Analysis 1 Blatt 2 Lösung

Andrea Colarieti Tosti

October 29, 2018

Aufgabe 1

a)

1. Reflexivität $\forall (a,b) \in X_1 \times X_2$ gilt $(a,b) \prec (a,b)$

$(a,b) \prec (a,b) \Leftrightarrow a \prec_1 a \vee (a=a \wedge b \prec_2 b)$

$\overset{!}{\Leftrightarrow} \cancel{(a \prec_1 a \vee a=a)} \wedge (a \prec_1 a \vee b \prec_2 b) \Rightarrow (a \prec_1 a \vee b \prec_2 b)$

Das ist Wahr da $(a,b) \prec (a,b)$. $\prec_1, \prec_2$ sind nach ~~Auf~~gaben Definition Part. Ord. und somit Reflexiv.

2. Anti-symmetrie: $\forall (a,b), (a',b') \in X_1 \times X_2$ gilt

$(a,b) \prec (a',b') \wedge (a',b') \prec (a,b) \Rightarrow (a,b) = (a',b')$

$(a,b) \prec (a',b') \wedge (a',b') \prec (a,b) \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{(a \prec_1 a' \vee a=a')} \wedge (a \prec_1 a' \vee b \prec_2 b') \wedge \cancel{(a' \prec_1 a \vee a'=a)} \wedge (a' \prec_1 a \vee b' \prec_2 b)$

$\Rightarrow (a \prec_1 a' \vee b \prec_2 b') \wedge (a' \prec_1 a \vee b' \prec_2 b)$

Da $\prec_1, \prec_2$ nach Aufgabendefinition Antisymmetrish sind, ist die Aussage wahr.

3. Transitivität: $\forall (a,b), (a',b'), (a'',b'') \in X_1 \times X_2$ gilt

$$(a,b) \prec (a',b') \wedge (a',b') \prec (a'',b'') \Rightarrow (a,b) \prec (a'',b'')$$

$$(a,b) \prec (a',b') \wedge (a',b') \prec (a'',b'') \Rightarrow (a <_1 a') \vee (a = a' \wedge b <_2 b') \wedge (a' <_1 a'') \vee (a' = a'' \wedge b' <_2 b'')$$

$$\Rightarrow (\cancel{a <_1 a' \vee a = a'}) \wedge (a < a_1 \vee b <_2 b') \wedge (\cancel{a' < a'' \vee a' = a''}) \wedge (a' <_1 a'' \vee b' <_2 b'')$$

$$\Rightarrow (a <_1 a' \vee b <_2 b') \wedge (a' <_1 a'' \vee b' <_2 b'') \Rightarrow (a <_1 a' \wedge a' <_1 a'') \vee (b <_2 b' \wedge b' <_2 b'')$$

$$\overset{!}{\Rightarrow} (a <_1 a'') \vee (b <_2 b'')$$

Die Relation ist Transitiv.

Somit ist $\prec$ eine Partielle ordnung.

b)

b) zz. $<_1$ und $<_2$ sind Totale Ordnungen => $<$ ist eine Totale Ordnung.
Wir haben bewiesen $<$ ist eine halbe Ordnung, somit müssen wir noch zeigen,
~~dass~~ Seien $a, a' \in X_1$ und $b, b' \in X_2$, gilt:

$$(a,b) < (a',b') \vee (a',b') < (a,b)$$

Wir haben den Beweis der Anti-symmetrie anhand der Definition von $<_1$ und $<_2$.
Analog für die Totale Ordnung, wenn für $<_1$ und $<_2$ die totalität gilt. =>

$$\Rightarrow (a,b) < (a',b') \vee (a',b') < (a,b)$$
$$\Rightarrow \cancel{(a <_1 a' \vee a = a')} \vee (a <_1 a' \vee b <_2 b^2) \vee \cancel{(a' <_1 a \vee a_1 = a)} \vee (a' <_1 a \vee b' <_2 b)$$
$$\Rightarrow (a <_1 a' \vee b <_2 b') \vee (a' <_1 a \vee b' <_2 b)$$
$$\Rightarrow a <_1 a' \vee a' <_1 a \vee b <_2 b' \vee b' <_2 b$$

Also ~~das~~ wenn für $<_1$ und $<_2$ totalität gilt so ist $<$ eine Totalordnung.

