Lineare Algebra Tutorium 10 Lösung

Andrea Colarieti Tosti

November 8, 2018

Lineare Algebra T 10

Aufgabe 1

i) V ist K-VR $U', U'', U''' \subseteq V$

zu zeigen ist: $\exists v = 0_V : v \in U' \cap U'' \cap U'''$

Wir wissen aus der Vorlesung, dass Untervektorräume nach Definition das Neutrale Element zur Addition enthalten => $\{0_V\} \subseteq U' \cap U'' \cap U'''$.

Wir wissen aber auch:

$\dim(U') = \dim(U'') = \dim(U''') \leq \dim(U' + U'' + U''') \leq \dim(\mathbb{R}^5)$

$\Rightarrow 4 \leq \dim(U' + U'' + U''') \leq 5$

zusätzlich wissen wir aus dem Dimensionsschnittsatzes

$\dim(U' + U'' + U''') = \dim(U') + \dim(U'') + \dim(U''') = \dim(U' \cap U'' \cap U''')$

$\Rightarrow 4 \leq \dim(U' + U'' + U''') = \dim(U' \cap U'' \cap U''') \leq 5$

das heißt

$$0 = \dim(\{0_V\}) < \dim(U' \cap U'' \cap U''')$$

Also enthält $U' \cap U'' \cap U'''$ mind. 4 Basisvektoren

$\Rightarrow \{0_V\} \subset (U' \cap U'' \cap U''')$

Lineare Algebra T10

Aufgabe 1

ii) $\varphi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ kann nicht linear und injektiv sein.

Beweis:

Sei φ Injektiv, wissen wir aus der Vorlesung

$\dim(\mathbb{R}^5) = \dim \ker(\varphi) + \dim \varphi(\mathbb{R}^5)$

Da $\varphi(\mathbb{R}^5) \subseteq \mathbb{R}^4 \Rightarrow \dim \varphi(\mathbb{R}^5) \leq \dim(\mathbb{R}^4) = 4$

$$\Rightarrow \dim(\mathbb{R}^5) \overset{!}{=} \dim \ker(\varphi) + \dim \varphi(\mathbb{R}^5)$$

$$5 \overset{!}{=} \dim \ker(\varphi) + 4$$

$$\dim \ker(\varphi) \overset{!}{=} -4 + 5$$

$$\overset{!}{=} 1 \quad \lightning$$

Also enthält $\ker(\varphi)$ nicht ausschließlich den Vektor $0_{\mathbb{R}^5} \Rightarrow \varphi$ ist nicht Injektiv.

Lineare Algebra T10

Aufgabe 2

i) $U := \{(x_1, \dots, x_7) \in \mathbb{R}^7 \mid (x_1, x_3 - x_5) = (x_2 + 2x_6, -x_2)\}$

$\Rightarrow x_1 = x_2 + 2x_6 \quad \wedge$

$x_3 - x_5 = -x_2 \Rightarrow x_2 = x_5 - x_3$

$\Rightarrow x_1 = x_5 - x_3 + 2x_6$

x_1 und x_2 lassen sich als kombination der anderen Komponenten darstellen.
Also sind die Vektoren aus U in der Form:

$(x_5 - x_3 + 2x_6,\ x_5 - x_3,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7) \in U$

mit $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \in \mathbb{R}$

Es ist jetzt offenbar dass ein Vektor $v \in U$

als LK von 5 l.u. Vektoren aus $\mathbb{R}^7$.

Daher ist die Dimension von $U = 5$.

Aufgabe 2 T 10

ii) $f_A := \mathbb{R}^7 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ x \longmapsto Ax$

mit $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

zu zeigen ist: $\ker(f_A) = U$

Beweis:

Wir wissen aus der Vorlesung

$\dim(\mathbb{R}^7) = \dim \ker(f_A) + \dim f_A(\mathbb{R}^7)$

$\Rightarrow f_A(\mathbb{R}^7) \subseteq \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow 7 = 2 + \dim\ker(f_A) \Rightarrow \dim\ker(f_A) = 5$.

