Lineare Algebra Tutorium 5 Lösung

Andrea Colarieti Tosti

May 13, 2018

1 Aufgabe 0

1.1 Verknüpfung

Eine Verknüpfung verknüpft 2 Elemente aus der Menge A. Sie ist abgeschlossen wenn $\forall a \in A, \exists b \in A : f(a) = b$

Assioziative Verknüpfung Eine Verknüpfung gilt als assziativ venn:
Seien $a, b, c \in A$ gilt : $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

Bsp: $Seienf(x) = \lambda x, g(x) = \alpha x, h(x) = \eta x$ mit $\lambda, \alpha, \eta \in A$

$((f \circ g) \circ h)(x) = h((f \circ g)(x)) = (f \circ g)(\eta x) = f(g(\eta x)) = \lambda\alpha\eta x$

$(f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x)) = \lambda \cdot (g \circ h)(x) = \lambda \cdot g(h(x)) = \lambda\alpha\eta x$

Kommutative Verknüpfung Eine verknüpfung gilt als kommutativ, wenn seien 2 Elemente $a, b \in A \Leftrightarrow a \circ b = b \circ a$
Bsp: Die Multiplikation über $\mathbb{R}$ ist kommutativ $\Rightarrow 2 \cdot 4 = 8 = 4 \cdot 2$

1.2 Monoid

Ein Monoid ist ein tupel (M,∘) der aus einer Menge M , in dem gilt:

1. Ageschlossenheit
2. Assoziativität
   Bsp: In $(\mathbb{R}, \cdot)$ gilt $1 \cdot (2 \cdot 3) = 6 = (1 \cdot 2) \cdot 3$
3. Neutrales Element
   $\forall b \in M, \exists a \in M : ab = b$
   Bsp: In $(\mathbb{R}, \cdot)$ ist das neutreale Elemenent $1 \Leftrightarrow 1 \cdot 3 = 3$

Bsp: $(\mathbb{N}_0, +, 0)$

1.3 Gruppe

Eine Gruppe ist ein Tupel $(M, \circ)$ aus der Menger M, in dem gilt:

1. Abgeschlossenheit
2. Assoziativität
3. Neutrales Element
4. Inverses Element
   $\forall b \in M, \exists a \in M : a \circ b = e_M$. Wobei e_M das Neutrale Element der Verknüpfung ist.

Bsp: $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine Gruppe.

1.4 Ring

Ein Ring ist ein Tripel $(M, +, *)$ über eine Menge M mit 2 Operatoren $+, *$. In einem Ring gilt:

1. $(M, +)$ ist eine abelsche Gruppe
2. $(M, *)$ ist eine halbe Gruppe
3. Distributivgesetze
   $\forall a, b, c \; inM$ gilt $a * (b + c) = a * b + a * c$ und $(a + b) * c = a * c + b * c$

Bsp: Ganzzahlen Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

1.5 Körper

Ein Körper ist ein Tripel $(M, +, *)$ über eine Menge M mit 2 Operatoren $+, *$. In einem Körper gilt:

1. $(M, +)$ ist eine abelsche Gruppe (Neutrales Element 0)
2. $(M \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe (Neutrales Element 1)
3. Distributivgesetze
   $\forall a, b, c \; inM$ gilt
   $a * (b + c) = a * b + a * c$ und
   $(a + b) * c = a * c + b * c$

Bsp: Die Rationalen zahlen $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein Ring

1.6 Vektorraum

Ein Vektorraum ist ein Tripel $(M, +, *)$ über eine Menge M mit 2 Operatoren $+, *$. In einem Vektorraum gilt:

1. Bildet über die Addition eine Abelsche Gruppe
2. Für die Multiplikation
   - $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$
   - $(a + b) * c = (a * c) + (b * c)$
   - $a * (b * c) = (a * b) * c$
   - Neutrales Element

Bsp: Die Euklidische ebene $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist ein Vektorraum.

