MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. W. Spann, H. Jaskolla

Wintersemester
2011/2012

Lösungsvorschläge für die erste Klausur in "Lineare Algebra für Informatiker und Statistiker"

(1) Zeigen Sie die folgende Gleichung für reelle 2×2-Matrizen durch vollständige Induktion:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = 2^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} n+2 & -n \\ n & -n+2 \end{pmatrix} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Lösung:

Induktionsanfang $\quad n = 1$: $\quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^1 = 2^0 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^1 = 2^{1-1} \cdot \begin{pmatrix} 1+2 & -1 \\ 1 & -1+2 \end{pmatrix}^1$

Induktionsschritt $n \to n+1$:

Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte: $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = 2^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} n+2 & -n \\ n & -n+2 \end{pmatrix}$

Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&\overset{\text{IV}}{=} \left[2^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} n+2 & -n \\ n & -n+2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&\underset{\text{produkt}}{\overset{\text{Matrix-}}{=}} 2^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} (n+2) \cdot 3 + (-n) \cdot 1 & (n+2) \cdot (-1) + (-n) \cdot 1 \\ n \cdot 3 + (-n+2) \cdot 1 & n \cdot (-1) + (-n+2) \cdot 1 \end{pmatrix} \\
&= 2^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 2n+6 & -2n-2 \\ 2n+2 & -2n+2 \end{pmatrix} \\
&= 2^{n-1} \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} n+3 & -n-1 \\ n+1 & -n+1 \end{pmatrix} \\
&= 2^n \cdot \begin{pmatrix} (n+1)+2 & -(n+1) \\ n+1 & -(n+1)+2 \end{pmatrix} \\
&= 2^{(n+1)-1} \cdot \begin{pmatrix} (n+1)+2 & -(n+1) \\ n+1 & -(n+1)+2 \end{pmatrix} \qquad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

② Sei $R := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \;\middle|\; a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$.

(a) Zeigen Sie, daß R bezüglich der Matrixaddition und -multiplikation ein Ring ist.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie: R ist ein Körper.

Lösung:

Ad (a)

Es ist zu zeigen:

- $(R,+)$ ist eine Gruppe
- $(R,\cdot)$ ist Halbgruppe
- die Distributivgesetze

Dies beweisen wir so:

- Da „+“ die Matrixaddition in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ist, reicht es zu zeigen, daß $(R,+)$ eine Untergruppe von $(\mathbb{R}^{2\times 2},+)$ ist. Dazu:

  (i) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ für $a = b = c = 0$

  (ii) Seien $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$; dann gilt

  $$\underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}}_{\in R} - \underbrace{\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}}_{\in R} = \begin{pmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 \\ 0 & c_1 - c_2 \end{pmatrix} \in R$$

  Nach dem Untergruppenkriterium (Vorlesung (1.10) ist damit $(R,+)$ eine Gruppe.

- $(R,\cdot)$ ist abgeschlossen bezüglich der Matrixmultiplikation:
  Seien wieder $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$; dann folgt

  $$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 \cdot 0 & a_1 b_2 + b_1 c_2 \\ 0 \cdot a_2 + c_1 \cdot 0 & 0 \cdot b_2 + c_1 c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 + b_1 c_2 \\ 0 & c_1 c_2 \end{pmatrix} \in R$$

  Da die Assoziativität der Matrixmultiplikation in $(\mathbb{R}^{2\times 2},\cdot)$ erfüllt ist, gilt sie auch für die 2×2-Matrizen in R, und somit ist $(R,\cdot)$ eine Halbgruppe.

- Da die Matrixaddition und -multiplikation diejenige aus dem Ring $(\mathbb{R}^{2\times 2},+,\cdot)$ sind und dort die Distributivgesetze gelten, gelten sie auch für $R \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Ad (b)

Zwar enthält R für $a = 1, b = 0, c = 1$ das Einselement der Matrixmultiplikation $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, aber dennoch ist $(R,+,\cdot)$ kein Körper.

Dies erkennt man z.B. daran, daß $(R,\cdot)$ nicht nullteilerfrei ist: beispielsweise ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Oder man weist nach, daß z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ in R kein inverses Element besitzt:

$$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R} \;:\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{der Matrizen}}{\overset{\text{Kopmponente } (2,2)}{\Longrightarrow}} 0 = 1 \quad \lightning$$

Auch ist die Multiplikation in R nicht kommutativ (auch das reicht als Widerlegung):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3 Gegeben sei $s \in \mathbb{R}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & s & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

(a) Bestimmen Sie, für welche $s \in \mathbb{R}$ A invertierbar ist.

(b) Berechnen Sie für $s = 1$ die inverse Matrix von A.

Lösung:

Ad (a)

Da elementare Zeilenumformungen den Rang einer Matrix nicht ändern und die Invertierbarkeit einer $n \times n$-Matrix A mit $\operatorname{rang}(A) = n$ äquivalent ist, bringen wir die Matrix A durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform (römische Ziffern bezeichnen Zeilen):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & s & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[III-I]{II-I} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & s-1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{III+(s-1)\cdot II} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -s \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$\operatorname{rang}(A) = 3 \iff \text{in der Hauptdiagonalen stehen nur Werte ungleich } 0 \iff s \neq 0$$

Damit folgt:

$$A \text{ invertierbar} \iff s \neq 0$$

Alternativ können wir auch so argumentieren:

$$A \text{ invertierbar} \iff \det(A) \neq 0$$

Dazu benutzen wir die obige Zeilenstufenform, da wir dort keine Zeilenvertauschungen oder Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar verwendet haben, und erhalten:

$$\det(A) = 1 \cdot (-1) \cdot (-s) = s \neq 0 \iff s \neq 0$$

Oder wir berechnen die Determinante über den Laplaceschen Entwicklungssatz, zum Beispiel Entwicklung nach der zweiten Zeile:

$$\det(A) = 1 \cdot (-1)^3 \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ s & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot (-1)^5 \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & s \end{pmatrix} = -(1-2s) - (s-1) = s$$

und argumentieren wie oben.

<u>Ad (b)</u>

Für $s = 1$ ergibt sich für die erweiterte Matrix:

$$(A \,|\, E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[III-II]{I-III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{II-I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{tauschungen}]{\text{Zeilenver-}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Damit ist die inverse Matrix

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Verifikation:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4 Gegeben sei $s \in \mathbb{R}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & s \\ 1 & s & s \\ s & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

(a) Berechnen Sie $\operatorname{rang}(A)$ für jedes $s \in \mathbb{R}$.

(b) Berechnen Sie $\det(A)$ für jedes $s \in \mathbb{R}$.

Lösung:

Ad (a)

Wir erzeugen wie in Aufgabe (3) zunächst die Zeilenstufenform (nur durch Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile, wodurch der Wert der Determinante (im Hinblick auf Aufgabenteil (b)) nicht verändert wird):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & s \\ 1 & s & s \\ s & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[III-s\cdot I]{II-I} \begin{pmatrix} 1 & 1 & s \\ 0 & s-1 & 0 \\ 0 & 1-s & 1-s^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{III+II} \begin{pmatrix} 1 & 1 & s \\ 0 & s-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-s^2 \end{pmatrix} \qquad (\star)$$

Man erhält drei Einträge ungleich Null in der Hauptdiagonalen (und damit $\operatorname{rang}(A) = 3$), wenn gilt

$$s-1 \neq 0 \text{ und } 1-s^2 \neq 0 \iff s \neq 1 \text{ und } s^2 \neq 1 \iff s \notin \{-1, 1\}$$

Falls $s = 1$: $A \xrightarrow{(\star)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow$ $\operatorname{rang}(A) = \text{Zeilenrang}(A) = \dim(\operatorname{span}\{(1,1,1)\}) = 1$

Falls $s = -1$: $A \xrightarrow{(\star)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow$ $\operatorname{rang}(A) = \text{Zeilenrang}(A) = \dim(\operatorname{span}\{(1,1,-1),(0,-2,0)\}) = 2$

Ad (b)

Mit Hilfe von $(\star)$ aus Teil (a) erhalten wir:

$$\det(A) = (s-1)\cdot(1-s^2) = (s-1)\cdot(1-s)\cdot(1+s) = -(s-1)^2\cdot(s+1)$$

5. Seien $n \in \mathbb{N}$, $u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $G := \{ E_n + \alpha u v^T \mid \alpha \in \mathbb{R} \}$. Zeigen Sie:

(a) Die Matrixmultiplikation ist eine Verknüpfung auf G, d.h. eine Abbildung $G \times G \to G$.

