MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. W. Spann, H. Jaskolla

Wintersemester
2012/2013

Lösungen zur Klausur in Linearer Algebra für Informatiker und Statistiker

1 Man zeige die folgende Gleichung für reelle 2×2-Matrizen durch vollständige Induktion:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^n = 2^n \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Beweis:

Induktionsanfang $n = 1$:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2+2 & -4+2 \\ 2-1 & 4-1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 2^1 \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Induktionssschritt $n \to n+1$:
Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^n = 2^n \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
Dann folgt:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{n+1} &= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &\underset{\text{IV}}{=} \left[2^n \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &\underset{\text{distr.}}{=} 2^n \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 2^n \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2-6 \\ 2 & -2+6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -4+6 \\ -1 & 2-3 \end{pmatrix} \\ &= 2^n \cdot \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 2^n \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 2^{n+1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

q.e.d.

(2) Sei $U := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$. Dann gilt:

(a) U ist Untergruppe von $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.

(b) $\varphi : U \to U$, $z \mapsto z^2$ ist wohldefiniert und mit der Verknüpfung aus (a) ein Gruppenhomomorphismus.

(c) φ ist nicht injektiv.

(d) $z + 1 = z \cdot \overline{(z+1)} \qquad (z \in U)$

(e) Für $w := \dfrac{z+1}{|z+1|}$ mit $z \in U \setminus \{-1\}$ gilt $\varphi(w) = z$.

(f) φ ist surjektiv.

Beweis:

Ad (a) :

Zunächst gilt für $z \in U$, daß $|z| = 1 \implies z \neq 0 \implies z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, d.h. $U \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
Ferner ist $|1| = 1 \implies 1 \in U \implies U \neq \emptyset$.
Nach dem Untergruppenkriterium aus Vorlesung/(1.10) ist nur noch zu untersuchen, ob

$$a, b \in U \overset{?}{\implies} ab^{-1} \in U .$$

Seien also $a, b \in U$, d.h. $|a| = |b| = 1$. Dann ist

$$\left|ab^{-1}\right| \underset{(1.22)\,(d)}{\overset{\text{RR}}{=}} |a| \cdot \left|b^{-1}\right| \underset{(\bullet)}{=} |a| \cdot |b|^{-1} \underset{a,b \in U}{=} 1 \cdot 1^{-1} = 1$$

Dabei gilt ($\bullet$), weil $\quad 1 = |1| = \left|b \cdot b^{-1}\right| \underset{(1.22)\,(d)}{\overset{\text{RR}}{=}} |b| \cdot \left|b^{-1}\right| \underset{\text{Inversen}}{\overset{\text{Def. des}}{\implies}} \left|b^{-1}\right| = |b|^{-1}$

Speziell in der Situation der Aufgabe könnte man auch schließen:
$1 = |1| = \left|b \cdot b^{-1}\right| = |b| \cdot \left|b^{-1}\right| \underset{b \in U}{=} 1 \cdot \left|b^{-1}\right| = \left|b^{-1}\right|$,
und dann folgt ebenso $\quad \left|ab^{-1}\right| \underset{(1.22),(d)}{\overset{\text{RR}}{=}} |a| \cdot \left|b^{-1}\right| \underset{a,b \in U}{=} 1 \cdot 1 = 1$

In jedem Fall ist somit $ab^{-1} \in U$ nach Definition von U $\qquad$ q.e.d.

Ad (b) :

φ wohldefiniert bedeutet, daß mit $z \in U$ auch $\varphi(z) = z^2 \in U$ gilt:

$$z \in U \implies |z| = 1 \implies |\varphi(z)| = \left|z^2\right| \underset{(1.22)\,(d)}{\overset{\text{RR}}{=}} |z| \cdot |z| = 1 \cdot 1 = 1 \underset{U}{\overset{\text{Def.}}{\implies}} \varphi(z) \in U$$

