1 Lineare Algebra Tutorium 1

Andrea Colarieti Tosti

1.1 Aufgabe 1

Aufgabe 1

(1)

$$A := \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 1 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & a & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & a & a \\ 0 & a & b^2 & -4a & 1 \end{array}\right) \underset{II+2I}{\overset{III+I}{\Longrightarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & a+2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 & (a+2) \\ 0 & a & b^2 & -4a & 1 \end{array}\right) \underset{IV-a(II)}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & b^2-a(a+2) & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$x_3 \in \mathbb{R}$

$$x_4 = 1 \qquad x_2 = 4 - (a+2)x_3$$

$$x_3 = \frac{1}{b^2 - a(a+2)} \qquad x_1 = x_2 - x_3 = a - (a+2) - \frac{1}{b^2 - a(a+2)}$$

Beobachtung:

die Lösung von x_1 nach a und b ist nicht möglich innerhalb von $\{\forall\, a, b \in \mathbb{R} \mid b^2 - a(a+2) = 0\}$

$$\Rightarrow L_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{R} : b^2 - a(a+2) \neq 0\}$$

Also hat diesen LGS unendlich viele Lösungen.

Aufgabe 1

②

Jetzt kann die, aus der Lösungsmenge ausgeschlossene Menge $B := \{a, b \in \mathbb{R} : b^2 - a^2 - 2a = 0\}$, analysiert werden.

Es handelt sich um eine Hyperbel, die die Achsen ~~bei~~ a schneidet wenn:

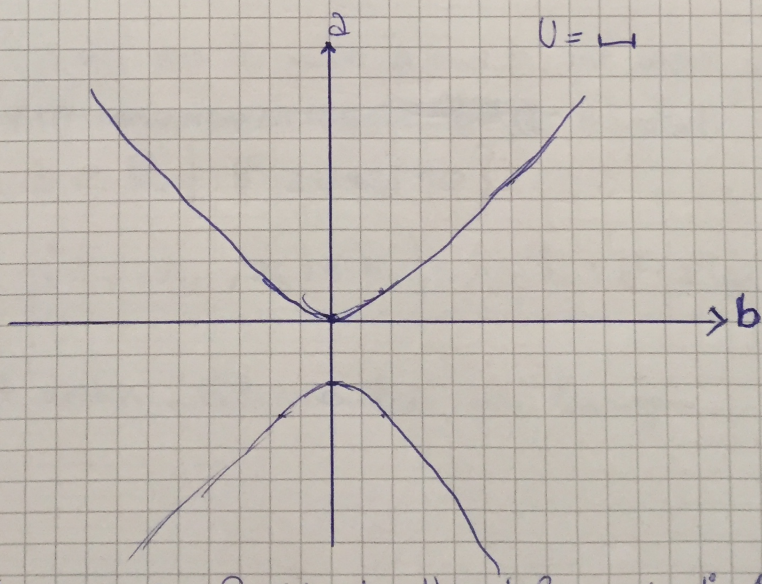
$$\forall (a,b) \in \mathbb{R} \mid b = 0 \vee a = -2$$

Wir untersuchen weitere Punkte um die Hyperbel graphisch darzustellen.

$a = 1 \Rightarrow b^2 = 1 + 2 \Rightarrow b_1 = \sqrt{3} \quad b_2 = -\sqrt{3}$

$a = -3 \Rightarrow b^2 = 9 - 6 = 3 \Rightarrow b_1 = \sqrt{3} \quad b_2 = -\sqrt{3}$

$\Rightarrow$



Beobachtung: Die Punkte der Hyperbel sind die Menge der Punkte für die A keine Lösung hat, umgekehrt sind die restliche Punkte der Ebene $\mathbb{R}^2$ die Möglichen Lösungen von A

1.2 Aufgabe 2

1

$\boxed{\text{Aufgabe 2}}$

$x_1 \cdot KMnO_4 + x_2 HNO_2 + x_3 H_2SO_4 \to x_4 MnSO_4 + x_5 K_2SO_4 + x_6 HN\ldots + x_7 H_2\ldots$

