1 Zahlen

Die (aus der Schule) vertrauten Zahlensysteme

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

der natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen betrachten wir als gegeben. Sie sind "ineinander eingebettet" und gehen durch sukzessive Erweiterungen auseinander hervor, die jeweils gewisse "Defizite" beheben. Wir werden nicht (oder höchstens andeutungsweise) auf ihre Konstruktion eingehen, die aus folgenden Schritten besteht:

- Definition der natürlichen Zahlen auf Basis der Mengenlehre
- Erweiterung der natürlichen zu den ganzen Zahlen, um sie bzgl Subtraktion abzuschließen
- Erweiterung der ganzen zu den rationalen Zahlen, um sie bzgl Division abzuschließen
- Erweiterung der rationalen zu den reellen Zahlen, um sie zu vervollständigen, also bzgl Grenzwertbildung abzuschließen, dh die "Lücken" zu füllen (wird später präzisiert)

Dabei sind die Schritte $\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ algebraische Prozesse und der Schritt $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ geometrisch.

Wir beschränken uns darauf, die diese Zahlensysteme charakterisierenden Eigenschaften (Axiome) zu besprechen, auf denen wir dann im weiteren aufbauen werden. Allerdings verweisen wir auch für die Eigenschaften *algebraischer* Natur, also die

- Eigenschaften der Addition und Multiplikation, dh die von diesen Verknüpfungen erfüllten grundlegenden Rechengesetze (Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetze) sowie die Existenz von neutralen und ggf inversen Elementen, kurz gesagt, die Tatsache, daß $\mathbb{Z}$ ein *Ring* (und $\mathbb{N}$ ein Halbring) ist, und daß $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ *Körper* sind

auf die Vorlesung Lineare Algebra, wo grundlegende algebraische Strukturen behandelt werden. Wir konzentrieren uns hier in der Analysis auf die Eigenschaften *geometrischer* Natur, also:

- Anordnung und Vollständigkeit

Auf die Erweiterung

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

der reellen zu den *komplexen* Zahlen werden wir genauer eingehen. Sie behebt wiederum ein „Defizit“ algebraischer Natur, indem sie bewirkt, daß quadratische und allgemeiner polynomielle Gleichungen beliebigen Grades ohne Einschränkung lösbar werden (vgl „Fundamentalsatz der Algebra“).

1.1 Einige Grundbegriffe

1.1.1 Mengen

Unter einer *Menge* verstehen wir eine *Gesamtheit mathematischer Objekte*, ohne spezifizierte Anordnung, die wir selbst als eigenständiges mathematisches Objekt auffassen. (Cantor: ein "Vieles, welches sich als Eines denken läßt" bzw eine "Zusammenfassung wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen"). Wir nehmen einen "intuitiven" Standpunkt ein und hinterfragen oder präzisieren den Mengenbegriff nicht weiter.

Typischerweise erhält man Mengen, indem man Objekte mit einer bestimmten Eigenschaft zusammenfaßt (Komprehension), also durch Bildungen der Art

$$\{x \mid x \text{ hat Eigenschaft } E\}$$

Da die Elemente von Mengen wiederum selbst Mengen sein können (zB die Geraden in einer Ebene), entstehen bei mehrstufigen Konstruktionen schnell sehr komplexe Gebilde. Daß Selbstbezüge zu Widersprüchen führen können und daher Vorsicht geboten ist, dh man die zur Bildung von Mengen erlaubten Operationen einschränken muß, wurde spätestens durch die *Russellsche Antinomie* (1901) klar, welche die Eigenschaft von Mengen betrachtet, sich nicht selbst als Element zu enthalten, und die Menge

$$M_{Russell} := \{x \mid x \text{ ist Menge und } x \notin x\}$$

bildet. Dabei entsteht der Widerspruch

$$M_{Russell} \in M_{Russell} \Leftrightarrow M_{Russell} \notin M_{Russell},$$

anschaulich formuliert zB als das Paradoxon vom Barbier als demjenigen, der genau die Leute rasiert, die sich nicht selbst rasieren, die Frage aufwerfend, ob er sich selbst rasiert. Die Entdeckung der Russellschen Antinomie markiert das Ende der "naiven" Mengenlehre und leitete ihre Axiomatisierung ein (Zermelo, Fraenkel, Skolem), auf die wir hier nicht näher eingehen können, vgl zB [Z, Kap. 13].