2 Aufgabe 1

Aufgabe 1)

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad X \in GL_2(\mathbb{C})$$

zz für welche $A \in GL_2(\mathbb{C})$ gilt

$$AX = XA$$

Wir definieren eine Matrix $A \in GL_2(\mathbb{C})$

$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sodass $AX = XA$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ a+b & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & c \\ b+d & d \end{pmatrix}$$

Dies stimmt bei folgenden Bedingungen

- $a = a+c$ • $a+b = b+d$
- $c = c$ • $c+d = d$

~~$\Rightarrow c = 0$, $a = d$, $a = d$ [illegible] $a = 0$~~

$\Rightarrow$ Mindeste bedingung ist $c = 0$ und $a = d$

wir prüfen:

Sei $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ dann muss $BX = XB$ sein

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & a+b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b+a \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$A \in \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}) \right\}$$

3 Aufgabe 2

3.1 Nützliche Beweise

Wir zeigen erstmal, dass die Funktion

$spur(A) : \mathbb{K}^{n \times n} \mapsto \mathbb{K}$ ein Homomorphismus ist

Das wird uns bei späteren Beweise helfen.

zz. i) $spur(A) + spur(B) = spur(A+B)$

ii) $\lambda \cdot spur(A) = spur(\lambda A)$

mit $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$

i) Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $n \in \mathbb{N}$

$$spur(A) + spur(B) \underset{\substack{DEF\\spur}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{j=1}^{n} b_{jj}$$

$$\underset{\substack{DEF\\Addition\\in\ \mathbb{K}}}{\Rightarrow} \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n} (a_{ii} + b_{jj}) \underset{\substack{DEF\\spur}}{=} spur(A+B) \checkmark$$

ii) Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\lambda \cdot spur(A) \underset{\substack{DEF\\spur}}{=} \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \underset{\substack{Distr.\\Mult.\\in\ \mathbb{K}}}{=} \sum_{i=1}^{n} (\lambda \cdot a_{ii})$$

$$\underset{\substack{DEF\\spur}}{=} spur(\lambda A) \checkmark$$

spur ist eine lineare Abb. $\square$

3.2 i

Aufgabe 2

②

i) zz. spur(AB) = spur(BA)

BEW:

$$\operatorname{spur}(AB) \overset{\text{spur Lin. Abb. ii)}}{=} \operatorname{spur}(A) \cdot \operatorname{spur}(B)$$

$$\overset{\text{DEF spur}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \cdot \sum_{j=1}^{n} b_{jj} \overset{\text{Multi. in } \mathbb{K} \text{ bildet eine Abelsche gruppe}}{=} \sum_{j=1}^{n} b_{jj} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$$\overset{\text{DEF spur}}{=} \operatorname{spur}(B) \cdot \operatorname{spur}(A) \overset{\text{spur lineare Abb.}}{=} \operatorname{spur}(BA) \qquad \square$$

3.3 ii

Aufgabe 2 ③

ii) z.z. $\mathrm{spur}(BCA) = \mathrm{spur}(CAB)$

mit $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ $B \in \mathbb{K}^{n\times r}$ $C \in \mathbb{K}^{r\times m}$ $m,n,r \in \mathbb{N}$

$\mathrm{spur}(BCA) = \mathrm{spur}(B)\,\mathrm{spur}(C)\,\mathrm{spur}(A)$

spur Linear Abb ii)

$\Rightarrow$ DEF spur $\sum_{n=1}^{r} b_{nn} \cdot \sum_{r=1}^{m} c_{rr} \cdot \sum_{m=1}^{n} a_{mm} =$

$(\mathbb{K}, \cdot)$ ist eine Abelsche Gruppe

$= \sum_{r=1}^{m} c_{rr} \cdot \sum_{n=1}^{r} b_{nn} \cdot \sum_{m=1}^{n} a_{mm}$

$= \sum_{r=1}^{m} c_{rr} \sum_{m=1}^{n} a_{mm} \cdot \sum_{n=1}^{r} b_{nn}$

DEF spur

$= \mathrm{spur}(C)\,\mathrm{spur}(A)\,\mathrm{spur}(B)$

spur Lineare Abb ii)

$= \mathrm{spur}(CAB)$

3.4 iii

Aufgabe 2 (3)

iii) zz. $(\mathbb{K}^{n\times n},+) \to (\mathbb{K},+);\ A \mapsto \operatorname{spur}(A)$ ist GH.

