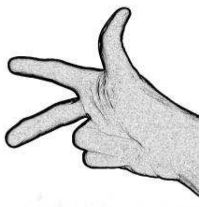
Chapitre 9 : Géométrie dans l'espace

I. Repères et coordonnées

Dans toute la leçon, on se donne un repère orthonormé direct (r.o.n.d.) $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Cela signifie que que les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sont orthogonaux et de norme 1 ; mais aussi qu'une fois tracés $\vec{i}$ et $\vec{j}$, on construit $\vec{k}$ en suivant la « règle de la main droite ».



$\vec{i}$ = index (abscisse)

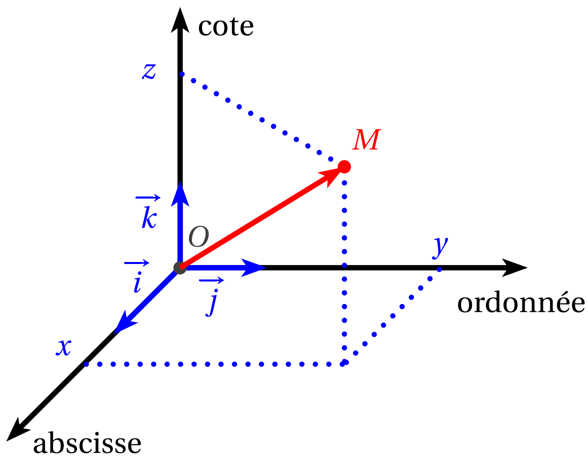
$\vec{j}$ = majeur (ordonnée)

$\vec{k}$ = pouce (cote)

Dans ce cas, pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet (x, y, z) de réels tels que

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}.$$

Le triplet $(x; y; z)$ sont les coordonnées de M dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.



(On a tourné de 90° par rapport à la main ci-contre, mais sans changer l'orientation.)

On étend le concept de vecteur à l'espace :

Définition 1

- Soient $A\left(x_A; y_A; z_A\right)$ et $B\left(x_B; y_B; z_B\right)$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{ abscisse} \\ \leftarrow \text{ ordonnée} \\ \leftarrow \text{ cote} \end{array}$$

- Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et soit $k \in \mathbb{R}$.

1 Le vecteur $\vec{v} = k\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$.

2 La somme de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, notée $\vec{u} + \vec{v}$, est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$.

3 Le vecteur nul, noté $\vec{0}$, est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Proposition 1

Soient $A\left(x_A; y_A; z_A\right)$ et $B\left(x_B; y_B; z_B\right)$ deux points de l'espace.

1. Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées
$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}; \frac{z_A+z_B}{2}\right).$$

2. La longueur du segment $[AB]$ est
$$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+\left(y_B-y_A\right)^2+(z_B-z_A)^2}.$$

Exemple 1

$ABCDEFGH$ est un cube. Ce cube permet de définir un repère de l'espace, noté $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, dans lequel $A(0;0;0)$ $B(1;0;0)$ $C(1;1;0)$ $D(0;1;0)$ $E(0;0;1)$ $F(1;0;1)$ $G(1;1;1)$ $H(0;1;1)$.

Soit I le milieu de $[CG]$. Les coordonnées de ce point sont :

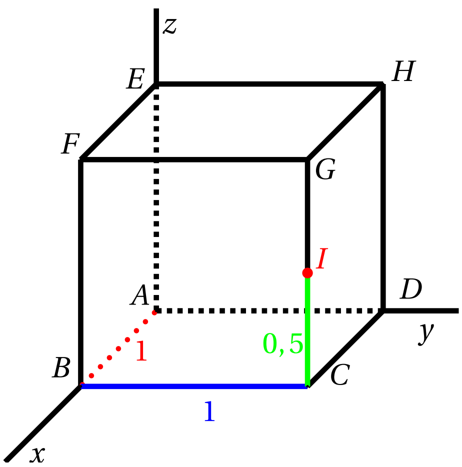
$$I\left(\frac{x_C+x_G}{2}; \frac{y_C+y_G}{2}; \frac{z_C+z_G}{2}\right) \quad I\left(\frac{1+1}{2}; \frac{1+1}{2}; \frac{0+1}{2}\right) \quad I\,(1;1;0,5)\,.$$