Um Selbstbezüge zu vermeiden, achtet man darauf, daß die möglichen Konstruktionen im Rahmen eines gewissen "Universums" stattfinden. So erlaubt man, die Komprehension einschränkend, nur, daß Mengen durch *Aussonderung* gebildet werden, dh als *Teilmengen bereits gegebener Mengen*, bestehend aus den Elementen, die eine bestimmte *Eigenschaft* besitzen:

$$\{x \in M \mid x \text{ hat Eigenschaft } E\}$$

Das Russellsche Paradoxon wird dadurch aufgelöst, daß man bei "Gesamtheiten von Objekten" zwischen Mengen und *Klassen* unterscheidet, letztere aufzufassen als "zu große Mengen", sozusagen "Unmengen", und insbesondere $M_{Russell}$ keine Menge, sondern eine Klasse ist.

1.1.2 Abbildungen

Eine *Abbildung* $f : X \to Y$ von einer Menge X in eine Menge Y ordnet jedem Element $x \in X$ ein Element $f(x) \in Y$ zu. Wenn Ausgangs- und Zielmenge klar sind, werden wir die Abbildung auch einfach als Zuordnung $x \mapsto f(x)$ notieren. Man nennt die Teilmenge

$$f(X) := \{f(x) \mid x \in X\} \subset Y$$

das *Bild* der Abbildung f. Der *Graph* der Abbildung f ist definiert als die Teilmenge

$$\mathrm{Graph}(f) := \{(x, f(x) \in X \times Y \mid x \in X\}$$

der *Produktmenge*

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Der Graph enthält die gesamte Information über die Abbildung, dh letztere läßt sich aus ersterem rekonstruieren. Der Abbildungsbegriff läßt sich so auf den Mengenbegriff zurückführen.

Wir reservieren den Begriff *Funktion* für Abbildungen, deren *Werte* (reelle oder komplexe) *Zahlen* sind.

Die *Hintereinanderausführung* alias *Komposition* alias *Verkettung* zweier Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ ist die Abbildung

$$g \circ f : X \to Z, \quad x \mapsto g(f(x)).$$

Definition. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt

(i) *injektiv*, falls sie verschiedene Elemente von X auf verschiedene Element von Y abbildet.

(ii) *surjektiv*, falls jedes Element in der Zielmenge getroffen wird, $f(X) = Y$.

(iii) *bijektiv* oder *eineindeutig*, falls sie injektiv und surjektiv ist.

Bei injektiven Abbildungen spricht man auch gerne von *Einbettungen*.

Eine bijektive Abbildung ist umkehrbar und wir bezeichnen ihre *Umkehrung* mit $f^{-1} : Y \to X$; es gilt also $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$, wobei $\mathrm{id}_X : X \to X$ die *Identität* bezeichnet.

Die Komposition injektiver/surjektiver/bijektiver Abbildungen ist wieder eine solche. **Ü**

Definition. Eine *Permutation* einer Menge X ist eine bijektive Selbstabbildung $X \to X$.

Die Permutationen von X bilden zusammen mit der Komposition als Verknüpfung eine *Gruppe* ($\to$ LinAlg). Man betrachtet oft Permutationen endlicher Mengen. Die Permutationen der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ bilden die (interessante und wichtige) *symmetrische Gruppe* S_n.

Bemerkung. Das *Vorzeichen* oder *Signum* einer Permutation $\sigma \in S_n$ definiert man als

$$\mathrm{sgn}(\sigma) := \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \in \{\pm 1\}.$$

Die Schreibweise bedeutet, daß das Produkt der Ausdrücke $\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$ für alle Paare (i, j) von Zahlen $i, j \in M_n$ mit $i < j$ gebildet wird. Also

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{|\{(i,j) \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n \wedge \sigma(i) > \sigma(j)\}|}.$$

Eine Permutation σ heißt *gerade*, falls $\operatorname{sgn}(\sigma) = +1$, und sonst *ungerade*.

Für alle $\sigma, \tau \in S_n$ gilt

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{\tau(j) - \tau(i)},$$

denn $\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i} = \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$ für $i \neq j$, dh es ist das Produkt derselben Faktoren wie in der Definition des Signums, nur in einer anderen Reihenfolge.