$\Rightarrow$ Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ $\quad n \in \mathbb{N}$

zz $\operatorname{spur}(A+B) = \operatorname{spur}(A) + \operatorname{spur}(B)$

BW:

$$\operatorname{spur}(A+B) \overset{\text{Matrix Addition}}{=} \operatorname{spur}\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & a_{22}+b_{22} & & \vdots \\ & & \ddots & a_{nn}+b_{nn} \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{DEF spur}}{=} \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} + b_{ii}) \overset{\text{DEF Addition in } \mathbb{K}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii}.$$

$$\underset{\text{DEF spur}}{=} \operatorname{spur}(A) + \operatorname{spur}(B)$$

$\operatorname{spur}: (\mathbb{K}^{n\times n},+) \to (\mathbb{K},+);\ A \mapsto \operatorname{spur}(A)$ ist ein GH. $\square$

4 Aufgabe 3

4.1 i

Aufgabe 3 (1)

i) z.z. $\forall a \in M \ \exists b \in M : aba = a \Leftrightarrow (M, \cdot)$ ist eine Gruppe

Bew

Aus der Definition $\forall a \in M \ \exists b \in M : ab = e_M$

$\Rightarrow aba = a \Rightarrow e_M a = a. \Rightarrow a = a$ ✓

Das heißt das Inverse und Neutralelement sind vorhanden.

Abgeschlossenheit und Assoziativität sind von der Definition vom Monoid $(M, \cdot)$ gegeben.

Also ist $(M, \cdot)$ eine Gruppe. $\square$

4.2 ii

Aufgabe 3 ②

ii) zz $\forall a \in M$ $a^2 = e_M \iff M$ ist eine abelsche Gruppe.

BEW:

$a^2 = a \cdot a = e_M$

Das heisst jedes Element aus M ist sein eigenes inverses.

$\Rightarrow a \cdot b = c \Rightarrow a \cdot a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = a \cdot c$

$\Rightarrow b \cdot c = a \cdot c \cdot c \Rightarrow b \cdot c = a \Rightarrow b \cdot b \cdot c = b \cdot a$

$\Rightarrow c = b \cdot a$ ✓

Wenn $a^2 = e_M$ gilt, $(M, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe. □

5 Aufgabe 4

5.1 i

i) $(F, \circ)$ ist ein nicht kommutativer Monoid, aber keine Gruppe

zz. $(F, \circ)$
1- ist assoziativ
2- hat ein Neutrales element
3- ist Abgeschlossen
4- ist NICHT kommutativ
5- hat Kein inverses element

1) Assoziativität

zz. Seien $f, g \in F$ und $x \in M$
gilt $f(x) \circ g(x) = (f \circ g)(x)$.

Seien $f, g, h \in M$
nehmen wir an $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

Wir definieren

$f(x) := \lambda x \quad h(x) := \alpha x$

$g(x) := \gamma x \qquad x, \alpha, \gamma, \lambda \in M$

$$\Rightarrow f(g \circ h)(x) \overset{DEF}{=}$$

$$f \circ (g(\alpha x)) = f(\gamma \alpha x) = \lambda \gamma \alpha x$$

$$\lambda\gamma\alpha x = \lambda\gamma \cdot h(x) = \lambda\big(g(x)\circ h(x)\big)$$

$$= \big(f(x)\circ g(x)\big)\circ h(x)$$

$$\overset{!}{=} \big((f\circ g)\circ h\big)(x) \quad \checkmark$$

2) Neutrales Element

zz $\exists\, f \in \mathbb{F}: \ fg = g \ , \ g \in \mathbb{F}$

Seien $f, g \in \mathbb{F}$ $\quad f(x) := x \quad g(x) := bx \quad b \in M$

sodass $f \circ g = g$

$$(f\circ g)(x) = f(bx) = bx = g(x) \quad \checkmark$$

3) Abgeschlossenheit

Seien $f, f^{-1} \in \mathbb{F} \quad f\circ f' \in \mathbb{F}$

$g \in \mathbb{F}$

zz: $f\circ f'\circ g = g$

$$(f\circ f'\circ g)(x) \underset{\text{1 ASSOZ.}}{=} (f\circ f')\circ g \underset{\text{INVERS}}{=} g \quad \checkmark$$

4) NICHT KOMMUTATIVITÄT

Zz $f \circ g \neq g \circ f$

BEW Sei $f(x) := a + x \quad g(x) := bx \quad a, b \in M$

$$(f \circ g)(x) = f(bx) = a + bx$$

$$(g \circ f)(x) = g(a+x) = b(a+x) = ba + bx \neq a + bx$$

$\square$

5.2 ii

ii) a) $\exists f' \in F : f \circ f' = id_F \Leftrightarrow f$ ist surjektiv

$\Rightarrow$: f ist surjektiv nach definition.

d.h. $\forall y \in M, \exists x \in M : f(x) = y$

somit ist $f \circ f'$ erfüllt.

