Inferencia Bayesiana

Modelos Bayesianos con aplicaciones ecológicas

Dr. Cole Monnahan
University of Concepción, Chile

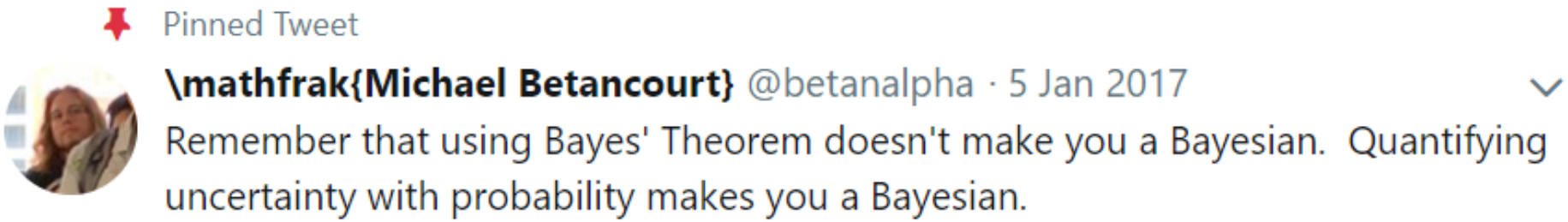
Enero, 2018

Resumen

- Para distribuciones continuas hay que integrar para obtener probabilidades
- Integración analítica es normalmente demasiado difícil
- Entonces se puede usar Monte Carlo como una flexible opción, pero a menudo (nunca?) la forma no es conocida
- Modelos Bayesianos resultan en distribuciones muy complejas que necesitan ser integrado

Conceptos importantes

- La inferencia Bayesiana es un paradigma diferente que la frecuentista
- Las probabilidades son grados de creencia
- Se actualiza la creencia *a priori* con los datos
- La incertidumbre se cuantifica mediante probabilidades
- **Calculo de las probabilidades se requiere integración**



La regla de Bayes

- Si θ son los parámetros y *y* los datos (ambos son v.a)
- Entonces, P(θ,y)=P(θ)P(y|θ)
- Y P(θ|y)=P(θ,y)/P(y)
- Combinando los…

$$P(\theta \mid y) = \frac{P(\theta)P(y \mid \theta)}{P(y)} \propto P(\theta)P(y \mid \theta)$$

- Posterior = (constant)(prior)(likelihood)

Componentes de la regla de Bayes

- P(θ)="Prior": *la incertidumbre antes de experimento o conocimiento de un experto*
- P(y|θ)="Likelihood": *la verosimilitud de los datos dado los parámetros – lo mismo como clásica*
- P(y) = *Una constante que no se puede calcular*
- P(θ|y) = "Posterior": *la creencia que resulta de la combinación de dos fuentes da información: prior y datos.*
  - Es una distribución de probabilidad
  - La usamos para hacer inferencia

Resumen de las diferencias de los paradigmas de inferencia.

	Frequentist	Bayesiana
Que es estimado?	P(Y|H) Datos dado el hipótesis	P(H|Y) Hipótesis dado los datos
La definición de probabilidad	frecuencias (infinitas) relativas de eventos	Grado de creencia
Fuentes de la información	Solo los datos	Los datos y información a priori
La definición de los parámetros	Estimaciones de cantidades “verdaderas”	Variables aleatorias estadísticas
Método de inferencia	Máximo verosimilitud	Integración (de posteriori)

Ellison 2004

Las ventajas de inferencia Bayesiana

- Hay respuestas intuitivas: los parámetros son distribuciones de probabilidad.
- Poder formalmente incorporar conocimiento antes del experimento
- Las suposiciones asintóticas no son necesarios
- La estimación de los modelos jerárquicos es natural y fácil
- Análisis de decisión: Poder calcular probabilidades de las consecuencias de varias acciones. (Punt and Hilborn 1997)

Desventajas

- Toma mas tiempo para estimar
- En general, la especificación de los priors
  - Poder ser sensitivo para la transformación de los parámetros. (e.g., Thorson and Cope 2017, Maunder 2003)
  - Poder ser difícil determinar apropiados “priors”
  - P.ej., no hay “uninformative priors”

Priors

- Cual es el rol de los priors?