(b) $u^T v = 0 \implies G$ Gruppe bezüglich der Matrixmultiplikation

(c) G Gruppe bezüglich der Matrixmultiplikation $\implies u^T v = 0$

(Hinweis: Finden Sie für $u^T v \neq 0$ eine nicht invertierbare Matrix $E_n + \alpha u v^T$) .

Lösung:

Ad (a)

Zu zeigen ist, daß für $A, B \in G$ auch $A \cdot B \in G$ gilt.

Seien also $E_n + \alpha u v^T \in G$ und $E_n + \beta u v^T \in G$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Zunächst stellen wir fest, daß mit $u \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n\times 1}$ und $v^T \in \mathbb{R}^{1\times n}$ folgt, daß $uv^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, während $v^T u \in \mathbb{R}$ $(\bullet)$.

Dann:

$$\begin{aligned}
(E_n + \alpha uv^T) \cdot (E_n + \beta uv^T) &= E_n + E_n \cdot \beta uv^T + \alpha uv^T \cdot E_n + (\alpha uv^T) \cdot (\beta uv^T) \\
&= E_n + \alpha uv^T + \beta uv^T + \alpha\beta \cdot (uv^T)(uv^T) \\
&\overset{\text{assoz.}}{=} E_n + (\alpha + \beta) uv^T + \alpha\beta \cdot (u \cdot \underbrace{(v^T u)}_{\substack{\in\mathbb{R} \\ \text{siehe } (\bullet)}} \cdot v^T) \\
&\underset{\text{herausziehen}}{\overset{\text{Skalar}}{=}} E_n + (\alpha + \beta) uv^T + \underbrace{(\alpha\beta \cdot v^T u)}_{\in\mathbb{R}} \cdot uv^T \\
&= E_n + \underbrace{\left(\alpha + \beta + \alpha\beta \cdot v^T u\right)}_{\in\mathbb{R}} \cdot uv^T \in G \qquad (\star)
\end{aligned}$$

Ad (b)

Nach Teil (a) ist (unabhängig vom Wert von $u^T v$) die (Matrix-)Multiplikation in G abgeschlossen. Ferner ist sie als Multiplikation von Matrizen in $\mathbb{R}^{n\times n}$ assoziativ und für $\alpha = 0$ liegt das neutrale Element der Multiplikation $E_n = E_n + 0 \cdot uv^T$ in G.
Es bleibt die Existenz des inversen Elements für jedes $A \in G$ nachzuweisen.

Es sei also $A = E_n + \alpha uv^T \in G$, $(\alpha \in \mathbb{R})$; sei ferner $\beta \in \mathbb{R}$; dann gilt mit $(\star)$ aus Teil (a):

$$\begin{aligned}
(E_n + \alpha uv^T) \cdot (E_n + \beta uv^T) = E_n + \left(\alpha + \beta + \alpha\beta \cdot v^T u\right) \cdot uv^T &= E_n \\
\iff \left(\alpha + \beta + \alpha\beta \cdot v^T u\right) \cdot uv^T &= 0 \\
\underset{\substack{\text{VL} \\ (2.2)(c)}}{\overset{uv^T \neq 0}{\iff}} \alpha + \beta + \alpha\beta \cdot v^T u &= 0 \quad (\star\star)
\end{aligned}$$

Nun ist nach Voraussetzung $0 = u^T v \in \mathbb{R} \implies 0 = 0^T = (u^T v)^T \underset{(2.12)\,(d)}{\overset{\text{VL}}{=}} v^T u$
d.h. es folgt

$$(\star\star) \iff \alpha + \beta = 0 \iff \alpha = -\beta$$

Damit gilt

$$(E_n + \alpha uv^T) \cdot (E_n - \alpha uv^T) = 0 \implies \left(E_n + \alpha uv^T\right)^{-1} = E_n - \alpha uv^T \in G$$

und somit existiert zu jedem Element aus G ein inverses Element in G, d.h. $(G, \cdot)$ ist eine Gruppe.

