Lineare Algebra Tutorium 6 Lösung

Andrea Colarieti Tosti

May 27, 2018

1 Aufgabe 1

$\cdot : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \mapsto (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$

1.1 i

zz:
(1,0) ist das neutrale Element von $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}, \cdot)$
Beweis:
Seien $v, w \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\})$, $v := (a,b)$ und $w := (c,d)$ und sei $e_n = (1,0)$ das neutrale Element von $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}, \cdot) \Rightarrow (v \cdot e_n) = v$

$$(a,b) \cdot (1,0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a - 0, 0 + b) = (a,b)$$

✓

1.2 ii

zz:

$$(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$$

ist das inverse Element für $(x,y) \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \cdot)$

Beweis:
Sei $v = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$ und $w = (x,y) \Rightarrow v \cdot w = (1,0) \Rightarrow$
$(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}) \cdot (x,y)$
$\Rightarrow (\frac{x}{x^2+y^2} \cdot x - \frac{-y}{x^2+y^2} \cdot y, \frac{x}{x^2+y^2} \cdot y + \frac{-y}{x^2+y^2} \cdot x)$
$\Rightarrow (\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}, \frac{xy}{x^2+y^2} + \frac{-yx}{x^2+y^2}) \Rightarrow (\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}, 0) = (1,0)$

✓

1.3 iii

zz: $\forall (x_1,y_1)$, (x_2,y_2), (x_3,y_3), mit $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 \in (\mathbb{R})$, gilt:
$(x_1,y_1)((x_2,y_2) + (x_3,y_3)) = (x_1,y_1) \cdot (x_2,y_2) + (x_1,y_1) \cdot (x_3,y_3)$

Beweis:
Linke Seite:
$(x_1,y_1)((x_2,y_2) + (x_3,y_3)) = (x_1,y_1)((x_2+, x_3, y_2 + y_3)) =$
$= (x_1 \cdot (x_2+, x_3) - y_1 \cdot (y_2 + y_3)\ ,\ x_1 \cdot (y_2 + y_3) + y_1 \cdot (x_2+, x_3))$
Rechte Seite:
$((x_1,y_1)(x_2,y_2)) + (x_3,y_3) =$
$(x_1,y_1)(x_2,y_2) + (x_1,y_1)(x_3,y_3) =$
$(x_1, x_2 - y_1, y_2\ ,\ x_1, y_2 + x_2, y_1) + (x_1, x_3 - y_1, y_3\ ,\ x_1, y_3 + x_3, y_{11}) =$
$(x_1, x_2 - y_1, y_2 + x_1, x_3 - y_1, y_3\ ,\ x_1, y_2 + x_2, y_1 + x_1, y_3 + x_3, y_1)$

✓

2 Aufgabe 2

$\phi : U_M \to U_M, \forall A \in U_M : \phi(A) \mapsto S^{-1}AS$ mit $S \in U_M$ und $U_M, U_N \in GL(n, \mathbb{K})$
Wir müssen beweisen, dass ϕ linear ist und, dass es sich um eine Bijektion handelt.
Beweis:

1. ϕ ist Linear
2. ϕ ist Injektiv
3. ϕ ist Surjektiv

1 Seien $A, B \in U_M \Rightarrow \phi(A + B) = \phi(A) + \phi(B)$

$\Rightarrow \phi(A + B) \underset{DEF\phi}{=} S^{-1}(A + B)S \underset{Mult.GL(n,\mathbb{K})}{=} (S^{-1}A + S^{-1}B)S =$

$(S^{-1}AS + S^{-1}BS) \underset{Add.GL(n,\mathbb{K})}{=} (S^{-1}AS) + (S^{-1}BS) \Rightarrow \phi(A) + \phi(B)$

✓

2 Seien $A, B \in U_M \Rightarrow$ wir nehmen an, dass
$\phi(A) = \phi(B) \underset{Def.\phi}{\Rightarrow} (S^{-1}AS) = (S^{-1}BS)$

$\underset{Mul.GL(n,\mathbb{K})}{\Rightarrow} S(S^{-1}AS) = S(S^{-1}BS) \underset{Mul.GL(n,\mathbb{K})}{\Rightarrow} (SS^{-1}AS) = (SS^{-1}BS)$

$\underset{Invers}{\Rightarrow} (AS) = (BS) \underset{Mul.GL(n,\mathbb{K})}{\Rightarrow} (AS)S^{-1} = (BS)S^{-1} \underset{Mul.GL(n,\mathbb{K})}{\Rightarrow} A = B$

✓

A und B sind gleich also ist ϕ Injektiv.

