Chapitre 5 : Équations différentielles linéaires

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$. On s'intéresse à des équations différentielles d'inconnue $y : I \to \mathbb{R}$, c'est-à-dire à des équations dont l'inconnue est la fonction y, et dans lesquelles apparaissent la dérivée (et éventuellement la dérivée seconde) de y.

La connaissance des primitives permet de résoudre les équations différentielles les plus basiques :

Exemple 1

Les solutions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'(x) = 2x + 5$ sont les fonctions de la forme $y(x) = x^2 + 5x + C$, où C est une constante.

Remarques.

- Pour alléger l'écriture, on omet parfois la variable x quand on écrit une équation différentielle. Il faut avoir en tête que, par exemple, $y' - 3y = 2$ signifie rigoureusement
$$\forall x \in I,\ y'(x) - 3y(x) = 2.$$
On fera aussi l'abus qui consiste à écrire $y(x) = \cdots$, plutôt que $y : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cdots$
- En physique, on note parfois $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ ou $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ au lieu de y'.

Exercices

Exercices 1 et 2

I. EDL d'ordre 1 à coefficients constants

EDL d'ordre 1 : la situation

Dans cette section, on s'intéresse aux équations différentielles
$$(E)\ :\ y' + ay = b,$$
où $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $b : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue (éventuellement constante), appelée second membre de l'équation [a].

On appelle équation homogène associée à (E) l'équation sans 2^{nd} membre
$$(H)\ :\ y' + ay = 0.$$

[a] Si $a = 0$, l'équation (E) se réécrit $y' = b$. Il s'agit donc de trouver les primitives de b sur I, problème que nous laissons de côté dans la leçon.

Théorème 1 (Résolution de (H))

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Les solutions $y : I \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(H)\ :\ y' + ay = 0$$

sont les fonctions de la forme

$$y(x) = C\mathrm{e}^{-ax},$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

Remarque (sur la démonstration du théorème).
Il est facile de vérifier qu'une fonction de la forme $y(x) = C\mathrm{e}^{-ax}$ est bien solution de E :

$$y' + ay = C\left(-a\mathrm{e}^{-ax}\right) + a\left(C\mathrm{e}^{-ax}\right) = -aC\mathrm{e}^{-ax} + aC\mathrm{e}^{-ax} = 0.$$

On démontre en exercice qu'il n'existe pas d'autre solution.

Exemple 2

On résout sur $I = \mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y' + 2y = 0.$$

D'après le théorème 1, les solutions sont de la forme $y(x) = C\mathrm{e}^{-2x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

On se tourne à présent vers les situations où b n'est plus constante.

Théorème 2 (Résolution de (E) – principe de superposition)

Soient $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b : I \to \mathbb{R}$ continue. Les solutions $y : I \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(E)\ :\ y' + ay = b$$

sont les fonctions de la forme

$$y(x) = C\mathrm{e}^{-ax} + y_P(x),$$

où y_P est une solution particulière de (E).

À retenir

Autrement dit, les solutions de (E) sont de la forme

$$\text{solution générale de } (H) + \text{ solution particulière de } (E).$$

Exemple 3

Soit $(E)\ :\ y' + 2y = 2x^2$, à résoudre sur $I = \mathbb{R}$. L'équation homogène associée est $(H)\ :\ y' + 2y = 0$.

- La fonction $y_P(x) = x^2 - x + \dfrac{1}{2}$ est une solution particulière de (E), puisque

$$y_P' + 2y_P = 2x - 1 + 2\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) = 2x - 1 + 2x^2 - 2x + 1 = 2x^2.$$

- D'après le théorème 2, les solutions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions de la forme

$$y(x) = C\mathrm{e}^{-2x} + x^2 - x + \frac{1}{2},$$

  avec $C \in \mathbb{R}$.

