MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2018
30.04.2018

Lösung zum Übungsblatt 4 für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK-ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Aufgabe 1

(i) Wir zeigen $M := \underbrace{\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ * & * \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{K}^{(m+n)\times(p+q)}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} C_1 & * \\ C_2 & * \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{K}^{(p+q)\times(r+s)}} = \underbrace{\begin{pmatrix} A_1C_1 + A_2C_2 & * \\ * & * \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{K}^{(m+n)\times(r+s)}}$
mit $A_1 \in \mathbb{K}^{m\times p}, A_2 \in \mathbb{K}^{m\times q}, C_1 \in \mathbb{K}^{p\times r}, C_2 \in \mathbb{K}^{q\times r}$. Somit $A_1C_1 + A_2C_2 \in \mathbb{K}^{m\times r}$.
Für $1 \le i \le m, 1 \le j \le r$:

$$\begin{aligned}(M)_{ij} &= \big((A_1)_{i1}...(A_1)_{ip}(A_2)_{i1}...(A_2)_{iq}\big)\begin{pmatrix}(C_1)_{1j}\\ \vdots \\ (C_1)_{pj} \\ (C_2)_{1j} \\ \vdots \\ (C_2)_{qj}\end{pmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^{p}(A_1)_{ik}(C_1)_{kj} + \sum_{k=1}^{q}(A_2)_{ik}(C_2)_{kj} \\ &= (A_1C_1)_{ij} + (A_2C_2)_{ij} = (A_1C_1 + A_2C_2)_{ij}\end{aligned}$$

Die anderen Einträge lassen sich analog herleiten.

(ii) In der Vorlesung haben Sie gezeigt, dass eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertierbar ist, wenn das homogene System $Ax = 0, x \in \mathbb{K}^n$ genau eine Lösung, nämlich die triviale besitzt.
„$\Rightarrow$“: Sei $x \in \mathbb{K}^m, y \in \mathbb{K}^n$. $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow (1) : Ax + By = 0, (2) : y = 0$
$\Rightarrow (2)$ in $(1) : Ax = 0$. Da A invertierbar, folgt $x = 0$, also insgesamt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Also $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & E_n \end{pmatrix}$ invertierbar.

„$\Leftarrow$“: zz. Einzige Lösung für $Ax = 0$ ist $x = 0$ (Nullvektor).

$Ax = 0 \Rightarrow Ax + B0 = 0$ und $0x + E_n0 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & E_n \end{pmatrix} inv.bar}{\Rightarrow}$
$\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, also $x = 0$.

(iii) Wir suchen Matrix, so dass $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix}$ mit $A, C \in \mathbb{K}^{m\times m}$, $B, D \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $E \in \mathbb{K}^{n\times m}$, $F \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Nach Teilaufgabe (i) folgt:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AC + BE & AD + BF \\ E_nE & E_nF \end{pmatrix}$$

Also muss gelten
$(1): AC + BE = E_m, (2): AD + BF = 0, (3): E = 0, (4): F = E_n.$
Mit (3) und (4) folgt für (1) und (2) :
$(1): AC = E_m, (2): AD + B = 0$. Da A invertierbar folgt weiter, dass $C = A^{-1}$ und $D = -A^{-1}B$ und damit für die Inverse
$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & E_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B \\ 0 & E_n \end{pmatrix}.$
Wir prüfen: $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B \\ 0 & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA^{-1} & A(-A^{-1}B) + BE_n \\ 0 & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix}.$

Aufgabe 2

(i) In der Vorlesung hat man gezeigt, dass jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ durch elementare Umformungen in eine normierte Zeilenstufenform gebracht werden kann.
$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 1 & 4 & 8 & 4 \end{pmatrix} \overset{M_{3,-2}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & 8 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ -2 & -8 & -16 & -8 \end{pmatrix} \overset{A_{1,3,1}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & 8 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \overset{A_{2,1,-8}}{\rightsquigarrow}$
$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 17 & -68 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \overset{A_{3,1,-17}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \overset{M_{1,1/2}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} = TA$