φ ist Gruppenhomomorphismus, wenn für alle $a, b \in U$ gilt, daß $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.
Testen wir das:
$\forall\ a, b \in U \ : \ \varphi(ab) = (ab)^2 = (ab)\cdot(ab) \underset{\text{assoz.}}{\overset{(\mathbb{C},\cdot)}{=}} a(ba)b \underset{\text{kommut.}}{\overset{(\mathbb{C},\cdot)}{=}} a(ab)b \underset{\text{assoz.}}{\overset{(\mathbb{C},\cdot)}{=}} a^2\cdot b^2 \underset{\varphi}{\overset{\text{Def.}}{=}} \varphi(a)\cdot\varphi(b)$

Ad (c) :

Zum Beispiel sind $1, -1 \in U$ und $\varphi(-1) = (-1)^2 = 1 = 1^2 = \varphi(1)$, obwohl $1 \neq -1$. Also ist φ nicht injektiv.
Dieselben Dienste leistet jedes Paar $z \neq w$ in U (d.h. mit $|z| = |w| = 1$), für das $z^2 = w^2$ ist.

$$z^2 = w^2 \iff 0 = z^2 - w^2 = (z - w)(z + w) \underset{z-w\neq 0}{\iff} z + w = 0 \iff z = -w \qquad (*)$$

also zum Beispiel i und $-i$ oder $\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)$ und $-\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)$.

Ad (d):

Wegen $z \in U$, d.h. $|z| = 1$, können wir schreiben: $1 = |z|^2 \underset{(1.22)\,(c)}{\overset{\text{RR}}{=}} z \cdot \bar{z}$, also:

$$z + 1 = z + z \cdot \bar{z} \underset{\text{distr.}}{=} z \cdot (1 + \bar{z}) \underset{1 \in \mathbb{R}}{=} z \cdot (\bar{z} + \bar{1}) \underset{(1.22)\,(a)}{\overset{\text{RR}}{=}} z \cdot \overline{(z+1)}$$

Ad (e):

Weil $z \neq -1$ ist $|z+1| \neq 0$, d.h. $w = \dfrac{z+1}{|z+1|} \in \mathbb{C}$ ist wohldefiniert.
Ferner ist $|w| = \left|\dfrac{z+1}{|z+1|}\right| \underset{\mathbb{R} \ni |z+1| \geq 0}{=} \dfrac{1}{|z+1|} \cdot |z+1| = 1 \implies w \in U$.
Dafür gilt:

$$\varphi(w) = w^2 = \left(\frac{z+1}{|z+1|}\right)^2 = \frac{(z+1)\cdot(z+1)}{|z+1|^2} \underset{(d)}{\overset{\text{Teil}}{=}} \frac{z \cdot \overline{(z+1)} \cdot (z+1)}{|z+1|^2} \underset{(1.22)\,(c)}{\overset{\text{RR}}{=}} \frac{z \cdot |z+1|^2}{|z+1|^2} = z$$

(denn es gilt ja für alle $u \in \mathbb{C}$: $|u| = \sqrt{u \cdot \bar{u}} \implies |u|^2 = u \cdot \bar{u}$).

Ad (f):

Zu zeigen ist, daß $\varphi(U) = U$, und da $\varphi(U) \subseteq U$ immer gilt, bleibt zu zeigen, daß $U \subseteq \varphi(U)$, d.h. es für alle $z \in U$ ein $w \in U$ gibt mit $\varphi(w) = z$.
Falls $z \in U \setminus \{-1\}$ haben wir das in Teil (e) gezeigt: für $w = \dfrac{z+1}{|z+1|} \in U$ gilt $\varphi(w) = z$.
Es bleibt ein Urbild zu $z = -1 \in U$ zu finden, und dafür benutzen wir die Beziehung $-1 = i^2 = \varphi(i)$. Dabei ist $i \in U$, da $|i| = 1$.
Eine zweite Lösung ist $-1 = (-i)^2 = \varphi(-i)$. .
Also sind i und $-i$ Urbilder zu $-1 \in U$ unter der Abbildung φ. Weitere Urbilder gibt es nicht, wie man an der Rechnung $(*)$ im Teil (c) erkennt.

③ Gegeben sei $s \in \mathbb{R}$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & s \\ 1 & s & 1 \\ 1 & 2 & s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Man bestimme, für welche $s \in \mathbb{R}$ A invertierbar ist.

