MAD1 Ensembles - 2024 S1

Colin Stefani

Table des matières

1. Les ensembles

1.1. Ensembles et éléments

Définition 1.1.1: Un ensemble est un regroupement d'éléments formant un tout.

Dans les cas où notre ensemble est suffisamment petit, on peut l'écrire entre deux accolades: {...}

Exemple: L'ensemble des chiffres décimaux s'écrit: $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

1.2. Appartenance

On dit que x **appartient** à E et on note:

$$x \in E$$

Si, au contraire x n'appartient pas à E:

$$x \notin E$$

Exemple: $2 \in \{1, 2, 3, 4\}$ ou $5 \notin \{1, 2, 3, 4\}$

1.2.1. Description des ensembles

Lorsqu'un ensemble est trop grand pour être écrit élément par élément, on peut procéder à une **description en extension**:

Exemple: Pour écrire l'ensemble des nombres entiers de 0 à 100, on note:

$$\{0, 1, 2, 3, ..., 99, 100\}$$

Cela fonctionne aussi avec l'infini:

$$\{..., -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

Cependant, en mathématiques, par soucis de clarté, on privilégie la **description en compréhension**, en spécifiant une propriété mathématique satisfaite par tous les éléments de l'ensemble:

Pour tout x vérifiant $P(x)$, on note:

$$\{x \mid P(x)\}$$

Qui se lit « x tel que $P(x)$ ».

Exemple: L'ensemble de tous les x dans A vérifiant $P(x)$ se note $\{x \in A \mid P(x)\}$

1.3. Ensembles égaux

Définition 1.3.1: Deux ensembles sont égaux si et seulement si tout élément de l'un est aussi élément de l'autre.

Si A et B sont égaux, on note: $A = B$ (wow).

Dans un ensembles, l'ordre et la répétition n'ont pas d'importance: **un ensemble est une liste non-ordonnée sans répétitions!**

Quelques ensembles sympas:

- $\mathbb{N}$: Entiers naturels
- $\mathbb{Z}$: Entiers relatifs
- $\mathbb{Q}$: Rationels
- $\mathbb{R}$: Réels
- $\mathbb{C}$: Complexes

En ajoutant le suffixe *, on exclut 0 de l'ensemble

$$\textit{Exemple}:\ \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$$

Les suffixes $+$ ou $-$ ajoutent une contrainte de signe à l'ensemble

$$\textit{Exemple}:\ \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$$

1.3.1. Intervalles réels

Définition 1.3.1.1: Un intervalle réel est un ensemble défini par deux bornes, inférieure et supérieure, et formé de tous les nombres réels compris entre ces deux bornes.

On distingue trois types d'intervalles réels, notés entre deux bornes [et/ou]:

- Intervalle **fermé**, lorsque les bornes sont **incluses** dans l'ensemble: $[-5; 10]$
  - $[a; b] \Longleftrightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- Intervalle **ouvert**, lorsque les bornes ne sont **pas incluses** dans l'ensemble: $]-5; 10[$ ou $]-\infty; 10[$
  - $]a; b[\Longleftrightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- Intervalle **semi-ouvert**, lorsqu'une des deux bornes est incluse dans l'ensemble: $]-5; 10]$ ou $[-5; 10[$
  - $]a; b] \Longleftrightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

1.3.2. Ensemble vide et ensemble universel

L'ensemble vide ne contient… ben rien. Il est noté $\{\}$ ou $\varnothing$.

Remarque: À priori, les éléments d'un ensemble peuvent être de natures différentes, par exemple: $A = \{1, \text{carrottes}, -\pi\}$

En pratique, les éléments d'un ensemble universel, noté $\Omega = \{...\}$, tout comme en probabilités avec les issues possibles d'une expérience aléatoire.

1.4. Sous-ensembles

Définition 1.4.1: L'ensemble B est un sous-ensemble ou une partie de A si tous les éléments de B sont aussi des éléments de A. On dit aussi dans ces cas que B est inclus dans A. On note: $B \in A$

$$B \in A \Longleftrightarrow \forall x \in B, x \in A$$

1. Pour tout ensemble A, A est un sous-ensemble de lui-même ($A \subset A$)
2. L'ensemble vide est sous-ensemble de n'importe quel ensemble A ($\emptyset \subset A$) Et donc $\emptyset \subset \emptyset$
3. $A = B \Longleftrightarrow A \subset B$ et $B \subset A$ (principe de double inclusion)

Exemple: Pour $A = \{1, 2, 3\}$, $1 \not\subset A$ mais $1 \in A$, et $\{1\} \subset A$ mais $\{1\} \notin A$

Définition 1.4.2: Si $B \subseteq A$ et $B \neq A$, alors ont dit que B est **strictement inclus** dans A, noté $B \subset A$ ou $B \subsetneq A$. Aussi, $B \subset A \Longleftrightarrow B \subseteq A$

1.4.1. Visualisation d'ensembles

Le diagramme d'Euler (Venn) reflète les relations entre ensembles.

