MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2018
16.04.2018

Tutoriumsblatt 0 - Mathematisches Warming up für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

1. Seien A und B Propositionen, d.h. Aussagen, die eindeutig wahr oder falsch sind.
   (i) Definieren Sie „$A \Rightarrow B$“ über eine Wahrheitstabelle. Machen Sie sich anhand eines konkreten Beispiels klar, dass „(falsch $\Rightarrow$ wahr)“ und „(falsch $\Rightarrow$ falsch)“ als *wahr* definiert sein muss.
   (ii) Wir definieren „$(A \Leftrightarrow B) := (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$“. Geben Sie die dazugehörige Wahrheitstabelle an.
   (iii) Beweisen Sie „$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$“, wobei $\neg A$ die Negation von A ist.

2. Geben Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen an:
   (i) $(2 \cdot 3 = 6) \vee (3 \cdot 3 = 8)$
   (ii) $(2 \cdot 3 = 5) \Rightarrow (2 \cdot 3 = 6)$
   (iii) $(2 \cdot 3 = 5) \Leftrightarrow (2 \cdot 3 = 7)$
   (iv) $(2 \cdot 2 = 4) \wedge ((-2) \cdot (-2) = 4)$
   (v) $\forall x \in \mathbb{Z} : (x = 0 \Rightarrow 3 \cdot x = 4 \cdot x)$
   (vi) $\forall x \in \mathbb{N}\, \exists y \in \mathbb{N} : x < y$
   (vii) $\exists x \in \mathbb{N}\, \forall y \in \mathbb{N} : x \leq y$

3. Formulieren Sie die folgenden Aussagen mit Hilfe der Aussagenlogik und überprüfen Sie ihren Wahrheitswert:
   i) 7 ist eine Quadratzahl und ungerade, oder 7 ist keine Quadratzahl und gerade.
   ii) Wenn 8 Teiler von 29 und 5 Teiler von 35 ist, dann ist 8 Teiler von 32 oder 35 kleiner als 5.

4. Notieren Sie die formale $\epsilon - \delta-$ Definition von Stetigkeit und negieren Sie sie mittels Quantorenumkehrung.

5. Welche der folgenden Aussagen über ganze Zahlen sind gleichbedeutend und für welche gilt nur „$\Rightarrow$“?

$$
\begin{aligned}
x &= 25 \\
3 \cdot x &= 75 \\
9 \cdot x^2 &= 225 \\
6 \cdot x^2 &= 150 \\
\forall b \in \mathbb{Z} : (6bx^2 &= 150b) \\
0 &= 0
\end{aligned}
$$

6. Vervollständigen Sie folgende Ausdrücke: Seien M_1 und M_2 Mengen, dann gilt

   (i) $M_1 \cap M_2 = \{x | x \in .....\}$

   (ii) $M_1 \cup M_2 = \{x | x \in .....\}$

   (iii) $M_1 \subset M_2 \iff \forall x \in ....$

   (iv) Sei $I \neq \emptyset$ eine Indexmenge und $(M_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Familie von Mengen. Dann ist

   $$\bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha = \{x | .....\}$$

   und

   $$\bigcap_{\alpha \in I} M_\alpha = \{x | .....\}$$

7. Sei Ω eine Menge und $M \subset \Omega$. Dann bezeichnet $\Omega \backslash M = M^c := \{\omega \in \Omega | \omega \notin M\}$. Zeigen Sie

$$\left(\bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha \right)^c = \bigcap_{\alpha \in I} M_\alpha^c.$$

8. Seien A, B Mengen und f eine zweistellige Relation mit Quellmenge A und Zielmenge B, d.h. $f \subseteq A \times B$.

   (i) Welche Bedingungen müssen gelten,
      (a) damit f eine Funktion ist?
      (b) damit die Funktion f injektiv ist?
      (c) damit die Funktion f surjektiv ist?

   (ii) Sei nun $y \in B$ gegeben. Unter welcher Bedingung hat die Gleichung $f(x) = y$
      (a) keine Lösung?
      (b) mindestens eine Lösung $x \in A$?
      (c) eine eindeutige Lösung $x \in A$?

   (iii) Wir betrachten nun die Abbildung $f : A \to B, x \mapsto x^2$ mit $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Bestimmen Sie $A, B \subseteq \mathbb{R}$ so, dass
      (a) f weder injektiv noch surjektiv ist.
      (b) f injektiv, aber nicht surjektiv ist.
      (c) f nicht injektiv, aber surjektiv ist.
      (d) f bijektiv ist.

Tutoriumsblatt 1 für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens Montag, den 16.04.2018, um 12 Uhr entweder über den Rückgabekasten oder über UniWorx ab. Spätere Abgaben können nicht berücksichtigt werden. Gerne können Sie in Gruppen von maximal drei Personen abgeben.
Melden Sie sich, falls noch nicht geschehen, für eines der Tutorien an. Alle Informationen zur Vorlesung finden Sie unter: `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~bohmmech/Teaching/lin_alg18/`

Aufgabe 1 (Gewichtung: 25%)
Untersuchen Sie das reelle lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & -2 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & + & ax_3 & & & = & 4 \\ -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & ax_4 & = & a \\ & & ax_2 & + & b^2x_3 & - & 4ax_4 & = & 1 \end{array}$$

in Abhängigkeit der beiden Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ auf Lösbarkeit bzw. eindeutige Lösbarkeit und stellen Sie die entsprechenden Bereiche für $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ graphisch dar.

Aufgabe 2 (Gewichtung: 25%)
Für die chemische Reaktionsgleichung

$$x_1 \cdot KMnO_4 + x_2 \cdot HNO_2 + x_3 \cdot H_2SO_4 \to x_4 \cdot MnSO_4 + x_5 \cdot K_2SO_4 + x_6 \cdot HNO_3 + x_7 \cdot H_2O$$

sollen die sogenannten stöchiometrischen Koeffizienten $x_1, x_2, ..., x_7 \in \mathbb{N}$ bestimmt werden. Stellen Sie dazu ein lineares Gleichungssystem auf und geben Sie die Lösungsmenge an.

Aufgabe 3 (Gewichtung: 25 %)
Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat das reelle lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrl} (a+1)x_1 & + & (-a^2+6a-9)x_2 & + & (a-2)x_3 & = 1 \\ (a^2-2a-3)x_1 & + & (a^2-6a+9)x_2 & + & 3x_3 & = a-3 \\ (a+1)x_1 & + & (-a^2+6a-9)x_2 & + & (a+1)x_3 & = 1 \end{array}$$

keine, genau eine, bzw. mehr als eine Lösung? Geben Sie jeweils die Lösungsmenge an.

Aufgabe 4 (Gewichtung: 25%)
Geben Sie jeweils ein Beispiel eines linearen Gleichungssystems von drei Gleichungen mit drei Unbekannten folgenden Typs an:

(a) Die Lösungsmenge ist leer.

(b) Die Lösungsmenge bestehe aus genau einem Punkt des $\mathbb{R}^3$.

(c) Die Lösungsmenge sei eine Gerade im $\mathbb{R}^3$.

(d) Die Lösungsmenge sei eine Ebene im $\mathbb{R}^3$.

(e) Die Lösungsmenge sei ganz $\mathbb{R}^3$.

(f) Gibt es ein lineares Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ mit zwei Gleichungen und drei Unbekannten, welches nicht lösbar ist? Begründen Sie.

MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2018
16.04.2018

Tutoriumsblatt 2
für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens Montag, den 23.04.2018, um 12 Uhr entweder über den Rückgabekasten oder über UniWorx ab. Spätere Abgaben können nicht berücksichtigt werden. Gerne können Sie in Gruppen abgeben (max. 3 Studierende).
Melden Sie sich, falls noch nicht geschehen, für eines der Tutorien an. Alle Informationen zur Vorlesung finden Sie unter: `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~bohmmech/Teaching/lin_alg18/`

Aufgabe 1 (Gewichtung: 40%)

(i) Entscheiden Sie, welche der folgenden Matrizen paarweise addiert/multipliziert werden können.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

Stellen Sie eine Merkregel auf, für welche Wahl von $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{N}$ die Matrixaddition $A + B$ und das Matrixprodukt $A \cdot B$ für Matrizen $A \in \mathbb{K}^{\alpha \times \beta}, B \in \mathbb{K}^{\gamma \times \delta}$ wohldefiniert ist.

(ii) Seien die beiden Matrizen A, B gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Produkt AB und BA.

(iii) Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine allgemeine Matrix mit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Geben Sie jeweils eine konkrete Matrix B an, so dass

(a) das Produkt AB, die 1., 2. bzw. 3. Spalte von A ergibt, also

$$AB = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \end{pmatrix}, j \in \{1, 2, 3\}.$$

(b) das Produkt BA, die 1., 2. bzw. 3. Zeile von A ergibt, also

$$BA = \begin{pmatrix} a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} \end{pmatrix}, i \in \{1, 2, 3\}.$$

Aufgabe 2 (Gewichtung: 20%)
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Erinnern Sie sich an die Definition der Linearform, die wie folgt lautet: Falls für $\Phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ Koeffizienten $\Phi_1, ..., \Phi_n \in \mathbb{K}$ existieren, sodass

$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n : \Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i x_i,$$

dann nennen wir Φ eine Linearform.

Zeigen Sie: Seien $c, d : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ Linearformen und $\lambda \in \mathbb{K}$, dann sind auch folgende Funktionen Linearformen.

(i) $(c + d) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}, x \mapsto c(x) + d(x)$

(ii) $\lambda c : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}, x \mapsto \lambda c(x)$

Aufgabe 3 (Gewichtung: 20%)
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}, a_1, ..., a_m : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ Linearformen, $b = (b_1, ..., b_m) \in \mathbb{K}^m$ ein Vektor und $((a_1, ..., a_m), b)$ das entsprechende LGS. Wir definieren die sogenannten Elementarumformungen

$$M_{k,\lambda}((a_1, ..., a_k, ..., a_m), (b_1, ..., b_k, ..., b_m)) := ((a_1, ..., \lambda a_k, ..., a_m), (b_1, ..., \lambda b_k, ..., b_m))$$

mit $1 \leq k \leq m, \lambda \in \mathbb{K}^\times$, d.h. das Ersetzen der k-ten Gleichung durch ihr λ-faches, und

$$A_{k,l,\lambda}((a_1, ..., a_k, ..., a_l, .., a_m), (b_1, ..., b_k, ..., b_l, ...b_m)) :=$$

$$((a_1, ..., a_k, ..., \lambda a_k + a_l, .., a_m), (b_1, ..., b_k, ..., \lambda b_k + b_l, ...b_m))$$

mit $1 \leq k \neq l \leq m, \lambda \in \mathbb{K}$, d.h. das Ersetzen der $l-$ten Gleichung durch die Summe des λ-fachen der k-ten Gleichung und der $l-$ten Gleichung.

