# Chapitre 8 : Fonctions usuelles

## I. Bijection et fonction réciproque

**Déf. 1**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. L'image de $I$ par $f$ est

$$f(I) = \left\{ f(x) \mid x \in I \right\}.$$

**Exemple 1**

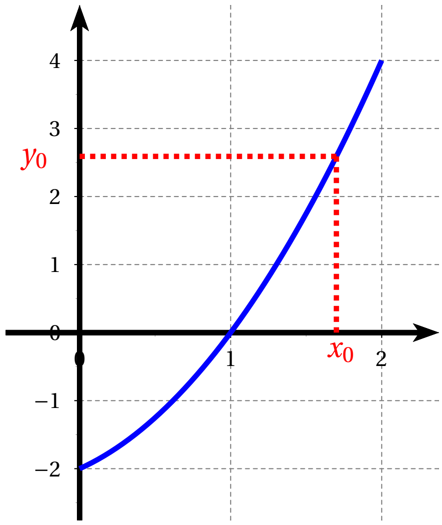
Soit $f : [0;2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 + x - 2.$

Pour tout $x \in [0;2]$, $f'(x) = 2x + 1.$
$f'$ est strictement positive sur $[0;2]$, donc $f$ est strictement croissante :

| $x$ | $0$ | $2$ |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $-2$ ↗ | $4$ |

L'image de l'intervalle $[0;2]$ par $f$ est

$$f([0;2]) = [-2;4].$$




Notons par ailleurs que :

- tout nombre $x \in [0;2]$ a une image dans $[-2;4]$ ;
- tout nombre $y_0 \in [-2;4]$ a un unique antécédent $x_0$ dans $[0;2]$.

Dans cette situation, on dit que $f$ réalise une bijection de $[0;2]$ sur $[-2;4]$.

**Définition 2**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que $f$ réalise une bijection de $I$ sur $J$ si :

- tout nombre $x \in I$ a une image $f(x)$ dans $J$ ;
- tout nombre $y_0 \in J$ a un unique antécédent $x_0$ dans $I$.

De façon plus concise :

- $f(I) \subset J$ ;[a]
- $\forall y_0 \in J,\ \exists! x_0 \in I,\ f(x_0) = y_0.$

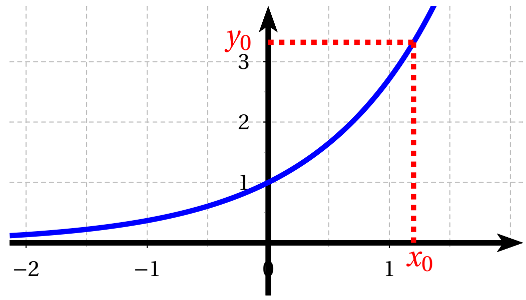
a. Rappel : $\subset$ se lit « est inclus dans ».

## Exemple 2

La fonction exp réalise une bijection de $]-\infty;+\infty[$ sur $]0;+\infty[$. On peut le voir

- soit sur le tableau de variations,
- soit sur la courbe représentative.

| $x$ | $-\infty$ | $x_0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\exp(x)$ | $0$ | $y_0$ | $+\infty$ |




## Proposition 1

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue et strictement monotone, alors :

1. $f(I)$ est un intervalle.
2. $f$ réalise une bijection de $I$ sur $f(I)$.

### Exercices

Exercices 1 à 3

## Définition 3

On suppose qu'une fonction $f$ réalise une bijection de $I$ sur $J$. Tout élément $y \in J$ a un unique antécédent $x$ dans $I$. On pose alors $x = f^{-1}(y)$. On dit que la fonction

$$f^{-1} : J \to I,\ y \mapsto f^{-1}(y)$$

est la réciproque de $f$.

## Exemple 3

La fonction exp réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0;+\infty[$. Quelle est sa réciproque ?

