Aufgabe 1. [10 Punkte]

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $a_0, ..., a_n, b_0, ..., b_n \in K$ gegeben. In dieser Aufgabe wird nach einem Polynom $f(X) := f_n X^n + ... + f_1 X + f_0 \in K[X]$ vom Grad höchstens n (es gilt $\mathrm{grad}(f) = n$ genau dann, wenn $f_n \neq 0$) gesucht, so dass

$$f(a_i) = b_i, \ \forall i \in \{0, ..., n\}. \tag{1}$$

(a) *(2 Punkte)* Leiten Sie aus (1) einen linearen Gleichungssystem

$$A \cdot x = b$$

her, wo A eine Matrix ist und x, b Spaltenvektoren, so dass die Koeffizienten $f_0, ..., f_n$ des gesuchten Polynoms f durchs Lösen diesen Systems bestimmt werden.

(b) *(3 Punkte)* Seien $b_0 = ... = b_n = 0$ und $a_0, ..., a_n$ paarweise verschieden. Zeigen Sie, dass es in diesem Fall genau ein Polynom f vom Grad höchstens n existiert, der (1) erfüllt.

(c) *(2 Punkte)* Welche Bedingungen müssen $a_0, ..., a_n, b_0, ..., b_n \in K$ erfüllen, damit das System $A \cdot x = b$ von (a) eine eindeutige Lösung hat?

(d) *(3 Punkte)* Sei $K := \mathbb{Z}_3$, $n := 2$, $a_0 := \bar{0}$, $b_0 := \bar{0}$, $a_1 := \bar{1}$, $a_2 := \bar{2}$, $b_1 = b_2 := \bar{1}$, (hier bedeutet $\bar{k}$, für $k \in \mathbb{Z}$, die Restklasse von k modulo 3). Finden Sie alle Polynome $f \in \mathbb{Z}_3[X]$ von Grad höchstens 2, die (1) erfüllen.

(e)* *(4 Punkte)* Sei $K := \mathbb{Z}_p$ und $n := p - 1$, p eine ungerade Primzahl. Sei $\{a_0, ..., a_{p-1}\} := \mathbb{Z}_p \setminus \{\bar{0}\}$ und $b_k := a_k^{-1}$, $\forall k \in \{0, ..., p-1\}$ (hier ist a^{-1} das inverse Element zu $a \in \mathbb{Z}_p \setminus \{\bar{0}\}$ für die Multiplikation im Körper $\mathbb{Z}_p$). Finden Sie alle Polynome $f \in \mathbb{Z}_p[X]$ von Grad höchstens $p - 1$, die (1) erfüllen.

Lösung. (a) Wir schreiben $f(a_i) = b_i \ \forall i \in \{0, .., n\} \Leftrightarrow f_n a_i^n + .. + f_1 a_i + f_0 = b_i \forall i \in \{0, .., n\} \Leftrightarrow$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & a_0 & \dots & a_0^{n-1} & a_0^n \\ 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} & a_n^n \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{b}$$

mit $A \in \mathrm{Mat}((n+1) \times (n+1), K), x, b \in K^{n+1}$.

(b) Falls $b_i = 0$ und Gleichung (1) ist erfüllt, so sind die a_i alle Nullstellen von f, das heißt $(X - a_i) \mid f$. Falls $a_0, .., a_n$ paarweise verschieden sind, so sind die $X - a_0, .., X - a_n$ paarweise teilerfremd. Dann gilt also auch $\prod_{i=0}^n (X - a_i) \mid f$. Für $f \neq 0$ würde dann folgen, dass $n \geq \mathrm{grad}(f) = \mathrm{grad}(\prod_{i=0}^n (X - a_i)) = n + 1$. Die Gleichung (1) kann also nur durch $f = 0$ erfüllt werden.

