Mit $E \subseteq V$ kann man jedes $\vec{v}$ aus V bauen.

→ E ist Erzeugendensystem von V

$$\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix} = 3 * \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 2 * \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 4 * \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix} = 2 * \begin{pmatrix}-1\\0\\-8\end{pmatrix} + 3 * \begin{pmatrix}2\\-5\\0\end{pmatrix} + 5 * \begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix} + 1 * \underline{\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}}$$

Nicht eindeutig

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ $\quad \mathbb{R}\text{-VR}(\mathbb{R}^3, +, *)$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = x * \underline{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}} + y * \underline{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}} + z * \underline{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}$$

Bausatz

Def

$\mathbb{R}\text{-VR}(\mathbb{R}^3, +, *)$

$E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ist Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ $\Longleftrightarrow$ $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3: \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}:$

$\vec{v} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n$

V ist E von V

LINEARE ABHÄNGIGKEIT / UNABHÄNGIGKEIT

$$\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} = \frac{-1}{7} * \begin{pmatrix}-1\\0\\-8\end{pmatrix} + \frac{-4}{7} * \begin{pmatrix}2\\-5\\0\end{pmatrix} + \frac{-2}{7}\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}$$

DEF

$\mathbb{R}\text{-VR}(\mathbb{R}^3, +, *)$

Vektoren der Menge $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\} \subseteq \mathbb{R}^3$ sind linear <u>Abhängig</u> $\longleftrightarrow$ $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, einige $\lambda_i \neq 0$:

$\lambda_1 * \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_i * \vec{e}_n = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

<u>auf jeden Fall erzeugen null</u>

$\mathbb{R}\text{-VR}(\mathbb{R}^3, +, *)$

Vektoren der Menge $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\} \subseteq \mathbb{R}^3$ sind linear Unabhängig $\Longleftrightarrow$ $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

$\lambda_1 * \vec{e}_1 + \lambda_2 * \vec{e}_2 + \dots + \lambda_n * \vec{e}_n = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

nur, wenn $\lambda_1, \dots, \lambda_n = 0$

z.B.

$$\boxed{\begin{aligned}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} &= x * \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y * \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + z * \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} &= 0 * \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 0 * \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 0 * \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\end{aligned}}$$

<u>nur mit null → null</u>

Basis:

1. Erzeugendensystem
2. Darstellung ist Eindeutig (nur einen Fall für jede Vektoren)

z.B. $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = x * \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y * \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + z * \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

einzige Möglichkeit für (x, y, z)

Meistens besitzt ein VR mehrere Basen

! Linear Unabhängig immer!

! Jeder Vektorraum hat eine Basis!

Mit $E \subseteq V$ kann man jedes $\vec{v}$ aus V bauen.

$\rightarrow$ **E ist Erzeugendensystem von V** **Def**

$$\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix} = 3 * \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 2 * \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 4 * \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix} = 2 * \begin{pmatrix}-1\\0\\-8\end{pmatrix} + 3 * \begin{pmatrix}2\\-5\\0\end{pmatrix} + 5 * \begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix} + 1 * \underline{\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}}$$

Nicht eindeutig

$\mathbb{R}$-VR$(\mathbb{R}^3, +, *)$

$E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ist Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ $\Leftrightarrow$ $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3: \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}:$
$\vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{e}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{e}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{e}_n$

V ist E von V

LINEARE ABHÄNGIGKEIT / UNABHÄNGIGKEIT

$$\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} = \frac{-1}{7} * \begin{pmatrix}-1\\0\\-8\end{pmatrix} + \frac{-4*}{7}\begin{pmatrix}2\\-5\\0\end{pmatrix} + \frac{-2}{7}\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ $\quad$ $\mathbb{R}$-VR$(\mathbb{R}^3, +, *)$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = x * \underline{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}} + y * \underline{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}} + z * \underline{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}$$