Gelman et al. (2014):

1. Una población de valores posibles de los parámetros (perspectiva de la población)
2. Una declaración del conocimiento y incertidumbre de los parámetros (perspectiva del estado del conocimiento)

En ambos casos, la prior debe incluir todos los valores posibles – "*not in the prior not in the posterior" ..* Pero **ellas no pueden depender de los datos**

Gelman et al. 2014. Bayesian Data Analysis 3rd ed. CRS Press

La polémica

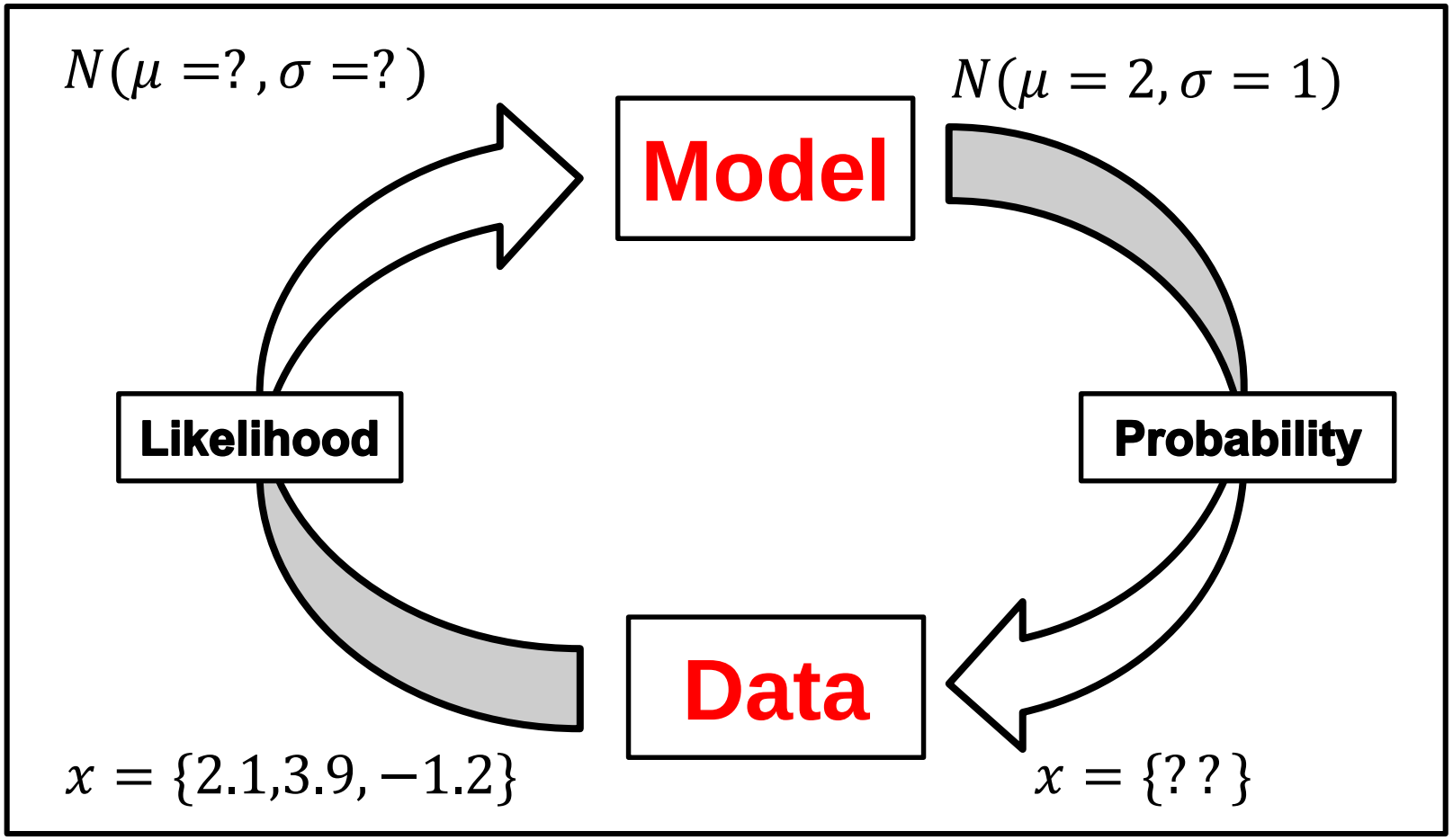
- Hay debates en la comunidad de los estadísticos por décadas
- Hay objeciones de priors “subjetivas” por el contrario de las decisiones “objetivas” con inferencia frecuentista
- Pero recentiemente ha disminuido.. “*prior distributions are not necessarily any more subjective than other aspects of a statistical model*” (Gelman and Hennig 2017)
- Vamos a ignorarla y enfocar en aplicaciones

Noninformative priors

- La idea es elegir una prior que resulta en un efecto pequeño de la posterior (*also reference, vague, or flat*)
- Puede permitir solo los datos guiar la inferencia a través de la verosimilitud
- “Improper priors” tiene una probabilidad infinita (e.g., X~U(-Inf,Inf))
- Por otro lado, una “proper prior”

