



Dozent: Dr. Peter Philip

Wintersemester 2018/19

Assistenten: Markus Nöth, Kilian Rückschloss, Pascal Stucky

## Lineare Algebra 1

### Hausaufgabenblatt 1

**Aufgabe 1** (10 Punkte) Beweisen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln folgende Regeln der Aussagenlogik:

- a)  $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ .
- b)  $(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ .

**Aufgabe 2** (10 Punkte) In jeder der folgenden Situationen a) – e) beantworten Sie bitte die Frage und beweisen die Richtigkeit Ihrer Antwort durch ein logisch einwandfreies Argument.

#### Zwiddeldum und Zwiddledei

(aus R. Smullyan: *Wie heißt dieses Buch?*, Vieweg Verlag, 1981)

Der Löwe und das Einhorn blieben dem Wald des Vergessens einen Monat lang fern. Sie waren irgendwo und kämpften eifrig für die Krone.

Jedoch waren Zwiddeldum und Zwiddledei häufige Besucher des Waldes. Nun ist einer der beiden wie der Löwe; er lügt am Montag, Dienstag und Mittwoch und sagt an den anderen Wochentagen die Wahrheit. Der andere ist wie das Einhorn; er lügt donnerstags, freitags und samstags, aber sagt an den anderen Tagen der Woche die Wahrheit. Alice wußte nicht, welcher der beiden wie der Löwe und welcher wie das Einhorn war. Um die Sache noch schlimmer zu machen, sahen die Brüder einander so ähnlich, dass Alice sie nicht einmal voneinander unterscheiden konnte (es sei denn, sie trugen ihre bestickten Kragen, was sie selten taten). So fand die arme Alice die Situation in der Tat höchst verwirrend! Hier sind einige von Alices Erlebnissen mit Zwiddeldum und Zwiddledei.

- a) Eines Tages traf Alice die beiden Brüder, und sie stellten folgendes fest:  
Erster: Ich bin Zwiddeldum.  
Zweiter: Ich bin Zwiddledei.  
Wer war wirklich Zwiddeldum, und wer war Zwiddledei?
- b) An einem anderen Tag der gleichen Woche machten die beiden Brüder die folgenden Aussagen:  
Erster: Ich bin Zwiddeldum.  
Zweiter: Wenn das wirklich wahr ist, dann bin ich Zwiddledei!  
Wer war wer?
- c) Bei einer anderen Gelegenheit machten die Brüder folgende Aussagen:  
Erster: Ich lüge samstags. Ich lüge sonntags.  
Zweiter: Ich werde morgen lügen.  
An welchem Wochentag geschah das?
- d) Eines Tages traf Alice zufällig nur einen der Brüder. Er stellte folgendes fest: „Ich lüge heute, und ich bin Zwiddledei.“  
Wer hat das gesagt?
- e) Nehmen wir an, er hätte in d) stattdessen gesagt: „Ich lüge heute oder ich bin Zwiddledei.“  
Läßt sich feststellen, wer er war?

**Aufgabe 3** (10 Punkte) (geht zurück auf den Text von R. Smullyan *Dame oder Tiger?*, S. Fischer Verlags GmbH, 1983)

Ein Gefangener hat unter neun Räumen zu wählen. Ein Raum enthält ein Pferd (zum Ritt in die Freiheit), die andern sind entweder leer, oder ein Tiger befindet sich darin. Jeder Raum ist mit einer Inschrift versehen; diejenige am Raum mit dem Pferd ist wahr, diejenigen an den Tigerräumen sind falsch, die anderen können wahr oder auch falsch sein.

Inschrift Raum I: Das Pferd ist in einem Raum mit ungerader Nummer.

Inschrift Raum II: Dieser Raum ist leer.

Inschrift Raum III: Inschrift V ist richtig oder Inschrift VII ist falsch.

Inschrift Raum IV: Inschrift I ist falsch.

Inschrift Raum V: Inschrift II ist richtig oder Inschrift IV ist richtig.

Inschrift Raum VI: Inschrift III ist falsch.

Inschrift Raum VII: Das Pferd ist nicht in Raum I.

Inschrift Raum VIII: In diesem Raum ist ein Tiger und Raum IX ist leer.

Inschrift Raum IX: In diesem Raum ist ein Tiger und Inschrift VI ist falsch.

Der Gefangene studiert das Problem und sagt ärgerlich: „Unfair, unlösbar!“ „Ja, ja“, amüsiert sich der König. „Sehr lustig“, erwidert der Gefangene. „Könnten Sie, Herr König, mir nicht einen Tip geben. Ist Raum VIII leer oder nicht?“ Der König entsprach der Bitte, und der Gefangene fand die Freiheit.

Beweisen Sie, dass aus der Information, dass Raum VIII nicht leer ist, folgt, dass sich das Pferd in Raum VII befindet.

**Aufgabe 4** (10 Punkte)

Zwei Kinder, Ina und Erwin, essen griechische Buchstabensuppe. Bei Ina befinden sich nur noch ein  $\alpha$  und ein  $\beta$  in der Suppe. Erwins Suppe besteht noch aus jeweils einem  $\beta$ ,  $\gamma$  und  $\delta$ . Dies motiviert die nachfolgenden Mengen  $I := \{\alpha, \beta\}$  und  $E := \{\beta, \gamma, \delta\}$ .

a) (7 Punkte) Bestimmen Sie, ob es sich um wahre Aussagen handelt:

- (aa)  $I \subseteq E$ ,
- (ab)  $I = E$ ,
- (ac)  $I \neq E$ ,
- (ad)  $\{\beta, \delta\} \subseteq E$ ,
- (ae)  $\beta \in I$ ,
- (af)  $\gamma \subseteq E$ ,
- (ag)  $\{\beta, \{\gamma, \delta\}\} \subseteq E$ .

b) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Mengen

- (ba)  $I \cap E$ ,
- (bb)  $I \cup E$ ,
- (bc)  $\mathcal{P}(E)$ .

**Abgabe bis Dienstag, 30. Oktober 2018, 12:00 Uhr** durch Hochladen einer PDF-Datei bei UniWorX.

---

Bitte begründen Sie alle Antworten und bemühen Sie sich um eine saubere Gliederung sowie eine klare Argumentation. Kennzeichnen Sie z. B. Behauptungen, Annahmen und Folgerungen. Orientieren Sie sich dabei an der Vorlesung und den Beispielen, die in den Übungen vorgerechnet werden.

---