

Chapitre 2 : Trigonométrie

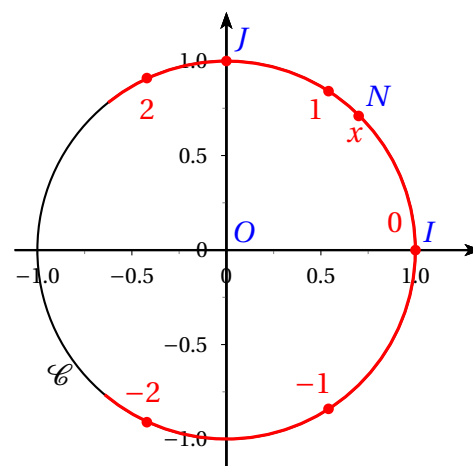
I. Cercle trigonométrique, cosinus, sinus

Définition 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . On appelle cercle trigonométrique le cercle \mathcal{C} de centre O de rayon 1.

En utilisant la même unité de longueur que celle du repère (O, I, J) , on gradue le cercle \mathcal{C} , de $-\infty$ à $+\infty$, en plaçant la graduation 0 au point I et en tournant dans le sens inverse des aiguilles d'une montre = sens direct = sens trigonométrique.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit N le point de \mathcal{C} situé à la graduation x . On dit alors que N est le point de \mathcal{C} associé à x .



La figure ci-contre montre toutes les valeurs remarquables du cercle trigonométrique :

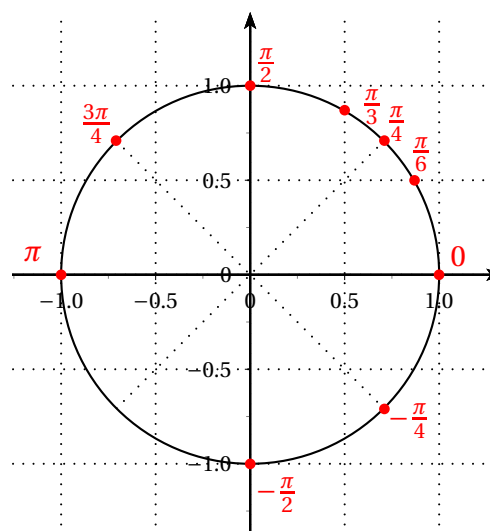
$$0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi,$$

pour lesquelles on tourne de

$$0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 180^\circ$$

dans le sens trigonométrique, à partir de la graduation 0.

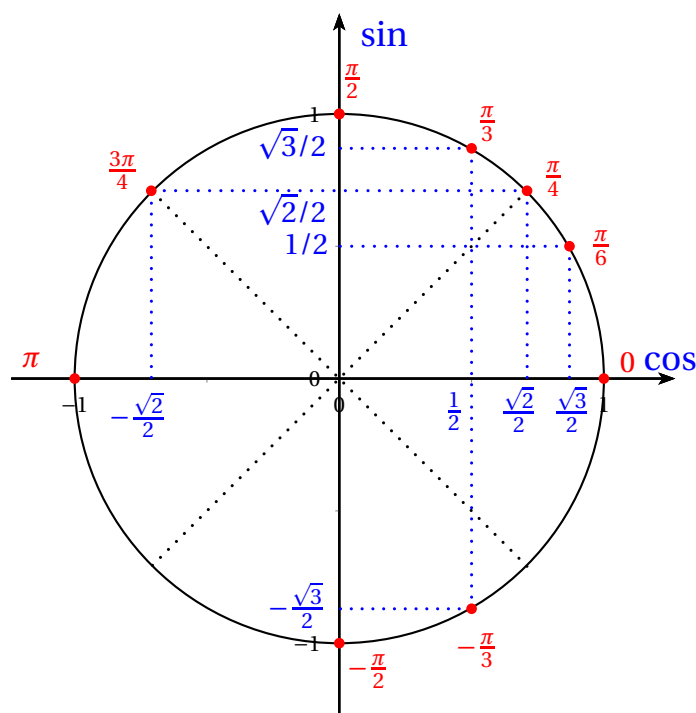
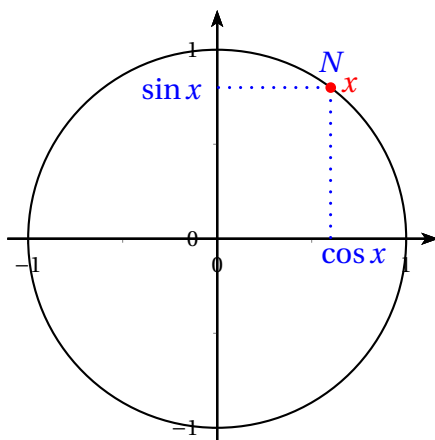
À titre informatif, on a ajouté les valeurs $-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$. On notera que le point associé à $\frac{\pi}{3}$ a pour abscisse $\frac{1}{2}$; tandis que celui associé à $\frac{\pi}{6}$ a pour ordonnée $\frac{1}{2}$.



Remarque. Tout point du cercle trigonométrique est associé à une infinité de valeurs. Par exemple, le point associé à 0 est aussi associé à 2π (on fait 1 tour de cercle dans le sens direct), 4π (2 tours dans le sens direct), 6π (3 tours dans le sens direct), ..., -2π (1 tour dans le sens indirect), -4π (2 tours dans le sens indirect), -6π (3 tours dans le sens indirect), ...

Soit x un nombre réel et soit N le point du cercle trigonométrique \mathcal{C} associé à x . On pose :

$$\cos x = x_N, \quad \sin x = y_N.$$



Les valeurs remarquables du cos et du sin sont indiquées ci-dessous.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	0

Exemple 1

On place les points associés à $\frac{3\pi}{4}$ et à $-\frac{\pi}{3}$. Par simple lecture du cercle trigonométrique on obtient :

- $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$
- $\cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \quad \sin \left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Remarques.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$-1 \leq \cos x \leq 1, \quad -1 \leq \sin x \leq 1.$$

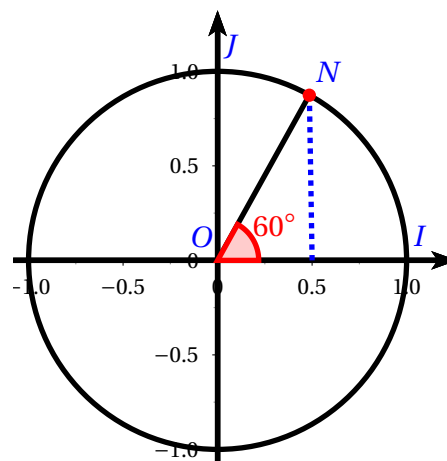
- Notre définition du cos et du sin étend aux nombres réels la définition du cos et du sin donnée au collège pour les angles géométriques. Notant par exemple N le point du cercle trigonométrique associé à $\frac{\pi}{3}$, on a :

$$\cos(60^\circ) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

- Le radian est une unité de mesure des angles proportionnelle au degré. Par définition, un angle de 180° mesure π radians. Donc par exemple, sur la figure ci-contre :

$$\widehat{ION} = 60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ radians.}$$

- Lorsqu'on utilise la calculatrice, il faut mettre en mode degré ou en mode radian suivant la situation : pour calculer $\cos(60^\circ)$, il faut mettre en mode degrés; et pour $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, en mode radians.





Exercices

Exercices 1 et 2

Proposition 1

Pour tout réel x : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Proposition 2 (angles associés)

Pour tout réel x :

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

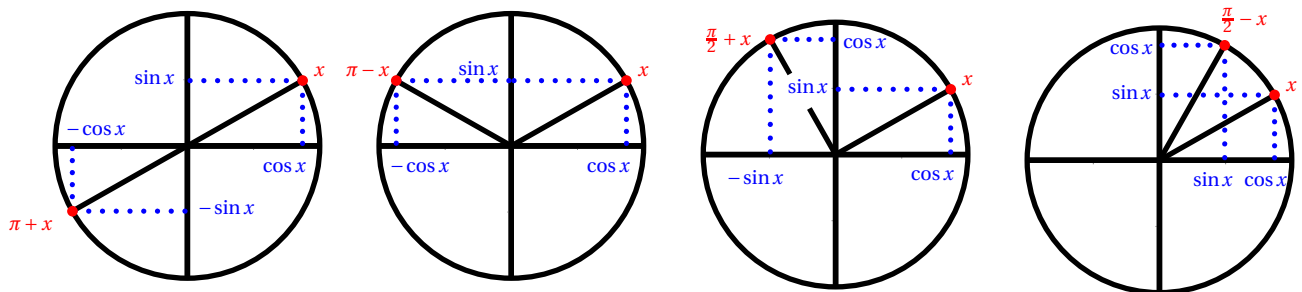
$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$