Probabilities vs likelihoods

- La diferencia puede ser confusa



Example: Normal likelihood

Probability (density):

$$Pr(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Likelihood:

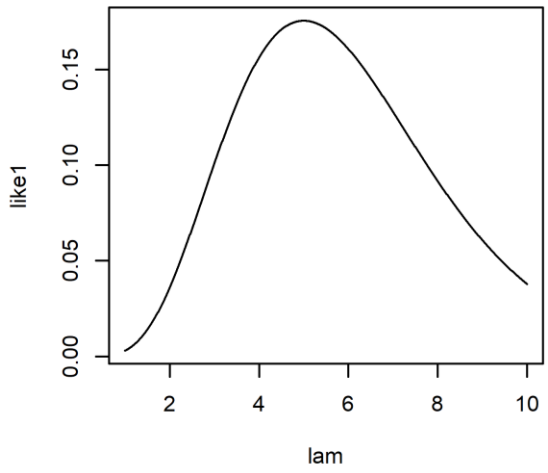
$$\Pr(x;\mu,\sigma) = L(\mu,\sigma|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

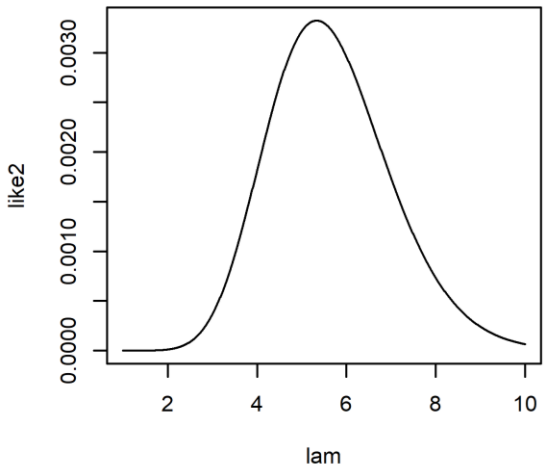
But calculated the same in R!

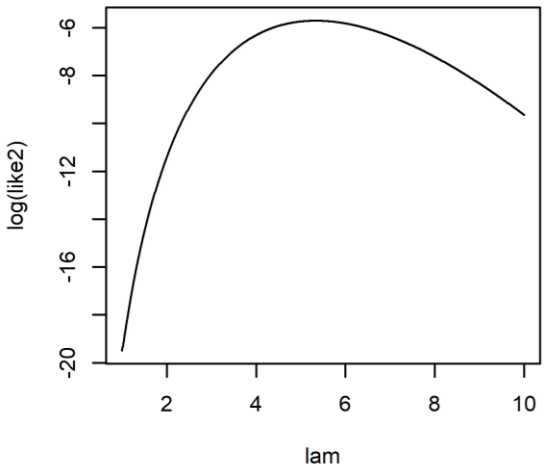
```
dnorm(x=2, mean=3, sd=1)
```

Exercise

- Deja X~Poisson(λ) y una sola observación y={5}. Crea una figura de la verosimilitud de λ de 1 a 10
- Repetirlo per con y={5,4,7} independiente y finalmente crea otra versión de la segunda que es un logoritmo de la verosimilitud.



