LMU | LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN | MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Ulrich Derenthal
Daniel Bembé, Andreas Groh

Wintersemester 2010/11
17.12.2010

Lineare Algebra I

Probeklausur

Nachname: ______________ Vorname: ______________

Matrikelnr.: ______________ Fachsemester: ______________

Abschluss: Bachelor ❏ PO 2007 ❏ PO 2010 Lehramt Gymnasium ❏ modularisiert ❏ nicht modularisiert

❏ Master ❏ Diplom ❏ ______________

Hauptfach: ❏ Mathematik ❏ Wirtschaftsm. ❏ Inf. ❏ Phys. ❏ Stat. ❏ ______

Nebenfach: ❏ Mathematik ❏ Wirtschaftsm. ❏ Inf. ❏ Phys. ❏ Stat. ❏ ______

Anrechnung der Credit Points für das ❏ Hauptfach ❏ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Lichtbild- und Studienausweis sichtbar auf den Tisch.
Bitte überprüfen Sie, ob Sie **sechs Aufgaben** erhalten haben.
Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**.
Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe.
Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.
Durch Angabe eines Pseudonyms links unten (z.B. die letzten vier Ziffern Ihrer Matrikelnummer) stimmen Sie der Veröffentlichung von Klausurergebnis und Pseudonym im Internet zu.
Dies trifft nur auf die Klausur, nicht aber die Probeklausur zu; diese Probeklausur wird im Übungskasten zurückgegeben.
Sie haben **90 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten.

Viel Erfolg!

Pseudonym	1	2	3	4	5	6	$\sum$
	/4	/4	/4	/4	/4	/4	/24

Name: ______________________________

Aufgabe 1. [4 Punkte]

Sei $G := \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

a) Beweisen Sie, dass $a * b := a + b + ab$ eine Verknüpfung auf G definiert.

b) Beweisen Sie, dass $(G, *)$ eine abelsche Gruppe ist.

c) Bestimmen Sie alle $x \in G$, für die $3 * x = -5$ gilt.

Name: ____________________

Aufgabe 2. [4 Punkte]

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K, mit Untervektorräumen U_1, U_2. Beweisen Sie, dass $U_1 + U_2$ ein Untervektorraum von V ist.

Name: ______________________________

Aufgabe 3. [4 Punkte]

Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung von Vektorräumen über einem Körper K. Der Kern von φ sei n-dimensional mit Basis $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Außerdem seien $x_{n+1}, \ldots, x_m \in V$ (mit $m > n$) so gegeben, dass $\{x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m\}$ eine m-elementige linear unabhängige Menge ist. Beweisen Sie, dass $\{\varphi(x_{n+1}), \ldots, \varphi(x_m)\}$ eine linear unabhängige Menge mit $m - n$ Elementen ist.

Name: ______________________________

Aufgabe 4. [4 Punkte]

Sei K ein Körper, n eine positive ganze Zahl. Beweisen Sie:

a) Für jedes $y = (y_1, \ldots, y_n) \in K^n$ ist folgende Abbildung linear:

$$\varphi_y : K^n \to K, \qquad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto y_1 x_1 + \cdots + y_n x_n$$

b) Folgende Abbildung ist linear:

$$\Phi : K^n \to \mathrm{Hom}(K^n, K), \qquad y \mapsto \varphi_y$$

c) Die Abbildung Φ ist ein Isomorphismus.

Name: ______________________________

Aufgabe 5. [4 Punkte]

Seien V_3 bzw. V_2 die Vektorräume der reellen Polynomfunktionen von Grad ≤ 3 bzw. ≤ 2, mit geordneten Basen $\mathcal{E} = (1, x, x^2, x^3)$ bzw. $\mathcal{F} = (1, x, x^2)$.

a) Bestimmen Sie die Matrix ${}_{\mathcal{F}}[\varphi]_{\mathcal{E}}$ der linearen Abbildung

$$\varphi : V_3 \to V_2, \qquad ax^3 + bx^2 + cx + d \mapsto (2b - c + d)x^2 + (a + b + c - d)x + (2a + 4b + c - d).$$

b) Bestimmen Sie den Rang von φ sowie Basen von Kern und Bild von φ.

Name: ____

Aufgabe 6. [4 Punkte]

Welche der folgenden Aussagen sind **im Allgemeinen** wahr oder falsch?
(Schreiben Sie einfach deutlich erkennbar **wahr** oder **falsch** hinter jede Aussage. Begründungen sind nicht gefragt und werden nicht korrigiert. Eine richtige Antwort gibt $0,5$ Punkte, eine falsche $-0,5$ Punkte; unbeantwortete Fragen ergeben 0 Punkte. Sollte sich daraus eine negative Punktzahl ergeben, werden Ihnen trotzdem 0 Punkte angerechnet.)

a) Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Sei $\varphi : V \to V$ eine injektive lineare Abbildung. Dann ist φ surjektiv.

b) Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto (x + y)^2 - x^2 - y^2$ ist linear.

c) Sei V endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K und W ein Untervektorraum von V. Dann gibt es eine lineare Abbildung $f : V \to V$ so, dass $V/\ker(f)$ isomorph zu W ist.

d) Die Menge $\{(1, 0, 2), (0, 1, 1), (2, 3, 7)\} \subset \mathbb{R}^3$ ist linear unabhängig.

e) $(\mathbb{R}, \cdot)$ ist eine Gruppe.

f) Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung von Vektorräumen über einem Körper K. Der Vektorraum V sei n-dimensional mit Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Dann ist $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ linear unabhängig.

g) $\{0\}$ ist eine Basis des Nullvektorraums.

h) Sei $V = (\mathbb{F}_2)^3$ und $U = \langle(1, 1, 1)\rangle$ Untervektorraum von V. Im Quotientenraum V/U gilt $(1, 0, 0) + U = (0, 1, 1) + U$.

Name: ____________________

Name: ______________________________