Also ist $\dim\ker(f_A) = \dim U$

Wir müssen noch zeigen, dass $Ax \in U$.

erstmal bringen wir A in norm ZSF.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{I \cdot II}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x_1 + x_3 - x_5 - 2x_6 = 0$

$\quad x_2 + x_3 - x_5 = 0$

$\Rightarrow x_1 = 2x_6 + x_5 - x_3$

$\quad x_2 = x_5 - x_3$

Also $Ax \in U$

Aufgabe 3 ①

"i ⟹ ii" Sei $A \in K^{n \times n}$ $A : a_{ij}$ $1 \leq i \leq n$ $n \in \mathbb{N}$
$1 \leq j \leq n$

Wir wissen aus der Vorlesung:

$SR(A) = \{\lambda_1 a_{\cdot 1}, \ldots, \lambda_n a_{\cdot n} \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}$

Also können wir aus der aussage $\ker(A) = SR(A)$ herleiten: $\ker(A) = \{x \in SR(A)\}$.
Also ist die Matrix Nilpotent zweiten grades, da den von ihren Spaltenvektoren aufgespannten Vektorraum alle lösungen von $Ax = 0$ enthält.
Veranschaulicht: Sei $A' := a'_{ij}$ $1 \leq i \leq n$ $1 \leq j \leq n$ $n \in \mathbb{N}$
so definiert dass $A = A'$ folgt:

$$A \times A' = Aa'_{\cdot 1} + Aa'_{\cdot 2} + \ldots + Aa'_{\cdot n} = 0$$
$$\overset{!}{=} \quad 0 \;+\; 0 \;+\; \ldots \;+\; 0 \;= 0$$

"ii ⟹ i" Aus der Aufgabendefinition ist klar erkennbar, dass n immer durch 2 teilbar ist
⟹ Die Aussage ist immer für $K^{2\times 2}, K^{4\times 4}, K^{6\times 6}, K^{8\times 8} \ldots$ gültig, Da der Rang der Matrix immer ausschliesslich durch ganze Zahlen darstellbar ist. bzw. $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3 (E)

wir sehen einen aus der Vorlesung bekannten Muster entstehen: Blockmatrizen!

~~Also~~ ist A immer aus vier Teilmatrizen $A', A'', A''', A'''' \in \mathbb{K}^{\frac{n}{2}\times\frac{n}{2}}$

Wir führen ein Paar Beispiele:

$$A \in K^{2\times 2} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} A' \in K^{1\times 1} & A'' \in K^{1\times 1} \\ \hline A''' \in K^{1\times 1} & A'''' \in K^{1\times 1} \end{array}\right)$$

$$A \in K^{4\times 4} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} A' \in K^{2\times 2} & A'' \in K^{2\times 2} \\ \hline A''' \in K^{2\times 2} & A'''' \in K^{2\times 2} \end{array}\right)$$

$$A \in K^{6\times 6} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} A' \in K^{3\times 3} & A'' \in K^{3\times 3} \\ \hline A''' \in K^{3\times 3} & A'''' \in K^{3\times 3} \end{array}\right)$$

und so weiter.

zusätlich wissen wir dass die Matrix A von Rang $n = 2 \cdot rg(A) \Rightarrow rg(A) = \frac{n}{2}$

Also folgt, wenn A in norm ZSF ist, daß maximal eine der Teilmatrizen A', A'', A''', A'''' in norm. ZSF sein.

