Lineare Algebra I Tutorium 4 Lösung

Andrea Colarieti Tosti

May 7, 2018

1 Aufgabe 1

1.1 i

Ausgabe 1 (1)

i)

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 6 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 6 & -4 \end{pmatrix} \qquad A \in \mathbb{R}^4$$

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 15 & 15 & -10 & -10 \\ 15 & 15 & -10 & -10 \\ 35 & 10 & -15 & -15 \\ 10 & 35 & -15 & -15 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 100 & -25 & -25 & -25 \\ 100 & -25 & -25 & -25 \\ 100 & -25 & -25 & -25 \\ 200 & -50 & -50 & -50 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

✓

A ist eine Nilpotente Matrix von Rang 4

1.2 ii

$\boxed{\text{Aufgabe 1}}$

ii) Sei $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ Invertierbar und $b \in \mathbb{R}^4$

Sei $v \in \mathbb{R}^4$

$\Rightarrow$

$Av = b \Rightarrow A^{-1}Av = A^{-1}b$

$\Rightarrow E_4 v = A^{-1}v = V = A^{-1}b$

Das heißt $Av = b$ Hat genau eine Lösung nähmlich $v = A^{-1}b$

1.3 iii

Aufgabe 1

iii)

Sei $Q = E_4 + A$, da wir im Übungsblatt 3 Aufgabe 2 Teil iv) bewiesen haben, dass sei A nilpotent, die Matrix $Q = E_4 + A$ invertierbar ist.

Können wir behaupten dass Q invertierbar ist.

$\Rightarrow$

$$Qv = w \Rightarrow Q^{-1}Qv = Q^{-1}w \Rightarrow v = Q^{-1}w$$

$\Rightarrow$ wir prüfen.

$$Q := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -3 \\ 6 & 2 & 1 & -4 \\ 1 & 6 & 2 & -4 \\ 1 & 6 & 6 & -3 \end{pmatrix} \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} -86 & 38 & 13 & 18 \\ -91 & 40 & 14 & 19 \\ -66 & 29 & 10 & 14 \\ -191 & 84 & 29 & 40 \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1} w = \begin{pmatrix} -167 \\ -177 \\ -128 \\ -371 \end{pmatrix} = v$$

$$Qv = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -3 \\ 6 & 2 & 1 & -4 \\ 1 & 6 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -167 \\ -177 \\ -128 \\ -371 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -501 + (-354) + (-256) + 1113 \\ -1002 + (-354) + (-128) + (+1484) \\ -167 + (-1062) + (-256) + (+1484) \\ -167 + (-177) + (-768) + (+1113) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

2 Aufgabe 2

2.1 i

Aufgabe 2 ①

i) $A := \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ $A \in \mathbb{R}^{(m+n)\times(m+n)}$

$B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$

$C \in \mathbb{R}^{n\times n}$

wir invertieren die Matrix A

$$\left(\begin{array}{cc|cc} B & 0 & E_m & 0 \\ 0 & C & 0 & E_n \end{array}\right)$$

=) Um die norm. ZSF auf der linken seite brauchen wir eine Matrix D sodass

$BD = E_m \Rightarrow D = B^{-1}$

$$\xRightarrow{M_{m,B^{-1}}} \left(\begin{array}{cc|cc} BB^{-1} & 0 & E_m B^{-1} & 0 \\ 0 & C & 0 & E_n \end{array}\right)$$

Das gleiche für die Nächsten zeilen $m+1 \leq i \leq n$

$$\xRightarrow{M_{n,C^{-1}}} \left(\begin{array}{cc|cc} E_m & 0 & B^{-1} & 0 \\ 0 & CC^{-1} & 0 & E_n C^{-1} \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} E_m & 0 & B^{-1} & 0 \\ 0 & E_n & 0 & C^{-1} \end{array}\right)$$

A ist invertierbar wenn B und C invertierbar sind.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$$

2.2 ii

Aufgabe 2

ii)

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -6 & 37 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Wir invertieren die zwei Teilmatrizen

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -12 & -6 & 37 \\ 2 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 18 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 18 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