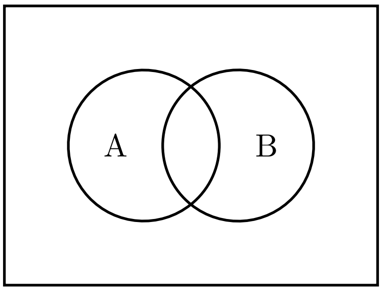


Fig. 1. – Diagramme de Venn avec A et B

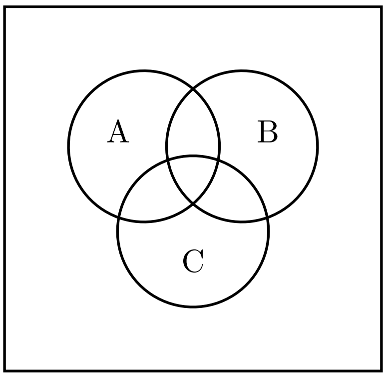


Fig. 2. – Diagramme de Venn avec A, B et C

1.5. Opérations

Définition 1.5.1: L'intersection de A et B, notée $A \cap B$ est l'ensemble des éléments appartenant à A et B, soit $A \cap B \Longleftrightarrow \{x \mid x \in A \land x \in B\}$

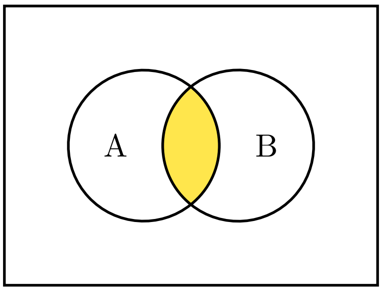


Fig. 3. – $A \cap B$

Définition 1.5.2: L'union ou la réunion de A et B, notée $A \cup B$, correspond à l'ensemble des éléments se trouvant soit dans A, soit dans B.

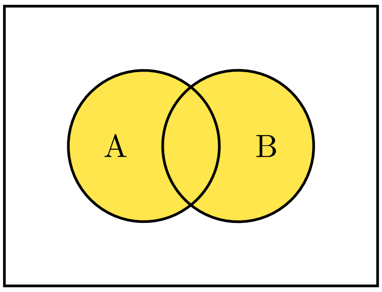


Fig. 4. – $A \cup B$

Définition 1.5.3: Le complément (ou complémentaire) de A est l'ensemble des éléments de l'ensemble universel qui ne sont pas dans A, noté $\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$.

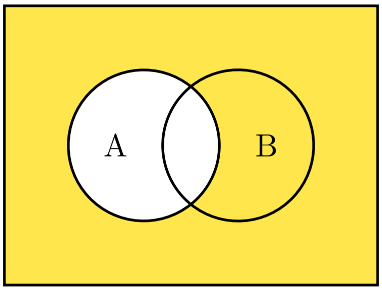


Fig. 5. – $\overline{A}$

Définition 1.5.4: La différence entre A et B notée $A \setminus B$ (« A sans B »), est l'ensemble des éléemtsn appartenant à A, mais pas B.

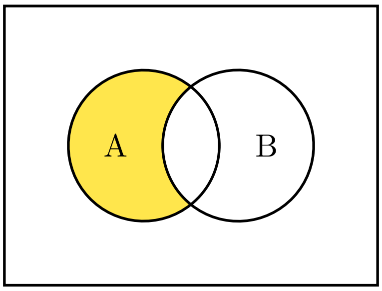


Fig. 6. – $A \setminus B$

On note également les propriétés suivantes:

1. $\overline{A} = \Omega \setminus A$
2. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

Définition 1.5.5: La différence symétrique de A et B, notée $A \oplus B$ ($A \vartriangle B$) est l'ensemble des éléments appartenants soit à A, soit B, **mais pas les deux** (XOR).

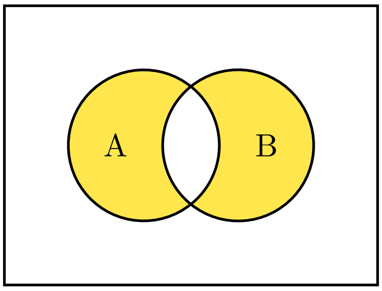


Fig. 7. – $A \oplus B$

On note aussi:

$$A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

1.6. Propriétés et Identités

1.6.1. Associativité

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Remarque: Ducoup, pas besoin de mettre des parenthèses.