(c) Um eine eindeutige Lösung des Systems $Ax = b$ zu erhalten, muss A invertierbar sein, oder $\mathrm{rang}\, A = n + 1$. Dies ist äquivalent dazu, dass das homogene System $Ax = 0$ nur die triviale Lösung hat. Aus (b) folgt also $\mathrm{rang}\, A = n + 1$, falls $a_0, .., a_n$ paarweise verschieden sind. Falls $a_i = a_j$ für ein $i \neq j$, so sind die entsprechenden Zeilen von A identisch. Der Rang kann dann also höchstens n sein. Es gilt also: $Ax = b$ hat eine eindeutige Lösung $\Leftrightarrow a_0, .., a_n$ sind paarweise verschieden. Insbesondere können die $b_0, .., b_n$ beliebige Werte sein.

(d) Aus dem Satz von Fermat folgt $\overline{x}^2 = \overline{1}$ für alle $x \in K^\times = K \setminus \{0\}$. Weiter gilt $\overline{0}^2 = \overline{0}$. Es erfüllt also $f = X^2$ die Gleichung (1). Aus (c) schließen wir, dass dies das einzige solche Polynom ist.

(e)* Wir suchen ein Polynom $f \in K[X]$ so dass $a \cdot f(a) = \overline{1} \ \forall a \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ und $\mathrm{grad}\, f \leq p - 1$. Der Satz von Fermat sagt $\overline{1} = a^{p-1} \ \forall a \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$, also haben die Polynome $q_1(X) := X \cdot f(X) - \overline{1}$ und $q_2(X) := X \cdot f(X) - X^{p-1}$ die Nullstellen $\overline{1}, .., \overline{p-1}$. Da $p > 1$, ist $\overline{0} \in Z_p$ auch eine Nullstelle von q_2.

Falls $\mathrm{grad}\, f \leq p - 1$, so ist $\mathrm{grad}\, q_2 \leq p$ und wir leiten wie in (b) her, dass $q_2(x)$ mit der Eigenschaft $q_2(a) = \overline{0} \ \forall a \in \mathbb{Z}_p$ eindeutig ist. Nun wissen wir, dass $q_3(X) := X^p - X \in \mathbb{Z}_p[X]$ ebenfalls diese

Eigenschaft besitzt, also diese zwei Polynome, beide vom Grad $\leq p$, haben $X - a$, für alle $a \in \mathbb{Z}_p$, als gemeinsame Faktoren. Da alle diese p lineare Faktoren paarweise teilerfremd sind, sind beide Polynome q_2 und q_3 durch das Produkt $X \cdot (X - \overline{1}) \cdot ... \cdot (X - \overline{p-1})$ (auch ein Polynom vom Grad p) teilbar. Es folgt $Xf(X) - X^{p-1} = \overline{k} \cdot (X^p - X)$ für ein $\overline{k} \in \mathbb{Z}_p$. Da beide Seiten durch X teilbar sind, erhalten wir

$$f(X) - X^{p-2} = \overline{k} \cdot (X^{p-1} - \overline{1}),$$

also $f(X) = \overline{k} \cdot (X^{p-1} - \overline{1}) + X^{p-2}$, für ein $\overline{k} \in \mathbb{Z}_p$. Es gibt also p solche Polynome, eines für jeden Wert $\overline{k} \in \mathbb{Z}_p$.

$\square$

Aufgabe 2. [10 Punkte]

Sei $A_s \in \mathrm{Mat}(3\times 3,\mathbb{C})$ die folgende Matrix, die vom Parameter $s\in\mathbb{C}$ abhängt:

$$A_s := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & s & s^2 \\ 1 & s^3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) *(5 Punkte)* Bestimmen Sie den Rang der Matrix A_s in Abhängigkeit von $s\in\mathbb{C}$. Zeigen Sie, A_0 ist invertierbar und berechnen Sie A_0^{-1}.

(b) *(2 Punkte)* Sei $f_s : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $f_s(x) := A_s \cdot x$. Geben Sie eine Basis von $\ker f_1$ an.