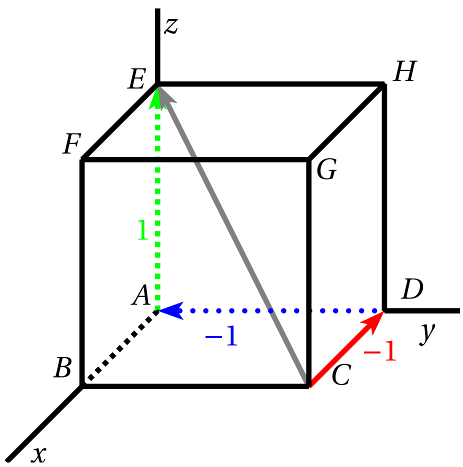
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CE}$ sont

$$\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}x_E-x_C\\ y_E-y_C\\ z_E-z_C\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}0-1\\ 0-1\\ 1-0\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}.$$

La longueur du segment $[CE]$ est :

$$CE = \sqrt{(x_E-x_C)^2+\left(y_E-y_C\right)^2+(z_E-z_C)^2} = \sqrt{(0-1)^2+(0-1)^2+(1-0)^2} = \sqrt{3}.$$

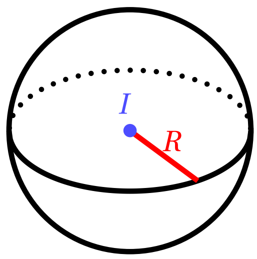




Proposition 2

La sphère $\mathscr{S}$ de centre I et de rayon R a pour équation

$$(x-x_I)^2+\left(y-y_I\right)^2+(z-z_I)^2 = R^2.$$



Démonstration

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace. On a les équivalences :

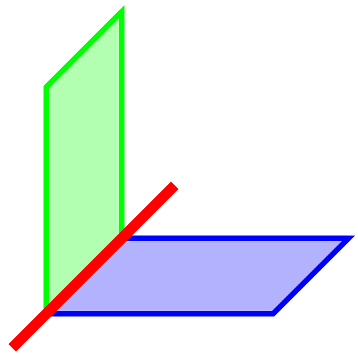
$$M \in \mathscr{S} \iff IM = R \iff IM^2 = R^2 \iff (x-x_I)^2+\left(y-y_I\right)^2+(z-z_I)^2 = R^2.$$

II. Parallélisme et orthogonalité

Proposition 3 (règles d'incidence)

1. Par trois points non alignés A, B, C passe un unique plan, que l'on note (ABC).
2. Si deux plans distincts sont sécants [a] et non confondus, leur intersection est une droite.

a. C'est-à-dire qu'ils se coupent.



Sur la figure ci-conte, les plans bleu et vert sont des surfaces planes illimitées [1]. Leur intersection est la droite rouge.

On étend de façon naturelle à l'espace la notion de parallélisme et d'orthogonalité. Comme dans le plan, l'outil principal pour étudier les problèmes de parallélisme est la colinéarité.

Définition 2

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.
Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.

Proposition 4

1. Trois points A, B, C sont alignés si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
2. Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Exemple 2

Les points $A(0;1;2)$, $B(2;4;5)$ et $C(-3;0;6)$ déterminent un plan.
En effet, on calcule les coordonnées des vecteurs :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-0 \\ 4-1 \\ 5-2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ z_C - z_A \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -3-0 \\ 0-1 \\ 6-2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, parce que le tableau avec leurs coordonnées

2	−3
3	−1
3	4

n'est pas un tableau de proportionnalité.

On en déduit que A, B, C ne sont pas alignés, et donc qu'ils déterminent un plan.

Exercices

Exercices 1 à 5

1. Bien sûr, sur le dessin, on ne peut pas étendre un plan à l'infini. L'habitude est de dessiner un parallélogramme, et d'imaginer qu'on peut l'agrandir autant que l'on veut.

Définition 3

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$, est défini de la façon suivante : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls,

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$$

et $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ sinon.

Proposition 5 (symétrie et bilinéarité)

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, pour tous réels λ,μ :

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$.
2. $\vec{u}\cdot(\lambda\vec{v}+\mu\vec{w}) = \lambda\vec{u}\cdot\vec{v}+\mu\vec{u}\cdot\vec{w}$.
3. $(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})\cdot\vec{w} = \lambda\vec{u}\cdot\vec{w}+\mu\vec{v}\cdot\vec{w}$.

