Analysis 1 Blatt 4 Lösung

Andrea Colarieti Tosti

November 11, 2018

1 Aufgabe 1

Aufgabe 1

zz: $\forall b, r \in \mathbb{R}$ mit $b>1$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ sodass $b^n > r$.

BEW: $\forall b \in \mathbb{R}, \exists r \in \mathbb{R} \mid r < b^n \wedge b>1$

Also zeigen wir, dass für $b>1$ immer ein $r \in \mathbb{R}$ existiert der kleiner als b ist, dann beweisen wir den Rest der Fälle durch Vollständige Ind.

Der Induktionsanfang ist $n=1 \Rightarrow b^1 > r$, also müssen wir sicherstellen, dass $\forall b \in \mathbb{R}$ ein $r \in \mathbb{R}$ existiert der kleiner als b ist.
Dass lässt sich aus der Definition der Reelen zahlen aus der Vorlesung herleiten aber wir Folgen den hinweis und stützen uns an die Bernoullische ungleichung, die besagt $\forall x \in \mathbb{R}: x \geq -1$ und $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $(1+x)^n \geq 1+nx$
Also Erstmal erkennen wir in der ersten hälfte der ungleichung unser b^n term.

$b^n = (1+x)^n \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow r$ ist irgend eine Reelle Zahl die aus $\mathbb{R}$ ~~uneingesch~~ uneingeschränkt kommt.
Also sei $r = nx$ ist die Ungleichung immer Wahr.

$\boxed{\text{Auf der hinter Seite ist eine Frage :-)}}$

Aufgabe 1 Lösung 2 ohne Bernoulli

$b^n > r$ mit $b, r \in \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{N}$ und $b > 1$

nehmen wir an wir könnten den nächste Wert $b \in \mathbb{R}$ ~~größer~~ mit $b > 1$ wählen was aus der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ nicht geht, also stellen wir diesen dar als der Startpunkt $1 + x$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $x > 0$ damit b nicht kleiner 1 wird.

also $b = 1 + x$. $\Rightarrow$ Jetzt wissen wir dass eine Positive Zahl wenn potenziert immer nur größer werden kann da wir den Wert 1 ausgeschlossen haben.

Da r uneingeschränkt wählbar ist gilt die Ungleichung $\forall r \in \mathbb{R}$ mit $r \leq 0$. $\square$

Bernoulli verwirrt einen, ist diesen Beweis eine Akzeptable Möglichkeit?

DANKE :)

2 Aufgabe 2

Aufgabe 2 i)

α) $|a| = |a+b-b| \leq |a-b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a-b|$

Jetz vertauschen wir a und b und merken, dass $\pm(|a| + |b|) \leq |a-b|$

Somit gilt $|a-b| \geq \big| |a| + |b| \big|$

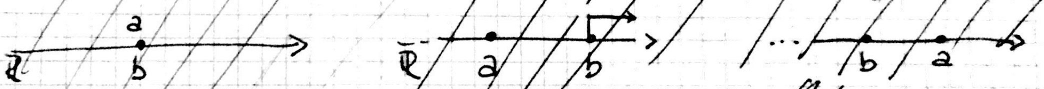
β) $b - |a-b| \leq a \leq b + |a-b| \Rightarrow b - |a-b| \leq a+b-b \leq |a-b| + b$

$\Rightarrow b - |a-b| \leq a-b+b$ und $|a-b| + b \geq a-b+b$

γ) $\max(a,b) = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}$. Wir wissen dass $|a-b|$ den Geom. ~~Abstand~~ zwischen 2 Punkte a und b auf einer Zahlengerade $\mathbb{R}$ definiert. ~~Somit ist $\frac{|a-b|}{2}$ der~~

Wir betrachten die 3 Fälle erst geometrisch.

$a = b$ $\qquad$ $a < b$ $\qquad$ $a > b$



sorry :(

$\frac{b-a}{2} = 0$ $\qquad$ $\cancel{\frac{a+b}{2} - \frac{b}{2}}$ $\qquad$ $\cancel{\frac{a+b}{2} = \frac{a}{2}}$

Aufgabe 2 i)

γ) für den fall $a > b$ gilt:

$$\frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2} = \frac{a+b+a-b}{2} = \frac{2a}{2} = a$$ nebenbei gilt $\max(a,b) = a$

für den Fall $b > a$ gilt:

$$\frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2} = \frac{a+b-(a-b)}{2} = \frac{a+b-a+b}{2} = \frac{2b}{2} = b$$ und $\max(a,b) = b$ $\square$

Aufgabe 2 ii)

α) Aus der Aufgabenstellung verstehen wir dass $A, B \subset \mathbb{R}$ nach Oben beschränkt sind, da sie beide ein Supremum besitzen.

$\Rightarrow$ Es gibt ein $a \in A$ sodass $\forall x \in A : x < a$ und Analog für B gilt:

Es gibt ein $b \in B$ sodass $\forall y \in B : y < b$.

Also ist das Supremum der Menge $A \cup B$ entweder a oder b.