$\Leftarrow$: Sei $f \circ g = id_F$, sei ein $y \in M$ gegeben müssen wir ein $x \in M$ finden sodass $f(x) = y$.

Im fall dass $x = g(y)$

$\Rightarrow f(x) = f(f'(y)) = (f \circ f')\, y = id_F(y) = y$

$\square$

b) zz $\exists f' \in F : f' \circ f = id_F \Leftrightarrow f$ ist injektiv.

BEW

$\Rightarrow$ f ist nach DEF Injektiv.

$f'(y) := x$ nach DEF ist immer ein eindeutigen y definiert.

$\Leftarrow$ sei $f' \circ f = id_F$ und seien $x, y \in H$

so definiert dann

$f(x) = f(y)$ zz. ist $x = y$

$f(x) = f(y) \underset{Def}{\Rightarrow} f'(f(x)) = f'(f(y))$

$= id_F(x) = id_F(y) \Rightarrow x = y$

$\square$

5.3 iii

Aufgabe 4 (6)

iii) $G := \{ f \in F \mid f \text{ ist bijektiv} \}$

zz $(G, \circ)$ 1 - ist abgeschlossen
2 - Assoziativität
3 - Neutrales Element
4 - Inverses Element

1 Abgeschlossenheit

Seien $f, g \in G$

zz $f \circ g \in G$

Nach Definition ist die komposition Bijektive funktionen Bijektiv

2 Assoziativität

Seien $f, g, h \in G$ $x \in M$

zz. $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

BEW: $(f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x)) = (g \circ h)(f(x)) = f(g(h(x)))$

$((f \circ g) \circ h)(x) = h((f \circ g)(x)) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$

Aufgabe 4 12

4) Neutrales Element

zz $\exists f \in G: f \circ g = g = g \circ f$

Seien $g, h \in G$

zz. 1 $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$

2 $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$

BEW Sei $f(x) = x$

1 $\Rightarrow (f \circ g)(x) = f(g(x)) \underset{\text{DEF } f}{=} g(x)$

$(f \circ h)(x) = f(h(x)) \underset{\text{DEF } f}{=} h(x)$ ✓

2 $\Rightarrow (g \circ f)(x) \underset{\text{DEF } f}{=} g(f(x)) \underset{\text{DEF } f}{=} g(x)$ ✓

$(h \circ f)(x) = h(f(x)) \underset{\text{DEF } f}{=} h(x)$

Aufgabe 4 (8)

5) Inverses Element

zz $\exists g \in G : f \circ g = \mathrm{id}_F = g \circ f$

BEW: f und g sind nach defintion bijektiv und somit surjektiv.

$\Rightarrow$ Sei $f(x) = y$ müssen wir eine funktion $g \in G$ finden sodass $g(y) = x$.

Da $G \subseteq F$ ist sind f und g auch stetig.

Daraus folgt, sei x fixiert

es existiert immer ein eindeutigen $y \in M$

sodass $g(y) = x$. ✓

Somit ist $(G, \circ)$ eine Gruppe. $\square$

5.4 iv

Aufgabe 4 | 9

iv) $\forall\ f, g, h \in G$ hat das LGS:

$$f \circ x = y \circ g$$
$$g \circ y = h$$

immer genau eine Lösung (x, y) für $x, y \in G$

BEW:

Seien $f^{-1}, g^{-1} \in G$ die inverse elemente zu f und g

$$g \circ y = h \Rightarrow g^{-1} \circ g \circ y = g^{-1} \circ h$$

$$\overset{\text{DEF } g^{-1}}{\Rightarrow} y = g^{-1} \circ h$$

$$\Rightarrow f \circ x = y \circ g = (g^{-1} \circ h) \circ g$$

$$\Rightarrow f^{-1} \circ f \circ x = f^{-1} \circ g^{-1} \circ h \circ g \underset{\text{DEF } f^{-1}}{=} x$$

Das LGS hat nur eine Lösung

$$\left(f^{-1} \circ g^{-1} \circ h \circ g,\ g^{-1} \circ h \right) \in G \qquad \square$$