Des weiteren hat man in der Vorlesung gezeigt, dass ein Ersetzen der k-ten Zeile einer Matrix A durch ihr $\lambda-$faches durch die Linksmultiplikation mit $M_{k,\lambda}$ durchgeführt werden kann; Das Ersetzen der $l-$ten Zeile durch die Summe des $\lambda-$fachen der $k-$ten und der $l-$ten Zeile durch Linksmultiplikation mit $A_{k,l,\lambda}$. Damit folgt

$$TA = (M_{1,1/2} \cdot A_{3,1,-17} \cdot A_{2,1,-8} \cdot A_{1,3,1} \cdot M_{3,-2})A$$

also
$T = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -17 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} -8 & -4 & 17 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

(ii) „$\subseteq$" Gilt $Av = b$, so folgt durch Linksmultiplikation mit E, dass auch $(EA)v = Eb$ gilt. Also $w \in \{v \in \mathbb{K}^n | Av = b\} \Rightarrow w \in \{v \in \mathbb{K}^n | (EA)v = Eb\} = \mathcal{L}_{(EA|Eb)}$.
„$\supseteq$" Auf dem Tutoriumsblatt werden Sie in Aufgabe 3 (i) zeigen, dass für $E \in \mathcal{E}_m^1$ eine Inverse E^{-1} existiert. Damit folgt aus $(EA)v = Eb$ durch Linksmultiplikation mit dem Inversen E^{-1}: $(EA)v = Eb \Rightarrow E^{-1}(EA)v = E^{-1}Eb \Rightarrow (E^{-1}E)Av = (E^{-1}E)b \Rightarrow Av = b$. Also: $w \in \{v \in \mathbb{K}^n | (EA)v = Eb\} = \mathcal{L}_{(EA|Eb)} \Rightarrow w \in \{v \in \mathbb{K}^n | Av = b\} = \mathcal{L}_{(A|b)}$
Wir haben damit gezeigt: Wendet man auf die Koeffizientenmatrix A eines linearen Gleichungssystems und auf den Vektor b dieselbe elementare Zeilenumformung an, so ändern sich die Lösungsmenge nicht.

Aufgabe 3

(i) Aus Analysis ist folgendes bekannt:
   a) Eine Komposition von bijektiven Funktionen ist bijektiv.
   b) Jede bijektve Abbildung $f : X \to Y$ hat eine Inverse $f^{-1} : Y \to X$, so dass $f \circ f^{-1} = id_Y$ und $f^{-1} \circ f = id_X$, und f^{-1} ist bijektiv.

   Daher gilt:
   1. **Abgeschlossenheit**: Wegen a) gilt: $\forall f, g \in F : f \circ g \in F$.

2. **Assoziativität**: $\forall f, g, h \in F, \forall x \in M$:
   $((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) = f(g \circ h(x)) = (f \circ (g \circ h))(x)$, also $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
3. Die Abbildung $id : M \to M, id(x) = x$, $x \in M$, ist bijektiv, also $id \in F$ und
   * $\forall f \in F, \forall x \in M : (id \circ f)(x) = id(f(x)) = f(x)$, also $id \circ f = f$. (**neutrales Element**)
   * Wegen b): $\forall f \in F \exists f^{-1} \in F : f^{-1} \circ f = id$ (**inverses Element**)
4. Diese Gruppe ist **nicht abelsch**, da beispielsweise für $f(x) = x+1$ und $g(x) = 2x$ gilt. $(f \circ g)(x) = 2x + 1$, aber $(g \circ f)(x) = 2x + 2$

(ii) Diese Menge U ist unter $*$ **abgeschlossen**. Zum Nachweis seien $A, B \in U$ vorgegeben. Dann gibt es $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}.$$

