MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2018
14.05.2018

Tutoriumsblatt 6
für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK-ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens Montag, den 21.05.2018, um 12 Uhr entweder über den Rückgabekasten oder über UniWorx ab. Spätere Abgaben können nicht berücksichtigt werden. Gerne können Sie in Gruppen abgeben (max. 3 Studierende).

Aufgabe 1: (Gewichtung 25%)

Betrachten Sie $\mathbb{R}^2$ mit den Verknüpfungen

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \qquad \text{(Addition)}$$
$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \qquad \text{(Multiplikation)}$$

Zeigen Sie:

(i) $(1, 0)$ ist neutrales Element von $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}, \cdot)$.

(ii) $(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$ ist das bzgl. der Multiplikation inverse Element zu (x, y), falls $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

(iii) Für $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ gilt das Distributivgesetz:

$$(x_1, y_1)\big((x_2, y_2) + (x_3, y_3)\big) = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) + (x_1, y_1) \cdot (x_3, y_3)$$

Aufgabe 2: (Gewichtung 25%)

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $U_Q := \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} : A^tQA = Q\}$ für $Q \in \mathbb{K}^{n\times n}$.
Zeigen Sie:
Für alle $M, S \in GL(n, \mathbb{K})$ und $N := S^tMS$ ist die Abbildung

$$\phi : U_M \to U_N, \phi(A) = S^{-1}AS$$

wohldefiniert und ein Gruppenisomorphismus zwischen den Untergruppen U_M und U_N von $GL(n, \mathbb{K})$.
Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass U_M bzw. U_N eine Untergruppe von $GL(n, \mathbb{K})$ ist.

Aufgabe 3: (Gewichtung: 25%)

Seien V und W zwei $\mathbb{R}$-Vektorräume. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen $f_i : V \to W$ auf Linearität, Surjektivität und Injektivität. In welchen Fällen liegt ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen vor?

(i) $V = W = \mathbb{R}^2$, $f_1(x, y) = (7x + 14y - 1, x + 2y + 5)$

(ii) $V = W = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $f_2(A) = AB$ mit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4: (Gewichtung 25%)

Seien V, W zwei $\mathbb{C}$-Vektorräume. Wir definieren auf $V \times W$ eine Verknüpfung $\oplus$ und eine Abbildung $* : \mathbb{C} \times (V \times W) \to (V \times W)$ durch

$$(v_1, w_1) \oplus (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2) \qquad \text{und} \qquad \lambda * (v_1, w_1) = (\lambda v_1, \bar{\lambda} w_1)$$

für alle $(v_1, w_1), (v_2, w_2) \in V \times W$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dabei bezeichnet $\bar{\lambda}$ jeweils die zu λ konjugiert-komplexe Zahl. Zeigen Sie, dass $(V \times W, \oplus, *)$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist.