

Modélisation: La Guerilla:

State Of The Art:

On trouve dans l'article une précision de travaux comme Methods of Operations Research (P. M. Morse et G. E. Kimball, 1951) qui analyse les chances de réussites d'armées dans différents types de situation comme deux armées face à face avec un effectif équitable (auquel cas il y a une symétrie entre les deux camps au niveau des équations) ou au contraire dans une situation asymétrique (guérilla). Il tente alors de généraliser les modèles étudiés par H. Brackney, R. E. Bach, L. Dolansky, ou encore H. L. Stubb.

Ainsi, lors de cette dernière on met en évidence deux côtés : le côté pair (armée classique) et le côté impair (guérilla). À partir des forces initiales de chaque côté, on modélise la quantité de dégâts pouvant être imposés à l'armée ainsi que les différents paramètres qui rentrent en compte (ratio entre les forces, connaissance ou non du terrain, efficacité des armes, etc...). Deitchman démontre de cette manière que, malgré une infériorité numérique et en armement, une force de guérilla attaquante peut vaincre une force régulière défensive en utilisant des tactiques adaptées. Les défenseurs peuvent également gagner en sélectionnant leurs armes, tactiques, et tailles de groupe pour chaque confrontation (par exemple, en maintenant pour la guérilla une supériorité numérique locale en dépit d'un effectif globalement plus réduit).

Malgré le fait que les équations de Lanchester offrent une description simple et facile à manipuler de certains types d'échanges militaires. L'article montre aussi les limitations de ces équations, (difficulté à prédire réellement l'issue d'une bataille en raison de paramètres trop nombreux et trop peu prévisibles).

Partie I: Modèle à états continus:

Dans un premier temps, nous allons considérer les deux cas simples proposés par Lanchester, puis nous verrons le cas d'un exemple plus complexe qui permettra d'améliorer le modèle. Voici les notations que nous utiliserons.

Notations:

x_i : Nombre de combattants du camp i (On a dans cette étude considéré que la force d'un camp était proportionnelle a son nombre de soldat).

i : Facteur qui caractérise la puissance de feu d'un soldat qui tire sur une cible visible.

I : Facteur qui caractérise la puissance de feu d'un soldat qui tire sur une cible invisible ou cachée.

x_{i0} : Nombre de combattants du camp i à l'état initial (avant le combat).

I.A: Un premier modèle, le combat face à face :

I.A.1: Description du modèle, premières hypothèses:

Ainsi, on considère une bataille entre deux forces armées. On cherche d'abord à modéliser le cas d'une bataille où les deux armées se font face et tirent l'une sur l'autre en voyant son adversaire.

L'approche de Lanchester est ici très simple, il considère que chaque soldat vise un ennemi et tire avec une puissance de feu (ce que l'on a noté avec une lettre minuscule) sur l'adversaire. Cette puissance de feu caractérise une probabilité de toucher mortellement, une portée/puissance de l'arme etc... Donc les évolutions du nombre de combattants de chaque côté se caractériseraient par les

$$\text{équations: } \begin{cases} \dot{x}_a = -gx_g \\ \dot{x}_g = -ax_a \end{cases} \text{ et donc réécrit simplement } \begin{cases} \ddot{x}_a = agx_a \\ \ddot{x}_g = agx_g \end{cases}$$

$$\text{et la résolution (détaillé en annexe) nous donne: } \begin{cases} x_a(t) = x_{a0} \cosh(\sqrt{ag}t) - \sqrt{\frac{g}{a}} x_{g0} \sinh(\sqrt{ag}t) \\ x_g(t) = x_{g0} \cosh(\sqrt{ag}t) - \sqrt{\frac{a}{g}} x_{a0} \sinh(\sqrt{ag}t) \end{cases}$$

I.A.2: Analyse des résultats, stabilité:

Trouvons les points de stabilité. Les équations sont valides tant que les armées ont un nombre de soldat supérieur à 0. Un équilibre serait donc de la forme:

$$(x_g, x_a) = (0, y) \text{ ou } (y, 0) \text{ avec } y \in \mathbb{R}^+$$

$$\text{On a: } \dot{X} = JX \text{ avec } X = \begin{bmatrix} x_g \\ x_a \end{bmatrix} \text{ et } J = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ -g & 0 \end{bmatrix}$$

Or les valeurs propres de J sont $\lambda_{\pm} = \pm\sqrt{ag}$ or $\text{Re}(\lambda_{+}) > 0$ donc le point d'équilibre (0,0) est instable et avec le même raisonnement avec $x_g - y$ ou $x_a - y$, on trouve aussi que tous les points d'équilibres sont instables.

Ce résultat est plutôt logique et même attendu, en effet, si une armée ne possède plus de combattants et l'autre en possède, une minuscule variation de ce point d'équilibre autrement dit rajouter des soldats à l'un ou à l'autre n'aurait pour effet que de rajouter des troupes à celui qui en a encore ou relancer un court combat qui verrait au final juste le nombre de troupes du camp nombreux baisser légèrement.

Une autre analyse plus pertinente serait de regarder pour quels cas les deux camps s'anéantissent complètement. Une rapide égalité donne alors: $x_{a0}^2 - \frac{g}{a}x_{g0}^2 = 0$ ou donc $ax_{a0}^2 = gx_{g0}^2$

I.A.3: Etude des courbes, critiques et conclusion sur le modèle:

Pour étudier les courbes, nous avons tout d'abord besoin de dimensionner g et a. Nous allons donc raisonner pour leur définir une valeur et ensuite lancer une simulation avec différentes valeurs de x_{g0} et de x_{a0} avec les a et g que nous aurons dimensionné.