3 Aufgabe 3

3.1 ii

$\boxed{\text{Aufgabe 3}}$

ii)

$$T\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&8&9\\1&2&3\\5&7&9\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&8&9\\1&2&3\\5&7&9\end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}U=\begin{pmatrix}3&2&1\\6&5&4\\9&8&7\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U=\begin{matrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&1\\6&5&4\\9&8&7\end{pmatrix} \quad \checkmark$$

3.2 iii

Aufgabe 3

iii)

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}-1} \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&2&3\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}-1} \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{III}-\text{II}} \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I}-2} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}-\text{III}} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&1&2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&2&3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&2&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix} \quad \checkmark$$

4 Aufgabe 4

4.1 i

Aufgabe 4 ①

i)

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \middle| \ \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

ist $(M, \cdot)$ eine Gruppe?

Wir müssen untersuchen auf

- Assoziativität
- Abgeschlossenheit
- Neutrales Element
- Inverses Element

– Abgeschlossenheit:

Seien $a, b \in M \quad a \cdot b \in M$

$$\overset{a}{\begin{pmatrix} \cos(\pi) & -\sin(\pi) \\ \sin(\pi) & \cos(\pi) \end{pmatrix}} \overset{b}{\begin{pmatrix} \cos(0) & -\sin(0) \\ \sin(0) & \cos(0) \end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

– Assoziativität:

Seien $a, b, c \in M$

$$a := \begin{pmatrix} \cos(\pi) & -\sin(\pi) \\ \sin(\pi) & \cos(\pi) \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} \cos(0) & -\sin(0) \\ \sin(0) & \cos(0) \end{pmatrix}$$

$$c := \begin{pmatrix} \cos(1) & -\sin(1) \\ \sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 (2)

wir wollen zeigen dass

$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) c$

linke Seite

$$\begin{pmatrix} \cos(\pi) & -\sin(\pi) \\ \sin(\pi) & \cos(\pi) \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \cos(0) & -\sin(0) \\ \sin(0) & \cos(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(1) & -\sin(1) \\ \sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(1) & -\sin(1) \\ \sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(1) & -\sin(1) \\ \sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -\cos(1) & \sin(1) \\ -\sin(1) & -\cos(1) \end{pmatrix}$$

rechte seite

$$\left(\begin{pmatrix} \cos(\pi) & -\sin(\pi) \\ \sin(\pi) & \cos(\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(0) & -\sin(0) \\ \sin(0) & \cos(0) \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \cos(1) & -\sin(1) \\ \sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \cos(1) & -\sin(1) \\ \sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(1) & -\sin(1) \\ \sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(1) & \sin(1) \\ -\sin(1) & -\cos(1) \end{pmatrix} \checkmark$$

Aufgabe 4 (3)

- neutrales Element

Das neutrale Element dieser Gruppe ist die Matrix $a \in M$

$$a : \{ a \in M \mid \alpha = 0 \}$$

$$\Rightarrow \quad a = \begin{pmatrix} \cos(0) & -\sin(0) \\ \sin(0) & \cos(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

$\Rightarrow E_2 \in M$ Die Einheitsmatrix ist das Neutrale Element der Matrixmultiplikation in $\mathbb{R}^{2\times 2}$

Da M abgeschlossen ist können wir behaupten, daß $M \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Somit ist a das neutrale Element der Multiplikation in M

- Inverses Element

wir invertieren die matrix

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\cancel{M_{2, \sin^{-1}(\alpha)} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \cos(\alpha)\sin^{-1}(\alpha) & 0 & \sin^{-1}(\alpha) \end{array} \right)}$$

$$M_{2, \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 1 & 0 \\ \cos(\alpha) & \frac{\cos^2(\alpha)}{\sin(\alpha)} & 0 & \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \end{array} \right)$$

4

$A_{2,1,1}$
$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\cos^2(\alpha)}{\sin(\alpha)} - \sin(\alpha) & 0 & \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \end{array}\right)$

$M_{1, \frac{1}{\cos(\alpha)}}$
$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} & \frac{1}{\cos(\alpha)} & 0 \\ 0 & \frac{\cos^2(\alpha)}{\sin(\alpha)} - \sin(\alpha) & 0 & \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \end{array}\right)$