Zeigen Sie, wie durch Kombinationen der Operationen $M_{k,\lambda}$ und $A_{k,l,\lambda}$ jeweils für geeignete k, l, λ die Vertauschung $V_{r,s}$ der r-ten und der s-ten Gleichung, d.h.

$$V_{r,s}((a_1, ..., a_r, ..., a_s, ...a_m), (b_1, ..., b_r, ..., b_s, ...b_m)) := (a_1, ..., a_s, ...a_r, ..., a_m), (b_1, ..., b_s, ..., b_r, ...b_m))$$

erreicht werden kann.

Aufgabe 4 (Gewichtung: 20%)
Sei die Matrix A gegeben durch $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie die Potenzen A^2, A^3 und geben Sie A^n für $n \in \mathbb{N}$ an. Beweisen Sie letzteres mit dem Beweisverfahren der vollständigen Induktion.

MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2018
23.04.2018

Tutoriumsblatt 3
für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens Montag, den 30.04.2018, um 12 Uhr entweder über den Rückgabekasten oder über UniWorx ab. Spätere Abgaben können nicht berücksichtigt werden. Gerne können Sie in Gruppen abgeben (max. 3 Studierende).
Melden Sie sich, falls noch nicht geschehen, für eines der Tutorien an. Alle Informationen zur Vorlesung finden Sie unter: `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~bohmmech/Teaching/lin_alg18/`

Aufgabe 1 (Gewichtung: 25 %)
Gegeben sind folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) In der Vorlesung haben Sie die *normierte Zeilenstufenform* kennengelernt. Welche der Matrizen sind bereits in der normierten Zeilenstufenform?

(ii) Bringen Sie die restlichen Matrizen in ihre normierte Zeilenstufenform.

(iii) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt *invertierbar*, wenn eine Matrix $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $AB = BA = E_n$ existiert. Sind diese Gleichungen erfüllt, dann nennt man B eine zu A *inverse* Matrix und man schreibt $A^{-1} := B$.
Invertieren Sie die Matrizen, falls möglich. Was fällt Ihnen auf?

Aufgabe 2 (Gewichtung: 25 %)
Bestimmen Sie für jedes $a \in \mathbb{R}$ die erweiterte Koeffizientenmatrix und bringen Sie diese in die normierte Zeilenstufenform, wobei Sie in jedem Schritt die von Ihnen verwendeten Elementarumformungen angeben. Geben Sie mit Hilfe der Theoreme aus der Vorlesung die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ an.

$$\begin{array}{rcrcrcl} (a-1)x_1 & & & + & (a+1)x_3 & = & 5a-8 \\ 2(a-1)x_1 & + & x_2 & + & 2(a+1)x_3 & = & 10a-9 \\ (a-1)x_1 & - & 2x_2 & & & = & 2a-16 \end{array}$$

Aufgabe 3 (Gewichtung: 25 %)
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen über Matrizen wahr oder falsch sind, d.h. geben Sie entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.
Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ und $\mathbb{K}$ ein Körper. Mit $\mathbf{O_n}$ bezeichnen wir die Matrix $\in \mathbb{K}^{n\times n}$, die nur das Nullelement des Körpers $\mathbb{K}$ als Einträge hat. Eine solche Matrix nennen wir *Nullmatrix*.

(i) Sei $m \in \mathbb{N}$. Es gilt $(A_1A_2\cdots A_m)^t = A_m^tA_{m-1}^t\cdots A_1^t$ für Matrizen $A_1, ..., A_m$, so dass das Produkt $A_1A_2\cdots A_m$ wohldefiniert ist.

(ii) Aus $AB = \mathbf{O_n}$ folgt $A = \mathbf{O_n}$ oder $B = \mathbf{O_n}$ für alle $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

(iii) Aus $A^2 = A$ folgt $A = E_n$, für alle $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

(iv) Aus $A^2 = A$ folgt $A = E_n$, für alle invertierbaren $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

(v) Es gilt $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ für alle $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

Aufgabe 4 (Gewichtung: 25 %)
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt *symmetrisch*, wenn $A^t = A$ gilt.

(i) Zeigen Sie: Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, dann ist das Produkt A^tA symmetrisch.

(ii) Bestimmen Sie die Menge aller $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft, dass das Produkt AB symmetrisch ist, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}.$$

MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2018
30.04.2018

Tutoriumsblatt 4
für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK-ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens Montag, den 07.05.2018, um 12 Uhr entweder über den Rückgabekasten oder über UniWorx ab. Spätere Abgaben können nicht berücksichtigt werden. Gerne können Sie in Gruppen abgeben (max. 3 Studierende).

Aufgabe 1 (Gewichtung: 25%)

(i) Erinnern Sie sich an die Definition einer *nilpotenten* Matrix auf dem Zentralübungsblatt 3. Weisen Sie nach, dass die folgende Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ nilpotent ist.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 6 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

(ii) Zeigen Sie, dass allgemein gilt: Ist $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ invertierbar und $b \in \mathbb{R}^4$, dann hat das inhomogene LGS $Av = b$ eine eindeutig bestimmte Lösung $v \in \mathbb{R}^4$.

(iii) Verwenden Sie Teil (iv) der Aufgabe 2 auf Zentralübungsblatt 3, um eine Lösung des LGS

$$(E_4 + A)v = w$$

zu bestimmen, wobei A die Matrix aus Teil (i) und $w = (2, 0, -1, 1)$ ist.

Aufgabe 2 (Gewichtung: 25 %)

(i) Es seien $m, n \in \mathbb{N}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass die Blockmatrix $A \in \mathbb{R}^{(m+n)\times(m+n)}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} B & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & C \end{pmatrix}$$

genau dann invertierbar ist, wenn B und C invertierbar sind. Wie sieht die inverse Matrix A^{-1} aus?

(ii) Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -6 & 37 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (Gewichtung: 25 %)
Wie schon in der Vorlesung definiert, werden die Matrizen in $\mathbb{K}^{m\times m}$ der Form

$$M_{k,\lambda} = E_m + (\lambda - 1)B_{kk}^{(m\times m)} \text{ für } k \in \{1, ..., m\} \text{ und } \lambda \in \mathbb{K}^{\times}$$

und

$$A_{k,l,\lambda} = E_m + \lambda B_{lk}^{(m\times m)} \text{ für } k, l \in \{1, ..., m\} \text{ und } \lambda \in \mathbb{K}$$

mit

$$(B_{kl}^{(m\times m)})_{ij} = \delta_{ik}\delta_{jl} \text{ für } 1 \leq i, j \leq m,$$

Elementarmatrizen genannt.

(i) Geben Sie die inverse Matrix der Elementarmatrix $M_{k,\lambda}$ sowie $A_{k,l,\lambda}$ an und weisen Sie dies rechnerisch nach.

(ii) Bestimmen Sie Matrizen $T, U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$T\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & 8 & 9\\ 1 & 2 & 3\\ 5 & 7 & 9\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}U = \begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 6 & 5 & 4\\ 9 & 8 & 7\end{pmatrix}$$

Hinweis: Dafür ist keine aufwändige Rechnung nötig!

(iii) Stellen Sie die Matrix $B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ als Produkt aus Elementarmatrizen dar.

Aufgabe 4 (Gewichtung: 25 %)

(i) Auf dem Zentralübungsblatt 2 haben Sie in Aufgabe 3 die Drehmatrix kennengelernt, die Drehungen in der Ebene um den Ursprung beschreibt.
Zeigen Sie, dass die Menge M mit

$$M = \left\{ \begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

mit der Matrixmuliplikation eine Gruppe bildet. Untersuchen Sie ferner, ob es sich dabei um eine abelsche Gruppe handelt.

(ii) Untersuchen Sie, welche der folgenden Teilmengen $U \subseteq X$ unter der jeweils angegebenen Verküpfung $*$ abgeschlossen sind, und ob U mit der entsprechend eingeschränkten Verknüpfung eine Gruppe ist.

(a) $X = \mathbb{R}^{3\times 3}, U = \left\{ \begin{pmatrix}1 & \lambda & 0\\ 0 & 1 & \mu\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \middle| \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$, $*$ ist die Multiplikation von Matrizen

(b) $X = \mathbb{R}$, $U = \{r + s\sqrt{2} \mid r, s \in \mathbb{Q}\ ,\ (r, s) \neq (0, 0)\}$, $*$ ist die Multiplikation auf $\mathbb{R}$

Tutoriumsblatt 5
für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK-ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens Montag, den 14.05.2018, um 12 Uhr entweder über den Rückgabekasten oder über UniWorx ab. Spätere Abgaben können nicht berücksichtigt werden. Gerne können Sie in Gruppen abgeben (max. 3 Studierende).

Achten Sie beim Lösen der Aufgaben auf Vollständigkeit. Das bedeutet auch, dass Sie jeden Schritt begründen, indem Sie notieren, welche Eigenschaft (z.B. Assoziativität, Kommutativität, neutrales Element, inverses Element) Sie benutzt haben.

Aufgabe 0 (Gewichtung: 10 %)
Geben Sie für folgende Begriffe jeweils eine vollständige Definition sowie ein Beispiel an.

- *Verknüpfung* $\circ$ auf einer Menge A (im Zuge dessen *assoziative Verknüpfung, kommutative Verknüpfung*)
- *Monoid* $(M, \circ)$ für Menge M und Verknüpfung $\circ$ (im Zuge dessen: *neutrales Element*)
- *Gruppe* $(G, \circ)$ für Menge G und Verknüpfung $\circ$ (im Zuge dessen: *inverses Element*) und *kommutative („abelsche") Gruppe*
- *Ring* $(R, +, *)$ für Menge R und Verknüpfungen $+, *$
- *Körper* $(K, +, *)$ für Menge K und Verknüpfungen $+, *$
- *Vektorraum* $(V, +, *)$ für Menge V und Verknüpfungen $+, *$

Aufgabe 1 (Staatsexamen H15T2A1) (Gewichtung: 20 %):
Bestimmen Sie alle Matrizen in $GL_2(\mathbb{C})$, die mit der Matrix $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ kommutieren.

Hinweis: Zwei Matrizen *kommutieren*, wenn $AX = XA$ gilt.