On suppose donc que g et a se mettent sous la forme: $g = \frac{p_g \times e_g}{T_g}$ avec p_g la probabilité que la balle tirée touche sa cible, e_g l'efficacité de l'arme ou autrement dit la probabilité que la balle soit mortelle et T_g le temps entre deux tirs d'un soldat.

$$\text{On a donc avec: } \begin{cases} p_g \approx \frac{1}{10} \\ e_g \approx \frac{1}{4} \\ T_g \approx 7s \end{cases} \text{ Donc } g \approx \frac{1}{280}$$

$$\text{Et } \begin{cases} p_a \approx \frac{1}{8} \\ e_a \approx \frac{1}{3} \\ T_a \approx 6s \end{cases} \text{ Donc } a \approx \frac{1}{144}$$

Avec ces valeurs nous traçons donc les courbes en figure 1 et nous en concluons sur notre premier modèle. Tout d'abord, les courbes sont bien en accord avec les équations et avec l'évolution logique d'une bataille entre deux groupes armés dont un en particulier a une supériorité

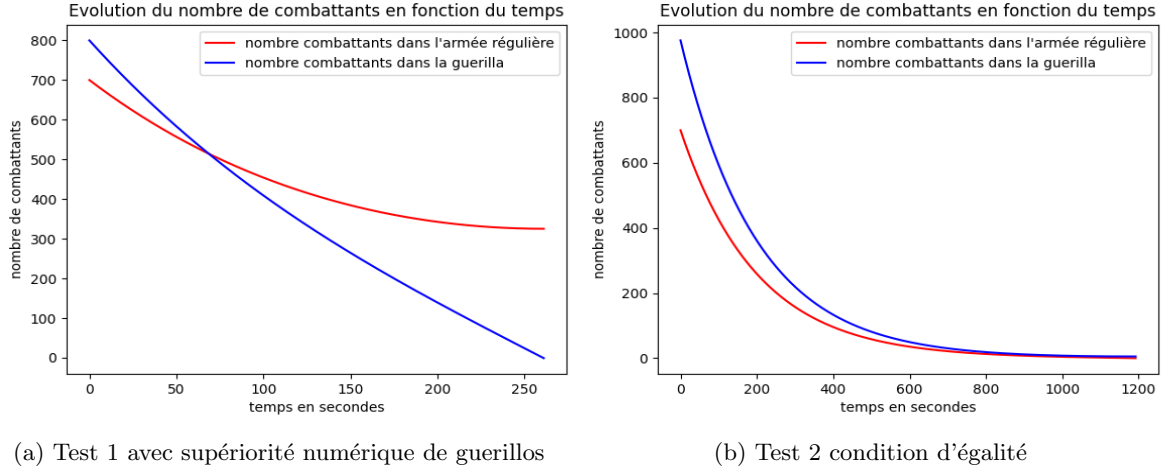


Figure 1: Test avec les valeurs de a et de g trouvées ci-dessus

technologique de ses armes (ici l'armée). Les courbes relatent bien que même en légère supériorité numérique, les guerillos peuvent perdre le combat. Enfin, la figure 1b est un test de la condition d'égalité décrite en fin de I.A.2. On observe bien que les deux groupes disparaissent en même temps.

Nous pouvons aussi critiquer ce modèle qui bien qu'il reflète une vague réalité du combat, il reste trop lisse, trop prévisible car il ne tient pas compte (et cela serait dur de prendre en compte tous les facteurs qui proviennent de la situation, des conditions du combat en lui même, du lieu ...

I.B: Un second modèle, l'embuscade :

I.B.1: Description du modèle, premières hypothèses:

Désormais, on considère une embuscade entre deux forces armées. On prend le cas où les guerillos(notés g) embusquent l'armée régulière (notée a). L'approche de Lanchester est ici aussi très simple, il décrit l'embuscade comme: les guerillos tirent en visant sur l'armée et l'armée cependant tire dans une vaste zone un peu au hasard car ne sachant pas où les guerillos se cachent. L'évolution du nombre de militaires réguliers ne change pas du précédent modèle mais celle du nombre de guerillos change. En effet, un nouveau coefficient arrive A qui catégorise ce 'tir au hasard' des militaires. En effet, ils tirent dans une large zone donc la variation du nombre de guerillos est proportionnelle au nombre de militaires mais aussi du nombre de guerillos car plus ils sont nombreux, plus un tir au hasard est probable de les toucher.

Les équations sont donc:
$$\begin{cases} \dot{x}_a = -gx_g \\ \dot{x}_g = -Ax_ax_g \end{cases}$$

Les calculs détaillés en annexes distingues alors 3 cas différents, selon la valeur de $K = x_{a0}^2 \frac{A}{2} - gx_{g0}$

Si $K > 0$:

$$\text{Alors on a: } \begin{cases} x_a(t) = \frac{x_{a0} + \sqrt{\frac{2C_1}{A}} \tanh\left(\sqrt{\frac{AC_1}{2}} t\right)}{1 + x_{a0} \sqrt{\frac{A}{2C_1}} \tanh\left(\sqrt{\frac{AC_1}{2}} t\right)} \\ x_g(t) = \frac{A}{2g} \left(\frac{x_{a0} + \sqrt{\frac{2C_1}{A}} \tanh\left(\sqrt{\frac{AC_1}{2}} t\right)}{1 + x_{a0} \sqrt{\frac{A}{2C_1}} \tanh\left(\sqrt{\frac{AC_1}{2}} t\right)} \right)^2 + C_3 \end{cases} \quad \text{avec } \begin{cases} C_1 = K = x_{a0}^2 \frac{A}{2} - gx_{g0} \\ C_3 = x_{g0} - x_{a0}^2 \frac{A}{2g} \end{cases}$$

