

Lineare Algebra Tutorium 10 Lösung

Andrea Colarieti Tosti

June 17, 2018

Lineare Algebra T 10

Aufgabe 1

i) V ist K -VR $U', U'', U''' \subseteq V$

zu zeigen ist: $\exists v = 0_V : v \in U' \cap U'' \cap U'''$

Wir wissen aus der Vorlesung, dass Untervektorräume nach Definition das Neutrale Element zur Addition enthalten $\Rightarrow \{0_V\} \subseteq U' \cap U'' \cap U'''$.

Wir wissen aber auch:

$$\dim(U') = \dim(U'') = \dim(U''') \leq \dim(U' + U'' + U''') \leq \dim(\mathbb{R}^5) \\ \Rightarrow 4 \leq \dim(U' + U'' + U''') \leq 5$$

Zusätzlich wissen wir aus dem Dimensionsschnittsatzes

$$\dim(U' + U'' + U''') = \dim(U') + \dim(U'') + \dim(U''') = \dim(U' \cap U'' \cap U''')$$

$$\Rightarrow 4 \leq \dim(U' + U'' + U''') = \dim(U' \cap U'' \cap U''') \leq 5$$

das heißt

$$0 = \dim(\{0_V\}) < \dim(U' \cap U'' \cap U''')$$

Also enthält $U' \cap U'' \cap U'''$ mind. 4 Basisvektoren

$$\Rightarrow \{0_V\} \subset (U' \cap U'' \cap U''')$$

Lineare Algebra T10
Aufgabe 1

ii) $\varphi: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$ kann nicht linear und injektiv sein.

Beweis:

Sei φ Injektiv, wissen wir aus der Vorlesung

$$\dim(\mathbb{R}^5) = \dim \ker(\varphi) + \dim \varphi(\mathbb{R}^5)$$

$$\text{Da } \varphi(\mathbb{R}^5) \subseteq \mathbb{R}^4 \Rightarrow \dim \varphi(\mathbb{R}^5) \leq \dim(\mathbb{R}^4) = 4$$

$$\Rightarrow \dim(\mathbb{R}^5) = \dim \ker(\varphi) + \dim \varphi(\mathbb{R}^5)$$

$$5 \stackrel{!}{=} \dim \ker(\varphi) + 4$$

$$\dim \ker(\varphi) \stackrel{!}{=} -4 + 5$$

$$= 1 \quad \downarrow$$

Also enthält $\ker(\varphi)$ nicht ausschließlich den Vektor $0_{\mathbb{R}^5} \Rightarrow \varphi$ ist nicht injektiv.

Lineare Algebra T10

Aufgabe 2

$$i) \quad U := \{ (x_1, \dots, x_7) \in \mathbb{R}^7 \mid (x_1, x_3 - x_5) = (x_2 + 2x_6, -x_2) \}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 + 2x_6 \quad \wedge$$

$$x_3 - x_5 = -x_2 \Rightarrow x_2 = x_5 - x_3$$

$$\Rightarrow x_1 = x_5 - x_3 + 2x_6$$

x_1 und x_2 lassen sich als Kombination der anderen Komponenten darstellen.

Also sind die Vektoren aus U in der Form:

$$(x_5 - x_3 + 2x_6, x_5 - x_3, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) \in U$$

mit $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \in \mathbb{R}$

Es ist jetzt offenbar dass ein Vektor $v \in U$

als LK von 5 l.u. Vektoren aus \mathbb{R}^7 .

Daher ist die Dimension von $U = 5$.