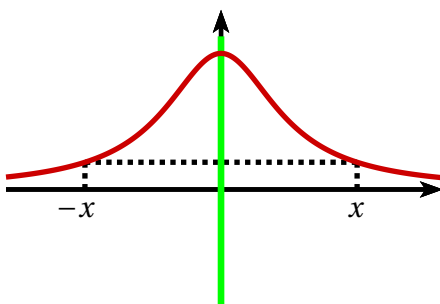
Venons-en à présent aux fonctions cos et sin. On commence par un rappel sur la parité et sur la périodicité.

Une fonction f dont l'ensemble de définition D_f est symétrique par rapport à 0 est dite :

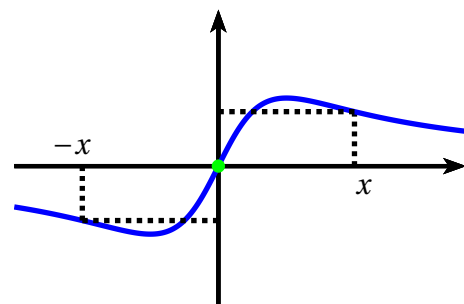
► Paire si $\forall x \in D_f, f(-x) = f(x)$.

► Impaire si $\forall x \in D_f, f(-x) = -f(x)$.

Définition 3



Fonction paire.



Fonction impaire.

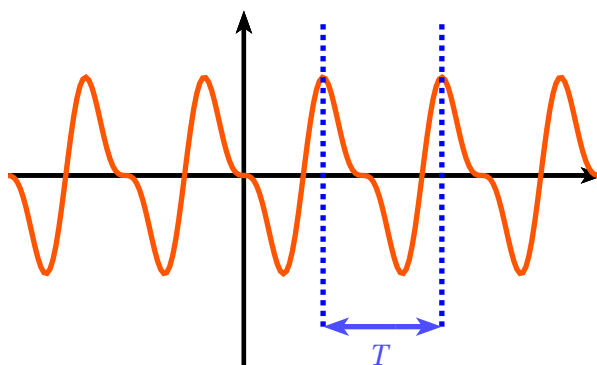
Proposition 3

1. La courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
2. La courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Soit f une fonction et soit $T > 0$. On dit que f est T -périodique si :

- l'ensemble de définition D_f de f est invariant par un décalage de T en abscisse ($\forall x \in \mathbb{R}, x \in D_f \iff x + T \in D_f$);
- $\forall x \in D_f, f(x + T) = f(x)$.

La courbe d'une fonction T -périodique se reproduit identique à elle-même tous les T .



Proposition 4

1. La fonction cos est paire :

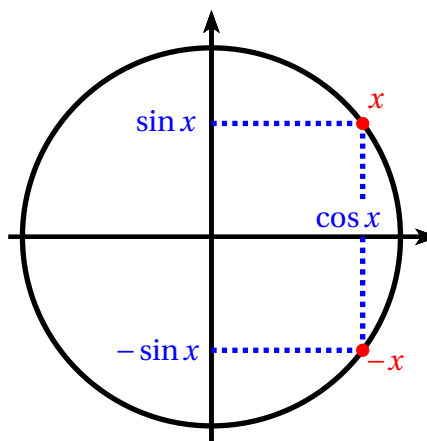
$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos x.$$

2. La fonction sin est impaire :

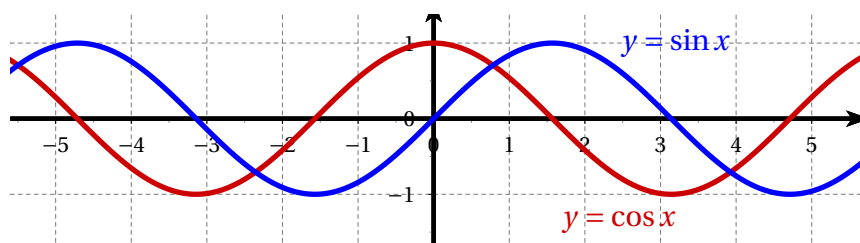
$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin x.$$

