Chapitre 1 : Pratique calculatoire

I. L'équation du second degré

On commence par quelques résolutions d'équations :

Exercices

Exercice 1

Soient a, b, c trois nombres réels, avec $a \neq 0$. On considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(E) \qquad ax^2 + bx + c = 0.$$

Déf.1 Le discriminant de (E) est $\Delta = b^2 - 4ac$.

Théorème 1 (résolution de l'équation du second degré)

On distingue trois cas :

— Si $\Delta > 0$, (E) a deux solutions : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $\qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

— Si $\Delta = 0$, (E) a une solution : $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

— Si $\Delta < 0$, (E) n'a pas de solution.

Les solutions, lorsqu'elles existent, sont appelées racines de $ax^2 + bx + c$.

Exemples 1

1. On résout l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$.

- $a = 1$, $b = -4$, $c = 3$.
- $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4$.
- $\Delta > 0$, donc il y a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4)-\sqrt{4}}{2\times 1} = \frac{4-2}{2} = 1,$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4)+\sqrt{4}}{2} = \frac{4+2}{2} = 3.$$

2. On résout l'équation $-2x^2 + 6x - 5 = 0$.

- $a = -2$, $b = 6$, $c = -5$.
- $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times (-2) \times (-5) = -4$.
- $\Delta < 0$, donc il n'y a pas de solution.

Remarque.
Pour certaines équations simples, on peut se passer du théorème 1. Par exemple, pour résoudre l'équation $x^2-2x=0$, on factorise : $x(x-2)=0$; et on en déduit immédiatement les deux solutions : $x_1=0$, $x_2=2$.

Exercices
Exercice 2

Exemple 2

On résout l'équation $\frac{-3}{x-4}=x$.
On cherche d'abord les « valeurs interdites » :

$$x-4=0 \iff x=4, \text{ donc on résout dans } \mathbb{R}\setminus\{4\}.$$

Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{4\}$:

$$\begin{aligned} & \frac{-3}{x-4} &&= x \\ \iff & -3 &&= x(x-4) \qquad \text{(produit en croix)} \\ \iff & 0 &&= x^2-4x+3 \end{aligned}$$

C'est l'une des équations de l'exemple 1, on sait que les solutions sont $x_1=1$, $x_2=3$.

Exercices
Exercice 3

II. Quantificateurs, propositions

Pour abréger la rédaction, on utilisera parfois les quantificateurs :

- $\forall$ se lit « quel que soit » (quantificateur universel)
- $\exists$ se lit « il existe » (quantificateur existentiel)
- $\exists\,!$ se lit « il existe un unique »

Exemples 3

1. « Tout nombre réel a un carré positif » s'écrit de façon formelle

$$\forall x\in\mathbb{R},\ x^2\geq 0.$$

(rappel : $\in$ se lit « appartient à »).

2. Il existe un nombre complexe dont le carré vaut -1 :

$$\exists z\in\mathbb{C},\ z^2=-1$$

(il en existe même deux : i et $-$i, donc écrire $\exists\,!$ serait une erreur).

Attention

On ne mélange pas dans une même phrase le texte en français et les abréviations mathématiques :

$$\cancel{\forall y \geq 0, \text{ il existe } x \in \mathbb{R},\ y = x^2.}$$

Exercices

Exercices 4 et 5

Déf. 2

Une proposition mathématique est un énoncé $\mathscr{P}$ au sujet duquel on peut se poser la question « $\mathscr{P}$ est-il vrai ? »

Une proposition mathématique est soit vraie, soit fausse (principe du tiers exclu).

Exemples 4

1. La proposition « $2+2=4$ » est vraie, la proposition « $3+5=10$ » est fausse.
2. La proposition
$$\mathscr{P} : \text{ « } \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0 \text{ »}$$
est vraie.
3. Une proposition peut aussi dépendre d'une variable. Par exemple,
$$\mathscr{P}(x)\ :\ \text{« } (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \text{ »}$$
est vraie pour tout réel x.

On termine avec la notion d'implication, de réciproque, de contraposée et d'équivalence.