Daraus folgt die *Multiplikativität* des Signums, dh für $\sigma, \tau \in S_n$ gilt

$$\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\tau).$$

In der Sprache der Gruppentheorie bedeutet dies, daß die Abbildung $\operatorname{sgn} : S_n \to \{\pm 1\}$ ein *Gruppenhomomorphismus* ist ($\to$ Algebra).

Falls $n \geqslant 2$, so existieren ungerade Permutationen. Beispiele sind die *Transpositionen* $\tau_{kl} \in S_n$ für $1 \leqslant k < l \leqslant n$ definiert durch:

$$\begin{cases} \tau_{kl}(k) := l \\ \tau_{kl}(l) := k \\ \tau_{kl}(i) := i \text{ falls } i \neq k, l \end{cases}$$

Sie sind ungerade, weil sie die Reihenfolge von genau $2(l-k+1)+1$ Paaren (i,j) vertauschen, nämlich falls $i = k \wedge k < j < l$ oder $i < k < l \wedge j = l$ oder $i = k \wedge j = l$.

Es gibt dann gleich viele gerade und ungerade Permutationen, denn für eine beliebige ungerade Permutation τ ändert die Bijektion $S_n \to S_n, \sigma \mapsto \sigma \circ \tau$ das Vorzeichen.

1.1.3 Relationen

Der Begriff der *Relation* verallgemeinert den Begriff der Abbildung. Für uns wird der Spezialfall *homogener zweistelliger* Relationen ausreichen (der Selbstabbildungen verallgemeinert):

Definition. Eine *Relation* R auf einer Menge M ist eine Teilmenge $R \subset M \times M$. Man sagt, daß die Relation R zwischen zwei Elementen $x, y \in M$ *besteht*, notiert xRy, falls $(x,y) \in R$.

Zur Bezeichnung von Relationen verwendet man statt R oft Symbole wie "$\sim$" oder "$\prec$".

Eine Relation $R \subset M \times M$ auf einer Menge M induziert auf jeder Teilmenge $T \subset M$ eine Relation durch Einschränkung, nämlich die Relation $R \cap (T \times T)$ auf T. Man behält also genau die Relationen zwischen den Elementen der Teilmenge.

Besonders wichtig sind *Ordnungs-* und *Äquivalenzrelationen*.

Definition. Eine Relation "$\sim$" auf einer Menge M heißt eine *Äquivalenzrelationen*, falls sie folgende Eigenschaften besitzt:

(i) *reflexiv*: $x \sim x$ für alle $x \in M$

(ii) *symmetrisch*: $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ für alle $x, y \in M$

(iii) *transitiv*: $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$ für alle $x, y, z \in M$

Man nennt

$$[x] := \{y \in M \mid x \sim y\} \subset M$$

die von x repräsentierte *Äquivalenzklasse* in M bzgl "$\sim$".

Behauptung. *Für beliebige $x, y \in M$ gilt die Dichotomie*

$$\begin{cases} [x] = [y] \text{ , } \textit{falls } x \sim y \\ [x] \cap [y] = \varnothing \ \textit{sonst} \end{cases}$$

Beweis: Falls $[x] \cap [y] = \varnothing$, so $x \not\sim y$.

Falls andererseits $[x] \cap [y] \neq \varnothing$, so gibt es $z \in M$ mit $z \in [x] \cap [y]$. Dies bedeutet, daß $x \sim z$ und $y \sim z$, und mit (ii+iii) folgt $x \sim y$. Also $[x] \cap [y] = \varnothing \Leftrightarrow x \not\sim y$.

Nehmen wir nun an, daß $x \sim y$. Dann gilt für $u \in [x]$, daß $x \sim u$ und damit (wieder wegen (ii+iii)) auch $y \sim u$. Dies zeigt, daß $[x] \subseteq [y]$. Analog gilt $[y] \subseteq [x]$. Also $[x] = [y]$.

Dies zeigt die Dichotomie. □

Die Äquivalenzklassen bilden also eine *Zerlegung* der Menge M in *disjunkte* Teilmengen.

Beispiel. (o) Gleichheit "="; die Äquivalenzklassen bestehen dann aus einzelnen Elementen.

