MAD1 Ensembles - 2024 S1

Colin Stefani

Table des matières

1. Les ensembles 1
1.1. Ensembles et éléments 1
1.2. Appartenance 1
1.2.1. Description des ensembles 2
1.3. Ensembles égaux 2
1.3.1. Intervalles réels 3
1.3.2. Ensemble vide et ensemble universel 3
1.4. Sous-ensembles 3
1.4.1. Visualisation d'ensembles 3
1.5. Opérations 4
1.6. Propriétés et Identités 7
1.6.1. Associativité 7
1.6.2. Commutativité 7
1.6.3. Distributivité 7
1.6.4. Lois de Boole-Morgan 7
1.6.5. Loi d'absorption 8
1.7. Cardinal (pas la bière) 8
1.8. Ensemble des parties 8
1.9. Produit cartésien 9
2. Les Relations 10

1. Les ensembles

1.1. Ensembles et éléments

Définition 1.1.1: Un ensemble est un regroupement d'éléments formant un tout.

Dans les cas où notre ensemble est suffisamment petit, on peut l'écrire entre deux accolades: {...}

Exemple: L'ensemble des chiffres décimaux s'écrit: $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

1.2. Appartenance

On dit que x **appartient** à E et on note:

$$x \in E$$

Si, au contraire x n'appartient pas à E:

$$x \notin E$$

Exemple: $2 \in \{1, 2, 3, 4\}$ ou $5 \notin \{1, 2, 3, 4\}$

1.2.1. Description des ensembles

Lorsqu'un ensemble est trop grand pour être écrit élément par élément, on peut procéder à une **description en extension**:

Exemple: Pour écrire l'ensemble des nombres entiers de 0 à 100, on note:

$$\{0, 1, 2, 3, ..., 99, 100\}$$

Cela fonctionne aussi avec l'infini:

$$\{..., -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

Cependant, en mathématiques, par soucis de clarté, on privilégie la **description en compréhension**, en spécifiant une propriété mathématique satisfaite par tous les éléments de l'ensemble:

Pour tout x vérifiant $P(x)$, on note:

$$\{x \mid P(x)\}$$

Qui se lit « x tel que $P(x)$ ».

Exemple: L'ensemble de tous les x dans A vérifiant $P(x)$ se note $\{x \in A \mid P(x)\}$

1.3. Ensembles égaux

Définition 1.3.1: Deux ensembles sont égaux si et seulement si tout élément de l'un est aussi élément de l'autre.

Si A et B sont égaux, on note: $A = B$ (wow).

Dans un ensembles, l'ordre et la répétition n'ont pas d'importance: **un ensemble est une liste non-ordonnée sans répétitions!**

Quelques ensembles sympas:

- $\mathbb{N}$: Entiers naturels
- $\mathbb{Z}$: Entiers relatifs
- $\mathbb{Q}$: Rationels
- $\mathbb{R}$: Réels
- $\mathbb{C}$: Complexes

En ajoutant le suffixe *, on exclut 0 de l'ensemble

Exemple: $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$

Les suffixes $+$ ou $-$ ajoutent une contrainte de signe à l'ensemble

Exemple: $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$

1.3.1. Intervalles réels

Définition 1.3.1.1: Un intervalle réel est un ensemble défini par deux bornes, inférieure et supérieure, et formé de tous les nombres réels compris entre ces deux bornes.

On distingue trois types d'intervalles réels, notés entre deux bornes [et/ou]:

- Intervalle **fermé**, lorsque les bornes sont **incluses** dans l'ensemble: $[-5; 10]$
  - $[a; b] \iff \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- Intervalle **ouvert**, lorsque les bornes ne sont **pas incluses** dans l'ensemble: $]-5; 10[$ ou $]-\infty; 10[$
  - $]a; b[\iff \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- Intervalle **semi-ouvert**, lorsqu'une des deux bornes est incluse dans l'ensemble: $]-5; 10]$ ou $[-5; 10[$
  - $]a; b] \iff \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

1.3.2. Ensemble vide et ensemble universel

L'ensemble vide ne contient… ben rien. Il est noté $\{\}$ ou $\varnothing$.