(b) Man berechne für $s = 2$ die inverse Matrix von A.

Lösung:

Ad (a):

Im Hinblick auf Teilaufgabe (b). wo eine inverse Matrix für $s = 2$ bestimmt werden soll, wollen wir bei den elementaren Zeilenumformungen zur Bestimmung des Ranges gleich die erweiterte Matrix $(A \mid E_3)$ untersuchen:

$$(A \mid E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & s & 1 & 0 & 0 \\ 1 & s & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & s & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[III-I]{II-I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & s-1 & 1-s & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{II-(s-1)\cdot III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-s & -1+(s-1) & 1 & -(s-1) \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{Zeilen vertauschen}]{I-III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & s & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-s & s-2 & 1 & 1-s \end{array}\right) \qquad (\text{ZSF für } s \neq 1) \qquad (\clubsuit)$$

bzw. $$\xrightarrow[\text{Zeilen vertauschen}]{I-III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & s & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \underbrace{1-s}_{=0} & s-2 & 1 & 1-s \end{array}\right) \qquad (\text{ZSF für } s = 1)$$

Da nur elementare Zeilenumformungen vom Typ II und III vorgenommen wurden, bleibt der Rang der Matrix erhalten und wir erkennen:

$$\operatorname{rang}(A) = \begin{cases} 3 & \iff \quad s-1 \neq 0 \iff s \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ 2 & \iff \quad s = 1 \end{cases}$$

Damit gilt:

$$A \text{ invertierbar} \overset{\text{Lemma}}{\underset{(5.5)\,(a)}{\iff}} \operatorname{rang}(A) = 3 \iff s \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Natürlich kann man auch mit der Determinante argumentieren, indem man Lemma (5.6) (c) der Vorlesung verwendet:

$$A \text{ invertierbar} \quad \iff \det(A) \neq 0$$

Dafür ist

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & s \\ 1 & s & 1 \\ 1 & 2 & s \end{pmatrix} \overset{\text{siehe Umfor-}}{\underset{\text{mungen oben}}{=}} -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-s \end{pmatrix} = -1 \cdot 1 \cdot (1-s) = s-1$$

(man beachte die Zeilenvertauschung, die das Minuszeichen bewirkt). Also:

$$A \text{ invertierbar} \quad \iff \det(A) \neq 0 \iff s \neq 1, \text{ d.h. } s \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Man kann die Determinante von A auch nach Laplace berechnen:

$$\begin{aligned}
\det(A) &\underset{\text{nach 1.Spalte}}{\overset{\text{Entwickl.}}{=}} 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\det\begin{pmatrix} s & 1\\ 2 & s\end{pmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & s\\ 2 & s\end{pmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & s\\ s & 1\end{pmatrix}\\
&\underset{\text{Laplace}}{=} (s^2-2)-(s-2s)+(1-s^2)\\
&= s-1
\end{aligned}$$

mit dem gleichen Resultat.

Ad (b):

Wir knüpfen an das Ergebnis in (♣) in Teil (a) an:

$$(A \mid E_3) \xrightarrow{\text{siehe oben}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1\end{array}\right) \xrightarrow[(-1)\cdot III]{I+2\cdot III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1\end{array}\right)$$

Damit ist (siehe Lösungen zu Aufgabe (29)) $\underline{\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}}}$.

<u>**Verifikation**</u> (diese ist nicht zwingend, aber sehr zu empfehlen!):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

④ Gegeben sei $s \in \mathbb{R}$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & s & 1 & 1 \\ 0 & 0 & s & 1 \\ 0 & 0 & 1 & s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

(a) Man berechne $\det(A)$ für jedes $s \in \mathbb{R}$.

(b) Man berechne $\operatorname{rang}(A)$ für jedes $s \in \mathbb{R}$.

