Analysis 1 Blatt 2 Lösung

Andrea Colarieti Tosti

October 29, 2018

Aufgabe 1

- für den Fall $n=1 \wedge x=0 \Rightarrow (1+0)^1 \leq 1+1\cdot 0 = 1$ Gleichheit gilt ✓

- für den Fall $n \in \mathbb{N} \wedge x \geq -1$

IND. ANF: $n=1$

$(1+x)^1 \geq 1+1x \Rightarrow 1+x \leq 1+x$ ✓

IND. ANNAHME: $(1+x)^{n+1} \geq 1+(1+n)x$

IND. SCHRITT: $n \Rightarrow n+1$

$(1+x)^n \cdot (1+x) > (1\cdot x)^n + (1+x) > x^n + x + 1 > 1 + x + nx$ ✓

- Für den Fall $n \in \mathbb{N} \wedge x \geq 0$ gilt den selben IND ANF. aus der vorige Teilaufgabe.

IND. ANN: $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

IND. SCHRITT: $n \to n+1$

$(1+x)^n(1+x) > (x+1)^n = x^n + 1x^{n-1} + 1x^{n-2} + \ldots + 1x^0 \geq 1 + x + nx$ ✓

Aufgabe 2

i)

i) zz: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

IND. ANFANG: $n=2$ Binomische Formel ist davor langweilig.

$$(a+b)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{2}{0} a^{2-0} b^0 + \binom{2}{1} a^{2-1} b^1 + \binom{2}{2} a^{2-2} b^2$$

$$= a^2 + ab + b^2 \quad \checkmark$$

IND ANNAHME: $n+2$

$$(a+b)^{n+2} = \sum_{k=0}^{n+2} a^{n-k} b^k$$

IND SCHRITT: $n \longrightarrow n+2$

$$(a+b)^{n+2} = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k + (a+b)^2 = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k + \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\cancel{= a^2 + ab + b^2 + \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n} b^n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+2} a^{n-k} b^k \quad \checkmark$$

ii)

Aufgabe 2

ii)

$a^n + b^n + c^n + n\, a^{(n-1)} b^{(n-1)} c^{(n-1)} + n\, a^{(n-1)} b^{(n-2)} c^{(n-1)} + n a^{n-2} b^{n-1} c^{n-1}$

$(a+b+c)^n = ?$

$$(a+b+c)(a+b+c) = a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(a+b+c)^3 = (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac)\cdot(a+b+c)$$
$$= a^3 + ab^2 + ac^2 + 2a^2b + 2abc + 2a^2c + a^2b + b^3 + bc^2 + 2ab^2 + 2b^2c + 2abc +$$
$$+ a^2c + b^2c + c^3 + 2abc + 2bc^2 + 2ac^2$$

$a^n + b^n + c^n + n\, a^{n-2} b^{n-3} c^{n-1} + n\, a^{n-2} b^{n-1} c^{n-3} + n2\, a^{n-2} b^{n-2} c^{n-2} + n$

$$= a^3 + b^3 + c^3 + 3ac^2 + 3ab^2 + 6abc + 3a^2b + 3b^2c + 3bc^2$$

$$(a+b+c)^4 =$$

$n(k-1)$

$$= (a+b+c)(a^3 + b^3 + c^3 + 3ac^2 + 3ab^2 + 6abc + 3a^2b + 3b^2c + 3bc^2)$$
$$= a^4 + b^4 + c^4 + 4a^3b + 4\cdot a^3c + 6a^2b^2 + 12a^2bc + 6a^2c^2 + 4ab^3 + 12ab^2c + 12abc^2 + 4ac^3$$
$$+ 4b^3c + 6b^2c^2 + 4bc^3$$

$= \cancel{a^4 + b^4 + c^4} + \quad (a+b+c)^n =$

$k \leftarrow n$

k muss gegen 1 laufen!