Aufgabe 3 (3)

Es gibt also vier Möglichkeiten die Matrix A mit $rg(A) = \frac{n}{2}$ darzustellen, nämlich:

Seien $Z \in K^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}$ in norm ZSF und $B \in K^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}$, $B := b_{ij}$ $\begin{smallmatrix} 1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n \end{smallmatrix}$ $n \in \mathbb{N}$, $b_{ij} \in K$

$$A_1 = \left(\begin{array}{c|c} Z & B \\ \hline 0_{K^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}} & 0_{K^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}} \end{array}\right) \quad A_2 = \left(\begin{array}{c|c} 0_{K^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}} & Z \\ \hline 0_{K^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}} & 0_{K^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}} \end{array}\right)$$

$$A_3 = \left(\begin{array}{c|c} 0_{K^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}} & 0_{K^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}} \\ \hline Z & B \end{array}\right) \quad A_3 = \left(\begin{array}{c|c} 0_{K^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}} & 0_{K^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}} \\ \hline 0_{K^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}} & Z \end{array}\right)$$

Wir müssen jetzt prüfen welche dieser Matrizen Nilpotent zweiten grades sind.
Wir Wissen aus der Vorlesung wie man Blockmatrizen multipliziert, also prüfen wir:

$$A_1 \times A_1 = \left(\begin{array}{c|c} Z & B \\ \hline 0_{K^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}} & 0_{K^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}} \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c|c} Z & B \\ \hline 0_{K^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}} & 0_{K^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} Z \times Z + 0_{K^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}} & Z \times B + 0_{K^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}} \\ \hline 0 + 0 & 0 + 0 \end{array}\right) \neq 0_{K^{n \times n}}$$

Aufgabe 3 (4)

$$A_2 \times A_2 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & Z \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c|c} 0 & Z \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} 0+0 & 0+0 \\ \hline 0+0 & 0+0 \end{array}\right) = 0_{K^{n \times n}}$$

$$A_3 \times A_3 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline Z & B \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline Z & B \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} 0+0 & 0+0 \\ \hline 0+Z \times B & 0+B^2 \end{array}\right) \neq 0_{K^{n \times n}}$$

$$A_4 \times A_4 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & Z \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & Z \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} 0+0 & 0+0 \\ \hline 0+0 & 0+Z^2 \end{array}\right) \neq 0_{K^{n \times n}}$$

Also kann A nur die Form $A_2 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & Z \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ haben.

Aufgabe 3 ⑤

Aus dem Analyse können wir jetzt folgern:

$rg(Z) = rg(A) = \frac{n}{2}$ => den Spaltenraum von A wird aufgespannt von $\begin{pmatrix} Z \\ 0_{K^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}} \end{pmatrix}$

Also sei $M := \{A \in K^{n \times n} \mid A^2 = 0_{K^{n \times n}} \wedge n = 2 \cdot rg(A)\}$

gilt $\forall A \in M : SR(A) = \ker(A)$

Da die Matrix $L = \begin{pmatrix} Z \\ 0 \end{pmatrix}$ Aus Spaltenvektoren

$x_1, \ldots, x_n \in K^n$ besteht für die gilt:

$$A x_1 = A x_2 = \ldots = A x_n = 0_{K^n}$$

Somit folgt i.

Aufgabe 4 ①

$a \in \mathbb{R} \quad M_a \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \; M_a := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

wir bestimmen zuerst $zr(M_A) = rg(M_A)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xRightarrow[\text{II}-\text{I}]{\text{III}+\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{II}-a\text{III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2a \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow rg(M_A)$ ist von a abhängig:

$1 - 2a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ für $a = \frac{1}{2}$ gilt $rg(M_A) = 2$

$a \neq \frac{1}{2}$ gilt $rg(M_A) = 3$

Wir bestimmen jetzt den Spaltenraum von M_A

$$SR(M_A) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 \\ 1-2a \\ 2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda, \mu, q, a \in \mathbb{R} \right\}$$

Jetzt suchen wir eine Basis für $SR(M_A)$

mit $a = \frac{1}{2}$ ist eine Basis von SR

$$B_{SR(M_A)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

sonst gilt:

$$B_{SR(M_A)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1-2a \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ mit } a \neq \frac{1}{2}, a \in \mathbb{R}$$