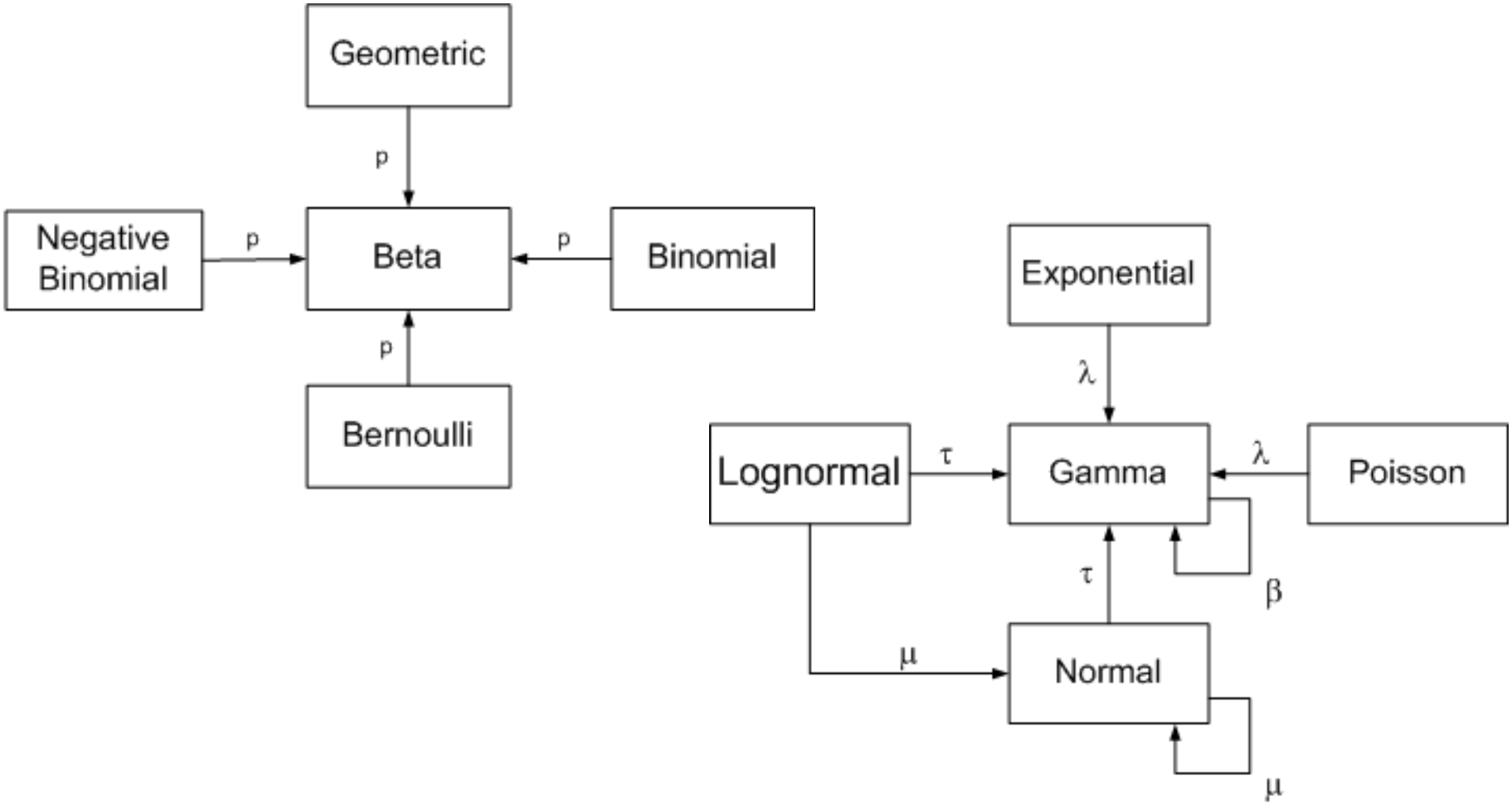




Conjugacy

- En casos muy específicos se puede reconocer la forma da la posterior
- Normal prior + normal likelihood = normal posterior
- Eso es “conjugacy” o “conjugate prior” (see here)
- En tan casos la inferencia es fácil (p.ej. `pnorm`) pero es muy raro
- Sin *conjugacy* se necesita otra manera de integración

Conjugate examples



https://www.johndcook.com/blog/conjugate_prior_diagram/

Ejemplo I

- Suponga que usamos un solo dato (*y*) de una distribución normal donde la media (*θ)* no es conocida pero la varianza sí: $p(y|\theta) \sim N(\theta,\sigma)$. La prior=$p(\theta) \sim N(\mu_0,\tau_0)$

$$p(\theta \mid y) \propto p(y \mid \theta)\, p(\theta)$$

$$p(\theta \mid y) \propto \exp\left(-\frac{(y-\theta)^2}{2\sigma^2} \right) \cdot \exp\left(-\frac{(\theta-\mu_0)^2}{2\tau_0^2} \right)$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{(y-\theta)^2}{\sigma^2} - \frac{(\theta-\mu_0)^2}{\tau_0^2} \right] \right)$$

$$= \exp\left(-\frac{(\theta-\mu_1)^2}{2\tau_1^2} \right)$$

$$\mu_1 = \frac{\frac{1}{\tau_0^2}\mu_0 + \frac{1}{\sigma^2} y}{\frac{1}{\tau_0^2} + \frac{1}{\sigma^2}}$$

$$\frac{1}{\tau_1^2} = \frac{1}{\tau_0^2} + \frac{1}{\sigma^2}$$

Section 2.6, Gelman et al. 2014

Ejemplo I

- Suponga que usamos un solo dato (*y*) de una distribución normal donde la media (*θ)* no es conocida pero la varianza sí: $p(y|\theta) \sim N(\theta,\sigma)$. La prior=$p(\theta) \sim N(\mu_0,\tau_0)$

$$p(\theta \mid y) \propto \exp\left(-\frac{(\theta-\mu_1)^2}{2\tau_1^2}\right)$$

$$\mu_1 = \frac{\frac{1}{\tau_0^2}\mu_0 + \frac{1}{\sigma^2}y}{\frac{1}{\tau_0^2}+\frac{1}{\sigma^2}}$$