$\square$

Aufgabe 2

Aufgabe 2 Finden Sie Injektive Abbildungen $\mathbb{Q}^+ \mapsto \mathbb{N}$, $\mathbb{Q} \mapsto \mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$

- $\mathbb{Q}^+ \longmapsto \mathbb{N}$

$f: \mathbb{Q}^+ \mapsto \mathbb{N}, \frac{x}{1} \to x$ $\quad$ $g: \mathbb{Q}^+ \mapsto \mathbb{N}, \frac{2x}{2} \to x$ $\quad$ $h: \mathbb{Q}^+ \mapsto \mathbb{N}, \frac{1}{x} \mapsto x$

- $\mathbb{Q}^+ \mapsto \mathbb{Z}$

$\alpha: \mathbb{Q}^+ \mapsto \mathbb{Z}, \frac{x}{1} \mapsto x$ $\quad$ $\beta: \mathbb{Q}^+ \mapsto \mathbb{Z}, \frac{x}{1} \mapsto -1 \cdot x$

- $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$

$\varphi: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}, (x, y) \longmapsto x + y$ bei $x = y$

$\gamma: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}, (x, y) \longmapsto x$ bei $x = y$

Aufgabe 3

Aufgabe 3 zz. $f: A \to B$ $g: B \to A$ sind Injektiv => Es gibt eine Bijektive Abbildung $h: A \to B$.

=>

Wir definieren die Menge der Elemente mit Urbild in A:

$$A_A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} (g \circ f)^n (A \setminus g(B)) \subset A \qquad B_A := f(A_A) \subset B$$

und analog dazu die Teilmengen $A_B \subset A$ und $B_B \subset B$.

Schliesslich definieren wir die Teilmengen $A_{-\infty} := A \setminus (A_A \cup A_B)$ und $B_{-\infty} := B \setminus (B_A \cup B_B)$.

zu zeigen ist: es existieren Bijektionen zwischen $A_A \to B_A$, $A_B \to B_B$

$A_{-\infty} \to B_{-\infty}$.

$A_A \longrightarrow B_A$

A_A enthält keine elemente aus $g(B) \subset A$ und ~~dass~~ gegenteil gilt für B_A, denn es enthält keine elemente aus $f(A_A)$.

Also müssen wir eine funtion definieren die keine lücken hat und für alle Elemente umkehrbar ist:

$$\alpha : A_A \to B_A \,; \begin{cases} f(a) & \text{bei } a \in A_A \\ g^{-1}(a) & \text{bei } a \notin A_A \end{cases}$$

Diese funktion besteht aus eine Injektive Funktion und die Umkehrfunktion einer Injektive fkt. und ist somit Bijektiv.

Die einschränkung der Funktionen f und g sorgt für die Umkehrbarkeit.

$A_B \longrightarrow B_B$

Für diesen Fall definieren wir eine Fkt.

$$\beta : A_B \to B_B, \quad \begin{cases} g^{-1}(a) & \text{bei } a \in A_B \\ f(a) & \text{bei } a \in B_B \end{cases}$$

?

$A_{-\infty} \to B_{-\infty}$

Aufgabe 4

a)

Aufgabe 4

a) $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

INDUKTION ANFANG: $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} 1^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = \frac{6}{6} = 1 \Rightarrow \text{Wahr}$$

INDUKTION ANNAHME: $n = n+1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} (n+1)^2 = \sum_{k=1}^{n} (n+1)^2 + (n+1)^2 = \sum_{k=1}^{n} (n+1)^2 + n^2 + 2n + 1$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n^2+2n+1)}{6} = \frac{(n^2+n)(2n+1) + 6n^2 + 12n + 6}{6}$$

$$= \frac{2n^3 + 2n^2 + n^2 + n + 6n^2 + 12n + 6}{6} = \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

b)

Bei $k \in \mathbb{N}$ gilt:
$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right)^2$