Aufgabe 2 (Gewichtung: 25%)
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $m, n, r \in \mathbb{N}$. Für $l \in \mathbb{N}$ und $M = (m_{ij})_{i,j=1,\ldots,l} \in \mathbb{K}^{l\times l}$ sei

$$spur(M) := \sum_{i=1}^{l} m_{ii} \text{ („Spur der Matrix } M\text{").}$$

Zeigen Sie:

(i) $A \in \mathbb{K}^{n\times n}, B \in \mathbb{K}^{n\times n} \Rightarrow spur(AB) = spur(BA)$

(ii) $A \in \mathbb{K}^{m\times n}, B \in \mathbb{K}^{n\times r}, C \in \mathbb{K}^{r\times m} \Rightarrow spur(ABC) = spur(BCA) = spur(CAB)$

(iii) Gegeben seien zwei Gruppen $(G, \circ)$ und $(H, *)$. Eine Funktion $\phi : G \to H$ heißt *Gruppenhomomorphismus*, wenn für alle $g_1, g_2 \in G$ gilt:

$$\phi(g_1 \circ g_2) = \phi(g_1) * \phi(g_2).$$

Zeigen Sie, dass $spur : (\mathbb{K}^{n\times n}, +) \to (\mathbb{K}, +); A \mapsto spur(A)$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 3 (Gewichtung: 20 %)
Sei M ein Monoid mit Neutralelement e_M. Zeigen Sie:

(i) Gibt es für jedes $a \in M$ ein eindeutig bestimmtes Element $b \in M$ mit $aba = a$, dann ist M eine Gruppe.

(ii) Gilt $a^2 = e_M$ für jedes $a \in M$, dann ist M eine abelsche Gruppe.

Aufgabe 4 (Gewichtung: 25 %)
Sei $M \neq \emptyset$ und $F := \{f : M \to M | f \text{ stetig } \}$ und $\circ : F \times F \to F, (f, g) \mapsto f \circ g$ die übliche Verkettung (Komposition) von Funktionen.
Zeigen Sie:

(i) Die Verknüpfung $\circ$ ist wohldefiniert und $(F, \circ)$ ist ein nicht-kommutativer Monoid, aber keine Gruppe.

(ii) Sei $f \in F$, dann gilt

  (a) f besitzt eine Rechtsinverse $\Leftrightarrow$ f ist surjektiv.
  (Dabei heißt $g : M \to M$ *Rechtsinverse* von f, wenn $f \circ g = id_M$)

  (b) f besitzt eine Linksinverse $\Leftrightarrow$ f ist injektiv
  (Dabei heißt $g : M \to M$ *Linksinverse* von f, wenn $g \circ f = id_M$)

(iii) Sei $G := \{f \in F | f \text{ bijektiv } \}$. Zeigen Sie, dass G unter $\circ$ abgeschlossen ist und $(G, \circ)$ eine Gruppe ist.

(iv) $\forall f, g, h \in G$ besitzt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f \circ x &= y \circ g \\ g \circ y &= h \end{aligned}$$

genau eine Lösung (x, y) für $x, y \in G$.

Hinweis: Sie dürfen die Theoreme aus der Analysis über Verkettung von Funktionen benutzen.

Tutoriumsblatt 6
für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK-ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens **Mittwoch**, den 23.05.2018, um 12 Uhr entweder über den Rückgabekasten oder über UniWorx ab. Spätere Abgaben können nicht berücksichtigt werden. Gerne können Sie in Gruppen abgeben (max. 3 Studierende).

Aufgabe 1: (Gewichtung 25%)

Betrachten Sie $\mathbb{R}^2$ mit den Verknüpfungen

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \qquad \text{(Addition)}$$
$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \qquad \text{(Multiplikation)}$$

Zeigen Sie:

(i) $(1, 0)$ ist neutrales Element von $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}, \cdot)$.

(ii) $(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$ ist das bzgl. der Multiplikation inverse Element zu (x, y), falls $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

(iii) Für $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ gilt das Distributivgesetz:

$$(x_1, y_1)\big((x_2, y_2) + (x_3, y_3)\big) = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) + (x_1, y_1) \cdot (x_3, y_3)$$

Aufgabe 2: (Gewichtung 25%)

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $U_Q := \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} : A^tQA = Q\}$ für $Q \in \mathbb{K}^{n\times n}$.
Zeigen Sie:
Für alle $M, S \in GL(n, \mathbb{K})$ und $N := S^tMS$ ist die Abbildung

$$\phi : U_M \to U_N, \phi(A) = S^{-1}AS$$

wohldefiniert und ein Gruppenisomorphismus zwischen den Untergruppen U_M und U_N von $GL(n, \mathbb{K})$.
Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass U_M bzw. U_N eine Untergruppe von $GL(n, \mathbb{K})$ ist.

Aufgabe 3: (Gewichtung: 25%)

Seien V und W zwei $\mathbb{R}$-Vektorräume. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen $f_i : V \to W$ auf Linearität, Surjektivität und Injektivität. In welchen Fällen liegt ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen vor?

(i) $V = W = \mathbb{R}^2$, $f_1(x, y) = (7x + 14y - 1, x + 2y + 5)$

(ii) $V = W = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $f_2(A) = AB$ mit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4: (Gewichtung 25%)

Seien V, W zwei $\mathbb{C}$-Vektorräume. Wir definieren auf $V \times W$ eine Verknüpfung $\oplus$ und eine Abbildung $* : \mathbb{C} \times (V \times W) \to (V \times W)$ durch

$$(v_1, w_1) \oplus (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2) \qquad \text{und} \qquad \lambda * (v_1, w_1) = (\lambda v_1, \bar{\lambda} w_1)$$

für alle $(v_1, w_1), (v_2, w_2) \in V \times W$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dabei bezeichnet $\bar{\lambda}$ jeweils die zu λ konjugiert-komplexe Zahl. Zeigen Sie, dass $(V \times W, \oplus, *)$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist.

MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2018
21.05.2018

Tutoriumsblatt 7
für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK-ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens Montag, den 28.05.2018, um 12 Uhr entweder über den Rückgabekasten oder über UniWorx ab. Spätere Abgaben können nicht berücksichtigt werden. Gerne können Sie in Gruppen abgeben (max. 3 Studierende).

Aufgabe 1 (Gewichtung 15%)

Für einen K-Vektorraum V und $S \subseteq V$ definieren wir

$$\operatorname{lin}(S) := \Big\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k \;\Big|\; v_k \in S, \lambda_k \in K, n \in \mathbb{N} \Big\}.$$

Seien nun $S, T \subseteq V$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen, oder widerlegen Sie sie durch ein Gegenbeispiel.

(i) $\operatorname{lin}(S) = \operatorname{lin}(T) \Rightarrow S = T$

(ii) $S \subseteq T \Rightarrow \operatorname{lin}(S) \subseteq \operatorname{lin}(T)$

Aufgabe 2 (Gewichtung 25%)

Sei V ein K-Vektorraum und $\phi : V \to V$ eine lineare Abbildung mit $\phi \circ \phi = \phi$.

(i) Beweisen Sie die Gleichung $\phi(V) = \{v \in V \mid \phi(v) = v\}$.

(ii) Zeigen Sie, dass $v - \phi(v) \in \ker(\phi)$ für alle $v \in V$ gilt.

(iii) Weisen Sie nach, dass $V = \ker(\phi) \oplus \phi(V)$ gilt.

(iv) Zeigen Sie, dass ϕ genau dann injektiv ist, wenn $\phi = \mathrm{id}_V$ gilt.

Aufgabe 3 (Gewichtung 30%)

Sei $I = [a, b] \neq \varnothing$,

$$\mathcal{P}_n := \Big\{ p : I \to \mathbb{R} : \Big(\forall x \in I : p(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,\ a_0, ..., a_n \in \mathbb{R} \Big) \Big\}$$

sowie $\phi_n : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathcal{P}_n$ der aus dem Zentralübungsblatt bekannte Isomorphismus.

(i) Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Begründen Sie kurz, warum die Abbildung $(D \circ \phi_n)$ $\mathbb{R}$-linear ist, wobei D gegeben sei durch

$$D : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n,\ f \mapsto (f' : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{df(x)}{dx})$$

und bestimmen Sie anschließend ihren Kern $\ker(D \circ \phi_n)$ sowie das Bild $(D \circ \phi_n)(\mathbb{R}^{n+1})$.

(ii) Zeigen Sie, dass es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ gibt mit $(\phi_n^{-1} \circ D \circ \phi_n)(v) = Av$ für alle $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ und geben Sie diese an.

Aufgabe 4 (Gewichtung 30%)

Sei K ein Körper mit $1_K \neq -1_K$ und V ein K-Vektorraum. Für eine lineare Abbildung $\phi : V \to V$ mit $\phi \circ \phi = \mathrm{id}_V$ definieren wir

$$V^+ = \{v \in V \mid \phi(v) = v\} \qquad \text{und} \qquad V^- = \{v \in V \mid \phi(v) = -v\}.$$

(i) Zeigen Sie, dass V^+ und V^- Untervektorräume von V sind.

(ii) Weisen Sie nach, dass $V = V^+ + V^-$ und $V^+ \cap V^- = \{0_V\}$ gilt, d.h. $V = V^+ \oplus V^-$.

Tutoriumsblatt 8 für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK-ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens Montag, den 04.06.2018, um 12 Uhr entweder über den Rückgabekasten oder über UniWorx ab. Spätere Abgaben können nicht berücksichtigt werden. Gerne können Sie in Gruppen abgeben (max. 3 Studierende).

Aufgabe 1 (Gewichtung 20%)

Seien $a_1, a_2, a_3, b \in \mathbb{R}$ gegeben, wobei mindestens einer der Koeffizienten ungleich 0 sei, dann bezeichnen wir die Menge

$$H := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b\}$$

als Hyperebene des 3-dimensionalen euklidschen Raums.

(i) Zeigen Sie, dass H einen affinen Untervektorraum $v + U = \{v + u \mid u \in U\},\ v \in \mathbb{R}^3,\ U \subseteq \mathbb{R}^3$ darstellt und bestimmen Sie explizit eine Menge von Vektoren $V \subseteq \mathbb{R}^3$, so dass $U = \operatorname{span}(V)$.

(ii) Skizzieren Sie U und H für den Spezialfall $a_1 = a_2 = a_3 = b = 1$ in einem Koordinatensystem.

Aufgabe 2 (Gewichtung 25%)

Gegeben sei die Menge $S = \{v_1, ..., v_6\}$ bestehend aus den Vektoren

$$\begin{array}{cccccc} v_1 = (1,2,1,2) & , & v_2 = (1,1,1,1) & , & v_3 = (0,1,1,0) & , \\ v_4 = (0,1,0,1) & , & v_5 = (1,0,0,1) & , & v_6 = (1,2,2,1) & \end{array}$$

(i) Stellen Sie den Vektor v_5 als Linearkombination von $S \setminus \{v_5\}$ und den Vektor v_6 als Linearkombination von $S \setminus \{v_6\}$ dar.

(ii) Weisen Sie nach, dass $\operatorname{span}(\{v_2, v_5, v_6\}) = \operatorname{span}(\{v_3, v_5, v_6\})$ gilt.