3. Les fonctions cos et sin sont 2π -périodiques :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x+2\pi) = \cos x, \sin(x+2\pi) = \sin x.$$



On trace les courbes représentatives des fonctions cos et sin, en trois étapes : on commence par tracer les courbes sur l'intervalle $[0; \pi]$, puis on complète par symétrie sur $[-\pi; 0]$ grâce à la parité; enfin on trace les courbes sur \mathbb{R} tout entier par périodicité.



Pour terminer cette section, on rappelle les dérivées des fonctions cos et sin.

Proposition 5

Les fonctions cos et sin sont dérivables sur \mathbb{R} et pour tout réel x :

1. $(\cos)'(x) = -\sin x.$

2. $(\sin)'(x) = \cos x.$



Exercices

Exercices 3 à 5

II. Formules d'addition, applications

Proposition 6 (formules d'addition)

Pour tous réels a, b :

1. $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$
2. $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$
3. $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a.$
4. $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$

Exemple 2

On calcule $\cos \frac{\pi}{12}$. Pour cela, on remarque que $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$. Donc d'après la 1^{re} formule d'addition :

$$\cos \frac{\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.$$

Proposition 7 (formules de duplication)

Pour tout réel a :

1. $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a.$
2. $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a.$



Exercices

Exercices 6 à 9

Exemple 3 (transformation de Fresnel)

Soit x un réel. On transforme l'expression $\cos x + \sqrt{3} \sin x$ grâce aux formules de duplication. Comme $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 1 \cos x + \sqrt{3} \sin x$, on commence par mettre $\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$ en facteur :

$$\cos x + \sqrt{3} \sin x = 2 \left(\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \right).$$

On sait que $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc en utilisant $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$:^a

$$\cos x + \sqrt{3} \sin x = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} \cos x + \sin \frac{\pi}{3} \sin x \right) = 2 \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$$

^a Pour la dernière étape du calcul, on utilise la formule $\cos(-t) = \cos t$, et on remarque que $\frac{\pi}{3} - x$ et $x - \frac{\pi}{3}$ sont opposés.



Exercices

Exercices 10 à 12

La méthode se généralise :

Proposition 8 (transformation de Fresnel)

Soient a, b, x trois réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$. Alors

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \theta),$$

$$\text{où } \theta \text{ est un réel tel que } \begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}.$$

Remarque. Dans le cours de physique, la formule s'utilise sous la forme $a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, ou bien sous la forme $a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ (avec les mêmes $A > 0$ et $\omega > 0$ dans les deux cas, mais des valeurs de φ différentes).

Les formules ci-dessous découlent des formules d'addition :

Proposition 9 (formules de factorisation)

Pour tous réels p, q :

1. $\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$

3. $\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$

2. $\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right).$

4. $\sin p - \sin q = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right).$

Exemple 4

Soit x un réel. On transforme une somme en produit :

$$\begin{aligned} \cos(3x) - \cos x &= -2 \sin\left(\frac{3x+x}{2}\right) \sin\left(\frac{3x-x}{2}\right) \\ &= -2 \sin(2x) \sin x \end{aligned}$$



Exercices

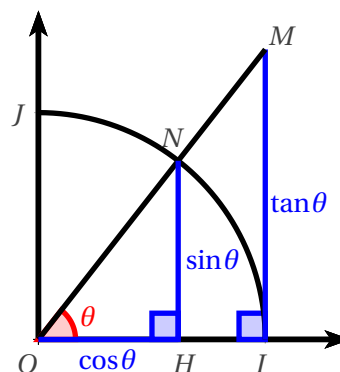
Exercice 13

III. Tangente

Déf.5

Soit θ un angle aigu (entre 0° inclus et 90° exclu) et soit N le point du cercle trigonométrique \mathcal{C} d'ordonnée positive et tel que $\widehat{ION} = \theta$. La tangente à \mathcal{C} au point I coupe la demi-droite $[ON)$ en M . On pose

$$\tan \theta = IM.$$



Remarques.