1.6.2. Commutativité

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

1.6.3. Distributivité

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

1.6.4. Lois de Boole-Morgan

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Remarque: Parallèles entre logique et ensembles:

`A and B` $\iff A \cap B$

`A or B` $\iff A \cup B$

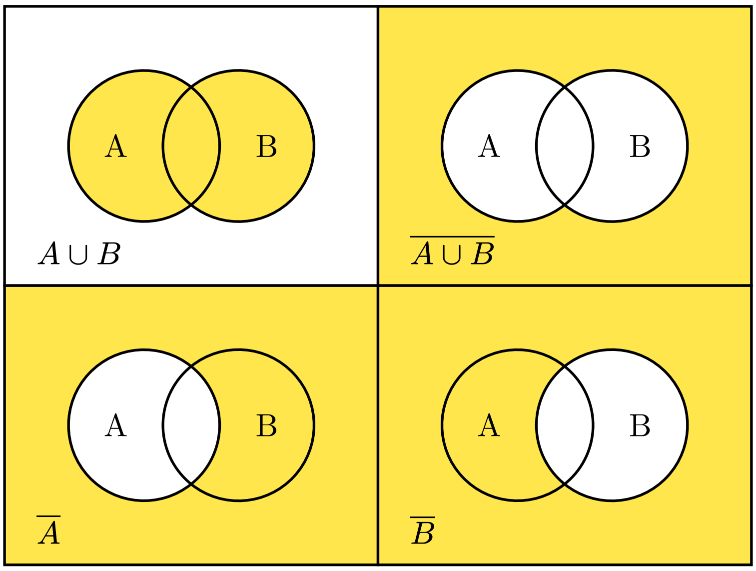
`A xor B` $\iff A \oplus B$

`not A` $\iff \overline{A}$

Preuve 1.6.4.1: 1ère Loi:

A	B	$A \cup B$	$A \cup \overline{B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cap \overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Les colonnes de $\overline{A \cup B}$ et de $\overline{A} \cap \overline{B}$ sont identiques, donc $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$



□

1.6.5. Loi d'absorption

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

B est « absorbé » dans les deux cas.

1.7. Cardinal (pas la bière)

Définition 1.7.1: Un ensemble A est **fini** si son nombre d'éléments distincts est un entier naturel. Sinon, A est infini.

Définition 1.7.2: Si A est fini, le **cardinal** ou la **cardinalité** de A, notée $|A| = \#A = \text{Card}(A)$ est égal au nombre d'éléments distincts de A.

Exemple: $|\{a, b, c, ..., z\}| = 26$, $|\varnothing| = |\{\}| = 0$

1.8. Ensemble des parties

Définition 1.8.1: Pour un ensemble A donné, **l'ensemble des parties** de A, noté $\mathcal{P}(A)$, est l'ensemble contenant tous les sous-ensembles de A:

$$\mathcal{P}(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$$

Exemple: $A = \{\text{Oui}, \text{Non}\} \Longleftrightarrow \mathcal{P} = \{\varnothing, \{\text{Oui}\}, \{\text{Non}\}, \{\text{Oui}, \text{Non}\}\}$

Pour n'importe quel ensemble A, on a toujours que:

$$\varnothing \in \mathcal{P}(A) \text{ et } A \in \mathcal{P}(A)$$

Théorême 1.8.1: Soit A un ensemble fini, tel que $|A| = n$ avec $n \in \mathbb{N}$, alors $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$

Preuve 1.8.1: On peut décomposer la création d'un ensemble de parties en une suite de n choix indépendants entre « Je prends l'élément » ou « Je ne le prends pas », ce qui équivaut mathématiquement à 2^n possibilités. □

Exemple: $A = \{\text{Oui}, \text{Non}\}$, donc $|A| = 2$ et $|\mathcal{P}(A)| = 4 = 2^2$

1.9. Produit cartésien

Définition 1.9.1:

- Un **couple** (a, b) est une liste **ordonnée** des deux éléments a et b.
- Un **triplet** (a, b, c) est une liste ordonnée de trois éléments a, b et c.
- Plus généralement un ***n*-uplet** $(a_0, a_1, ..., a_n)$ est une liste ordonnée de n éléments appelés les **composantes**

Exemple: Le couple $(1, 2)$ est différent de $(2, 1)$, par exemple lorsqu'ils sont représentés sur un graphe.