3 ϕ ist offenbar Surjektiv. Denn sei $B \in U_N : B = S^{-1}AS$ mit $A, S \in U_M$ sind A und S frei Wählbar und es gilt stets $\phi(A) = S^{-1}AS = B$

✓

Somit ist ϕ Linear und Bijektiv und ein Gruppenisomorphismus zwischen den Untergruppen U_M und U_N

□

3 Aufgabe 3

3.1 a

$V = W = \mathbb{R}^2$

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f_1(x,y) \mapsto (7x + 14y - 1, x + 2y + 5)$$

wir untersuchen f_1 auf:

1. Linearität
2. Injektivtät
3. Surjektivtät

1 seien $v, w \in \mathbb{R}^2$
$v := (a,b), w :(= c,d)$ mit $a,b,c,d \ \in \mathbb{R}$
zz:
• $f_1(v,w) = f_1(v) + f_1(w)$
• $a \cdot f_1(v) = f_1(a \cdot v)$

- $f_1(v,w) = f_1(v) + f_1(w)$.

$f_1(v+w) = f_1(a+c, b+d) = (7(a+c) + 14(b+d) - 1, (a+c) + 2(b+d) + 5)$
$= (7a + 7c + 14a + 14c - 1, a + c + 2b + 2d + 5)$

- $a \cdot f_1(v) = f_1(a \cdot v)$.

$f_1(a) + f_1(b) = (7a + 14b - 1, a + 2b + 5) + (7c + 14d - 1, c + 2d + 5)$
$= (7a + 14b - 1 + 7c + 14d - 1, a + 2b + 5 + c + 2d + 5)$

f ist nicht linear.

2 Seien $v := (a,b)$ mit $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ und sei $c = (7a + 14b - 1, a + 2b + 5)$ sind a und b frei auswählbar.
Da $\forall a,b \in \mathbb{R}$ gilt $\Rightarrow f(a,b) = (7a + 14b - 1, a + 2b + 5) = c$
Somit ist f_1 surjektiv.

3 Seien $v = (a,b)$ und $w = (c,d)$ mit $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.
$\Rightarrow f_1(v) = f_1(w) \Rightarrow (7a + 14b - 1, a + 2b + 5) = (7c + 14d - 1, c + 2d + 5)$

1. $7a + 14b - 1 = 7c + 14d - 1 \Rightarrow 7a + 14b = 7c + 14d \Rightarrow a + 2b = c + 2d \Rightarrow a = c \wedge b = d$✓
2. $a + 2b + 5 = c + 2d + 5 \Rightarrow a + 2b = c + 2d \Rightarrow a = c \wedge b = d$✓

f_1 ist injektiv.

f_1 ist injektiv und surjektiv und somit ein isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräume.

3.2 b

Seien $A, B \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$
$V = W = \mathbb{R}^2$

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f_2(A) \mapsto (AB) \; mit \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

wir untersuchen f_2 auf:

1. Linearität
2. Injektivtät
3. Surjektivtät

Beweis:

1 ZZ:
• $f_2(A + B) = f_2(A) + f_2(B)$
• $\lambda f_2(A) = f_2(\lambda A)$

- $f_2(A + B) = f_2(A) + f_2(B)$ Seien $A, B \in \mathbb{R}^2$ mit

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad , \; B := \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

$$f_2(A + B) \underset{\text{def}f_2}{=} f_2 \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{MatrixMult.}{=} \begin{pmatrix} b+f & a+e \\ d+h & c+g \end{pmatrix}$$

$$\underset{MatrixAdd.}{=} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \underset{MatrixMult.}{=} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\underset{\text{def}f_2}{=} f_2(A) + f_2(B)$$

✓

- $\lambda f_2(A) = f_2(\lambda A)$

$$\text{Sei } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda f_2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \lambda \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \lambda \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda b & \lambda a \\ \lambda d & \lambda c \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = f_2(\lambda A)$$

✓

f_2 ist linear.

2 Sei $C := A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \exists A \in \mathbb{R}^2 : f_2(A) = C$
Denn A frei wählbar ist ist f_2 surjektiv.

3 Seien $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

Wir nehmen an, dass $f_2(A) = f_2(B)$

$f_2(A) = f_2(B) = f_2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = f_2 \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & e \\ h & g \end{pmatrix} \Rightarrow b = f \quad a = e \quad d = h \quad c = g$

✓

f_2 ist Injektiv.

f_2 ist bijektiv und somit ein isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräume.