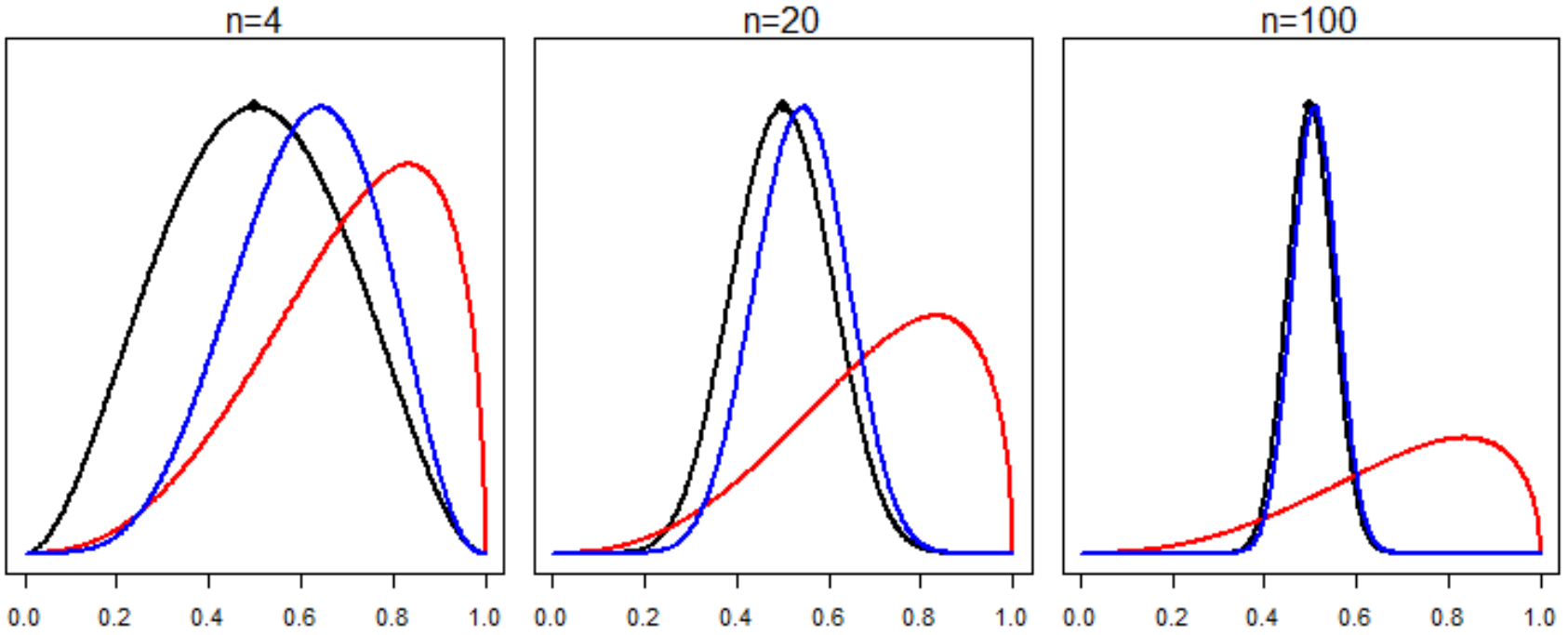
$$\frac{1}{\tau_1^2} = \frac{1}{\tau_0^2} + \frac{1}{\sigma^2}$$

- Qué representa esta ecuación?
- Una distribución normal! $N(\mu_1,\tau_1)$
- La media de la posterior "*es el promedio ponderado de la media de la distribución a priori y el dato*"
- [mostrar en R: prior, verosimilitud y posterior]

Section 2.6, Gelman et al. 2014

Ejemplo II

- Posterior Beta-binomial=beta prior + binomial likelihood
- Supongamos que la mitad de los animales marcados mueren (queremos estimar sobrevivencia)
- Qué pasa al aumentar los datos sin cambiar la prior?



Review of key concepts

- Actualizamos el conocimiento prior con los datos para formar la posterior
- Como todas las distribuciones, hay que integrarlas por inferencia (medianas, medias, cuantíales, etc.)
- Pero raramente tienen formas conocidas entonces no se puede usar Monte Carlo integración
- Entonces, como se puede integrarlas?