Es gilt dann
$$A * B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac + bd & ad + bc \\ ad + bc & ac + bd \end{pmatrix}$$
und diese Matrix liegt wiederum in U (Da $e := ac + bd \in \mathbb{R}, f := ad + bc \in \mathbb{R}$).
Die Verknüpfung $*$ erfüllt das **Assoziativgesetz**, denn auf Grund der Assoziativität der Matrizenmultiplikation gilt für alle $A, B, C \in U$ jeweils $(A * B) * C = (AB)C = A(BC) = A * (B * C)$.
Die Einheitsmatrix E_2 ist in U enthalten (setze $a = 1$, $b = 0$) und für alle $A \in U$ gilt $A * E_2 = AE_2 = A$ sowie $E_2 * A = E_2 A = A$. Dies zeigt, dass U ein **Neutralelement** besitzt, und folglich ist $(U, *)$ ein *Monoid*.
Wäre U eine *Gruppe*, dann müsste auch für die Nullmatrix $\mathbf{O}_2$ ein **inverses Element** existieren, denn $\mathbf{O}_2$ ist in U enthalten (setze $a = b = 0$). Es gilt aber $A * \mathbf{O}_2 = \mathbf{O}_2 \neq E_2$ für alle $A \in U$, also besitzt $\mathbf{O}_2$ in U kein Inverses. Folglich ist U keine Gruppe.

Aufgabe 4

Sei e das neutrale Element der Gruppe.

(i) zz. $(a \circ b) \circ (b^{-1} \circ a^{-1}) \overset{AssozG}{=} e$.
$(a \circ b) \circ (b^{-1} \circ a^{-1}) \overset{AssozG}{=} ((a \circ b) \circ b^{-1}) \circ a^{-1} \overset{AssozG}{=} (a \circ (b \circ b^{-1})) \circ a^{-1} \overset{inv.E.}{=} (a \circ e) \circ a^{-1} \overset{neutr.E.}{=} a \circ a^{-1} \overset{inv.E.}{=} e$. Mit der Eindeutigkeit des inversen Elements folgt, dass $(a \circ b)^{-1} = (b^{-1} \circ a^{-1})$

(ii) Es existiert mindestens eine Lösung: Wähle $x = a^{-1} \circ b$ und $y = b \circ a^{-1}$, dann folgt mit der Assoziativität: $a \circ x = a \circ (a^{-1} \circ b) = (a \circ a^{-1}) \circ b = e \circ b = b$ und $y \circ a = (b \circ a^{-1}) \circ a = b \circ (a^{-1} \circ a) = b \circ e = b$.
Die Lösung ist eindeutig: Seien $x, \tilde{x}$ Lösungen von $a \circ x = b$, d.h. es gilt $a \circ x = b = a \circ \tilde{x}$.
Mit der Linksverknüpfung mit a^{-1} folgt $a \circ x = a \circ \tilde{x} \Rightarrow a^{-1} \circ a \circ x = a^{-1} \circ a \circ \tilde{x} \Rightarrow e \circ x = e \circ \tilde{x} \Rightarrow x = \tilde{x}$.
Zweite Gleichung analog.

(iii) injektiv: zz. $l_a(x) = l_a(x') \Rightarrow x = x'$.
$l_a(x) = l_a(x') \Leftrightarrow a \circ x = a \circ x' \Rightarrow a^{-1} \circ (a \circ x) = a^{-1} \circ (a \circ x') \Rightarrow e \circ x = e \circ x' \Rightarrow x = x'$.
surjektiv: zz. $\forall b \in G \exists c \in G : b = l_a(c)$.
$\forall b \in G \exists c \in G : b = l_a(c) = a \circ c \Leftrightarrow \forall b \in G$ gibt es mindestens eine Lösung. Dies haben wir bereits in (ii) gezeigt.
Der Beweis über die Bijektivität von r_a erfolgt analog.