$M_{2, \frac{\sin(\alpha)}{-\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)}}$
$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} & \frac{1}{\cos(\alpha)} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\cancel{\cos(\alpha)}}{\cancel{\sin(\alpha)}} \frac{\cancel{\sin(\alpha)}}{-\sin^2(\alpha)\cos^2(\alpha)} \end{array}\right)$

$M_{1, -\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}}$
$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -\sin^{-1}(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\cos(\alpha) - \sin^2(\alpha)} \end{array}\right)$

$A_{1,2,1}$
$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{\sin(\alpha)} & -\frac{1}{\cos(\alpha) - \sin^2(\alpha)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\cos(\alpha) - \sin^2(\alpha)} \end{array}\right)$

Das inverse Element für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{pmatrix} -\sin^{-1}(\alpha) & -\frac{1}{\cos(\alpha) - \sin^2(\alpha)} \\ 0 & \frac{1}{\cos(\alpha) - \sin^2(\alpha)} \end{pmatrix} \checkmark$$

Somit ist $(M, \circ)$ eine Gruppe $\square$

5

Ist diese Gruppe Abelsch?

Wir wollen zeigen ob, für $a, b \in M$

$a \cdot b = b \cdot a$ gilt.

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow a := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

linke Seite

$$a \cdot b = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) & +\cos(\alpha)\sin(\beta) - \sin(\alpha)\cos(\beta) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) & -\sin(\alpha)\sin(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \end{pmatrix}$$

rechte Seite

$$b \cdot a = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(b)\cos(\alpha) - \sin(\beta)\sin(\alpha) & -\cos(\beta)\sin(\alpha) + \sin(\beta)\cos(\alpha) \\ \sin(\beta)\cos(\alpha) + \cos(\beta)\sin(\alpha) & -\sin(\beta)\sin(\alpha) + \cos(\beta)\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

✓

Die Gruppe $(M, \cdot)$ ist Abelsch $\square$

4.2 ii

4.2.1 a

Aufgabe 4

ii)

a)

$$X = \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad U = \left\{ \begin{pmatrix}1&\lambda&0\\0&1&\mu\\0&0&1\end{pmatrix} \middle| \lambda,\mu\in\mathbb{R}\right\}$$

$\cdot$ ist die Multiplikation von Matrizen.

Seien $a, b \in U$ mit $\alpha, \lambda, \mu, \varphi \in \mathbb{R}$

$$a := \begin{pmatrix}1&\alpha&0\\0&1&\lambda\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix}1&\mu&0\\0&1&\varphi\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$a \cdot b = \begin{pmatrix}1&\mu+\alpha&\alpha\varphi\\0&1&\lambda+\varphi\\0&0&1\end{pmatrix} \quad \lightning$$

$a \cdot b$ ist element von U nur im Fall, dass ~~α oder φ~~ $\alpha = 0$ oder $\varphi = 0$, also ist die Gruppe $(U, \cdot)$ nicht abgeschlossen.

4.2.2 b

Aufgabe 4 (2)

ii)

b) $X = \mathbb{R}$, $U = \{ r + s\sqrt{2} \mid r, s \in \mathbb{Q}, (r,s) \neq 0,0 \}$

$\cdot$ ist die Multiplikation auf $\mathbb{R}$

Wählen wir zwei Elemente aus U.

$\cancel{a = a + b\sqrt{2}}$

$a(a,b) = a + b\sqrt{2}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$

$b(c,d) = c + d\sqrt{2}$ mit $c, d \in \mathbb{R}$

$$a \cdot b = (a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2})$$
$$= ac + ad\sqrt{2} + cb\sqrt{2} + b\sqrt{2}\, d\sqrt{2}$$
$$= ac + ad\sqrt{2} + cb\sqrt{2} + 2bd \quad ✓$$
$$= ac + \sqrt{2}(ad + cb) + 2bd = (ac + 2bd) + (ad + cb)\sqrt{2}$$

Das Produkt $a \cdot b \in \mathbb{R}$, also ist die Gruppe $(U, \cdot)$ abgeschlossen