Définition 3

- Si A et B sont deux propositions mathématiques,
$$A \implies B$$
se lit « A implique B », et signifie « si A est vraie, alors B est vraie ».
- La proposition contraposée de $A \implies B$ est
$$(\text{non } B) \implies (\text{non } A)$$
((non A) désigne la négation de A).
- La proposition réciproque de $A \implies B$ est
$$B \implies A.$$

Exemple 5

Soit n un entier naturel. On note A la proposition « n est multiple de 10 » et B la proposition « n est multiple de 5. »

- La proposition $A \Longrightarrow B$ est vraie (propriété du collège).
- La contraposée s'écrit

$$\left(n \text{ n'est pas multiple de } 5\right) \Longrightarrow \left(n \text{ n'est pas multiple de } 10\right).$$

  Elle est vraie également.

  Plus généralement, quand une proposition $A \Longrightarrow B$ est vraie, sa contraposée l'est aussi – et réciproquement[a].
- La réciproque s'écrit

$$\left(n \text{ est un multiple de } 5\right) \Longrightarrow \left(n \text{ est un multiple de } 10\right).$$

  Cette proposition est fausse. Il suffit d'exhiber un contre-exemple : $n = 5$ est multiple de 5, mais pas de 10.

a. Donc démontrer qu'une implication est vraie ou que sa contraposée est vraie revient au même.

Déf. 4

Si A et B sont deux propositions mathématiques, $A \iff B$ se lit « A est équivalent à B », et signifie « si A est vraie, alors B est vraie ; et si B est vraie, alors A est vraie ». De façon plus concise : « A est vraie si et seulement si B est vraie ».

Exemple 6

Si n est un entier naturel, les propositions « n est multiple de 10 » et « le chiffres des unités de n est 0 » sont équivalentes.

Exercices

Exercices 6 à 11

Remarque.

Lorsqu'on résout une (in)équation simple, on s'autorise les abus d'écriture du type

$$2x - 1 = 5 \iff 2x = 1 + 5 \iff x = \frac{6}{2} = 3.$$

Attention cependant : ce n'est légitime que s'il y a bien équivalence entre chaque (in)égalité et la suivante.

III. Inégalités et valeur absolue

Proposition 1

1. On ne change pas le sens d'une ou plusieurs inégalités quand :
   - on ajoute ou on retranche à tous les membres un même nombre ;
   - on multiplie tous les membres par un nombre strictement positif.
2. On change le sens d'une ou plusieurs inégalités quand on multiplie tous les membres par un nombre strictement négatif.
3. Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés ($\iff$ la fonction carré est strictement croissante sur $[0;+\infty[$).
4. Deux nombres strictement positifs sont rangés en sens contraire de leurs inverses ($\iff$ la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$).

Exemple 7

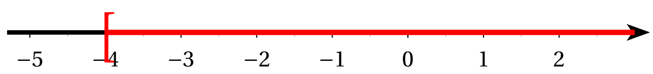
On résout l'inéquation $-3x-4 \leq 8$.

$$-3x-4 \leq 8 \iff -3x \leq 8+4 \iff -3x \leq 12 \iff x \geq \frac{12}{-3} \iff x \geq -4$$

Attention

$-3<0$, donc $\leq$ devient $\geq$.

Conclusion : l'ensemble des solutions est l'intervalle $S=[-4;+\infty[$.



Exemple 8

Soit $1 \leq t < 3$. On voudrait encadrer $\frac{1}{1+t}$.

On part de

$$1 \leq t < 3,$$

on ajoute 1 :

$$1+1 \leq 1+t < 1+3$$
$$2 \leq 1+t < 4.$$

Deux nombres strictement positifs sont rangés en sens contraire de leurs inverses, donc

$$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{1+t} > \frac{1}{4}.$$

Exemple 9

Pour tous réels a, b :

$$a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

En effet, $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$. Or

$$(a-b)^2 \geq 0 \qquad \text{(un carré est positif)},$$

donc

$$a^2 + b^2 - 2ab \geq 0\,;$$

et donc

$$a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

Astuce

Savoir lequel de deux nombres x et y est le plus grand revient à connaître le signe de la différence $y - x$.

Exercices

Exercices 12 à 16

Définition 5

La valeur absolue d'un nombre réel x, notée $|x|$, est le nombre défini par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Exemples 10

1. $3 > 0$, donc $|3| = 3$.
2. $-3 < 0$, donc $|-3| = -(-3) = 3$.
   De façon informelle, « on enlève le signe "$-$", s'il y en a un ».

