AB Geometrie & Topologie
Prof. Bernhard Leeb, Ph.D.
Dr. Stephan Stadler

Analysis I

Übungsblatt 1

Wichtig: Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe eine neue Seite.

1. Sind A und B Mengen, so definiert man ihre *Vereinigung* $A \cup B$, ihren *Durchschnitt* $A \cap B$ sowie ihre *Differenz* $A \setminus B$ wie folgt:

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B.$$

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B.$$

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B.$$

Die Symbole "$\wedge$" bzw "$\vee$" stehen dabei für "und" bzw "und oder".

Sei nun X eine Menge und seien $A, B, C \subset X$ Teilmengen. Zeigen Sie:

(a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ und $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(b) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$ und $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$.

2. Es seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen. Zeigen Sie:

(a) Sind f und g injektiv, dann auch $g \circ f$.

(b) Sind f und g surjektiv, dann auch $g \circ f$.

(c) Falls $g \circ f$ injektiv ist, dann auch f. Muss auch g injektiv sein?

(d) Falls $g \circ f$ surjektiv ist, dann auch g. Muss auch f surjektiv sein?

3. Für eine natürliche Zahl n betrachten wir die Menge $M_n := \{1, 2, \ldots, n\}$. Weiter sei $S_n := \{\sigma : M_n \to M_n |\ \sigma \text{ bijektiv } \}$ die Menge der *Permutationen* von M_n. Das *Vorzeichen* oder *Signum* einer Permutation $\sigma \in S_n$ definiert man als

$$\operatorname{sgn}(\sigma) := \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \in \{\pm 1\}.$$

Die Schreibweise bedeutet, daß das Produkt der Ausdrücke $\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$ für alle Paare (i, j) von Zahlen $i, j \in M_n$ mit $i < j$ gebildet wird.

Eine Permutation σ heißt *gerade*, falls $\operatorname{sgn}(\sigma) = +1$, und sonst *ungerade*. Zeigen Sie:

(a) Für alle $\sigma, \tau \in S_n$ gilt

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{\tau(j) - \tau(i)}.$$

Hinweis: Für $i \neq j$ gilt $\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i} = \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$.

(b) *Multiplikativität.* Für alle $\sigma, \tau \in S_n$ gilt $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\tau)$.

(c) Für $k, l \in M_n$ mit $k \neq l$ definiert man die *Transposition* $\tau_{kl} \in S_n$ durch

$$\begin{cases} \tau_{kl}(k) := l \\ \tau_{kl}(l) := k \\ \tau_{kl}(i) := i \text{ falls } i \neq k, l \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß Transpositionen ungerade Permutationen sind.

(d) Zeigen Sie, daß es für $n \geq 2$ gleichviele gerade und ungerade Permutationen gibt. Geben Sie dazu eine Bijektion $\beta : S_n^+ \to S_n^-$ von der Menge S_n^+ der geraden auf die Menge S_n^- der ungeraden Permutationen an.

4. (a) Zeigen Sie, dass keine positive rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}^+$ mit $q^2 = 2$ existiert.

(b) Es sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Zeigen Sie, dass keine positive rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}^+$ mit $q^2 = p$ existiert.

Hinweis: Sie dürfen für (b) die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung natürlicher Zahlen verwenden. Teil (a) folgt natürlich aus Teil (b). Geben Sie dennoch ein separates einfacheres Argument.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis Montag dem 22.10.2018 um 10:00 h ab. (UniworX + Übungskästen.)