Ad (a):

Man erkennt die Blockmatrix-Struktur der Matrix A : $\quad A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & s & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & s & 1 \\ 0 & 0 & 1 & s \end{array}\right)$,

und somit folgt mit Lemma (5.9) (a) der Vorlesung:

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & s \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} s & 1 \\ 1 & s \end{pmatrix} \underset{\text{Laplace}}{=} (s+1)\cdot(s^2-1) \underset{\text{binom.}}{=} (s+1)\cdot(s+1)\cdot(s-1) = \underline{\underline{(s+1)^2(s-1)}}$$

Ad (b):

Für die Rangbestimmung reicht es nicht, einfach $\det(A) \neq 0$ zu untersuchen: damit bekommt man nur die Matrizen, deren Rang gleich 4 bzw. kleiner als 4 ist.
Wir führen stattdessen die Matrix A in Zeilenstufenform über:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & s & 1 & 1 \\ 0 & 0 & s & 1 \\ 0 & 0 & 1 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[III-s\cdot IV]{II-I} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & s+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-s^2 \\ 0 & 0 & 1 & s \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{III \leftrightarrow IV} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & s+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 0 & 1-s^2 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Man erkennt:

- **Falls** $\left[s+1 \neq 0 \;\wedge\; 1-s^2 \neq 0 \right] \iff \left[s \neq -1 \;\wedge\; s \notin \{\pm 1\} \right] \iff s \notin \{\pm 1\}$

  stehen in der Hauptdiagonalen der oberen Dreiecksmatrix $(*)$ überall Werte ungleich 0, weshalb dies eine Zeilenstufenform von A ist. Da vier Stufen auftreten, folgt:

  $$s \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \implies \operatorname{rang}(A) = 4$$

  Dies kann man natürlich auch an der Determinante aus Teil (a) ablesen:

  $\operatorname{rang}(A) = 4 \iff \det(A) \neq 0 \iff (s-1)^2(s+1) \neq 0 \iff s \neq -1 \;\wedge\; s \neq 1$.

- **Falls $s = 1$:** Dann lautet $(*)$:

  $$A \xrightarrow{\text{siehe oben}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  d.h. die Zeilenstufenform hat 3 Stufen $\implies$ $\underline{\underline{\operatorname{rang}(A) = 3}}$.

- **Falls $s = -1$:** Dann lautet $(*)$:

$$A \xrightarrow{\text{s. o.}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{II \leftrightarrow III} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d.h. die Zeilenstufenform hat 2 Stufen $\Longrightarrow$ $\underline{\underline{\operatorname{rang}(A) = 2}}$.

Ergebnis:

$$\operatorname{rang}(A) = \begin{cases} 4 & \text{falls} \quad s \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \\ 3 & \text{falls} \quad s = 1 \\ 2 & \text{falls} \quad s = -1 \end{cases}$$

(5) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt schiefsymmetrisch, wenn $M^T = -M$.
Man zeige:

(a) $A - A^T$ ist schiefsymmetrisch.

(b) A schiefsymmetrisch $\wedge A$ invertierbar $\implies A^{-1}$ schiefsymmetrisch.

(c) A schiefsymmetrisch $\wedge S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal $\implies SAS^{-1}$ schiefsymmetrisch

(d) n ungerade $\wedge$ A schiefsymmetrisch $\implies \det(A) = 0$

(e) $u.v \in \mathbb{R}^n \wedge A = uv^T$ schiefsymmetrisch $\implies A = 0$

Lösung:

Ad (a):

Für $B := A - A^T$ ist zu zeigen: $B^T = -B$. Also:

$$\left(A - A^T\right)^T \underset{(2.12)}{\overset{\text{RR}}{=}} A^T - \left(A^T\right)^T \underset{(2.12)}{\overset{\text{RR}}{=}} A^T - A = -(A - A^T) \qquad \text{q.e.d.}$$

Ad (b):

Es gilt

$$\left(A^{-1}\right)^T \underset{(2.14)\,(c)}{\overset{\text{RR}}{=}} \left(A^T\right)^{-1} \underset{\text{schiefsymm.}}{\overset{A}{=}} (-A)^{-1} = -A^{-1} \quad \text{q.e.d.}$$

(Man beachte: $(-A)\cdot(-A^{-1}) = A \cdot A^{-1} = E_n \underset{(2.21)}{\overset{\text{Folg.}}{\Longrightarrow}} (-A)^{-1} = -A^{-1}$)