(c) *(3 Punkte)* Geben Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$A_\lambda \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

an, wobei $\lambda := -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lösung. (a) Wir führen Elementare Zeilenumformungen durch

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & s & s^2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & s^3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[III-I]{II-I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & s-1 & s^2-1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & s^3-1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{III-(s^2+s+1)\cdot II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & s-1 & s^2-1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -(s+1)(s^3-1) & s^2+s & -(s^2+s+1) & 1 \end{array}\right) \qquad (*)$$

Es gilt also $s=1 \Rightarrow \operatorname{rang} A_s = 1$ und $s\neq 1 \Rightarrow \operatorname{rang} A_s \geq 2$. Weiter $\operatorname{rang} A_s = 2 \Leftrightarrow s=-1 \vee s^2+s+1 = 0$. Man rechnet leicht nach $s^2+s+1=0 \Leftrightarrow s\in \left\{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\} = \left\{\lambda,\overline{\lambda}\right\}$ mit der Notation aus (c). Damit gilt A_s invertierbar $\Leftrightarrow s\in\mathbb{C}\setminus\left\{-1,1,\lambda,\overline{\lambda}\right\}$. Insbesondere ist A_0 invertierbar und es gilt (wir setzen $s=0$ in $(*)$ ein):

$$(A_0 \mid I_3) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{I+II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[II\cdot(-1)]{II+III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Also $A_0^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Es ist $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $A_1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1+x_2+x_3 = 0$. Eine Basis von $\ker f_1$ ist $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, denn die Vektoren sind linear unabhängig und $\dim\ker f_1 = 3 - \operatorname{rang} A_1 = 3-1 = 2$.

(c) Wir setzen $s = \lambda$ in $(*)$ ein und bemerken $\lambda^2 = \overline{\lambda} = \lambda^{-1}$, denn $\lambda^3 = 1$, also auch $\overline{\lambda}^2 = \lambda$. Weiter gilt $\lambda - 1 = -i\sqrt{3}\cdot\overline{\lambda}$ und $\overline{\lambda} - 1 = i\sqrt{3}\lambda$. Wir bringen nun die erweiterte Matrix $\left(\begin{array}{c|c} A_\lambda & \begin{matrix}0\\3\\0\end{matrix}\end{array}\right)$ in Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & \overline{\lambda} & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[II-I]{III-I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & \overline{\lambda} - 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{II \cdot \frac{i}{\sqrt{3}}\lambda} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\overline{\lambda} & i\sqrt{3}\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{I-II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1+\overline{\lambda} & -i\sqrt{3}\lambda \\ 0 & 1 & -\overline{\lambda} & i\sqrt{3}\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\lambda & 1-\overline{\lambda} \\ 0 & 1 & -\overline{\lambda} & \overline{\lambda}-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{2}$$

Das System (2) ist also äquivalent zu $\begin{cases} x_1 - \lambda x_3 = \lambda - 1 \\ x_2 - \overline{\lambda} x_3 = \overline{\lambda} - 1 \end{cases}$. Wählen wir hier $x_3 = \lambda$, so ist $x_1 = 1$ und $x_2 = \overline{\lambda}$ eine Lösung. Die allgemeine Lösung ist also gegeben durch $\begin{pmatrix} 1 \\ \overline{\lambda} \\ \lambda \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ für $a \in \mathbb{C}$ wobei $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ ein nicht-trivialer Basisvektors von $\ker f_\lambda$ ist. Es gilt $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \ker f_\lambda \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 - \lambda y_3 = 0 \\ y_2 - \overline{\lambda} y_3 = 0 \end{cases}$.
Man sieht, dass $y_3 = 1, y_1 = \lambda, y_2 = \overline{\lambda}$ diese Bedingung erfüllt. Also ist die allgemeine Lösung von (2) gegeben durch

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \overline{\lambda} \\ \lambda \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} \lambda \\ \overline{\lambda} \\ 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C} \right\}$$

$\square$

Aufgabe 3. [10 Punkte]

Seien $p, q \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ und sei $n := p+q$. Sei $T_{p,q}$ die Menge der $n\times n$ Matrizen, die die folgende Blockdarstellung haben:

$$A \in T_{p,q} \;:\Longleftrightarrow\; A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix},\; B \in \mathrm{Mat}(p\times p, \mathbb{R}),\; D \in \mathrm{Mat}(q\times q, \mathbb{R}),\; C \in \mathrm{Mat}(q\times p, \mathbb{R}).$$

(Die Null in der obere rechte Ecke dieser Blockdarstellung steht für die $p \times q$ Nullmatrix.)