(iii) Finden Sie eine linear unabhängige Teilmenge $B \subseteq S$ mit $\operatorname{span}(B) = \operatorname{span}(S)$ und weisen Sie diese beiden Eigenschaften von B nach.

Aufgabe 3 (Gewichtung 25%)

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $\phi : V \to V$ eine injektive, lineare Abbildung.

(i) Zeigen Sie: Ist $S \subseteq V$ eine linear abhängige Teilmenge von V, dann ist auch $\phi(S)$ linear abhängig.

(ii) Weisen Sie an Hand eines konkreten Beispiels nach, dass $\phi(S)$ auch dann linear abhängig sein kann, wenn S linear unabhängig ist.

Aufgabe 4 (Gewichtung 30%)

Sei K ein Körper, $\phi : V \to W$ ein Homomorphismus von K-Vektorräumen und $\{b_1, ..., b_n\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von V. Zeigen Sie:

(i) $\{\phi(b_1), ..., \phi(b_n)\}$ ist Erzeugendensystem von $W \Rightarrow \phi$ ist surjektiv

(ii) ϕ ist injektiv $\Rightarrow \{\phi(b_1), ..., \phi(b_n)\} \subseteq W$ ist linear unabhängig

Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und $A := (a_{\cdot 1}, ..., a_{\cdot n}) \in K^{m \times n}$ für $n, m \in \mathbb{N}$, wobei $a_{\cdot j}$ den j-ten Spaltenvektor von A bezeichnet. Folgern Sie aus (i) und (ii):

(iii) $\{a_{\cdot 1}, ..., a_{\cdot n}\}$ Erzeugendensystem von $K^m \Rightarrow \big(\forall b \in K^m \exists x \in K^n : Ax = b\big)$

(iv) $\big(\forall x \in K^n : (Ax = 0 \Rightarrow x = 0)\big) \Rightarrow \{a_{\cdot 1}, ..., a_{\cdot n}\} \subseteq K^m$ ist linear unabhängig.

Tutoriumsblatt 9
für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK-ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens Montag, den 11.06.2018, um 12 Uhr entweder über den Rückgabekasten oder über UniWorx ab. Spätere Abgaben können nicht berücksichtigt werden. Gerne können Sie in Gruppen abgeben (max. 3 Studierende).

Aufgabe 1 (Gewichtung 30%)

Seien K ein Körper, V, W zwei K-Vektorräume und $\phi : V \to W$ eine lineare Abbildung.

(i) Zeigen Sie: Ist ϕ bijektiv und B eine Basis von V, dann ist $\phi(B)$ eine Basis von W.

(ii) Weisen Sie anhand konkreter Gegenbeispiele nach, dass die Aussage (i) im Allgemeinen falsch ist, wenn man das Wort "bijektiv" durch "injektiv" oder "surjektiv" ersetzt.

(iii) Zeigen Sie ebenso anhand eines konkreten Gegenbeispiels, dass (i) falsch wird, wenn man die Voraussetzung fallen lässt, dass ϕ eine lineare Abbildung ist.

Aufgabe 2 (Gewichtung 35%)

Überprüfen Sie, ob die Teilmengen S der folgenden K-Vektorräume V linear unabhängig sind. Falls nicht, bestimmen Sie eine Familie $(\lambda_v)_{v\in S}$ von Koeffizienten $\lambda_v \in K$ mit $\sum_{v\in S} \lambda_v v = 0_V$, wobei $\lambda_v \neq 0$ für mindestens ein $v \in S$ gilt.

(i) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{C}^2$, $S = \{(1, 1), (2i, 2i)\}$

(ii) $K = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}^3$, $S = \{(2 + i, 3 - i, 4 - 2i)\}$

(iii) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(1, 2, 5), (1, 3, 7), (4, 4, 4)\}$

(iv) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(5, 7, 3), (1, -1, 5), (11, 19, 0)\}$

Aufgabe 3 (Gewichtung 35%)

Gegeben seien die folgenden K-Vektorräume V_k mit jeweils einer Teilmengen $S_k,\ k \in \{1, 2, 3\}$.

(I) $K = \mathbb{R}$, $V_1 = \mathbb{R}^3$, $S_1 = \{(1, 2, 5), (1, 3, 3), (1, 0, 0), (1, -4, -1)\}$

(II) $K = \mathbb{C}$, $V_2 = \mathbb{C}^3$, $S_2 = \{(i, -i, 0), (1, 1, 0)\}$

(III) $K = \mathbb{R}$, $V_3 = \mathbb{R}^3$, $S_3 = \{(1, 0, 1), (1, 1, 1), (0, 1, 1)\}$

Bearbeiten Sie dazu die folgenden Aufgaben:

(i) Begründen Sie ohne Rechnung, dass S_1 linear abhängig ist und bestätigen Sie ihre Vermutung, indem Sie einen Vektor $v_1 \in S_1$ durch eine Linearkombination aus $S_1 \setminus \{v_1\}$ darstellen.

(ii) Begründen Sie ohne Rechnung, dass S_2 keine Basis von V_2 darstellt, aber durch Hinzunahme geeigneter Vektoren aus V_2 zu einer Basis wird. (Sie dürfen dabei als gegeben voraussetzen, dass S_2 linear unabhängig ist.) Finden Sie anschließend explizit eine Menge von Vektoren $S \subseteq V_2$, so dass $S_2 \cup S$ eine Basis von V_2 bildet.

(iii) Zeigen Sie, dass S_3 eine Basis von $V_3 = \mathbb{R}^3$ darstellt. Weisen Sie anschließend nach, dass ein geeigneter Vektor aus S_3 durch $\hat{e}_1 = (1, 0, 0)$ ersetzt werden kann und die neu erhaltene Menge wieder eine Basis von $\mathbb{R}^3$ darstellt.

MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2018
11.06.2018

Tutoriumsblatt 10
für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK-ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens Montag, den 18.06.2018, um 12 Uhr entweder über den Rückgabekasten oder über UniWorx ab. Spätere Abgaben können nicht berücksichtigt werden. Gerne können Sie in Gruppen abgeben (max. 3 Studierende).

Aufgabe 1 (Gewichtung 25%)

(i) Begründen Sie mit Hilfe des Schnittdimensionssatzes, dass es für drei 4-dimensionale Untervektorräume U, U', U'' eines 5-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraums V stets einen Vektor $v \neq 0_V$ in $U \cap U' \cap U''$ gibt.

(ii) Begründen Sie mit Hilfe des Dimensionssatzes für lineare Abbildungen, dass keine injektive lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ existiert.

Aufgabe 2 (Gewichtung 25%)

(i) Gegeben sei $U = \{(x_1, ..., x_7) \in \mathbb{R}^7 \mid (x_1, x_3 - x_5) = (x_2 + 2x_6, -x_2)\}$. Bestimmen Sie die Dimension dieses Untervektorraums des $\mathbb{R}^7$.

(ii) Zeigen Sie, dass der Untervektorraum U aus Teilaufgabe (i) mit $\mathrm{kern}(f_A)$ übereinstimmt, wobei

$$f_A : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto Ax \text{ mit } A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie nun nochmal durch ein anderes Vorgehen als in Teil (i) die Dimension $\dim_{\mathbb{R}}(U)$.

Aufgabe 3 (Gewichtung 25%)

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n \times n}$. Zeigen Sie mit Hilfe des Dimensionssatzes für lineare Abbildungen, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind.

(I) $\ker(A) = SR(A)$

(II) $A^2 = 0_{K^{n\times n}}$ und $n = 2 \cdot \mathrm{rg}(A)$.

Aufgabe 4 (Gewichtung 25%)

Für $a \in \mathbb{R}$ sei die Matrix $M_a \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben durch

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie für jedes $a \in \mathbb{R}$ den Rang $\mathrm{rg}(M_a)$ sowie eine Basis des Spaltenraums von M_a.

Tutoriumsblatt 11
für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK-ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens Montag, den 25.06.2018, um 12 Uhr entweder über den Rückgabekasten oder über UniWorx ab. Spätere Abgaben können nicht berücksichtigt werden. Gerne können Sie in Gruppen abgeben (max. 3 Studierende).

Aufgabe 1 (Gewichtung 30%)

(i) Wir betrachten $V = \mathbb{C}^2$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum mit der geordneten Basis $\mathcal{B} = ((1+i,1),(1-i,1),(0,1),(0,1+i))$. Berechnen Sie $\Phi_\mathcal{B}(v)$ für den Vektor $v = (2, 3+i)$, wobei $\Phi_\mathcal{B}$ die aus der Vorlesung bekannte Koordinatenabbildung bzgl. der Basis $\mathcal{B}$ bezeichnet.

(ii) Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynomfunktionen vom Grad ≤ 2 mit der geordneten Basis $\mathcal{B} = (1+x, 1-x, x^2+5)$. Bestimmen Sie ein Element $f \in V$ mit $\Phi_\mathcal{B}(f) = (3,-1,5)$.

Aufgabe 2 (Gewichtung 35%)

Für $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ definieren wir die Abbildung $\phi_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ v \mapsto Bv$. Sei zudem die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -5 & -1 & -5 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

gegeben. Ziel der Aufgabe ist es für beliebig vorgegebenes $n \in \mathbb{N}$ explizit Vektoren $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}^3$ zu bestimmen, so dass $\phi_{A^n}(\hat{e}_j) = w_j$ für $j \in \{1,2,3\}$. Gemäß Vorlesung ist die lineare Abbildung ϕ_{A^n} dann bereits eindeutig bestimmt.

(i) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}^\mathcal{B}_\mathcal{B}(\phi_A)$ und die Transformationsmatrizen $T^\mathcal{B}_{\mathcal{E}_3}$, $T^{\mathcal{E}_3}_\mathcal{B}$, wobei $\mathcal{B} := ((-1,2,1),(-1,0,1),(1,-5,2))$ und $\mathcal{E}_3$ die kanonische Basis bestehend aus den Einheitsvektoren $\mathcal{E}_3 := (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$.

(ii) Interpretieren Sie mittels der speziellen Form der Darstellungsmatrix $\mathcal{M}^\mathcal{B}_\mathcal{B}(\phi_A)$, durch welche geometrische Operation ϕ_A auf die Vektoren der Basis $\mathcal{B}$ wirkt.

(iii) Machen Sie sich zunächst bewusst, dass $A = \mathcal{M}^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_3}(\phi_A) = T^\mathcal{B}_{\mathcal{E}_3}\mathcal{M}^\mathcal{B}_\mathcal{B}(\phi_A)T^{\mathcal{E}_3}_\mathcal{B}$. Durch Verwendung dieser Identität lässt sich die Berechnung von A^n sehr stark vereinfachen. Nutzen Sie dies, um schließlich $\phi_{A^n}(\hat{e}_j) = w_j$ für $j \in \{1,2,3\}$ zu berechnen.