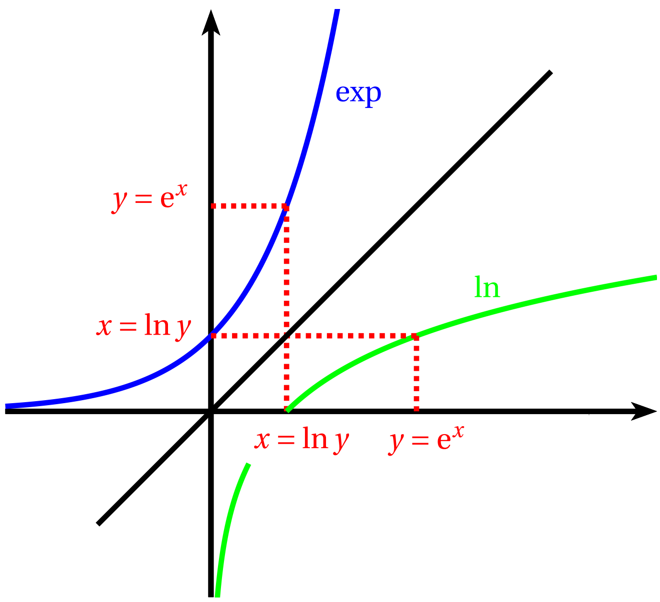
Pour le savoir, on prend $y$ dans $]0;+\infty[$ et on cherche son antécédent par exp ; autrement dit, on résout l'équation

$$e^x = y.$$

On sait bien que la solution est

$$x = \ln y,$$

donc la réciproque de la fonction exp est la fonction ln. Avec les notations de la définition 3, si on pose $f = \exp$, alors $f^{-1} = \ln$.



**Méthode**

Dans la situation où $f$ réalise une bijection de $I$ sur $J$, pour déterminer sa réciproque, on prend $y$ dans $J$ et on résout l'équation $f(x) = y$. La solution $x = \cdots$ nous donne l'expression de $f^{-1}$.

**Proposition 2**

Soit $f : I \to J$ et $g : J \to I$. La fonction $f$ réalise une bijection de réciproque $g$ si, et seulement si :

$$\forall x \in I, g \circ f(x) = x \qquad \text{et} \qquad \forall y \in J, f \circ g(y) = y.$$

**Remarque.**
La courbe d'une fonction et de sa réciproque sont toujours symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

**Exemple 4**

Les fonctions exp et ln sont réciproques l'une de l'autre et l'on a bien

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ln\left(e^x\right) = x \qquad \text{et} \qquad \forall y \in ]0; +\infty[, e^{\ln y} = y.$$

**Exercices**

Exercices 4 à 6

**Théorème 1**

Soit $f$ une bijection de $I$ sur $J$, soit $y_0 \in J$ et soit $x_0 = f^{-1}\left(y_0\right)$. Si $f$ est dérivable en $x_0$ et si $f'\left(x_0\right) \neq 0$, alors $f^{-1}$ est dérivable en $y_0$ et

$$\left(f^{-1}\right)'\left(y_0\right) = \frac{1}{f'\left(x_0\right)}.$$

**Remarques.**

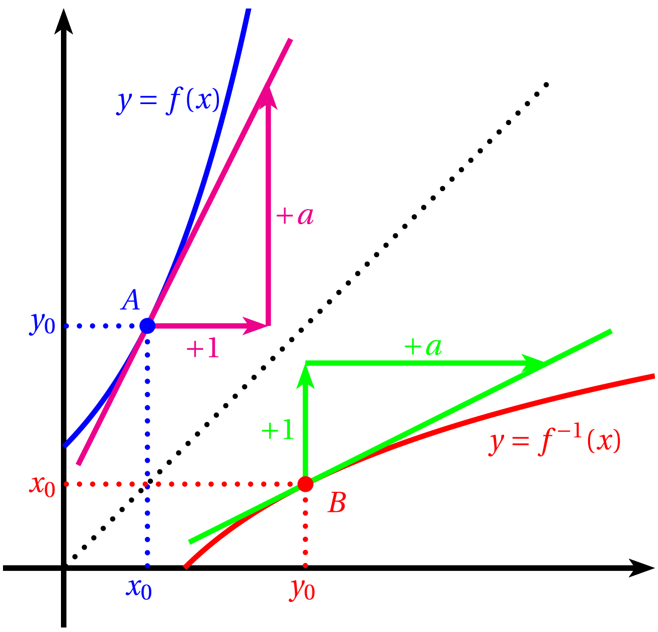
- Le théorème est illustré sur la figure ci-contre.
- Il est plus habituel de noter $x$ la variable. Puisque $x_0 = f^{-1}\left(y_0\right)$ dans le théorème ci-dessus, on peut écrire :

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}.$$

**Exercices**

Exercices 7 et 8

Par raison de symétrie, les pentes des tangentes en $A$ et en $B$ sont inverses l'une de l'autre : la pente de la tangente en $A$ vaut $a$, celle de la tangente en $B$ vaut $\frac{1}{a}$.