Exercices

Exercice 17

Proposition 2

Pour tous réels x, y :

1. $|x| \geq x$.
2. $|x| = 0 \iff x = 0$.
3. $|x \times y| = |x| \times |y|$.
4. $|x|^2 = x^2$.
5. $\sqrt{x^2} = |x|$.
6. **Inégalité triangulaire.** $|x+y| \leq |x| + |y|$.

La valeur absolue permet de mesurer les distances :

Proposition 3

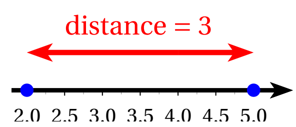
La distance entre deux nombres réels x et y est égale à $|x-y|$.

Exemple 11

On prend $x=2$ et $y=5$. La distance qui les sépare est $5-2=3$. Mais c'est aussi

$$|x-y|=|2-5|=|-3|=3.$$

Ici, le fait de prendre la valeur absolue permet de supprimer le « $-$ » qui apparaît quand on calcule $x-y$.



Exemple 12

On résout l'équation $|x-4|=3$. On propose deux méthodes :

1. Avec la définition de la valeur absolue.

Les nombres dont la valeur absolue vaut 3 sont 3 et -3.
Donc l'égalité

$$|x-4|=3$$

est équivalente à

$$x-4=3 \qquad \text{ou} \qquad x-4=-3$$

– il y a deux possibilités !
Donc

$$\begin{array}{lcl} x=3+4 & \text{ou} & x=-3+4 \\ x=7 & \text{ou} & x=1 \end{array}$$

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation est $S=\{7;1\}$.

Remarque. S est l'ensemble qui contient deux éléments : 7 et 1.

2. Par analyse-synthèse.

Analyse. Si x est solution, alors $|x-4|^2=3^2$, donc $(x-4)^2=9$. On développe et on résout :

$$\begin{aligned} x^2-8x+16&=9 \\ x^2-8x+16-9&=0 \\ x^2-8x+7&=0. \end{aligned}$$

On aboutit à une équation du 2nd degré.

- $a=1$, $b=-8$, $c=7$.
- $\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4\times1\times7=36$.
- $\Delta>0$, donc il y a deux solutions :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-8)-\sqrt{36}}{2\times1}=\frac{8-6}{2}=1,$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-8)+\sqrt{36}}{2}=\frac{8+6}{2}=7.$$

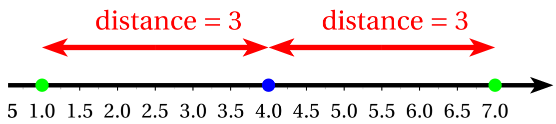
Synthèse. On vérifie les solutions trouvées en remplaçant :

- $|1-4|=|-3|=3$, donc 1 est bien solution.
- $|7-4|=|3|=3$, donc 7 est bien solution.

Conclusion. $S=\{7;1\}$.

Remarques.

- Illustration graphique : dire que $|x-4|=3$ revient à dire que la distance entre x et 4 est égale à 3.



On retrouve les deux solutions : $x=7$ et $x=1$.

- Dans la méthode 1, il est inutile de vérifier les solutions car on a raisonné par équivalence :

$$|x-4|=3 \iff (x-4=3 \text{ ou } x-4=-3) \iff \text{etc.}$$

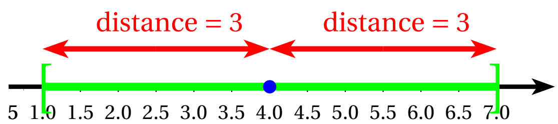
Exercices

Exercice 18

Exemple 13

Quels sont les nombres x tels que $|x-4| \leq 3$?

Cette inégalité signifie que la distance entre x et 4 est inférieure ou égale à 3. On « voit » que les solutions sont les nombres de l'intervalle $[1;7]$ [a].



a. On se contente ici d'une méthode graphique – donc non rigoureuse.

Exercices

Exercices 19 à 21

IV. Factorisation des expressions de degrés 2 et 3

On s'intéresse encore aux expressions du second degré, donc de la forme ax^2+bx+c, avec $a \neq 0$.

Théorème 2 (factorisation de l'expression du second degré)

On distingue deux cas :

— Si $\Delta > 0$, pour tout réel x : $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$.

— Si $\Delta = 0$, pour tout réel x : $ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$.