Bausatz

DEF

$\mathbb{R}$-VR$(\mathbb{R}^3, +, *)$

Vektoren der Menge $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\} \subseteq \mathbb{R}^3$ sind linear <u>Abhängig</u> $\longleftrightarrow$ $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, einige $\lambda_i \neq 0$:
$\lambda_1 * \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_i * \vec{e}_n = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

<u>auf jedenfall erzeugen null</u>

$\mathbb{R}$-VR$(\mathbb{R}^3, +, *)$

Vektoren der Menge $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\} \subseteq \mathbb{R}^3$ sind linear Unabhängig $\Longleftrightarrow$ $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$
$\lambda_1 * \vec{e}_1 + \lambda_2 * \vec{e}_2 + \dots + \lambda_n * \vec{e}_n = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$
nur, wenn $\lambda_1, \dots, \lambda_n = 0$

z.B.

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = x * \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y * \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + z * \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 0 * \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 0 * \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 0 * \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

<u>nur mit null $\rightarrow$ null</u>

Basis:

1. Erzeugendensystem
2. Darstellung ist Eindeutig
(nur einen Fall für jede Vektoren)

z.B.

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = x * \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y * \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + z * \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

einzige Möglichkeit für (x, y, z)

Meistens besitzt ein VR mehrere Basen

! Linear Unabhängig immer!

! Jeder Vektorraum hat eine Basis!

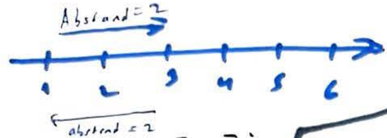
METRIK & NORM

METRIK

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \dots\}$

Abstand: $d(1,3) = 2$

Abstand = 2



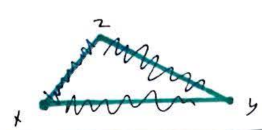
$d: M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$

(x, y) 2 Zahlen $\quad d(x,y)$ abstand

- $d(x,y) \geq 0$
- $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x = y)$

Bedingungen

- Positive Definitheit
  $d(x,y) \geq 0$
- Symetrie
  $d(x,y) = d(y,x)$
  $\rightarrow d(x,y) = d(y,x)$
- Dreiecksungleichung
  $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$



Beispiel/gegenbeispiel

Ist d eine Metrik?

x, y, z $\quad d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \rightarrow d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = y \\ 1 & \text{für } x \neq y \end{cases}$

① Positive Definitheit ✓
- $\forall x,y \in M \quad d(x,y) \geq 0$ ✓
  $d(x,y) = 0 \leftrightarrow x = y$ ✓

② Symetrie ✓
- $\forall x,y \in M \quad d(x,y) = d(y,x)$

③ Dreiecksgleichung
- $\forall x,y \in M \quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

1. Fall:
$x = y \rightarrow d(x,y) = 0$
es gilt: $d(x,z) + d(z,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in M$ ✓

2. Fall:
$x \neq y \rightarrow d(x,y) = 1$
es gilt: $z \neq x$ oder $z \neq y$ ✓
$\rightarrow d(x,z) = 1$ oder $d(z,y) = 1$
$\rightarrow d(x,z) + d(z,y) \geq 1$
$\rightarrow d(x,z) + d(z,y) \geq 1 = d(x,y)$
$\rightarrow d(x,z) + d(z,y) \geq d(x,y)$

$\|.\|: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Betrag ist eine Norm

$|x| \rightarrow \sqrt{x^2}$

Ist $\|.\|$ eine Norm?

$\|.\|: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \rightarrow \|x\| \quad x^2$

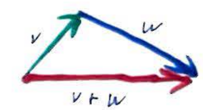
- Positive Definitheit ✓
  Länge nie kleiner als null
- Absolute Homogenität (für Körper)
  $\forall k, x \in \mathbb{R} \quad \|k * x\| = \|k\| * \|x\|$
  hier Vektorraum = reelle Zahlen
  $\|k * x\| = (k * x)^2 = (k^2 * x^2)$ ✓
  $= \|k\| * \|x\|$
- Dreiecksungleichung
  $\forall v, w \in \mathbb{R} \quad \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$
  $\|v + w\| = (v + w)^2$
  $= v^2 + 2vw + w^2$
  $\|v\| + \|w\| = v^2 + w^2$
  ✗
  $v^2 + 2vw + w^2 \leq v^2 + w^2$
  $2vw \leq 0$ für alle v, w
  $2 * 1 * 1$ falsch