Ad (c):

Nach Definition von „orthogonal“ gilt für die Matrix S, daß $S^T = S^{-1}$. Damit folgt:

$$\left(SAS^{-1}\right)^T \underset{(2.12)}{\overset{\text{RR}}{=}} \left(S^{-1}\right)^T \cdot A^T \cdot S^T \underset{S^T=S^{-1}}{\overset{A^T=-A}{=}} \left(S^T\right)^T \cdot (-A)\cdot S^{-1} \underset{(2.12)}{\overset{\text{RR}}{=}} -SAS^{-1} \qquad \text{q.e.d.}$$

Ad (d):

$$\det(A) \underset{(5.6)\,(e)}{\overset{\text{RR}}{=}} \det\left(A^T\right) \underset{A^T=-A}{=} \det(-A) \underset{(5.6)\,(a)}{\overset{\text{RR}}{=}} (-1)^n \cdot \det(A) \underset{\text{ungerade}}{\overset{n}{=}} -\det(A)$$

Also folgt $2\cdot\det(A) = 0 \implies \det(A) = 0$

Ad (e):

Seien $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $A = uv^T = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \cdot (v_1, v_2, \ldots, v_n) = (u_i v_j)_{1\le i,j\le n} \quad (*)$

Da A schiefsymmetrisch ist, gilt

$$A^T = -A \iff \underbrace{(uv^T)^T}_{\overset{\text{RR}}{\underset{(2.12)}{=}} (v^T)^T u^T} = -uv^T \underset{(2.12)}{\overset{\text{RR}}{\iff}} vu^T = -uv^T \underset{(*)}{\iff} \forall\ 1 \le i,j \le n\ :\ v_i u_j = -u_i v_j \quad (\bullet)$$

Ist nun $u = 0$, so folgt sofort $A = uv^T = 0$.
Ist dagegen $u \neq 0$, so gibt es ein $1 \leq k \leq n$ mit $u_k \neq 0$.
Mit $i = k = j$ in (●) gilt dann

$$v_k u_k = -u_k v_k \implies 2u_k v_k = 0 \underset{u_k \neq 0}{\implies} v_k = 0$$

Also gilt für alle $1 \leq j \leq n$:

$$u_k v_j = -v_k u_j \underset{v_k = 0}{=} 0 \underset{u_k \neq 0}{\implies} v_j = 0 \overset{1 \leq j \leq n}{\underset{\text{beliebig}}{\implies}} v = 0 \implies A = uv^T = 0$$

q.e.d.

(6) Sei $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper. Für $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in K^{n\times n}$ sei $\mathrm{spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Man zeige:

(a) $f : K^{n\times n} \to K$, $A \mapsto \mathrm{spur}(A)$ ist eine surjektive lineare Abbildung.

(b) $U := \{A \in K^{n\times n} \mid \mathrm{spur}(A) = 0\}$ ist ein Untervektorraum von $K^{n\times n}$.

(c) $\dim(U) = n^2 - 1$

(d) $g : K^{n\times n} \to K$, $A \mapsto \det(A)$ ist genau dann linear, wenn $n = 1$.

Lösung:

Ad (a):

Wegen $\mathrm{spur}(A) \in K$ ist f wohldefiniert.

- f linear: Es seien $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$, $B = (b_{ij})_{1\le i,j\le n} \in K^{n\times n}$ und $\lambda \in K$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{spur}(A+\lambda\cdot B) &= \mathrm{spur}\Big((a_{ij}+\lambda\cdot b_{ij})_{1\le i,j\le n}\Big) \overset{\text{Def.}}{\underset{\text{spur}}{=}} \sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+\lambda\cdot b_{ii}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n}\lambda b_{ii} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \lambda\cdot\sum_{i=1}^{n} b_{ii} \\
&\overset{\text{Def.}}{\underset{\text{spur}}{=}} \mathrm{spur}(A) + \lambda\cdot\mathrm{spur}(B)
\end{aligned}$$