Déf. 1 Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. On appelle problème de Cauchy associé à une l'équation différentielle (E) le fait de chercher les solutions de (E) vérifiant de plus $y(x_0) = y_0$ (on parle de condition initiale).

Exemple 4

On revient sur l'exemple 3. On cherche la(les) solutions de $(E)\ :\ y' + 2y = 2x^2$ vérifiant $y(0) = 1$.

On sait que la solution générale est de la forme $y(x) = C\mathrm{e}^{-2x} + x^2 - x + \dfrac{1}{2}$, avec $C \in \mathbb{R}$. On a les équivalences :

$$y(0) = 1 \iff C\mathrm{e}^{-2\times 0} + 0^2 - 0 + \frac{1}{2} = 1 \iff C + \frac{1}{2} = 1 \iff C = \frac{1}{2}.$$

Conclusion : l'unique solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$, est la fonction $y(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} + x^2 - x + \dfrac{1}{2}$.

On dit qu'il y a unicité du problème de Cauchy.

L'unicité du problème de Cauchy est un fait général :

Théorème 3 (unicité de Cauchy)

Soient $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b : I \to \mathbb{R}$ continue, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique solution $y : I \to \mathbb{R}$ de

$$(E)\ :\ y' + ay = b$$

vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$.

Exercices

Exercices 3 à 6

Pour conclure cette section, on s'intéresse à des 2^{nds} membres de types particuliers. On donne deux exemples et la forme générale des solutions.

Exemple 5

On résout sur $I = \mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E)\ :\ y' + 2y = 10$.

Une solution particulière est $y_P(x) = 5$, puisque $y'_P + 2y_P = 0 + 2 \times 5 = 10$. Donc d'après le théorème 2, la solution générale de (E) est de la forme

$$y(x) = C\mathrm{e}^{-2x} + 5,$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

Exemple 6

On résout sur $I = \mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E)\ :\ y' + 2y = 3\mathrm{e}^{-2x}$.

On cherche une solution particulière sous la forme

$$y_P(x) = \alpha x\mathrm{e}^{-2x}.$$

On calcule d'abord la dérivée de y_P avec la formule $(uv)' = u'v + uv'$, où

$$\begin{array}{lcl} u(x) = \alpha x & , & v(x) = \mathrm{e}^{-2x} \\ u'(x) = \alpha & , & v'(x) = -2\mathrm{e}^{-2x}. \end{array}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} y'_P(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= \alpha \times \mathrm{e}^{-2x} + (\alpha x) \times \left(-2\mathrm{e}^{-2x}\right) \\ &= \alpha\mathrm{e}^{-2x} - 2\alpha x\mathrm{e}^{-2x} \\ &= (-2\alpha x + \alpha)\,\mathrm{e}^{-2x}. \end{aligned}$$

On peut dès lors écrire les équivalences :

$$\begin{aligned} y_P \text{ solution de } (E) &\iff y'_P + 2y_P = 3\mathrm{e}^{-2x} \\ &\iff (-2\alpha x + \alpha)\,\mathrm{e}^{-2x} + 2\alpha x\mathrm{e}^{-2x} = 3\mathrm{e}^{-2x} \\ &\iff (\cancel{-2\alpha x} + \alpha + \cancel{2\alpha x})\,\mathrm{e}^{-2x} = 3\mathrm{e}^{-2x} \\ &\iff \alpha\mathrm{e}^{-2x} = 3\mathrm{e}^{-2x} \\ &\iff \alpha = 3 \qquad (\text{car } \mathrm{e}^{-2x} \neq 0). \end{aligned}$$

Conclusion : une solution particulière de (E) est $y_P(x) = 3x\mathrm{e}^{-2x}$; donc d'après le théorème 2, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$y(x) = C\mathrm{e}^{-2x} + y_P(x) = C\mathrm{e}^{-2x} + 3x\mathrm{e}^{-2x} = (3x + C)\mathrm{e}^{-2x}.$$

Lorsqu'on cherche une solution particulière y_P de l'équation différentielle $(E)\ :\ y' + ay = b$, les candidates sont d'un type différent suivant la fonction b. Le tableau ci-dessous recense toutes les situations à connaître.