(i) Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Relation "$\sim$" auf $\mathbb{Z}$ definiert durch

$$a \sim b \quad \Leftrightarrow \quad n \mid a - b \quad (\text{dh } n \textit{ teilt } a - b)$$

eine Äquivalenzrelation und die Äquivalenzklassen sind die *Restklassen modulo n* ($\rightarrow$ Algebra).

Ordnungsrelationen und von ihnen abgeleitete Begriffe (Maximum, Supremum) besprechen wir ausführlicher. Wir werden sie später hauptsächlich im Fall der reellen Zahlen benutzen.

Definition. Eine Relation "$\prec$" auf einer Menge M heißt eine *partielle Ordnung* oder *Halbordnung*, falls:

(i) Für alle $x, y \in M$ schließen die drei Aussagen $x \prec y$, $x = y$ und $x \succ y$ einander aus. (Es gilt also *höchstens* eine von ihnen.)

(ii) *Transitivität*: $x \prec y \wedge y \prec z \Rightarrow x \prec z$ für alle $x, y, z \in M$.

Gilt in (i) außerdem, daß für alle $x, y \in M$ eine (also *genau* eine) der Aussagen $x \prec y$, $x = y$ oder $x \succ y$ zutrifft, so heißt "$\prec$" eine *Totalordnung*.

Die Aussagen $x \prec y$ fassen wir als *Ungleichungen* in M auf. Man definiert weiter die "schwachen" Ungleichungen

$$x \preceq y :\Leftrightarrow x \prec y \vee x = y.$$

Wir nennen "$\preceq$" die zu "$\prec$" gehörige *schwache Ordnungsrelation*.

Beispiel. (o) Auf jeder Menge M ist die *leere* Relation $\varnothing \subset M \times M$ eine partielle Ordnung.

(i) Die *größer*-Relation "$>$" auf $\mathbb{R}$ ist eine Totalordnung.

(ii) Sei M eine Menge. Wir betrachten die *Inklusions*-Relation „$\subset$" auf der Menge $P(M)$ aller Teilmengen von M (genannt die *Potenzmenge* von M): Die Relation „$\subset$ und $\neq$" ist eine partielle Ordnung, und „$\subset$" selbst ist die zugehörige schwache Ordnungsrelation. Falls M mindestens zwei Elemente besitzt, ist die partielle Ordnung *keine* Totalordnung.

(iii) Die *Teilbarkeitsrelation* „ $|$ " auf $\mathbb{N}$: Die Relation „ $|$ und $\neq$" ist eine partielle Ordnung und „ $|$ " die zugehörige schwache Ordnungsrelation. (Verwandt mit (ii) wegen Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung!)

In einer partiell geordneten Menge $(M, \prec)$ definiert man *Intervalle* als Abschnitte:

Definition. Für $a, b \in M$ definieren wir folgende Teilmengen von M:

(i) das *offene Intervall* $(a, b) := \{x \in M \,|\, a \prec x \prec b\}$

(ii) das *abgeschlossene* Intervall $[a, b] := \{x \in M \,|\, a \preceq x \preceq b\}$

(iii) die *halboffenen* Intervalle $[a, b) := \{x \in M \,|\, a \preceq x \prec b\}$ und $(a, b] := \{x \in M \,|\, a \preceq x \preceq b\}$

Definition. Ein Element x einer partiell geordneten Menge $(M, \prec)$ heißt *kleinstes* Element oder *Minimum* von M, falls es kein kleineres Element gibt, dh $y \nprec x \; \forall y \in M$. Bez: $\min M$.

Analog definiert man größte Elemente (Maxima).

Partiell geordnete Mengen besitzen i.a. keine kleinsten und größten Elemente (zB $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{R}$), und falls doch, so sind diese i.a. nicht eindeutig (zB bei der leeren Relation). **Ü?**

Ist $(M, \prec)$ totalgeordnet, so gilt für ein kleinstes Element X von M, daß $x \preceq y \; \forall y \in M$. Insbesondere sind Minima und Maxima totalgeordneter Mengen eindeutig (falls sie existieren).

Definition. Eine totalgeordnete Menge heißt *wohlgeordnet*, falls jede nichtleere Teilmenge ein kleinstes Element besitzt.

Beispiel. (i) $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_0$ (versehen mit ihrer natürlichen Ordnung "$<$") sind wohlgeordnet, ebenso $\{z \in \mathbb{Z} \,|\, z \geqslant z_0\}$ für $z_0 \in \mathbb{Z}$, jedoch nicht $\mathbb{Z}$ selbst. (Vgl Kap 1.2.2.)