# II. Fonctions puissances

Dans cette section, on se réfère aux propriétés de l'exponentielle et du logarithme rappelées dans le chapitre 3 et on utilise ces connaissances pour donner la définition rigoureuse des puissances. On explique par exemple ce que signifie $5^{\frac{1}{2}}$, ou $3^0$.

**Déf. 4** Pour tout $x > 0$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ :

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

**Exemple 5**

En prenant la définition ci-dessus : $2^3 = e^{3\ln 2}$. C'est étonnant, car cela semble très éloigné de la définition habituelle. Et pourtant, d'après les propriétés du logarithme et de l'exponentielle :

$$2^3 = e^{3\ln 2} = e^{\ln 2+\ln 2+\ln 2} = e^{\ln 2} \times e^{\ln 2} \times e^{\ln 2} = 2 \times 2 \times 2 = 8.$$

Ouf, on retombe bien sur la définition habituelle !

L'exemple qui précède se généralise :

**Proposition 3**

Pour tout $x > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}$.

**Remarques.**

- Pour tout $x > 0$ : $x^0 = e^{0\ln x} = e^0 = 1$.
- On retrouve sans peine toutes les propriétés des puissances (entières) que vous avez vues au collège, et qui sont généralisées dans la proposition 4 (ci-dessous).
- Pour tout $x > 0$, $x^\alpha > 0$ (puisque c'est une exponentielle).

**Proposition 4**

Pour tous $x > 0$, $y > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ :

1. $(xy)^\alpha = x^\alpha \times y^\alpha$.
2. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^\alpha = \dfrac{x^\alpha}{y^\alpha}$.
3. $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \times x^\beta$.
4. $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.

On démontre le point 1 (les autres points se démontrent de façon analogue) :

**Démonstration (du point 1)**

D'après la définition 4 et d'après les propriétés du logarithme et de l'exponentielle :

$$(xy)^\alpha = e^{\alpha\ln(xy)} = e^{\alpha(\ln x+\ln y)} = e^{\alpha\ln x+\alpha\ln y} = e^{\alpha\ln x} \times e^{\alpha\ln y} = x^\alpha \times y^\alpha.$$

L'intérêt principal de la définition 4 est de calculer $x^\alpha$ lorsque $\alpha$ n'est pas un entier. Voyons cela avec des exemples :

**Exemples 6**

1. Combien vaut $a = 5^{\frac{1}{2}}$ ? Pour le savoir, on calcule $a^2$ en utilisant la proposition 4 :

$$a^2 = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 5^{\frac{1}{2}\times 2} = 5^1 = 5.$$

Or le seul nombre positif dont le carré vaut 5 est $\sqrt{5}$, donc

$$a = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}.$$

Avec le même calcul, on démontre facilement que pour tout $x > 0$, $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

2. $2^{\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}} \times \left(2^2\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}} = 2^{\frac{3}{6}+\frac{4}{6}} = 2^{\frac{7}{6}}$.

**Remarques.**

- Dans la définition 4, $x$ est un réel strictement positif. On s'autorise également à calculer $x^\alpha$ lorsque $x$ est strictement négatif, mais uniquement quand $\alpha$ est un entier, en reprenant la définition habituelle (celle du collège). On pose également $0^\alpha = 0$ pour tout $\alpha > 0$.
- Le point 1 des exemples 6 se généralise : si $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x^{\frac{1}{n}\times n} = x^1 = x$. On dit que $x^{\frac{1}{n}}$ est la racine $n$-ième de $x$ ; on note $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ (voir exercices).

**Exercices**

Exercices 9 à 13

**Proposition 5**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction

$$f : ]0;+\infty[ \to ]0;+\infty[,\ x \mapsto x^\alpha$$

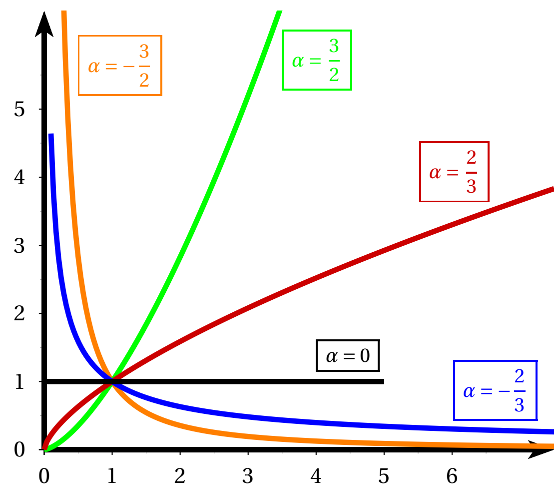
est dérivable sur $]0;+\infty[$ et

$$\forall x \in ]0;+\infty[,\ f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

**Proposition 6**

La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est :

- strict. croissante sur $]0;+\infty[$ si $\alpha > 0$ ;
- strict. décroissante sur $]0;+\infty[$ si $\alpha < 0$ ;
- constante égale à 1 si $\alpha = 0$.




