Lineare Algebra Tutorium 8 Lösung

Andrea Colarieti Tosti

June 4, 2018

0/16

1 Aufgabe 1

0/4

1.1 i

Zu zeigen :

1. $H \neq \emptyset$
2. $u + v \in H,\ u, v \in H$
3. $\lambda u \in H,\ \lambda \in \mathbb{R},\ u \in H$
4. eine Menge von Vektoren $V \subseteq \mathbb{R}^3$ angeben, so dass U = span(V)

1 $H \neq \emptyset$

Sei ϕ eine lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to H, x \mapsto v + x,\ v \in H,\ x \in U \subseteq \mathbb{R}^3$

hier gehst du schon davon aus, dass H nicht leer ist. (nach deiner Def. ist dies keine lineare Abbildung.)

$$\phi(0, 0, 0) = v + (0, 0, 0) = v \in H$$

Also ist H nicht leer.

2 $u + v \in H,\ u, v \in H$

Seien $u, w \in H,\ v \in \mathbb{R}^3$ definiert wie folgt:
$v = (v_1, v_2, v_3)$; $u = (u_1, u_2, u_3) + v$; $w = (w_1, w_2, w_3) + v$ mit $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$ und $(u_1, u_2, u_3)(w_1, w_2, w_3) \in U$

unklar, wieso es solche Vektoren geben muss.

$$\begin{aligned}
u + v &= ((u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3)) + ((w_1, w_2, w_3) + (v_1, v_2, v_3)) \\
&= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) + (w_1 + v_1, w_2 + v_2, w_3 + v_3) \\
&= (u_1 + v_1 + w_1 + v_1, u_2 + v_2 + w_2 + v_2, u_3 + v_3 + w_3 + v_3) \\
&= (2v_1 + u_1 + w_1, 2v_2 + u_2 + w_2, 2v_3 + u_3 + w_3) \\
&= 2v + (u_1 + w_1, 2u_2 + w_2, u_3 + w_3) \\
&= 2v + (u_1 + w_1, 2u_2 + w_2, u_3 + w_3) \\
&= \underbrace{2v}_{\in \mathbb{R}^3} + \underbrace{(u_1 + w_1, 2u_2 + w_2, u_3 + w_3)}_{\in U}
\end{aligned}$$

Es handelt sich um einen Vektor der Form $v + u \in H$.

falsch, am Ende hast du einen Vektor der Form 2v + u', u' in U.

was willst du zeigen, was ist gegeben?

3 $\lambda u \in H,\ \lambda \in \mathbb{R},\ u \in H$

R^3

Sei $u \in H,\ u := (u_1, u_2, u_3) + v;\ v := (v_1, v_2, v_3) \in \cancel{\mathbb{R};} (u_1, u_2, u_3) \in U \subseteq \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\lambda u &= \lambda((u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3)) = \lambda(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \\
&(\lambda(u_1 + v_1), \lambda(u_2 + v_2), \lambda(u_3 + v_3)) = \underbrace{\lambda v}_{\in \mathbb{R}^3} + \underbrace{\lambda u}_{\in U}
\end{aligned}$$

Es handelt sich wieder um einen Vektor der Form $v + u \in H$. falsch, s.o.

4 eine Menge von Vektoren $V \subseteq \mathbb{R}^3$ angeben, so dass U = span(V)

