1 Zahlen

Die (aus der Schule) vertrauten Zahlensysteme

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

der natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen betrachten wir als gegeben. Sie sind "ineinander eingebettet" und gehen durch sukzessive Erweiterungen auseinander hervor, die jeweils gewisse "Defizite" beheben. Wir werden nicht (oder höchstens andeutungsweise) auf ihre Konstruktion eingehen, die aus folgenden Schritten besteht:

- Definition der natürlichen Zahlen auf Basis der Mengenlehre
- Erweiterung der natürlichen zu den ganzen Zahlen, um sie bzgl Subtraktion abzuschließen
- Erweiterung der ganzen zu den rationalen Zahlen, um sie bzgl Division abzuschließen
- Erweiterung der rationalen zu den reellen Zahlen, um sie zu vervollständigen, also bzgl Grenzwertbildung abzuschließen, dh die "Lücken" zu füllen (wird später präzisiert)

Dabei sind die Schritte $\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ algebraische Prozesse und der Schritt $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ geometrisch.

Wir beschränken uns darauf, die diese Zahlensysteme charakterisierenden Eigenschaften (Axiome) zu besprechen, auf denen wir dann im weiteren aufbauen werden. Allerdings verweisen wir auch für die Eigenschaften *algebraischer* Natur, also die

- Eigenschaften der Addition und Multiplikation, dh die von diesen Verknüpfungen erfüllten grundlegenden Rechengesetze (Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetze) sowie die Existenz von neutralen und ggf inversen Elementen, kurz gesagt, die Tatsache, daß $\mathbb{Z}$ ein *Ring* (und $\mathbb{N}$ ein Halbring) ist, und daß $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ *Körper* sind

auf die Vorlesung Lineare Algebra, wo grundlegende algebraische Strukturen behandelt werden. Wir konzentrieren uns hier in der Analysis auf die Eigenschaften *geometrischer* Natur, also:

- Anordnung und Vollständigkeit

Auf die Erweiterung

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

der reellen zu den *komplexen* Zahlen werden wir genauer eingehen. Sie behebt wiederum ein „Defizit“ algebraischer Natur, indem sie bewirkt, daß quadratische und allgemeiner polynomielle Gleichungen beliebigen Grades ohne Einschränkung lösbar werden (vgl „Fundamentalsatz der Algebra“).

1.1 Einige Grundbegriffe

1.1.1 Mengen

Unter einer *Menge* verstehen wir eine *Gesamtheit mathematischer Objekte*, ohne spezifizierte Anordnung, die wir selbst als eigenständiges mathematisches Objekt auffassen. (Cantor: ein "Vieles, welches sich als Eines denken läßt" bzw eine "Zusammenfassung wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen"). Wir nehmen einen "intuitiven" Standpunkt ein und hinterfragen oder präzisieren den Mengenbegriff nicht weiter.

Typischerweise erhält man Mengen, indem man Objekte mit einer bestimmten Eigenschaft zusammenfaßt (Komprehension), also durch Bildungen der Art

$$\{x \mid x \text{ hat Eigenschaft } E\}$$

Da die Elemente von Mengen wiederum selbst Mengen sein können (zB die Geraden in einer Ebene), entstehen bei mehrstufigen Konstruktionen schnell sehr komplexe Gebilde. Daß Selbstbezüge zu Widersprüchen führen können und daher Vorsicht geboten ist, dh man die zur Bildung von Mengen erlaubten Operationen einschränken muß, wurde spätestens durch die *Russellsche Antinomie* (1901) klar, welche die Eigenschaft von Mengen betrachtet, sich nicht selbst als Element zu enthalten, und die Menge

$$M_{Russell} := \{x \mid x \text{ ist Menge und } x \notin x\}$$

bildet. Dabei entsteht der Widerspruch

$$M_{Russell} \in M_{Russell} \Leftrightarrow M_{Russell} \notin M_{Russell},$$

anschaulich formuliert zB als das Paradoxon vom Barbier als demjenigen, der genau die Leute rasiert, die sich nicht selbst rasieren, die Frage aufwerfend, ob er sich selbst rasiert. Die Entdeckung der Russellschen Antinomie markiert das Ende der "naiven" Mengenlehre und leitete ihre Axiomatisierung ein (Zermelo, Fraenkel, Skolem), auf die wir hier nicht näher eingehen können, vgl zB [Z, Kap. 13].

Um Selbstbezüge zu vermeiden, achtet man darauf, daß die möglichen Konstruktionen im Rahmen eines gewissen "Universums" stattfinden. So erlaubt man, die Komprehension einschränkend, nur, daß Mengen durch *Aussonderung* gebildet werden, dh als *Teilmengen bereits gegebener Mengen*, bestehend aus den Elementen, die eine bestimmte *Eigenschaft* besitzen:

$$\{x \in M \mid x \text{ hat Eigenschaft } E\}$$

Das Russellsche Paradoxon wird dadurch aufgelöst, daß man bei "Gesamtheiten von Objekten" zwischen Mengen und *Klassen* unterscheidet, letztere aufzufassen als "zu große Mengen", sozusagen "Unmengen", und insbesondere $M_{Russell}$ keine Menge, sondern eine Klasse ist.

1.1.2 Abbildungen

Eine *Abbildung* $f : X \to Y$ von einer Menge X in eine Menge Y ordnet jedem Element $x \in X$ ein Element $f(x) \in Y$ zu. Wenn Ausgangs- und Zielmenge klar sind, werden wir die Abbildung auch einfach als Zuordnung $x \mapsto f(x)$ notieren. Man nennt die Teilmenge

$$f(X) := \{f(x) \,|\, x \in X\} \subset Y$$

das *Bild* der Abbildung f. Der *Graph* der Abbildung f ist definiert als die Teilmenge

$$\mathrm{Graph}(f) := \{(x, f(x) \in X \times Y \,|\, x \in X\}$$

der *Produktmenge*

$$X \times Y := \{(x, y) \,|\, x \in X, y \in Y\}.$$

Der Graph enthält die gesamte Information über die Abbildung, dh letztere läßt sich aus ersterem rekonstruieren. Der Abbildungsbegriff läßt sich so auf den Mengenbegriff zurückführen.

Wir reservieren den Begriff *Funktion* für Abbildungen, deren *Werte* (reelle oder komplexe) *Zahlen* sind.

Die *Hintereinanderausführung* alias *Komposition* alias *Verkettung* zweier Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ ist die Abbildung

$$g \circ f : X \to Z, \quad x \mapsto g(f(x)).$$

Definition. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt

(i) *injektiv*, falls sie verschiedene Elemente von X auf verschiedene Element von Y abbildet.

(ii) *surjektiv*, falls jedes Element in der Zielmenge getroffen wird, $f(X) = Y$.

(iii) *bijektiv* oder *eineindeutig*, falls sie injektiv und surjektiv ist.

Bei injektiven Abbildungen spricht man auch gerne von *Einbettungen*.

Eine bijektive Abbildung ist umkehrbar und wir bezeichnen ihre *Umkehrung* mit $f^{-1} : Y \to X$; es gilt also $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$, wobei $\mathrm{id}_X : X \to X$ die *Identität* bezeichnet.

Die Komposition injektiver/surjektiver/bijektiver Abbildungen ist wieder eine solche. **Ü**

Definition. Eine *Permutation* einer Menge X ist eine bijektive Selbstabbildung $X \to X$.

