Lineare Algebra Tutorium 5 Lösung

Andrea Colarieti Tosti

May 13, 2018

12/22

1 Aufgabe 0

1.1 Verknüpfung

0/2

Eine Verknüpfung verknüpft 2 Elemente aus der Menge A. Sie ist abgeschlossen wenn $\forall a \in A, \exists b \in A : f(a) = b$ eine Verknüpfung ist nach eurem Skript immer abgeschlossen

entspricht nicht dem Konzept einer Verknüpfung. *: AxA -> A

Assioziative Verknüpfung Eine Verknüpfung gilt als assziativ venn: Seien $a, b, c \in A$ gilt : $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ 1/2

Bsp: $Seien f(x) = \lambda x, g(x) = \alpha x, h(x) = \eta x$ mit $\lambda, \alpha, \eta \in A$ dies ist keine Verknüpfung nach eurer Definition

$((f \circ g) \circ h)(x) = h((f \circ g)(x)) = (f \circ g)(\eta x) = f(g(\eta x)) = \lambda\alpha\eta x$

$(f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x)) = \lambda \cdot (g \circ h)(x) = \lambda \cdot g(h(x)) = \lambda\alpha\eta x$

Kommutative Verknüpfung Eine verknüpfung gilt als kommutativ, wenn seien 2 Elemente $a, b \in A \Leftrightarrow a \circ b = b \circ a$ keine Äquivalenz! 1/2
Bsp: Die Multiplikation über $\mathbb{R}$ ist kommutativ $\Rightarrow 2 \cdot 4 = 8 = 4 \cdot 2$

1.2 Monoid

2/2

Ein Monoid ist ein tupel (M,$\circ$) der aus einer Menge M , in dem gilt:

1. Ageschlossenheit
2. Assoziativität
   Bsp: In $(\mathbb{R}, \cdot)$ gilt $1 \cdot (2 \cdot 3) = 6 = (1 \cdot 2) \cdot 3$
3. Neutrales Element
   $\forall b \in M, \exists a \in M : ab = b$ falsch. Es existiert ein e, sodass für alle a e*a=a*e=a gilt.
   Bsp: In $(\mathbb{R}, \cdot)$ ist das neutreale Elemenent $1 \Leftrightarrow 1 \cdot 3 = 3$ 1/2

Bsp: $(\mathbb{N}_0, +, 0)$

1.3 Gruppe

2/2

Eine Gruppe ist ein Tupel $(M, \circ)$ aus der Menger M, in dem gilt:

1. Abgeschlossenheit
2. Assoziativität
3. Neutrales Element
4. Inverses Element 1/2
   $\forall b \in M, \exists a \in M : a \circ b = e_M$. Wobei e_M das Neutrale Element der Verknüpfung ist. beidseitig invers!

Bsp: $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine Gruppe. was sehen die Inversen der Gruppe aus?

abelsche Gruppe? 0/2

1.4 Ring

Ein Ring ist ein Tripel $(M, +, *)$ über eine Menge M mit 2 Operatoren $+, *$. In einem Ring gilt: 1/2

1. $(M, +)$ ist eine abelsche Gruppe
2. $(M, *)$ ist eine halbe Gruppe was ist eine halbe Gruppe? Meinst du eine Halbgruppe? die habt ihr nicht definiert.
3. Distributivgesetze
   $\forall a, b, c\ inM$ gilt $a * (b + c) = a * b + a * c$ und $(a + b) * c = a * c + b * c$ ✓

Bsp: Ganzzahlen Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ✓

1.5 Körper

2/2

Ein Körper ist ein Tripel $(M, +, *)$ über eine Menge M mit 2 Operatoren $+, *$. In einem Körper gilt:

1. $(M, +)$ ist eine abelsche Gruppe (Neutrales Element 0) ✓
2. $(M \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe (Neutrales Element 1)
3. Distributivgesetze
   $\forall a, b, c\ inM$ gilt
   $a * (b + c) = a * b + a * c$ und
   $(a + b) * c = a * c + b * c$

Bsp: Die Rationalen zahlen $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein ~~Ring~~ Körper

1.6 Vektorraum

1/2

Ein M-Vektorraum ist ein Tripel $(M, +, *)$ über eine Menge M mit 2 Operatoren $+, *$. In einem Vektorraum gilt: M muss ein Körper sein wie sind die zwei Operationen definiert?

1. Bildet über die Addition eine Abelsche Gruppe
2. Für die Multiplikation
   - $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$
   - $(a + b) * c = (a * c) + (b * c)$ nicht klar, was du meinst. Woher kommen a,b,c?
   - $a * (b * c) = (a * b) * c$
   - Neutrales Element was ist das neutrale Element?