Définition 1.9.2: Le **produit cartésien** $A \times B$ de deux ensembles A et B est l'ensemgle de tous les couples (a, b) tels que $a \in A$ et $b \in B$

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Exemple: Pour $A = \{0, 1\}$ et $B = \{x, y, z\}$, on a:

$$A \times B = \{(0, x), (0, y), (0, z), (1, x), (1, y), (1, z)\}$$

Théorême 1.9.1: Si $|A| = n$ et $|B| = m$, alors $|A \times B| = |A| * |B| = n * m$

Preuve 1.9.1: En posant un arbre des possibilités de choix de a puis b pour un couplet (a, b), on a d'abord n choix, puis m. □

On peut généraliser le produit cartésien à n ensembles: $A_1, A_2, ..., A_n$:

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_i \in A_i, i \in \{1, 2, ..., n\}\}$$

Remarque: Lorsque $A_1 = A_2 = ... = A_n$, alors $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = A \times A \times ... \times A = A^n$

2. Les Relations

Les relations peuvent être des outils de comparaisons entre objets mathématiques, comme par exemple les nombres ($<$, $=$, ...), ou les ensembles ($\in$, $\not\subset$, ...)

Définition 2.1: Une relation de l'ensemble A vers l'ensemble B est un sous ensemble du produit cartésien $A \times B$.

Si R est une relation de A vers B, et si le couple $(a, b) \in R$ tel que $a \in A, b \in B$, aussi noté aRb.

Exemple: $A = \{\text{étudiant de l'école}\}, B = \{\text{cours dispensés ce semestre}\}$

L'ensemble $R = \{(a, b) \in A \times B \mid \text{l'étudiant } a \text{ suit le cours } b\}$ est une relation de A vers B.

Exemple: $A = \{\text{couleurs}\}, B = \{\text{pays}\}$

On peut définir la relation de correspondance entre une couleur et le drapeau du pays: $R = \{(a, b) \in A \times B \mid \text{la couleur } a \text{ dans drapeau du pays } b\}$.

Ainsi: $(\text{rouge}, \text{Suisse}) \in R, (\text{vert}, \text{Espagne}) \notin R$

Exemple: $A = B = \mathbb{Z}$

On définit $R = \{(a, b) \in A \times B \mid a \leq b\} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x \leq y\}$.

$$(2, 3) \in R, (-2, -3) \notin R$$

2.1. Graphes d'une relation

Pour A et B finis, on peut représenter une relation de A vers B par un graphe

- Les éléments de A et B constituent les **sommets** de graphe.
- Chaque couple $(a, b) \in R$ est représentré par une flèche allant de a vers b (un **arc**)

2.2. Matrice d'une relation

Pour A et B finis, on peut représenter une relation de A vers B par une matrice $M(R)$ de taille $|A| \times |B|$.

Exemple: $A = \{1, 2, 3\}, B = \{x, y\}$ $R = \{(2, x), (3, x), (3, y)\} \Longleftrightarrow M(R) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

2.3. Relation sur un ensemble

Définition 2.3.1: Une relation **sur** un ensemble A est une relation de A sur A, c'est à dire un sous-ensemble de $A \times A = A^2$.

Exemple: $A = \{\text{pays}\}$ et $R = \{(a, b) \mid \text{les pays } a \text{ et } b \text{ sont voisins}\}$ est une relation **sur A**. $(\text{Suisse}, \text{France}) \in R$, mais $(\text{Italie}, \text{Espagne}) \notin R$

L'importance de l'ordre des composantes du couples dans une relation est importante. La ou les conditions de cette dernière ne sont pas toujorus intervertissables (pas toujours linéaire).

Remarque: Dans le cas d'une relation sur A^2, on utilise plutôt un **graphe orienté** à la place d'un graphe biparti. Les éléments de A sont alors les sommets du graphes et pour chaque $(a, b) \in R$, on fait une flèche (arc) de a vers b.

2.4. Complémentaires et inverses

Définition 2.4.1: La relation **complémentaire** d'une relation R de A vers B, est elle aussi une relation qui va de A vers B, notée $\overline{R}$, telle que:

$$\overline{R} = \{(a, b) \in A \times B \mid (a, b) \notin R\} = (A \times B) \setminus R$$

Définition 2.4.2: La relation **inverse** d'une relation R de A vers B est une relation de B vers A, notée R^{-1}, telle que:

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in R\}$$

Exemple: $A = \{\text{personnes}\}$ et $R = \{(a, b) \in A^2 \mid a \text{ est enfant de } b\}$

Alors:

- $\overline{R} = \{(a, b) \in A^2 \mid a \text{ n'est pas enfant de } b\}$
- $R^{-1} = \{(a, b) \in A^2 \mid b \text{ est parent de } a\}$

2.5. Composition de relations

Définition 2.5.1: Soient R une relation de A vers B, et S une relation de B vers C, alors la **composition** de R par S, notée $S \circ R$, est la relation telle que:

$$S \circ R = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B \text{ avec } (a, b) \in R \text{ et } (b, c) \in S\}$$

Exemple: Soient $A = \{\text{étudiants}\}, B = \{\text{cours}\}, C = \{\text{profs}\}$

On définit les relations $R = \{(a, b) \in A \times B \mid \text{étudiant suit le cours}\}$ et $S = \{(b, c) \in B \times C \mid \text{cours donné par prof}\}$.

