Lineare Algebra Tutorium 7 Lösung

Andrea Colarieti Tosti

May 29, 2018

$\lightning$

1 Aufgabe 1

1.1 i

Da $lin(T) = lin(S) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k$, ist ese leicht daraus zu erkennen dass die zwei Untervektorräume die gleiche Basis $B_S = B_T = \{v_1, ..., v_n\}$.
Da der Austauschsatz sagt: Sei $U \subseteq V$ und V ein K-Vektorraum, gibt es eine mengen linear unabhängige vektoren $v_1, ..., v_n, n \in \mathbb{N}$, die die Basis von V $B_V = \{v_1, ..., v_n\}$ bilden.
Und es gibt eine menge $B_U := \{u_1, ..., u_m\}$ mit $1 \leqslant m < n, m \in \mathbb{N}$ basis von U, sodass $B_V = \{u_1, ..., u_m, v_{m+1}, ..., v_n\}$.
Merken wir dass die Vektoren aus den Basen von S und T genau die selben sind und daher die Untervektorräume gleich sind.

1.2 ii

Da $S \subseteq T \subseteq V$ können wir den obergenannten Austauschsatz anwenden und die folgende Aussage treffen:
Seien die Basen von S und T bzw. $B_S := \{s_1, ..., s_n\}$, $B_T := \{t_1, ..., t_m\}$ und die Basis von V: $B_V := \{v_1, ..., v_l\}$ mit $1 \leq n \leq m < l$ und $l, m, n \in \mathbb{N}$, können wir geauso sagen, dass $B_V := \{s_1, ..., s_n, t_{n+1}, ..., t_m, v_{m+1}, ..., v_l\}$.
Es lässt sich folgern, dass $lin(S) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k s_k \subseteq lin(T) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k t_k$

2 Aufgabe 2

2.1 i

Da ϕ eine lineare abbildung mit der eigenschaft $\phi \circ \phi = \phi$ können wir ohne Zweifel sagen, dass $(\phi \circ \phi)(x) = \phi(\phi(x)) = \phi(x) = x$ also ist das durch ϕ abgebildete Wert immer unverändert. Daraus folgt $Bild(\phi) = \phi(V) = \{v \in V | \phi(v) = v\}$.
Beobachtung : $\phi = Id_V$

2.2 ii

zz; $v - \phi(v) \in ker(\phi)$
wir haben gerade beobachtet dass $\phi = Id_V$ ist. Also gilt $\forall v \in V$:
$v - \phi(v) = v - v = 0_v \in ker(\phi)$.

2.3 iii

zz: $V = ker(\phi) \oplus \phi(V)$
Aus den aussagen (i) und (ii) wissen wir dass $ker(\phi) = \{0_V\}$ und
$\phi(V) = \{v \in V | \phi(v) = v\}$. Wir müssen beweisen, dass $V = ker(\phi) + \phi(V)$ und $ker(\phi) \cap \phi(V) = \{0_v\}$.
Das ist trivial da $Bild(\phi)$, V entspricht und wir aus der Vorlesung wissen, dass $ker(\phi) + \phi(V) \subseteq V$. Es folgt dann $ker(\phi) \cap \phi(V) = \{0_v\} \cap V = 0_v$.

2.4 iv

Sei $\phi = Id_V$ und $x, y \in V$ mit der eigenschaft $x \neq y$.
$\phi(x) = \phi(y) \Rightarrow x = y$, das wiederspricht die Definition. Also können wir behaupten dass ϕ Injektiv ist.
Sollte $\phi \neq Id_V$ sein. Folgt $\phi(x) \neq x$ besipielweise $\phi(x) = ax$ mit $a \in \mathbb{K}$.
$\Rightarrow \phi(x) = \phi(y) \Rightarrow ax = ay$ uund ist genauso injektiv o.O
was mache ich falsch? :(

3 Aufgabe 3

3.1 i

zz. $(D \circ \phi_n)$ $\mathbb{R}$ linear ist. Wobei
$D := P_n \to P_n,\ f \mapsto (f' : I \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{df(x)}{dx})$
$\phi_n : \mathbb{R}^{n+1} \to C^0(I, \mathbb{R})$
$\phi_n(v) = p \in C^0(I, \mathbb{R}) \Leftrightarrow$
$(v = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1} e_k \wedge (\forall x \in i : p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k), a_o, ..., a_n \in \mathbb{R})$

Beweis:
Seien $n \in \mathbb{N},\ \lambda, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}, b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}, x \in I, v, w \in \mathbb{R}^n$ mit $v := (a_1, ..., a_n),\ w := (b_1, ..., b_n)$