Die Permutationen von X bilden zusammen mit der Komposition als Verknüpfung eine *Gruppe* ($\to$ LinAlg). Man betrachtet oft Permutationen endlicher Mengen. Die Permutationen der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ bilden die (interessante und wichtige) *symmetrische Gruppe* S_n.

Ü Signum einer Permutation und seine Multiplikativität.

1.1.3 Relationen

Der Begriff der *Relation* verallgemeinert den Begriff der Abbildung. Für uns wird der Spezialfall *homogener zweistelliger* Relationen ausreichen (der Selbstabbildungen verallgemeinert):

Definition. Eine *Relation* R auf einer Menge M ist eine Teilmenge $R \subset M \times M$. Man sagt, daß die Relation R zwischen zwei Elementen $x, y \in M$ *besteht*, notiert xRy, falls $(x, y) \in R$.

Zur Bezeichnung von Relationen verwendet man statt R oft Symbole wie "$\sim$" oder "$\prec$".

Eine Relation $R \subset M \times M$ auf einer Menge M induziert auf jeder Teilmenge $T \subset M$ eine Relation durch Einschränkung, nämlich die Relation $R \cap (T \times T)$ auf T. Man behält also genau die Relationen zwischen den Elementen der Teilmenge.

Besonders wichtig sind *Ordnungs-* und *Äquivalenzrelationen*.

Definition. Eine Relation "$\sim$" auf einer Menge M heißt eine *Äquivalenzrelationen*, falls sie folgende Eigenschaften besitzt:

(i) *reflexiv*: $x \sim x$ für alle $x \in M$

(ii) *symmetrisch*: $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ für alle $x, y \in M$

(iii) *transitiv*: $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$ für alle $x, y, z \in M$

Man nennt

$$[x] := \{y \in M \mid x \sim y\} \subset M$$

die von x repräsentierte *Äquivalenzklasse* in M bzgl "$\sim$".

Behauptung. *Für beliebige $x, y \in M$ gilt die Dichotomie*

$$\begin{cases} [x] = [y] \text{ , falls } x \sim y \\ [x] \cap [y] = \varnothing \text{ sonst} \end{cases}$$

Beweis: Falls $[x] \cap [y] = \varnothing$, so $x \not\sim y$.

Falls andererseits $[x] \cap [y] \neq \varnothing$, so gibt es $z \in M$ mit $z \in [x] \cap [y]$. Dies bedeutet, daß $x \sim z$ und $y \sim z$, und mit (ii+iii) folgt $x \sim y$. Also $[x] \cap [y] = \varnothing \Leftrightarrow x \not\sim y$.

Nehmen wir nun an, daß $x \sim y$. Dann gilt für $u \in [x]$, daß $x \sim u$ und damit (wieder wegen (ii+iii)) auch $y \sim u$. Dies zeigt, daß $[x] \subseteq [y]$. Analog gilt $[y] \subseteq [x]$. Also $[x] = [y]$.

Dies zeigt die Dichotomie. $\square$

Die Äquivalenzklassen bilden also eine *Zerlegung* der Menge M in *disjunkte* Teilmengen.

Beispiel. (o) Gleichheit "$=$"; die Äquivalenzklassen bestehen dann aus einzelnen Elementen.

(i) Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Relation "$\sim$" auf $\mathbb{Z}$ definiert durch

$$a \sim b \quad \Leftrightarrow \quad n \mid a - b \quad (\text{dh } n \textit{ teilt } a - b)$$

eine Äquivalenzrelation und die Äquivalenzklassen sind die *Restklassen modulo n* ($\rightarrow$ Algebra).

Ordnungsrelationen und von ihnen abgeleitete Begriffe (Maximum, Supremum) besprechen wir ausführlicher. Wir werden sie später hauptsächlich im Fall der reellen Zahlen benutzen.

Definition. Eine Relation "$\prec$" auf einer Menge M heißt eine *partielle Ordnung* oder *Halbordnung*, falls:

(i) Für alle $x, y \in M$ schließen die drei Aussagen $x \prec y$, $x = y$ und $x \succ y$ einander aus. (Es gilt also *höchstens* eine von ihnen.)

(ii) *Transitivität*: $x \prec y \wedge y \prec z \Rightarrow x \prec z$ für alle $x, y, z \in M$.

Gilt in (i) außerdem, daß für alle $x, y \in M$ eine (also *genau* eine) der Aussagen $x \prec y$, $x = y$ oder $x \succ y$ zutrifft, so heißt "$\prec$" eine *Totalordnung*.

Die Aussagen $x \prec y$ fassen wir als *Ungleichungen* in M auf. Man definiert weiter die "schwachen" Ungleichungen

$$x \preceq y :\Leftrightarrow x \prec y \vee x = y.$$

Wir nennen "$\preceq$" die zu "$\prec$" gehörige *schwache Ordnungsrelation*.

Beispiel. (o) Auf jeder Menge M ist die *leere* Relation $\emptyset \subset M \times M$ eine partielle Ordnung.

(i) Die *größer*-Relation "$>$" auf $\mathbb{R}$ ist eine Totalordnung.

(ii) Sei M eine Menge. Wir betrachten die *Inklusions*-Relation "$\subset$" auf der Menge $P(M)$ aller Teilmengen von M (genannt die *Potenzmenge* von M): Die Relation "$\subset$ und $\neq$" ist eine partielle Ordnung, und "$\subset$" selbst ist die zugehörige schwache Ordnungsrelation. Falls M mindestens zwei Elemente besitzt, ist die partielle Ordnung *keine* Totalordnung.

(iii) Die *Teilbarkeitsrelation* "$\,|\,$" auf $\mathbb{N}$: Die Relation "$|$ und $\neq$" ist eine partielle Ordnung und "$|$ die zugehörige schwache Ordnungsrelation. (Verwandt mit (ii) wegen Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung!)

In einer partiell geordneten Menge $(M, \prec)$ definiert man *Intervalle* als Abschnitte:

Definition. Für $a, b \in M$ definieren wir folgende Teilmengen von M:

(i) das *offene Intervall* $(a, b) := \{x \in M \mid a \prec x \prec b\}$

(ii) das *abgeschlossene* Intervall $[a, b] := \{x \in M \mid a \preceq x \preceq b\}$

(iii) die *halboffenen* Intervalle $[a, b) := \{x \in M \mid a \preceq x \prec b\}$ und $(a, b] := \{x \in M \mid a \preceq x \preceq b\}$

Definition. Ein Element x einer partiell geordneten Menge $(M, \prec)$ heißt *kleinstes* Element oder *Minimum* von M, falls es kein kleineres Element gibt, dh $y \not\prec x \; \forall y \in M$. Bez: $\min M$.

Analog definiert man größte Elemente (Maxima).

Partiell geordnete Mengen besitzen i.a. keine kleinsten und größten Elemente (zB $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{R}$), und falls doch, so sind diese i.a. nicht eindeutig (zB bei der leeren Relation). **Ü?**

Ist $(M, \prec)$ totalgeordnet, so gilt für ein kleinstes Element X von M, daß $x \preceq y \; \forall y \in M$. Insbesondere sind Minima und Maxima totalgeordneter Mengen eindeutig (falls sie existieren).