Si $K = 0$:

$$\text{Alors on a: } \begin{cases} x_a(t) = \frac{2x_{a0}}{2 + Ax_{a0}t} \\ x_g(t) = \frac{A}{2g} \left(\frac{2x_{a0}}{2 + Ax_{a0}t} \right)^2 + x_{g0} - \frac{A}{2g} x_{a0}^2 \end{cases}$$

Si $K < 0$:

$$\text{Alors on a: } \begin{cases} x_a(t) = \frac{x_{a0} - \sqrt{\frac{2C_1}{A}} \tan\left(\sqrt{\frac{AC_1}{2}} t\right)}{1 + x_{a0} \sqrt{\frac{A}{2C_1}} \tan\left(\sqrt{\frac{AC_1}{2}} t\right)} \\ x_g(t) = \frac{A}{2g} \left(\frac{x_{a0} - \sqrt{\frac{2C_1}{A}} \tan\left(\sqrt{\frac{AC_1}{2}} t\right)}{1 + x_{a0} \sqrt{\frac{A}{2C_1}} \tan\left(\sqrt{\frac{AC_1}{2}} t\right)} \right)^2 + C_3 \end{cases} \quad \text{avec } \begin{cases} C_1 = -K = gx_{g0} - x_{a0}^2 \frac{A}{2} \\ C_3 = x_{g0} - x_{a0}^2 \frac{A}{2g} \\ t \in]0; \frac{\pi}{\sqrt{2AC_1}}[\end{cases}$$

I.B.2: Analyse des résultats, stabilité:

Les points d'équilibre sont ici aussi les $(x_g, x_a) = (0, \bar{x}_a)$ ou $(\bar{x}_g, 0)$ avec $\bar{x}_g, \bar{x}_a \in \mathbb{R}^+$

On peut linéariser aux points d'équilibre pour $(\bar{x}_g, 0)$: $\dot{X} = JX$ avec $X = \begin{bmatrix} x_g \\ x_a \end{bmatrix}$ et $J = \begin{bmatrix} 0 & -A\bar{x}_g \\ -g & 0 \end{bmatrix}$

Or les valeurs propres de J sont $\lambda_{\pm} = \pm \sqrt{A\bar{x}_g g}$ or $\text{Re}(\lambda_{+}) > 0$ donc le point d'équilibre $(\bar{x}_g, 0)$ est instable et avec le même raisonnement avec $(0, \bar{x}_a)$, on trouve aussi que tous les points d'équilibres sont instables.

Ici aussi on retrouve une même logique que pour le cas de la bataille face à face, il n'existe pas de points d'équilibre stable dans un cas de bataille. Le seul moyen logique d'en avoir un serait l'ajout d'une arrivée de renfort pour les deux camps qui serait contraire aux pertes.

Et, si on regarde ici le cas où on a la condition $K=0$ autrement dit: $x_{a0}^2 \frac{A}{2g} = x_{g0}$ On trouve alors systématiquement une défaite du groupe guérillos.

I.B.3: Etude des courbes, critiques et conclusion sur le modèle:

Ici aussi nous avons tout d'abord besoin de dimensionner g et A, sachant que g sera avec le même dimensionnement que le premier modèle. Nous allons donc raisonner pour définir à A une valeur et ensuite lancer une simulation avec différentes valeurs de x_{g0} et de x_{a0} avec les bon A et g.

On suppose donc toujours que g et A se mettent sous la forme: $g = \frac{p_g \times e_g}{T_g}$ avec p_g la probabilité que la balle tirée touche sa cible, e_g l'efficacité de l'arme ou autrement dit la probabilité que la balle soit mortelle et T_g le temps entre deux tirs d'un soldat. Ici, il y a juste une précision supplémentaire, p_A va décrire le fait qu'un soldat tire au hasard dans une zone devant lui ressemblant à un demi-cylindre de rayon 10m et de hauteur 4m et que la superficie d'un guerillo caché est de $0.2m^2$

$$\text{On a donc avec: } \begin{cases} p_g \approx \frac{1}{10} \\ e_g \approx \frac{1}{4} \\ T_g \approx 7s \end{cases} \quad \text{Donc } g \approx \frac{1}{280}$$

$$\text{Et } \begin{cases} p_A \approx \frac{S_{guerillo}}{S_{visée}} \approx \frac{0.2}{200\pi} \\ e_A \approx \frac{1}{5} \\ T_A \approx 6s \end{cases} \quad \text{Donc } A \approx 1.06 \times 10^{-5}$$

Avec ces valeurs nous traçons donc les courbes en figure 2 et nous pouvons critiquer notre second modèle. Tout d'abord, les courbes sont bien en accord avec les équations et avec l'évolution logique d'une embuscade. Même si l'armée est en supériorité numérique, ils peuvent bien perdre largement (figure 1a) mais il faut tout de même un minimum d'attaquants pour que l'attaque soit un succès. La critique qui serait possible est que ces équations ne tiennent pas compte de l'effet de surprise qui disparaît si l'embuscade dure trop longtemps. Ou du fait que l'armée peut elle même fuir ou se cacher.