**Proposition 7 (croissances comparées)**

Soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-\beta x} = 0$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} x e^{\beta x} = 0$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$.
4. $\lim\limits_{x\to 0,\ x>0} x^\alpha \ln x = 0$.

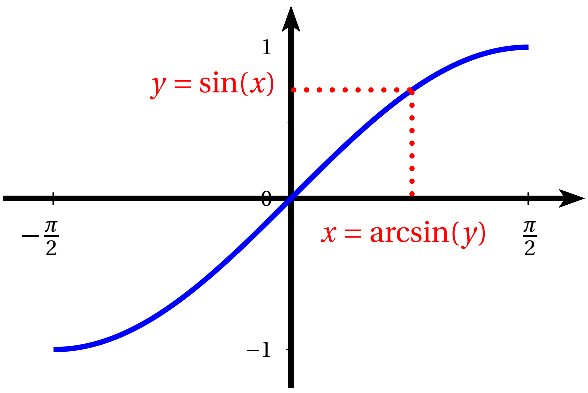
# III. Fonctions circulaires réciproques

On commence avec la fonction arcsin, dont on détaille l'étude. On ira ensuite plus rapidement pour arccos et arctan.

**Définition 5**

La restriction de la fonction sin à $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1;1]$. On appelle arcsin sa fonction réciproque. On a donc :

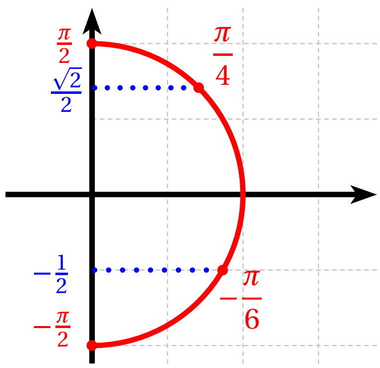
- $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, $\arcsin(\sin x) = x$.
- $\forall y \in [-1;1], \sin\left(\arcsin y\right) = y$.




**Remarque.** On note $\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}$ la restriction de sin à $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

**Exemples 7**

1. $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.
2. $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$, donc $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

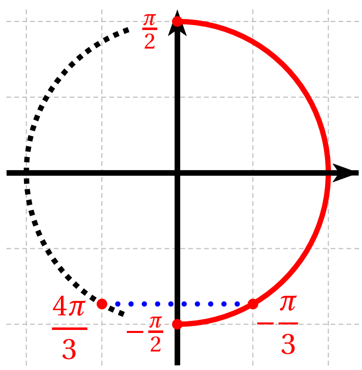



**Attention**

On n'a pas toujours $\arcsin(\sin x) = x$ ! Cela n'est vrai que quand $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.
Par exemple :

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = -\frac{\pi}{3}$$

(on se ramène dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ pour pouvoir calculer).




**Exercices**

Exercices 14 et 15

**Proposition 8**

La fonction arcsin est dérivable sur $]-1;1[$ et pour tout $x \in ]-1;1[$ :

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

**Démonstration**

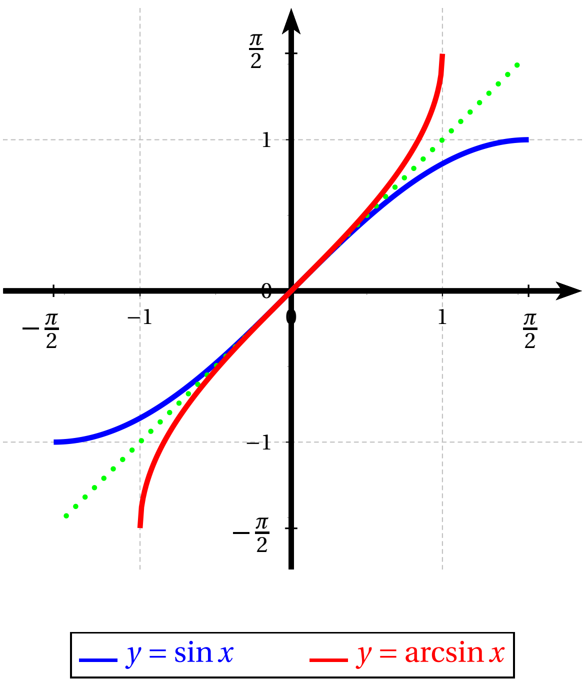
Soit $y_0 \in ]-1;1[$ et soit $x_0 = \arcsin(y_0)$ ; on a donc $x_0 \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