Definition. Eine totalgeordnete Menge heißt *wohlgeordnet*, falls jede nichtleere Teilmenge ein kleinstes Element besitzt.

Beispiel. (i) $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_0$ (versehen mit ihrer natürlichen Ordnung "$<$") sind wohlgeordnet, ebenso $\{z \in \mathbb{Z} \mid z \geqslant z_0\}$ für $z_0 \in \mathbb{Z}$, jedoch nicht $\mathbb{Z}$ selbst. (Vgl Kap 1.2.2.)

(ii) $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind nicht wohlgeordnet.

Bemerkung. In einer wohlgeordneten Menge gibt es in kleinstes Element und jedes nichtmaximale Element besitzt einen *Nachfolger* (nämlich das kleinste der größeren Elemente).

Wohlordnungen werden in der Mengenlehre i.Zush. mit Ordinalzahlen und transfiniter Induktion betrachtet (vgl Kap 1.2.2).

Da Teilmengen partiell geordneter Mengen i.a. keine größten und kleinsten Elemente besitzen oder diese nicht immer bestimmt werden können, sind Schranken bzw Abschätzungen für die Elemente solcher Teilmengen von Interesse.

Definition. Sei $(M, \prec)$ partiell geordnet und $T \subset M$. Ein Element $s \in M$ heißt *obere (bzw untere) Schranke* für T in M, falls $x \preceq s$ (bzw $x \succeq s$) für alle $x \in T$. Existiert eine solche Schranke, so heißt T *nach oben (bzw unten) beschränkt*. Trifft beides zu, so heißt T *beschränkt*.

Eine Teilmenge von $\mathbb{Z}$ ist genau dann wohlgeordnet, wenn sie nach unten beschränkt ist.

Von besonderem Interesse sind *optimale Schranken* für Teilmengen bzw deren Elemente.

Definition. Sei $(M, \prec)$ partiell geordnet und $T \subset M$. Eine kleinste obere (bzw größte untere) Schranke für T heißt *Supremum* (bzw *Infimum*) von T in M. Bezeichnung: $\sup T, \inf T \in M$.

Ein Supremum ist also ein Minimum der Teilmenge aller oberen Schranken.

Insbesondere ist ein Supremum (Infimum) der *leeren* Teilmenge $\emptyset \subset M$ ein Minimum (Maximum) der Gesamtmenge M.

Suprema und Infima von Teilmengen partiell geordneter Mengen existieren i.a. nicht. Falls sie existieren, sind sie i.a. nicht eindeutig und nicht in den Teilmengen enthalten.[1]

Wir werden Suprema und Infima nur für Teilmengen totalgeordneten Mengen (hauptsächlich von $\mathbb{R}$) betrachten. In diesem Fall haben sie einfachere Eigenschaften: Sie sind notwendigerweise eindeutig (falls sie existieren). Maxima sind Suprema, und umgekehrt ist ein Supremum ein Maximum, falls es zur Teilmenge gehört.

Man verwendet oft die folgende Beobachtung:

Lemma 1.1. *Es seien $(M, \prec)$ eine totalgeordnete Menge und $A, B \subset M$ Teilmengen, so daß $A \preceq B$ im Sinne, daß $a \preceq b \, \forall a \in A, b \in B$. Dann gilt* $\sup A \preceq \inf B$*, falls beide existieren.*

Beweis: Jedes $b \in B$ ist eine obere Schranke für A. Existiert $\sup A$, so gilt also $\sup A \preceq b$ für alle $b \in B$, dh $\sup A$ ist eine untere Schranke für B. Existiert auch $\inf B$, so folgt $\sup A \preceq \inf B$. $\square$

Beispiel. Wir erwähnen trotzdem zwei interessante Beispiele für den Supremums- und Infimumsbegriff in *partiell* geordneten Mengen.

(i) Die Inklusions-Relation auf der Potenzmenge einer Menge M: Das Supremum zweier Teilmengen $A, B \subset M$ ist ihre Vereinigung $A \cup B$ und ihr Infimum das Durchschnitt $A \cap B$.

(ii) Die Teilbarkeitsrelation auf $\mathbb{N}$: Das Infimum zweier natürlicher Zahlen ist ihr *größter*

[1]Weiterhin sind i.a. weder Suprema Maxima, noch umgekehrt. Existiert jedoch ein Supremum und liegt es in der Teilmenge, so ist es das eindeutige Supremum und zugleich Maximum der Teilmenge.

gemeinsamer Teiler (ggT) und das Supremum ihr *kleinstes gemeinsames Vielfaches* (kgV).

In beiden Fällen existieren Suprema und Infima stets und sind eindeutig.

1.2 Die natürlichen Zahlen

1.2.1 Zählen und Rechnen

Die *natürlichen* Zahlen bilden die Menge

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

und die um die Null erweiterten natürlichen Zahlen die Menge

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Die natürlichen Zahlen entstanden zuallererst zum *Zählen*, dh als abstrakte *Anzahlen*. Das Zählen besteht aus einer Abfolge von Zählschritten, bei denen man jeweils von der bereits erreichten Zahl zur nächsten übergeht, ihrem *Nachfolger*. Aus dieser Sicht des Zählens werden die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ von den *Peano-Axiomen* für die Nachfolgerabbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *mengentheoretisch* (dh im Rahmen der Mengenlehre) charakterisiert, nämlich durch die Eigenschaften:[2]

- Jede natürliche Zahl außer der 1 ist der Nachfolger einer eindeutigen natürlichen Zahl.
- *Prinzip der mathematischen Induktion*: Enthält eine Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ die Zahl 1 und mit jeder Zahl auch deren Nachfolger, so $M = \mathbb{N}$.

Alleine aus dieser mengentheoretisch formulierten Nachfolgerstruktur („Zählen“) läßt sich dann die gesamte *Arithmetik* der natürlichen Zahlen ableiten, dh Addition und Subtraktion konstruieren und die für sie gültigen grundlegenden Rechengesetze beweisen („Rechnen“). Diese Reduktion der Arithmetik auf die Mengenlehre werden wir hier nicht ausführen.

1.2.2 Vollständige Induktion

Das Prinzip der mathematischen Induktion präzisiert die Vorstellung, daß man den „diskreten Zahlenstrahl“, also die natürliche Zahlenreihe, beim (bei 1 beginnenden und nicht endenden) Zählen vollständig durchschreitet, wobei man genau einmal durch jede natürliche Zahl kommt. Es ist von fundamentaler Bedeutung, weil es “das Unendliche greifbar macht”, indem es das sukzessive Durchlaufen der natürlichen Zahlen, den unendlichen Zählvorgang, sozusagen zu einem Schritt macht.

Auf dem Prinzip der mathematischen Induktion basiert die Beweismethode durch *vollständige Induktion*. Sie liefert ein Schema, um eine unendliche Familie von Aussagen in endlich vielen

[2] Also als Menge $\mathbb{N}$ mit einem ausgezeichnetem Element $1 \in \mathbb{N}$ und einer Selbstabbildung $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die injektiv ist und deren Bild 1 nicht enthält, so daß das Prinzip der mathematischen Induktion erfüllt ist [Z, §1.2].

Schritten zu beweisen, sozusagen “mit einem Streich”: Gegeben sei eine unendliche Folge von Aussagen, zB durchnummeriert (indiziert) mit den natürlichen Zahlen, also für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage $A(n)$. Dann kann man alle Aussagen $A(n)$ beweisen, indem man zeigt:

- *Induktionsanfang*: $A(1)$ ist wahr.
- *Induktionsschritt*: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.
  Man nennt hier $A(n)$ die *Induktionsannahme*.

Daraus folgt, daß $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, indem man das Prinzip der mathematischen Induktion auf die Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ aller natürlichen Zahlen n anwendet, für die $A(n)$ gilt.

Dieses Induktionsschema kann man natürlich variieren, zB indem man die Induktion nicht bei $n = 1$ beginnen läßt, sondern bei einer anderen natürlichen oder ganzen Zahl.

Beispiel. (i) Die Summe $\sum_{i=1}^n i := 1+2+\ldots+n$ der natürlichen Zahlen $1, 2, \ldots, n$ ist gegeben durch

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1.2}$$

Beweis von (1.2) mit vollständiger Induktion nach n:

IA: (1.2) gilt für $n = 1$, denn $1 = \frac{1\cdot 2}{2}$.

IS: (1.2) gelte für *ein* $n \in \mathbb{N}$. Dann

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \Big(\sum_{i=1}^n i\Big) + (n+1) \overset{\text{IAnn}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

dh (1.2) gilt auch für $n+1$.

Mit vollständiger Induktion folgt (1.2) für *alle* $n \in \mathbb{N}$. □

Bemerkung: Alternativ kann man (1.2) aus der Rechnung

$$n^2 = \sum_{i=1}^n \underbrace{(i^2 - (i-1)^2)}_{2i-1} = 2\Big(\sum_{i=1}^n i\Big) - n$$

folgern, in der im ersten Schritt eine (sehr einfache) Induktion versteckt ist. Dieser Ansatz ist nützlich, um analoge Formeln für die Summen $\sum_{i=1}^n i^k$ der k-ten Potenzen, $k \in \mathbb{N}$, zu finden.

Außerdem besitzt (1.2) ein geometrische Interpretation durch Flächen, die man auch zu einem einfachen Beweis nutzen kann.

Ü Betrachte die Summen $\sum_{i=1}^n (i^3 - (i-1)^3)$ und $\sum_{i=1}^n (i^4 - (i-1)^4)$ und stelle $\sum_{i=1}^n i^2$ und $\sum_{i=1}^n i^3$ als Polynome in n dar.

(ii) Wir betrachten für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ die endliche *geometrische Reihe* $\sum_{i=0}^n a^i := 1 + a + \ldots + a^n$. Es gilt für $a \neq 1$ die Summenformel:

$$\sum_{i=0}^n a^i = \frac{1 - a^{n+1}}{1-a} \tag{1.3}$$

Beweis von (1.3) mit vollständiger Induktion nach n:

IA: (1.3) gilt für $n = 0$, denn $1 = \frac{1-a}{1-a}$.

IS: (1.3) gelte für *ein* $n \in \mathbb{N}_0$. Dann

$$\sum_{i=0}^{n+1} a^i = \Big(\sum_{i=0}^{n} a^i\Big) + a^{n+1} \overset{\text{IAnn}}{=} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + a^{n+1} = \frac{1-a^{n+2}}{1-a},$$

dh (1.3) gilt auch für $n + 1$.

Mit vollständiger Induktion folgt (1.3) für *alle* $n \in \mathbb{N}_0$. $\square$

Bemerkung: Etwas direkter kann man (1.3) ableiten aus der Rechnung:

$$\Big(\sum_{i=0}^{n} a^i\Big) \cdot (1-a) = (1-a) + (a-a^2) + \ldots + (a^n - a^{n+1}) = 1 - a^{n+1}.$$

(iii) Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 5$ gilt die Ungleichung $2^n > n^2$.

Beweis mit vollständiger Induktion nach n:

IA: Die Ungleichung gilt für $n = 5$, denn $2^5 > 5^2$.

IS: Die Ungleichung gelte für *ein* $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 5$. Dann

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \overset{\text{IAnn}}{>} 2n^2 = (n+1)^2 + \underbrace{\underbrace{(n-1)^2}_{\geqslant 4^2} - 2}_{>0} > (n+1)^2,$$

dh die Behauptung gilt auch für $n + 1$.

Mit vollständiger Induktion folgt die Ungleichung für *alle* $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 5$. $\square$

Bemerkung: Die Ungleichung gilt auch für $n = 1$, der Induktionsschritt aber erst ab $n \geqslant 3$.

Oft möchte man beim Induktionsschritt nicht nur auf die letzte, sondern auf alle früheren Aussagen zurückgreifen. Eine weitere Variation des Induktionsschemas in diesem Sinne ist: Man kann eine Folge von Aussagen $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ beweisen, indem man zeigt:

- IA: $A(1)$ ist erfüllt.
- IS: Für alle $1 < n \in \mathbb{N}$ gilt: Ist $A(m)$ für alle $m < n$ erfüllt, so auch $A(n)$.

Diese Version des Induktionsschemas leitet man aus dem Prinzip der mathematischen Induktion ab, indem man es auf die Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ aller natürlichen Zahlen n anwendet, für welche die Aussagen $A(m)$ für alle $m \leqslant n$ gelten.

Beispiel. Behauptung: Jede natürliche Zahl $n \geqslant 2$ ist in Primfaktoren zerlegbar, dh als Produkt von Primzahlen darstellbar.

Beweis mit vollständiger Induktion nach n:

IA: Die Behauptung gilt für $n = 2$, denn 2 ist prim.

IS: Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 3$ gelte, daß alle $m \in \mathbb{N}$ mit $2 \leqslant m < n$ in Primfaktoren zerlegbar seien. Ist n prim, so gilt die Behauptung auch für n. Ist n nicht prim, so gibt es eine Zerlegung $n = mm'$ mit Faktoren $1 < m, m' < n$. Nach Induktionsannahme sind m und m' in Primfaktoren zerlegbar, also auch n, dh die Behauptung gilt auch für n.

Mit vollständiger Induktion folgt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$. □

Ebenso grundlegend wie der Beweis mit vollständiger Induktion ist die *Definition* bzw *Konstruktion* mit vollständiger Induktion, oft *rekursive* Definition genannt. Hier definiert man eine unendliche Folge mathematischer Objekte O_n für $n \in \mathbb{N}$ *sukzessive*, indem man

- das Anfangsobjekt O_1 definiert, und
- eine Vorschrift festlegt, wie das Objekt O_n für $n > 1$ durch die bereits konstruierten Objekte O_m für $m < n$ bestimmt wird.

Induktion liefert dann die gesamte Folge der O_n für alle $n \in \mathbb{N}$ "auf einen Streich".[3]

Beispiel. (i) Ist $a_1, a_2, \ldots$ eine Folge reeller Zahlen, so ist die Folge ihrer Partialsummen $s_n = a_1 + \ldots + a_n$ für $n \in \mathbb{N}$, streng genommen, rekursiv definiert durch

$$s_1 := a_1 \qquad \text{und} \qquad s_{n+1} := s_n + a_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

[3] vgl Dedekindscher Rekursionssatz [Z, Kap 1.2.2]. *Ergänzung*: Ein wesentlicher Fall der rekursiven Definition, auf den man den allgemeinen zurückführen kann, ist, wenn das jeweils nächste zu definierende Objekt alleine vom zuletzt definierten Objekt bestimmt wird. Sind die zu definierenden Objekte Elemente einer Menge X und entspricht die Rekursionsvorschrift einer Selbstabbildung $f : X \to X$, so können wir die zu definierende Familie von Objekten als Abbildung $\phi : \mathbb{N} \to X, n \mapsto x_n$ auffassen, welche die Rekursionsgleichung

$$\phi(n+1) = f(\phi(n)) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{1.4}$$

erfüllt, und es gilt:[4]

Dedekindscher Rekursionssatz. Für jedes $p \in X$ existiert eine eindeutige Abbildung $\phi : \mathbb{N} \to X$ mit $\phi(1) = p$ und (1.4).

Beweis: Wir konstruieren die Abbildung ϕ, indem wir ihren Graphen

$$\{(n, \phi(n)) : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N} \times X$$

konstruieren. Dieser muß eine Teilmenge von $\mathbb{N} \times X$ sein, die $(1, p)$ enthält und wegen (1.4) mit jedem Element (n, x) auch $(n + 1, f(x))$. Solche Teilmengen existieren, denn $\mathbb{N} \times X$ ist eine. Der Durchschnitt $G \subset \mathbb{N} \times X$ aller solcher Teilmengen ist dann eine (die) minimale Teilmenge mit dieser Eigenschaft. Wir behaupten, daß G der Graph einer Abbildung $\phi : \mathbb{N} \to X$ ist, dh daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein eindeutiges $x_n \in X$ existiert mit $(n, x_n) \in G$. Diese Behauptung zeigen wir mit vollständiger Induktion nach n:

IA: Enthielte G neben $(1, p)$ ein weiteres Element $(1, x_1)$ mit $x_1 \neq p$, so könnten wir G durch Weglassen von $(1, x_1)$ verkleinern, Widerspruch. Also gilt die Beh für $n = 1$ mit $x_1 = p$.

IS: Die Behauptung gelte für $n \in \mathbb{N}$. Enthielte G neben $(n + 1, f(x_n))$ ein weiteres Element $(n + 1, x_{n+1})$ mit $x_{n+1} \neq f(x_n)$, so könnten wir wiederum G durch Weglassen von $(n + 1, x_{n+1})$ verkleinern, Widerspruch. Also gilt die Behauptung auch für $n + 1$, nämlich mit $x_{n+1} = f(x_n)$.

Es folgt mit vollständiger Induktion, daß G der Graph der Abbildung $\phi : \mathbb{N} \to X, n \mapsto x_n$ ist. Diese hat nach Konstruktion die gewünschten Eigenschaften. □

Bemerkung: Eine Folgerung ist Dedekinds *Isomorphiesatz* über die Eindeutigkeit der natürlichen Zahlen.

und ebenso die Folge ihrer Partialprodukte $p_n = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$ durch

$$p_1 := a_1 \qquad \text{und} \qquad p_{n+1} := p_n \cdot a_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

ZB erhält man die *Potenzen* a^n einer Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit natürlichen Exponenten $n \in \mathbb{N}_0$ rekursiv durch

$$a^0 := 1 \qquad \text{und} \qquad a^{n+1} := a^n \cdot a \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

und die *Fakultäten* $n! = 1 \cdot \ldots \cdot n$ der natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$ durch

$$0! := 1 \qquad \text{und} \qquad (n+1)! := n! \cdot (n+1) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

(ii) Ist X eine Menge und $f : X \to X$ eine Selbstabbildung von X, so können wir zu $p \in X$ eine Folge von Elementen $x_1, x_2, \ldots \in X$ rekursiv definieren, indem wir ausgehend vom Startwert p die Abbildung f *iterieren*:

$$x_1 := p \qquad \text{und} \qquad x_{n+1} := f(x_n) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

(iii) Die Folge der *Fibonacci-Zahlen* $F_0, F_1, \ldots$ ist rekursiv definiert durch

$$F_0 := 0, \quad F_1 := 1 \qquad \text{und} \qquad F_n := F_{n-2} + F_{n-1} \quad \forall\, 2 \leqslant n \in \mathbb{N}.$$

Bemerkung. Vollständige Induktion, als Beweis- und Konstruktionsmethode, ist das grundlegende (da einzig verfügbare) Hilfsmittel zur Ableitung der Arithmetik der natürlichen Zahlen aus ihrer Nachfolgerstruktur, dh der Konstruktion von Addition und Multiplikation und dem Nachweis der Rechengesetze auf Basis der Mengenlehre. ZB definiert man die Addition rekursiv durch $n + 2 := (n + 1) + 1$, $n + 3 := (n + 2) + 1$ etc und, auf der Addition aufbauend, die Multiplikation durch $n \cdot 2 := n + n$, $n \cdot 3 := n \cdot 2 + n$ etc. Die Rechengesetze werden dann mit vollständiger Induktion bewiesen.

Unmittelbar aus der Nachfolgerstruktur ergibt sich auch die *Anordnung*

$$(0 <) 1 < 2 < 3 < \ldots$$

der (erweiterten) natürlichen Zahlen "der Größe nach"; für zwei Zahlen $n, n' \in \mathbb{N}_0$ gilt $n < n'$ genau dann, wenn man von n in endlich vielen Zählschritten zu n' gelangt.

Der Anordnung von $\mathbb{N}_0$ durch die Relation "$<$" bzw "$>$" entspricht die *geometrische* Vorstellung von $\mathbb{N}_0$ als *diskretem Zahlenstrahl*; "diskret" ist hier zu verstehen im Gegensatz zu "kontinuierlich", daß also der diskrete Zahlenstrahl aus einer Abfolge einzelner isolierter, voneinander getrennter Punkte (repräsentiert durch die natürlichen Zahlen) besteht.

Die Anordnung der natürlichen Zahlen besitzt eine besondere Eigenschaft:

Satz. $(\mathbb{N}, <)$ *ist wohlgeordnet, dh jede nichtleere Teilmenge von* $\mathbb{N}$ *enthält ein kleinstes Element.*

Beweis: Wir nehmen an, die Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ enthalte kein kleinstes Element. Wir müssen zeigen, daß sie leer ist.

Wir betrachten die Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen n, für die $\{1, \ldots, n\} \cap A = \emptyset$. Es gilt $1 \in M$, da sonst 1 in A enthalten und folglich das kleinste Element wäre. Falls $n \in M$, so gilt wiederum $n + 1 \in M$, da sonst $n + 1$ in A enthalten und das kleinste Element wäre. Das Prinzip der mathematischen Induktion impliziert nun, daß $M = \mathbb{N}$. Es folgt, daß $A = \emptyset$. □

Für die ganzen Zahlen nimmt dieses Resultat die Form an:

Folgerung. *Jede nach unten (oben) beschränkte nichtleere Teilmenge von $\mathbb{Z}$ enthält ein kleinstes (größtes) Element.*

Beweis: Sei $A \subset \mathbb{Z}$ nichtleer und nach unten beschränkt, dh es existiert $s \in \mathbb{Z}$, so daß $s < a$ für alle $a \in A$. Wir führen die Behauptung auf die Wohlordnung der natürlichen Zahlen zurück, indem wir A in $\mathbb{N}$ hinein verschieben, dh wir betrachten die Teilmenge

$$A - s := \{a - s \,|\, a \in A\} \subset \mathbb{N}.$$

Sie enthält ein kleinstes Element $a_0 - s$, und entsprechend ist a_0 das kleinste Element von A.

Ist $A \subset \mathbb{Z}$ nichtleer und nach oben beschränkt, so führen wir die Behauptung auf den eben bewiesenen Fall zurück, indem wir A spiegeln, dh die Teilmenge

$$-A := \{-a \,|\, a \in A\} \subset \mathbb{Z}$$

betrachten. Sie ist nach unten beschränkt und enthält daher ein kleinstes Element $-a_1$. Entsprechen ist a_1 das größte Element von A. □

Das Prinzip der mathematischen Induktion ist *äquivalent* zur Wohlordnungseigenschaft für $\mathbb{N}$. Wir haben eben letztere aus ersterer abgeleitet. Umgekehrt impliziert letztere erstere: Denn wäre $M \subset \mathbb{N}$ eine nichtleere echte Teilmenge, $\emptyset \neq M \subsetneq \mathbb{N}$, mit der Eigenschaft, daß sie die 1 und mit jeder Zahl auch deren Nachfolger enthält, so gäbe es wegen Wohlordnung ein kleinstes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \notin M$. Dies ergibt einen Widerspruch, da $n \neq 1$, also n Nachfolger einer natürlichen Zahl wäre, die dann in M liegen müßte. Also gilt das Prinzip der mathematischen Induktion.

Für wohlgeordnete Mengen $(W, <)$ gilt analog das *verallgemeinerte Prinzip der mathematischen Induktion*: Enthält eine Teilmenge $M \subset W$ das kleinste Element von W und mit jedem Element auch dessen Nachfolger, so $M = W$.

Auf dem verallgemeinerten Induktionsprinzip basiert entsprechend die Beweismethode mit sogenannter *transfiniter Induktion.* Sie wird zB benötigt, um die *Existenz von Basen* für beliebige Vektorräume zu zeigen ($\rightarrow$ LinAlg).

1.2.3 Erinnerung an Kombinatorik: Fakultäten und Binomialkoeffizienten

Die *Fakultäten* $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ treten im Zusammenhang mit *Abzählproblemen* auf, nämlich:

Satz. *Für $n \in \mathbb{N}$ gibt es $n!$ Möglichkeiten, n Objekte anzuordnen.*

Beweis mit vollständiger Induktion nach n:

IA: Die Behauptung gilt offensichtlich für $n = 1$, denn $1 = 1!$.

IS: Die Behauptung gelte für *ein* $n \in \mathbb{N}$. Um die möglichen Anordnungen von $n+1$ Objekten zu zählen, stellen wir fest, daß es $n+1$ Möglichkeiten gibt, das erste Objekt auszuwählen. Für jede von ihnen, gibt es dann nach Induktionsannahme $n!$ Möglichkeiten, die restlichen n Objekte anzuordnen, insgesamt also $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$ Möglichkeiten, dh es folgt die Beh für $n+1$.

Vollständige Induktion liefert die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Sind die anzuordnenden Objekte die Elemente einer n-elementigen Menge, so kann man eine Anordnung dieser Objekte als Art auffassen, sie mit den natürlichen Zahlen von 1 bis n zu nummerieren, also als Bijektion $\{1, \ldots, n\} \to M$.

Definition. Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leqslant n$ definieren wir den *Binomialkoeffizienten* $\binom{n}{k}$, zu lesen "n über k", als

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

Dabei weisen wir leeren Produkten per Konvention den Wert 1 zu, hier also $0! := 1$ und im Fall $k = 0$ auch $n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n+1) := 1$.

Daß die Binomialkoeffizienten, a priori definiert als rationale Zahlen, *ganzzahlig* sind, folgt unmittelbar aus ihrer kombinatorischen Deutung als Anzahl:

Satz. *Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leqslant n$ hat eine n-elementige Menge $\binom{n}{k}$ k-elementige Teilmengen.*

1. Beweis: Wir bezeichnen die Anzahl der k-elem Teilmengen einer n-elem Menge mit $T(n, k)$. Man erhält jede Anordnung einer n-elem Menge genau einmal, indem man zunächst eine k-elem Teilmenge auswählt, diese anordnet, und dann "dahinter" die restlichen $n - k$ Elemente anordnet. Also

$$n! = T(n, k) \cdot k! \cdot (n-k)!$$

und es folgt, daß $T(n, k) = \binom{n}{k}$, □

2. Beweis mit vollständiger Induktion nach k:

IA: Die Behauptung gilt offensichtlich für $k = 0$ (und beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$), denn die einzige Teilmenge mit 0 Elementen ist die leere Menge.

IS: Die Behauptung gelte für $k \in \mathbb{N}_0$. Es sei M eine Menge mit $n \geqslant k+1$ Elementen. Wir zählen nun auf zwei Arten die Anzahl der Möglichkeiten, aus M eine $(k+1)$-elem Teilmenge mit einem ausgezeichneten Element auszuwählen, anschaulich gesprochen, aus einer Population von n Leuten einen Verein mit $k+1$ Mitgliedern auszuwählen und unter diesen einen Vorsitzenden. (Formal gesprochen ist dies die Anzahl der Paare (m, T) bestehend aus einem Element $m \in M$ und einer Teilmenge $T \subset M - \{m\}$.) Wählen wir zuerst den Verein und dann den Vorsitzenden, so gibt es dafür $T(n, k+1) \cdot (k+1)$ Möglichkeiten. Wählen wir andererseits zuerst den Vorsitzenden und dann die restlichen k Vereinsmitglieder, so gibt es dafür $n \cdot T(n-1, k)$ Möglichkeiten. Also

$$T(n, k+1) \cdot (k+1) = n \cdot T(n-1, k).$$

Da nach Induktionsannahme $T(n-1,k) = \binom{n-1}{k}$, folgt $T(n,k+1) = \frac{n}{k+1} \cdot \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k+1}$, dh die Beh gilt folgt für $k+1$.

Vollständige Induktion liefert die Behauptung für alle $k \in \mathbb{N}_0$. $\square$

Falls $k > n$, so definieren wir, konsistent mit dem zweiten Ausdruck und ebenfalls mit der kombinatorischen Bedeutung, $\binom{n}{k} := 0$.

Unmittelbar aus ihrer Definition folgt die *Symmetrie* der Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

deren kombinatorische Erklärung ist, daß jeder Auswahl einer Teilmenge die Auswahl ihrer komplementären Teilmenge entspricht.

Die Binomialkoeffizienten erfüllen eine wichtige *Rekursionsformel*:

Behauptung. *Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $1 \leqslant k \leqslant n-1$ gilt:*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \tag{1.5}$$

Beweis: Man kann diese Formel einfach nachrechnen. Jedoch besitzt eine so einfache Gesetzmäßigkeit häufig einen "Grund", den man dann auch verstehen sollte. Hier kann man die behauptete Formel *kombinatorisch interpretieren*, woraus sich ihre Gültigkeit unmittelbar ergibt: Die Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ hat $\binom{n}{k}$ k-elementige Teilmengen, von denen $\binom{n-1}{k-1}$ die 1 enthalten und $\binom{n-1}{k}$ nicht. $\square$

Diese Rekursionsformel liefert die "Bauvorschrift" für das *Pascalsche Dreieck*.