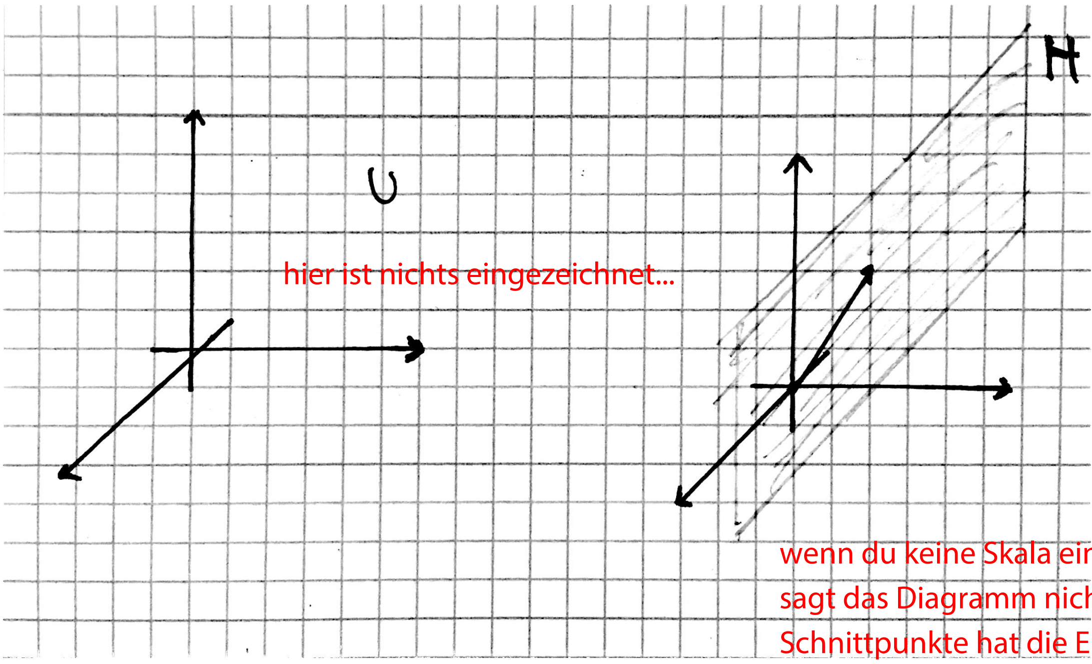
du hast die Frage nicht verstanden

$V := \{(1,0,0)(0,1,0)(0,0,1)\}$
$\Rightarrow span(V) = \{\alpha(1,0,0), \beta(0,1,0), \gamma(0,0,1)\} = U \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

0/4

falsch, dies ist nur eine Menge mit drei Vektoren

1.2 ii



hier ist nichts eingezeichnet...

wenn du keine Skala einzeichnest, sagt das Diagramm nichts, welche Schnittpunkte hat die Ebene?

2 Aufgabe 2

2.1 i

14/16

4/4

$v_5 = v2 + (-1) \cdot v_3 = (1,1,1,1) - (0,1,1,0) = (1,0,0,1)$ ✓
$v_6 = v_2 + v_3 = (1,1,1,1) + (0,1,1,0) = (1,2,2,1)$ ✓

2.2 ii

4/4

Zu zeigen ist: $span(\{v_2, v_5, v_6\}) = span(\{v_3, v_5, v_6\})$
Wir suchen die Basis der beiden Vektorräume und vergleichen dann diese um deren Gleichheit zu prüfen. es gibt nich nur eine Basis
Wir schreiben die Vektoren in eine Matrix und bringen diese in norm. ZSF um die linear unabhängige Vektoren zu finden.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt, $basis(span(\{v_2, v_5, v_6\}) = \{(0,1,1,0),(1,0,0,1)\}$

$$\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&1\\1&2&2&1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&1\\1&1&1&1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Daraus folgt, $basis(span(\{v_3, v_5, v_6\})) = \{(0,1,1,0),(1,0,0,1)\}$ basis ist keine Abbildung
Da die zwei Vektorräume die gleiche Basis haben können wir sagen, dass die zwei Vektorräume gleich sind.

3/4

2.3 iii

$$\begin{pmatrix}1&2&1&2\\1&1&1&1\\0&1&1&0\\0&1&0&1\\1&0&0&1\\1&2&2&1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&1&1&1\\0&1&1&0\\0&1&0&1\\1&0&0&1\\1&1&1&1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&1&1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&1&1&0\\1&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Also ist basis($span(\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\})) = \{(0,1,0,1),(0,1,1,0),(1,0,0,1)\}$
Sei B $= \{(0,1,0,1),(0,1,1,0),(1,0,0,1)\}$ dann ist B linear unabhängig und $B \subseteq S$, wieso ist B linear unabhängig? du musst zumindest sagen, dass B={v_3,v_4,v_5}
span(B) = span(S) da B das minimale Ereugungendensystem von S ist.

3 Aufgabe 3

3.1 i 3/8

3/4

Seien die Vektoren $s_1, ..., s_n \in S$ linear abhängig mit $S \subseteq V$,dann gibt es koeffizienten $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ für die gilt $\lambda_1 s_q + ... + \lambda_n s_n = 0$. mit mindestens einem Koeffizienten ungleich 0
Daraus folgt $0 = \phi(0) = \phi(\lambda_1 s_q + ... + \lambda_n s_n) = \lambda\phi(s_1) + ... + \lambda\phi(s_n)$
Also sind $\phi(s_1), ..., \phi(s_n)$ linear abhängig.

