Una revisión de los metodólogos de integración

Modelos Bayesianos con aplicaciones ecológicas

Dr. Cole Monnahan

University of Concepción, Chile

Enero, 2019

Por que integración?

- Recuerda que para calcular probabilidades tenemos que integrar una distribución continua

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

- Que es la altura de la curva en este caso?
- Que es P(X=a)=?
- **La área bajo de la curva es la probabilidad**

Método 1: Integración analítica

- Suponga que hay una v.a. uniforme: X~U(0,5)
- Entonces la pdf f(x)=1/5 por *x* en (0,5) y 0 de lo contrario
- $P(a < X < b) = \int_a^b 1/5dx = (b - a)/5$
- Si a=0, b=5; P=1
- Si a=2.5, b=5; P=0.5
- Este método es exacto y rápido
- …pero es arduo para modelos reales (complejos)

Método 1: Integración analítica

- La mediana *m*, y otros cuartiles:

$$P(X < m) = P(X > m) = \int_{-\infty}^{m} f(x)dx = 1/2$$

- La media:

$$\mathrm{E[X]} = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

- P.ej., si $X \sim N(\mu, \sigma)$ entonces es (complejos)

```
> qnorm(.5, mean=mu, sd=sigma)
> qnorm(p=c(0.025, .975), mean=mu, sd=sigma)
```

Método 2: Integración por Monte Carlo

Idea = generar muestras aleatorias y calcular porcentajes para aproximar probabilidades

- Strong Law of Large Numbers

Given a function *h*(*x*) and a distribution *f*(*x*), want to find expected value

$$\mathbb{E}_f[h(X)] = \int_{\mathcal{X}} h(x)\, f(x)\, \mathrm{d}x,$$

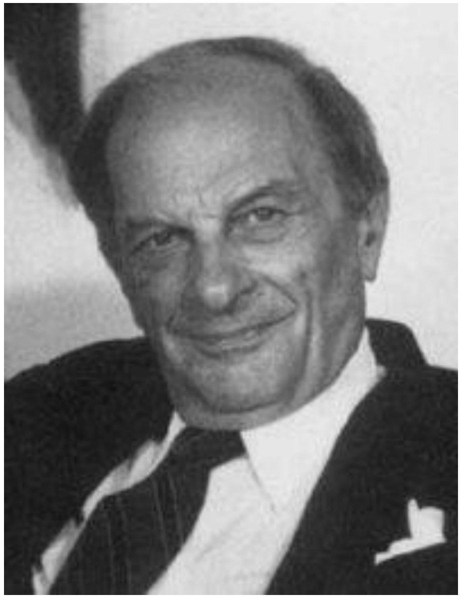
which converges surely to

Una muestra

$$\overline{h}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} h(x_j)\,,$$

for large n.

Stanislaw Ulam



De Dr. Noble Hendrix, con permiso

Las implicaciones de Monte Carlo

- Eso significa que se puede usar Monte Carlo muestras para aproximar varias integrales:
  - Varianza y desviación típica
  - Cuartiles, incluyendo la mediana
  - Funciones de X, como la media
- En lugar de usar integrales exactas, se usa estas aproximaciones para hacer inferencia.
- Una forma de integrar: integración numérica

Método 2: Integración por Monte Carlo

- Idea = generar muestras aleatorias y calcular porcentajes para aproximar probabilidades

```
> x <- rnorm(10, mean=mu1, sd=tau1)
> mean(x<0)       [1] 1
```

Porcentaje de x<0 (por que?)

```
> quantile(x, probs=c(0.025, 0.975))
     -1.14731923 -0.08842335
```

La cantidad de las muestras controla la precisión

```
> x <- rnorm(1e6, mean=mu1, sd=tau1)
> mean(x<0)       [1] 0.940683
> quantile(x, probs=c(0.025, 0.975))
     -1.5768345  0.1790194
```

Método 2: Monte Carlo integración

- Para poder implementarlo necesitamos conocer la forma exacta de la distribución a posteriori como en el ejemplo anterior con `rnorm`
- En este método cuanto más muestras generamos mejor será la aproximación
- **<u>Sin embargo, esta situación es muy raro</u>**
- Que haríamos cuando no podamos usar los métodos anteriores?

Homework 1.1

1. Let X~U(-π, 1). Integrate this analytically for P(a<X<b).
2. Now let X be a triangle:

$$f(x)=\begin{cases} cx \text{ if } 0<x<1/2 \\ c(1-x) \text{ if } 1/2<x<1 \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}$$

3. Draw this or use R to plot it.
4. Integrate it from 0 to 1. What does *c* need to be so this is a probability distribution? [La parte mas dificil] Calculate P(.35<X< .98)

Homework 1.2

1. Assume X~N(0,1). Use rnorm (numerical) to estimate P(X< -5). Repeat but use pnorm (analytical). Why different?
2. Generate 500 samples and plot the cumulative mean of samples vs first m samples. How many samples are "good enough" to approximate the mean?
3. Using samples from #2, approximate mean of the function y=h(x)=x^2. Is this equal to mean(x)^2?
4. [Extra: find the pdf for Y=h(x) and add to histogram]

Homework 1.3

- Install JAGS 4.3.0: https://sourceforge.net/projects/mcmc-jags/files/JAGS/4.x/
- Download user manual:
- https://sourceforge.net/projects/mcmc-jags/files/Manuals/4.x/jags_user_manual.pdf/download
- Install R packages R2jags, coda
- Start R and ensure library(R2jags) works