(a) *(3 Punkte)* Zeigen Sie, $T_{p,q}$, betrachtet mit der Matrixaddition, bzw. -multiplikation, ist ein Ring mit Einselement.

(b) *(3 Punkte)* Sei A eine invertierbare $n \times n$ Matrix. Zeigen Sie, $A \in T_{p,q} \;\Rightarrow\; A^{-1} \in T_{p,q}$.

(c) *(4 Punkte)* Zeigen Sie, $\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, es gilt

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} B^k & 0 \\ C_k & D^k \end{pmatrix}$$

, wobei $C_k = \sum_{i=0}^{k-1} D^i \cdot C \cdot B^{k-1-i}$.

(d)* *(4 Punkte)* Sei $A = (a_{ij})_{i,j\in\{1,\dots,n\}} \in \mathrm{Mat}(n\times n,\mathbb{R})$, so dass $a_{ij} = 0\ \forall i,j \in \{1,\dots,n\}, i \le j$ (A ist eine untere Dreiecksmatrix ohne Diagonaleinträgen). Zeigen Sie, $A^n = 0$.

Hinweis: Beweis per Induktion über n. Benutzen Sie $A \in T_{1,n-1}\cap T_{n-1,1}$ und der Punkt (c) von dieser Aufgabe.

Lösung. (a) Seien $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ und $A' = \begin{pmatrix} B' & C \\ C' & D' \end{pmatrix}$ in $T_{p,q}$. Das Produkt einer der ersten p Zeilen $[a]$ aus A mit einer der Spalten $p+1,\dots,n$ (b) aus A' ist Null, denn $[a] = (a_1,..,a_p,0,..,0)$ und $(b) = (0,..,0,b_1,..,b_q)^t$. Also ist $A\cdot A' \in T_{p,q}$. Analog gilt $A+\lambda A' \in T_{p,q}$ für alle $A, A' \in T_{p,q}, \lambda \in \mathbb{R}$. Also ist $T_{p,q}$ ein Untervektorraum von $\mathrm{Mat}(n\times n,\mathbb{R})$, insbesondere also eine abelsche Gruppe. Weiter definiert die Matrizenmultiplikation eine Verknüpfung auf $T_{p,q}$, die assoziativ ist und distributiv bezüglich der Addition, da diese Eigenschaften bereits auf $\mathrm{Mat}(n\times n,\mathbb{R})$ gelten.

(b) Sei $A^{-1} = \begin{pmatrix} B' & A' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ mit $B' \in \mathrm{Mat}(p\times p,\mathbb{R}), D' \in \mathrm{Mat}(q\times q,\mathbb{R}), C' \in \mathrm{Mat}(q\times p,\mathbb{R}), A' \in \mathrm{Mat}(p\times q,\mathbb{R})$. Wir wissen

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B' & A' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BB' & BA' \\ CB'+DC' & CA'+DD' \end{pmatrix} = I_n$$

Es folgt $BB' = I_p$ und $BA' = 0$. Also ist B invertierbar mit Inverser Matrix B' und es folgt $0 = B'BA = A'$. Also ist $A^{-1} \in T_{p,q}$.

(c) Induktion über $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$:

$k = 1$: $B' = B$, C_1 hat genau einen Term, der gleich C ist, also $A^1 = A$ und die Formel gilt.

$k > 1$: Nach der Induktionvoraussetzung $A^{k-1} = \begin{pmatrix} B^{k-1} & 0 \\ C_{k-1} & D^{k-1} \end{pmatrix}$. Es folgt

$$A^k = AA^{k-1} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B^{k-1} & 0 \\ C_{k-1} & D^{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^k & 0 \\ CB^{k-1}+DC_{k-1} & D^k \end{pmatrix}$$

Es gilt $C_{k-1} = \sum_{i=0}^{k-2} D^iCB^{k-2-i} \Rightarrow DC_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} D^iCB^{k-1-i}$ und CB^{k-1} entspricht dem Term $i=0$ in $C_k = \sum_{i=0}^{k-1} D^iCB^{k-1-i}$, also $CB^{k-1}+DC_{k-1} = C_k$ und $A^k = \begin{pmatrix} B^k & 0 \\ C_k & D^k \end{pmatrix}$.