Exemple 14

On admet que les racines de x^2+x-2 sont 1 et -2 (cf exemple 17, plus loin). Donc pour tout réel x :

$$x^2+x-2 = a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right) = 1(x-1)(x-(-2)) = (x-1)(x+2).$$

Exemple 15

Pour factoriser une expression du 2nd degré, on peut parfois aller plus vite. Prenons l'exemple de $x^2+4x-12$: il y a une racine « évidente » $x_1=2$, puisque $2^2+4\times 2-12=0$. Pour trouver x_2, on écrit la factorisation

$$x^2+4x-{\color{red}12} = (x-{\color{red}2})\left(x-{\color{red}x_2}\right).$$

En développant le membre de droite et en « identifiant » les coefficients constants (en rouge), on obtient $2\times x_2=-12$, et donc $x_2=\frac{-12}{2}=-6$.

Plus généralement, lorsqu'il y a deux racines x_1 et x_2, elles sont reliées par les formules :

Proposition 4

1. $x_1\times x_2=\frac{c}{a}$
2. $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$

On en vient à présent aux expressions de degré 3.

Proposition 5

Soient a, b, c, d quatre nombres réels, avec $a\neq 0$. Si α est solution de l'équation $ax^3+bx^2+cx+d=0$, alors il existe une fonction du 2nd degré f telle que

$$\forall x\in\mathbb{R},\ ax^3+bx^2+cx+d=(x-\alpha)f(x).$$

Exemple 16

On factorise l'expression x^3-2x^2+5x-4.

1 est « solution évidente » de l'équation $x^3-2x^2+5x-4=0$, puisque $1^3-2\times 1^2+5\times 1-4=0$. Il existe donc une fonction f de degré 2 telle que

$$\forall x\in\mathbb{R},\ x^3-2x^2+5x-4=(x-1)f(x).$$

Pour déterminer f, on pose la « division euclidienne » :

$$\begin{array}{rr|l}
 & x^3-2x^2+5x-4 & x-1 \\ \cline{3-3}
- & x^3-x^2 & x^2-x+4 \\ \cline{2-2}
 & -x^2+5x-4 & \\
- & -x^2+x & \\ \cline{2-2}
 & 4x-4 & \\
- & 4x-4 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

On a donc :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ x^3-2x^2+5x-4=(x-1)\left(x^2-x+4\right).$$

Exercices

Exercices 22 et 23

V. Signe du second degré

Commençons par un rappel sur les tableaux de signes :

Exercices

Exercice 24

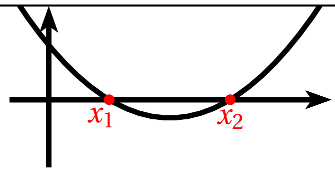
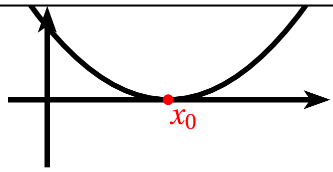
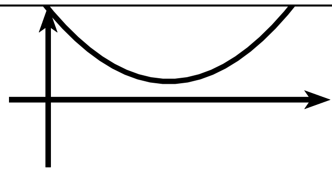
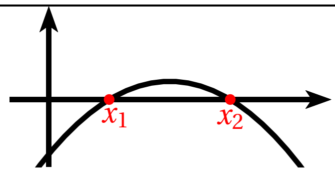
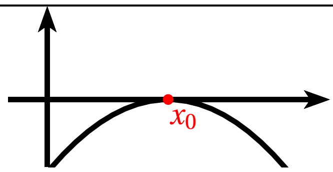
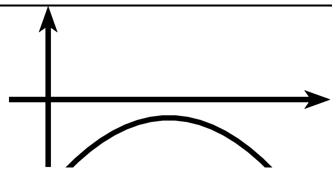
On considère à nouveau une expression du second degré, donc de la forme ax^2+bx+c, avec $a \neq 0$.

Proposition 6

La courbe d'équation $y = ax^2 + bx + c$, appelée parabole, est :

- vers le haut $\smile$ si $a > 0$;
- vers le bas $\frown$ si $a < 0$.