$b(x)$	$y_P(x)$
constante	constante
$A\mathrm{e}^{\lambda x}$ $(\lambda \neq -a)$	$\alpha\mathrm{e}^{\lambda x}$
$A\mathrm{e}^{-ax}$	$\alpha x\mathrm{e}^{-ax}$
$A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$	$\alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)$

Exercices

Exercices 7 et 8

II. EDL d'ordre 2 à coefficients constants

EDL d'ordre 2 : la situation

Dans cette section, on s'intéresse aux équations différentielles

$$(E)\ :\ y'' + ay' + by = f,$$

où $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue (éventuellement constante), appelée second membre de l'équation.

On appelle équation homogène associée à (E) l'équation sans 2^{nd} membre

$$(H)\ :\ y'' + ay' + by = 0.$$

Il y a un lien entre la recherche des solutions et les équations du 2^{nd} degré :

Déf. 2 L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle $(E)\ :\ y'' + ay' + by = f$ est l'équation (d'inconnue $r \in \mathbb{C}$) :

$$(E_C)\ :\ r^2 + ar + b = 0.$$

Théorème 4 (Résolution de (H))

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle

$$(H)\ :\ y'' + ay' + by = 0.$$

On note (E_C) l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$. On distingue trois cas :

— Si (E_C) a deux solutions réelles r_1, r_2, les solutions $y : I \to \mathbb{R}$ de (H) sont les fonctions de la forme

$$y(x) = A\mathrm{e}^{r_1 x} + B\mathrm{e}^{r_2 x},$$

avec $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$.

— Si (E_C) a une seule solution réelle r_0, les solutions $y : I \to \mathbb{R}$ de (H) sont les fonctions de la forme

$$y(x) = (Ax + B)\mathrm{e}^{r_0 x},$$

avec $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$.

— Si (E_C) a deux solutions complexes non réelles $r_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$, $r_2 = \overline{r_1} = \alpha - \mathrm{i}\beta$, les solutions $y : I \to \mathbb{R}$ de (H) sont les fonctions de la forme

$$y(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)),$$

avec $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$.

Exemple 7

On résout sur $I=\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(H)\ :\ y''+2y+10=0.$$

L'équation caractéristique est $(E_C)\ :\ r^2+2r+10=0$.

- $a=1,\ \ b=2\ ,\ c=10$.
- $\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times1\times10=-36$.
- $\Delta<0$, donc il y a deux solutions dans $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}=\frac{-2+\mathrm{i}\sqrt{|-36|}}{2\times1}=\frac{-2+6\mathrm{i}}{2}=-1+3\mathrm{i},\\ r_2 &= \overline{r_1}=-1-3\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Conclusion : d'après le théorème 4, les solutions de (H) sont les fonctions de la forme

$$y(x)=\mathrm{e}^{-x}\left(A\cos(3x)+B\sin(3x)\right),$$

avec $A\in\mathbb{R}$, $B\in\mathbb{R}$.

Exercices

Exercices 9 et 10

On a un principe de superposition et un théorème d'unicité de Cauchy pour les EDL d'ordre 2 analogues à ceux que l'on avait pour les EDL d'ordre 1.

Théorème 5 (Résolution de (E) – principe de superposition)

Soient $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$ et $f:I\to\mathbb{R}$ continue. Les solutions $y:I\to\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(E)\ :\ y''+ay'+by=f$$

sont les fonctions de la forme

$$y(x)=y_H(x)+y_P(x),$$

où y_H est la solution générale de $(H)\ :\ y''+ay'+by=0$ et y_P une solution particulière de (E).