(d)* Induktion über $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$n = 1$: Die Matrix A ist 0. Also $A^1 = 0$

$n > 1$: Wir schreiben $A = \begin{pmatrix} B' & 0 \\ C' & D' \end{pmatrix} \in T_{1,n-1}$ wobei die 1×1 Matrix B' notwendigerweise 0 ist und D' ist eine $(n-1) \times (n-1)$ untere Dreiecksmatrix ohne Diagonaleinträge. Nach Induktionsvoraussetzung ist $(D')^{n-1} = 0$, also hat A^{n-1} keine nicht-trivialen Einträge außerhalb der ersten Spalte. Jetzt schreiben wir $A = \begin{pmatrix} B'' & 0 \\ C'' & D'' \end{pmatrix} \in T_{n-1,1}$. Jetzt ist die $(n-1) \times (n-1)$ Matrix B'' eine untere Dreiecksmatrix ohne Diagonaleinträge. Nach Induktionsvoraussetzung ist $(B'')^{n-1} = 0$ und es hat A^{n-1} keine nicht-trivialen Einträge außerhalb der letzten Zeile. Es folgt:

$$A^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ a & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$$

Berechnet man nun AA^{n-1}, so kommt 0 heraus, da alle Zeilen von A haben 0 an der letzten Stelle, welche die einzigen sind, welche mit a multipliziert werden.

□

Aufgabe 4. [10 Punkte]

Sei $A_s := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$, $s \in \mathbb{R}$.

(a) *(3 Punkte)* Für alle $s \in \mathbb{R}$, berechnen Sie das charakteristische Polynom von A_s und bestimmen Sie seine Nullstellen und ihre entsprechende Vielfachkeiten (in Abhängigkeit von s).

(b) *(3 Punkte)* Bestimmen Sie, in Abhängigkeit von $s \in \mathbb{R}$, die algebraische und geometrische Vielfachkeiten der Eigenwerten von A_s. Für welche $s \in \mathbb{R}$ ist A_s diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) *(3 Punkte)* Geben Sie, für jede $s \in \mathbb{R}$, je eine Basis für jeden Eigenraum von A_s.

(d) *(1 Punkt)* Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ eine schiefsymmetrische Matrix (d.h. $A + A^\top = 0$), $n \in \mathbb{N}$ ungerade. Zeigen Sie, A ist nicht invertierbar.

Lösung. (a)

$$\chi_{A_s}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ s & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ s & 1-\lambda \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} s-\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2(s-\lambda)(-\lambda)$$

1. Fall $s = 1$**:** Dann $\chi_{A_1}(\lambda) = (1-\lambda)^3(-\lambda)$ hat die Nullstellen 1 und 0 mit Vielfachheiten 3 beziehungsweise 1.

2. Fall $s = 0$**:** $\chi_{A_0}(\lambda) = (1-\lambda)^2\lambda^2$ hat die Nullstellen 1 und 0 mit Vielfachheiten jeweils 2.

3. Fall $s \neq 0, 1$**:** $\chi_{A_s}(\lambda) = (1-\lambda)^2(s-\lambda)(-\lambda)$ hat die Nullstellen 1,s und 0 mit Vielfachheiten 2, 1 und 1.

(b) **1. Fall** $s = 1$**:** Die Eigenwerte von A_1 sind 1 und 0 mit algebraischen Vielfachheiten $a_1 = 3$ beziehungsweise $a_0 = 1$. Es folgt $g_0 = 1$ und $g_1 = 4 - \mathrm{rang}(A_1 - I_4)$ sind die geometrischen Vielfachheiten von 0 beziehungsweise 1. Es hat $A_1 - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ rang 2, da 2 Spalten Null sind und die anderen beiden linear unabhängig. Also $g_1 = 2$.