Remarque.

$$\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2.$$

Théorème 1

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

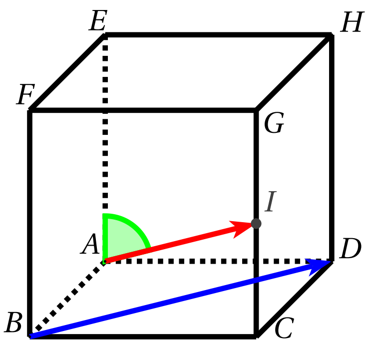
Proposition 6

Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$, alors

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'+zz'.$$

Exemple 3

$ABCDEFGH$ est un cube de côté 1, I est le milieu de $[CG]$.



On prouve que (AI) est orthogonale à (BD) et on calcule une valeur approchée à 1° près de l'angle $\widehat{IAE}$.
On travaille dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

- Dans ce repère $A(0;0;0)$, $I(1;1;0,5)$, $B(1;0;0)$ et $D(0;1;0)$, donc

$$\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}1\\1\\0,5\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BD} = 1\times(-1)+1\times1+0,5\times0 = 0.$$

On en déduit que (AI) et (BD) sont orthogonales.

- On calcule la longueur :

$$AI = \sqrt{1^2+1^2+0,5^2} = \sqrt{2,25} = 1,5.$$

Par ailleurs $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, donc

$$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AE} = 1\times0+1\times0+0,5\times1 = 0,5.$$

Par définition du produit scalaire :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AE} &= AI\times AE\times\cos\widehat{IAE}\\ 0,5 &= 1,5\times1\times\cos\widehat{IAE}\\ \cos\widehat{IAE} &= \frac{0,5}{1,5} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

On en déduit $\widehat{IAE} = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 71°$.

Exercices

Exercices 6 à 8

III. Droites et plans

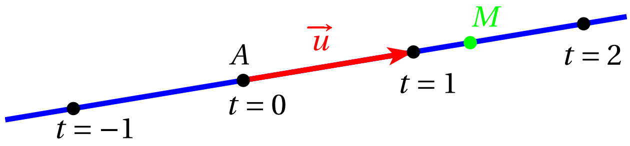
On commence par la représentation paramétrique des droites et des plans. Concernant les droites, on a un résultat analogue à celui du plan :

Définition 4

La droite D passant par $A\left(x_A; y_A; z_A\right)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x &= x_A + t\alpha \\ y &= y_A + t\beta \\ z &= z_A + t\gamma \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Cela signifie que les points $M(x; y; z)$ de la droite D sont ceux qui vérifient ces égalités pour une certaine valeur de t.

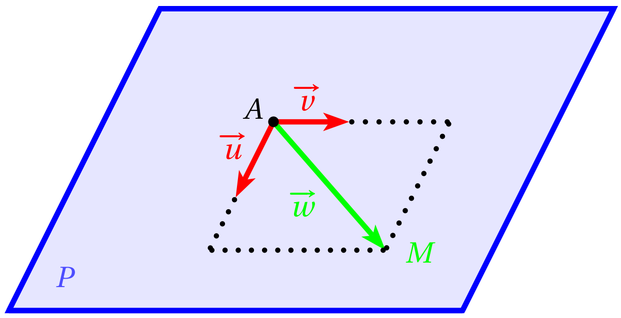


Définition 5

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace.
Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, on dit que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires s'il existe deux réels t, t' tels que

$$\overrightarrow{w} = t\overrightarrow{u} + t'\overrightarrow{v}.$$

Par convention, si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, on dit que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires.



Soit P un plan passant par un point A et dirigé par deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Pour tout point M de l'espace, il y a équivalence :

$$\begin{aligned} M \in P &\iff \left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{AM} \text{ coplanaires}\right) \\ &\iff \exists t \in \mathbb{R},\ \exists t' \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u} + t'\overrightarrow{v}. \end{aligned}$$

Ceci nous conduit à la représentation paramétrique :

Définition 6

Soit P un plan passant par $A\left(x_A; y_A; z_A\right)$ et dirigé par les vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}\alpha'\\\beta'\\\gamma'\end{pmatrix}$. Alors P a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x &= x_A + t\alpha + t'\alpha' \\ y &= y_A + t\beta + t'\beta' \\ z &= z_A + t\gamma + t'\gamma' \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}\ t' \in \mathbb{R}.$$

Cela signifie que les points $M(x; y; z)$ du plan P sont ceux qui vérifient ces égalités pour une certaine valeur de t et de t'.

