Dozent: Dr. Peter Philip
Assistenten: Kilian Rückschloß, Pascal Stucky

Wintersemester 2018/19

Lineare Algebra 1
Hausaufgabenblatt 3

Aufgabe 1 (10 Punkte)

a) Sei $X = \{x \in \mathbb{Q} : 1 \leq x \leq 2\}$. Bestimmen Sie eine Teilmenge Y aus $\mathbb{Q}$, sodass durch

$$f : X \to Y,\ x \mapsto \frac{1}{x}$$

eine surjektive Funktion definiert wird. Ist diese Funktion injektiv bzw. bijektiv?

b) Überprüfen Sie, ob die folgenden Funktionen injektiv, surjektiv bzw. bijektiv sind:

i) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $(x, y) \mapsto x + y$

ii) $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

i) $i : X \to Y$ ist injektiv

ii) Für alle Funktionen $f, g : W \to X$ mit $i \circ f = i \circ g$ folgt $f = g$.

b) Finden Sie eine Aussage $A(s, f, g)$ und ergänzen Sie die "?", sodass gilt:
Die folgende Aussagen sind äquivalent:

i) $s : X \to Y$ ist surjektiv

ii) Für alle Funktionen $f, g :? \to ?$ mit $A(s, f, g)$ folgt $f = g$.

Zeigen Sie die resultierende Aussage.

Aufgabe 3 (10 Punkte) Sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Wir definieren die Relation $\sim$ auf X durch

$$x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y).$$

a) Zeigen Sie, dass durch $\sim$ eine Äquivalenzrelation definiert wird.

b) Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen bzgl. $\sim$.

Aufgabe 4 (10 Punkte) Sei $f : A \to B$ eine Funktion. Zeige oder widerlege die folgenden Aussagen:

i) $f(\bigcap \mathcal{X}) = \bigcap\{f(X) : X \in \mathcal{X}\}$ für alle $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(A)$ mit $\mathcal{X} \neq \emptyset$.

ii) $f(\bigcup \mathcal{X}) = \bigcup\{f(X) : X \in \mathcal{X}\}$ für alle $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(A)$.

iii) $f^{-1}(\bigcap \mathcal{X}) = \bigcap\{f^{-1}(X) : X \in \mathcal{X}\}$ für alle $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(B)$ mit $\mathcal{X} \neq \emptyset$.

iv) $f^{-1}(\bigcup \mathcal{X}) = \bigcup\{f^{-1}(X) : X \in \mathcal{X}\}$ für alle $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(B)$.

Abgabe bis Dienstag, 13. November 2018, 12:00 Uhr durch Hochladen einer PDF-Datei bei UniWorX.

Bitte begründen Sie alle Antworten und bemühen Sie sich um eine saubere Gliederung sowie eine klare Argumentation. Kennzeichnen Sie z. B. Behauptungen, Annahmen und Folgerungen. Orientieren Sie sich dabei an der Vorlesung und den Beispielen, die in den Übungen vorgerechnet werden.
