Analysis Blatt 1 Lösung

Andrea Colarieti Tosti

October 21, 2018

Augabe 1

Die Mengen-Operationen Schnitt $\cap$ und Vereinigung $\cup$ sind kommutativ, assoziativ und zueinander distributiv.
Für die Differenzmenge gelten Assoziativ und Distributivgesetze.

a)

Augabe 1 a

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cup C)$

$B \cup C := \{x \in (B \cup C)\} = \{x \in B \vee x \in C\}$

$$A \ A (B \cup C) = \{x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)\}$$
$$\overset{!}{=} \{(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)\}$$
$$\overset{!}{=} (A \cup B) \cap (A \cap C)$$

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $\quad B \cap C := \{x \in (B \cap C)\} = \{x \in B \wedge x \in C\}$

$$A \cup (B \cap C) \overset{!}{=} \{x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)\}$$
$$\overset{!}{=} \{(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)\}$$
$$\overset{!}{=} (A \cup B) \cap (A \cup C\}$$

b)

Aufgabe 1 (b)

- zz. $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$

$$A \cup B = \{x \in (A \cup B)\} = \{x \in A \vee x \in B\}$$

$$X \setminus (A \cup B) = \{x \in X \wedge (x \notin A \vee x \notin B)\}$$

$$\overset{!}{=} \{(x \in X \wedge x \notin A) \vee (x \in X \wedge x \notin B)\}$$

$$\overset{!}{=} (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$$

- zz. $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$

$$A \cap B = \{x \in A \wedge x \in B\}$$

$$X \setminus (A \cap B) = \{x \in X \wedge (x \notin A \wedge x \notin B)\}$$

$$\overset{!}{=} \{(x \in X \wedge x \notin A) \wedge (x \in X \wedge x \in B)\}$$

$$\overset{!}{=} (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$$

Augabe 2

a und b

Aufgabe 2

a • zz. Sind f und g Injektiv $\Rightarrow$ $g \circ f$ ist Injektiv

Seien $x, y \in A$ mit $x \neq y$. Dann gilt $f(x) \neq f(y)$, da f Injektiv ist.
Da auch g Injektiv ist gilt $g(f(x)) \neq g(f(y)) \Leftrightarrow g \circ f(x) \neq g \circ f(y)$
Also ist $g \circ f$ Injektiv. $\square$

b • zz. Sind f und g Surjektiv $\Rightarrow$ $g \circ f$ ist Surjektiv.

Sei $y \in C$ beliebig. Wir wollen zeigen dass $g \circ f$ Surjektiv ist, d.h. wir müssen ein $x \in A$ finden mit $(g \circ f)(x) = y$.
Zunächst ist g Surjektiv und daher $\exists z \in B : g(z) = y$. Da f Surjektiv ist, $\exists x \in A : f(x) = z$ und somit gilt $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = y$.
$\Rightarrow$ $g \circ f$ ist Surjektiv $\square$

c und d

c • zz. $g \circ f$ ist Injektiv $\Rightarrow$ f ist Injektiv. (Muss g Injektiv sein?)

Seien: $x, y \in A$ mit $x \neq y$. $\Rightarrow$ $g(f(x)) \neq g(f(y))$ da $g \circ f$ Injektiv ist. Daraus folgt, seien $a, b \in B$ mit $a \neq b$, $g(a) \neq g(b)$. $g \circ f$ bleibt Injektiv wie im Fall, dass $f(x) \neq f(y)$. Es ist klar ersichtlich, dass f auch Injektiv ist wenn $g \circ f$ Injektiv ist, zusätzlich muss g auch Injektiv sein.

d • zz. $g \circ f$ ist Surjektiv $\Rightarrow$ g ist Surjektiv (Muss auch f Surjektiv sein?)

Sei $y \in C$, muss ein $x \in A$ existieren, sodass $(g \circ f)(x) = y$.= $g(f(x)) = y$ Also können wir annehmen, es existiert ein $z \in B$ ~~ein~~ mit $f(x) = z$ und $g(z) = y$. Das heisst f und g sind beide Surjektiv. f muss Surjektiv sein damit $g \circ f$ Surjektiv bleibt.

Augabe 3

Aufgabe 3

a) Seien $i,j \in M_n$ mit $i<j$ und $\tau(i), \tau(j) \in M_n$

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \Rightarrow \mathrm{sgn}(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{\tau(j) - \tau(i)}$$

Aufgabe 3

b)

Seien zwei Permutationen σ und τ gegeben, dann ist

$$\operatorname{sgn}(\sigma\circ\tau) = \prod_{i<j} \frac{(\sigma\circ\tau)(j) - (\sigma\circ\tau)(i)}{j-i}$$

$$= \left(\prod_{i<j} \frac{(\sigma\circ\tau)(j) - (\sigma\circ\tau)(i)}{\tau(j)-\tau(i)}\right) \prod_{i<j} \frac{\tau(j)-\tau(i)}{j-i}$$

$$= \left(\prod_{i<j,\,\tau(i)<\tau(j)} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{\tau(j)-\tau(i)}\right)\left(\prod_{i<j,\,\tau(i)>\tau(j)} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{\tau(j)-\tau(i)}\right) \operatorname{sgn}(\tau)$$

$$= \prod_{k<l} \frac{\sigma(l)-\sigma(k)}{l-k} \operatorname{sgn}(\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot\operatorname{sgn}(\tau)$$

Augabe 4

Aufgabe 4

a) zz $\nexists q \in \mathbb{Q}^+ : q^2 = 2$

Wenn $q^2 = 2 \Rightarrow q = \sqrt{2}$. Wir wissen ~~sso~~ dass $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}^+$ ist.
Also existiert keine Zahl $q \in \mathbb{Q}^+$ sodass $q^2 = 2$ ist. $\square$

b) Sei $p \in \mathbb{N}$, zusätzlich ist p eine Primzahl.
zz. $\nexists q \in \mathbb{Q}^+ : q^2 = p$

Primzahlen sind nach definition ausschließlich bei 1 und sich selbst teilbar. Also existiert auch keine Zahl sodass $\sqrt{p} = q$ ist.
$q^2 = q \cdot q$. Es gibt keine Zahl in $\mathbb{Q}^+$ die mit sich selbst ausmultipliziert eine Primzahl ergibt.