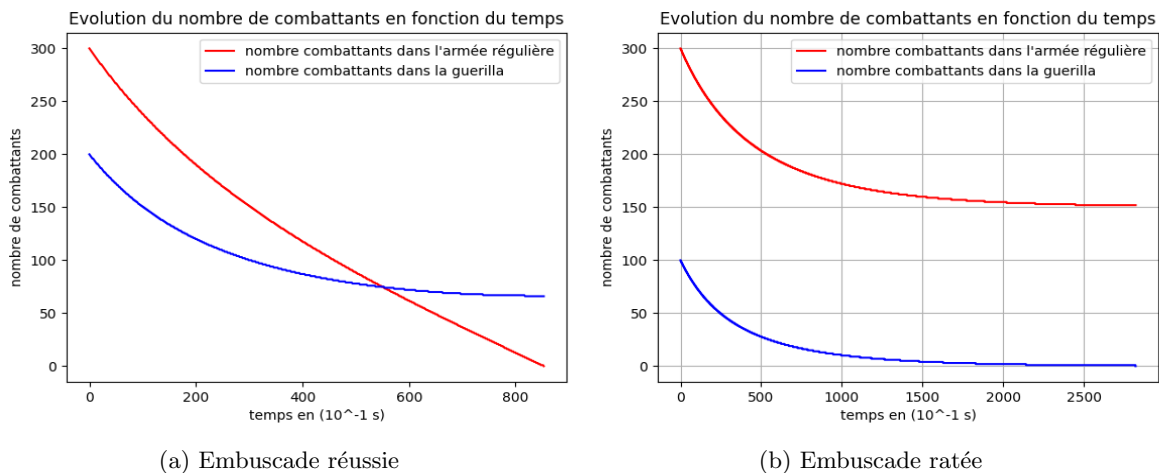
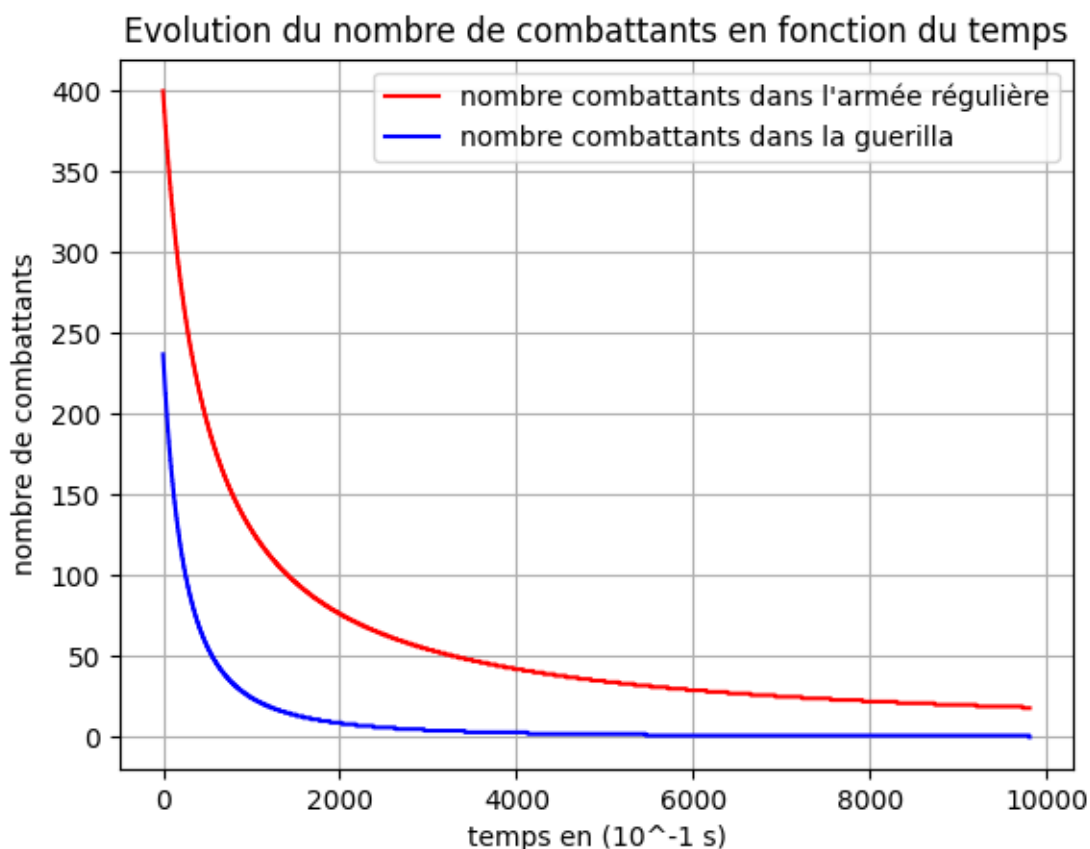


Figure 2: Test avec les valeurs de A et de g trouvées ci-dessus



Cette dernière figure est le cas où $K=0$, et on peut voir qu'on est proche du cas d'égalité des deux armées.

I.C: Un dernier modèle, embuscade améliorée :

I.C.1: Description du modèle, hypothèses:

On considère ici un cas pour améliorer la réalité d'une embuscade. On prend les mêmes équations que précédemment pour l'embuscade en changeant cependant un paramètre. On prend désormais g qui dépend du temps, en effet, on cherche à modéliser le fait que les guérilleros vont récupérer les armes de l'armée au fur et à mesure du combat car elles ont un avantage technologique

sur les leurs. On prend donc comme équation:

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) = -g_0(t)x_g(t) \\ \dot{x}_g(t) = -Ax_a(t)x_g(t) \\ g_0(t) = a + (g - a)\frac{x_a(t)}{x_{a0}} \end{cases}$$

Ce système n’est malheureusement pas résoluble assez facilement puisque complètement non-linéaire et couplé. Cependant, il est quand même possible d’observer l’évolution de ce sytème en passant a temps discret.