Aufgabe 2 T10

ii) $f_A: \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto Ax$

mit $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

zu zeigen ist: $\ker(f_A) = U$

Beweis:

Wir wissen aus der Vorlesung

$$\dim(\mathbb{R}^7) = \dim \ker(f_A) + \dim f_A(\mathbb{R}^7)$$

$$\Rightarrow f_A(\mathbb{R}^7) \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$\Rightarrow 7 = 2 + \dim \ker(f_A) \Rightarrow \dim \ker(f_A) = 5.$$

Also ist $\dim \ker(f_A) = \dim U$

Wir müssen noch zeigen, dass $Ax \in U$.
erstmal bringen wir A in norm ZSF.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{I - II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_3 - x_5 - 2x_6 = 0$$

$$x_2 + x_3 - x_5 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 2x_6 + x_5 - x_3$$

$$x_2 = x_5 - x_3$$

Also $Ax \in U$

Aufgabe 3

①

"i \Rightarrow ii" Sei $A \in K^{n \times n}$ $A: a_{ij}$ $1 \leq i \leq n$ $n \in \mathbb{N}$
 $1 \leq j \leq n$

Wir wissen aus der Vorlesung:

$$SR(A) = \{ \lambda_1 a_{11}, \dots, \lambda_n a_{nn} \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \}$$

Also können wir aus der Aussage $\ker(A) = SR(A)$
 herleiten: $\ker(A) = \{ \lambda \in SR(A) \}$.

Also ist die Matrix Nilpotent zweiten Grades,
 da den von ihren Spaltenvektoren aufgespannten
 Vektorraum alle Lösungen von $Ax = 0$ enthält.

Veranschaulicht: Sei $A' := a'_{ij}$ $1 \leq i \leq n$ $n \in \mathbb{N}$
 $1 \leq j \leq n$
 so definiert dass $A = A'$ folgt:

$$\begin{aligned} A \times A' &= Aa'_{11} + Aa'_{12} + \dots + Aa'_{1n} = 0 \\ &\quad \downarrow \\ &= 0 + 0 + \dots + 0 = 0 \end{aligned}$$

"ii \Rightarrow i" Aus der Aufgabendefinition ist klar erkennbar,
 dass n immer durch 2 teilbar ist

\Rightarrow Die Aussage ist immer für $K^{2 \times 2}$, $K^{4 \times 4}$, $K^{6 \times 6}$, $K^{8 \times 8}$..
 gültig, Da der Rang der Matrix immer ausschließlich
 durch ganze Zahlen darstellbar ist. bzw. $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3 (2)

wir sehen einen aus der Vorlesung bekannten Muster entstehen: Blockmatrizen!

Also ist A immer aus vier Teilmatrizen

$$A', A'', A''', A'''' \in K^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}$$

Wir führen ein Paar Beispiele:

$$A \in K^{2 \times 2} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} A' \in K^{1 \times 1} & A'' \in K^{1 \times 1} \\ \hline A''' \in K^{1 \times 1} & A'''' \in K^{1 \times 1} \end{array} \right)$$

$$A \in K^{4 \times 4} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} A' \in K^{2 \times 2} & A'' \in K^{2 \times 2} \\ \hline A''' \in K^{2 \times 2} & A'''' \in K^{2 \times 2} \end{array} \right)$$

$$A \in K^{6 \times 6} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} A' \in K^{3 \times 3} & A'' \in K^{3 \times 3} \\ \hline A''' \in K^{3 \times 3} & A'''' \in K^{3 \times 3} \end{array} \right)$$

und so weiter.

Zusätzlich wissen wir dass die Matrix A

von Rang $n = 2 \cdot \text{rg}(A) \Rightarrow \text{rg}(A) = \frac{n}{2}$

Also folgt, wenn A in norm. ZSF ist,

dass maximal eine der Teilmatrizen A', A'', A''', A'''' in norm. ZSF sein.