Zur lösung wird die gleichung in ein LGS geschrieben

$\Rightarrow$

$$x_1 = 2x_5$$
$$x_1 = x_4$$
$$4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4x_4 + 4x_5 + 3x_6 + x_7$$
$$x_2 + 2x_3 = x_6 + 2x_7$$
$$x_2 = x_6$$
$$x_3 = x_4 + x_5$$

$$\Rightarrow (A|b) = \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & -2 & -3/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV} \\ \mathrm{V} \\ \mathrm{VI} \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & +2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & -2 & -3/2 & -1/2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} 2\cdot\mathrm{V} - 3 \\ \mathrm{VI} - 2\cdot\mathrm{I} \\ \Rightarrow \end{array}$$

Aufgabe 2

(2)

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -2 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

$\overline{V} + 2\,\overline{IV}$

$\Rightarrow$

$\overline{VI} - \overline{II} - \overline{III}$

$$[\,0 \quad 0 \quad 2 \quad -2 \quad -3 \quad -\tfrac{3}{2} \quad -\tfrac{1}{2} \quad 0\,]$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{array}\right)$$

$\overline{V} \cdot \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$

$\overline{VI} + 2\,\overline{IV}$

$\cancel{0 \quad 1 \quad \tfrac{1}{2}}$

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{array}\right)$$

$\overline{III} \cdot \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$

$\overline{VI} - \overline{V}$

Aufgabe 2

3

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$

$x_1 = 2x_5$ $\qquad$ $x_6 = 2x_5$

$x_2 = -x_5$

$x_3 = +\frac{x_6}{2} \cancel{+x_7}$ $\qquad$ $x_3 = x_5$

$x_4 = -2x_5$

$x_5 = \frac{x_6}{2} \cancel{+x_7}$ $\qquad$ $x_5 \in \mathbb{R}$

$x_7 = 0$

$$\Rightarrow L_1 := \left\{ (2x_5, -x_5, x_5, -2x_5, 2x_5) \in \mathbb{R} \;\middle|\; x_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

1.3 Aufgabe 3

Aufgabe 3

1

$$(A|b) := \left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & -a^2+6a-9 & a-2 & 1 \\ a^2-2a-3 & a^2-6a+9 & 3 & a-3 \\ a+1 & -a^2+6a-9 & a+1 & 1 \end{array}\right) \overset{III-I}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & -(a-3)^2 & a-2 & 1 \\ (a+1)(a-3) & (a-3)^2 & 3 & a-3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & -(a-3)^2 & 0 & 1 \\ (a+1)(a-3) & (a-3)^2 & 0 & a-3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{II/_{a-3} - I}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & -(a-3)^2 & 0 & 1 \\ 0 & (a-3)-(a-3)^2 & 0 & a-3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\frac{II}{a-3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & -(a-3)^2 & 0 & 1 \\ 0 & 4-a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$(a+1)x_1 - (a-3)^2 x_2 = 1$$

$$(a-3)-(a-3)^2 x_2 = (a-3)$$

$$x_3 = 0$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{(a-3)}{(a-3)-(a-3)^2} = \frac{1}{4-a} \qquad x_1 = \frac{(a-3)^2 x_2}{a+1} = \frac{(a-3)^2}{(a+1)(4-a)}$$

Aufgabe 3

2

Das LGS hat für $a \in \{a \in \mathbb{R} \mid a = -1 \vee a = 4\}$ keine Lösung

$L_1 := \{a \in \mathbb{R} \mid a \neq -1 \wedge a \neq 4\}$

für alle $a \in L_1$ hat das LGS genau eine Lösung

$\Rightarrow$ es existiert kein $a \in \mathbb{R}$, für die das LGS unendlich viele Lösungen hat.

1.4 Aufgabe 4

$\boxed{\text{Aufgabe 4}}$ 1

a) Das Lgs

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 0 \\ ax_2 &= 1 \\ (a+3)x_3 &= 1 \end{aligned}$$

hat für $a=0$ keine Lösung, da $x_2 = \frac{1}{0}$ ↯

b) Das LGS

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 1 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

hat genau eine Lösung, nämlich:

$x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$

c) Das LGS

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

ist in abhängigkeit von x_3 lösbar

$x_1 = -x_3 \quad x_2 = -x_3$

ich kann x_3 einem Wert geben und die resultierende Vektoren liegen auf einer Gerade G

$G := \{(-x_3, -x_3, 2x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \in \mathbb{R}\}$