Noch leichter als Teilmengen mit fester Mächtigkeit kann man beliebige Teilmengen zählen: *Eine Menge mit $n \in \mathbb{N}_0$ Elementen besitzt 2^n Teilmengen.* (Denn die Elemente haben unabhängig voneinander jeweils zwei Möglichkeiten, nämlich zur auszuwählenden Teilmenge dazuzugehören oder nicht. Vollständiger Induktion nach n liefert die Aussage.)

Die Binomialkoeffizienten erfüllen eine Summenformel:

Behauptung. *Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Beweis: Auch diese Formel erklärt sich unmittelbar kombinatorisch: Die Gesamtheit aller 2^n Teilmengen zerfällt in die Gruppen der jeweils $\binom{n}{k}$ k-elem Teilmengen für $k = 0, 1, \ldots, n$. $\square$

Dies ist ein Spezialfall von:

Binomischer Lehrsatz bzw **allgemeine binomische Formel**. Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Beweis: Beim Ausmultiplizieren von

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}_{n}$$

erhält man eine Summe von n-fachen Produkten mit den Faktoren a oder b. Alle (2^n) Summanden haben also die Form $a^{n-k}b^k$ mit $0 \leqslant k \leqslant n$, und ein Term $a^{n-k}b^k$ entsteht, wenn k der Klammern den Faktor b beitragen und die restlichen $n-k$ den Faktor a. Da man auf $\binom{n}{k}$ Weisen k Klammern auswählen kann, tritt der Summand $a^{n-k}b^k$ genau $\binom{n}{k}$-mal auf. □

Formal strenger erhält man die Beh mit vollständiger Induktion über n unter Verwendung der Rekursionsformel (1.5). **Ü**

Ü Verallgemeinern der binomischen Formel auf mehrere Variable, zB Formel für $(a+b+c)^n$.

Ü (i) Es seien $n, k \in \mathbb{N}$ und $k \leqslant n$. Zeigen Sie, daß man n auf $\binom{n-1}{k-1}$ Weisen als Summe $n = m_1 + \ldots + m_k$ von k natürlichen Zahlen $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ darstellen kann. (ii) Zeigen Sie, daß es $\binom{n+k-1}{k-1}$ solche Darstellungen mit $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}_0$ gibt.[5]

Ü Sei $n = k_1 + \ldots + k_r$ eine Zerlegung als Summe natürlicher Zahlen $k_i \in \mathbb{N}$. Auf wieviele Arten kann man n (unterscheidbare) Objekte auf r Schachteln verteilen, so daß die i-te Schachtel k_i der Objekte enthält?

Ü Man beweise die Identität $\binom{n}{0}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$. Kombinatorische Interpretation: Auf wieviele Weisen kann man aus $2n$ Personen, von denen je n Frauen bzw Männer sind, n Personen auswählen? Man nutze die Symmetrie der Binomialkoeffizienten bzw, daß $\binom{n}{k}^2 = \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$.[6]

1.2.4 Abzählbarkeit: Unendliche und unendlichere Mengen (ausgelassen)

Man mißt bzw vergleicht die Größen von Mengen mit Hilfe von Abbildungen:

Eine Menge X heißt *endlich*, wenn $n \in \mathbb{N}_0$ und eine bijektive Abbildung

$$\{1, 2, \ldots, n\} \xrightarrow{1:1} X$$

existieren; diese Abbildung entspricht einer Art, die Elemente von X zu *zählen*. Die natürliche Zahl n heißt die *Anzahl* der Elemente in X. Sie ist wohldefiniert, dh eindeutig bestimmt, denn aus der Existenz einer Bijektion $\{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n'\}$ für $n, n' \in \mathbb{N}$ folgt $n = n'$.[7] Im Fall $n = 0$ machen wir die Konvention, daß $\{1, 2, \ldots, 0\}$ (und folglich X) die leere Menge $\varnothing$ ist.

[5](i) Wir stellen uns n aufgereihte Objekte, zB Kugeln, vor. Zwischen ihnen gibt es $n-1$ Lücken. Eine Zerlegung $n = m_1 + \ldots + m_k$ entspricht einer Auswahl von $k-1$ dieser $n-1$ Lücken. (ii) Man kann dies auf (i) zurückführen, denn eine Zerlegung $n = m_1 + \ldots + m_k$ mit $m_i \in \mathbb{N}_0$ entspricht der Zerlegung $n + k = (m_1+1) + \ldots + (m_k+1)$ mit $m_i + 1 \in \mathbb{N}$. Alternativ kann man direkt so argumentieren: Eine $n = m_1 + \ldots + m_k$ entspricht einer Aneinanderreihung von $n+k-1$ Objekten, davon n Kugeln und $k-1$ Würfeln, so daß zwischen dem $(i-1)$-ten und i-ten Würfel m_i Kugeln liegen (also m_1 Kugeln vor dem ersten Würfel und m_k nach dem $(k-1)$-ten). Die Würfel können dabei beliebige $k-1$ der insgesamt $n+k-1$ Positionen einnehmen.

[6]Alternativ kann man kürzeste Verbindungswege im ebenen Gitter zählen, die entlagn von Gitterlinien verlaufen: Es gibt $\binom{n+m}{m} = \binom{n+m}{n}$ solcher Wege von $(0,0)$ nach (m,n). Von den $\binom{2n}{n}$ möglichen Wegen von $(0,0)$ nach $(2n,n)$ verlaufen $\binom{n}{k}^2$ Wege durch den Punkt $(k, n-k)$.

[7]Dies zeigt man mit vollständiger Induktion über n, s. zB [W, §4]: Die Beh gilt für $n = 1$, denn die Bijektion kann nur ein Bildelement haben, also $n' = 1$. Die Beh gelte für $n \in \mathbb{N}$. Ist $\beta : \{1, 2, \ldots, n+1\} \to \{1, 2, \ldots, n'\}$ eine Bijektion, dann können wir sie so abändern, daß $n' = \beta(n+1)$, und erhalten durch Einschränkung eine Bijektion $\{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n'-1\}$. Nach Induktionsannahme gilt $n = n' - 1$, also $n + 1 = n'$, dh die Beh gilt auch für $n + 1$.

Andernfalls heißt die Menge X *unendlich*. In diesem Fall existiert eine *injektive* Abbildung $\mathbb{N} \to X$, anschaulich interpretierbar als sukzessives Auswählen immer weiterer verschiedener Elemente. Das erste und wichtigste Beispiel einer unendlichen Menge ist $\mathbb{N}$ selbst. Unendliche Mengen sind dadurch charakterisiert, daß sie injektive Selbstabbildungen zulassen, die nicht surjektiv sind (Dedekind[8]). Im Fall von $\mathbb{N}$ ist die Nachfolgerabbildung $n \mapsto n+1$ eine solche Selbstabbildung (vgl "Hilberts Hotel").

Cantor machte die fundamentale Entdeckung, daß es verschiedene Abstufungen von Unendlichkeit gibt. Eine unendliche Menge heißt *abzählbar unendlich*, falls eine *bijektive* Abbildung $\mathbb{N} \to X$ existiert, man ihre Elemente also "auflisten" bzw "durchnummerieren" kann, und sonst *überabzählbar*.[9] Die Existenz überabzählbarer, also "nicht auflistbarer" Mengen ist nicht unmittelbar einleuchtend und übersteigt den Rahmen unserer Alltagsintuition.