Bsp: Die Euklidische ebene $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist ein Vektorraum. über welchem Körper

2 Aufgabe 1

Aufgabe 1) 3/4

$$X = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad X \in GL_2(\mathbb{C})$$

zz für welche $A \in GL_2(\mathbb{C})$ gilt

$$AX = XA$$

Wir definieren eine Matrix $A \in GL_2(\mathbb{C})$

$A := \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ sodass $AX = XA$

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix}a & c\\ a+b & c+d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+c & c\\ b+d & d\end{pmatrix}$$

Dies gilt bei folgenden Bedingungen

- $a = a+c$ • $a+b = b+d$
- $c = c$ • $c+d = d$

~~⇒ c = 0, a = d, a = d ...~~

$\Rightarrow$ Mindeste bedingung ist $c = 0$ und $a = d$

wir prüfen:

Sei $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ dann muss $BX = XB$ sein

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & a+b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b+a \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$A \in \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}) \right\}$$

du solltest überprüfen, ob bzw. für welche Werte a,b in C die Matrix in GL(2,C) ist.

3 Aufgabe 2 28/80

3.1 Nützliche Beweise

Wir zeigen erstmal, dass die Funktion

welche Art von Homomorphismus?

$\text{spur}(A) : \mathbb{K}^{n \times n} \mapsto \mathbb{K}$ ein Homomorphismus ist

Das wird uns bei späteren Beweise helfen.

zz. i) $\text{spur}(A) + \text{spur}(B) = \text{spur}(A+B)$

ii) $\lambda \cdot \text{spur}(A) = \text{spur}(\lambda A)$

mit $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$

i) Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $n \in \mathbb{N}$

$$\text{spur}(A) + \text{spur}(B) \underset{\text{DEF spur}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{j=1}^{n} b_{jj}$$

$$\underset{\substack{\text{DEF} \\ \text{Addition} \\ \text{in } \mathbb{K}}}{\Rightarrow} \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} (a_{ii} + b_{jj}) \underset{\text{DEF spur}}{=} \text{spur}(A+B) \checkmark$$

du musst es auf eine Laufvariable reduzieren, sonst wäre es eine Doppelsumme

ii) Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\lambda \cdot \text{spur}(A) \underset{\text{DEF spur}}{=} \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \underset{\substack{\text{Distr.} \\ \text{Mult.} \\ \text{in } \mathbb{K}}}{=} \sum_{i=1}^{n} (\lambda \cdot a_{ii})$$

$$\underset{\text{DEF spur}}{=} \text{spur}(\lambda A) \checkmark$$

✓

Spur ist eine lineare Abb. $\square$

3.2 i

Aufgabe 2 ②

0/4

i) zz. $\mathrm{spur}(AB) = \mathrm{spur}(BA)$

BEW:

$$\mathrm{spur}(AB) \overset{\text{spur Lin. Abb. ii)}}{=} \mathrm{spur}(A) \cdot \mathrm{spur}(B)$$

falsch, du hast gezeigt,
spur(A+B)=spur(A)+spur(B)
und nicht Multiplikation

$$\underset{\text{DEF spur}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \cdot \sum_{j=1}^{n} b_{jj} \underset{\text{Mult. in K bildet eine Abelsche gruppe}}{=} \sum_{j=1}^{n} b_{jj} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{ii} =$$

falsch

$$\underset{\text{DEF spur}}{=} \mathrm{spur}(B) \cdot \mathrm{spur}(A) \underset{\text{spur lineare Abb.}}{=} \mathrm{spur}(BA)$$

□

3.3 ii

Aufgabe 2 ③

0/4

ii) z.z. spur(BCA) = spur(CAB)

mit $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ $B \in \mathbb{K}^{n \times r}$ $C \in \mathbb{K}^{r \times m}$ $m, n, r \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{spur}(BCA) \underset{\text{spur Linear Abb ii)}}{=} \mathrm{spur}(B)\,\mathrm{spur}(C)\,\mathrm{spur}(A)$$

falsch

$$\overset{\text{DEF spur}}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{r} b_{nn} \cdot \sum_{r=1}^{m} c_{rr} \cdot \sum_{m=1}^{n} a_{mm} =$$

$(\mathbb{K}, \cdot)$ ist eine Abelsche Gruppe

$$= \sum_{r=1}^{m} c_{rr} \cdot \sum_{n=1}^{r} b_{nn} \cdot \sum_{m=1}^{n} a_{mm}$$

$$= \sum_{r=1}^{m} c_{rr} \sum_{m=1}^{n} a_{mm} \cdot \sum_{n=1}^{r} b_{nn}$$

DEF spur

$$= \mathrm{spur}(C)\,\mathrm{spur}(A)\,\mathrm{spur}(B)$$

spur Lineare Abb ii)

$$= \mathrm{spur}(CAB)$$

3.4 iii

Aufgabe 2 (3)

4/4

iii) zz. $(\mathbb{K}^{n\times n}, +) \to (\mathbb{K}, +)$; $A \mapsto \mathrm{spur}(A)$ ist GH.