- f surjektiv:
Zu zeigen ist, daß $f(K^{n\times n}) = K$. Da $f(K^{n\times n}) \subseteq K$ immer gilt, bleibt nachzuweisen, daß $K \subseteq f(K^{n\times n})$, d.h. daß es zu jedem $\lambda \in K$ eine Matrix $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in K^{n\times n}$ gibt mit $f(A) = \mathrm{spur}(A) = \lambda$.
Solche Matrizen gibt es viele (siehe Teil (e)), und da wir nur ein Exemplar benötigen, reicht zum Beipiel $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \implies \mathrm{spur}(A) = \lambda + \underbrace{0+\ldots+0}_{(n-1)-\text{mal}} = \lambda$

Ad (b):

Dies folgt unmittelbar aus Definition und Lemma (3.2) (a):

$$U = \{A \in K^{n\times n} \mid \mathrm{spur}(A) = 0\} \overset{\text{Def.}}{\underset{f}{=}} \{A \in K^{n\times n} \mid f(A) = 0\} = \mathrm{Kern}(f)$$

und da f nach Teil (a) linear ist, folgt daraus: $U = \mathrm{Kern}(f)$ ist Untervektorraum von $K^{n\times n}$.

Ad (c):

Hier verwenden wir die Dimensionsformel für lineare Abbildungen, Vorlesung (3.22):

$$f : K^{n\times n} \to K \text{ linear} \implies \dim(K^{n\times n}) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f)) \qquad (\star)$$

Nach Teil (a) ist f surjektiv, d.h. $\mathrm{Bild}(f) = K \implies \dim(\mathrm{Bild}(f)) = \dim(K) = 1$, also

$$\dim(U) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) \underset{(\star)}{=} \dim(K^{n\times n}) - \dim(\mathrm{Bild}(f)) \overset{\text{Aufgabe}}{\underset{(33)}{=}} n^2 - 1 \qquad \text{q.e.d.}$$

Ad (d):

Wir haben eine Äquivalenz zu beweisen:

„ $\Longleftarrow$ "
Hier ist $n = 1$, d.h. $g : K^{1\times 1} \to K$, $A = (a_{ii})_{1\le i,j\le 1} = (a_{11}) \mapsto \det((a_{11})) = a_{11}$

Dann ist g linear:
$g((a_{11}) + \lambda \cdot (b_{11})) = g((a_{11} + \lambda \cdot b_{11})) \underset{\text{s.o.}}{=} a_{11} + \lambda \cdot b_{11} \overset{\text{Def.}}{\underset{g}{=}} g((a_{11})) + \lambda \cdot g((b_{11}))$.

„ $\Longrightarrow$ "
Es reicht zu zeigen, daß es für $n \ge 2$ Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ gibt, so daß

$$g(A+B) \neq g(A) + g(B) \iff \det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$$

Dazu wählen wir zum Beispiel die Einheitsmatrix $E_n \in K^{n\times n}$ und schreiben

$$E_n = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ 0 & & & \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & E_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

Dann gilt:

$$\det(E_n) = 1 \neq 0 = 0 + 0 = \det((1))\det(0) + \det((0))\det(E_{n-1})$$

$$\underset{(5.9)\,(a)}{\overset{\text{Lemma}}{=}} \det\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ 0 & & & \end{array}\right) + \det\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & E_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

Damit ist g nicht linear.

7 Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

(a) Man zeige, daß das charakteristische Polynom von A durch $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2$ gegeben ist.

(b) Man gebe alle Eigenwerte von A an und bestimme für jeden Eigenwert die algebraische und geometrische Vielfachheit.

(c) Man beantworte die Frage (mit Begründung), ob A diagonalisierbar ist.

(d) Man bestimme den Eigenraum $\mathrm{Eig}_A(0)$.

