Trigonométrie : corrigé de l'ex 12

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On sait que $e^{-i\frac{\theta}{2}} \times e^{i\frac{\theta}{2}} = 1$ et que $e^{i\frac{\theta}{2}} \times e^{i\frac{\theta}{2}} = e^{i\theta}$, donc

$$\begin{aligned}
\left|1 - e^{i\theta}\right| &= \left|e^{-i\frac{\theta}{2}} \times e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}} \times e^{i\frac{\theta}{2}}\right| \\
&= \left|e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)\right| \\
&= \left|e^{i\frac{\theta}{2}}\right| \times \left|e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right|.
\end{aligned}$$

Or $|2i| = 2$, donc d'après la 2^e^ formule d'Euler :

$$\left|e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right| = 2\frac{\left|e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right|}{|2i|} = 2\left|\frac{e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}}{2i}\right| = 2\left|\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)\right| = 2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|.$$

Enfin $\left|e^{i\frac{\theta}{2}}\right| = 1$, donc

$$\boxed{\left|1 - e^{i\theta}\right| = \left|e^{i\frac{\theta}{2}}\right| \times \left|e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right| = 1 \times 2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| = 2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|.}$$