On peut alors dire que:

$$S \circ R = \{(a, c) \in A \times C \mid \text{édudiant } a \text{ suit au moins 1 cours donné par le prof } c\}$$

2.5.1. Matrice d'une composition

Si R est une relation de A vers B et S une relation de B vers C de matrices $M(R)$ et $M(S)$, alors on peut déduire la matrice $M(S \circ R)$ à partir du produit matriciel $M(R) \cdot M(S)$.

Remarque: On multiplie les lignes par les colonnes (« Abraham Lincoln »)

2.6. Propriétés d'une relation sur un ensemble

Les relations sur un ensemble peuvent être classifiés à l'aide de **quatre** propriétés principales:

- La **réflexivité**
- La **transitivité**
- La **symétrie**
- L'**antisymétrie**

Elles permettent en outre de définir deux types importants de relations: les relations **d'ordre** et **d'équivalence**.

2.6.1. Réflexivité

Une relation R sur A est réflexive si $(a, a) \in R \ \forall a \in A$.

Autrement dit, il faut que chaque élément soit en relation avec lui-même.

D'un point de vue matriciel, il faut que la diagonale de la matrice soit remplie de 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

2.6.2. Symétrie

Une relation R sur A est symétrique si et seulement si $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$. Autrement dit, si un élément a est associé à b, alors b doit également être associé à a pour tout $a, b \in A$.

Pour la matrice, cela est représenté graphiquement par la symmétrie de tous les nombres par rapport à la diagonale.

$$\begin{pmatrix} \ddots & & 1 & \\ & \ddots & & \\ 1 & & \ddots & 0 \\ & & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

3. Les Fonctions

3.1. Notion de fonction

Soient E et F deux ensembles non-vides. Une fonction de E vers F (« A dans B ») est une correspondance affectant à chaque élément de E **exactement un** élément de B.

L'élément de B qui est associé à $a \in A$ par la fonction f est noté $f(a)$. De plus, si $b \in B$ est tel que $b = f(a)$, alors on dit que:

- b est l'**image** de a par f
- a est *une* **préimage** de b par f (ou un **antécédant**).

Une fonction f de A dans B, s'écrit:

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ a &\longrightarrow f(a) \end{aligned}$$

Remarque: Un élément de B peut avoir une ou plusieurs préimages, ou aucune.

3.2. Graphe d'une fonction

Définition 3.2.1: Soit $f : A \to B$, l'ensemble des couples (a, b) tels que $a \in A$ et $b = f(a)$, cela définit le graphe de la fonction f.