Ad (c)

Wenn $(G, \cdot)$ eine Gruppe ist, gibt es zu jedem $\alpha \in \mathbb{R}$ ein $\beta \in \mathbb{R}$, so daß, wie in Teil (b) gezeigt

$$(E_n + \alpha uv^T) \cdot (E_n + \beta uv^T) = E_n \iff \left(\alpha + \beta + \alpha\beta \cdot v^T u\right) \cdot uv^T = 0 \qquad (\star\star\star)$$

Dann gibt es zwei Fälle:

Falls $uv^T = 0$:

dann ist $G = \{ E_n \}$ die triviale Gruppe, die nur aus dem Einselement E_n der Matrixmultiplikation in $\mathbb{R}^{n \times n}$ besteht.

Wenn nun $0 = uv^T = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \cdot (v_1, \ldots, v_n) = (u_i \cdot v_j)_{1 \le i,j \le n}$, so folgt auch $u^T v = 0$:
wäre nämlich $u \neq 0 \neq v$, so gäbe es $1 \le k, l \le n$ mit $u_k \neq 0$ und $v_l \neq 0$
$\implies u_k v_l \neq 0 \implies uv^T = (u_i \cdot v_j)_{1 \le i,j \le n} \neq 0$ ↯
Also $u = 0$ oder $v = 0 \implies uv^T = 0$.

Falls $uv^T \neq 0$:

Dann ist $(\star\star\star)$ genau dann erfüllt, wenn $\alpha + \beta + \alpha\beta \cdot v^T u = 0$, d.h. wegen der Existenz des Inversen gibt es zu jedem $\alpha \in \mathbb{R}$ ein $\beta \in \mathbb{R}$ mit

$$\alpha + \beta + \alpha\beta \cdot v^T u = 0 \iff -\alpha = \beta \cdot \left(1 + \alpha \cdot v^T u\right) \qquad (\bullet)$$

Ist $v^T u \neq 0$, so wähle man $\alpha = -\dfrac{1}{v^T u}$. Dann lautet $(\bullet)$:

$$0 \neq -\frac{1}{v^T u} = \beta \cdot \left(1 + \left(-\frac{1}{v^T u}\right) \cdot v^T u\right) = \beta \cdot (1 - 1) = \beta \cdot 0 = 0 \quad ↯$$

Also muß, wenn jedes Element in G ein Inverses besitzen soll, notwendig $v^T u \neq 0$ sein.
Weil aber $0 = v^T u \in \mathbb{R}$ folgt: $0 = 0^T = \left(v^T u\right)^T \underset{(2.12)\,(d)}{\overset{\text{Vorl.}}{=}} u^T \left(v^T\right)^T = u^T v$. d.h. $u^T v = 0$.
q.e.d.

6 Sei $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $A^2 = E_n$. Zeigen Sie:

(a) A ist invertierbar. Geben Sie A^{-1} an.

(b) $|\det(A)| = 1$

(c) $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal $\wedge$ $B := S^T A S \implies B^2 = E_n$.

(d) $A - E_n$ oder $A + E_n$ ist *nicht* invertierbar.

Lösung:

Ad (a)

Nach Vorlesung (2.13) ist eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ genau dann invertierbar, wenn es $A' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt, so daß $A \cdot A' = A' \cdot A = E_n$. Gemäß der Voraussetzung $A^2 = E_n$ erfüllt $A' := A$ diese Bedingung, und da (wieder mit (2.13)) A' dann die inverse Matrix ist, folgt $A^{-1} = A' = A$.