Método 3: **Markov chain** Monte Carlo

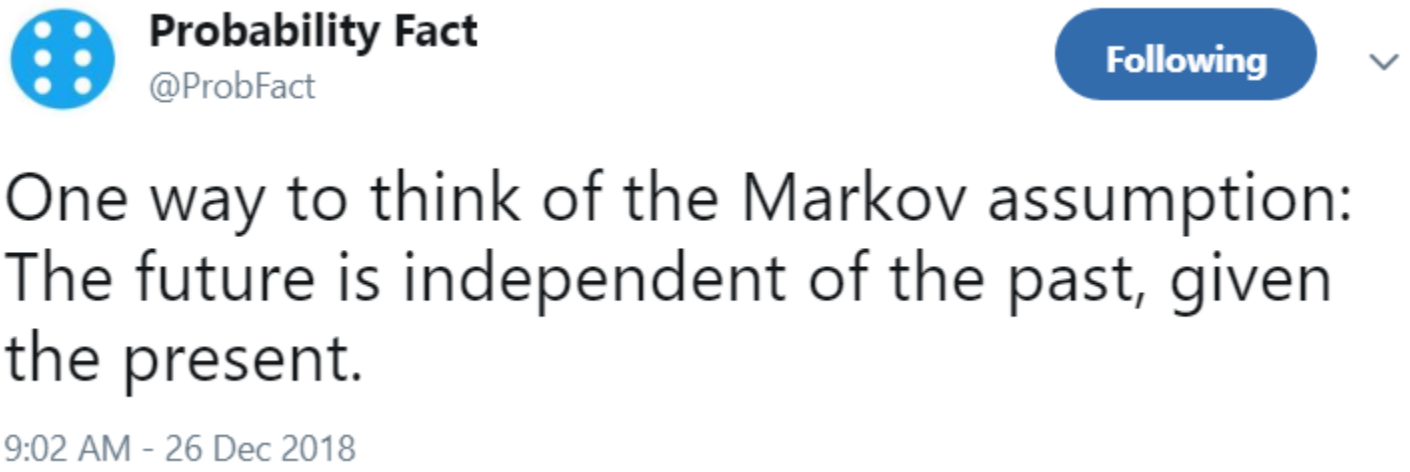
- La idea principal es generar muestras aleatorias **correlacionadas** y calcular porcentajes para aproximar probabilidades
- Usamos cadenas de Márkov (Markov chains)
- Es un tipo especial de proceso estocástico en que cada evento depende *solamente* del evento inmediatamente anterior
- …… Qué??

Método 3: **Markov chain** Monte Carlo

- Un ejemplo:

$$X_{t+1} = X_t + U_t, \qquad U_t \sim U\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

- X es una cadena de Markov



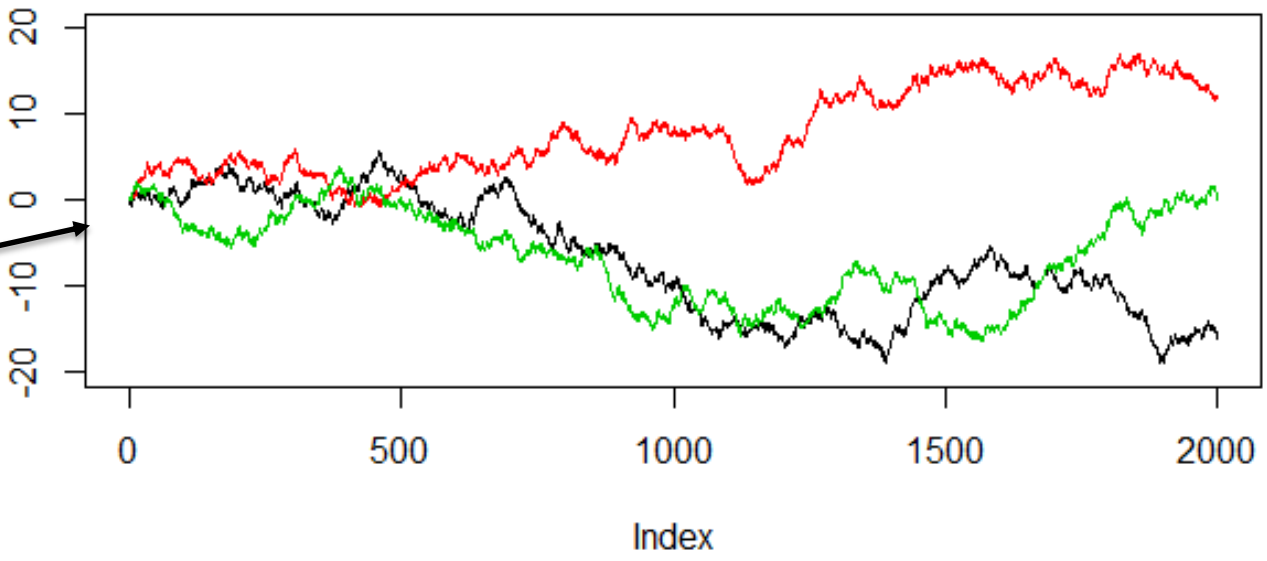
Un ejemplo de cadena de Márkov simple

```
mc <- function(Niter){
   x <- rep(NA,Niter)
   x[1] <- 0
   for(i in 2:Niter){
     x[i] <- x[i-1]+runif(1,-.5,.5)
   }
   return(x)
}
```