On s'intéresse au signe de $f(x) = ax^2+bx+c$. On distingue six situations différentes, selon le signe de a et de Δ :

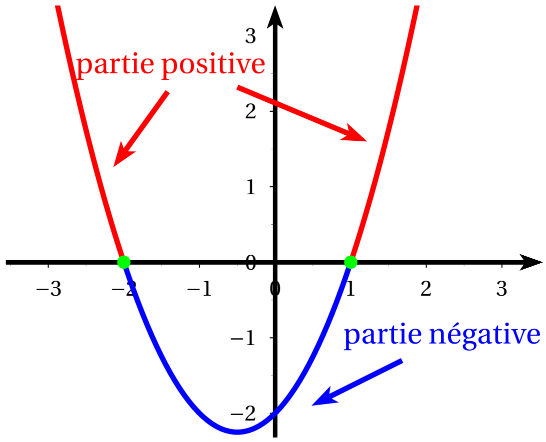
	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$	 $\begin{array}{c\|ccccc} x & & x_1 & & x_2 & \\ \hline f(x) & + & 0 & - & 0 & + \end{array}$	 $\begin{array}{c\|ccc} x & & x_0 & \\ \hline f(x) & + & 0 & + \end{array}$	 $\begin{array}{c\|c} x & \\ \hline f(x) & + \end{array}$
$a < 0$	 $\begin{array}{c\|ccccc} x & & x_1 & & x_2 & \\ \hline f(x) & - & 0 & + & 0 & - \end{array}$	 $\begin{array}{c\|ccc} x & & x_0 & \\ \hline f(x) & - & 0 & - \end{array}$	 $\begin{array}{c\|c} x & \\ \hline f(x) & - \end{array}$

On résume la situation par le théorème :

Théorème 3 (signe de l'expression du second degré)

ax^2+bx+c est du signe de a, sauf entre les racines, s'il y en a.

Exemple 17



On construit le tableau de signe de x^2+x-2.

- $a=1$, $b=1$, $c=-2$;
- $\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times1\times(-2)=9$;
- $\Delta>0$, donc il y a deux racines :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-\sqrt{9}}{2\times1}=\frac{-1-3}{2}=-2,$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+\sqrt{9}}{2}=\frac{-1+3}{2}=1.$$

- $a=1$, a est positif.

D'après le théorème 3, x^2+x-2 est positif (c.-à-d. du signe de a), sauf entre les racines -2 et 1. On obtient donc le tableau :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercices

Exercice 25

Exemple 18

On résout l'inéquation $x^2+x-2\geq0$ grâce au tableau de signe de l'exemple précédent :

$x^2+x-2\geq0$ (c-à-d x^2+x-2 est positif) lorsque $x\in\,]-\infty;-2]$ ou lorsque $x\in[1;+\infty[$. Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est

$$S=\,]-\infty;-2]\cup[1;+\infty[.$$

Exercices

Exercice 26

VI. Systèmes d'équations

On fait un bref rappel sur les systèmes d'équations, avec une présentation légèrement différente de celle du lycée [1]. On considère le système :

$$\begin{cases}3x+4y=-5\\-2x-y=0\end{cases}$$

On numérote les lignes L_1 et L_2 :

$$\begin{cases}3x+4y=-5 & L_1\\-2x-y=0 & L_2\end{cases}$$

1. La notion sera développée bien davantage plus tard au cours de l'année.

On « élimine le x » de la ligne L_2 en remplaçant cette ligne par $2L_1+3L_2$:[2]

$$\begin{cases} 3x+4y=-5 & L_1 \\ \quad\quad 5y=-10 & L_2 \leftarrow 2L_1+3L_2 \end{cases}$$

On en déduit $y=\frac{-10}{5}=-2$, puis en reprenant la ligne L_1 :

$$3x+4y=-5 \iff 3x+4\times(-2)=-5 \iff 3x-8=-5 \iff 3x=-5+8 \iff x=\frac{3}{3}=1.$$

Conclusion : la solution du système est $(x,y)=(1,-2)$.

