AB Geometrie & Topologie
Prof. Bernhard Leeb, Ph.D.
Dr. Stephan Stadler

Analysis I

Übungsblatt 2

1. Für $i = 1, 2$ seien $(X_i, \prec_i)$ partiell geordnete Mengen. Auf dem kartesischen Produkt $X_1 \times X_2$ definieren wir die *lexikographische* Relation $\prec$ durch:

$$(x_1, x_2) \prec (x_1', x_2') \quad :\Leftrightarrow \quad x_1 \prec_1 x_1' \vee (x_1 = x_1' \wedge x_2 \prec_2 x_2')$$

   Zeigen Sie:

   (a) $\prec$ ist eine partielle Ordnung.

   (b) Sind $\prec_1$ und $\prec_2$ Totalordnungen, so auch $\prec$.

2. Finden Sie injektive Abbildungen $\mathbb{Q}^+ \hookrightarrow \mathbb{N}$, $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ und $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N}$.

3. Beweisen Sie den *Satz von Cantor-Schröder-Bernstein-Dedekind*: Sind A und B Mengen, und gibt es injektive Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to A$, so gibt es auch eine bijektive Abbildung $h : A \to B$.

   Hinweis: Definieren Sie die Teilmengen von Elementen mit *Urahn in* A als

$$A_A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} (g \circ f)^n (A \setminus g(B)) \subset A$$

   und $B_A := f(A_A) \subset B$, analog die Teilmengen $A_B \subset A$ und $B_B \subset B$ mit *Urahn in* B, und schließlich die Teilmengen $A_{-\infty} = A \setminus (A_A \cup A_B)$ und $B_{-\infty} = B \setminus (B_A \cup B_B)$ *ohne Urahn*. Zeigen Sie, daß es Bijektionen $A_A \to B_A$, $A_B \to B_B$ und $A_{-\infty} \to B_{-\infty}$ gibt (jeweils durch Einschränken von f oder g).

4. (a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

   (b) Stellen Sie $\sum_{k=1}^{n} k^3$ als Polynom in n dar.
   Hinweis: Betrachten Sie $\sum_{k=1}^{n}(k^4 - (k-1)^4)$ und verwenden Sie Teilaufgabe (a).

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis Montag dem 29.10.2018 um 10:15 h ab. (UniworX + Übungskästen.)