Trigonométrie : corrigé des ex 12 et 21

Exercice 12

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On sait que $e^{-i\frac{\theta}{2}} \times e^{i\frac{\theta}{2}} = 1$ et que $e^{i\frac{\theta}{2}} \times e^{i\frac{\theta}{2}} = e^{i\theta}$, donc

$$\begin{aligned}
\left|1 - e^{i\theta}\right| &= \left|e^{-i\frac{\theta}{2}} \times e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}} \times e^{i\frac{\theta}{2}}\right| \\
&= \left|e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)\right| \\
&= \left|e^{i\frac{\theta}{2}}\right| \times \left|e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right|.
\end{aligned}$$

Or $|2i| = 2$, donc d'après la 2e formule d'Euler :

$$\left|e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right| = 2\frac{\left|e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right|}{|2i|} = 2\left|\frac{e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}}{2i}\right| = 2\left|\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)\right| = 2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|.$$

Enfin $\left|e^{i\frac{\theta}{2}}\right| = 1$, donc

$$\boxed{\left|1 - e^{i\theta}\right| = \left|e^{i\frac{\theta}{2}}\right| \times \left|e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right| = 1 \times 2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| = 2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|.}$$

Exercice 21

On considère l'équation

$$(E) \qquad z^3 = -1.$$

1. **Analyse.** Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose que z est une solution de (E) et on pose $Z = z \times e^{i\frac{\pi}{3}}$. On a alors :

   $$Z^3 = \left(z \times e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3 = z^3 \times \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3 = z^3 \times e^{i\frac{3\pi}{3}} = z^3 \times e^{i\pi}.$$

   Or $z^3 = -1$, puisque par hypothèse z est solution de (E) ; et on sait aussi que $e^{i\pi} = -1$. On en déduit :

   $$Z^3 = z^3 \times e^{i\pi} = (-1) \times (-1) = 1,$$

   c'est-à-dire que Z est une racine cubique de l'unité. Il s'ensuit que :

   $$Z = 1 \qquad \text{ou} \qquad Z = e^{i\frac{2\pi}{3}} \qquad \text{ou} \qquad Z = e^{i\frac{4\pi}{3}}.$$

   Or $Z = z \times e^{i\frac{\pi}{3}}$, donc $z = \frac{Z}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = Z \times e^{-i\frac{\pi}{3}}$. Finalement

   $$z = 1 \times e^{-i\frac{\pi}{3}} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \qquad \text{ou} \qquad z = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times e^{-i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}} \qquad \text{ou} \qquad z = e^{i\frac{4\pi}{3}} \times e^{-i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{3\pi}{3}} = e^{i\pi} = -1.$$

   Conclusion : les solutions possibles sont

   $$\boxed{z_1 = e^{-i\frac{\pi}{3}} \qquad , \qquad z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}} \qquad , \qquad z_3 = -1.}$$

2. **Synthèse.** On vérifie que z_1, z_2, z_3 sont bien solutions de (E) :

$$\begin{aligned}
z_1^3 &= \left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^3 = e^{-i\frac{3\pi}{3}} = e^{-i\pi} = -1 && \text{donc } z_1 \text{ est bien solution.}\\
z_2^3 &= \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3 = e^{i\frac{3\pi}{3}} = e^{i\pi} = -1 && \text{donc } z_2 \text{ est bien solution.}\\
z_3^3 &= \left(e^{i\pi}\right)^3 = e^{3i\pi} = -1 && \text{donc } z_3 \text{ est bien solution.}
\end{aligned}$$

Conclusion : l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\boxed{S = \left\{e^{-i\frac{\pi}{3}} \ ; \ e^{i\frac{\pi}{3}} \ ; \ -1\right\}.}$$