MAD1 Ensembles - 2024 S1

Colin Stefani

Table des matières

1. Les ensembles

1.1. Ensembles et éléments

Définition 1.1.1 : Un ensemble est un regroupement d'éléments formant un tout.

Dans les cas où notre ensemble est suffisamment petit, on peut l'écrire entre deux accolades: {...}

Exemple: L'ensemble des chiffres décimaux s'écrit: $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

1.2. Appartenance

On dit que x **appartient** à E et on note:

$$x \in E$$

Si, au contraire x n'appartient pas à E:

$$x \notin E$$

Exemple: $2 \in \{1, 2, 3, 4\}$ ou $5 \notin \{1, 2, 3, 4\}$

1.2.1. Description des ensembles

Lorsqu'un ensemble est trop grand pour être écrit élément par élément, on peut procéder à une **description en extension**:

Exemple: Pour écrire l'ensemble des nombres entiers de 0 à 100, on note:

$$\{0, 1, 2, 3, ..., 99, 100\}$$

Cela fonctionne aussi avec l'infini:

$$\{..., -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

Cependant, en mathématiques, par soucis de clarté, on privilégie la **description en compréhension**, en spécifiant une propriété mathématique satisfaite par tous les éléments de l'ensemble:

Pour tout x vérifiant $P(x)$, on note:

$$\{x \mid P(x)\}$$

Qui se lit “x tel que $P(x)$”.

Exemple: L'ensemble de tous les x dans A vérifiant $P(x)$ se note $\{x \in A \mid P(x)\}$

1.3. Ensembles égaux

Définition 1.3.1: Deux ensembles sont égaux si et seulement si tout élément de l'un est aussi élément de l'autre.

Si A et B sont égaux, on note: $A = B$ (wow).

Dans un ensembles, l'ordre et la répétition n'ont pas d'importance: **un ensemble est une liste non-ordonnée sans répétitions!**

Quelques ensembles sympas:

- $\mathbb{N}$: Entiers naturels
- $\mathbb{Z}$: Entiers relatifs
- $\mathbb{Q}$: Rationels
- $\mathbb{R}$: Réels
- $\mathbb{C}$: Complexes

En ajoutant le suffixe *, on exclut 0 de l'ensemble

Exemple: $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$

Les suffixes $+$ ou $-$ ajoutent une contrainte de signe à l'ensemble

Exemple: $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$

1.3.1. Intervalles réels

Définition 1.3.1.1: Un intervalle réel est un ensemble défini par deux bornes, inférieure et supérieure, et formé de tous les nombres réels compris entre ces deux bornes.

On distingue trois types d'intervalles réels, notés entre deux bornes [et/ou]:

- Intervalle **fermé**, lorsque les bornes sont **incluses** dans l'ensemble: $[-5; 10]$
  - $[a; b] \Longleftrightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- Intervalle **ouvert**, lorsque les bornes ne sont **pas incluses** dans l'ensemble: $]-5; 10[$ ou $]-\infty; 10[$
  - $]a; b[\Longleftrightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

- Intervalle **semi-ouvert**, lorsqu'une des deux bornes est incluse dans l'ensemble: $]-5;10]$ ou $[-5;10[$
  - $]a;b] \iff \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

1.3.2. Ensemble vide et ensemble universel

L'ensemble vide ne contient… ben rien. Il est noté $\{\}$ ou $\varnothing$.

> *Remarque*: À priori, les éléments d'un ensemble peuvent être de natures différentes, par exemple: $A = \{1, \text{carrottes}, -\pi\}$

En pratique, les éléments d'un ensemble universel, noté $\Omega = \{...\}$, tout comme en probabilités avec les issues possibles d'une expérience aléatoire.