$\Rightarrow$ Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ $n \in \mathbb{N}$

zz $\mathrm{spur}(A+B) = \mathrm{spur}(A) + \mathrm{spur}(B)$

BW:

$$\mathrm{spur}(A+B) \overset{\text{Matrix Addition}}{=} \mathrm{spur}\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & a_{22}+b_{22} & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}+b_{nn} \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{DEF spur}}{=} \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} + b_{ii}) \overset{\text{DEF Addition in } \mathbb{K}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii}.$$

$$\underset{\text{DEF spur}}{=} \mathrm{spur}(A) + \mathrm{spur}(B)$$

$\mathrm{spur}: (\mathbb{K}^{n\times n}, +) \to (\mathbb{K}, +)$; $A \mapsto \mathrm{spur}(A)$ ist ein GH. $\square$

4 Aufgabe 3

4.1 i

4/8

Aufgabe 3 (1)

i) zz. $\forall a \in M \ \exists b \in M : aba = a \Leftrightarrow (M, \cdot)$ ist eine Gruppe 0/4

Bew

Aus der Definition $\forall a \in M \ \exists b \in M : ab = e_M$

$\Rightarrow aba = a \Rightarrow e_M a = a. \Rightarrow a = a$ ✓

wieso folgt das?

Das heißt das Inverse und Neutralelement sind vorhanden.

nein, das heißt es nicht. aus cd=d folgt nicht c=e!

Abgeschlossenheit und Assoziativität sind von der Definition vom Monoid $(M, \cdot)$ gegeben.

Also ist $(M, \cdot)$ eine Gruppe. $\square$

Aufgabe 3 ②

4/4

ii) zz $\forall a \in M$ $a^2 = e_M \iff M$ ist eine abelsche Gruppe.

BEW:

$a^2 = a \cdot a = e_M$

Das heisst jedes Element aus M ist sein eigenes inverses.

$\Rightarrow a \cdot b = c \Rightarrow a \cdot a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = a \cdot c$

$\Rightarrow b \cdot c = a \cdot c \cdot c \Rightarrow b \cdot c = a \Rightarrow b \cdot b \cdot c = b \cdot a$

$\Rightarrow c = b \cdot a$ ✓

Wenn $a^2 = e_M$ gilt, $(M, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe. □

5 Aufgabe 4

5.1 i

25/40

1/4

i) $(F, \circ)$ ist ein nicht Kommutativer Monoid, aber keine Gruppe

zz. $(F, \circ)$ 1- ist assoziativ
2- hat ein Neutrales element
3- ist Abgeschlossen
4- ist NICHT kommutativ
5- hat Kein inverses element

1) Assoziativität

zz. Seien $f, g \in F$ und $x \in M$
gilt $\underbrace{f(x) \circ g(x) = (f \circ g)(x)}$. falsch

Seien $f, g, h \in M$
nehmen wir an $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

Wir definieren

$f(x) := \lambda x \quad h(x) := \alpha x$ du kannst die nicht so definieren!

$g(x) := \gamma x \qquad x, \alpha, \gamma, \lambda \in M$

$$\Rightarrow f(g \circ h)(x) \overset{\text{DEF}}{=}$$

$$f \circ (g(\alpha x)) = f(\gamma \alpha x) = \lambda \gamma \alpha x$$

$$\lambda\gamma\alpha x = \lambda\gamma \cdot h(x) = \lambda\big(g(x) \circ h(x)\big)$$

$$= \big(f(x) \circ g(x)\big) \circ h(x)$$

$$\overset{!}{=} \big((f \circ g) \circ h\big)(x)$$

2) Neutrales Element

zz $\exists f \in \mathbb{F}: fg = g \quad , g \in \mathbb{F}$

kannst du nicht annehmen

Seien $f, g \in \mathbb{F}$ $\quad f(x) := x \quad \cancel{g(x) := bx} \quad b \in \mathbb{N}$

sodass $f \circ g = g$

$$(f \circ g)(x) = f(bx) = bx = g(x)$$

3) Abgeschlossenheit

Seien $f, f^{-1} \in \mathbb{F} \quad f \circ f' \in \mathbb{F}$

$g \in \mathbb{F}$

zz: $f \circ f' \circ g = g$

nein, dies sollst du nicht zeigen

$$(f \circ f' \circ g)(x) \underset{\text{1 Assoz.}}{=} (f \circ f') \circ g \underset{\text{INVERS}}{=} g$$

4) NICHT KOMMUTATIVITÄT

ZZ $f \circ g \neq g \circ f$

du musst den Definitionsbereich angeben, in manchen Strukturen könnten sie gleich sein

