Corrigé du devoir maison n°1

Exercice 1

- -1 est solution évidente :

  $$(-1)^3 - 2\times(-1)^2 - (-1) + 2 = -1 - 2 + 1 + 2 = 0.$$

  On peut donc écrire

  $$\forall x \in \mathbb{R},\ x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x+1)f(x),$$

  où f est une fonction du 2nd degré.
- Pour déterminer f, on pose la division euclidienne :

  $$\begin{array}{rr|l}
   & x^3 - 2x^2 - x + 2 & x+1 \\ \cline{3-3}
  - & x^3 + x^2 & x^2 - 3x + 2 \\ \cline{2-2}
   & -3x^2 - x + 2 & \\
  - & -3x^2 - 3x & \\ \cline{2-2}
   & 2x + 2 & \\
  - & 2x + 2 & \\ \cline{2-2}
   & 0 &
  \end{array}$$

  On a donc :

  $$\forall x \in \mathbb{R},\ x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x+1)\left(x^2 - 3x + 2\right).$$

- D'après le point précédent :

  $$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \iff (x+1)\left(x^2 - 3x + 2\right) = 0 \iff \left(x + 1 = 0 \text{ ou } x^2 - 3x + 2 = 0\right).$$

  On résout séparément chaque équation :
  - $x + 1 = 0 \iff x = -1$
  - $x^2 - 3x + 2 = 0$
    - $a = 1,\ b = -3\ ,\ c = 2.$
    - $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4\times 1\times 2 = 1.$
    - $\Delta > 0$, donc il y a deux solutions :

    $$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\times 1} = \frac{3-1}{2} = 1,$$
    $$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2} = \frac{3+1}{2} = 2.$$

  $\boxed{\text{Conclusion : les solutions de l'équation } x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \text{ sont } -1,\ 1 \text{ et } 2.}$

Exercice 2

On cherche tous les couples de nombres réels (x, y) vérifiant

$$\begin{cases} x+y=2 \\ \quad xy=-15 \end{cases}$$

- **Analyse.** Soient x, y deux réels. Si (x, y) est solution, alors

$$\begin{cases} x+y=2 & L_1 \\ \quad xy=-15 & L_2 \end{cases}$$

On multiplie L_1 par x :

$$(x+y)\times x = 2\times x, \qquad \text{soit} \qquad x^2+xy=2x.$$

Or d'après L_2, $xy=-15$, donc

$$x^2+(-15)=2x, \qquad \text{et ainsi} \qquad x^2-2x-15=0.$$

On aboutit à une équation du 2nd degré. En utilisant la méthode habituelle, on trouve deux solutions (je ne détaille pas) : $x_1=-3$, $x_2=5$.
Il y a donc deux possibilités :

1. Ou bien $x=-3$, et dans ce cas, comme $xy=-15$, on obtient $y=\frac{-15}{x}=\frac{-15}{-3}=5$. Finalement

$$(x, y)=(-3, 5).$$

2. Ou bien $x=5$, et alors, comme $xy=-15$, on trouve $y=\frac{-15}{5}=\frac{-15}{5}=-3$. Finalement

$$(x, y)=(5, -3).$$

- **Synthèse.** On vérifie que les couples $(x, y)=(-3, 5)$ et $(x, y)=(5, -3)$ sont bien solutions :
  - Si $(x, y)=(-3, 5)$, alors

$$\begin{cases} x+y & =-3+5=2 \\ xy & =-3\times 5=-15 \end{cases}.$$

  Le couple $(-3, 5)$ est donc bien solution.
  - Si $(x, y)=(5, -3)$, alors

$$\begin{cases} x+y & =5+(-3)=2 \\ xy & =5\times(-3)=-15 \end{cases}.$$

  Le couple $(5, -3)$ est donc bien solution.

- **Conclusion.** $\boxed{\text{Les solutions du système } \begin{cases} x+y=2 \\ \quad xy=-15 \end{cases} \text{ sont } (x, y)=(5, -3) \text{ et } (x, y)=(-3, 5).}$

Exercice 3

Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on définit la fonction

$$f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 + mx + 9.$$

Le discriminant est

$$\Delta = m^2 - 4 \times 1 \times 9 = m^2 - 36.$$

1. **Si** l'équation $f_m(x) = 0$ a une seule solution dans $\mathbb{R}$, **alors** $m = -6$.

   Cette proposition est **FAUSSE.**

   Il se peut que l'équation $f_m(x) = 0$ ait une seule solution dans $\mathbb{R}$ sans que m soit égal à -6. En effet, si $m = 6$, alors le discriminant $m^2 - 36$ est nul, et donc il y a une seule solution.

2. **Si** $m > 6$, **alors** f_m est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

   Cette proposition est **VRAIE.**

   Si $m > 6$, alors $m^2 > 36$ (car deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés), donc $m^2 - 36 > 0$. Le discriminant étant strictement positif, et a étant strictement positif, f_m est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |2x-3| - |2x-1|$.

1.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$	

2. • Si $x < \frac{1}{2}$, alors :
   - $2x - 3 < 0$, donc $|2x-3| = -(2x-3) = -2x+3$.
   - $2x - 1 < 0$, donc $|2x-1| = -(2x-1) = -2x+1$.

   On a donc :

   $$\boxed{f(x) = (-2x+3) - (-2x+1) = -2x+3+2x-1 = 2.}$$

3. • Si $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$, alors :
   - $2x - 3 \leq 0$, donc $|2x-3| = -(2x-3) = -2x+3$.
   - $2x - 1 \geq 0$, donc $|2x-1| = 2x-1$.

   Dans ce cas :

   $$f(x) = (-2x+3) - (2x-1) = -2x+3-2x+1 = -4x+4.$$

   • Si $x > \frac{1}{2}$, alors :

- $2x-3>0$, donc $|2x-3| = 2x-3$.
- $2x-1>0$, donc $|2x-1| = 2x-1$.

On obtient :

$$f(x) = (2x-3)-(2x-1) = 2x-3-2x+1 = -2.$$

Finalement :

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < \frac{1}{2}, \\ -4x+4 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}, \\ -2 & \text{si } x > \frac{1}{2}. \end{cases}}$$

4. La fonction f est affine par morceaux. Les deux extrémités sont faciles à tracer ; pour la partie centrale, on fait un tableau de valeurs avec deux valeurs – ou, plus simplement, on rejoint les deux lignes horizontales !