Ist X eine beliebige Menge, so nennt man die Menge $P(X)$ ihrer Teilmengen ihre *Potenzmenge*. Es besteht die natürliche Bijektion zwischen $P(X)$ und der Menge $\{0,1\}^X$ aller Abbildungen $X \to \{0,1\}$, welche einer Teilmenge $A \subset X$ ihre *charakteristische Funktion* χ_A zuordnet, definiert durch $\chi_A(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A$. (Daher bezeichnet man die Potenzmenge auch mit 2^X.)

Beispiel (Cantor). Die Menge $P(\mathbb{N})$ ist überabzählbar.

Beweis mit dem *Cantorschen Diagonalverfahren*: Betrachten wir eine beliebige Liste von Elementen von $P(\mathbb{N})$, dh eine Abbildung $l : \mathbb{N} \to P(\mathbb{N})$. Wir müssen zeigen, daß die Liste nicht erschöpfend, dh l nicht surjektiv ist. Wir stellen uns die Teilmengen von $\mathbb{N}$ als unendliche Folgen von 0en und 1en vor (dh als charakteristische Funktionen) und konstruieren eine Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$, die nicht auf der Liste steht, dh nicht im Bild von l liegt, indem wir die n-te Folge auf der Liste an der n-ten Stelle abändern, dh

$$A := \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \notin l(n)\} \subset \mathbb{N}.$$

Dann $n \in A \Leftrightarrow n \notin l(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also kann für kein $n \in \mathbb{N}$ gelten, daß $A = l(n)$, da sonst der Widerspruch $n \in A \Leftrightarrow n \notin A$ folgt. Daher $A \neq l(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $A \notin l(\mathbb{N})$. □

Genauso sieht man allgemeiner:

Satz. *Ist X eine beliebige Menge, so existiert keine Surjektion $X \to P(X)$.*

Beweis: Für eine Abbildung $l : X \to P(X)$ betrachten wir analog die Teilmenge

$$A := \{x \in X \,|\, x \notin l(x)\} \subset X.$$

Wieder gilt dann $x \in A \Leftrightarrow x \notin l(x)$, daher $A \neq l(x)$ für alle $x \in X$, also $A \notin l(X)$ und l ist insbesondere nicht surjektiv. □

Cantors Beispiel suggeriert, daß nicht alle unendlichen Mengen "gleich groß" sind und gibt Anlaß, die Größe auch unendlicher Mengen zu definieren:

[8]Diese Idee läßt sich anscheinend bis ins Mittelalter (Adam Parvipontanus) und ins Altertum zurückverfolgen.

[9]Eine Menge heißt *abzählbar*, falls sie endlich oder abzählbar unendlich ist. Dies ist äquivalent dazu, daß sie injektiv nach $\mathbb{N}$ abgebildet werden kann.

Definition. Zwei Mengen heißen *gleichmächtig*, falls eine Bijektion zwischen ihnen existiert.

Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf Mengen, und die Äquivalenzklassen heißen *Kardinalzahlen*; die *Mächtigkeit* oder *Kardinalität* einer Menge X ist also die von ihr repräsentierte Kardinalzahl $|X|$. Die endlichen Kardinalzahlen entsprechen den natürlichen Zahlen. Man bezeichnet die Kardinalität der natürlichen Zahlen mit $|\mathbb{N}| =: \aleph_0$.

Eine Menge ist *endlich* genau dann, wenn sie zu keiner echten Teilmenge gleichmächtig ist.

Man sieht leicht, daß zB $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $2\mathbb{Z} := \{2z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ gleichmächtig sind.[10]

Um die Gleichmächtigkeit von Mengen zu verifizieren ist das folgende Resultat sehr nützlich, denn es ist (viel) einfacher, injektive und surjektive Abbildungen zu konstruieren als bijektive.

Satz (Cantor-Schröder-Bernstein, Dedekind). *Existieren für zwei Mengen X und Y injektive Abbildungen $X \to Y$ und $Y \to X$, so sind die beiden Mengen gleichmächtig.*

Wir werden dies nicht beweisen. **Ü**

Mit diesem Satz sieht man relativ leicht, daß auch $\mathbb{Q}$ abzählbar, dh gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist.[11] Ebenfalls, daß $\mathbb{R}$ gleichmächtig zu $2^{\mathbb{N}}$ ist, und damit überabzählbar. **Ü**

Nun zum Größen*vergleich* von Mengen bzw Kardinalzahlen. Eine Menge X heißt *mindestens so mächtig* wie eine Menge Y, wenn eine injektive Abbildung $Y \to X$ existiert, und entsprechend ihre Kardinalität mindestens so groß, $|X| \geqslant |Y|$. (Sie heißt *mächtiger*, wenn keine bijektive solche Abbildung existiert, $|X| > |Y|$.) Klar ist: $|X| \geqslant |Y| \wedge |Y| \geqslant |Z| \Rightarrow |X| \geqslant |Z|$. Also sind die Kardinalzahlen bzgl "$<$" partiell geordnet. (Sie bilden keine Menge, sondern eine Klasse!)

Die kleinste unendliche Kardinalzahl ist $\aleph_0$.

Das Cantorsche Diagonalargument (s.o.) läßt sich auf beliebige Mengen X anwenden und zeigt, daß $|2^X| > |X|$. Insbesondere gibt es keine größte Kardinalzahl.

Es ist nichttrivial, daß man die Größen beliebiger Mengen miteinander vergleichen kann, anders gesagt, daß die Kardinalzahlen bzgl "$<$" totalgeordnet sind. Dies folgt aus:

Satz. *Für je zwei Mengen X und Y existiert stets eine injektive Abbildung $X \to Y$ oder eine injektive Abbildung $Y \to X$ (oder beides, in welchem Fall die Mengen gleichmächtig sind).*

Wir werden dies ebenfalls nicht beweisen.[12]

Man kann stärker zeigen, daß die Kardinalzahlen sogar *wohlgeordnet* sind.

Bezeichnet man mit $\aleph_1$ die kleinste Kardinalzahl $> \aleph_0$, also die zweitkleinste unendliche Kardinalzahl, so gilt $|\mathbb{R}| \leqslant \aleph_1$. Die *Kontinuumshypothese* besagt, daß $|\mathbb{R}| = \aleph_1$. Sie ist von den

[10] Galilei wies darauf hin, daß es gleichviele natürliche Zahlen wie Quadrate natürlicher Zahlen gibt („Galileis Paradoxon"), siehe seine *Discorsi*. Er folgerte, daß Attribute wie „größer", „kleiner" und „gleich" auf unendliche Größen nicht anwendbar seien.

[11] **Ü** Es gibt injektive Abbildungen $\mathbb{Q}^+ \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Letzteres leistet zB die Abbildung $(n, m) \mapsto 2^n 3^m$. Komposition liefert eine Injektion $\mathbb{Q}^+ \to \mathbb{N}$. Analog erhält man eine Injektion $\mathbb{Q}^- \to -\mathbb{N} = \mathbb{Z}^-$ und zusammen eine Injektion $\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$, und durch Komposition mit einer Injektion $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ eine Injektion $\mathbb{Q} \to \mathbb{N}$.

[12] Man benötigt hierfür das Auswahlaxiom bzw das Zornsche Lemma.

Axiomen der Mengenlehre *unabhängig*, vgl. [Z, Kap 13].