3.2 ii

4 Aufgabe 4

4.1 i 8/24

2/4

Sei $\{\phi(b_1), ..., \phi(b_n)\}$ ein Erzeugendensystem von W $\Rightarrow$ ist ϕ offenbar surjektiv, da alle Vektoren aus W als kombination der Urbilder von $\phi(b_1), ..., \phi(b_n)$ darstellbar sind. was meinst du mit Kombination?
Sei ein Vektor $c \in W$ und die Koeffizienten $a_1, ..., a_n \in K \Rightarrow$
$c = a_1\phi(b_1) + ... + a_n\phi(b_n) \underset{\phi Homomorphismus}{=} \phi(a_1b_1) + ... + \phi(a_nb_n)$
$\underset{\phi Homomorphismus}{=} \phi(a_1b_1 + ... + a_nb_n)$
Also hat ϕ immer eine lösung und ist somit Surjektiv.

Implikation falsch: Wenn c in W, dann existieren Koeffizienten a_i, sodass ...

\phi ist keine Gleichung, um eine Lösung zu haben. \phi ist eine Abbildung

2/4

4.2 ii

$\{b_1, ..., b_n\}$ sind nach aufgabendefinition eine linear unabhängige Teilmenge von V $\Rightarrow$ Seien $a_1, ..., a_n \in K$ ist die einzige Lösung für die Gleichung:
$a_1 b_1 + ... + a_n b_n = 0$ die triviale mit $a_1 = ... = a_n = 0$.
$\Rightarrow 0 = a_1 b_1 + ... + a_n b_n \underset{\phi \text{ injektiv und Homomorhismus}}{=} a_1\phi(b_1) + ... + a_n\phi(b_n)$
Also da ϕ injektiv ist die menge $\{\phi(b_1), ..., \phi(b_n)\}$ linear unabhängig.

unklar, das folgt nicht sofort. Die Folgerung musst du beweisen

0/4

4.3 iii

Sei $b := (b_1, ..., b_n) \in K^m$ und $A := \alpha_{ij} \in K^{m\times n}$ mit $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$, $m, n \in \mathbb{N}$ gibt es ein LGS der Form:

$$\begin{matrix} \alpha_{11}a_1 + ... + \alpha_{1n}a_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \alpha_{m1}a_1 + ... + \alpha_{mn}a_n = b_m \end{matrix}$$

dies ergibt keinen Sinn. \alpha_i,j ist ein Skalar, a_i ist ein Vektor, deren Produkt ist Vektor und die Summe von Vektoren ist ein Vektor. b_i ist aber ein Skalar

Das kann auch in Form einer Matrix geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}a_1 & \cdots & \alpha_{1n}a_n \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1}a_1 & \cdots & \alpha_{mn}a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

das ergibt noch weniger Sinn als das oben.

Da die Vektoren $\{a_1, ..a_n\}$ teil eines Erzeugendensystem von K^m sind, können wir annehmen, dass $\forall b \in K^m\ \exists A \in K^{m\times n} : Ax = b,\ x \in \{a_1, ..., a_n\}$. Das wollten wir nämlich zeigen, für alle b aus K^m existiert immer mindestens eine Lösung für die Gleichung $Ax = b$, eine lineare kombination aus mehrfachen der Elemente der Vektoren aus dem erzeugenden System von K^m.

4.4 iv

0/4

Aus der Aufgabendefinition ist klar ersichtlich, dass sei $x \in K^n$ und $A := \alpha_{ij} \in K^{m\times n}$ gibt es ausschliesslich die triviale Lösung für den folgenden LGS:

$$\begin{matrix} \alpha_{11}x_1 + ... + \alpha_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + ... + \alpha_{mn}x_n = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \text{ ist nur durch } x = 0 \text{ lösbar}$$

Daraus lässt sich erschliessen, dass für den analogen fall $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ das gleiche gilt.

inwiefern ist dies analog? a_i sind Vektoren!

Und da 0_m nicht durch einer linearen Kombination aus $\{a_1, ..., a_n\}$ darstellbar ist. Folgt, dass die Menge $\{a_1, ..., a_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ linear unabhängig ist.