Exemple 4

Soit P le plan passant par $A(2;1;0)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$. Sa représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x &= 2+t\times 3+t'\times 0\\ y &= 1+t\times(-2)+t'\times 2\\ z &= 0+t\times 1+t'\times(-1)\end{cases},\ t\in\mathbb{R}\ t'\in\mathbb{R}$$

soit

$$\begin{cases} x &= 2+3t\\ y &= 1-2t+2t'\\ z &= t-t'\end{cases},\ t\in\mathbb{R}\ t'\in\mathbb{R}.$$

Le point $K(-1;-5;3)$ appartient-il à P ? Cela revient à savoir s'il existe deux réels t, t' tels que

$$\begin{cases} -1 &= 2+3t\\ -5 &= 1-2t+2t'\\ 3 &= t-t'\end{cases}.$$

La 1re ligne donne $t=-1$, puis en remplaçant dans la 3e ligne : $3=-1-t'$, d'où $t'=-4$. Il n'y a plus qu'à vérifier l'égalité dans la 2e ligne : on a bien

$$-5=1-2\times(-1)+2\times(-4),$$

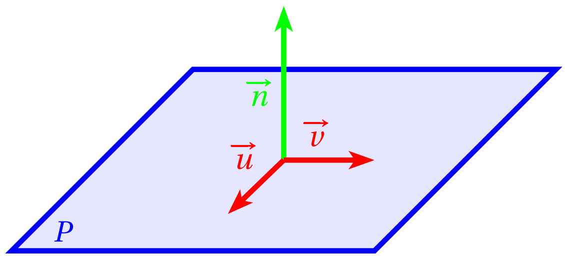
donc le couple $(t,t')=(-1,-4)$ est solution ; et $K\in P$.

Exercices

Exercices 9 et 10

Définition 7

Soit P un plan dirigé par les vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et soit $\vec{n}$ un troisième vecteur. On dit que $\vec{n}$ est orthogonal (= normal) au plan P s'il est orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



Théorème 2

— Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur non nul orthogonal à un plan P. Alors P a une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$, où d est un nombre réel. On note $P: ax+by+cz+d=0$.

— Réciproquement, si a, b, c, d sont quatre nombres réels tels que $(a,b,c)\neq(0,0,0)$, alors l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $ax+by+cz+d=0$ est un plan et le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est orthogonal à ce plan.

Exemple 5

Soient $A(4;2;0)$, $B(0;3;0)$, $C(5;0;-4)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}-4\\-16\\7\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, donc les points A, B, C ne sont pas alignés et déterminent un plan.

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$ car

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = -4\times(-4)+(-16)\times 1+7\times 0 = 0,$$
$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = -4\times 1+(-16)\times(-2)+7\times(-4) = 0.$$

On en déduit que $\vec{n}\begin{pmatrix}-4\\-16\\7\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC), et donc (ABC) a une équation de la forme

$$-4x-16y+7z+d=0.$$

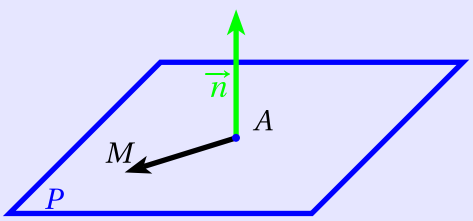
Enfin (ABC) passe par $A(4;2;0)$, donc $-4\times 4-16\times 2+7\times 0+d=0$, ce qui donne $d=48$.

Conclusion : $(ABC) : -4x-16y+7z+48=0$.

Remarques.

- Bien sûr, les coordonnées des points A, B, C vérifient l'équation du plan. Par exemple, pour $C(5;0;-4)$:
$$-4\times 5-16\times 0+7\times(-4)+48=0.$$
- Quand nous connaîtrons le produit vectoriel, nous pourrons obtenir les coordonnées de $\vec{n}$ sans l'aide de l'énoncé.

Démonstration (de la partie directe du théorème 2)



Soient $A(x_A;y_A;z_A)$ un point de P et $M(x;y;z)$ un point de l'espace. On a l'équivalence : $M\in P \iff \vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0$.

Or $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\\z-z_A\end{pmatrix}$, donc

$$\begin{aligned}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM} &= a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)\\ &= ax-ax_A+by-by_A+cz-cz_A\\ &= ax+by+cz+d,\end{aligned}$$

où l'on a posé $d=-ax_A-by_A-cz_A$.

Conclusion :

$$\begin{aligned}M\in P &\iff \vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0\\ &\iff ax+by+cz+d=0.\end{aligned}$$

Cette dernière égalité est donc l'équation de P.

Exercices

Exercices 11 à 15

IV. Produit vectoriel, déterminant

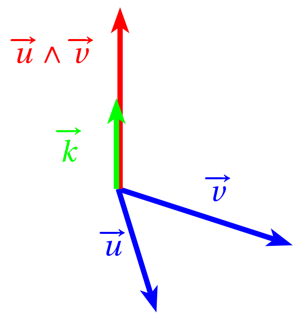
Définition 8

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, est le vecteur défini de la façon suivante :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires,

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \sin\left(\vec{u}, \vec{v}\right) \vec{k},$$

  où $\vec{k}$ est un vecteur unitaire (= de norme 1) construit en suivant la « règle de la main droite ».
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.



Proposition 7 (antisymétrie et bilinéarité)

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, pour tous réels λ, μ :

1. $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.
2. $\vec{u} \wedge \left(\lambda \vec{v} + \mu \vec{w}\right) = \lambda \vec{u} \wedge \vec{v} + \mu \vec{u} \wedge \vec{w}$.
3. $\left(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}\right) \wedge \vec{w} = \lambda \vec{u} \wedge \vec{w} + \mu \vec{v} \wedge \vec{w}$.

Proposition 8

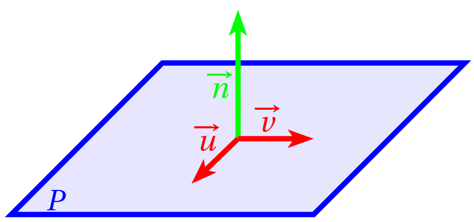
Si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, alors

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} yz' - y'z \\ x'z - xz' \\ xy' - x'y \end{pmatrix}.$$

Exemple 6

Reprenons le plan P de l'exemple 4, dont la représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x & = 2 + 3t \\ y & = 1 - 2t + 2t', \ t \in \mathbb{R} \ t' \in \mathbb{R}, \\ z & = t - t' \end{cases}$$



et qui est dirigé par les vecteurs $\vec{u} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}$ et $\vec{v} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} x' \\ y' \\ z' \end{array}$.

On cherche l'équation cartésienne de P. Pour cela, on calcule $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$:

$$\vec{n} \begin{pmatrix} yz' - y'z \\ x'z - xz' \\ xy' - x'y \end{pmatrix} \qquad \vec{n} \begin{pmatrix} (-2) \times (-1) - 2 \times 1 \\ 0 \times 1 - 3 \times (-1) \\ 3 \times 2 - 0 \times (-2) \end{pmatrix} \qquad \vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, donc à P. On a donc $P : 0x + 3y + 6z + d = 0$; et comme P passe par $A(2;1;0)$:

$$0 \times 2 + 3 \times 1 + 6 \times 0 + d = 0 \iff 3 + d = 0 \iff d = -3.$$

Conclusion : $P : 3y + 6z - 3 = 0$, ou en divisant par 3 :

$$P : y + 2z - 1 = 0.$$

Exercices

Exercices 16 à 21

Définition 9

Le déterminant de trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ est le nombre, noté $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, défini par

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}.$$

Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}x''\\y''\\z''\end{pmatrix}$, le déterminant est également noté $\begin{vmatrix}x & x' & x''\\ y & y' & y''\\ z & z' & z''\end{vmatrix}$.

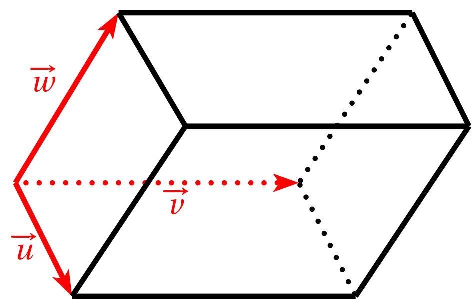
En utilisant les propositions 6 et 8, on démontre :

Proposition 9 (dévelopt du déterminant)

$$\begin{vmatrix}x & x' & x''\\ y & y' & y''\\ z & z' & z''\end{vmatrix} = x''\begin{vmatrix}y & y'\\ z & z'\end{vmatrix} - y''\begin{vmatrix}x & x'\\ z & z'\end{vmatrix} + z''\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}.$$

Proposition 10

Le nombre $\left|\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})\right|$ est le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.



