1 Lineare Algebra Tutorium 2

Andrea Colarieti Tosti

1.1 Aufgabe 1

$\boxed{\text{Aufgabe 1}}$ (1)

i) $B + E$

$D \times F$ $B \times A$ $E \times A$ $C \times E$ $C \times F$

$A^{m \times n} + B^{o \times p}$ ist möglich wenn $m = o \wedge n = p$

$A^{m \times n} \times B^{o \times p}$ ist möglich wenn $n = o$

zz. Kommutativ wenn $n = m = o = p$

ii)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 4 & 16 & 5 \\ 2 & 14 & 10 \\ 6 & 36 & 13 \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 4 & 30 & 24 \\ 3 & 3 & 12 \\ 16 & 10 & 22 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1

(2)

iii)

a) $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B \cdot A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

1.2 Aufgabe 3

Aufgabe 3 ①

Sei $A^{n \times m} \in \mathbb{K}$ eine Matrix und b ~~$\in \mathbb{K}$~~ ein Vektor.

$$(A|b) := \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{n1} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{nm} & b_m \end{array}\right) \qquad n, m \in \mathbb{N}$$

Seien $k, l \in \mathbb{N}$ sodaß $1 < k < l < n$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccccccc|c} a_{11} & \cdots & a_{k1} & \cdots & a_{l1} & \cdots & a_{n1} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{km} & \cdots & a_{lm} & \cdots & a_{nm} & b_{m} \end{array}\right)$$

Die Spalten von $(A|b)$ können mit einer Multiplikation ~~...~~ ~~...~~ sodass $(A|b) \cdot C = (A|b)_{vert.}$

Die Matrix C muss die Dimension ~~$n+1$ haben, und~~ $n+1 \times n+1$ haben, und die Einsermatrix mit Vertauschung k nach l sein.

Sei E die Einsermatrix

$$E = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccc} & k & l & \\ \end{array}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & 1 & 0 & & \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$(A|b) \times C = \left(\begin{array}{ccccccc|c} a_{11} & \cdots & a_{l1} & \cdots & a_{k1} & \cdots & a_{n1} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{lm} & \cdots & a_{km} & \cdots & a_{nm} & b_m \end{array}\right)$$

1.3 Aufgabe 4

$\boxed{\text{Aufgabe 4}}$ (1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Sei } B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \qquad B \in \mathbb{R}^3 \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow B^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix} \qquad n \in \mathbb{N}$$

Wir Beweisen die Vermutung per Induktion.

i) Induktionsanfang $n=0$

$$B^0 = \begin{pmatrix} a^0 & 0 & 0 \\ 0 & b^0 & 0 \\ 0 & 0 & c^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

ii) Induktionsschritt $n \longmapsto n+1$

• Annahme:

$$B^{n+1} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & b^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{n+1} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

2

$$B^{n+1} = B^n \cdot B = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a^n a & 0 & 0 \\ 0 & b^n \cdot b & 0 \\ 0 & 0 & c^n c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & b^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{n+1} \end{pmatrix}$$