômes $P(X) = aX^3 + X^2 + bX + 1$ divisibles par $X + 1$.

Exercice 16 (🏅).
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}_2[X]$ divisibles par $(X+1)$ et tels que les restes dans les divisions euclidiennes de P par $(X-2)$ et $(X-3)$ sont égaux.

Exercice 17.

1. Soient z_1, z_2 dans $\mathbb{C}$. Démontrer l'équivalence des propositions a et b :

   a. $\begin{cases} z_1 + z_2 &= 2 \\ z_1 \times z_2 &= 5 \end{cases}$

   b. z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation
   $$z^2 - 2z + 5 = 0.$$

2. Déterminer tous les couples de complexes (z_1, z_2) vérifiant le système a.

Exercice 18.

Déterminer tous les polynômes unitaires de degré 4 admettant :

- une 1re racine, -3, d'ordre de multiplicité 2 ;
- une 2e racine, 1, d'ordre de multiplicité 1.

Exercice 19.

Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P(3) = P(2) = P(1) = P(0)$. On pose $Q(X) = P(X) - P(0)$.

1. Calculer $Q(0)$, $Q(1)$, $Q(2)$ et $Q(3)$.
2. Que peut-on en déduire pour Q ? Et pour P ?

Exercice 20.

Prouver que si deux polynômes P, Q de $\mathbb{K}_3[X]$ coïncident sur au moins 4 valeurs distinctes, alors ils sont égaux.

Exercice 21.

Soit $P \in \mathbb{R}_4[X]$. Démontrer la proposition : si α est racine de P, alors $\overline{\alpha}$ est également racine de P.

Exercice 22.

Décomposer $X^6 - 1$ en produit de facteurs irréductibles :

1. dans $\mathbb{R}[X]$,
2. dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 23.

Vérifier que i est racine du polynôme $P(X) = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$. En déduire une décomposition de P dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 24.

Vérifier que $1 + \mathrm{i}$ est racine du polynôme $P(X) = X^4 + 4$. En déduire une décomposition de P dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 25.

1. Démontrer que $X^{16} - 2X^8 + 1$ est divisible par $X^2 - 1$.
2. Démontrer que $X^{16} - 2X^8 + 1$ est divisible par $X^2 + 1$.

Exercice 26.

Soit $P(X) = X^3 - 6X^2 - 5X + 2$. Calculer la somme et le produit des racines de P.

Exercice 27.

On admet que 1, $\frac{1}{2}$ et -3 sont des racines de $P(X) = 6X^4 + 11X^3 - 21X^2 + X + 3$. Déterminer la dernière racine de P de deux façons différentes :

- en utilisant la formule pour le produit des racines ;
- en utilisant la formule pour la somme des racines.

Exercice 28.

Déterminer un polynôme P tel que
$$P(0) = 1,\ P'(0) = 2,\ P^{(2)}(0) = 4,\ P^{(3)}(0) = 8.$$

Exercice 29.

Montrer que le polynôme $P(X) = 1 - X + X^2 - 9X^9 + 8X^{10}$ est divisible par $(X-1)^2$.

Exercice 30.

Montrer que -1 est racine du polynôme
$$P(X) = 8X^9 + 9X^8 - 1$$
et déterminer son ordre de multiplicité.

Exercice 31.

On considère un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$.
Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)^2$ en fonction de $P(1)$ et de $P'(1)$.