1 Zahlen

1.1 Grundbegriffe: Mengen, Abbildungen, Relationen

1.1.1 Mengen

1.1.2 Abbildungen

1.1.3 Relationen

Definition: Eine Relation auf einer Menge M ist eine Teilmenge des Mengenpoduktsatz $R \subset M \times M = \{(x, y)|x, y \in M\}$ Man sagt, dass die Relation zwischen jegl Elemente $x, y \in M$ besteht und schreibt

2 Natürliche Zahlen

2.1 Peano Axiome

Ursprüngliche Formalisierung [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

Peano betrachtete ursprünglich 1 als kleinste natürliche Zahl. In seiner späteren Version der Axiome, die im Folgenden modern notiert sind, ersetzte er 1 durch 0.[2] Die Axiome haben dann folgende Form:

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. $\forall n(n \in \mathbb{N} \Rightarrow n' \in \mathbb{N})$
3. $\forall n(n \in \mathbb{N} \Rightarrow n' \neq 0)$
4. $\forall n, m(m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow (m' = n' \Rightarrow m = n))$
5. $\forall X(0 \in X \wedge \forall n(n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n \in X \Rightarrow n' \in X)) \Rightarrow \mathbb{N} \subseteq X)$

Diese Axiome lassen sich folgendermaßen verbalisieren, wobei n' als „Nachfolger von n" gelesen wird:

1. 0 ist eine natürliche Zahl.
2. Jede natürliche Zahl n hat eine natürliche Zahl n' als Nachfolger.
3. 0 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.
4. Natürliche Zahlen mit gleichem Nachfolger sind gleich.
5. Enthält X die 0 und mit jeder natürlichen Zahl n auch deren Nachfolger n', so bilden die natürlichen Zahlen eine Teilmenge von X.

Das letzte Axiom heißt *Induktionsaxiom*, da auf ihm die Beweismethode der vollständigen Induktion beruht. Es ist äquivalent zur Aussage, dass jede nichtleere Menge natürlicher Zahlen ein kleinstes Element hat. Auch garantiert es, dass Peanos rekursive Definitionen der Addition und Multiplikation auf $\mathbb{N}$ überhaupt wohldefiniert sind:[3]

2.2 Vollständige Induktion

Vorüberlegungen

Fragen/Schritt	Anmerkungen
Über welche Variable wird die Induktion geführt?	Oftmals ist diese Variable n (hat sich so etabliert). Dies muss aber nicht sein und ist aufgabenabhängig.
Wie lautet die Aussageform, deren Allgemeingültigkeit zu beweisen ist?	Mach dir klar, wie die Aussageform aussieht, deren Allgemeingültigkeit du beweisen möchtest/musst.

Induktionsanfang

Fragen/Schritt	Anmerkungen
Welchen Wert hast du für die Induktionsvariable im Induktionsanfang? Welches ist die kleinste natürliche Zahl für den Induktionsanfang?	Meistens geht aus der Aufgabenstellung hervor, wie der Induktionsanfang lautet. Manchmal ist dies aber nicht der Fall und du musst den Induktionsanfang selbst herausfinden, etwa durch Probieren.
Wie lautet die zu beweisende Aussage für den Induktionsanfang	Setze in die Aussageform die oben gefundene Zahl für den Induktionsanfang ein.
Finde einen Beweis für den Induktionsanfang	Hier musst du den Beweis für die oben gefundene Aussage finden. Bei Gleichungen bzw. Ungleichungen gelingt dir dies zum Beispiel dadurch, dass du beide Seiten dieser Gleichung oder Ungleichung ausrechnest und die dadurch entstanden Werte vergleichst.

Induktionsschluss

Fragen/Schritt	Anmerkungen
Wie lautet die Induktionsvoraussetzung?	—
Wie lautet die Induktionsbehauptung?	Achte darauf, dass du die Induktionsbehauptung richtig formulierst, dass du also Klammern um $k+1$ setzt. Wenn du zum Beispiel die zu bearbeitende Aussageform $A(n)$ lautet „$2n+1$ ist ungerade“ lautet die Induktionsbehauptung $A(n=k+1)$ *nicht* „$2k+2$ ist ungerade“, sondern „$2(k+1)+1=2k+3$ ist ungerade“.
Finde den Beweis für den Induktionsschritt	Finde den Beweis dafür, dass unter Annahme der Induktionsvoraussetzung die Induktionsbehauptung gilt. Hier ist Kreativität gefragt, denn es gibt kein Beweisschema F. Aber meistens kannst du Aufgaben des gleichen oder ähnlichen Typs auf ähnliche Weise lösen (natürlich nicht immer). Das heißt, wenn du schon einige Induktionsbeweise gesehen oder durchgeführt hast, wird es dir leichter fallen, ähnliche Aufgaben zur vollständigen Induktion zu lösen. Es heißt mal wieder: Übung macht den Meister!

2.2.1 Beispiel 1

Aussageform, deren Allgemeingültigkeit für $n \in \mathbb{N}$ bewiesen werden soll:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{n \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{3}$$

1. Induktionsanfang:

Für $n = 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{1}(2k-1)^2 = (2 \cdot 1 - 1)^2 = 1^2 = 1 = \frac{3}{3} = \frac{1 \cdot (2 \cdot 1 - 1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{3}$$

Damit ist $A(1)$ wahr.

2. Induktionsschritt:

2a. Induktionsvoraussetzung:

$$\sum_{k=1}^{l}(2k-1)^2 = \frac{l \cdot (2l-1) \cdot (2l+1)}{3}$$

2b. Induktionsbehauptung:

$$\sum_{k=1}^{l+1}(2k-1)^2 = \frac{(l+1) \cdot (2 \cdot (l+1) - 1) \cdot (2 \cdot (l+1) + 1)}{3}$$

2c. Beweis des Induktionsschritts:

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{l+1}(2k-1)^2 &= \left(\sum_{k=1}^{l}(2k-1)^2\right) + (2\cdot(l+1)-1)^2 \\
&\quad \color{green}{\downarrow \text{Induktionsvoraussetzung verwenden}} \\
&= \frac{l\cdot(2l-1)\cdot(2l+1)}{3} + (2\cdot(l+1)-1)^2 \\
&= \frac{l\cdot(2l-1)\cdot(2l+1)+3\cdot(2l+1)^2}{3} \\
&\quad \color{green}{\downarrow (2l+1) \text{ ausklammern}} \\
&= \frac{(2l+1)\cdot\Big(l\cdot(2l-1)+3\cdot(2l+1)\Big)}{3} \\
&= \frac{(2l+1)\cdot(2l^2-l+6l+3)}{3} \\
&= \frac{(2l+1)\cdot(2l^2+2l+3l+3)}{3} \\
&= \frac{(2l+1)\cdot(2l\cdot(l+1)+3\cdot(l+1))}{3} \\
&= \frac{(l+1)\cdot(2l+1)\cdot(2l+3)}{3}
\end{aligned}$$

Damit ist die Induktionsbehauptung bewiesen.

2.2.2 Beispiel 2

$\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 5$ gilt $2^n > n^2$

IND ANFANG $n = 5$

$2^5 > 5^2 \Rightarrow 32 > 25$ wahr

IND. ANNAHME $n+1$

$2^{n+1} > (n+1)^2$

IND. SCHRITT

$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 < n^2 + n^2 = 2n^2 < 2\cdot 2^n = 2^{n+1}$