Aufgabe 3 (3)

Es gibt also vier Möglichkeiten die Matrix A mit $\text{rg}(A) = \frac{n}{2}$ darzustellen, nämlich:

Seien $Z \in K^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}$ in normal ESF und $B \in K^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}$, $B := (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \quad n \in \mathbb{N}, b_{ij} \in K$

$$A_1 = \left(\begin{array}{c|c} Z & B \\ \hline 0_{K^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}} & 0_{K^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}} \end{array} \right) \quad A_2 = \left(\begin{array}{c|c} 0_{K^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}} & Z \\ \hline 0_{K^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}} & 0_{K^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}} \end{array} \right)$$

$$A_3 = \left(\begin{array}{c|c} 0_{K^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}} & 0_{K^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}} \\ \hline Z & B \end{array} \right) \quad A_4 = \left(\begin{array}{c|c} 0_{K^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}} & 0_{K^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}} \\ \hline 0_{K^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}} & Z \end{array} \right)$$

Wir müssen jetzt prüfen welche dieser Matrizen Nilpotent zweiten Grades sind.

Wir wissen aus der Vorlesung wie man Blockmatrizen multipliziert, also prüfen wir:

$$\begin{aligned} A_1 \times A_1 &= \left(\begin{array}{c|c} Z & B \\ \hline 0_{K^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}} & 0_{K^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}} \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c|c} Z & B \\ \hline 0_{K^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}} & 0_{K^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}} \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} Z \times Z + 0_{K^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}} & Z \times B + 0_{K^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}} \\ \hline 0 + 0 & 0 + 0 \end{array} \right) \neq 0_{K^{n \times n}} \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (2)

$$A_2 \times A_2 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & Z \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c|c} 0 & Z \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} 0+0 & 0+0 \\ \hline 0+0 & 0+0 \end{array} \right) = 0_{k^{n \times n}}$$

$$A_3 \times A_3 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline Z & B \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline Z & B \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} 0+0 & 0+0 \\ \hline 0+Z \times B & 0+B^2 \end{array} \right) \neq 0_{k^{n \times n}}$$

$$A_4 \times A_4 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & Z \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & Z \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} 0+0 & 0+0 \\ \hline 0+0 & 0+Z^2 \end{array} \right) \neq 0_{k^{n \times n}}$$

Also kann A nur die Form $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & Z \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ haben.

Aufgabe 3 (5)

Aus der Analyse können wir jetzt folgern:

$\text{rg}(Z) = \text{rg}(A) = \frac{n}{2} \Rightarrow$ den Spaltenraum von A wird aufgespannt von $\begin{pmatrix} Z \\ 0_{K^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}} \end{pmatrix}$

Also sei $M := \{A \in K^{n \times n} \mid A^2 = 0_{K^{n \times n}} \wedge n = 2 \cdot \text{rg}(A)\}$

gilt $\forall A \in M: \text{SR}(A) = \ker(A)$

Da die Matrix $L = \begin{pmatrix} Z \\ 0 \end{pmatrix}$ aus Spaltenvektoren

$z_1, \dots, z_n \in K^n$ besteht für die gilt:

$$A z_1 = A z_2 = \dots = A z_n = 0_{K^n}$$

Somit folgt i.

Aufgabe 1 ①

$$a \in \mathbb{R} \quad M_a \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad M_a := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

wir bestimmen zuerst $\text{rk}(M_a) = \text{rg}(M_a)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II-I}]{\text{III+I}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II} \leftrightarrow \text{III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II} - a \cdot \text{III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \text{rg}(M_a)$ ist von a abhängig:

$$1 - 2a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

\Rightarrow für $a = \frac{1}{2}$ gilt $\text{rg}(M_a) = 2$

$a \neq \frac{1}{2}$ gilt $\text{rg}(M_a) = 3$

Wir bestimmen jetzt den Spaltenraum von M_a

$$\text{SR}(M_a) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 1-2a \\ 2 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu, \nu, a \in \mathbb{R} \right\}$$

Jetzt suchen wir eine Basis für $\text{SR}(M_a)$

mit $a = \frac{1}{2}$ ist eine Basis von SR

$$B_{\text{SR}(M_a)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Sonst gilt:

$$B_{\text{SR}(M_a)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1-2a \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ mit } a \neq \frac{1}{2}, a \in \mathbb{R}$$