- Comme $OI = 1$, dans OIM rectangle en I :

$$\tan \theta = IM = \frac{IM}{OI} = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}.$$

On retrouve ainsi la formule du collègue.

- D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{HN}{OH} = \frac{IM}{OI} = IM = \tan \theta.$$

En pratique, c'est avec cette formule que l'on calcule les tangentes d'angles géométriques.

Exemple 5

$$\tan(60^\circ) = \frac{\sin(60^\circ)}{\cos(60^\circ)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{1} = \sqrt{3}.$$

Par analogie, on définit la tangente d'un nombre réel :

Déf.6

Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $\cos x \neq 0$, on pose

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Remarques.

- Les solutions de l'équation $\cos x = 0$ sont les $\frac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, donc l'ensemble de définition de la fonction \tan est $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
- On a donné l'ensemble de définition « en compréhension ». Autres exemples : $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ désigne l'ensemble des entiers naturels pairs, et $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ désigne l'ensemble des réels positifs.

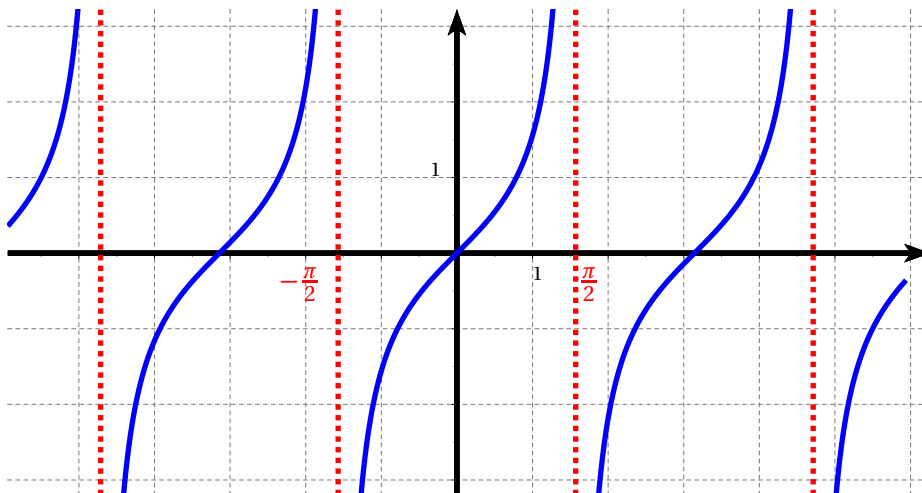
Exemple 6

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	non défini

Pour conclure, on s'intéresse à la parité et à la périodicité de la fonction \tan (on note D son ensemble de définition) et on trace sa courbe représentative :

- $\forall x \in D : \tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$, donc \tan est impaire. Sa courbe représentative est symétrique par rapport à O .
- $\forall x \in D : \tan(x + \pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$, donc \tan est π -périodique.

On trace la courbe représentative sur $[0; \frac{\pi}{2}[$, puis on complète par symétrie et par périodicité. Sur le graphique, on a ajouté des lignes en pointillés au niveau des valeurs interdites.

**Proposition 10**

La fonction \tan est dérivable sur son ensemble de définition D , et

$$\forall x \in D, (\tan)'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Démonstration

Pour tout $x \in D$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. On applique la formule pour la dérivée d'un quotient ^a, avec

$$\begin{array}{ll} u(x) = \sin x & , \quad v(x) = \cos x, \\ u'(x) = \cos x & , \quad v'(x) = -\sin x. \end{array}$$

On obtient, pour tout $x \in D$:

$$\begin{aligned} (\tan)'(x) &= \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{\cos x \times \cos x - \sin x \times (-\sin x)}{(\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

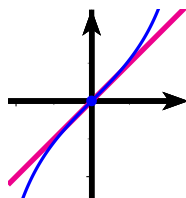
Mais on a aussi :

$$(\tan)'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

a. Rappel : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Remarque.