Théorème 6 (unicité de Cauchy)

Soient $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$, $f:I\to\mathbb{R}$ continue et soient $x_0\in I$, $y_0\in\mathbb{R}$, $y'_0\in\mathbb{R}$. Il existe une unique solution $y:I\to\mathbb{R}$ de

$$(E)\ :\ y''+ay'+by=f$$

vérifiant les conditions initiales

$$\begin{cases} y\left(x_0\right)=y_0\\ y'\left(x_0\right)=y'_0\end{cases}$$

Exemple 8

On résout sur $I=\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E)\ :\ y''+2y'+10y=\mathrm{e}^{-x}.$$

- On a déjà résolu l'équation homogène associée $(H)\ :\ y''+2y'+10y=0$ dans l'exemple 7 : les solutions sont les fonctions de la forme

$$y_H(x)=\mathrm{e}^{-x}\left(A\cos(3x)+B\sin(3x)\right),$$

avec $A\in\mathbb{R}$, $B\in\mathbb{R}$.

- On cherche à présent une solution particulière de (E) sous la forme

$$y_P(x)=\alpha\mathrm{e}^{-x}.$$

On a

$$y_P'(x)=-\alpha\mathrm{e}^{-x},\qquad y_P''(x)=\alpha\mathrm{e}^{-x},$$

donc

$$\begin{aligned}
y_P \text{ solution de } (E) &\iff y_P''+2y_P'+10y_P=\mathrm{e}^{-x}\\
&\iff \alpha\mathrm{e}^{-x}+2\left(-\alpha\mathrm{e}^{-x}\right)+10\alpha\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{-x}\\
&\iff 9\alpha\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{-x}\\
&\iff \alpha=\frac{1}{9}\qquad (\text{car } \mathrm{e}^{-x}\neq 0).
\end{aligned}$$

Conclusion : une solution particulière de (E) est $y_P(x)=\frac{1}{9}\mathrm{e}^{-x}$.

- D'après le théorème 5, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$y(x)=\mathrm{e}^{-x}\left(A\cos(3x)+B\sin(3x)\right)+\frac{1}{9}\mathrm{e}^{-x},$$

avec $A\in\mathbb{R}$, $B\in\mathbb{R}$.

Exercices

Exercices 11 à 14

III. Cas des solutions à valeurs complexes

On étend les résultats des sections précédentes aux solutions $y : I\to\mathbb{C}$. On énonce les résultats principaux dans quatre théorèmes :

Théorème 7 (EDL1 homogène)

Soit $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Les solutions $y : I\to\mathbb{C}$ de l'équation différentielle

$$(H)\ :\ y'+ay=0$$

sont les fonctions de la forme

$$y(x)=C\mathrm{e}^{-ax},$$

avec $C\in\mathbb{C}$.

Théorème 8 (EDL1 avec 2nd membre)

Soient $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b : I \to \mathbb{C}$ continue. Les solutions $y : I \to \mathbb{C}$ de l'équation différentielle

$$(E) \; : \; y' + ay = b$$

sont les fonctions de la forme

$$y(x) = C\mathrm{e}^{-ax} + y_P(x),$$

où $C \in \mathbb{C}$ et y_P est une solution particulière de (E).

On notera que la seule différence par rapport à la situation où on cherchait les solutions à valeur dans $\mathbb{R}$, c'est que la constante C est un nombre complexe. Dans le cas des équations linéaires d'ordre 2 en revanche, il y a une vraie différence lorsqu'on cherche les solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$:

Théorème 9 (EDL2 homogène)

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle

$$(H) \; : \; y'' + ay' + by = 0.$$

On note (E_C) l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$. On distingue deux cas :

- Si (E_C) a deux solutions distinctes r_1, r_2, les solutions $y : I \to \mathbb{C}$ de (H) sont les fonctions de la forme
$$y(x) = A\mathrm{e}^{r_1 x} + B\mathrm{e}^{r_2 x},$$
avec $A \in \mathbb{C}$, $B \in \mathbb{C}$.
- Si (E_C) a une solution « double » r_0, les solutions $y : I \to \mathbb{C}$ de (H) sont les fonctions de la forme
$$y(x) = (Ax + B)\mathrm{e}^{r_0 x},$$
avec $A \in \mathbb{C}$, $B \in \mathbb{C}$.