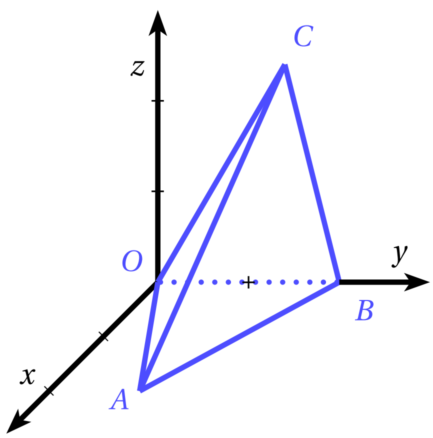
Proposition 11

1. L'échange de deux vecteurs multiplie le déterminant par -1.
2. Le déterminant est linéaire par rapport à chacun de ses vecteurs.
3. Si deux vecteurs sont égaux, le déterminant est nul.

Exemple 7

Soient $O(0;0;0)$, $A(2;1;0)$, $B(0;2;0)$ et $C(1;2;3)$. On calcule le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre $OABC$. On admet pour cela la formule

$$\mathcal{V} = \frac{1}{6}\left|\det\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)\right|.$$



$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, donc

$$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right) &= \begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}\\ &= 1 \times \begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}\\ &= 1 \times (1 \times 0 - 2 \times 0) - 2(2 \times 0 - 0 \times 0) + 3(2 \times 2 - 0 \times 1) = 12.\end{aligned}$$

On en déduit $\mathcal{V} = \frac{12}{6} = 2$.

Exercices

Exercices 22 à 24

Définition 10

- Trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ sont dits linéairement dépendants s'il existe un triplet de réels $(\lambda, \mu, \gamma) \neq (0,0,0)$ tels que

$$\lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v} + \gamma \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}.$$

Dans le cas contraire, ils sont dits linéairement indépendants.

- Lorsque $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ sont linéairement dépendants, on dit que la famille $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$ est liée ; sinon on dit qu'elle est libre.

Théorème 3

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace. Il y a équivalence entre les trois propositions ci-dessous :

- $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires ;
- la famille $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$ est liée ;
- $\det\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right) = 0$.

Exemple 8

On reprend encore une fois le plan P des exemples 4 et 6, dont la représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x &= 2+3t \\ y &= 1-2t+2t' \\ z &= t-t' \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}\ t' \in \mathbb{R},$$

qui passe par $A(2;1;0)$ et qui est dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On cherche l'équation cartésienne de P (on l'a déjà obtenue dans l'exemple 6, mais on propose ici une nouvelle méthode).

Pour tout point $M(x;y;z)$ de l'espace, on a les équivalences :

$$\begin{aligned}
M \in P &\iff \left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{AM} \text{ coplanaires}\right) \\
&\iff \det\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{AM}\right) = 0 \\
&\iff \begin{vmatrix} 3 & 0 & x-2 \\ -2 & 2 & y-1 \\ 1 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \\
&\iff (x-2) \times \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - (y-1) \times \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\
&\quad + z \times \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \\
&\iff (x-2) \times 0 - (y-1) \times (-3) + z \times 6 = 0 \\
&\iff 3y - 3 + 6z = 0 \\
&\iff y + 2z - 1 = 0.
\end{aligned}$$

On retrouve bien l'équation du plan P déjà obtenue dans l'exemple 6.

Exercices

Exercices 25 à 27

V. Exercices

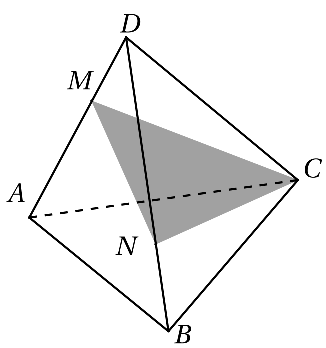
Exercice 1.
$ABCDEFGH$ est un cube. On se place dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Faire une figure et placer les points $I(0;0;0,75)$ et $J(1;1;0,25)$.
2. Prouver que $BJHI$ est un parallélogramme. Est-ce un losange ?

Exercice 2.
$ABCDEFGH$ est un cube. On note J et K les milieux respectifs de $[BC]$ et $[CD]$.