Aufgabe 3 (Gewichtung 35%)

Es sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynomfunktionen vom Grad ≤ 2, $\mathcal{A} = (2, 1+x, -x^2)$, W' der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynomfunktionen vom Grad ≤ 3 und W der Untervektorraum von W' gegeben durch $W = \operatorname{span}\{x, x+x^2, x^3+x^2\}$. Ohne Beweis darf verwendet werden, dass $\mathcal{A}$ eine geordnete Basis von V und $\mathcal{B} = (x, x+x^2, x^3+x^2)$ eine geordnete Basis von W ist.

(i) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}^\mathcal{A}_\mathcal{B}(\phi)$ der linearen Abbildung $\phi : V \to W$, $p \mapsto \int_0^x p(t)\, dt$.

(ii) Berechnen Sie die inverse Matrix $\mathcal{M}^\mathcal{A}_\mathcal{B}(\phi)^{-1}$ und verwenden sie diese für den Nachweis, dass ϕ^{-1} durch $\phi^{-1}(p) = p'$ für alle $p \in W$ gegeben ist.

(iii) Entscheiden Sie, ob es geordnete Basen $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$ von V und W gibt, so dass $\mathcal{M}^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{B}'}(\phi) = A$ gibt, wobei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 8 & 13 \end{pmatrix} \qquad \text{bezeichnet.}$$

MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2018
25.06.2018

Tutoriumsblatt 12
für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK-ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens Montag, den 02.07.2018, um 12 Uhr entweder über den Rückgabekasten oder über UniWorx ab. Spätere Abgaben können nicht berücksichtigt werden. Gerne können Sie in Gruppen abgeben (max. 3 Studierende).

Aufgabe 1 (Gewichtung $\frac{1}{6}$)

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $\mathrm{SL}(n, K) := \{A \in K^{n\times n} : \det(A) = 1_K\}$. Zeigen Sie, dass diese Menge mit der Verknüpfung der Matrixmultiplikation eine Gruppe bildet.

Aufgabe 2 (Gewichtung $\frac{1}{3}$)

(i) Bestimmen Sie die Determinante der folgenden Matrix durch Überführung in obere Dreiecksform.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \\ 7 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

(ii) Berechnen Sie $\det(B)$ mit Hilfe der Leibniz-Formel, wobei

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Hinweis: Die Resultate aus Aufgabe 4 von Übungsblatt 12 können dabei hilfreich sein.

Aufgabe 3 (Gewichtung $\frac{1}{6}$)

Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(i) Seien $A, B \in K^{n\times n}$, dann gilt $\det(AB) = \det(BA)$

(ii) Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\phi : V \to V$ eine lineare Abbildung.
Zeigen Sie: Die Abbildung ϕ ist genau dann bijektiv, wenn es geordnete Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ von V mit $\det \mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi) = 1$ gibt.

Aufgabe 4 (Gewichtung $\frac{1}{3}$)

Bestimmen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 19 & 4 & 1 & 2 \\ 13 & 7 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & 8 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2018
09.04.2018

Übungsblatt 1
für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Folgende Aufgaben werden in der Zentralübung am Dienstag, den 10.04.2018 besprochen. Diese Aufgaben sind als Musteraufgaben zu verstehen; Eine Korrektur von Lösungsversuchen der Studierenden zu diesen Aufgaben erfolgt nicht.

Aufgabe 1
Seien $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ und das reelle lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} ax_1 &\quad + bx_2 &= e \\ cx_1 &\quad + dx_2 &= f \end{aligned} \tag{1}$$

gegeben.

a) Geben Sie an für welche a, b, c, d, e, f das Gleichungssystem (1)

   i) genau eine Lösung
   ii) mehrere Lösungen
   iii) keine Lösung

   besitzt.

b) Seien $y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ und $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ sowie $(x_1, x_2) = (z_1, z_2)$ Lösungen des Gleichungssystems (1). Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $(x_1, x_2) = (\alpha y_1 + \beta z_1, \alpha y_2 + \beta z_2)$ Lösung des Gleichungssystems (1), wenn $e = 0 = f$ bzw. $e \neq 0 \vee f \neq 0$?

Aufgabe 2
Für welche $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist das reelle lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & + & \lambda z & = \mu \\ x & + & \lambda y & + & z & = \mu \\ \lambda x & + & y & + & z & = \mu \end{array}$$

lösbar? Bestimmen Sie alle Lösungsmengen in Abhängigkeit von λ und μ.

Aufgabe 3
Im $\mathbb{R}^3$ seien folgende drei Ebenen gegeben:

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 4y + 5z = 8\}$$
$$E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + 7y - z = 3\}$$
$$E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x - 15y + 11z = \alpha\}$$

Bestimmen Sie für $\alpha = 13$ und $\alpha = 14$ jeweils die Gestalt der Punktemengen $E_1 \cap E_2 \cap E_3$, und geben Sie an, ob es sich bei dieser Menge um eine Ebene, eine Gerade, einen Punkt oder die leere Menge handelt.

Aufgabe 4
Für die chemische Reaktionsgleichung

$$x_1 \cdot NH_4NO_3 \rightarrow x_2 \cdot H_2O + x_3 \cdot N_2 + x_4 \cdot O_2$$

sollen die stöchiometrischen Koeffizienten $x_1, ..., x_4 \in \mathbb{N}$ bestimmt werden. Stellen Sie dazu ein lineares Gleichungssystem auf und lösen Sie es.

Übungsblatt 2 für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Folgende Aufgaben werden in der Zentralübung am Dienstag, den 17.04.2018 besprochen. Diese Aufgaben sind als Musterbeispiele zu verstehen; Eine Abgabe von Lösungsversuchen der Studierenden zu diesen Aufgaben erfolgt nicht.

Aufgabe 1
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $\phi : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}$ eine Abbildung mit den Eigenschaften $\phi(v+w) = \phi(v) + \phi(w)$ und $\phi(\lambda v) = \lambda\phi(v)$ für alle $v, w \in \mathbb{K}^3$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass ϕ eine Linearform ist.

Hinweis: Erinnern Sie sich an die Definition der Linearform aus der Vorlesung: Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Falls für $\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ Koeffizienten $a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$ existieren, sodass

$$\forall v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{K}^n : \phi(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i,$$

dann nennen wir ϕ eine Linearform.
In der vorliegenden Aufgabe erhält man den ersten Koeffizienten a_1 durch $a_1 = \phi(1,0,0)$.

Aufgabe 2
Lösen Sie das inhomogene Gleichungssystem $Ax = b$ für die unten angegebene Matrix A und den Vektor b, indem Sie zunächst eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems und dann die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Systems berechnen. Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit dem Ergebnis aus Aufgabe 3 Übungsblatt 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 3 & 7 & -1 \\ -1 & -15 & 11 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3
Sei $\mathbb{K}$ ein Köper. Für $n \in \mathbb{N}, A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ definieren wir

$$\exp(A) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} A^m,$$

wobei A^m die m-te Potenz der Matrix A bezeichnet. Die Potenz einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ wird als wiederholte Multiplikation definiert: Sei $n, m \in \mathbb{N}, A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, dann ist $A^0 := E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $A^m := \underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{m-\text{mal}}$.

Sei nun $A = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$ und $\theta \in \mathbb{R}$.

(i) Zeigen Sie, dass gilt

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Hinweis: Berechnen Sie zunächst A^m per vollständiger Induktion über $m \in \mathbb{N}_0$ und benutzen Sie die Reihendarstellung von sin und cos aus der Analysis I.

(ii) Wählen Sie einen Vektor $x \in \mathbb{R}^2$ und berechnen Sie $y = \exp(A) \cdot x$. Zeichnen Sie die Vektoren x, y. Welcher geometrischen Opertation entspricht $\exp(A)$?

(iii) Welches Ergebnis erwarten Sie für $\exp(A)^2 = \exp(A) \cdot \exp(A)$? Argumentieren Sie geometrisch, ob $\exp(A) \cdot \exp(A) = \exp(A + A)$ gilt.
Ist diese Rechenregel für allgemeine Matrizen A, B, d.h. $\exp(A) \cdot \exp(B) = \exp(A+B)$ für $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$, zu erwarten?

Übungsblatt 3
für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Folgende Aufgaben werden in der Zentralübung am Dienstag, den 24.04.2018 besprochen. Diese Aufgaben sind als Musterbeispiele zu verstehen; Eine Abgabe von Lösungsversuchen der Studierenden zu diesen Aufgaben erfolgt nicht.

Aufgabe 1

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 7 \\ 3 & 6 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ sowie der Vektor $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Stellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix auf und bringen Sie sie in die normierte Zeilenstufenform, wobei Sie in jedem Schritt die verwendeten Elementarumformungen angeben. Geben Sie mit Hilfe der Theoreme aus der Vorlesung die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ für $Ax = b$ an.

Aufgabe 2

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt *invertierbar*, wenn eine Matrix $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $AB = BA = E_n$ existiert. Sind diese Gleichungen erfüllt, dann nennt man B eine zu A *inverse* Matrix und man schreibt $A^{-1} := B$.
Man bezeichnet A als *nilpotent*, wenn $A^m = \mathbf{O_n}$ für ein $m \in \mathbb{N}$ gilt, wobei wir mit $\mathbf{O_n}$ die Matrix $\in \mathbb{K}^{n\times n}$ bezeichnen, die nur das Nullelement des Körpers $\mathbb{K}$ als Einträge hat. Eine solche Matrix nennen wir *Nullmatrix*.

(i) Zeigen Sie, dass es zu jeder invertierbaren Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ genau eine inverse Matrix A^{-1} gibt.

(ii) Zeigen Sie, dass das Produkt zweier invertierbarer Matrizen wieder invertierbar ist.

(iii) Weisen Sie nach, dass eine Matrix niemals zugleich invertierbar und nilpotent ist.

(iv) Sei $C \in \mathbb{K}^{n\times n}$ nilpotent. Zeigen Sie, dass die Matrix $A = E_n + C$ invertierbar ist.
Hinweis: Betrachten Sie Matrizen der Form $E_n - C + C^2 + ... + (-1)^m C^m$ mit $m \in \mathbb{N}$.

vi) Bestimmen Sie die Inverse A^{-1} für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Wir bezeichnen mit A^t die *transponierte Matrix* der Matrix A, dessen $(i, j)-$ter Eintrag durch $(A^t)_{ij} := (A)_{ji}$ für $1 \le i \le n$ und $1 \le j \le m$ definiert ist.
Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt *symmetrisch*, wenn $A^t = A$ gilt.

(i) Zeigen Sie, dass für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ die Matrix $A^t + A$ symmetrisch ist.

(ii) Untersuchen Sie, ob das Produkt zweier symmetrischer Matrizen wiederum symmetrisch ist.

MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2018
30.04.2018

Übungsblatt 4
für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK-ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Die Zentralübung am 1. Mai entfällt aufgrund des Feiertags. Die Musterlösung finden Sie auf UniWorxs sowie (passwortgeschützt) auf der Homepage der Vorlesung. Diese Aufgaben sind als Musterbeispiele zu verstehen; Eine Korrektur von Lösungsversuchen der Studierenden zu diesen Aufgaben erfolgt nicht.

Aufgabe 1 Sei $\mathbb{K}$ ein Körper.

(i) Seien $m, n, p, q, r, s \in \mathbb{N}$ und $A_1 \in \mathbb{K}^{m\times p}, A_2 \in \mathbb{K}^{m\times q}, B_1 \in \mathbb{K}^{n\times p}, B_2 \in \mathbb{K}^{n\times q}$, $C_1 \in \mathbb{K}^{p\times r}, C_2 \in \mathbb{K}^{q\times r}, D_1 \in \mathbb{K}^{p\times s}, D_2 \in \mathbb{K}^{q\times s}$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 & D_1 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1C_1 + A_2C_2 & A_1D_1 + A_2D_2 \\ B_1C_1 + B_2C_2 & B_1D_1 + B_2D_2 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Entwickeln Sie für Rechnungen mit vielen Indizes eine geschickte Notation. Vorschlag: Für $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ sei für $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, (A)_{ij} \in \mathbb{K}$ der $(i, j)-$te Koeffizient und für Koeffizienten $a_{ij} \in \mathbb{K}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, sei $(a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$ die Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mit Koeffizienten $(A)_{ij} = a_{ij}$ für $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.
Wir ermutigen Sie auch dazu, ihre eigene Notation zu entwerfen. Die Bedingung dafür ist, dass diese klar definiert wird, bevor sie benutzt wird!

(ii) Sei $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{K}^{m\times m}, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Zeigen Sie:
A invertierbar $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & E_n \end{pmatrix}$ invertierbar.

(iii) Sei A invertierbar. Geben Sie die inverse Matrix von $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & E_n \end{pmatrix}$ in Blockschreibweise an und überprüfen Sie ihr Ergebnis rechnerisch.

Aufgabe 2

(i) Bestimmen Sie die Matrix $T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 1 & 4 & 8 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{die Gleichung} \qquad TA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \qquad \text{erfüllt ist.}$$

(ii) Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}, b \in \mathbb{K}^m, m, n \in \mathbb{N}$ und

$$E \in \mathcal{E}_m^1 = \{M_{k,\lambda}^{m\times m}, 1 \leq k \leq m, \lambda \in \mathbb{K}^\times\} \cup \{A_{k,l,\lambda} | 1 \leq k \neq l \leq m, \lambda \in \mathbb{K}\}$$

mit

$$M_{k,\lambda} = E_m + (\lambda - 1)B_{kk}^{(m\times m)} \text{ für } k \in \{1, ..., m\} \text{ und } \lambda \in \mathbb{K}^\times$$

und

$$A_{k,l,\lambda} = E_m + \lambda B_{lk}^{(m\times m)} \text{ für } k,l \in \{1,...,m\} \text{ und } \lambda \in \mathbb{K}$$

und

$$(B_{kl}^{(m\times m)})_{ij} = \delta_{ik}\delta_{jl} \text{ für } 1 \leq i,j \leq m.$$

Zeigen Sie, dass gilt

$$\mathcal{L}_{(A|b)} := \{v \in \mathbb{K}^n | Av = b\} = \mathcal{L}_{(EA|Eb)} = \{v \in \mathbb{K}^n | (EA)v = Eb\}.$$

Ordnen Sie dieses Ergebnis in die in der Vorlesung gegebene Zusammenfassung über lineare Gleichungssysteme ein und stellen Sie systematische Vorgehensweisen auf, wie Sie nun jedes lGS $(A|b)$ auf Lösungen untersuchen können.

Aufgabe 3

(i) Sei $M \neq \emptyset$ und $F := \{f : M \to M | f \text{ ist bijektiv}\}$ die Menge aller bijektiven Abbildungen von M nach M. Zeigen Sie, dass $(F, \circ)$ eine Gruppe bezüglich folgender Verknüpfung $\circ$ ist.

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)), \quad \forall f, g \in F, x \in M$$

Untersuchen Sie ferner, ob es sich hierbei um eine abelsche Gruppe handelt.

Hinweis: Sie dürfen die Theoreme aus der Analysis über Verkettung von stetigen Funktionen benutzen.

(ii) Sei $X = \mathbb{R}^{2\times 2}$ und sei $*$ ist die Multiplikation von Matrizen auf X, also

$$* : X \times X \to X.$$

Sei weiter $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$.
Untersuchen Sie, ob die Teilmenge $U \subseteq X$ unter der angegebenen Verküpfung $*$ abgeschlossen ist, und ob U mit der Verknüpfung * eine Gruppe ist.

Aufgabe 4

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Zeigen Sie:

(i) Für alle $a, b \in G$ gilt $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$

(ii) Für alle $a, b \in G$ besitzen die Gleichungen $a \circ x = b$ und $y \circ a = b$ jeweils eindeutig bestimmte Lösungen $x, y \in G$.

(iii) Sei $a \in G$. Dann sind die Abbildungen

$$l_a : G \to G, \; l_a(x) = a \circ x$$

und

$$r_a : G \to G, \; r_a(x) = x \circ a$$

jeweils bijektiv.

Übungsblatt 5 für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK-ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Folgende Aufgaben werden in der Zentralübung am Dienstag, den 08.05.2018 besprochen. Diese Aufgaben sind als Musterbeispiele zu verstehen. Eine Korrektur von Lösungsversuchen der Studierenden zu diesen Aufgaben erfolgt nicht.

Achten Sie beim Lösen der Aufgaben auf Vollständigkeit. Das bedeutet auch, dass Sie jeden Schritt begründen, indem Sie notieren, welche Eigenschaft (z.B. Assoziativität, Kommutativität, neutrales Element, inverses Element) benutzt wurde.

Aufgabe 1
Sei $(M, \cdot)$ ein Monoid. Wir sagen, ein Element $a \in M$ erfüllt die *linksseitige Kürzungsregel*, falls für $b, c \in M$ aus $ab = ac$ jeweils die Gleichung $b = c$ folgt. Sei M' die Menge aller Elemente aus M, die die linksseitige Kürzungsregel erfüllen.

(i) Zeigen Sie, dass M' unter der Verknüpfung $\cdot$ von M abgeschlossen ist, und dass M' mit der auf M' eingeschränkten Verknüpfung zu einem Monoid wird.

(ii) Beweisen Sie: Ist M' endlich, dann ist M' sogar eine Gruppe.
Hinweis: Verwenden Sie dafür die Abbildung $\tau_a : M' \to M', x \mapsto ax$ mit $a \in M'$.

(iii) Entscheiden Sie, ob die Aussage aus Teil (ii) auch für unendliches M' noch gültig ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung durch einen Beweis oder ein konkretes Gegenbeispiel.

Aufgabe 2
Sei $G, \circ$ eine Gruppe, $\emptyset \neq U \subseteq G$. Wir nennen U eine *Untergruppe von G*, wenn

(i) $\forall a, b, \in U : a \circ b \in U$

(ii) $\forall a \in U : a^{-1} \in U$

Zeigen Sie: $$U \text{ Untergruppe von } G \quad \Leftrightarrow \quad \forall a, b \in U : a \circ b^{-1} \in U$$

Aufgabe 3 (Staatsexamen F15T3A1)
Gegeben seien eine Gruppe G und drei Untergruppen $U_1, U_2, V \subseteq G$ mit der Eigenschaft, dass $V \subseteq U_1 \cup U_2$. Zeigen Sie, dass $V \subseteq U_1$ oder $V \subseteq U_2$ gilt.

Aufgabe 4
Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Wir definieren auf $V \times V$ eine Verknüpfung $\oplus$ und eine Abbildung $* : \mathbb{C} \times (V \times V) \to (V \times V)$ durch

$$(v_1, w_1) \oplus (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2) \qquad \text{und} \qquad (a + ib) * (v_1, w_1) = (av_1 - bw_1, bv_1 + aw_1)$$

für alle $(v_1, w_1), (v_2, w_2) \in V \times V$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Dabei bezeichnet $i \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit mit $i^2 = -1$. Zeigen Sie, dass $(V \times V, \oplus, *)$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist.

Übungsblatt 6
für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK-ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Folgende Aufgaben werden in der Zentralübung am Dienstag, den 15.05.2018 besprochen. Diese Aufgaben sind als Musterbeispiele zu verstehen. Eine Korrektur von Lösungsversuchen der Studierenden zu diesen Aufgaben erfolgt nicht.

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^2$ isomorph im Sinne von Vektorräumen sind.

Aufgabe 2
Sei $\emptyset \neq I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}), n \in \mathbb{N}_0$, die Menge der auf I $n-$mal stetig differenzierbaren Funktionen.
Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}), n \in \mathbb{N}_0$, Vektorräume sind und die Abbildung

$$\begin{aligned} D : \mathcal{C}^n &\to \mathcal{C}^{n-1} \\ f &\mapsto (x \mapsto \frac{df(x)}{dx}) \end{aligned}$$

eine lineare Abbildung ist.

Aufgabe 3
Seien $m, n \in \mathbb{N}$.

(i) Für einen Homomorphismus $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^m$ von $\mathbb{R}$-Vektorräumen sei die Abbildung $g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ definiert durch $g(v) = f(v) - if(iv)$ für alle $v \in \mathbb{C}^n$. Zeigen Sie, dass g ein Homomorphismus von $\mathbb{C}$-Vektorräumen ist.

(ii) Sei nun umgekehrt $g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ ein Homomorphismus von $\mathbb{C}$-Vektorräumen. Zeigen Sie, dass es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt, so dass $g(v) = f(v) - if(iv)$ für alle $v \in \mathbb{C}^n$ gilt.

Aufgabe 4

(a) Gegeben seien die folgenden $\mathbb{R}$-Vektorräume V und Teilmengen $U \subseteq V$. Entscheiden Sie, in welchen Fällen U ein Untervektorraum von V ist.
   (i) $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $U = \{f \in V \mid f(x, y) + f(x + 1, y) = 0\}$
   (ii) $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $U = \{f \in V \mid f(x + 1, y) = f(x, y) + 1\}$
   (iii) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $U = \{A \in V \mid AB = \mathrm{O}_2\}$, wobei $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist

(b) In Aufgabe 1 haben Sie gesehen, dass $V = \mathbb{C}^2$ sowohl als $\mathbb{R}$- als auch als $\mathbb{C}$-Vektorraum betrachtet werden kann. Finden Sie eine Teilmengen $U \subseteq V$ mit der Eigenschaft, dass U zwar ein Untervektorraum von V als $\mathbb{R}$-Vektorraum, aber kein Untervektorraum von V ist, wenn V als $\mathbb{C}$-Vektorraum aufgefasst wird.