Remarque: À priori, les éléments d'un ensemble peuvent être de natures différentes, par exemple: $A = \{1, \text{carrottes}, -\pi\}$

En pratique, les éléments d'un ensemble universel, noté $\Omega = \{...\}$, tout comme en probabilités avec les issues possibles d'une expérience aléatoire.

1.4. Sous-ensembles

Définition 1.4.1: L'ensemble B est un sous-ensemble ou une partie de A si tous les éléments de B sont aussi des éléments de A. On dit aussi dans ces cas que B est inclus dans A. On note: $B \in A$

$$B \in A \iff \forall x \in B, x \in A$$

1. Pour tout ensemble A, A est un sous-ensemble de lui-même ($A \subset A$)
2. L'ensemble vide est sous-ensemble de n'importe quel ensemble A ($\varnothing \subset A$) Et donc $\varnothing \subset \varnothing$
3. $A = B \iff A \subset B$ <u>et</u> $B \subset A$ (principe de double inclusion)

   Exemple: Pour $A = \{1, 2, 3\}$, $1 \not\subset A$ mais $1 \in A$, et $\{1\} \subset A$ mais $\{1\} \notin A$

Définition 1.4.2: Si $B \subseteq A$ et $B \neq A$, alors ont dit que B est **strictement inclus** dans A, noté $B \subset A$ ou $B \subsetneq A$. Aussi, $B \subset A \iff B \subseteq A$

1.4.1. Visualisation d'ensembles

Le diagramme d'Euler (Venn) reflète les relations entre ensembles.

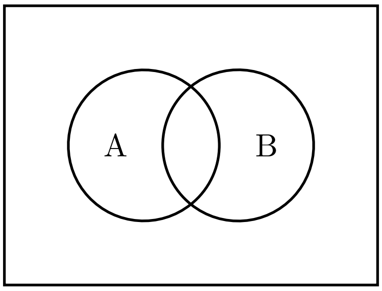


Fig. 1. – Diagramme de Venn avec A et B

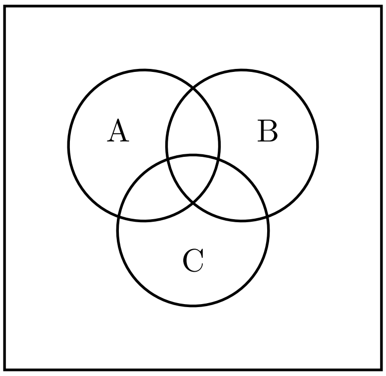


Fig. 2. – Diagramme de Venn avec A, B et C

1.5. Opérations

Définition 1.5.1: L'intersection de A et B, notée $A \cap B$ est l'ensemble des éléments appartenant à A <u>et</u> B, soit $A \cap B \iff \{x \mid x \in A \land x \in B\}$

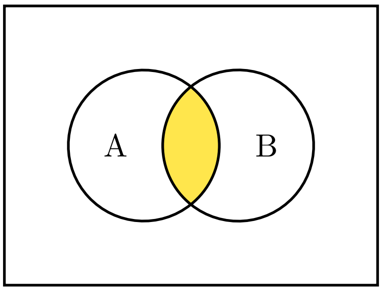


Fig. 3. – $A \cap B$

Définition 1.5.2: L'union ou la réunion de A et B, notée $A \cup B$, correspond à l'ensemble des éléments se trouvant soit dans A, soit dans B.

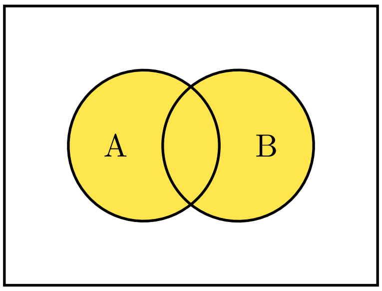


Fig. 4. – $A \cup B$

Définition 1.5.3: Le complément (ou complémentaire) de A est l'ensemble des éléments de l'ensemble universel qui ne sont pas dans A, noté $\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$.

