MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2018
11.06.2018

# Tutoriumsblatt 10
# für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK-ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens Montag, den 18.06.2018, um 12 Uhr entweder über den Rückgabekasten oder über UniWorx ab. Spätere Abgaben können nicht berücksichtigt werden. Gerne können Sie in Gruppen abgeben (max. 3 Studierende).

**Aufgabe 1** (Gewichtung 25%)

(i) Begründen Sie mit Hilfe des Schnittdimensionssatzes, dass es für drei 4-dimensionale Untervektorräume $U, U', U''$ eines 5-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraums $V$ stets einen Vektor $v \neq 0_V$ in $U \cap U' \cap U''$ gibt.

(ii) Begründen Sie mit Hilfe des Dimensionssatzes für lineare Abbildungen, dass keine injektive lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ existiert.

**Aufgabe 2** (Gewichtung 25%)

(i) Gegeben sei $U = \{(x_1, ..., x_7) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1, x_3 - x_5) = (x_2 + 2x_6, -x_2)\}$. Bestimmen Sie die Dimension dieses Untervektorraums des $\mathbb{R}^3$.

(ii) Zeigen Sie, dass der Untervektorraum $U$ aus Teilaufgabe (i) mit $\text{kern}(f_A)$ übereinstimmt, wobei

$$f_A : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto Ax \text{ mit } A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie nun nochmal durch ein anderes Vorgehen als in Teil $(i)$ die Dimension $\dim_{\mathbb{R}}(U)$.

**Aufgabe 3** (Gewichtung 25%)

Sei $K$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n \times n}$. Zeigen Sie mit Hilfe des Dimensionssatzes für lineare Abbildungen, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind.

(I) $\ker(A) = SR(A)$

(II) $A^2 = 0_{K^{n \times n}}$ und $n = 2 \cdot \text{rg}(A)$.

**Aufgabe 4** (Gewichtung 25%)

Für $a \in \mathbb{R}$ sei die Matrix $M_a \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ gegeben durch

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie für jedes $a \in \mathbb{R}$ den Rang $\text{rg}(M_a)$ sowie eine Basis des Spaltenraums von $M_a$.