Lösung:

Ad (a):

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{pmatrix} \\
&\underset{\text{1. Spalte}}{\overset{\text{Entw. nach}}{=}} (1-\lambda)\cdot(-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+3}\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1-\lambda & 1 \end{pmatrix} \\
&\underset{\text{Laplace}}{=} (1-\lambda)\cdot\Big[(1-\lambda)(-\lambda)-2\Big] + \Big[1-(-1)\cdot(1-\lambda)\Big] \\
&= (1-\lambda)\cdot\underbrace{(\lambda^2-\lambda-2)}_{\substack{\|\ \text{Vietà} \\ (\lambda-2)(\lambda+1)}} + (2-\lambda) \\
&\underset{\text{distr.}}{=} (\lambda-2)\cdot\Big[(1-\lambda)(1+\lambda)-1\Big] \\
&= (\lambda-2)\cdot(1-\lambda^2-1) \\
&= -\lambda^2(\lambda-2) = -\lambda^3+2\lambda \qquad (\star)
\end{aligned}$$

Ad (b):

An der faktorisierten Form des charakteristischen Polynoms χ_A in $(\star)$ erkennt man, daß χ_A die Nullstellen $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ (doppelte Nullstelle) und $\lambda_3 = 2$ besitzt. Dies sind gerade die Eigenwerte von A. Damit folgt, da die algebraische Vielfachheit eines Eigenwertes λ die Vielfachheit der Nullstelle λ im charakteristischen Polynom χ_A ist:

$$\text{algebraische Vielfachheit}(\lambda_3 = 2) = 1 \underset{(6.21)}{\overset{Satz}{\geq}} \text{geometrische Vielfachheit}\,(2) = \dim\left(\mathrm{Eig}_A(2)\right) \underset{(*)}{\geq} 1\,.$$

Die Aussage $(*)$ ist wahr, da der Eigenraum zu jedem Eigenwert sicher einen von Null verschiedenen Vektor enthält, siehe Defintion (6.1). Damit ist $\mathrm{Eig}_A(\lambda) \neq \{0\} \implies \dim\left(\mathrm{Eig}_A(\lambda)\right) \geq 1$.
Also:

$$\text{algebraische Vielfachheit}(\lambda_3 = 2) = \text{geometrische Vielfachheit}\,(2) = 1\,.$$

Der Eigenwert $\lambda_1 = 0$ hat als doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms die algebraische Vielfachheit 2. Von der geometrsichen Vielfachheit wissen wir zunächst nur, daß gilt:

$$2 \geq \text{geometrische Vielfachheit}(\lambda_1) \geq 1 \quad \text{(siehe } (*))$$

Um die Dimension des Eigenraums $\mathrm{Eig}_A(\lambda_1)$ zu bestimmen, reicht es, den Rang r von $A - \lambda_1 E_3$ zu berechnen:

$$A - \lambda_1 E_3 = A - 0 \cdot E_3 = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[III-(I+II)]{I-II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\bullet)$$

In der Zeilenstufenform gibt es zwei Stufen $\Longrightarrow$ $r = 2$, also
geometrische Vielfachheit von $(\lambda_1 = 0)$ $= \dim(\mathrm{Eig}_A(0)) = n - r = 3 - 2 = 1$

Damit: $\begin{array}{lcl} \text{algebraische Vielfachheit}(\lambda_1) & = & 2 \\ \text{geometrische Vielfachheit}(\lambda_1) & = & 1 \end{array} \quad (\clubsuit)$

Ad (c):

Nach der Bemerkung zu Folgerung (6.22) ist eine notwendige Bedingung für die Diagonalisierbarkeit von A, daß für alle Eigenwerte von A die algebraische und die geometrische Vielfachheit übereinstimmen. Da dies nach $(\clubsuit)$ für den Eigenwert $\lambda_1 = 0$ nicht der Fall ist, ist A nicht diagonalisierbar.

Ad (d):

Für die Bestimmung des Eigenraumes $\mathrm{Eig}_A(0)$ können wir an die Vorarbeit in Teil (b) $/(\bullet)$ anschließen:

$A - 0 \cdot E_3 \xrightarrow{\text{siehe oben}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit $x_3 = \mu$ als freiem Parameter, d.h.

$$\left.\begin{array}{lrcl} \text{2.Gleichung:} & x_2 + x_3 = x_2 + \mu = 0 & \Longrightarrow & x_2 = -\mu \\ \text{1.Gleichung:} & x_1 - 2x_3 = x_1 - 2\mu = 0 & \Longrightarrow & x_1 = 2\mu \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\mathrm{Eig}_A(0) = \mathbb{L}_0 = \left\{ x = \begin{pmatrix} 2\mu \\ -\mu \\ \mu \end{pmatrix} \,\middle|\, \mu \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(8) Man berechne alle reellen und komplexen Eigenwerte und einen Eigenvektor der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Man zeige durch direkte Rechnung, daß der gefundene Eigenvektor die Eigenvektorbeziehung erfüllt.