Exemple 9

On cherche les solutions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de l'équation différentielle

$$(H) : y'' - 2y' + 5 = 0.$$

L'équation caractéristique est $(E_C) \; : \; r^2 - 2r + 5 = 0$, dont les racines sont (je ne détaille pas) :

$$z_1 = 1 + 2\mathrm{i}\,, \; z_2 = \overline{z_1} = 1 - 2\mathrm{i}.$$

D'après le théorème 9, les solutions de (H) sont les fonctions de la forme

$$y(x) = A\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})x} + B\mathrm{e}^{(1-2\mathrm{i})x} = \mathrm{e}^x \left(A\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + B\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right),$$

avec $A \in \mathbb{C}$, $B \in \mathbb{C}$.

En écrivant $A = a + \mathrm{i}b$, $B = a' + \mathrm{i}b'$, on peut réécrire les solutions sous la forme

$$\text{fonction à valeur réelle} + \text{fonction à valeur imaginaire pure},$$

et faire le lien avec le théorème 4.

Théorème 10 (EDL2 avec 2nd membre)

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{C}$ continue. Les solutions $y : I \to \mathbb{C}$ de l'équation différentielle

$$(E)\ :\ y'' + ay' + by = f$$

sont les fonctions de la forme

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x),$$

où y_H est la solution générale de $(H)\ :\ y'' + ay' + by = 0$ et y_P une solution particulière de (E).

IV. Exercices

Exercice 1.

1. Vérifier que la fonction $y(x) = x - 1$ est solution sur $I = \mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(E)\ :\ y'(x) + y(x) = x.$$

2. Vérifier que la fonction $y(x) = \mathrm{e}^{-2x}$ est solution sur $I = \mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(E)\ :\ y''(x) - 3y'(x) - 10y(x) = 0.$$

Exercice 2.

1. Résoudre sur $I = \mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'(t) = \cos t + \sin t$.
2. Déterminer l'unique solution sur $I = \mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y''(t) = -2,$$

vérifiant les conditions initiales $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

Exercice 3 (🏛).

1. Résoudre sur $I = \mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' + 3y = 0.$$

2. Déterminer la solution de (E) vérifiant $y(0) = 4$.

Exercice 4 (🏛).

1. Résoudre sur $I = \mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' - 5y = 0.$$

2. Déterminer la solution de (E) vérifiant $y(1) = 10$.

Exercice 5 (🏛).

On considère l'équation différentielle

$$(E)\ :\ y' + y = -x^2 + x$$

définie sur $I = \mathbb{R}$.

1. Déterminer une solution particulière y_P de (E) qui soit une fonction du second degré.
2. Résoudre (E).
3. Déterminer la solution de (E) vérifiant $y(1) = 0$.

Exercice 6 (🏛).

Un corps de masse m est lâché en chute libre sans vitesse initiale. Pour $t \geq 0$, sa vitesse v est solution de l'équation différentielle

$$(E)\ :\ y'(t) + \frac{k}{m} y(t) = g,$$

où k est le coefficient de frottement et g l'accélération de la pesanteur.

1. Déterminer une solution constante de (E).
2. Résoudre (E).
3. Dresser le tableau de variations de v, en précisant sa limite en $+\infty$.
4. Tracer l'allure du graphe de v.

Exercice 7 (🏛).

Résoudre sur $I = \mathbb{R}$ les équations différentielles :

1. $y' + 3y = \mathrm{e}^{2x}$.
2. $y' + y = 4\mathrm{e}^{-x}$.
3. $y' - y = 3\cos(2x)$.