$(\tan)'(0) = 1 + \tan^2 0 = 1 + 0^2 = 1$ est la pente de la tangente au point d'abscisse 0 :



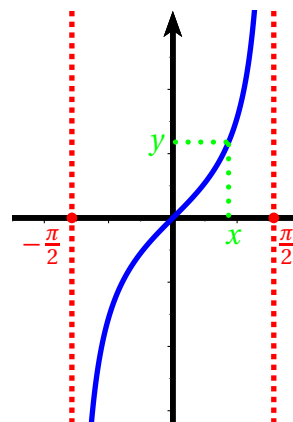
Déf. 7

Soit $y \in \mathbb{R}$. Il existe un unique $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan x = y$. On note alors

$$x = \arctan y.$$

Exemple 7

- $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$,
- $\arctan 0 = 0$,
- $\arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$.



Exercices

Exercices 14 à 18

IV. Étude d'une fonction trigonométrique

Exemple 8

On pose $g(x) = \sin^2 x + \cos x = (\sin x)^2 + \cos x$ pour $x \in \mathbb{R}$. Nous allons successivement :

- **Étape 1.** Étudier la parité de g et sa périodicité. On pourra alors réduire l'intervalle d'étude.
- **Étape 2.** Calculer la dérivée et étudier les variations de g sur l'intervalle réduit.
- **Étape 3.** Construire la courbe représentative de g .

Étape 1.

La fonction \cos est paire et la fonction \sin est impaire, donc pour tout réel x :

$$g(-x) = (\sin(-x))^2 + \cos(-x) = (-\sin x)^2 + \cos x = (\sin x)^2 + \cos x = g(x).$$

La fonction g est donc paire.

Les fonctions \cos et \sin sont 2π -périodiques, donc pour tout réel x :

$$g(x + 2\pi) = (\sin(x + 2\pi))^2 + \cos(x + 2\pi) = (\sin x)^2 + \cos x = g(x).$$

La fonction g est donc 2π -périodique.

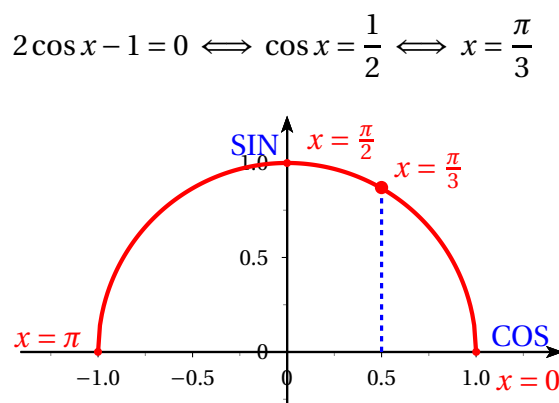
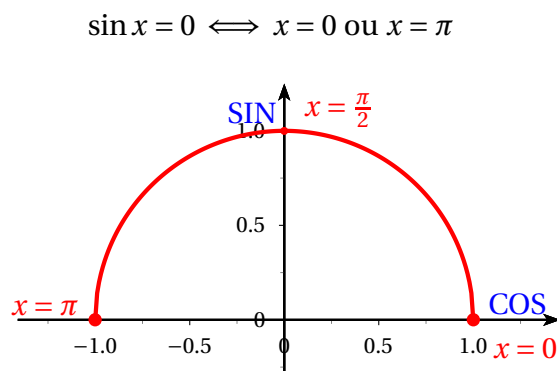
Comme g est 2π -périodique, on peut l'étudier sur $[-\pi; \pi]$ uniquement; et comme elle est paire, on peut même réduire l'étude à l'intervalle $[0; \pi]$.

Étape 2.

D'après la formule $(u^2)' = 2 \times u' \times u$, pour tout $x \in [0; \pi]$:

$$g'(x) = 2 \sin'(x) \times \sin x + \cos'(x) = 2 \cos x \sin x - \sin x = \sin x (2 \cos x - 1).$$

Pour étudier les variations, on résout les équations $\sin x = 0$ et $2 \cos x - 1 = 0$ dans $[0; \pi]$:



On peut donc construire le tableau de variations :

Exemple 8 – Suite

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$\sin x$	0	+	+
$2 \cos x - 1$		+	0
$g'(x)$	0	+	0
$g(x)$	1	$\frac{5}{4}$	-1

Pour obtenir le signe de $\sin x$ et de $2 \cos x - 1$ sur chaque intervalle, on remplace par des valeurs de x . Par exemple, pour la ligne $2 \cos x - 1$:

- $2 \cos 0 - 1 = 2 \times 1 - 1 = 1 \oplus$,
- $2 \cos \pi - 1 = 2 \times (-1) - 1 = -3 \ominus$,

d'où les signes $2 \cos x - 1 \mid + \oplus -$.