Lösung:

Um die Eigenwerte von A zu bestimmen berechnen wir das charakteristische Polynom χ_A von A und bestimmen seine Nullstellen:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_2) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} \underset{\text{Laplace}}{=} (-\lambda)(2-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda-1)^2 + 1$$

Also

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (\lambda-1)^2 + 1 = 0 \underset{i^2=-1}{\Longleftrightarrow} (\lambda-1)^2 - i^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad ((\lambda-1) - i)\cdot((\lambda-1)+i) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (\lambda-1) - i = 0 \ \vee \ (\lambda-1)+i = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \lambda = 1+i \ \vee \ \lambda = 1-i \end{aligned}$$

<u>Zu den Eigenvektoren:</u>

Es mußte nur ein Eigenvektor gefunden werden; wir berechnen aber hier alle, d.h. tun mehr, als verlangt war.

$\boldsymbol{\lambda_1 = 1+i}$ **:**

$$A - \lambda_1 E_2 = \begin{pmatrix} 2-(1+i) & -1 \\ 2 & -(1+i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-i & -1 \\ 2 & -1-i \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}\cdot II]{I - \frac{1-i}{2}\cdot II} \begin{pmatrix} 0 & -1 + \frac{1}{2}\overbrace{(1+i)(1-i)}^{=1-i^2=2} \\ 1 & -\frac{1+i}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1+i}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{vertauschen}]{\text{Zeilen}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1+i}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist $x_2 = \mu \in \mathbb{C}$ freier Parameter, und man erhält aus der 1. Gleichung:

$$x_1 - \tfrac{1+i}{2}\mu = 0 \implies x_1 = \tfrac{1+i}{2}\cdot\mu \implies \mathrm{Eig}_A(1+i) = \mathbb{L}_0 = \left\{ x = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2}\cdot\mu \\ \mu \end{pmatrix} \,\middle|\, \mu \in \mathbb{C} \right\} = \mathbb{C}\cdot\begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenvektorbeziehung ist für $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix} \neq 0$ erfüllt:

$$A\cdot\xi_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2i-2 \\ 2(1+i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{2i}^{=(1+i)^2} \\ 2(1+i) \end{pmatrix} = (1+i)\cdot\begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix} = (1+i)\cdot\xi_1$$

$\boldsymbol{\lambda_2 = 1-i}$ **:**

$$A - \lambda_2 E_2 = \begin{pmatrix} 2-(1-i) & -1 \\ 2 & -(1-i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i+1 & -1 \\ 2 & i-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}\cdot II]{I - \frac{i+1}{2}\cdot II} \begin{pmatrix} 0 & -1 - \frac{1}{2}\overbrace{(i+1)(i-1)}^{=i^2-1=-2} \\ 1 & \frac{i-1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \frac{i-1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{vertauschen}]{\text{Zeilen}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{i-1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist wieder $x_2 = \mu \in \mathbb{C}$ freier Parameter, und man erhält aus der 1. Gleichung:

$x_1 + \frac{i-1}{2}\mu = 0 \implies x_1 = \frac{1-i}{2} \cdot \mu \implies \mathrm{Eig}_A(1-i) = \mathbb{L}_0 = \left\{ x = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{2} \cdot \mu \\ \mu \end{pmatrix} \;\middle|\; \mu \in \mathbb{C} \right\} = \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \end{pmatrix}$.

Die Eigenvektorbeziehung ist für $\xi_2 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \end{pmatrix} \neq 0$ erfüllt:

$$A \cdot \xi_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2i-2 \\ 2(1-i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{-2i}^{=(1-i)^2} \\ 2(1-i) \end{pmatrix} = (1-i) \cdot \begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \end{pmatrix} = (1-i) \cdot \xi_2$$