Estado inicial

Este estado depende *solamente* del evento anterior

"Random walk" comportamiento



Método 3: **Markov chain** Monte Carlo

- Un ejemplo:

$$X_{t+1} = X_t + U_t, \qquad U_t \sim U\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

- Esa cadena no es tan útil. No se puede usarla para hacer inferencia
- No es “Monte Carlo” en el sentido de inferencia Bayesiana
- Hay que cambiar la cadena un poco para usarla

Una cadena de Márkov especial: **MCMC**

```
mcmc <- function(Niter, f, x0=0, U=1){
  x <- rep(NA,Niter)
  x[1] <- x0
  for(i in 2:Niter){
    new <- x[i-1]+runif(1,-U,U)
    if( f(new)/f(x[i-1]) > runif(1)){
      ## Update or "accept" this new point
      x[i] <- new
    } else {
      ## Stay at previous point
      x[i] <- x[i-1]
    }
  }
  return(x)
}
```

Estado inicial

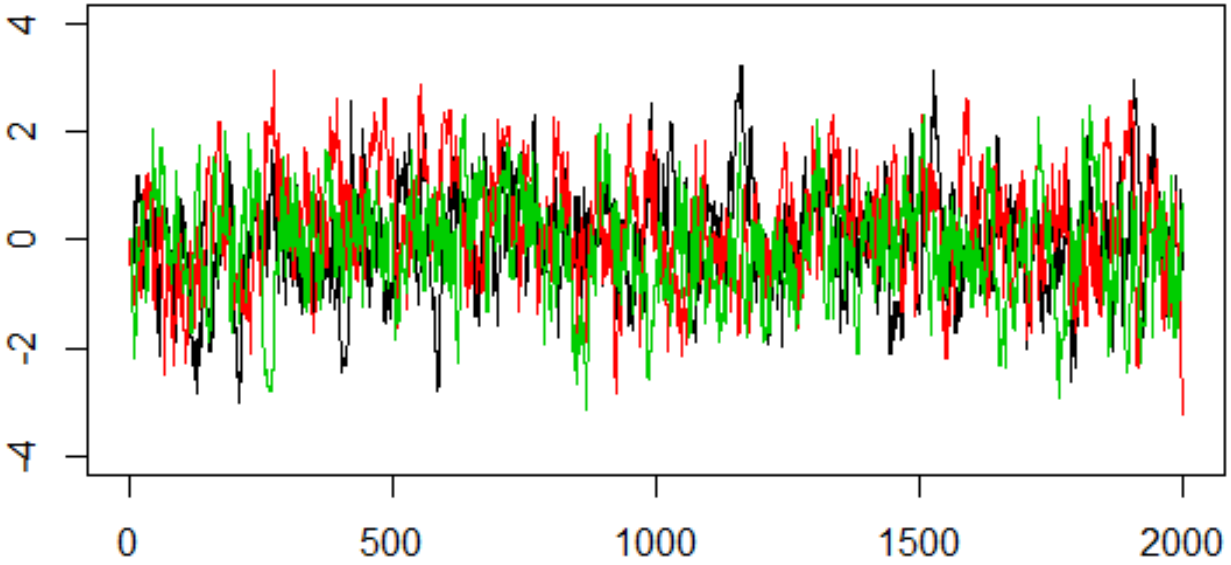
El próximo estado depende *solamente* del evento anterior