$$\text{Graphe de } f = \{(a, b) \in A \times B \mid b = f(a)\}$$

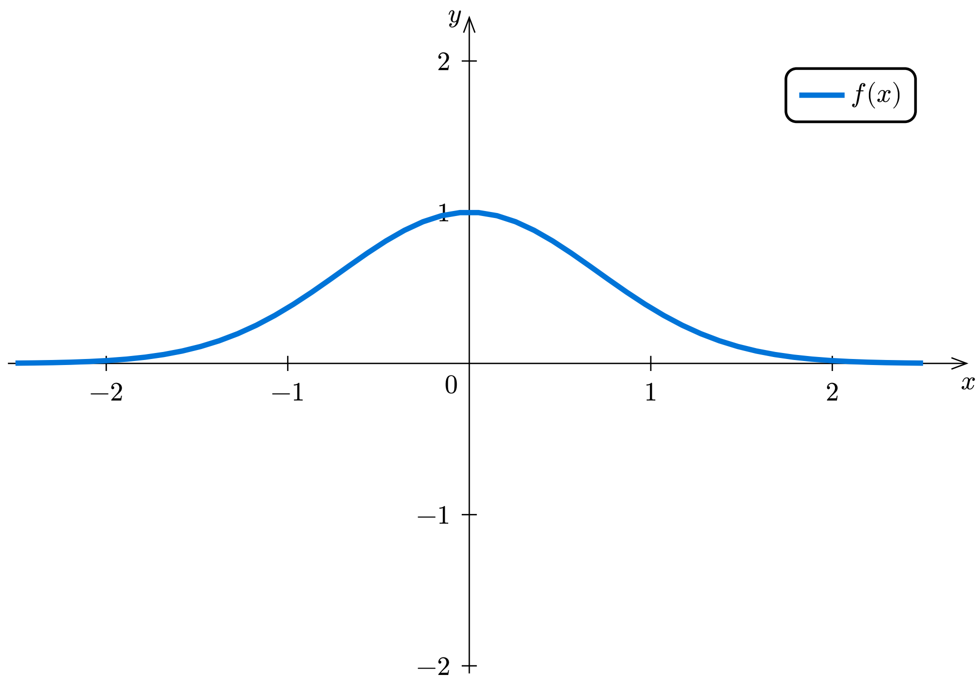
3.2.1. Fonctions numériques

Lorsque A et B sont des ensembles de nombres ($A, B \subseteq \mathbb{R}$), alors on peut identifier le graphe de $f : A \to B$ à un ensemble de points dans le plan $\mathbb{R}^2$, dont les coordonnées (x, y) vérifient que $y = f(x)$.

On parle alors de **représentation graphique**, ou de **courbe représentative** de f.

En considérant

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow y = e^{-x^2} \end{aligned}$$



Le graphe de f dans ce cas-ci est $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = e^{-x^2}\right\}$.

3.3. Fonctions et relations

Le graphe d'une fonction $f : A \to B$ est une sous-ensemble de $A \times B$, donc il peut être vu comme une relation de A vers B.

Si on identifie une fonction à son graphe, une fonction $f : A \to B$ peut être considérée comme une relation de A vers B, avec la propriété que chaque élément $a \in A$ est en relation avec un **unique** $b \in B$.

Exemple: La relation $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid y = 2x\}$ est une fonction car à chaque x est associé un seul y.

Par contre, la relation $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^2 = y^2\}$ n'est pas une relation car par exemple $x = -1$ est en relation avec $y_1 = -1$ et $y_2 = 1$.

3.4. Domaine et image

Soit $f : A \to B$, on a:

- L'ensemble A est appelé le domaine de définition de f.
- L'ensemble B est appelé le codomaine de f.
- L'ensemble de toutes les images des éléments de A est appelé l'image de f. On la note $\mathrm{Im}(f) = f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$

Plus généralement, pour toute $M \subseteq A$, on peut définir l'image de M par $f(M) = \{f(m) \mid m \in M\}$.

Pour tout $T \subseteq B$, on définit l'image réciproque de T, notée $f^{-1}(T)$ pour $f^{-1}(T) = \{a \in A \mid f(a) \in T\}$.

Exemple:

Avec $g : A \to B$, correspondant à la relation

$$S = \{(1, x), (2, x), (3, z), (4, z)\}$$

Ainsi que $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{x, y, z\}$.

- Le domaine de g est $A = \{1, 2, 3, 4\}$
- Le codomaine de g est $B = \{x, y, z\}$
- L'image de g est $\mathrm{Im}(g) = \{x, z\}$
- L'image de $\{1, 2\}$ est $f(\{1, 2\}) = \{x\}$
- L'image réciproque de $\{z\}$ est $g^{-1}(\{z\}) = \{3, 4\}$
- L'image réciproque de $\{y\}$ est $g^{-1}(\{y\}) = \{\} = \varnothing$

3.5. Modulo

Définition 3.5.1: Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. On note $a \bmod m$ $(a\%m)$ le reste de la division entière de a par m.

Par définition, le reste dans la définition de a par m est $0 \leq r < a$, tel que $a = mk + r$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exemples:

- $17 \mod 5 = 2$
- $134 \mod 205 = 134$

- $94 \mod 9 = 5$

3.6. Fonction factorielle

Définition 3.6.1 : Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit la factorielle de n, notée $n!$ comme le produit des entiers de 1 à n:

$$1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k$$

Pour $n = 0$, on a $n! = 1$.

- La factorielle croit très rapidement et est $> 2^n$ pour $n \geq 4$.
- La factorielle apparait beaucoup en combinatoire et en analyse, notamment avec les développments de Taylor:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

3.7. Bijection et cardinalité

Rappel: Le cardinal d'un ensemble **fini** est le nombre d'éléments distincts de l'ensemble.

Définition 3.7.1 : Deux ensembles A et B ont le même cardinal si et seulement si il existe une bijection de A sur B. On dit alors qu'ils sont **équipotents**.

Exemple: Si A est fini, il est possible de numéroter ses éléments de 1 à $n = |A|$. On a alors une bijection de A vers $\{1, ..., n\}$.