Exercices

Exercice 27

VII. Démonstration du théorème 1

Démonstration (du théorème 1)

On doit résoudre l'équation

$$ax^2+bx+c=0.$$

Comme a est différent de 0, on peut multiplier par $4a$:

$$4a\left(ax^2+bx+c\right)=4a\times 0,$$

soit

$$4a^2x^2+4abx+4ac=0.$$

On ajoute b^2-4ac dans chaque membre :

$$4a^2x^2+4abx+4ac+b^2-4ac=0+b^2-4ac,$$

donc en se rappelant que $\Delta=b^2-4ac$:

$$4a^2x^2+4abx+\cancel{4ac}+b^2-\cancel{4ac}=b^2-4ac$$
$$4a^2x^2+4abx+b^2=\Delta.$$

Si l'on a fait tout cela, c'est pour obtenir une identité remarquable dans le membre de gauche : l'équation peut en effet se réécrire

$$(2ax)^2+2\times 2ax\times b+b^2=\Delta.$$

Donc en utilisant $A^2+2AB+B^2=(A+B)^2$, avec $A=2ax$ et $b=B$:

$$(2ax+b)^2=\Delta.$$

On distingue alors trois cas :

2. Les x s'éliminent : $2\times 3x+3\times(-2x)=0$; il reste $2\times 4y+3\times(-y)=5y$ dans le membre de gauche, et $2\times(-5)+3\times 0=-10$ dans le membre de droite.

Démonstration (du théorème 1) – Suite

1. Si $\Delta > 0$, il y a deux possibilités :

$$2ax + b = \sqrt{\Delta} \text{ ou } 2ax + b = -\sqrt{\Delta}.$$

On résout séparément :

$$\begin{aligned} 2ax + b &= \sqrt{\Delta} \\ 2ax &= -b + \sqrt{\Delta} \\ x &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2ax + b &= -\sqrt{\Delta} \\ 2ax &= -b - \sqrt{\Delta} \\ x &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned}$$

On obtient les deux solutions attendues : $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

2. Si $\Delta = 0$, l'équation se réécrit

$$(2ax + b)^2 = 0.$$

Donc $2ax + b = 0$, puis $x = -\frac{b}{2a}$. C'est, là encore, la solution attendue.

3. Si $\Delta < 0$, il est impossible que $(2ax + b)^2 = \Delta$, car un carré est positif. L'équation n'a donc pas de solution.

VIII. Exercices

Exercice 1.
Résoudre les équations :

1. $x^2 + 2x = 0$.
2. $x^2 - 16 = 0$.
3. $(2x - 1)(x - 5) = 0$.
4. $x^2 + 7 = 0$.

Exercice 2 (🏛).
Résoudre les équations :

1. $x^2 - 3x - 4 = 0$.
2. $2x^2 - 12x = -18$.
3. $x^2 - 4x + 5 = 0$.
4. $x^2 + 2x - 4 = 0$.
5. $x^2 = -6x$.

Exercice 3 (🏛).
Résoudre les équations :

1. $x + 2 = \frac{2}{x-2}$.
2. $\dfrac{x+1}{x} = \dfrac{2}{x+1}$.

Exercice 4 (🏛).
Réécrire les énoncés en utilisant les quantificateurs. Dans chaque cas, dire si la proposition est vraie ou fausse. Justifier.

1. L'équation $z^2 = -4$ a exactement une solution dans $\mathbb{C}$.
2. Le cube de tout nombre réel est positif.

Exercice 5.
Démontrer les identités [a] :

1. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R},\ (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
2. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R},\ (a - b)\left(a^2 + ab + b^2\right) = a^3 - b^3$.

a. Une identité est une égalité entre deux expressions qui est vraie quelles que soient les valeurs des différentes variables employées.

Exercice 6.
Soit ABC est triangle. Énoncer le théorème de Pythagore, le théorème réciproque et le théorème contraposé.

Exercice 7.

Écrire la négation des phrases ci-dessous :

1. Tous les hommes sont mortels.
2. Il existe un dessert sans sucre à la cantine.
3. Pour toute maladie, il existe un remède.
4. Chloé n'aime ni les fraises, ni les framboises.

Exercice 8.

Si A et B désignent des propositions mathématiques, on définit deux nouvelles propositions :

- $A \vee B$ (lire « A ou B ») est vraie si au moins l'une des deux propositions A ou B est vraie.
- $A \wedge B$ (lire « A et B ») est vraie si les deux propositions A et B sont vraies.

Dans les tableaux ci-dessous, on a écrit V pour vrai, F pour faux.

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

A	B	non (A)	non (B)	non $(A \vee B)$	non $(A) \wedge$ non (B)
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

1. Recopier et compléter les tableaux en indiquant V ou F dans chaque case.
2. Que remarquez-vous dans les deux colonnes les plus à droite du deuxième tableau ?

Exercice 9 (🏛).