Übungsblatt 7
für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK-ANDRE DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Einen Lösungsvorschlag zu diesen Aufgaben finden Sie (passwortgeschützt) auf der Vorlesungsseite. Diese Aufgaben sind als Musterbeispiele zu verstehen. Eine Korrektur von Lösungsversuchen der Studierenden zu diesen Aufgaben erfolgt nicht.

Aufgabe 1

Es seien K ein Körper und $(V, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum, außerdem $v \in V$ und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum von V. Sei außerdem $W \subseteq V$ gegeben durch $W = \{u + v \mid u \in U\}$.

(i) Weisen Sie nach, dass durch

$$\begin{aligned} \oplus : W \times W \to V \quad &, \quad (v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2 - v \\ * : K \times W \to V \quad &, \quad (\lambda, v_1) \mapsto \lambda v_1 + (1 - \lambda) v \end{aligned}$$

Abbildungen $W \times W \to W$ und $K \times W \to W$ gegeben sind, und dass es sich bei $(W, \oplus, *)$ um einen K-Vektorraum handelt.

(ii) Gegeben Sie eine hinreichende und notwendige Bedingung dafür an, dass W ein Untervektorraum von V ist.

Aufgabe 2

Sei $I = [a, b]$ mit $a < 0 < b$ und $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ versehen mit der üblichen Addition und skalaren Multiplikation von Funktionen der $\mathbb{R}$-Vektorraum der stetigen Funktionen. Sei zudem die Menge der reellen Polynome von Grad kleiner gleich $n \in \mathbb{N}$ gegeben durch

$$\mathcal{P}_n := \big\{p : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \mid a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}\big\}.$$

(i) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi_n : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ gegeben durch

$$\varphi_n(v) = p \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \Leftrightarrow \Big(v = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1} \hat{e}_k \ \wedge\ \big(\forall x \in I : p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\big),\ a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}\Big)$$

wohldefiniert und ein Monomorphismus ist, wobei $\hat{e}_k$ den k-ten Einheitsvektor bezeichnet. Zeigen Sie zudem $\varphi_n(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathcal{P}_n$ und folgern Sie, dass $\mathcal{P}_n$ einen Untervektorraum von $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ darstellt.

(ii) Sein nun $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Zeigen Sie, dass durch

$$T : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n+1},\ p \mapsto T := \big(I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_0^x p(t) dt\big)$$

eine lineare Abbildung definiert ist und bestimmen Sie ihr Bild $T(\mathcal{P}_n)$ sowie den Kern $\ker(T)$.

(iii) Die Abbildung $\phi_n : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathcal{P}_n$ mit $\phi_n(v) := \varphi_n(v)$ für alle $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, die man durch Einschränkung der Zielmenge von φ_n auf das Bild $\varphi_n(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathcal{P}_n$ erhält, stellt offenbar einen Isomorphismus zwischen $\mathbb{R}$-Vektorräumen dar mit Umkehrabbildung $\phi_n^{-1} : \mathcal{P}_n \to \mathbb{R}^{n+1}$. Zeigen Sie, dass eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{(n+2)\times(n+1)}$ existiert mit der Eigenschaft, dass $(\phi_{n+1}^{-1} \circ T \circ \phi_n)(v) = Av, \quad \forall v \in \mathbb{R}^{n+1}$ und geben Sie diese an.

Aufgabe 3

Sei $I := [-1, 1]$ und $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ versehen mit der üblichen Addition und skalaren Multiplikation von Funktionen der $\mathbb{R}$-Vektorraum der stetigen Funktionen.

(i) Zeigen Sie, dass die Teilmenge der geraden Abbildungen

$$\mathcal{G} := \big\{ f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) : \big(\forall x \in I : f(x) = f(-x)\big) \big\}$$

einen Untervektorraum von $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ bildet.

(ii) Sei nun zusätzlich die Teilmenge der ungeraden Funktionen

$$\mathcal{U} := \big\{ f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) : \big(\forall x \in I : f(x) = -f(-x)\big) \big\}$$

gegeben, wobei Sie diesmal ohne Beweis annehmen dürfen, dass diese einen Untervektorraum von $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ darstellt. Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ durch die direkte Summe von $\mathcal{G}$ und $\mathcal{U}$ gegeben ist, also $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) = \mathcal{G} \oplus \mathcal{U}$.

MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2018
28.05.2018

Übungsblatt 8
für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK-ANDRE DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Folgende Aufgaben werden in der Zentralübung am Dienstag, den 29.05.2018 besprochen. Diese Aufgaben sind als Musterbeispiele zu verstehen. Eine Korrektur von Lösungsversuchen der Studierenden zu diesen Aufgaben erfolgt nicht.

Aufgabe 1

Überprüfen Sie, ob die folgenden Teilmengen $S \subseteq V$ des angegebenen K-Vektorraums V linear unabhängig sind. Falls ja, weisen Sie dies nach, ansonsten stellen Sie einen (von Ihnen gewählten) Vektor $v \in S$ als Linearkombination von $S \setminus \{v\}$ dar.

(i) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{C}^2$, $S = \{(1, i), (i, 1), (2, 0)\}$

(ii) $K = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}^2$, $S = \{(1, i), (i, 1), (2, 0)\}$

(iii) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $S = \{f, g, h\}$ mit $f(x) = 2x$, $g(x) = x - 3$, $h = x^2$

Aufgabe 2

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, und seien S, T linear unabhängige Teilmengen von V.

(i) Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass die Gleichung $\mathrm{span}(S) \cap \mathrm{span}(T) = \mathrm{span}(S \cap T)$ im Allgemeinen falsch ist.

(ii) Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen.

  (I) Die Menge $S \cup T$ ist linear unabhängig, und es gilt $S \cap T = \varnothing$.

  (II) Es gilt $\mathrm{span}(S \cup T) = \mathrm{span}(S) \oplus \mathrm{span}(T)$.

Aufgabe 3

Sei K ein Körper, $\phi : V \to W$ ein Homomorphismus von K-Vektorräumen und $\{b_1, ..., b_n\}$ ein Erzeugendensystem von V. Zeigen Sie:

(i) ϕ ist surjektiv $\Rightarrow \{\phi(b_1), ..., \phi(b_n)\}$ ist Erzeugendensystem von W

(ii) $\big(\forall i, j \in \{1, ..., n\}, i \neq j : \phi(b_i) \neq \phi(b_j)$ und $\{\phi(b_1), ..., \phi(b_n)\} \subseteq W$ ist linear unabhängig$\big)$
$\Rightarrow \phi$ ist injektiv.

Sei K ein Körper und $A := (a_{\cdot 1}, ..., a_{\cdot n}) \in K^{m \times n}$ für $n, m \in \mathbb{N}$, wobei $a_{\cdot j}$ den j-ten Spaltenvektor von A bezeichnet. Folgern Sie aus (i) und (ii):

(iii) $\big(\forall b \in K^m \exists x \in K^n : Ax = b\big) \Rightarrow \{a_{\cdot 1}, ..., a_{\cdot n}\}$ Erzeugendensystem von K^m

(iv) $\big(\forall i, j \in \{1, ..., n\}, i \neq j : a_{\cdot i} \neq a_{\cdot j}$ und $\{a_{\cdot 1}, ..., a_{\cdot n}\} \subseteq K^m$ ist linear unabhängig$\big)$
$\Rightarrow \big(\forall x \in K^n : (Ax = 0 \Rightarrow x = 0)\big)$.

Übungsblatt 9
für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK-ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Folgende Aufgaben werden in der Zentralübung am Dienstag, den 05.06.2018 besprochen. Diese Aufgaben sind als Musterbeispiele zu verstehen. Eine Korrektur von Lösungsversuchen der Studierenden zu diesen Aufgaben erfolgt nicht.

Aufgabe 1

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Genau dann besitzt V nur einelementige Basen, wenn ein $v \in V$ mit $V = \mathrm{lin}(v)$ und $v \neq 0_V$ existiert. (Dabei darf ohne Beweis verwendet werden, dass jeder K-Vektorraum mindestens eine Basis besitzt.)

(ii) Setzen wir nun voraus, dass $B = \{v, w\}$ eine zweielementige Basis von V ist. Zeigen Sie, dass für jeden Vektor $w' \in V$ die Menge $B' = \{v, w'\}$ genau dann eine Basis von V ist, wenn $\lambda, \mu \in K$ mit $w' = \lambda v + \mu w$ und $\mu \neq 0$ existieren.

Aufgabe 2

Geben Sie für die folgenden K-Vektorräume V eine Basis an, und weisen Sie die Basiseigenschaft jeweils nach. Sie dürfen dabei als gegeben annehmen, dass es sich tatsächlich jeweils um einen K-Vektorraum handelt.

(i) $K = \mathbb{R}$, $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0\}$

(ii) $K = \mathbb{R}$, $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,\mathbb{R}} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ mit } a + b + c + d = 0 \right\}$

(iii) $K = \mathbb{R}$, $V = \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ w & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,\mathbb{C}} \;\middle|\; u, v, w \in \mathbb{C} \text{ mit } u + v + w = 0 \right\}$

Aufgabe 3

Sei $n \in \mathbb{N}$, $I := [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $a < b$ und $\mathcal{P}_n := \{\ p : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \mid a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}\}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynome vom Grad kleiner gleich n.

(i) Weisen Sie nach, dass die Menge $M_1 := \{m_0, ..., m_n\} \subseteq \mathcal{P}_n$ eine Basis von $\mathcal{P}_n$ bildet, wobei die Monome m_k für $k \in \mathbb{N}_0$ definiert seien durch $m_k : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^k$.

(ii) Seien außerdem die Polynome $p_k : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \prod_{i=0}^{k-1}(x - i) = x(x-1) \cdot .... \cdot (x - k + 1)$ für $k \in \mathbb{N}$ und $p_0 : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Menge $M_2 := \{p_0, ..., p_n\}$ ebenfalls eine Basis von $\mathcal{P}_n$ bildet.

Übungsblatt 10
für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK-ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Folgende Aufgaben werden in der Zentralübung am Dienstag, den 12.06.2018 besprochen. Diese Aufgaben sind als Musterbeispiele zu verstehen. Eine Korrektur von Lösungsversuchen der Studierenden zu diesen Aufgaben erfolgt nicht.