Un ensemble $A \neq \varnothing$ est donc fini si il est équipotent avec l'ensemble $\{1, ..., n\}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exemple: L'ensemble $\mathbb{N}$ est un ensemble infini. Son cardinal, noté $\aleph$ (« aleph 0 »)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N}^* \\ x &\mapsto x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to 2\mathbb{N} \text{ (nombres pairs)} \\ x &\mapsto 2x \end{aligned}$$

f est bijective dans les deux cas. On peut également prouver que tout $A \in P(\mathbb{N})$, A est équipotent avec $\mathbb{N}$, soit $\aleph$ est le « plus petit cardinal » des ensembles infinis.

3.8. Ensembles dénombrables

Définition 3.8.1 : Un ensemble qui est soit fini, soit de même cardinal que $\mathbb{N}$ est dit dénombrable. Dans le cas contraire, l'ensemble est dit **non-dénombrable**.

Exemple: $\mathbb{Z}$ est-il dénombrable ? Si on définit f:

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$x \longrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} \text{ si } x = 2k \mid k \in \mathbb{Z} \\ \frac{x-1}{2} \text{ si } x = 2k+1 \mid k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Tous les entiers de $\mathbb{Z}$ sont effectivement atteints par f, qui alterne en fonction de la parité de x.

Théorème 3.8.1: Pour tout ensemble A, $|\mathcal{P}(A)| > |A|$.

Exemple: Pour $A = \mathbb{N}$, on a que $|\mathcal{P}(A)| > |A|$, et on a donc que $\mathcal{P}(A)$ n'est pas dénombrable.

Les ensembles dénombrables sont communément: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}^k$, tandis que ceux qui ne le sont pas: $\mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{R}, [0; 1], ...$

Propriété: Si $B \subseteq A$, alors $|B| \leq |A|$. En particulier, si A est dénombrable, tous ses sous ensembles le sont aussi. De même, si B est non-dénombrable, A qui contient B, est lui aussi non-dénombrable.

Propriété: S'il existe une injection de A vers B, alors on a que $|A| \leq |B|$. S'il existe une surjection, on a à l'inverse que $|A| \geq |B|$.

4. Suites et Séries

4.1. Limites d'une suite infinie

Définition 4.1.1: On dit que la suite $(a_k, k \in \mathbb{N})$ admet pour limite le nombre $\ell \in \mathbb{R}$, si pour n'importe quel intervalle contenant ℓ, tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle à partir d'un indice suffisamment grand. On dit alors que la suite **converge** vers ℓ. On écrit:

$$\lim_{k \to \infty} a_k = \ell$$

Exemples:

- On considère la suite $a_k = \frac{k}{k+1} = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{k^{-1}}{k^{-1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{k}}$, sa limite vaut donc $\lim_{k\to\infty} = \frac{1}{1+\frac{1}{k}} = \frac{1}{1+0} = 1$.
- La suite $a_k = (-1)^k$ ne converge pas car elle oscille constamment entre -1 et 1.

4.1.1. Suites arithmétiques

Définition 4.1.1.1: Une suite arithmétique est une suite où la différence entre deux termes consécutifs est constante. La différence, notée r, est aussi appelée la **raison** de la suite.

Propriété: Le terme général d'une suite arithmétique de raison r est $a_k = a_0 + kr$, ou par récurrence $a_k = a_{k-1} + r$.

4.1.2. Suites Géométriques

Définition 4.1.2.1: Une suite géométrique est une suite où le rapport entre deux termes consécutifs est constant. Ce rapport (commun) r est appelé la raison de la suite.

Propriété: Le terme général d'une suite géométrique est donné par:

$$\begin{cases} a_k = a_{k-1} \cdot r \mid k \geq 1 \\ a_0 \in \mathbb{R} \text{ donné} \end{cases}$$

Ou de manière plus générale:

$$a_k = a_0 \cdot r^k \mid k \in \mathbb{N}$$

Exemples:

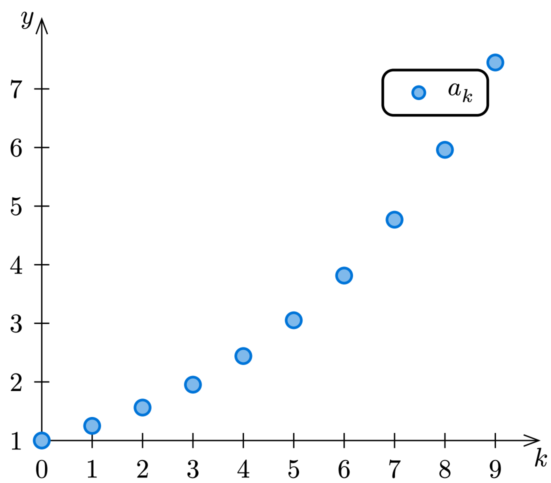


Fig. 10. – $(1.25)^k$

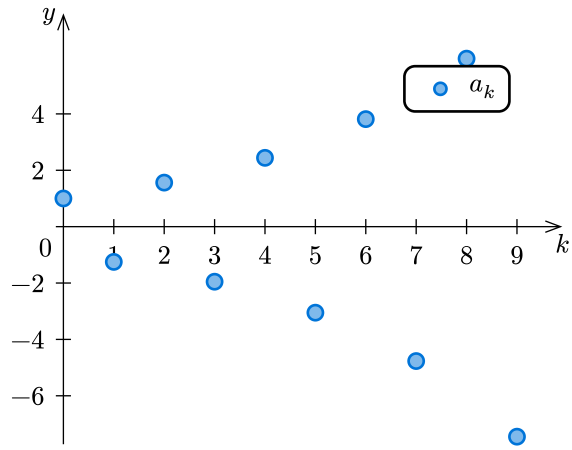


Fig. 11. – $(-1.25)^k$

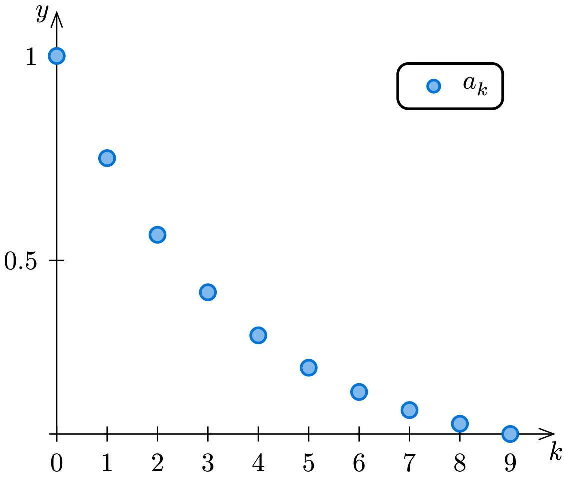


Fig. 12. – $(0.75)^k$

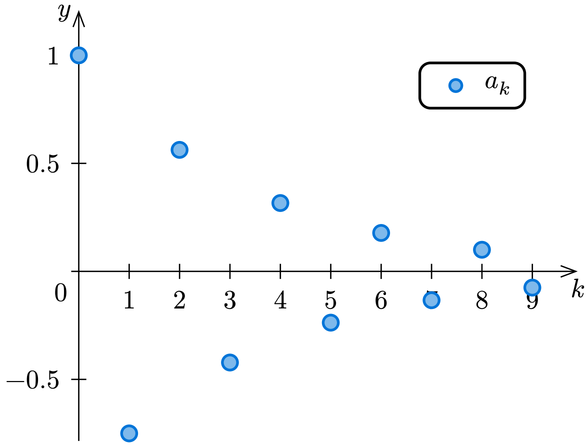


Fig. 13. – $(-0.75)^k$

En résumé:

- Si $r > 1$, la suite est croisssante et diverge vers $+\infty$.
- Si $r < -1$, la suite est alternée et ne converge pas (elle diverge en valeur absolue vers $+\infty$).
- Si $r = 1$, la suite est constante et, évidemment, convergente.
- Si $r = -1$, les termes de la suite alternent entre 1 et -1

4.1.3. Suites arithmético-géométriques

On définit une suite arithmético-géométrique de la manière suivante:

$$\begin{cases} a_k = a_{k-1} \cdot r + c \\ a_0 \in \mathbb{R} \text{ donné} \end{cases}$$

Cette dernière consiste en la combinaison des deux types de suites précédemment vues.

4.2. Sommes

Définition 4.2.1: Pour calculer la somme des termes d'une suite a_k, on utilise la notation abrégée, dite notation « sigma »:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + \ldots + a_k + \ldots + a_n$$

où k est **l'indice de sommation**.

Remarque: Le choix de la variable d'indice est arbitraire:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{j=0}^{n} a_j = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Exemple: Pour la suite $a_k = (-1)^k \mid k \geq 0$, on a:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{3} a_k = \sum_{k=0}^{3} (-1)^k &= (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 \\ &= 1 - 1 + 1 - 1 \\ &= 0\end{aligned}$$

De manière plus générale, on peut également dire que:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \begin{cases} 1 \text{ si } n \equiv 0 \pmod 2 \\ 0 \text{ si } n \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$