1. Faire une figure.
2. On travaille dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$. Déterminer dans ce repère les coordonnées de tous les points de la figure.
3. Prouver que les droites (FH) et (JK) sont parallèles.
4. Expliquer brièvement pourquoi les droites (FJ) et (HK) sont sécantes. Construire leur point d'intersection sur la figure.

Exercice 3.
$ABCD$ est un tétraèdre. M est un point de l'arête $[AD]$ et N de l'arête $[BD]$. Les droites (MN) et (AB) ne sont pas parallèles.



Reproduire la figure et construire sans justification la droite d'intersection des plans (ABC) et (MNC).

Exercice 4.
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé de centre O, on considère les points $A(4;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;4)$ et $D(4;3;0)$.

1. Faire une figure et construire la pyramide $OADBC$. Calculer son volume.
2. Prouver que le point M de coordonnées $\left(\frac{8}{3};2;\frac{4}{3}\right)$ appartient au segment $[CD]$ et préciser sa position sur ce segment.
3. M se projette orthogonalement en P sur le plan (OAB) et P se projette orthogonalement en H sur la droite (OA).
   Compléter la figure et donner sans justification les coordonnées des points P et H.

Exercice 5.

1. Donner l'équation de la sphère $\mathscr{S}$ de centre O de rayon 2.
2. Déterminer l'intersection de $\mathscr{S}$ avec :
   - le plan P_0 d'équation $z = 0$;
   - le plan P_1 d'équation $z = 1$;
   - le plan P_2 d'équation $z = 2$;
   - le plan P_3 d'équation $z = 3$.

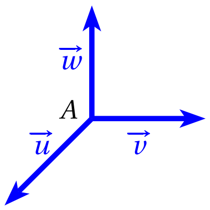
Exercice 6 (🏛).
$ABCDEFGH$ est un cube, I est le milieu de $[EF]$, J le milieu de $[AB]$ et K le milieu de $[BC]$.

1. Faire une figure.
2. Démontrer que les droites (AK) et (DI) sont orthogonales.
3. Calculer une mesure à 1° près de l'angle $\widehat{DIJ}$.

Exercice 7.

1. Prouver que les points $A(2;4;5)$ et $B(6;3;0)$ sont situés sur une même sphère $\mathscr{S}$ de centre $O(0;0;0)$.
2. Calculer la distance géodésique entre A et B, c'est-à-dire la distance minimale pour aller de A à B en restant à la surface de la sphère. Arrondir à 0,01 près.

Exercice 8.
On se donne un nouveau r.o.n.d. $\left(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$.



Prouver que pour tout vecteur $\vec{a}$:

$$\vec{a} = \left(\vec{a}\cdot\vec{u}\right)\vec{u} + \left(\vec{a}\cdot\vec{v}\right)\vec{v} + \left(\vec{a}\cdot\vec{w}\right)\vec{w}.$$

Exercice 9 (🏛).

1. On considère les points $A(2;-1;4)$ et $B(1;3;4)$.
   a. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).
   b. Le point $K(0;7;4)$ appartient-il à (AB) ?
2. Donner une représentation paramétrique de la droite (D) passant $C(2;-1;0)$ et dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-8\\0\end{pmatrix}$.
3. Les droites (D) et (AB) sont-elles parallèles? Sont-elles orthogonales?

Exercice 10 (🏛).
Soit P le plan de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x &= t-2t'+1 \\ y &= t-3t'+2\ , \ t\in\mathbb{R}\ t'\in\mathbb{R}. \\ z &= -t+4 \end{cases}$$

1. Le point $A(4;5;3)$ appartient-il au plan P ?
2. Donner une représentation paramétrique du plan P' parallèle à P et passant par le point $B(3;0;1)$.
3. Soient $C(2;1;1)$ et $D(0;-2;1)$. Prouver que le plan P est parallèle à la droite (CD).

Exercice 11 (🏛).
Soient $A(2;1;-1)$, $B(0;2;3)$, $C(1;-1;0)$ et le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}9\\-2\\5\end{pmatrix}$.

1. Prouver que A, B, C déterminent un plan, puis que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à ce plan.
2. En déduire l'équation cartésienne du plan (ABC).

Exercice 12 (🏛).
Soient $A(2;-1;3)$ et $B(2;5;0)$. Déterminer l'équation du plan P orthogonal au segment $[AB]$ et passant par son milieu (ce plan est appelé plan médiateur de $[AB]$).