La fonction $x \longmapsto \sin x$ est dérivable en $x_0$ et $(\sin)'(x_0) = \cos x_0$. Or $\cos x_0 \neq 0$, car $x_0 \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, donc d'après le théorème 1, arcsin est dérivable en $y_0$ et

$$(\arcsin)'(y_0) = \frac{1}{\cos(x_0)} = \frac{1}{\cos(\arcsin(y_0))}.$$

On a vu dans l'exercice 15 que $\cos(\arcsin(y_0)) = \sqrt{1-y_0^2}$, donc on obtient la formule attendue :

$$(\arcsin)'(y_0) = \frac{1}{\cos(\arcsin(y_0))} = \frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}}.$$




| $x$ | $-1$ | | $1$ |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | ‖ | $+$ | ‖ |
| $\arcsin x$ | $-\frac{\pi}{2}$ | ↗ | $\frac{\pi}{2}$ |

arcsin n'est dérivable ni en 1, ni en $-1$ (les tangentes à la courbe sont verticales).

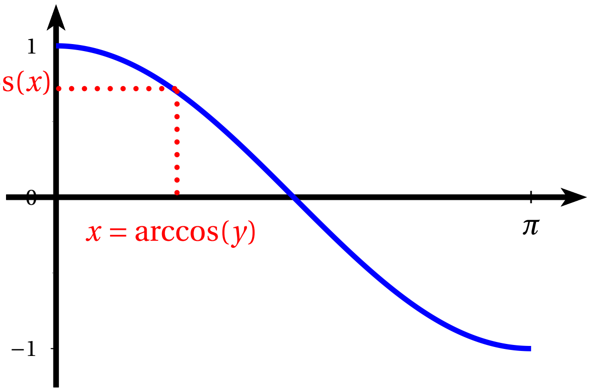
**Exercices**

Exercices 16 et 17

**Définition 6**

La restriction de la fonction cos à $[0;\pi]$ réalise une bijection de $[0;\pi]$ sur $[-1;1]$.
On appelle arccos sa fonction réciproque. On a donc :

- $\forall x \in [0;\pi]$, $\arccos(\cos x) = x$.
- $\forall y \in [-1;1]$, $\cos\big(\arccos y\big) = y$.

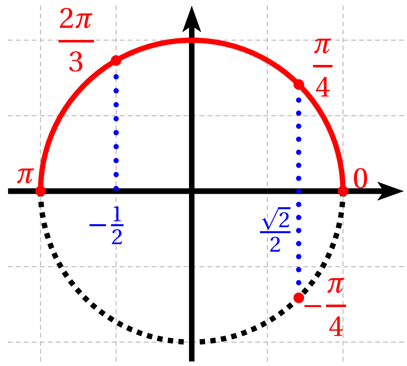



**Attention**

L'ensemble de définition des fonctions arccos et arcsin n'est pas le même.

**Exemples 8**

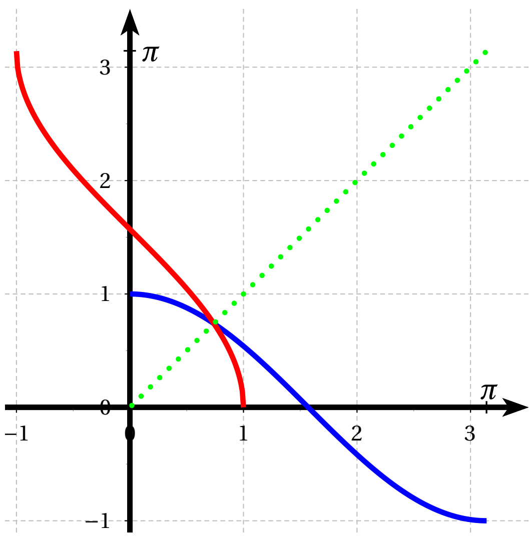
1. $\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.
2. $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$, donc $\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$.
3. ⚠ $\arccos\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = \arccos\left(\cos\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.