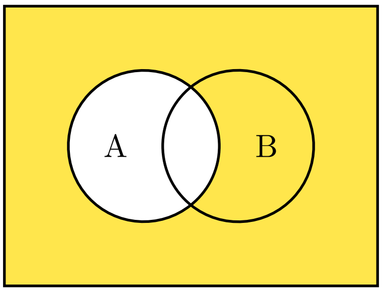


Fig. 5. – $\overline{A}$

Définition 1.5.4: La différence entre A et B notée $A \setminus B$ (« A sans B »), est l'ensemble des éléemtsn appartenant à A, mais pas B.

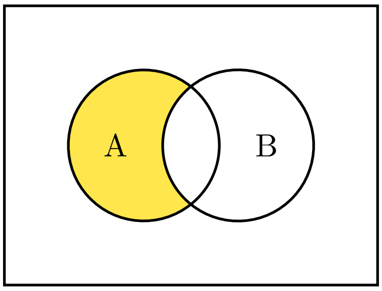


Fig. 6. – $A \setminus B$

On note également les propriétés suivantes:

1. $\overline{A} = \Omega \setminus A$
2. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

Définition 1.5.5: La différence symétrique de A et B, notée $A \oplus B$ ($A \vartriangle B$) est l'ensemble des éléments appartenants soit à A, soit B, **mais pas les deux** (XOR).

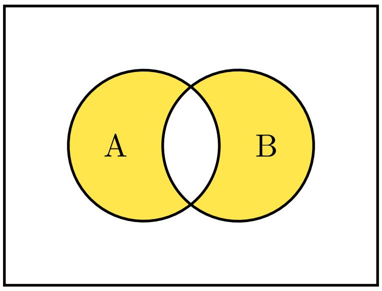


Fig. 7. – $A \oplus B$

On note aussi:

$$A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

1.6. Propriétés et Identités

1.6.1. Associativité

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Remarque: Ducoup, pas besoin de mettre des parenthèses.

1.6.2. Commutativité

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

1.6.3. Distributivité

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

1.6.4. Lois de Boole-Morgan

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Remarque: Parallèles entre logique et ensembles:

`A and B` $\iff A \cap B$

`A or B` $\iff A \cup B$

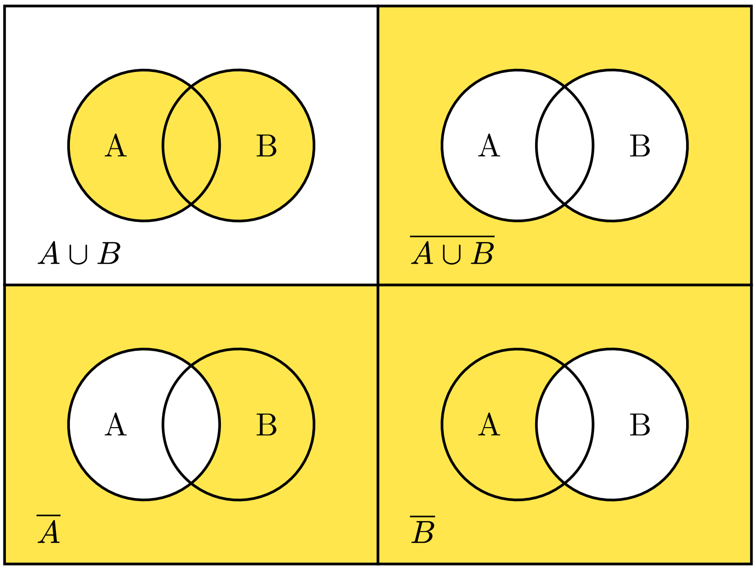
`A xor B` $\iff A \oplus B$

`not A` $\iff \overline{A}$

Preuve 1.6.4.1: 1ère Loi:

A	B	$A \cup B$	$A \cup \overline{B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cap \overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Les colonnes de $\overline{A \cup B}$ et de $\overline{A} \cap \overline{B}$ sont identiques, donc $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$



□

1.6.5. Loi d'absorption

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

B est « absorbé » dans les deux cas.

1.7. Cardinal (pas la bière)

Définition 1.7.1: Un ensemble A est **fini** si son nombre d'éléments distincts est un entier naturel. Sinon, A est infini.

Définition 1.7.2: Si A est fini, le **cardinal** ou la **cardinalité** de A, notée $|A| = \#A = \mathrm{Card}(A)$ est égal au nombre d'éléments distincts de A.