Und da ein supremum nach definition auschliesslich ein Supremum ist im Fall dass keine weitere Obere schranke ~~vorander~~ für seine Menge exstiert Ist Supremum von $A \cup B$ die größte Zahl aus der Menge $\{a, b\}$ $\square$

Aufgabe 2 ii)

β) ZZ: für eine Familie $A_n \subset \overline{\mathbb{R}}$ für $n \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sup\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sup\left\{\sup A_n \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$

Wir folgern aus Teilaufgabe 2·ii·α, über die Vereinigung von 2 Mengen ist der Supremum die größte Zahl aus dem Menge der Suprema der zwei Mengen. Erstmal muss die Familie $A_n \subset \overline{\mathbb{R}}$ nur aus oben beschränkte Teilmengen bestehen.

Also aus $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ entsteht eine Menge $\{\sup A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ der Suprema aus allen Mengen.

$S := \{s \in S \mid s$ ist supremum einer Menge aus der Familie $A_n\}$

Somit ist $\sup S$ die Zahl $s' \in S$ ~~mit~~ sodass $\forall s \in S$ gilt $s < s'$

s' ist wiederum die größte Zahl aus $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ und somit $\sup\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$.

$\square$

3 Aufgabe 3

Aufgabe 3

ZZ. Sei $M \subset \mathbb{R}$ und $M \neq \emptyset$ $\forall \varepsilon \in M$, $\exists x \in \mathbb{R}$ sodass $x + \varepsilon$ eine Obere Schranke von M ist.

BEW:

Damit $x + \varepsilon$ eine Obere Schanke von M räpresentiert müssen wir beweisen dass $\forall \varepsilon \in M$ ein x existert, sodass $\varepsilon \leq x + \varepsilon$ gilt.

Da $\mathbb{R}$ total geordnet ist, können wir wir die folgende fälle definieren:

$x \geq 0$, $x < 0$ mit $x \in \mathbb{R}$.

für $x < 0$ gilt $\varepsilon + x < \varepsilon$ } Das lässt sich aus dem Archimedischen
für $x \geq 0$ gilt $\varepsilon \geq x + \varepsilon$ } Axiom herleiten.

Daraus folgt, dass $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$, ist $x + \varepsilon$ eine Obere Schranke von M.

$\square$

4 Aufgabe 4

Aufgabe 4

i) zz Sei X eine Menge $\Rightarrow$ Es existiert keine Surjektion $X \to P(X)$

BEW:

Sei $F: X \to P(X)$, $z \mapsto y$ $\quad M_F := \{ z \in X \mid z \notin F(x) \} \in P(X)$ prüfen wir $M_F \notin F(x)$

Da M_F eine Teilmenge von X ist, muss wegen der Surjektion ein $z \in X$ existieren sodass $F(z) = M_F$.

Dies ermöglicht zwei Fälle: $z \in F(z)$ oder $z \notin F(z)$

für das erste Fall $z \in M_F$ also nach der Definition von M_F widerpruchlich. $z \in M_F \wedge z \notin M_F$

für das zweite Fall gilt $z \notin M_F$, und das ist auch ein wiederpruch. $\square$

ii) Es existieren Injektionen $P(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ und Surjektionen $\mathbb{R} \to P(\mathbb{N})$

BEW:

Erstmal veranschaulichen wir die Menge $P(\mathbb{N})$:

$P(\mathbb{N}) = \{ \{\emptyset\}, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,2\}, \{2,1\}, \{3\}, \{3,1\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{3,2\}, \{1,2,3\}, \{4\}, \ldots \}$

Es geht weiter auf das Nächste Blatt

Also können wir eine funtion $f: P(N) \to \mathbb{R}, N' \to r$ definieren sodass für jede $N' \subset \mathbb{N}$ eine eindeutige Zahl aus $\mathbb{R}$ ~~[illegible]~~ dargestellt wird.

$$f : P(\mathbb{N}) \to \mathbb{R} \quad \begin{cases} \emptyset \Rightarrow 0 \\ N' \to r \end{cases}$$ die erste Zahl aus N' kommt vor dem Komma

Die Abbildung f schaut dann wie folgt aus:

$f(\{\emptyset\}) = 0$; $f(\{1\}) = 1$; $f(\{2\}) = 2$; $f(\{1,2\}) = 1,2$; $f(\{2,1\}) = 2,1$

$f(\{3\}) = 3$; $f(\{1,3\}) = 1,3$; $f(\{3,1\}) = 3,1$; $f(\{1,2,3\}) = 1,23$; $f(\{4\}) = 4$; ...

Da nach definition der Potenzmenge alle $N_i' \subset P(N)$ mit $i \in \mathbb{N}$ voneinander unterschiedlich sind, handelt es sich bei der Abbildung f um eine Bijektion. Das heißt es existieren Injektionen ~~[illegible]~~ $P(N) \to R$ Und Surjektionen $\mathbb{R} \to P(\mathbb{N})$.

(Surjektionen weil Werte wie $\sqrt{2}$ nicht im Bild von f enthalten sind) $\square$

Aufgabe 4 iii) Es existiert keine Surjektion $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

BEW: Sei $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \to f(n)$ $\Rightarrow$ Da es sich um eine ~~f~~ surjektion handelt muss $f(n) = \mathbb{R}$ sein.

Dabei ist $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, ~~es folgt wiederspr~~ also kann höchsten einem $n \in \mathbb{N}$ zu einem $f(n) \in \mathbb{R}$ abgebildet werden.

Also $f(n)$ ist gleichzeitig: $f(n) \in \mathbb{R}$ und $f(n) = \mathbb{R}$. widerspruch.

$\square$