**Proposition 9**

La fonction arccos est dérivable sur $]-1;1[$ et pour tout $x \in ]-1;1[$ :

$$(\arccos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$



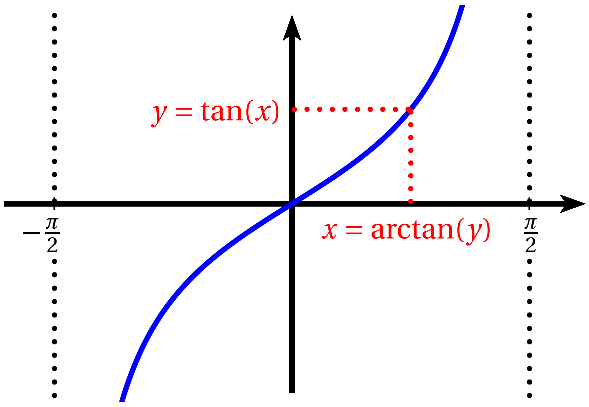

| $x$ | $-1$ | | $1$ |
|---|---|---|---|
| $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | ‖ | $-$ | ‖ |
| $\arccos x$ | $\pi$ | ↘ | $0$ |

⚠ arccos n'est dérivable ni en 1, ni en $-1$

**Définition 7**

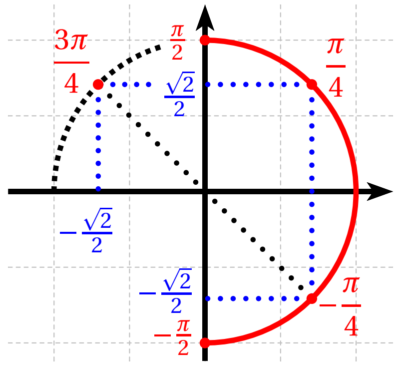
La restriction de la fonction tan à $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.
On appelle arctan sa fonction réciproque. On a donc :

- $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $\arctan(\tan x) = x$.
- $\forall y \in \mathbb{R}, \tan\left(\arctan y\right) = y$.




**Exemples 9**

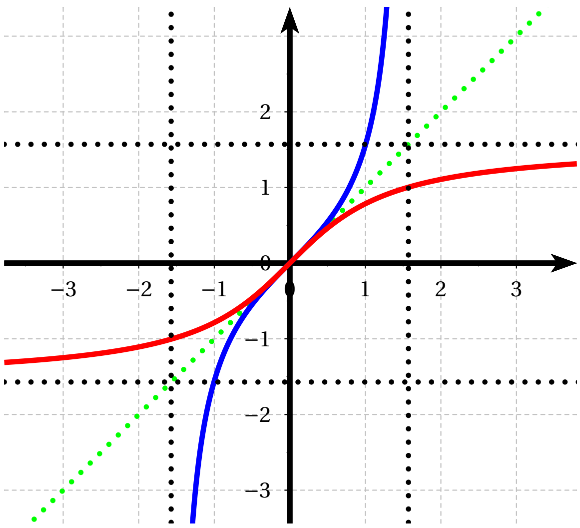
1. $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, donc $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.
2. ⚠ La fonction tan est $\pi$-périodique, donc $\arctan\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \arctan\left(\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = -\frac{\pi}{4}$.




**Proposition 10**

La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$




| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $\frac{1}{1+x^2}$ | $+$ | |
| $\arctan x$ | $-\frac{\pi}{2}$ ↗ | $\frac{\pi}{2}$ |

**Exercices**

Exercices 18 à 21

# IV. Injection, surjection, bijection

On revient sur la notion de bijection, que nous avons étudiée dans la section 1.