- $(D \circ \phi_n(v))(x) + (D \circ \phi_n(w))(x) = (D \circ \phi_n(v + w))(x))$

$(D \circ \phi_n(v))(x) + (D \circ \phi_n(w))(x) = D(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k) + D(\sum_{k=0}^{n} b_k y^k) =$

$\sum_{k=0}^{n-1} k a_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{n-1} k b_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} k a_k x^{k-1} + k b_k x^{k-1}$

$(D \circ \phi_n(v + w))(x) = D(\sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k) = \sum_{k=0}^{n-1} k(a_k + b_k) x^{k-1} =$

$\sum_{k=0}^{n-1} k a_k x^{k-1} + k b_k x^{k-1}$

✓

- $\lambda(D \circ \phi_n(v))(x) = (D \circ \phi_n(\lambda v))(x)$

$\lambda(D \circ \phi_n(v))(x) = \lambda\ D(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k) = \lambda \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k a_k x^{k-1} =$

$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda k a_k x^{k-1}$

$(D \circ \phi_n(\lambda v))(x) = D(\sum_{k=0}^{n} \lambda a_k x^k) = \sum_{k=0}^{n-1} k \lambda a_k x^{k-1}$
Da die multiplikation in $\mathbb{R}$ kommutativ ist, sind die 2 aussagen gleich.

✓

Also ist $(D \circ \phi_n)$ $\mathbb{R}$-Linear .

$$ker(D \circ \phi_n) := \{x \in I : (\phi_n(v))(x) = 0 \in C^0(I, \mathbb{R}), v \in \mathbb{R}^n\}$$
$$Im(D \circ \phi_n) := \{(\phi_n(v)) \in C^0(I, \mathbb{R}), v \in \mathbb{R}^n\}$$

3.2 ii

4 Aufgabe 4

4.1 i V^+

Sei $v \in V^+ \subseteq V$ und $V^+ := \{v \in V | \phi(v) = v\}$.
Gibt es $v \in V^+ \subseteq V$ sodass $\phi(v) = v$, also ist $V^+ \neq \emptyset$.

Seien $v, w \in V^+ \subseteq V$ gilt $\phi(v) + \phi(w) = v + w = \phi(v + w) \Rightarrow v + w \in V^+$

Sei $v \in V^+ \subseteq V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\lambda\phi(v) = \lambda v = \phi(\lambda v) \Rightarrow \lambda v \in V^+$

4.2 i V^-

Sei $v \in V^- \subseteq V$ und $V^- := \{v \in V | \phi(v) = -v\}$.
Gibt es $v \in V^- \subseteq V$ sodass $\phi(v) = -v$, also ist $V^- \neq \emptyset$.

Seien $v, w \in V^- \subseteq V$ gilt $\phi(v) + \phi(w) = (-v) + (-w) = -(v + w) = \phi(v + w) \Rightarrow v + w \in V^-$

Sei $v \in V^- \subseteq V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\lambda\phi(v) = \lambda(-v) = -(\lambda v) = \phi(\lambda v) \Rightarrow \lambda v \in V^-$

4.3 ii

Wir starten mit der Gleicheit $V = V^+V^-$ und schliesßen ab mit $V^+ \cap V^- = \{0_v\}$.

$\supseteq$: Aus der Vorlesung wissen wir, dass $V^+V^- \supseteq V$ ist.
$\subseteq$: Aus der definition von K aus der Übung wissen wir dass $1_k \neq -1_k$, also folgern vir dass ein Vektor v element des K-Vektorraums V zwei möglichen Darstellungen hat: $v_1 = 1_k v$ oder $v_2 = -1_k v = -v$.
Also gilt es $\phi(v_1) = \phi(1_k v_1) = 1_k v_1 \in V^+$ und $\phi(v_2) = \phi(-1_k v_2) - = 1_k v_2 \in V^-$ $\Rightarrow$ v ist zwingend teil von V^+ oder V^- und daraus lässt sich folgern, dass $V = V^+ + V^-$
Es bleibt zu zeigen, dass $V^+ \cap V^- = \{0_v\}$. Wir wissen schon aus der Vorlesung, dass $0_v \in V^+$ sowie $0_v \in V^-$.
Sei $\phi \in V^+ \cap V^-$ müssen wir ein $v \in V$ finden können, sodaß $\phi(v) = \phi(-v) \Rightarrow v = -v$ da $1_k \neq -1_k$ folgt widerspruch. Also ist o_v das einzige elsement in $V^+ \cap V^-$.