Exercice 8 (– démonstration du cours).

Cet exercice est consacré à la partie « analyse » de la démonstration du théorème 1.

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et soit y une solution sur $I = \mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(E)\ :\ y'(x) + ay(x) = 0.$$

On pose $z(x) = y(x)\mathrm{e}^{ax}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

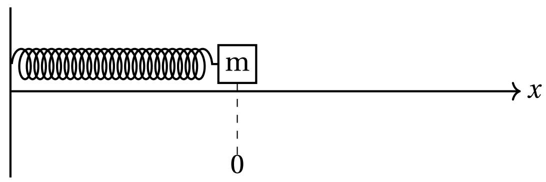
1. Prouver que la dérivée de z est nulle. Que peut-on en déduire pour z ?
2. Démontrer qu'il existe un réel C tel que $y(x) = C\mathrm{e}^{-ax}$.

Exercice 9 ().

1. Résoudre sur $I = \mathbb{R}$ les équations différentielles :
   a. $y'' - 5y' + 6y = 0$.
   b. $y'' - 2y' + y = 0$.
   c. $y'' + 2y + 2 = 0$.
2. Dans 1.b, déterminer l'unique solution vérifiant les conditions initiales $y(1) = 0$, $y'(1) = 2$.

Exercice 10 ().

Une masse m est posée sur un plan horizontal et accrochée à un ressort. On écarte la masse vers la droite (en étirant le ressort), puis on la lâche. Celle-ci va alors se mettre à osciller.



On admet que la position $x(t)$ du ressort à l'instant t vérifie l'équation différentielle

$$(E)\ :\ x''(t) + \omega^2 x(t) = 0,$$

où $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, le nombre k étant une constante strictement positive appelée constante de raideur du ressort.

1. Résoudre (E).
2. Sachant qu'on lâche la masse à l'abscisse $x = 1$ et sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$, déterminer une formule pour $x(t)$.
3. Quelle est la période d'oscillation du système masse-ressort ?

Exercice 11 ().

1. Résoudre sur $I = \mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E)\ :\ y'' - 5y' + 4y = 1.$$

2. Déterminer l'unique solution de (E) vérifiant les conditions initiales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Exercice 12 ().

Résoudre sur $I = \mathbb{R}$ les équations différentielles :

1. $y'' + 2y' - 3y = 8\mathrm{e}^{-3x}$.
   Indication : Chercher une solution particulière sous la forme $y_P(x) = \alpha x\mathrm{e}^{-3x}$.
2. $y'' - 4y' + 5y = \sin x$.
   Indication : Chercher une solution particulière sous la forme $y_P(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x$.

Exercice 13 ().

1. Résoudre sur $I = \mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E)\ :\ y''(t) = -9y(t) + 9.$$

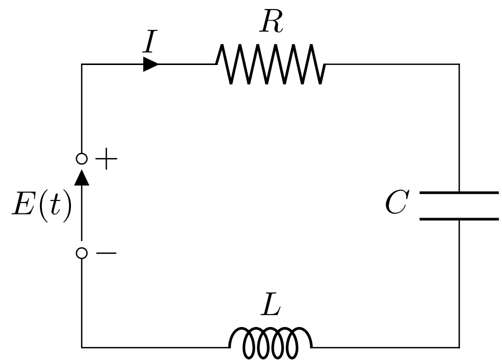
2. Déterminer la solution de (E) vérifiant $y(0) = 3$, $y'(0) = 6\sqrt{3}$.
3. Tracer l'allure du graphe de la solution.

Exercice 14 ().

La tension u du condensateur d'un circuit RLC en série est une fonction du temps vérifiant

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u = E,$$

avec $R = 10\ \Omega$, $L = 6{,}25 \times 10^{-2}$ H, $C = 5 \times 10^{-5}$ F et $E = 12$ V.



Exprimer $u(t)$ en fonction de t.