**Définition 8**

Une fonction $f : I \to J$ est dite injective si deux réels distincts dans $I$ ont des images distinctes.
De façon plus concise :

$$\forall x_1 \in I, \forall x_2 \in I, \left(x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)\right)$$

**Remarque.** Il revient au même de dire que tout $y_0 \in J$ a au plus un antécédent dans $I$.

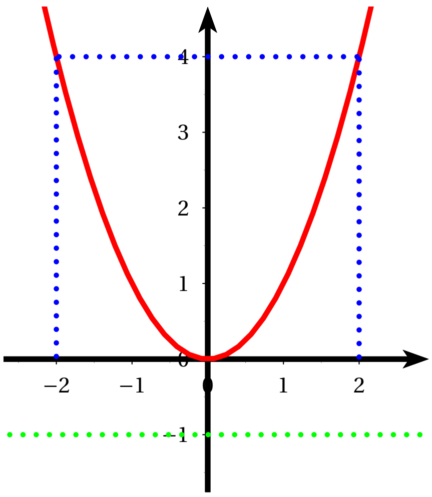
**Définition 9**

Une fonction $f : I \to J$ est dite surjective si tout réel dans $J$ a au moins un antécédent dans $I$.
De façon plus concise :

$$\forall y_0 \in J, \exists x_0 \in I, \ f(x_0) = y_0.$$

**Exemple 10**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto x^2$.



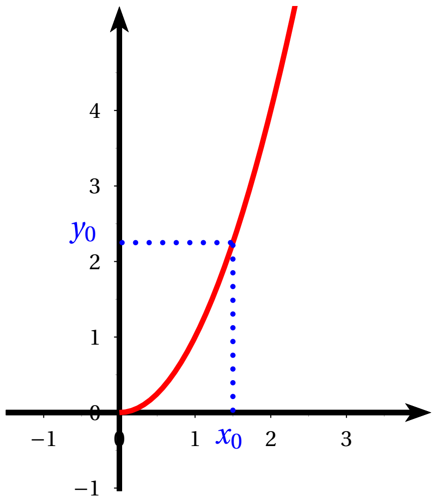

La fonction $f$ n'est ni injective, ni surjective :

- elle n'est pas injective, car (par exemple) $-2$ et 2 ont la même image :

$$f(-2) = f(2) = 4.$$

- elle n'est pas surjective, car (par exemple) $-1$ n'a pas d'antécédent.

Soit $f : [0; +\infty[ \to [0; +\infty[, \ x \mapsto x^2$.




La fonction $f$ est à la fois injective et surjective : tout $y_0 \in [0; +\infty[$ a un unique antécédent dans $[0; +\infty[$. Cet antécédent est $x_0 = \sqrt{y_0}$.

On dit que $f$ est bijective.

On revient vers la notion de bijection :

**Déf. 10**

Une fonction $f : I \to J$ est dite bijective si elle est à la fois injective et surjective. Autrement dit : tout réel $y_0 \in J$ a exactement un antécédent $x_0$ dans $I$. Ou de façon plus concise :

$$\forall y_0 \in J, \exists! x_0 \in I, \ f(x_0) = y_0.$$

On retrouve bien la définition de la section 1.

# V. Exercices

**Exercice 1 (🏛).**
Soit $f : [0; +\infty[ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$.

1. Construire le tableau de variations de $f$ en faisant apparaître la limite en $+\infty$.
2. Recopier et compléter les pointillés :

$$f \text{ réalise une bijection de } \ldots\ldots \text{ sur } \ldots\ldots$$

**Exercice 2 (🏛).**
Soit $f : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin x$.

1. Construire le tableau de variations de $f$.
2. Recopier et compléter les pointillés :

$$f \text{ réalise une bijection de } \ldots\ldots \text{ sur } \ldots\ldots$$

**Exercice 3 (🏛).**
Soit $f : \mathbb{R} \to [0; +\infty[,\ x \mapsto x^2$.
La fonction $f$ réalise-t-elle une bijection de $\mathbb{R}$ sur $[0; +\infty[$ ?

**Exercice 4 (🏛).**
On reprend la fonction de l'exercice 1. Quelle est la bijection réciproque ?

**Exercice 5 (🏛).**
Soit $f : [0; +\infty[ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(1 + x)$.

1. Construire le tableau de variations de $f$ en faisant apparaître la limite en $+\infty$.
2. Recopier et compléter les pointillés :

$$f \text{ réalise une bijection de } \ldots\ldots \text{ sur } \ldots\ldots$$

3. Déterminer la bijection réciproque.

**Exercice 6 (🏛).**
Soient $f : [0; +\infty[ \to [0; +\infty[,\ x \mapsto x^2$ et $g : [0; +\infty[ \to [0; +\infty[,\ x \mapsto \sqrt{x}$.
Prouver que les fonctions $f$ et $g$ sont les réciproques l'une de l'autre. Construire leurs courbes représentatives dans un même repère.

**Exercice 7 (🏅).**
Soit $y_0 \in ]0; +\infty[$. En utilisant le théorème 1, prouver que la fonction ln est dérivable en $y_0$ et que $(\ln)'(y_0) = \dfrac{1}{y_0}$.