De plus :

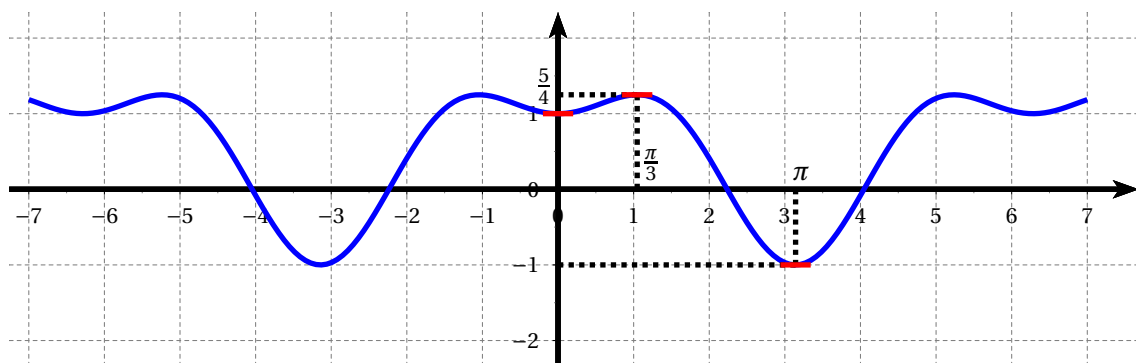
- $g(0) = (\sin 0)^2 + \cos 0 = 0^2 + 1 = 1$;
- $g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\sin \frac{\pi}{3}\right)^2 + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$;
- $g(\pi) = (\sin \pi)^2 + \cos \pi = 0^2 + (-1) = -1$.

Remarque.

Comme la dérivée s'annule, on a des tangentes horizontales aux points de la courbe d'abscisses 0 , $\frac{\pi}{3}$ et π (tracées en rouge sur la courbe à l'étape 3).

Étape 3.

On trace la courbe sur $[0; \pi]$ à partir du tableau de variations, puis on complète par parité et par périodicité.



V. Exercices

Exercice 1.

Calculer le cos et le sin de :

1. $\pi, \frac{\pi}{2}, 0, -5\pi, \frac{31\pi}{2}$.
2. $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$.
3. $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$.
4. $\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{2023\pi}{4}$.

Exercice 2 (III).

Résoudre chaque (in)équation dans l'intervalle donné :

1. $\cos x = \frac{1}{2}$, dans $[0; \frac{\pi}{2}]$.
2. $2 \sin x - 1 = 0$, dans $[0; \pi]$.
3. $2 \sin x - 1 \geq 0$, dans $[0; \pi]$.
4. $(2 \cos x - \sqrt{3}) \cos x = 0$, dans $[-\pi; \pi]$.
5. $2 \sin x \cos x = -\sin x$, dans $[0; \pi]$.
6. $|\sin x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, dans $[0; 2\pi]$.
7. $|\sin x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$, dans $[0; 2\pi]$.
8. $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$, dans $[0; \pi]$.
9. $2 \cos^2 x + 3\sqrt{2} \cos x + 2 = 0$, dans $[0; 2\pi]$.
10. $\sin x = 0$, dans \mathbb{R} .
11. $\cos x = 0$, dans \mathbb{R} .
12. $|\sin x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, dans \mathbb{R} .

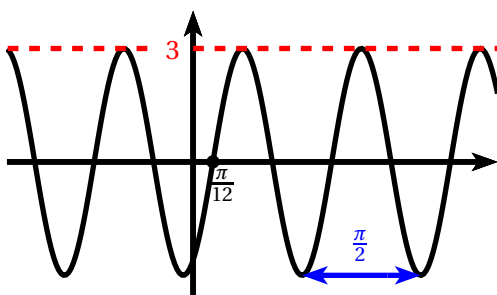
Exercice 3 (III).

Dans chaque question, tracer dans un même repère, sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$, les courbes dont on vous donne l'équation.