Aufgabe 1

Seien U, V, W endlich-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume und $\phi : U \to V$, $\psi : V \to W$ lineare Abbildungen, wobei ϕ injektiv, ψ surjektiv ist und $\phi(U) = \ker(\psi)$ gilt. Beweisen Sie die folgende Gleichung:

$$\dim U + \dim W = \dim V$$

Aufgabe 2

Für $V := \mathbb{R}^3$ seien die folgenden Untervektorräume $U_1 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 6x_3 = 0\}$ und $U_2 := \operatorname{span}(\{(3, 2, 1), (3, 0, -1)\}) \subseteq \mathbb{R}^3$ gegeben.

(i) Argumentieren Sie durch Anwenden von Resultaten aus der Vorlesung und ohne explizites Bestimmen von $U_1 \cap U_2$, welchen Wert $\dim_{\mathbb{R}}(U_1 \cap U_2)$ annimmt.

(ii) Finden Sie nun explizit eine Basis des Untervektorraums $U_1 \cap U_2$ und bestätigen Sie damit Ihr Resultat bezüglich der Dimension dieses Untervektorraums aus Teil (i). Geben Sie außerdem eine Basis von U_1 an.

Aufgabe 3

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n\times n}$. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(I) $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^2)$

(II) $SR(A) = SR(A^2)$

(III) $\dim\ker(A) = \dim\ker(A^2)$

(IV) $\ker(A) = \ker(A^2)$

Aufgabe 4

Sei K ein Körper, $l, m, n \in \mathbb{N}$ sowie $B \in K^{n\times l},\ A \in K^{m\times n}$. Zeigen Sie:

(i) $\operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(B) \leq n + \operatorname{rg}(AB)$

(ii) $\operatorname{rg}(A) = 1 \Leftrightarrow \big(\exists a \in K^{m\times 1} \setminus \{0\}, b \in K^{1\times n} \setminus \{0\} : A = ab\big)$

Übungsblatt 11
für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK-ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Folgende Aufgaben werden in der Zentralübung am Dienstag, den 19.06.2018 besprochen. Diese Aufgaben sind als Musterbeispiele zu verstehen. Eine Korrektur von Lösungsversuchen der Studierenden zu diesen Aufgaben erfolgt nicht.

Aufgabe 1

(i) Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der 2×2-Matrizen über $\mathbb{R}$ und $\mathcal{B} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ mit

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie $\Phi_{\mathcal{B}}(B + nC)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad , \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der linearen Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $\mathcal{B} = (e_1^*, e_2^*)$, wobei e_1^*, e_2^* die eindeutig bestimmten linearen Abbildungen mit $e_1^*(1,0) = 1$, $e_1^*(0,1) = 0$, $e_2^*(1,0) = 0$ und $e_2^*(0,1) = 1$ bezeichnen. Sei $f \in V$ die eindeutig bestimmte lineare Abbildung mit $f(2,3) = 8$ und $f(-1,7) = -2$. Bestimmen Sie $\Phi_{\mathcal{B}}(f)$.

Aufgabe 2

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ der Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ gegeben durch $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0\}$.

(i) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A} = ((1,2,0),(0,3,1))$ und $\mathcal{B} = ((1,2,0),(1,-1,-1))$ geordnete Basen von U sind.

(ii) Sei $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\phi(x_1, x_2, x_3) = (3x_3, 2x_2, \frac{4}{3}x_1)$. Weisen Sie nach, dass ϕ linear ist und $\phi(U) \subseteq U$ gilt.

(iii) Sei $\psi = \phi|_U$. Nach Teil (ii) ist ψ eine lineare Abbildung $U \to U$. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen $\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(\psi)$ $\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\psi)$ $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\psi)$ und $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\psi)$.

Aufgabe 3

Gegeben sei der Untervektorraum $U := \operatorname{span}(\{v_0, v_1, v_2, v_3\}) \subseteq \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ des Raumes der glatten Funktionen, wobei $v_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^k e^x$ für $k \in \mathbb{N}_0$.

(i) Begründen Sie kurz, dass durch $\mathcal{B} := (v_0, v_1, v_2, v_3)$ eine geordnete Basis von U gegeben ist.

(ii) Gegeben sei der bekannte Ableitungsoperator $D : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}),\ f \mapsto f'$. Zeigen Sie, dass $D(U) \subseteq U$ und somit durch $D_U : U \to U,\ f \mapsto f'$ eine weitere lineare Abbildung gegeben ist. Bestimmen Sie nun die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(D_U)$

(iii) Bestimmen Sie mit Hilfe von $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(D_U)$ die Funktionen f' und f'', wobei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 3xe^x + x^2e^x - 2x^3e^x.$$

Übungsblatt 12 für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK-ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Folgende Aufgaben werden in der Zentralübung am Dienstag, den 26.06.2018 besprochen. Diese Aufgaben sind als Musterbeispiele zu verstehen. Eine Korrektur von Lösungsversuchen der Studierenden zu diesen Aufgaben erfolgt nicht.

Aufgabe 1

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n\times n}$, $\lambda \in K^\times$ und $i, j \in \{1, ..., n\}$, $i \neq j$.

(i) Zeigen Sie, $\det(A_{i,j,\lambda}A) = \det(A)$, wobei $A_{i,j,\lambda} \in K^{n\times n}$, die Elementarmatrix bezeichne, welche bei Multiplikation von links das λ-fache der i-ten Zeile zur j-ten Zeile der Matrix A addiert.

(ii) Zeigen Sie, dass $\det(M_{k,\lambda}A) = \lambda \det(A)$, wobei $M_{k,\lambda} \in K^{n\times n}$, die Elementarmatrix bezeichne, welche bei Multiplikation von links die k-te Zeile von A durch ihr λ-faches ersetzt.

(iii) Sei nun A eine obere Dreiecksmatrix, d.h. A hat die schematische Form

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\det(A) = \prod_{k=1}^n a_{kk}$.

Aufgabe 2

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, x_2, ..., x_n \in K$.
Zeige durch Induktion nach n, dass

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1\leq i<j\leq n} (x_j - x_i).$$

Aufgabe 3

Sei K ein Körper und $M \in K^{n\times n}$ eine Blockmatrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & B_3 \end{pmatrix} \text{ mit } B_1 \in K^{k\times k}, B_2 \in K^{k\times l}, B_3 \in K^{l\times l},\ k, l \in \mathbb{N} \text{ mit } k + l = n,$$

dann folgt $\det(A) = \det(B_1)\det(B_3)$.

Aufgabe 4

Wir betrachten die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für jedes $\sigma \in S_4$ sei $s_\sigma = \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} a_{3,\sigma(3)} a_{4,\sigma(4)}$ der zugehörige Summand in der Leibniz-Formel für die Determinante der Matrix A. Zeigen Sie, dass es höchstens vier Elemente $\sigma \in S_4$ mit $s_\sigma \neq 0$ gibt, und geben Sie eines davon als Verkettung von Transpositionen an.

MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2018
02.07.2018

Übungsblatt 13
für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK-ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Folgende Aufgaben werden in der Zentralübung am Dienstag, den 03.07.2018 besprochen. Diese Aufgaben sind als Musterbeispiele zu verstehen. Eine Korrektur von Lösungsversuchen der Studierenden zu diesen Aufgaben erfolgt nicht.

Aufgabe 1

Es seien $A, B \in K^{n\times n}$. Falls eine Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ existiert mit $B = TAT^{-1}$, dann nennt man A und B zueinander ähnlich. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen gelten, falls A und B ähnlich sind.

(i) Es gilt $\det A = \det B$ und $\mathrm{spur}(A) = \mathrm{spur}(B)$.

(ii) Genau dann ist λ ein Eigenwert von A, wenn λ ein Eigenwert von B ist.

(iii) Es gilt $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die reellen Eigenwerte der folgenden Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sowie für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A, \lambda)$.

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Sei $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen 2×2-Matrizen und $\phi : V \to V$ gegeben durch $X \mapsto AX$, mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi)$ bezüglich der geordneten Basis $\mathcal{B} = (\mathrm{B}_{11}, \mathrm{B}_{12}, \mathrm{B}_{21}, \mathrm{B}_{22})$ bestehend aus den Basismatrizen.

(b) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von ϕ. Geben Sie für jeden Eigenwert die algebraische Vielfachheit an.

(c) Bestimmen Sie für einen der Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(\phi, \lambda)$. Bitte beachten Sie dabei, dass die Basiselemente in V (und nicht in $\mathbb{R}^4$) liegen.

MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2018
02.07.2018

Übungsblatt 14
für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK-ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Folgende Aufgaben werden in der Zentralübung am Dienstag, den 10.07.2018 besprochen. Diese Aufgaben sind als Musterbeispiele zu verstehen. Eine Korrektur von Lösungsversuchen der Studierenden zu diesen Aufgaben erfolgt nicht.

Aufgabe 1

Es sei A eine invertierbare Matrix und $\lambda \in K$ ein Eigenwert von A. Zeigen Sie, dass $\lambda \neq 0$ und λ^{-1} ein Eigenwert von A^{-1} ist.

Aufgabe 2

Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade, $n = 2k$ mit $k \in \mathbb{N}$, und $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix mit $J^2 = -\mathrm{I}_n$, wobei $I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix bezeichne.

(i) Zeigen Sie, dass J keine reellen Eigenwerte besitzt, und dass $\pm i$ die einzig möglichen komplexen Eigenwerte sind. (Dabei wird J als Element von $\mathbb{C}^{n\times n}$ betrachtet.)

(ii) Sei $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor von J zum Eigenwert i. Weisen Sie nach, dass dann $\bar{v} = (\bar{v}_1, ..., \bar{v}_n)$ ein Eigenvektor von J zum Eigenwert $-i$ ist. Schließen Sie daraus, dass die Eigenwerte $\pm i$ von J die gleiche geometrische Vielfachheit haben.

Aufgabe 3

Sei $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, und sei $U = \mathrm{span}(S)$ der Untervektorraum mit dem Erzeugendensystem $S = \{f, g, h\}$, wobei $f(x) = e^x$, $g(x) = xe^x$ und $h(x) = e^{-x}$ ist. Sei $D_U : U \to U$ gegeben durch die Ableitung, also $D_U(p) = p'$ für alle $p \in U$. Sie dürfen ohne Beweis annehmen, dass $\mathcal{B} = (f, g, h)$ eine geordnete Basis von U darstellt, D_U linear ist und dass $D_U(U) \subseteq U$.

(i) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(D_U)$.

(ii) Berechnen Sie die reellen Eigenwerte von D_U, und geben Sie deren algebraische Vielfachheiten an.

(iii) Bestimmen Sie für jeden Eigenwert λ eine Basis von $\mathrm{Eig}(D_U, \lambda)$, und geben Sie die geometrische Vielfachheit $\mu_g(D_U, \lambda)$ an.

Aufgabe 4

Berechne für die reellen Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -8 & -1 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ und } B := \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 0 \\ -6 & -2 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & -2 & 1 \\ -6 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

alle Eigenwerte und Eigenvektoren.