Exemple: $|\{a, b, c, ..., z\}| = 26$, $|\varnothing| = |\{\}| = 0$

1.8. Ensemble des parties

Définition 1.8.1: Pour un ensemble A donné, **l'ensemble des parties** de A, noté $\mathcal{P}(A)$, est l'ensemble contenant tous les sous-ensembles de A:

$$\mathcal{P}(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$$

Exemple: $A = \{\mathrm{Oui}, \mathrm{Non}\} \Longleftrightarrow \mathcal{P} = \{\varnothing, \{\mathrm{Oui}\}, \{\mathrm{Non}\}, \{\mathrm{Oui}, \mathrm{Non}\}\}$

Pour n'importe quel ensemble A, on a toujours que:

$$\varnothing \in \mathcal{P}(A) \text{ et } A \in \mathcal{P}(A)$$

Théorême 1.8.1: Soit A un ensemble fini, tel que $|A| = n$ avec $n \in \mathbb{N}$, alors $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$

Preuve 1.8.1: On peut décomposer la création d'un ensemble de parties en une suite de n choix indépendants entre « Je prends l'élément » ou « Je ne le prends pas », ce qui équivaut mathématiquement à 2^n possibilités. □

Exemple: $A = \{\text{Oui}, \text{Non}\}$, donc $|A| = 2$ et $|\mathcal{P}(A)| = 4 = 2^2$

1.9. Produit cartésien

Définition 1.9.1:
- Un **couple** (a, b) est une liste **ordonnée** des deux éléments a et b.
- Un **triplet** (a, b, c) est une liste ordonnée de trois éléments a, b et c.
- Plus généralement un ***n*-uplet** $(a_0, a_1, ..., a_n)$ est une liste ordonnée de n éléments appelés les **composantes**

Exemple: Le couple $(1, 2)$ est différent de $(2, 1)$, par exemple lorsqu'ils sont représentés sur un graphe.

Définition 1.9.2: Le **produit cartésien** $A \times B$ de deux ensembles A et B est l'ensemgle de tous les couples (a, b) tels que $a \in A$ et $b \in B$

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Exemple: Pour $A = \{0, 1\}$ et $B = \{x, y, z\}$, on a:

$$A \times B = \{(0, x), (0, y), (0, z), (1, x), (1, y), (1, z)\}$$

Théorême 1.9.1: Si $|A| = n$ et $|B| = m$, alors $|A \times B| = |A| * |B| = n * m$

Preuve 1.9.1: En posant un arbre des possibilités de choix de a puis b pour un couplet (a, b), on a d'abord n choix, puis m. □

On peut généraliser le produit cartésien à n ensembles: $A_1, A_2, ..., A_n$:

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_i \in A_i, i \in \{1, 2, ..., n\}\}$$

Remarque: Lorsque $A_1 = A_2 = ... = A_n$, alors $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = A \times A \times ... \times A = A^n$

2. Les Relations

Les relations peuvent être des outils de comparaisons entre objets mathématiques, comme par exemple les nombres ($<$, $=$, ...), ou les ensembles ($\in$, $\not\subset$, ...)

Définition 2.1: Une relation de l'ensemble A vers l'ensemble B est un sous ensemble du produit cartésien $A \times B$.

Si R est une relation de A vers B, et si le couple $(a, b) \in R$ tel que $a \in A, b \in B$, aussi noté aRb.

Exemple: $A = \{\text{étudiant de l'école}\}, B = \{\text{cours dispensés ce semestre}\}$

L'ensemble $R = \{(a, b) \in A \times B \mid \text{l'étudiant } a \text{ suit le cours } b\}$ est une relation de A vers B.

Exemple: $A = \{\text{couleurs}\}, B = \{\text{pays}\}$

On peut définir la relation de correspondance entre une couleur et le drapeau du pays: $R = \{(a, b) \in A \times B \mid \text{la couleur } a \text{ dans drapeau du pays } b\}$.

Ainsi: $(\text{rouge}, \text{Suisse}) \in R, (\text{vert}, \text{Espagne}) \notin R$

Exemple: $A = B = \mathbb{Z}$

On définit $R = \{(a, b) \in A \times B \mid a \leq b\} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x \leq y\}$.

$(2, 3) \in R, (-2, -3) \notin R$