2. Fall $s = 0$**:** Die Eigenwerte sind 1 und 0 mit algebraischen Vielfachheiten $a_1 = 2, a_0 = 2$. Wir bestimmen den Rang der Matrizen $A_0 - 0 \cdot I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $A_0 - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Es ist $\mathrm{rang}(A_0 - I_4) = 2$ und $\mathrm{rang}\, A_0 = 3$, also $g_1 = 2$ und $g_0 = 1$.

3. Fall $s \neq 0, 1$**:** Die Eigenwerte sind $1, s, 0$ mit algebraischen Vielfachheiten $a_1 = 2, a_s = 1, a_0 = 1$. Daher sind die geometrischen Vielfachheiten $g_s = g_0 = 1$. Um g_1 zu bestimmen betrachten wir $A_s - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s-1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Da $s \neq 0$ ist die erste Spalte keine Linearkombination der anderen.
Da $s \neq 1$ ist die dritte Spalte nicht 0 und es ist kein Vielfaches der letzten Spalte. Daher sind die 1.,3.,4. Spalte von $A_s - I_4$ linear unabhängig, also $\mathrm{rang}(A_s - I_4) = 3$ und damit $g_1 = 1$.

In keinem der 3 Fälle ist A_s diagonalisierbar, da nie alle algebraischen Vielfachheiten mit den zugehörigen geometrischen Vielfachheiten übereinstimmen.

(c) **1. Fall** $s = 1$**:** $\mathrm{ER}(1) = \ker(A_1 - I_4) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Die Standardvektoren $(0,1,0,0)^\top, (0,0,1,0)^\top$ gehören zu $\mathrm{ER}(1)$ und da dieser Dimension 2 hat bilden sie eine Basis von diesem.

$\mathrm{ER}(0) = \ker(A_1) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Da die letzten beiden Spalten von A_1 identisch sind, erfüllt $v = (0,0,1,-1)^\top$ die Gleichung $Av = 0$. Also ist v eine Basis des eindimensionalen $\mathrm{ER}(0)$.

2. Fall $s = 0$**:** $\mathrm{ER}(1) = \ker(A_0 - I_4) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Es gilt $(A_0 - I_4) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$ $\begin{cases} x_3 = x_4 \\ x_1 = x_4 \end{cases}$. Wegen $\dim \mathrm{ER}(1) = 2$ liefern damit $(0,1,0,0)^\top, (1,0,1,1)^\top$ eine Basis von $\mathrm{ER}(1)$, da sie die Bedingung erfüllen und linear unabhängig sind.

$\mathrm{ER}(0) = \ker A_0 = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ni (0,0,1,0)^\top$. Da $\dim \mathrm{ER}(0) = 1$ ist $(0,0,1,0)^\top$ eine Basis von $\mathrm{ER}(0)$.

3. Fall $s \neq 0, 1$**:** $\mathrm{ER}(1) = \ker(A_3 - I_4) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s-1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ni (0,1,0,0)^\top$. Dieser Vektor bildet eine Basis, da $g_0 = 1$.

$\mathrm{ER}(0) = \ker(A_s) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Da die 3. Spalte ein Vielfaches der 4. ist, suchen wir einen Vektor der Form $(0,0,a,b)$ in $\mathrm{ER}(0)$. Wegen $A_s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ as+b \\ 0 \end{pmatrix}$ liegt also $(0,0,1,-s)^\top$ in $\mathrm{ER}(0)$ und bildet aus Dimensionsgründen eine Basis.

$\mathrm{ER}(s) = \ker(A_s - sI_4) = \ker(\begin{pmatrix} 1-s & 0 & 0 & 0 \\ s & 1-s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -s \end{pmatrix} \ni (0,0,1,0)^\top$. Der Vektor bildet wegen $g_s = 1$ eine Basis von $\mathrm{ER}(s)$.

(d) Es gilt $\det(A) = \det(A^\top)$ für alle Matrizen A. Nach Voraussetzung gilt $A^\top = -A$ und es folgt mit $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ dann wegen n ungerade:

$$\det(A) = \det(A^\top) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) = -\det(A)$$

und somit $\det(A) = 0$.

$\square$