Ad (b)

$$1 = \det(E_n) = \det(A^2) \underset{\text{satz}}{\overset{\text{Multipl.}}{=}} \det(A) \cdot \det(A) = \det(A)^2 = |\det(A)|^2 \overset{|\cdot|\geq 0}{\implies} |\det(A)| = 1$$

Ad (c)

Da S orthogonal ist, gilt $S^T S = S S^T = E_n$, und wegen $B = S^T A S$ folgt:

$$B^2 = \left(S^T A S\right) \cdot \left(S^T A S\right) = S^T A \underbrace{(S S^T)}_{=E_n} A S = S^T \cdot \underset{\substack{\parallel \\ E_n}}{A^2} \cdot S = S^T S = E_n$$

Ad (d)

Es ist $(A + E_n) \cdot (A - E_n) = A^2 - E_n^2 \underset{A^2 = E_n}{=} E_n - E_n = 0$

Wären nun sowohl $A + E_n$ als auch $A - E_n$ invertierbar, so gilt dies mit Vorlesung (2.14) (a) auch für ihr Produkt, d.h. die Nullmatrix - doch diese hat Rang 0 und ist nicht invertierbar. Also muß einer der Faktoren $A + E_n$ oder $A - E_n$ nicht invertierbar sein.

(7) Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 12 \\ 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom χ_A und geben Sie alle reellen Eigenwerte von A jeweils mit algebraischer Vielfachheit an.

(b) Bestimmen Sie den Eigenraum $\mathrm{Eig}_A(1)$ und geben Sie eine Basis von ihm an.

(c) Beantworten Sie die Frage (mit Begründung!), ob A diagonalisierbar ist.

Lösung:

Ad (a)

Nach Definition ist

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) \quad &= \quad \det(A - \lambda \cdot E_n) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -4 & 12 \\ 1 & -1-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\
&\underset{\text{nach 3.Zeile}}{\overset{\text{Entwicklung}}{=}} \quad (1-\lambda)\cdot(-1)^6 \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= \quad (1-\lambda)\cdot((3-\lambda)(-1-\lambda) - (-4)) \\
&= \quad (1-\lambda)\cdot(-3 - 3\lambda + \lambda + \lambda^2 + 4) \\
&= \quad (1-\lambda)\cdot(\lambda^2 - 2\lambda + 1) \\
&= \quad (1-\lambda)\cdot(\lambda - 1)^2 \\
&= \quad -(\lambda - 1)^3
\end{aligned}$$

Damit ist $\lambda = 1$ der einzige Eigenwert von A mit der algebraischen Vielfachheit 3 .

Ad (b)

Der Eigenraum $\mathrm{Eig}_A(\lambda)$ ist gleich dem Lösungsraum des linearen Gleichungssystems
$A \cdot x = \lambda \cdot x \iff Ax - \lambda E_n x = 0 \iff (A - \lambda E_n)\cdot x = 0$

Hier also ist zu lösen: $\quad (A - E_n)x = 0 \iff \begin{pmatrix} 2 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = 0 \qquad (\star)$

Dazu bringen wir die Matrix $A - E_n$ auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[II \leftrightarrow I]{I - 2\cdot II} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit gilt in $(\star)$: $\quad x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 0 \iff x_1 = 2x_2 - 6x_3$, und somit

$$x \in \mathrm{Eig}_A(1) \iff x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 - 6x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6x_2 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also ist

$$\mathrm{Eig}_A(1) = \left\{ x_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

und darin sind die beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig. wie man an der zweiten und dritten Zeile erkennt, bilden also eine Basis von $\mathrm{Eig}_A(1)$.

Ad (c)

Wie wir eben berechnet haben, ist $\dim(\mathrm{Eig}_A(1)) = 2 < 3 =$ algebraische Vielfachheit von $\lambda = 1$. Damit ist die Matrix A *nicht* diagonalisierbar, da Diagonalisierbarkeit erfordert, daß für alle Eigenwerte der Matrix die algebraische Vielfachheit und die geometrische Vielfachheit, d.h. die Dimension des zugehörigen Eigenraumes, übereinstimmen.

8 Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $C := \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ i & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$.