Se acepta el estado nuevo depende de una condición aleatoria

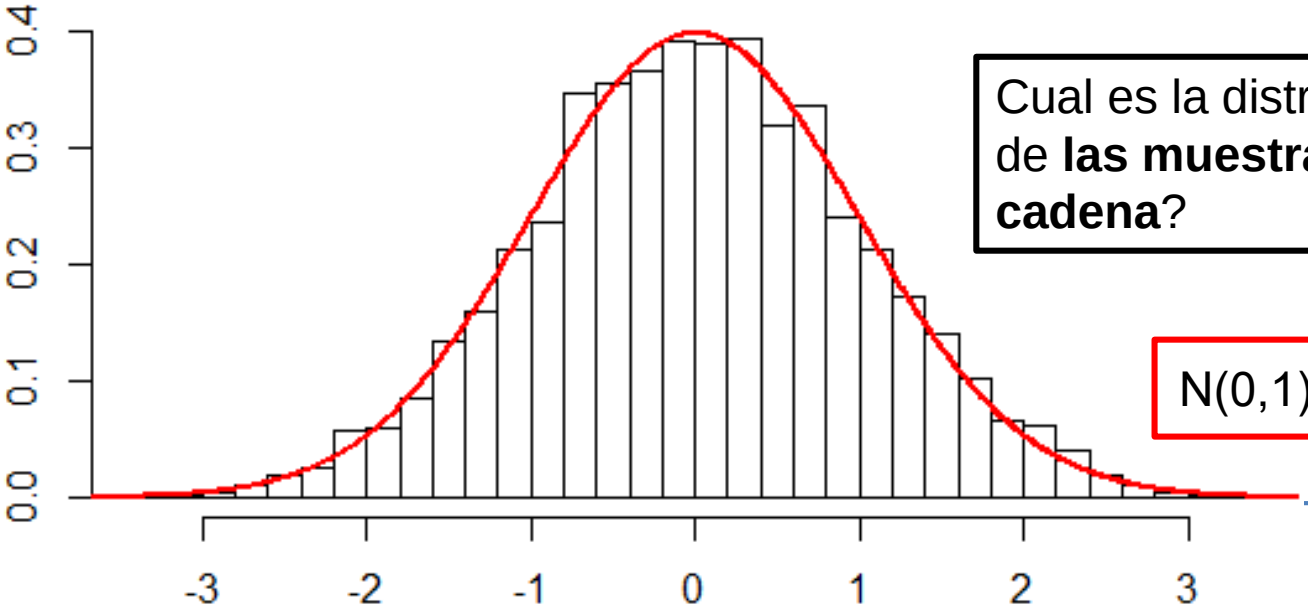
```
f <- function(x) dnorm(x,0,1)
```

`f` es la función de la densidad (PDF)

Una cadena Márkov especial



Comportamiento diferente que anterior



Cual es la distribución de **las muestras de la cadena**?

N(0,1)… es `f`!!

Una cadena Márkov especial

- Notar que en la ecuación

```
c*f(new)/c*f(x[i-1])
```

- … la constante (`c`) se cancelaría
- Significa que **no es necesario** conocer la constante para usar este método.
- Por eso podemos usarlo para aproximar las distribuciones a posteriori
- Este algoritmo se llama Metropolis-Hastings
- [Demonstrar con el ejemplo anterior]

Metropolis et al. 1953

Método 3: **Markov chain** Monte Carlo

- Thus the strong law of large numbers applies to MCMC just as it does for Monte Carlo
- For integrable function $h()$, the average converges on its expectation

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} h(X^{(t)}) \longrightarrow \mathbb{E}_f[h(X)]$$

- So we can use the MCMC chain to approximate integrals just like with Monte Carlo

De Noble Hendrix, con permiso

Markov chain Monte Carlo

- Hay **muchos** tipos de cadenas de Márkov Monte Carlo:
  - Metropolis-Hastings, Gibbs, NUTS, slice sampling, etc.
- La idea es la misma: generar muestras para estimar probabilidades
- MCMC es lento, y hay algunas dificultades
- Las discutiremos durante del curso
- Pero MCMC es flexible y por eso es usado ampliamente en estadística Bayesiana

Questions?

Exercise

$$p(y \mid \theta) \sim N(\theta, \sigma = 1)$$

$$p(\theta) \sim N(\mu_0 = -2, \tau_0 = 0.5)$$

$$p(\theta \mid y) \propto p(y \mid \theta)\, p(\theta)$$

- Usa ejemplo 1:
- Usa mcmc función para generar muestras de la posterior:

```
samples <- mcmc(Niter=5000, f=posterior, x0=0, U=1)
```

- Contrasta a la solución analítica:

$$p(\theta \mid y) \sim N(\mu_1, \tau_1)$$

$$\mu_1 = \frac{\frac{1}{\tau_0^2}\mu_0 + \frac{1}{\sigma^2} y}{\frac{1}{\tau_0^2} + \frac{1}{\sigma^2}}$$

$$\frac{1}{\tau_1^2} = \frac{1}{\tau_0^2} + \frac{1}{\sigma^2}$$

- Estima 95% credible interval usando ambas maneras de la integración

References

- Gelman, A., J. B. Carlin, H. S. Stern, and D. B. Rubin. 2014. Bayesian data analysis. Taylor & Francis.
- Metropolis, N., A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller, and E. Teller. 1953. Equation of state calculations by fast computing machines. Journal of Chemical Physics **21:1087-1092.**