1. $y = \cos x$, $y = 2 \cos(x) + 1$.
2. $y = \sin x$, $y = \sin(x - \frac{\pi}{3})$.
3. $y = \sin x$, $y = \sin(2x)$.

Exercice 4 (V).

On a tracé ci-dessous une courbe d'équation $y = A \sin(\omega t - \varphi)$, où A , ω et φ sont trois réels ($A > 0$, $\omega > 0$).



Déterminer les valeurs de A , ω et φ .

Exercice 5 (III).

Calculer les dérivées des fonctions définies sur \mathbb{R} :

1. $f : x \mapsto \sin(2x)$.
2. $g : x \mapsto \sin(-3x + 4)$.
3. $h : x \mapsto \cos(-x + \frac{\pi}{3})$.
4. $i : x \mapsto \sin x \cos x$.

Exercice 6 (III).

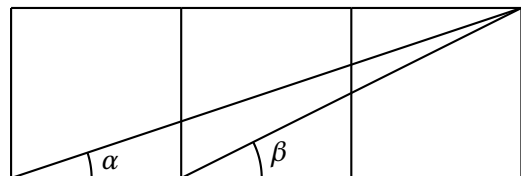
Calculer $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$, puis donner les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$.

Exercice 7.

1. Calculer $\cos(2x)$ dans chacun des cas suivants :
 - $\cos x = \frac{3}{5}$,
 - $\sin x = \frac{2}{3}$.
2. Soit $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ tel que $\cos x = \frac{1}{4}$. Calculer $\sin(2x)$.

Exercice 8.

Trois carrés sont disposés comme l'indique la figure ci-dessous.



1. Calculer $\cos \alpha$, $\sin \alpha$, $\cos \beta$ et $\sin \beta$.
2. Prouver que $\cos(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. Donner un encadrement de $\alpha + \beta$.
4. En déduire $\alpha + \beta$.

Exercice 9 (III).

1. Calculer $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, puis donner la valeur exacte de $\sin \frac{\pi}{12}$.
2. En prenant $a = \frac{\pi}{12}$ dans la formule $\cos(2a) = 1 - 2 \sin^2 a$, calculer la valeur exacte de $\sin \frac{\pi}{12}$ d'une autre manière.
3. Dans les questions 1 et 2, on a trouvé deux résultats différents pour $\sin \frac{\pi}{12}$. Qu'en pensez-vous?

Exercice 10.

En utilisant la transformation de Fresnel, donner l'allure de la courbe d'équation

$$y = \sqrt{2} \cos x + \sqrt{2} \sin x$$

sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$.

Exercice 11 (III).

Résoudre dans \mathbb{R} les équations :

1. $\sqrt{6} \cos x + \sqrt{2} \sin x = 0$.
2. $2 \cos(2x) - 2 \sin(2x) = 2\sqrt{2}$.

Exercice 12 (V).

En utilisant les formules de duplication, démontrer que pour tous réels p, q :

- $\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.
- $\sin p - \sin q = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$.

Exercice 13 (III).

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Transformer la somme $\sin(5x) + \sin x$ en produit.
2. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\sin(5x) + \sin x = 0$.

Exercice 14 (III).

Calculer la tan de $\pi, \frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}$.

Exercice 15 (III).

Déterminer :

- $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
- $\arctan(-1)$

Exercice 16.

Construire le cercle trigonométrique \mathcal{C} et placer sur \mathcal{C} :

- $\arctan 2$
- $\arctan(-3)$

Exercice 17 (III).

Démontrer que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \frac{1}{\tan t}.$$

Exercice 18 (III).

Démontrer que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$:

$$\sin(2t) = \frac{2 \tan t}{1 + \tan^2 t}, \quad \cos(2t) = \frac{1 - \tan^2 t}{1 + \tan^2 t}.$$

Exercice 19 (III).

On définit une fonction f par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sin(2x) - 2 \sin x.$$

On note \mathcal{C} sa courbe représentative.

1. Étudier la parité et la périodicité de f . En déduire un intervalle d'étude réduit I .
2. Prouver que $f'(x) = 4 \cos^2 x - 2 \cos x - 2$ pour tout $x \in I$.
3. Étudier les variations de f sur I .
4. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse π .
5. Construire la courbe \mathcal{C} .