BEW Sei $f(x) := a + x \quad g(x) := bx \quad a, b \in M$

$$(f \circ g)(x) = f(bx) = a + bx$$

$$(g \circ f)(x) = g(a+x) = b(a+x) = ba + bx \neq a + bx$$

$\square$

5.2 ii

ii) a) $\exists f' \in F: f \circ f' = id_F \Leftrightarrow f$ ist surjektiv

2/4

$\Rightarrow$: f ist surjektiv nach definition. ?

deine Pfeile sind falschherum

d.h. $\forall y \in M, \exists x \in M: f(x) = y$

Somit ist $f \circ f'$ erfüllt.

nicht klar

$\Leftarrow$: Sei $f \circ g = id_F$, sei ein $y \in M$ gegeben müssen wir ein $x \in M$ finden sodass $f(x) = y$.

Im fall dass $x = g(y)$

$\Rightarrow f(x) = f(f'_g(y)) = (f \circ f'_g)\, y = id_F(y) = y$ ✓

$\square$

b) zz $\exists f' \in F: f' \circ f = id_F \Leftrightarrow f$ ist injektiv.

2/4

BEW

$\Rightarrow$ f ist nach DEF Injektiv.

$f'(y) := x$ nach DEF ist immer ein eindeutigen y definiert.

unklar, du sollst jedem y ein x zuweisen...

$\Leftarrow$ Sei $f' \circ f = id_F$ und seien $x, y \in H$

so definiert dan

$f(x) = f(y)$ zz. ist $x = y$

$$f(x) = f(y) \underset{Def}{\Rightarrow} f'(f(x)) = f'(f(y))$$

$$= id_F(x) = id_F(y) \Rightarrow x = y \quad \square$$

5.3 iii

Aufgabe 4 (6)

iii) $G := \{ f \in F \mid f \text{ ist bijektiv} \}$

3/4

zz $(G, \circ)$
1 - ist abgeschlossen
2 - Assoziativität
3 - Neutrales Element
4 - Inverses Element

1 Abgeschlossenheit

Seien $f, g \in G$

zz $f \circ g \in G$

Analysis, in der Definition steht nichts darüber

Nach Definition ist die Komposition Bijektive Funktionen Bijektiv

2 Assoziativität

Seien $f, g, h \in G$ $\quad x \in M$

zz. $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

BEW: $(f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x)) = (g \circ h)(f(x) = f(g(h(x)))$

$((f \circ g) \circ h)(x) = h((f \circ g)(x)) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$

Aufgabe 4 ②

4) Neutrales Element

zz $\exists f \in G: f \circ g = g = g \circ f$

Seien $g, h \in G$

zz. 1 $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$

2 $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$

BEW Sei $f(x) = x$

1 $\Rightarrow (f \circ g)(x) = f(g(x)) \underset{\text{DEF } f}{=} g(x)$

$(f \circ h)(x) = f(h(x)) \underset{\text{DEF } f}{=} h(x)$ ✓ ✓

2 $\Rightarrow (g \circ f)(x) \underset{\text{DEF } f}{=} g(f(x)) \underset{\text{DEF } f}{=} g(x)$ ✓

$(h \circ f)(x) = h(f(x)) \underset{\text{DEF } f}{=} h(x)$

Aufgabe 4 (8)

5) Inverses Element

zz $\exists g \in G : f \circ g = id_F = g \circ f$

BEW: f und g sind nach definition bijektiv und somit surjektiv.

$\Rightarrow$ Sei $f(x) = y$ müssen wir eine funktion $g \in G$ finden sodass $g(y) = x$.

Da $G \subseteq F$ ist sind f und g auch stetig.

Daraus folgt, sei x fixiert

es existiert immer ein eindeutigen $y \in M$

sodass $g(y) = x$. ✓ was meinst du damit?

Somit ist $(G, \circ)$ eine Gruppe. $\square$

5.4 iv

Aufgabe 4 | 9

4/4

iv) $\forall f, g, h \in G$ hat das LGS:

$$f \circ x = y \circ g$$
$$g \circ y = h$$

immer genau eine Lösung (x, y) für $x, y \in G$

BEW:

Seien $f^{-1}, g^{-1} \in G$ die inverse elemente zu f und g

$$g \circ y = h \Rightarrow g^{-1} \circ g \circ y = g^{-1} \circ h$$

$$\overset{\text{DEF } g^{-1}}{\Rightarrow} y = g^{-1} \circ h$$ ✓

$$\Rightarrow f \circ x = y \circ g = (g^{-1} \circ h) \circ g$$

$$\Rightarrow f^{-1} \circ f \circ x = f^{-1} \circ g^{-1} \circ h \circ g \underset{\text{DEF } f^{-1}}{=} x$$

Das LGS hat nur eine Lösung

$$(f^{-1} \circ g^{-1} \circ h \circ g,\ g^{-1} \circ h) \in G \qquad \square$$ ✓