I.C.2: Passage au temps discret et critique du modèle:

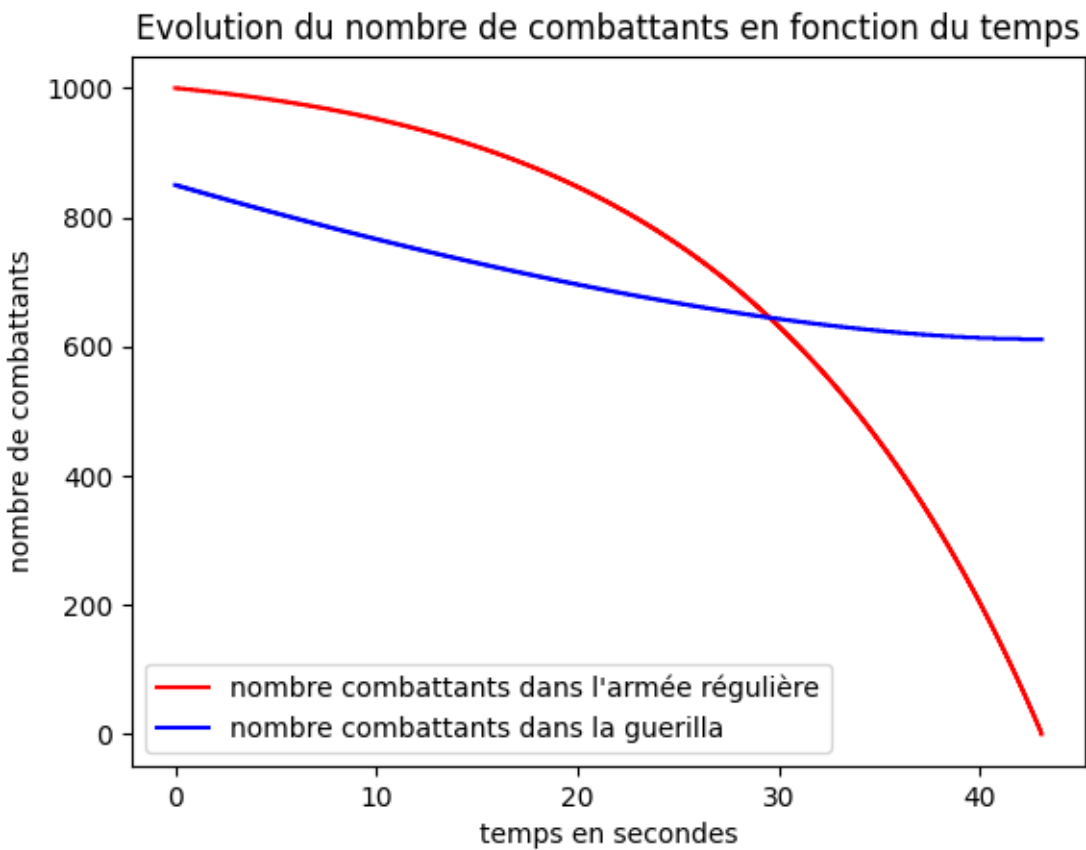
On transforme donc les équations pour avoir:

$$\begin{cases} x_a(t_{n+1}) = x_a(t_n) + (t_n - t_{n+1})x_g(t_n)(a + (g - a)\frac{x_a(t_n)}{x_{a0}}) \\ x_g(t_{n+1}) = x_g(t_n) - (t_{n+1} - t_n)Ax_a(t_n)x_g(t_n) \end{cases}$$

On garde aussi presque les mêmes valeurs que dans les modèles précédents, c’est à dire:

$g = \frac{1}{280}$
 $a = 0.12$ Ici, on prend une plus grosse valeur de a pour bien marquer la différence
 $A = 1.06 \times 10^{-5}$

