Analysis 1 Blatt 2 Lösung

Andrea Colarieti Tosti

October 26, 2018

Aufgabe 1

a)

1- Reflexivität $\forall (a,b) \in X_1 \times X_2$ gilt $(a,b) \prec (a,b)$

$(a,b) \prec (a,b) \Leftrightarrow a \prec_1 a \vee (a = a \wedge b \prec_2 b)$

$\overset{!}{\Leftrightarrow} \cancel{(a \prec_1 a \vee a = a)} \wedge (a \prec_1 a \vee b \prec_2 b) \Rightarrow (a \prec_1 a \vee b \prec_2 b)$

Das ist wahr da $(a,b) \prec (a,b)$. $\prec_1, \prec_2$ sind nach ~~Auf~~gaben Definition Part. Ord. und somit Reflexiv.

2 - Anti-symmetrie: $\forall (a,b), (a',b') \in X_1 \times X_2$ gilt

$(a,b) \prec (a',b') \wedge (a',b') \prec (a,b) \Rightarrow (a,b) = (a',b')$

$(a,b) \prec (a',b') \wedge (a',b') \prec (a,b) \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{(a \prec_1 a' \vee a = a')} \wedge (a \prec_1 a' \vee b \prec_2 b') \wedge \cancel{(a' \prec_1 a \vee a' = a)} \wedge (a' \prec_1 a \vee b' \prec_2 b)$

$\Rightarrow (a \prec_1 a' \vee b \prec_2 b') \wedge (a' \prec_1 a \vee b' \prec_2 b)$

Da $\prec_1, \prec_2$ nach Aufgabendefinition Antisymmetrish sind, ist die Aussage wahr.

3 - Transitivität: $\forall (a,b), (a',b'), (a'',b'') \in X_1 \times X_2$ gilt

$$(a,b) \prec (a',b') \wedge (a',b') \prec (a'',b'') \Rightarrow (a,b) \prec (a'',b'')$$

$$(a,b) \prec (a',b') \wedge (a',b') \prec (a'',b'') \Rightarrow (a <_1 a') \vee (a = a' \wedge b <_2 b') \wedge (a' <_1 a'') \vee (a' = a'' \wedge b' <_2 b'')$$

$$\Rightarrow (a \cancel{<_1 a' \vee a = a'}) \wedge (a < a_1 \vee b <_2 b') \wedge \cancel{(a' < a'' \vee a' = a'')} \wedge (a' <_1 a'' \vee b' <_2 b'')$$

$$\Rightarrow (a <_1 a' \vee b <_2 b') \wedge (a' <_1 a'' \vee b' <_2 b'') \Rightarrow (a <_1 a' \wedge a' <_1 a'') \vee (b <_2 b' \wedge b' <_2 b'')$$

$$\overset{!}{\Rightarrow} (a <_1 a'') \vee (b <_2 b'')$$

Die Relation ist Transitiv.

Somit ist $\prec$ eine Partielle ordnung.

b)

Aufgabe 2

Aufgabe 2   Finden Sie Injektive Abbildungen $\mathbb{Q}^+ \mapsto \mathbb{N}$, $\mathbb{Q} \mapsto \mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$

- $\mathbb{Q}^+ \longmapsto \mathbb{N}$

$f : \mathbb{Q}^+ \mapsto \mathbb{N},\ \frac{x}{1} \to x$ $g : \mathbb{Q}^+ \mapsto \mathbb{N},\ \frac{2x}{2} \to x$ $h : \mathbb{Q}^+ \mapsto \mathbb{N},\ \frac{1}{x} \mapsto x$

- $\mathbb{Q}^+ \mapsto \mathbb{Z}$

$\alpha : \mathbb{Q}^+ \mapsto \mathbb{Z},\ \frac{x}{1} \mapsto x$ $\beta : \mathbb{Q}^+ \mapsto \mathbb{Z},\ \frac{x}{1} \mapsto -1 \cdot x$

- $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$

$\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N},\ (x, y) \longmapsto x + y$ bei $x = y$

$\gamma : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N},\ (x, y) \longmapsto x$ bei $x = y$

Aufgabe 4

a)

Aufgabe 4

a) $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

INDUKTION ANFANG: $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} 1^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6} = \frac{6}{6} = 1 \Rightarrow \text{Wahr}$$

INDUKTION ANNAHME: $n = n+1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} (n+1)^2 = \sum_{k=1}^{n} (n+1)^2 + (n+1)^2 = \sum_{k=1}^{n} (n+1)^2 + n^2+2n+1$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n^2+2n+1)}{6} = \frac{(n^2+n)(2n+1)+6n^2+12n+6}{6}$$

$$= \frac{2n^3+2n^2+n^2+n+6n^2+12n+6}{6} = \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

b)