Compléter les pointillés avec les symboles $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$ ou $\Longleftrightarrow$.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x \geq 3 \ldots\ldots x \geq 2.$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 4 \ldots\ldots x \geq 2.$

Exercice 10 (🏛).

Compléter les pointillés avec le mot « nécessaire » ou le mot « suffisant ».

Pour obtenir le bac, il est .... d'avoir une moyenne supérieure ou égale à 8 à l'issue du 1[er] groupe.

Exercice 11 (🏛).

Démontrer par contraposée :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 < 1 \Longrightarrow x < 1.$$

Exercice 12 (🏛).

Résoudre les inéquations :

1. a. $2x - 1 \leq 5$. On note I l'ensemble des solutions.
   b. $-3x + 1 < -2$. On note J l'ensemble des solutions.
2. Représenter I et J sur une droite graduée et déterminer $I \cap J$ (intersection) et $I \cup J$ (réunion).

Exercice 13 (🏛).

Soit $0 < x \leq 2$. Encadrer :

1. $4x - 3$.
2. $-2x + 5$.
3. $-x + 4$.
4. $2x^2 - 1$.
5. $\dfrac{1}{2x+1}$.

Exercice 14 (🏛).

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq x.$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 \geq n.$

Exercice 15 (🏛).

Soit $x > 0$.

1. Prouver que $x + \dfrac{4}{x} - 4 = \dfrac{(x-2)^2}{x}$.
2. En déduire que $x + \dfrac{4}{x} \geq 4$.

Exercice 16 (🏛).

Soit $t \geq 1$. Majorer $\dfrac{1}{1+t^2}$ et en déduire l'inégalité

$$\frac{t}{1+t^2} \leq \frac{t}{2}.$$

Exercice 17 (🏛).

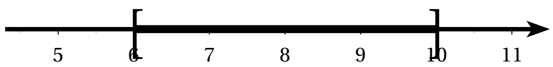
1. Représenter dans un même repère les courbes d'équations $y = |x|$ et $y = |x-2|$.
2. Tracer dans un nouveau repère la courbe d'équation $y = |x| + |x-2|$.

Exercice 18 ().
Résoudre les équations en raisonnant par analyse-synthèse. Interpréter géométriquement la réponse dans les questions 1 et 2.

1. $|x-2| = 3$.
2. $|x-4| = |x+2|$.
3. $|x| = 2x-1$.

Exercice 19.

1. Dans chaque cas, représenter sur une droite graduée l'ensemble des réels x vérifiant la condition donnée :
   - **a.** $|x-3| \leq 1$.
   - **b.** $|x+2| > 3$.
2. Caractériser les points de l'intervalle ci-dessous à l'aide de la valeur absolue.



Exercice 20.
Soit x un réel. Compléter les pointillés sans utiliser la valeur absolue :

1. $|x| \leq 2 \iff \ldots\ldots\ldots$
2. $|x| > 1 \iff \ldots\ldots\ldots$

Exercice 21 ().
Soient x, y deux réels.

1. Démontrer l'inégalité triangulaire :
$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$
2. En déduire
$$|x| - |y| \leq |x-y|.$$

Exercice 22.

1. Déterminer une solution évidente x_1 de l'équation $x^2+9x-10=0$, puis déterminer x_2 grâce à la forme factorisée.
2. Reprendre l'exemple 15 et déterminer x_2 en effectuant une division euclidienne.

Exercice 23 ().
Résoudre les équations en cherchant d'abord une solution « évidente ».

1. $2x^3+7x^2+x-4=0$.
2. $x^3-8=0$.

Exercice 24.
Construire les tableaux de signes de :

1. $2x-4$.
2. $-2x-3$.
3. x^2-3x.
4. $9x^2-25$.

Exercice 25 ().
Construire les tableaux de signes de :

1. x^2-5x+7.
2. $-x^2+6x-8$.

Exercice 26 ().
Résoudre les inéquations :

1. $x^2-2x-1<0$.
2. $x^3-2x^2-x \geq 0$.
3. $x-2 \leq \dfrac{1}{x}$.

Exercice 27.
Résoudre les systèmes d'équations :

1. $$\begin{cases} 8x+6y=26 \\ 5x-3y=-31 \end{cases}$$
2. $$\begin{cases} 9x+2y=17 \\ 6x+5y=-7 \end{cases}$$