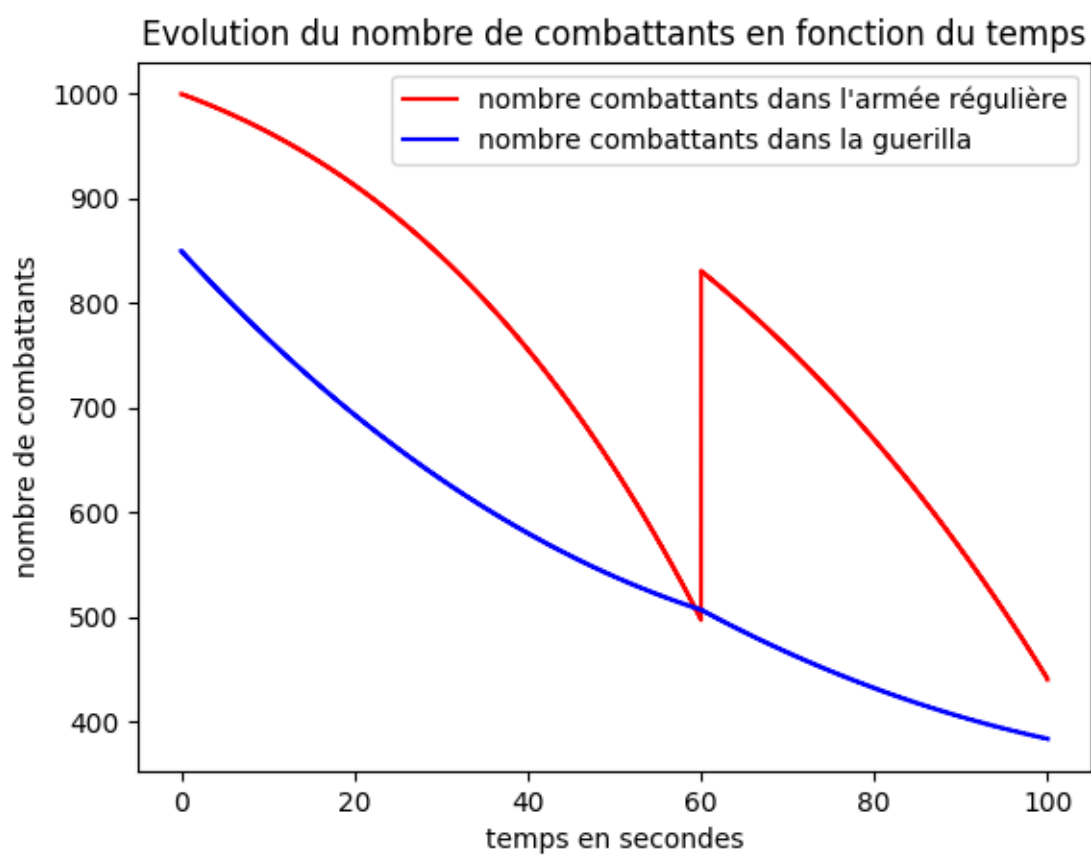
On obtient alors cette courbe:



On observe bien que l’efficacité des armes des guerillos augmentant, le combat avance plus vite et les troupes de l’armée disparaissent plus vite aussi. Le réel problème de ce modèle est qu’on ne peut pas le résoudre, et l’obligation de passer par le temps discret. On a donc une approximation, et un besoin de discréditer beaucoup le temps pour obtenir un résultat logique.

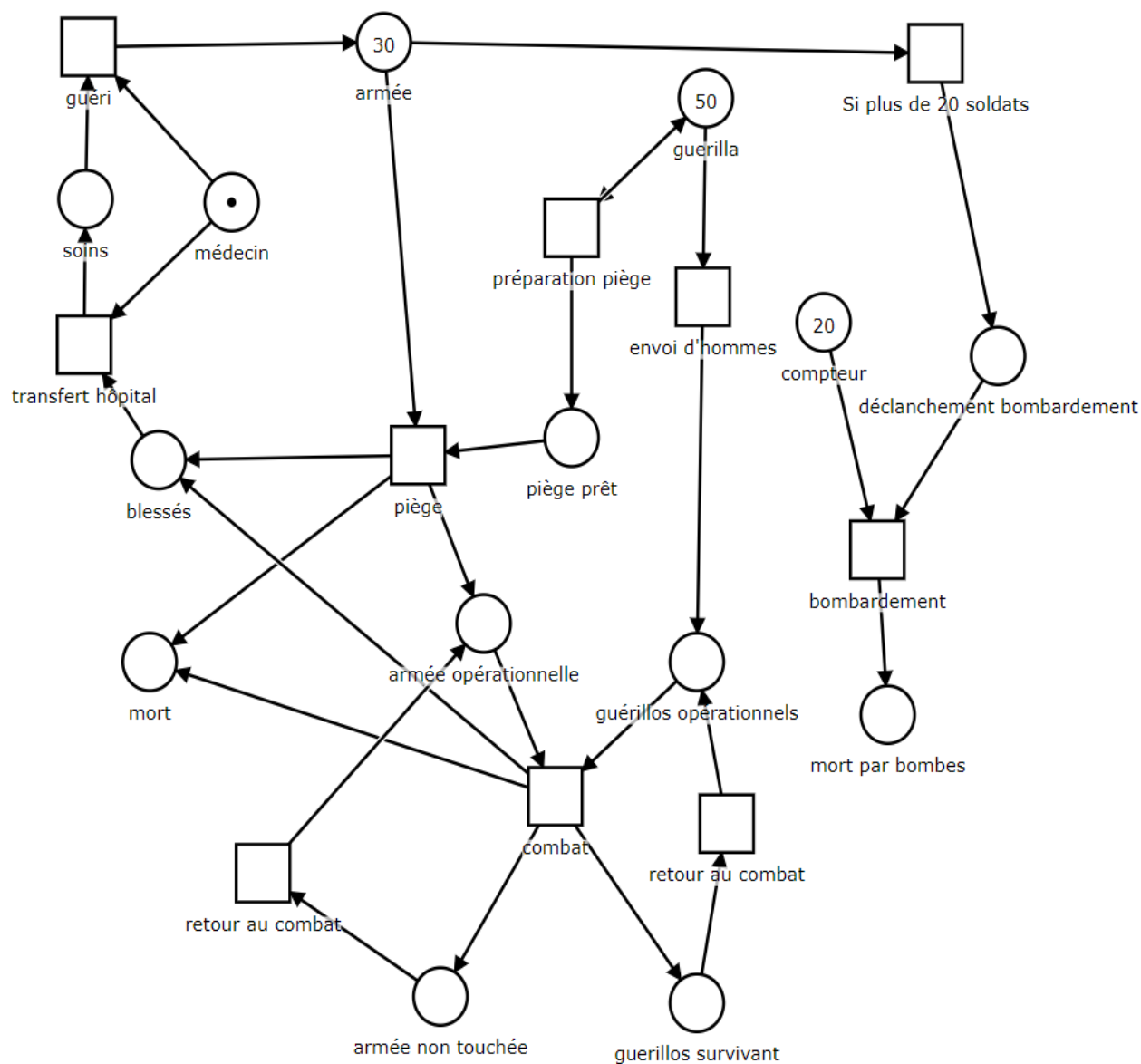
I.C.3: Un ajout supplémentaire:

Dans un but plus de curiosité que de réel utilité, on peut rajouter une arrivée de renfort à l’armée si jamais l’embuscade dure trop longtemps.