NORM: $\|.\|: V \rightarrow \mathbb{R}$

v Vektor $\quad \|v\|$ Norm

Bedingungen

- Positive Definitheit
  - $\|v\| \geq 0$
  - $\|v\| = 0 \Longleftrightarrow v = 0$
- Dreiecksungleichung
  - $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$



- Absolute Homogenität
  für alle $k \in K, v \in V$
  $\|k * v\| = |k| * \|v\|$

$\left\| -2 * \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = |-2| * \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\|$

KÖRPER $(K, \circ, \boxdot)$

— Menge {irgendwas, irgendwas, anderes, ...}

!Reihenfolge!

— Verknüpfung 1: $\circ$

— Verknüpfung 2: $\boxdot$

— Verknüpfung z.B.: $+, *, -, ;$

BEDINGUNGEN $(\mathbb{K}, \circ, \boxdot)$

1. $(\mathbb{K}, \circ)$ Abelsche Gruppe
   - > assoziativ
   - > kommutativ
   - > neutrales Element = Nullelement
   - > inverses Element

2. ($\mathbb{K}$ ohne Nullelement, $\boxdot$) abelsche Gruppe
   - > assoziativ
   - > Kommutativ
   - > Neutrales Element = Einselement
   - > Inverses Element

3. $(\circ, \boxdot)$ distributiv

KÖRPER $(\mathbb{R}, +, *)$

Neutrales bei $+$: 0 → Nullelement

Neutrales bei $*$: 1 → Einselement

K – Vektorraum: $(V, \oplus, \circledast)$

über dem Körper $\mathbb{K}$

$V = \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$

$K = \mathbb{R}$

$V \times V = \{(V_1, V_2) \mid V_1, V_2 \in V\}$

Vektor Addition

$\oplus : (V_1, V_2) \Longrightarrow V_1 \oplus V_2$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1+4 \\ 2+5 \\ 3+6 \end{pmatrix}$

$K \times V = \{(k, V) \mid k \in K, V \in V\}$

$\circledast : (k, V) \Longrightarrow k \circledast V$

Skalar

Vektor

$5 \circledast \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 5 * 1 \\ 5 * 2 \\ 5 * 3 \end{pmatrix}$

VEKTORRÄUME

① Assoziativität $\oplus$

$V_1 \oplus (V_2 \oplus V_3) = (V_1 \oplus V_2) \oplus V_3$

② Neutrales El. von $\oplus$

$v \oplus e = e \oplus v = v$

$e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

③ Inverses $\oplus$

$v \oplus v' = v' \oplus v = e$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

④ Kommut. $\oplus$

$V_1 \oplus V_2 = V_2 \oplus V_1$

⑤ Neutralität von $e \in K$

$e \circledast v = v$

$1 \circledast \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

⑥ Assoziativität $\circledast$ mit $*$

$(k_1 * k_2) \circledast v = k_1 \circledast (k_2 \circledast v)$

⑦ Distributivität $\circledast$ mit $+$

$(k_1 + k_2) \circledast v = (k_1 \circledast v) \oplus (k_2 \circledast v)$

$(5 + 6) \circledast \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} (5+6) * 1 \\ (5+6) * 2 \\ (5+6) * 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5*1 + 6*1 \\ 5*2 + 6*2 \\ 5*3 + 6*3 \end{pmatrix}$

$= \left(5 \circledast \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \oplus \left(6 \circledast \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$

⑧ Distributivität $\circledast$ mit $\oplus$

$k \circledast (V_1 \oplus V_2) = (k \circledast V_1) \oplus (k \circledast V_2)$

$k \circledast \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} k * (1+3) \\ k * (2+4) \\ k * (3+5) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} k * 1 + k * 3 \\ k * 2 + k * 4 \\ k * 3 + k * 5 \end{pmatrix} = k \circledast \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \oplus k \circledast \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

④ Prüfung

$V \subset \mathbb{R}^3 = \{(x, y, 1) \mid x, y, 1 \in \mathbb{K}\}$

$K = \mathbb{R}$

Vektoraddition

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Skalare Multip.