**Exercice 8 (🏅).**
Soit $y_0 \in ]0; +\infty[$. En utilisant le théorème 1, prouver que la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable en $y_0$ et calculer $g'(y_0)$.

**Exercice 9 (🏛).**

1. Prouver que les nombres suivants sont égaux :
   - $A = 2^{\frac{3}{10}} \times 2^{\frac{1}{5}}$.
   - $B = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^3 \times 2^{-1}$.
   - $C = \dfrac{4^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{5}{6}}}$.
2. Démontrer que pour tout $x \geq 0$ : $x^{\frac{3}{2}} = x\sqrt{x}$.

**Exercice 10 (🏛).**
Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1. Calculer la dérivée de la fonction $f : ]0; +\infty[ \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^{\alpha}$.
2. Construire le tableau de variations de $f$ et calculer ses limites en 0 et en $+\infty$. On distinguera les cas $\alpha > 0$ et $\alpha < 0$.

**Exercice 11.**

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la réciproque de la fonction $f : ]0; +\infty[ \to ]0; +\infty[,\ x \mapsto x^n$.
2. Calculer $9^{\frac{1}{2}}$ et $1000^{\frac{1}{3}}$.

**Exercice 12 (🏅).**
Soit $\alpha > 0$. En utilisant l'un des résultats de croissance comparée du chapitre 3, démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha}\mathrm{e}^{-x} = 0$.

**Exercice 13 (🏛🏅).**
Soit $f : ]0; +\infty[ \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^x$.

1. Prouver que $f'(x) = (\ln x + 1)\, x^x$ pour tout $x \in ]0; +\infty[$.
2. Construire le tableau de variations de $f$. Calculer ses limites en 0 et en $+\infty$.

### Exercice 14 (🏛).

Calculer :

1. $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$.
2. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
3. $\sin(\arcsin(0,85))$.
4. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$.
5. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$.
6. $\cos(2\arcsin(0,5))$.

### Exercice 15 (🏛🏅).

Soit $x \in [-1;1]$

1. Quel est le signe de $\cos(\arcsin x)$ ?
2. Compléter les pointillés :
$$\cos^2(\arcsin x) + \sin^2(\arcsin x) = \ldots\ldots$$
3. En déduire que
$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}.$$

### Exercice 16 (🏛🏅).

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \arcsin(\sin x)$.

1. Étudier la parité et la périodicité de $f$.
2. Soit $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Combien vaut $f(x)$ ?
3. Soit $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. Encadrer $\pi - x$, puis prouver que $f(x) = \pi - x$.
4. Construire la courbe représentative de la fonction $f$.

### Exercice 17 (🏅).

Démontrer l'égalité :
$$\arcsin\left(\frac{7}{25}\right) = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) - \arcsin\left(\frac{3}{5}\right).$$

**Indication :** Calculer le sin de chacun des deux membres.

### Exercice 18 (🏛).

Calculer :

1. $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$.
2. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
3. $\cos(\arccos(0,85))$.
4. $\arccos\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$.
5. $\arccos\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right)$.
6. $\cos(2\arccos(0,5))$.

### Exercice 19 (🏛).

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \arccos(\cos x)$.

1. Étudier la parité et la périodicité de $f$.
2. Soit $x \in [0;\pi]$. Combien vaut $f(x)$ ?
3. Construire la courbe représentative de la fonction $f$.

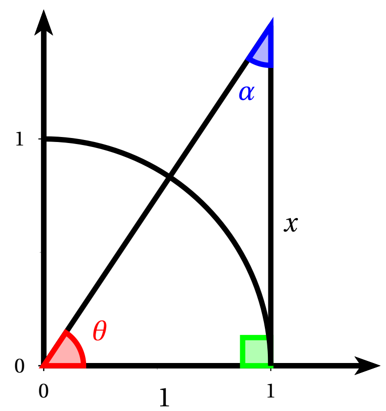
### Exercice 20 (🏛).

Calculer :

1. $\arctan(-1)$.
2. $\arctan(\sqrt{3})$.
3. $\tan(\arctan(10))$.
4. $\arctan\left(\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.

### Exercice 21.

1. Sur la figure ci-dessous, exprimer $\tan\theta$ et $\tan\alpha$ en fonction de $x$.




2. Compléter les pointillés : pour tout $x > 0$,
$$\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \ldots\ldots$$