Ici les renforts ont bel et bien renversé le cours de la bataille.

Partie II: Modèle à évènements discrets:



Réseau de pétéri représentant un combat (embuscade) entre une expédition de l’armée régulière et un groupe de guérilla en supériorité locale.

La simulation de ce combat fait intervenir l’armée régulière avec un effectif de départ de 30 soldats (modélisés par autant de jetons) et l’embuscade d’une guérilla de 50 soldats. La guérilla a le temps de préparer des pièges avant le combat et au fur et à mesure des échanges de tir (en supposant que la guérilla tient à rester le plus possible dissimulé par son entourage, donc recule sur le terrain). Avant qu’un soldat de l’armée régulière arrive sur le lieu du combat, il passe par la zone piégée et peut soit mourir, soit être blessé (et passer par une unité médicale avant de retourner au combat), soit ne pas être touché et avancer directement au combat. Le combat lui même est ici modélisé par un échange de tir entre un membre de chaque armée. Il y a les mêmes débouchées que pour les pièges pour l’armée régulière, mais on suppose qu’elle dispose de meilleures armes, donc qu’il n’y a pas de blessés (que des morts et des survivants) du côté de la guérilla.

Enfin, après avoir analysé des extraits de F. W. LANCHESTER, Aircraft in Warfare: The Dawn of the Fourth Arm, nous avons décidé de rajouter le cas où l’armée régulière faisait appel à un bombardier. Nous avons décidé de modéliser cela par un compteur : lorsque les troupes régulières se rendent compte que la guérilla est trop nombreuse, elles décident de faire appel à l’avion qui vient

soutenir l'effort de guerre en bombardant régulièrement le côté guérilla : une cause de mort est donc rajouté lorsque l'avion intervient.

Comme ce sont des petits groupes, nous avons supposé que le combat a lieu jusqu'au dernier soldat.

On a donc ici un cas simple d'un modèle à évènements discrets

Annexes et calculs précisés:

Rappel des notations:

x_i : Nombre de combattants du camp i (On a dans cette étude considéré que la force d'un camp était proportionnelle a son nombre de soldat).

i: Facteur qui caractérise la puissance de feu d'un soldat qui tire sur une cible visible.

I: Facteur qui caractérise la puissance de feu d'un soldat qui tire sur une cible invisible ou cachée.

x_{i0} : Nombre de combattants du camp i à l'état initial (avant le combat).

Cas d'une bataille face à face entre g et a:

Les équations pour ce type de combat sont: $\begin{cases} \dot{x}_a = -g \times x_g \\ \dot{x}_g = -a \times x_a \end{cases}$

Donc on peut modifier ces equations pour découpler les deux variables et obtenir:

$$\begin{cases} \ddot{x}_a = agx_a \\ \ddot{x}_g = agx_g \end{cases}$$

Les équations sont symétriques, on aura donc la même forme pour les deux.

On obtient alors:

$$\begin{cases} x_a(t) = C_{a1}\cosh(\sqrt{agt}) + C_{a2}\sinh(\sqrt{agt}) \\ x_g(t) = C_{g1}\cosh(\sqrt{agt}) + C_{g2}\sinh(\sqrt{agt}) \\ Avec(C_{a1}, C_{a2}, C_{g1}, C_{g2}) \in \mathbb{R}^4 \end{cases}$$

Et avec les conditions initiales: $\begin{cases} x_a(0) = x_{a0} \\ \dot{x}_a(0) = -g \times x_{g0} \\ x_g(0) = x_{g0} \\ \dot{x}_g(0) = -a \times x_{a0} \end{cases}$

On a: $\begin{cases} x_a(t) = x_{a0}\cosh(\sqrt{agt}) - \sqrt{\frac{g}{a}}x_{g0}\sinh(\sqrt{agt}) \\ x_g(t) = x_{g0}\cosh(\sqrt{agt}) - \sqrt{\frac{a}{g}}x_{a0}\sinh(\sqrt{agt}) \end{cases}$

Cas d'une embuscade ou g embusque a:

Les équations pour ce type de combat sont: $\begin{cases} \dot{x}_a = -g \times x_g \\ \dot{x}_g = -A \times x_a \times x_g \end{cases}$

On peut écrire ces équations différemment ce qui nous permet d'obtenir une equation différentielle en x_a et une expression de x_g en fonction de x_a :

$$\begin{cases} \ddot{x}_a = -g \times \dot{x}_g \\ \dot{x}_g = -A \times x_a \times x_g \end{cases} \implies \begin{cases} \ddot{x}_a = -g\dot{x}_g \\ \dot{x}_g = \frac{A}{g} \times \dot{x}_a x_a \end{cases} \implies \begin{cases} \ddot{x}_a = -Ax_a\dot{x}_a \\ x_g = \frac{A}{2g} \times x_a^2 + C_3, C_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On va donc chercher à trouver $x_a(t)$, ce qui nous donnerait directement $x_g(t)$.