Exercice 13 (🏛).
Soient D et D' les droites de représentations paramétriques respectives

$$\begin{cases} x &= t+1 \\ y &= 2t-1 \\ z &= 3t+2 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x &= t+1 \\ y &= t+3 \\ z &= -t+4 \end{cases} .$$

1. Les droites D et D' sont-elles parallèles, orthogonales ou ni l'un ni l'autre?
2. Prouver que le plan $P: x+y-z+2=0$ contient la droite D et est orthogonal à la droite D'.

Exercice 14 (🏛).
Déterminer une représentation paramétrique du plan $P: 3x-2y+z-4=0$.

Exercice 15 (🏛).
Soient $P: -3x+y+2z-10=0$ et $A(2;0;1)$. Le projeté orthogonal de A sur le plan P est le point H de P tel que $(AH)\perp P$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AH).
2. En déduire les coordonnées de H et la distance du point A au plan P.

Exercice 16 (🏛).
Soient $A(1;2;3)$, $B(0;1;4)$, $C(-1;-3;2)$, $D(4;-2;5)$.

1. Démontrer que les points A, B, C ne sont pas alignés et déterminer une équation du plan (ABC).
2. Déterminer une représentation paramétrique de la perpendiculaire Δ au plan (ABC) passant par D.
3. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal E de D sur le plan (ABC), puis la distance du point D au plan (ABC).

Exercice 17 (🏛).
On reprend l'énoncé de l'exercice 10. Déterminer une représentation paramétrique de la droite D, orthogonale à P et passant par $K(0;0;0)$.

Exercice 18 (🏛 🏅).

1. Déterminer la représentation paramétrique de Δ, droite d'intersection des plans $P : x-2y+3z=0$ et $P' : 2x+3y-z=0$.
2. Déterminer l'équation du plan Q orthogonal à Δ et passant par $A(0;0;1)$.
3. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur la droite Δ (cela signifie que H est le point de Δ tel que $(AH)\perp\Delta$).

Exercice 19 (🏛).
On dit que deux plans sont orthogonaux si un vecteur normal à l'un est normal à l'autre.

Soient $P : x+2y-z+1=0$, $P' : -x+y+z=0$ et $A(0;1;1)$.

1. Prouver que P et P' sont orthogonaux.
2. Soit d la droite de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x &= -\frac{1}{3}+t \\ y &= -\frac{1}{3} \\ z &= t \end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}.$$
Démontrer que P et P' se coupent suivant la droite d.
3. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur le plan P.
On pourra admettre que $K\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ est le projeté orthogonal de A sur le plan P'
4. Calculer la distance du point A à la droite d.

Exercice 20.
Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{w}$ tel que $(O,\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ soit un r.o.n.d.

Exercice 21.
On travaille dans le r.o.n.d. habituel $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.
Déterminer $\vec{i}\wedge\vec{j}$, $\vec{i}\wedge\left(2\vec{j}\right)$, $\vec{i}\wedge\left(3\vec{i}\right)$ et $\vec{i}\wedge\left(3\vec{i}+2\vec{j}\right)$.

Exercice 22 (🏛).
Calculer les déterminants :
$$\begin{vmatrix}3&0&1\\2&-1&4\\2&1&-2\end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix}2&2&1\\0&4&3\\0&1&1\end{vmatrix}.$$

Exercice 23 (🏛).
Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$, où $A(1;0;0)$, $B(2;3;0)$, $C(0;0;2)$ et $D(0;3;1)$.

Exercice 24 (🏛).
On travaille dans le r.o.n.d. habituel $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

1. Calculer $\det\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ en utilisant la définition du déterminant. Interpréter en termes de volume.
2. Calculer $\det\left(\vec{i},\vec{j},\vec{j}\right)$ en utilisant la définition du déterminant. Interpréter en termes de volume.
3. Calculer $\det\left(\vec{i},\vec{j},2\vec{k}+3\vec{j}\right)$ en utilisant la définition du déterminant. Retrouver le résultat grâce à la proposition 11.

Exercice 25 (🏛).
On reprend l'énoncé de l'exercice 11. Déterminant l'équation du plan (ABC) en utilisant le déterminant.

Exercice 26 (🏛).
On reprend l'énoncé de l'exercice 16. Déterminant l'équation du plan (ABC) en utilisant le déterminant.

Exercice 27 (🏛).
Prouver que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\4\\-5\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ sont coplanaires.