AB Geometrie & Topologie
Prof. Bernhard Leeb, Ph.D.
Dr. Stephan Stadler

Analysis I

Übungsblatt 4

1. Für beliebige $b, r \in \mathbb{R}$ mit $b > 1$ existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $b^n > r$.

   Hinweis: Benutzen Sie die Ungleichung von Bernoulli.

2. (i) Für $a, b \in \mathbb{R}$ gelten die Aussagen:

   (α) $|a - b| \geq \big||a| - |b|\big|$

   (β) $b - |a - b| \leq a \leq b + |a - b|$

   (γ) $\max(a, b) = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}$

   (ii) (α) Für beliebige Teilmengen $A, B \subset \overline{\mathbb{R}}$ gilt:

   $$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$$

   (β) Allgemeiner gilt für eine Familie von Teilmengen $A_n \subset \overline{\mathbb{R}}$ für $n \in \mathbb{N}$:

   $$\sup\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sup\,\{\sup A_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$$

   Hinweis: Suprema und Maxima sollen in $\overline{\mathbb{R}}$ gebildet werden.

3. Es sei $M \subset \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben beschränkt. Zeigen Sie, daß für jedes $\epsilon > 0$ eine Zahl $x \in M$ existiert, so daß $x + \epsilon$ eine obere Schranke für M ist.

4. (i) Es sei X eine beliebige Menge. Zeigen Sie, daß keine Surjektion $X \to P(X)$ auf die Menge $P(X)$ aller Teilmengen von X existiert.

   Hinweis: Betrachten Sie für eine Abbildung $F : X \to P(X)$ die Teilmenge $M_F := \{x \in X | \; x \notin F(x)\} \in P(X)$ und verifizieren Sie, daß $M_F \notin F(X)$.

   (ii) Es existieren Injektionen $P(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ und Surjektionen $\mathbb{R} \to P(\mathbb{N})$.

   Hinweis: Verwenden Sie die Dezimaldarstellung reeller Zahlen.

   (iii) Es existiert keine Surjektion $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

   Bemerkung: Es folgt, daß insbesondere keine Bijektion $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ existiert. Man sagt dazu, daß $\mathbb{R}$ *nicht abzählbar* bzw *überabzählbar* ist.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis Montag dem 12.11.2018 um 10:15 h ab. (Übungskästen.)