LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Fabien Morel
Sandra Weigl

Wintersemester 2012/13
8. Februar 2013

Lineare Algebra I

Klausur

Nachname: ______________ Vorname: ______________

Matrikelnr.: ______________ Fachsemester: ______________

Abschluss: Bachelor, PO ❑ 2007 ❑ 2010 ❑ 2011 Master, PO ❑ 2010 ❑ 2011

Lehramt Gymnasium: ❑ modularisiert ❑ nicht modularisiert

❑ Diplom ❑ Anderes: ______________

Hauptfach: ❑ Mathematik ❑ Wirtschaftsm. ❑ Inf. ❑ Phys. ❑ Stat. ❑ ________

Nebenfach: ❑ Mathematik ❑ Wirtschaftsm. ❑ Inf. ❑ Phys. ❑ Stat. ❑ ________

Anrechnung der Credit Points für das ❑ Hauptfach ❑ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Lichtbild- und Studienausweis sichtbar auf den Tisch.
Bitte überprüfen Sie, ob Sie **vier Aufgaben** erhalten haben.
Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**.
Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe.
Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.
Begründen Sie Ihre Aussagen!
Falls Sie einen Übungsschein benötigen (nicht modularisiert), füllen Sie bitte das Formular auf der folgenden Seite aus.
Durch Angabe eines Pseudonyms links unten (z.B. die letzten vier Ziffern Ihrer Matrikelnummer) stimmen Sie der Veröffentlichung von Klausurergebnis und Pseudonym im Internet zu.

Sie haben **90 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten.

Viel Erfolg!

Pseudonym	1	2	3	4	Σ
	/20	/10	/20	/20	/70

Name: ______________________________

Aufgabe 1. [20 Punkte]

Sei $\phi_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, in Abhängigkeit von einem Parameter $t \in \mathbb{R}$. Die darstellende Matrix von ϕ_t sei bezüglich der kanonischen Basis B gegeben durch:

$$M_t := M_{B,B}(\phi_t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1+t & 1-t & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

a) Bestimmen Sie den Rang von M_t mit Hilfe des Gaußalgorithmus.

b) Bestimmen Sie eine Basis von $\ker(\phi_t)$.

c) Ergänze Sie die in b) gefundene Basis des Kerns von ϕ_t zu einer Basis C von $\mathbb{R}^3$.

d) Geben Sie die darstellende Matrix $M_{C,C}(\phi_t)$ von ϕ_t bezüglich der Basis C an.

e) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $P_{\phi_t}(\lambda)$ von ϕ_t.

f) Welche Eigenwerte hat die lineare Abbildung ϕ_t?

g) Zeigen Sie, dass M_t für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ diagonalisierbar ist.

h) Ist M_t für $t \in \{0, -1\}$ diagonalisierbar?

Name: ______________________________

Aufgabe 2. [10 Punkte]

a) Kreuzen Sie für folgende Aussagen jeweils an, ob sie wahr oder falsch sind. Dabei gilt eine Aussage als wahr, wenn sie *immer* zutrifft; sie ist falsch, wenn es mindestens ein Gegenbeispiel gibt. *(Jede korrekte Antwort ergibt einen viertel Punkt, für jede falsche Antwort wird ein viertel Punkt abgezogen. Gar kein oder zwei Kreuze bei einer Aussage zählen als falsche Antwort. Weniger als null Punkte für die gesamte Aufgabe werden nicht vergeben.)*

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und U ein K-Untervektorraum von V, dann gilt:

- $u, v \in U \Rightarrow u + v \in U$ ☐ wahr ☐ falsch
- $u, v \notin U \Rightarrow u + v \notin U$ ☐ wahr ☐ falsch
- $u \in U, v \notin U \Rightarrow u + v \in U$ ☐ wahr ☐ falsch
- $u \in U, v \in V, u + v \in U \Rightarrow v \in U$ ☐ wahr ☐ falsch
- $u \in U, v \notin U \Rightarrow u + v \notin U$ ☐ wahr ☐ falsch
- $s \in K, u \notin U \Rightarrow s \cdot u \notin U$ ☐ wahr ☐ falsch

Sind $\phi : U \to V$ und $\psi : V \to W$ lineare Abbildungen, dann gilt:

- $\mathrm{Ker}(\psi \circ \phi) \subset \mathrm{Ker}(\phi)$ ☐ wahr ☐ falsch
- $\mathrm{Ker}(\psi \circ \phi) \subset \mathrm{Ker}(\psi)$ ☐ wahr ☐ falsch
- $\mathrm{Ker}(\psi \circ \phi) \supset \mathrm{Ker}(\psi)$ ☐ wahr ☐ falsch
- $\mathrm{Ker}(\psi \circ \phi) \supset \mathrm{Ker}(\phi)$ ☐ wahr ☐ falsch
- $\mathrm{Bi}(\psi \circ \phi) \subset \mathrm{Bi}(\phi)$ ☐ wahr ☐ falsch
- $\mathrm{Bi}(\psi \circ \phi) \subset \mathrm{Bi}(\psi)$ ☐ wahr ☐ falsch
- $\mathrm{Bi}(\psi \circ \phi) \supset \mathrm{Bi}(\phi)$ ☐ wahr ☐ falsch
- $\mathrm{Bi}(\psi \circ \phi) \supset \mathrm{Bi}(\psi)$ ☐ wahr ☐ falsch

Welche der fogenden Aussagen sind wahr?

- Es gibt eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, die injektiv ist. ☐ wahr ☐ falsch
- Es gibt eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, die injektiv ist. ☐ wahr ☐ falsch
- Es gibt eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, die surjektiv ist. ☐ wahr ☐ falsch
- Es gibt eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, die surjektiv ist. ☐ wahr ☐ falsch
- Jede $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ist surjektiv. ☐ wahr ☐ falsch
- Jede $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ist surjektiv. ☐ wahr ☐ falsch

Name: ______________________________

b) Seien $A, T \in GL_3(\mathbb{R})$, wobei $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 13 & 5 \end{pmatrix}$ und $T := \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

- Geben Sie A^{-1} an:

- Geben Sie die Determinante von A^{-1} an:

- Geben Sie die Determinante von $(T \cdot A \cdot T^{-1})$ an:

- Geben Sie das charakteristische Polynom von $(T \cdot A \cdot T^{-1})$ an:

Name: ______________________________

Aufgabe 3. [20 Punkte]

Sei K ein Körper mit $\mathrm{Char}(K) \neq 2$ und $a, b \in K$ mit $b \neq 0$. Für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei zudem $f : K^{2n} \to K^{2n}$ eine K-lineare Abbildung, wobei die darstellende Matrix von f bezüglich der kanonischen Basis B wie folgt definiert ist: $A = (a_{ij})_{i,j} := M_{B,B}(f)$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} a & \text{für } i = j \\ b & \text{für } i + j = 2n + 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \qquad \text{d.h.: } A = \begin{pmatrix} a & & & & & b \\ & a & & 0 & b & \\ & & \ddots & \iddots & & \\ & 0 & & & 0 & \\ & & \iddots & \ddots & & \\ & b & & 0 & a & \\ b & & & & & a \end{pmatrix}$$

a) Beweisen Sie mittels Induktion: $\mathrm{Det}(A) = (a^2 - b^2)^n$.
b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von f.
c) Berechnen Sie die Eigenwerte von f und geben Sie eine Basis der zugehörigen Eigenräume an.
d) Ist A diagonalisierbar?
e) Was ändert sich, wenn die Charakteristik des Körpers 2 ist?

Name: ____________________

Aufgabe 4. [20 Punkte]

Seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum der Dimension $n < \infty$ und $C = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V. Zudem sei $m \in \mathbb{Z}$ mit $1 \leq m \leq n$ und $W = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$. Sei nun $f : V \to V$ eine K-lineare Abbildung.

a) Zeigen Sie: W ist genau dann stabil unter f , d.h. $f(W) \subset W$, wenn $M_{C,C}(f)$ von der Form $\begin{pmatrix} G & H \\ 0 & J \end{pmatrix}$ ist, wobei $G \in M_m(K)$ und $J \in M_{n-m}(K)$.

Nehmen Sie ab nun an, dass W unter f stabil ist. Wir bezeichnen die Einschränkung von f auf W mit $f|_W : W \to W$.

b) Zeigen Sie, dass $f' : V/W \to V/W : \overline{x} \mapsto \overline{f(x)}$ eine K-lineare Abbildung ist.

c) Zeigen Sie, dass $C' = (\overline{v_{m+1}}, \dots, \overline{v_n})$ eine Basis von V/W ist und dass $M_{C',C'}(f') = J$ gilt.

d) Beweisen Sie: $\operatorname{Det}(f) = \operatorname{Det}(f|_W) \cdot \operatorname{Det}(f')$.

e) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Es existiert immer ein unter f stabiler Untervektorraum W' von V so, dass $V = W + W'$ gilt.