$k \circledast \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} k x \\ k y \\ k * 1 \end{pmatrix}$

1 2 3 4 5 6 7 8

X

RING:(R, ...)

1. MENGE: R
2. ERSTE VERKNÜPFUNG: $\circ$
3. ZWEITE Verknüpfung: $\boxdot$

1. Verknüpfung $(R, \circ)$	2. Verknüpfung $(R, \boxdot)$
– Assoziativität	– Assoziativität
– Nullelement (neutral)	– Distributivität
– Inverses element	

* Fall ① Kommutativer Ring: Wenn $R, \boxdot$ kommutativ

Fall ② unitärer Ring: Wenn $R, \boxdot$ neutrales Element bzw. Einselement

BEDINGUNGEN

1 Assoziativität

$\forall a,b,c \in R$:

$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

ABER

$a \circ b \neq b \circ a$

2 NEUTRALES Element

$e :=$ neutrales element

$a \circ e = e \circ a = a$

$a * 1 = 1 * a = a$

$a + 0 = a$

3. INVERSES Element

$\forall a \in R \ \exists \, a^{-1} \in R$:

$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$

4 KOMMUTATIVITÄT

$\forall a,b \in G$

$a \circ b = b \circ a$

5. DISTRIBUTIVITÄT

zwei Verknüpfungen: $\circ, \boxdot$

$\forall a,b,c \in R$:

1. Linksseitig Distributivität

$a \boxdot (b \circ c) = a \boxdot b \circ a \boxdot c$

2. Rechtsseitig Distributivität

Matrizen

$$\begin{array}{l|ccc|l} & \text{1. Spalte} & \text{2. Sp.} & \text{3. Sp.} \; j & \\ \hline \text{1. Zeile} & bla & bla & bla & \\ \text{2. Zeile} & bla & bla & bla & 3 \times 3 \\ \text{3. Zeile} & bla & bla & bla & \text{Zeilen} \times \text{Spalten} \end{array}$$

[...]i

LGS (lineare Gleich Sys.)

Gruppen (kein Beweis)

$(\mathbb{K}, \circ)$

- Menge $\{x, y \ldots\}$
- Verknüpfung $x \circ y = z$ z.B. $\{*, \circ, +, \circledast, \oplus\}$

dann gilt $z \in$ Menge

Gruppenaxiome

$\circ$:= Platzhalter für alle Verknüpf.

G := Menge von der Gruppe

Assoziativität

$\forall a, b, c \in G$:
(Für alle Elemente a, b und c in der Gruppe gilt)
$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
$\not\forall \; a \circ b \neq b \circ a$

Neutrales Element

$\exists e \in G$,
es existiert neutrales El. in G
e := neut. el.
$a \circ e = e \circ a = a$

Inverses Element

$\forall a \in G \;\; \exists a^{-1} \in G$:
(für alle a existiert ein element a^{-1} in G
a^{-1} := Inverses El.
$a \circ a^{-1} = e \quad a^{-1} \circ a = e$

(optional) Kommutativität

$\forall a, b \in G$:
$a \circ b = b \circ a$
kommutative Gruppe (abelsche)

Halbgruppen & Monoide

- Menge $M = \{$trick, track, truck ...$\}$
- Verknüpfung $(x \circ y = z)$
  z.B. $+, *, -, :$

Bedingungen Halbgruppe: $(H, \circ)$

1. Assoziativität $\quad \forall a, b, c \in G$: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
   z.B. $(\mathbb{R}, +)$

Bedingungen Monoid: $(M, \circ)$

1. Assoziativität
2. Neutrales Element

- Menge
- Verknüpfung