Lineare Algebra Tutorium 12 Lösung

Andrea Colarieti Tosti

July 8, 2018

1 Aufgabe 1

Aufgabe 1

$SL(n, K) := \{A \in K^{n \times n} : \det(A) = 1_K\}$ K ist Körper $n \in \mathbb{N}$

zu zeigen ist: $(SL(n,K), \cdot)$ bildet eine Gruppe

Wir müssen zeigen,

Seien $A, B, C \in SL(n, K)$, gilt:

- Abgeschlossenheit
  $\det(A \cdot B) = 1_K$
- Assoziativität
  $\det(A(BC)) = \det((AB)C)$
- ~~N~~Neutrales Element $\exists B \in SL(n,K)$
  $\det(A \cdot B) = \det(BA) = \det(A)$
- Inverses Element $\exists B \in SL(n, K)$
  $\det(AB) = \det(BA) = \det(1_{K^{n \times n}})$

Die folgen Aussagen, nehmen an, wir wissen aus der VL

Seien $A, B \in SL(n,K)$ mit $n \in \mathbb{N}$

$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

- Abgeschlossenheit
  Seien $A, B \in SL(n, K)$
  Wir Wissen $\det(A) = 1_K$ und $\det(B) = 1_K$

$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = 1_K \cdot 1_K = 1_K$ ✓

- Assoziativität: Seien $A, B \in SL(n,K)$ mit $n \in \mathbb{N}$

$\det(A(BC)) = \det(A) \cdot \det(BC) = \det(A) \cdot \det(B) \cdot \det(C)$

$= \det(AB) \cdot \det(C) = \det((AB)C)$ ✓

- Neutrales Element

  Sei $A \in SL(n, K)$ mit $n \in \mathbb{N}$

  Wir wissen dass innerhalb von $K^{n \times n}$ das Neutrale Element der Multiplikation $\mathbb{1}_{K^{n \times n}}$ ist.

  Wir müssen beweisen, dass

  $A \cdot \mathbb{1}_{K^{n \times n}} = \mathbb{1}_{K^{n \times n}} \cdot A \in SL(n, K)$

  $A \cdot \mathbb{1}_{K^{n \times n}} = A \in SL(n, K)$

  $\mathbb{1}_{K^{n \times n}} \cdot A = A \in SL(n, K)$ ✓

- Inverses Element

  Analog zum Neut. El. ist in $K^{n \times n}$ ein Invers bezüglich der Multiplikation gegeben,

  Sei $M \in K^{n \times n}$ nennen wir das inverse El von M; M^{-1}. Es gilt $MM^{-1} = M^{-1}M = \mathbb{1}_{K^{n \times n}}$

  Also sei $A \in SL(n, K)$ mit $n \in \mathbb{N}$, gilt

  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbb{1}_{K^{n \times n}}$

  $\Rightarrow \det(\mathbb{1}_{K^{n \times n}}) = \mathbb{1}_{K_1} \cdot \mathbb{1}_{K_2} \cdot \mathbb{1}_{K_3} \cdot \ldots \cdot \mathbb{1}_{K_n} = \mathbb{1}_K$ ✓

2 Aufgabe 2

Aufgabe 2 i)

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\-1&2&3&0\\4&0&-2&1\\7&3&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\mathrm{II}+\mathrm{I}\\ \Rightarrow\\ \\ \mathrm{III}+\mathrm{I}\end{matrix}\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&2&5&1\\5&0&0&2\\7&3&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}\\ \Rightarrow\\ \mathrm{IV}-7\mathrm{I}\\ \mathrm{III}-5\mathrm{I}\end{matrix}\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&2&5&1\\0&0&-10&-3\\0&3&-14&-6\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \Rightarrow\\ \\ \mathrm{IV}-\frac{3}{2}\mathrm{II}\end{matrix}\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&2&5&1\\0&0&-10&-3\\0&0&\frac{43}{2}&\frac{-15}{2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}\\ \Rightarrow\\ -\frac{43}{20}\mathrm{III}+\frac{23}{20}\mathrm{III}\\ \rightarrow\end{matrix}\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&2&5&1\\0&0&-10&-3\\0&0&0&-\frac{21}{20}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Det}(A)=2\ast 1\ast(-10)\cdot\left(-\frac{21}{20}\right)=21$$

ii) $B=\begin{pmatrix}0&0&1&2\\0&0&3&4\\5&6&0&0\\7&8&0&0\end{pmatrix}$ Wir beobachten B besteht aus 4 2×2 Mat. und 2 davon sind O_2.
Also hat die Leibniz Formel 4 Diagonal-Möglichk die $\neq 0$ sind, nähmlich:

$$\det B = 1\ast4\cdot5\cdot8-1\cdot4\cdot6\cdot7+2\cdot3\cdot6\cdot7-2\cdot3\cdot5\cdot8$$
$$=160-168+252-240=4$$

3 Aufgabe 3

3.1 i

Aufgabe 3

i) Seien $A, B \in K^{n \times n}$

zu zeigen ist, dass $\det(AB) = \det(BA)$

BEWEIS:

Wir wissen aus der VL, dass seien $A, B \in K^{n \times n}$, gilt

$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

Zusätzlich wissen wir, dass auf der rechten Seite eine Multiplikation von Skalaren stattfindet.

Also folgt:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = \det(B) \cdot \det(A) \overset{!}{=} \det(BA)$$

$\square$

4 Aufgabe 4

- Aufgabe 4

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 19 & 4 & 1 & 2 \\ 13 & 7 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ II-2I \\ III-2I \Rightarrow \\ IV-4I \\ V-13I \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & +4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & -8 & 1 & 2 \\ 0 & 33 & -33 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ III-\frac{1}{2}II \Rightarrow \\ IV-\frac{27}{4}II \\ V-\frac{33}{4}II \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 28 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \\ \\ \\ IV+\frac{28}{4}III \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \Rightarrow \\ \\ V-3IV \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A) = 1 \cdot 4 \cdot (-4) \cdot 1 \cdot (-5) = +80$$

Aufgabe 4

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & 8 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ II-3I \\ \Rightarrow III-I \\ IV-2I \\ V-4I \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & -4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \\ II+7III \\ \Rightarrow \\ IV-2III \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & -4 & -5 & 1 \end{pmatrix} \underset{IV+\frac{3}{2}II}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & -4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir Vertauschen II und IV und dann II und V, bekommen

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

wir haben 2 Mal Zeilen Vertauscht.

$$\det(B) = (-1)\cdot(-1)\cdot(1\cdot 7\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot 2) = 28$$

Aufgabe 4

$$C := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xRightarrow{V - 5IV} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & -38 & -12 & -1 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\xRightarrow[V + 19I]{II - \frac{3}{2}I} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 45 & -1 & 29 \end{pmatrix} \xRightarrow[V - \frac{45}{2}III]{II + \frac{1}{2}III} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 74 \end{pmatrix}$$

Wir Vertauschen I - II -> IV - I -> II - V , kriegen C'

$$C' := \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 74 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(C) = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot (-2))$$

$$= -8$$