(ii) $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind nicht wohlgeordnet.

Bemerkung. In einer wohlgeordneten Menge gibt es in kleinstes Element und jedes nichtmaximale Element besitzt einen *Nachfolger* (nämlich das kleinste der größeren Elemente).

Wohlordnungen werden in der Mengenlehre i.Zush. mit Ordinalzahlen und transfiniter Induktion betrachtet (vgl Kap 1.2.2).

Da Teilmengen partiell geordneter Mengen i.a. keine größten und kleinsten Elemente besitzen oder diese nicht immer bestimmt werden können, sind Schranken bzw Abschätzungen für die Elemente solcher Teilmengen von Interesse.

Definition. Sei $(M, \prec)$ partiell geordnet und $T \subset M$. Ein Element $s \in M$ heißt *obere (bzw untere) Schranke* für T in M, falls $x \preceq s$ (bzw $x \succeq s$) für alle $x \in T$. Existiert eine solche

Schranke, so heißt T *nach oben (bzw unten) beschränkt*. Trifft beides zu, so heißt T *beschränkt*.

Eine Teilmenge von $\mathbb{Z}$ ist genau dann wohlgeordnet, wenn sie nach unten beschränkt ist.

Von besonderem Interesse sind *optimale Schranken* für Teilmengen bzw deren Elemente.

Definition. Sei $(M, \prec)$ partiell geordnet und $T \subset M$. Eine kleinste obere (bzw größte untere) Schranke für T heißt *Supremum* (bzw *Infimum*) von T in M. Bezeichnung: $\sup T, \inf T \in M$.

Ein Supremum ist also ein Minimum der Teilmenge aller oberen Schranken.

Insbesondere ist ein Supremum (Infimum) der *leeren* Teilmenge $\emptyset \subset M$ ein Minimum (Maximum) der Gesamtmenge M.

Suprema und Infima von Teilmengen partiell geordneter Mengen existieren i.a. nicht. Falls sie existieren, sind sie i.a. nicht eindeutig und nicht in den Teilmengen enthalten.[1]

Wir werden Suprema und Infima nur für Teilmengen totalgeordneten Mengen (hauptsächlich von $\mathbb{R}$) betrachten. In diesem Fall haben sie einfachere Eigenschaften: Sie sind notwendigerweise eindeutig (falls sie existieren). Maxima sind Suprema, und umgekehrt ist ein Supremum ein Maximum, falls es zur Teilmenge gehört.

Man verwendet oft die folgende Beobachtung:

Lemma 1.1. *Es seien $(M, \prec)$ eine totalgeordnete Menge und $A, B \subset M$ Teilmengen, so daß $A \preceq B$ im Sinne, daß $a \preceq b \, \forall a \in A, b \in B$. Dann gilt $\sup A \preceq \inf B$, falls beide existieren.*

Beweis: Jedes $b \in B$ ist eine obere Schranke für A. Existiert $\sup A$, so gilt also $\sup A \preceq b$ für alle $b \in B$, dh $\sup A$ ist eine untere Schranke für B. Existiert auch $\inf B$, so folgt $\sup A \preceq \inf B$. $\square$

Beispiel. Wir erwähnen trotzdem zwei interessante Beispiele für den Supremums- und Infimumsbegriff in *partiell* geordneten Mengen.

(i) Die Inklusions-Relation auf der Potenzmenge einer Menge M: Das Supremum zweier Teilmengen $A, B \subset M$ ist ihre Vereinigung $A \cup B$ und ihr Infimum das Durchschnitt $A \cap B$.

(ii) Die Teilbarkeitsrelation auf $\mathbb{N}$: Das Infimum zweier natürlicher Zahlen ist ihr *größter gemeinsamer Teiler* (ggT) und das Supremum ihr *kleinstes gemeinsames Vielfaches* (kgV).

In beiden Fällen existieren Suprema und Infima stets und sind eindeutig.

---

[1] Weiterhin sind i.a. weder Suprema Maxima, noch umgekehrt. Existiert jedoch ein Supremum und liegt es in der Teilmenge, so ist es das eindeutige Supremum und zugleich Maximum der Teilmenge.