4 Aufgabe 4

V und W sind $\mathbb{C}$-VR.

$$\oplus : (V \times W) \to (V \times W), (v_1, v_2) \oplus (w_1, w_2) \mapsto (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$$
$$* : \mathbb{C} \times (V \times W) \to (V \times W), \lambda * (v_1, v_2) \mapsto (\lambda v_1, \overline{\lambda} v_1)$$

zz: $\forall\, v, w \in (V \times W),\ \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ gilt:

1. $\oplus$ bildet eine abelsche Gruppe
2. $\lambda * (v \oplus w) = (\lambda * v) \oplus (\lambda * w)$
3. $(v \oplus w) * \lambda = (v * \lambda) \oplus (w * \lambda)$
4. $(\lambda * \mu) * v = \lambda * (\mu * v)$
5. $\exists\, \lambda \in C : \lambda * v = v,\ v \in (V \times W)$

1 zz : $\forall\, u, v, w \in (V \times W)$

- $u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w$
- $\exists\, v \in V : v \oplus w = w \in V$
- $\exists\, v \in V : -v \oplus v = 0_v$
- $(v \oplus w) = (w \oplus v)$

- $u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w$

  Seien $u = (a, b)\ v = (b, c)\ w = (e, f)$ mit $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$

  $$u \oplus (v \oplus w) = u \oplus (c + e, d + f) = (c + e + a, d + f + b)$$
  $$(u \oplus v) \oplus w = (a + c, b + d) \oplus w = (a + c + e, b + d + f)$$

  ✓

- $\exists\, v \in V : v \oplus w = w \in V$

  Sei $v = (0, 0)\ \ w = (a, b) \Rightarrow v \oplus w = 0_v$

  $$(0, 0) \oplus (a, b) = (0 + a, 0 + b) = (a + b)$$

  ✓

- $\exists\, v \in V : -v \oplus v = 0_v$

  Sei $v = (a, b)$ wir suchen ein $w := (w_1, w_2)$ sodass $v \oplus w = 0_v$

  $(a, b) \oplus w = 0_v$wir beobachten das LGS:

  $$a + w_1 = 0 \Rightarrow w_1 = -a$$
  $$b + w_2 = 2 \Rightarrow w_2 = -b$$

  $\Rightarrow$ w = (-a, -b)

  ✓

- $(v \oplus w) = (w \oplus v)$

$$\text{Seien } v = (a,b)\ w = (c,d)$$

$$v \oplus w = (a+c, b+d)$$
$$w \oplus v = (c+a, d+b)$$

$\checkmark$

$\oplus$ bildet eine abelsche Gruppe über $((V \times W), \oplus)$.

2 Seien $v = (a,b)\ \lambda \in \mathbb{R}$
zz: $\lambda * (v \oplus w) = (\lambda * v) \oplus (\lambda * w)$

$\lambda * (v \oplus w) \underset{Def}{=} \lambda * ((a,b) \oplus (c,d)) \underset{Def\oplus}{=} \lambda * ((a+c, b+d)) \underset{Def*}{=}$
$(\lambda(a+c), \overline{\lambda}(b+d)) \underset{Distrib.Ges.*}{=} ((\lambda a + \lambda c), (\overline{\lambda} b + \overline{\lambda} d)) =$
$(\lambda a, \overline{\lambda} b) \oplus (\lambda c, \overline{\lambda} d) = (\lambda * v) \oplus (\lambda * w) =$

$\checkmark$

3 Seien $v = (a,b),\ w = (c,d),\ \lambda \in \mathbb{C}$
$(v \oplus w) * \lambda = (a+c, b+d) * \lambda = (a\lambda + c\lambda, b\overline{\lambda} + d\overline{\lambda}) = (c\lambda, d\overline{\lambda}) \oplus (a\lambda, b\overline{\lambda}) =$
$(v * \lambda) \oplus (w * \lambda)$

$\checkmark$

4 Seien $\lambda, \mu, a, b \in \mathbb{C},\ v = (a,b),\ V \in (V \times W)$
$\lambda * (\mu * v) = \lambda * (\mu a, \overline{\mu} b) = (\lambda \mu a, \overline{\lambda \mu} b)$
$(\lambda * \mu) * v = (\lambda \mu) * (a,b) = (\lambda \mu a, \overline{\lambda \mu} b)$

$\checkmark$

5 Seien $v = (a,b)\ \lambda = 1$
zz: $\exists\, \lambda \in C : \lambda * v = v,\ v \in (V \times W)$
$\lambda * v = 1 * (a,b) = (1 * a, \overline{1} * b)) = (a,b)$

$\checkmark$

$(V \times W, \oplus, *)$ ist ein $\mathbb{C}$-VR.

$\square$