Prof. W. Bley 26.04.2006

2.Klausur zur Linearen Algebra I (WS 2005/2006)

Name	Vorname	Matrikelnummer

A 1	A 2	A 3	A 4	A 5	A 6	A 7	$\sum$

Aufgabe 1 (3+2 Punkte)
Sei $K = \mathbf{F}_2$ der Körper der Reste modulo 2.
a) Berechnen Sie die Inverse der Matrix $A \in \mathrm{Gl}_3(K)$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Sei $V = \{p \in K[X] \mid \deg(p) \leq 2\}$. Sei $f : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung, die bezüglich der Basis $v_1 = 1, v_2 = X, v_3 = X^2$ durch die Matrix A aus Teilaufgabe a) gegeben ist. Bestimmen Sie explizit $f(1 + X + X^2)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 10x_2 & + & 5x_3 & + & 3x_4 & = & 10 \\ & & & & 3x_3 & + & x_4 & = & 8 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & = & 9 \end{array}$$

über dem Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen. Bestimmen Sie die Gesamtheit aller Lösungen dieses Gleichungssystems.

Aufgabe 3 (2+2+2 Punkte)
Sei $V = \mathrm{Lin}(\sin(x), \cos(x))$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum, der durch die Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ erzeugt wird.
a) Zeigen Sie, daß $v_1 = \sin(x), v_2 = \cos(x)$ eine Basis von V bilden.
b) Sei $D : V \longrightarrow V, D(f) = f'$ gegeben , wobei $f \in V$ und f' die Ableitung von f bezeichnet. Geben Sie die Koordinatenmatrix von D bezüglich der Basis v_1, v_2 an.
c) Bestimmen Sie Kern und Bild von D.

Aufgabe 4 (2+2+2+2 Punkte)
Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:
a) Eine lineare Abbildung bildet linear unabhängige Mengen von Vektoren auf linear unabhängige Mengen von Vektoren ab.
b) Sei $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen. Es gelte $\dim(V) < \dim(W)$. Dann ist f nicht surjektiv.
c) Sei p eine Primzahl. Dann gibt es ein lineares Gleichungssystem über dem Körper $\mathbf{F}_p$ mit 10 Lösungen.
d) Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^5$ zwei Unterräume mit $\dim(U) = 3, \dim(V) = 2$. Dann gilt $\dim(U \cap V) \geq 1$.

Aufgabe 5 (6 Punkte)
Zeigen Sie, daß die Matrix $A \in M_3(\mathbb{Q})$,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -25 \\ 0 & 10 & -20 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar ist. Berechnen Sie ferner eine Basis aus Eigenvektoren und geben Sie eine Übergangsmatrix $S \in Gl_3(\mathbb{Q})$ an, so daß $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 6 (4 Punkte)
Sei $A \in M_n(K)$ und $m \in \mathbb{N}$, so daß $A^m = 0$. Zeigen Sie: A hat genau einen Eigenwert λ, nämlich $\lambda = 0$.

Aufgabe 7 (4 Punkte)
Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix aus $M_4(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} c & c & c & c \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ c & 1 & c & c \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von $c \in \mathbb{R}$.

Viel Erfolg!!!