On a donc: $\ddot{x}_a = -Ax_a\dot{x}_a$

Or cette équation est équivalente à: $\frac{d}{dt}(\dot{x}_a + Ax_a^2) = 0$

Ou bien, autrement dit: $\dot{x}_a + \frac{A}{2}x_a^2 = C$ avec $C \in \mathbb{R}$

Donc, $\dot{x}_a = C - \frac{A}{2}x_a^2$ avec $C \in \mathbb{R}$

A partir d'ici, on va faire une disjonction de cas: Si $C < 0$, $C = 0$ et $C > 0$

Si $C < 0$:

On ré-écrit l'équation: $\dot{x}_a = -C_1 \times \left(1 + \left(\sqrt{\frac{A}{2C_1}}x_a\right)^2\right)$ avec $C_1 \in \mathbb{R}_+^*$

On continue: $\frac{\dot{x}_a \times \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{2C_1}}}{1 + \left(\sqrt{\frac{A}{2C_1}}x_a\right)^2} = -\sqrt{\frac{A \times C_1}{2}}$

Donc: $\arctan\left(x_a(t) \times \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{2C_1}}\right) = -\sqrt{\frac{A \times C_1}{2}} \times t + C_2$ avec $\begin{cases} \sqrt{\frac{A \times C_1}{2}} \times t \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [\\ C_1 \in \mathbb{R}_+^* \\ C_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

$$x_a(t) = \sqrt{\frac{2C_1}{A}} \tan\left(C_2 - \sqrt{\frac{A \times C_1}{2}} \times t\right)$$

Et avec les conditions initiales:

Alors on a: $\begin{cases} x_a(t) = \frac{x_{a0} - \sqrt{\frac{2C_1}{A}} \tan\left(\sqrt{\frac{AC_1}{2}}t\right)}{1 + x_{a0} \sqrt{\frac{A}{2C_1}} \tan\left(\sqrt{\frac{AC_1}{2}}t\right)} \\ x_g(t) = \frac{A}{2g} \left(\frac{x_{a0} - \sqrt{\frac{2C_1}{A}} \tan\left(\sqrt{\frac{AC_1}{2}}t\right)}{1 + x_{a0} \sqrt{\frac{A}{2C_1}} \tan\left(\sqrt{\frac{AC_1}{2}}t\right)} \right)^2 + C_3 \end{cases}$ avec $\begin{cases} C_1 = -K = gx_{g0} - x_{a0}^2 \frac{A}{2} \\ C_3 = x_{g0} - x_{a0}^2 \frac{A}{2g} \\ t \in]0; \frac{\pi}{\sqrt{2AC_1}} [\end{cases}$

Si $C > 0$:

On ré-écrit l'équation: $\dot{x}_a = C_1 \times \left(1 - \left(\sqrt{\frac{A}{2C_1}}x_a\right)^2\right)$ avec $C_1 \in \mathbb{R}_+^*$

On continue: $\frac{\dot{x}_a \times \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{2C_1}}}{1 - \left(\sqrt{\frac{A}{2C_1}}x_a\right)^2} = \sqrt{\frac{A \times C_1}{2}}$

Donc: $\operatorname{arctanh}\left(x_a(t) \times \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{2C_1}}\right) = \sqrt{\frac{A \times C_1}{2}} \times t + C_2$ avec $\begin{cases} C_1 \in \mathbb{R}_+^* \\ C_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

$$x_a(t) = \sqrt{\frac{2C_1}{A}} \tanh\left(C_2 + \sqrt{\frac{A \times C_1}{2}} \times t\right)$$

Finalement avec les conditions initiales:

Alors on a: $\begin{cases} x_a(t) = \frac{x_{a0} + \sqrt{\frac{2C_1}{A}} \tanh\left(\sqrt{\frac{AC_1}{2}}t\right)}{1 + x_{a0} \sqrt{\frac{A}{2C_1}} \tanh\left(\sqrt{\frac{AC_1}{2}}t\right)} \\ x_g(t) = \frac{A}{2g} \left(\frac{x_{a0} + \sqrt{\frac{2C_1}{A}} \tanh\left(\sqrt{\frac{AC_1}{2}}t\right)}{1 + x_{a0} \sqrt{\frac{A}{2C_1}} \tanh\left(\sqrt{\frac{AC_1}{2}}t\right)} \right)^2 + C_3 \end{cases}$ avec $\begin{cases} C_1 = K = x_{a0}^2 \frac{A}{2} - gx_{g0} \\ C_3 = x_{g0} - x_{a0}^2 \frac{A}{2g} \end{cases}$

Si $C = 0$:

On ré-écrit l'équation: $\dot{x}_a = -\frac{A}{2}x_a^2$

Comme on considère que $x_a > 0$ sur notre étude (le cas $x_a = 0$ étant une fin du combat)

On a: $\frac{1}{x_a}(t) = \frac{A}{2}t + C_2$

D'où: $x_a(t) = \frac{1}{\frac{A}{2}t + C_2}$

On a enfin avec les conditions initiales:
$$\begin{cases} x_a(t) = \frac{2x_{a0}}{2+Ax_{a0}t} \\ x_g(t) = \frac{A}{2g} \left(\frac{2x_{a0}}{2+Ax_{a0}t} \right)^2 + x_{g0} - \frac{A}{2g} x_{a0}^2 \end{cases}$$