Lösung:

Wir bestimmen zunächst die Eigenwerte mit Hilfe des charakteristischen Polynoms χ_C

$$\begin{aligned} \chi_C(\lambda) &= \det(C - \lambda E_2) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2i \\ i & -1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)\cdot(-1-\lambda) - 2i^2 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda + 1) + 2 \\ &= \lambda^2 - 1 + 2 \\ &= \lambda^2 + 1 \\ &= \lambda^2 - i^2 \\ &= (\lambda - i)(\lambda + i) \end{aligned}$$

Damit hat C die beiden (komplexen) Eigenwerte $\lambda_1 = -i$ und $\lambda_2 = i$.

Um die Eigenvektoren zu bestimmen, lösen wir wieder das lineare Gleichungssystem $(C - \lambda E_2)\cdot z = 0$ in $\mathbb{C}^2$:

Für $\lambda_1 = -i$:

$$C+iE_2 = \begin{pmatrix} 1+i & 2i \\ i & -1+i \end{pmatrix} \xrightarrow{(-i)\cdot II} \begin{pmatrix} 1+i & 2i \\ 1 & i+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{I-(1+i)\cdot II} \begin{pmatrix} 0 & \overbrace{2i-(i+1)^2}^{=0} \\ 1 & i+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{I\leftrightarrow II} \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für $z \in \mathrm{Eig}_C(-i)$ gilt also:

$z_1 + (1+i)\,z_2 = 0 \iff z_1 = -(i+1)\,z_2 \iff (1-i)\,z_1 = -(1-i)(1+i)\,z_2 = -2\,z_2$

Damit:

$$\begin{aligned} z \in \mathrm{Eig}_C(-i) \quad &\iff \quad z = \begin{pmatrix} -(1+i)z_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = z_2 \cdot \begin{pmatrix} -(1+i) \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (z_2 \in \mathbb{C}) \\ &\iff \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \dfrac{1-i}{-2} \cdot z_1 \end{pmatrix} = z_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{i-1}{2} \end{pmatrix} \qquad (z_1 \in \mathbb{C}) \end{aligned}$$

Somit gilt:

$$\mathrm{Eig}_C(-i) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} -1-i \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{i-1}{2} \end{pmatrix}\right\}$$

und die Menge der Eigenvektoren der Matrix C zum Eigenwert $\lambda_1 = -i$ ist gleich der Menge $\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} -1-i \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \setminus \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{i-1}{2} \end{pmatrix}\right\} \setminus \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

Für $\boldsymbol{\lambda_2 = i}$:

$$C - iE_2 = \begin{pmatrix} 1-i & 2i \\ i & -1-i \end{pmatrix} \xrightarrow{(-i)\cdot II} \begin{pmatrix} 1-i & 2i \\ 1 & i-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{I-(1-i)\cdot II} \begin{pmatrix} 0 & \overbrace{2i-(1-i)(i-1)}^{=2i+(i-1)^2=0} \\ 1 & i-1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{I \leftrightarrow II} \begin{pmatrix} 1 & i-1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für $z \in \mathrm{Eig}_C(i)$ gilt also:

$z_1 + (i-1)\,z_2 = 0 \iff z_1 = (1-i)\,z_2 \iff (1+i)\,z_1 = (1+i)(1-i)\,z_2 = 2\,z_2$

Damit:

$$\begin{aligned} z \in \mathrm{Eig}_C(i) \quad &\iff \quad z = \begin{pmatrix} (1-i)z_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = z_2 \cdot \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (z_2 \in \mathbb{C}) \\ &\iff \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \dfrac{1+i}{2} \cdot z_1 \end{pmatrix} = z_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{i+1}{2} \end{pmatrix} \qquad (z_1 \in \mathbb{C}) \end{aligned}$$

Somit gilt:

$$\mathrm{Eig}_C(i) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{i+1}{2} \end{pmatrix}\right\}$$

und die Menge der Eigenvektoren der Matrix C zum Eigenwert $\lambda_1 = i$ ist gleich der Menge $\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \setminus \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{i+1}{2} \end{pmatrix}\right\} \setminus \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$