MATHEMATISCHES INSTITUT
UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Dr. H. Weiß
S. Stadler

4. Februar 2011

Klausur zur Linearen Algebra für Statistiker
WS 2010/11

Name	
Vorname	
Mat.Nr.	
Studiengang	

Hinweise

1. Schreiben Sie unbedingt auf jedes Blatt, auch dieses Deckblatt, gut lesbar Ihren Namen. Lösen Sie jede Aufgabe nur auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Sollte Ihnen der Platz nicht reichen, fügen Sie an der entsprechenden Stelle ein zusätzliches Blatt *mit Ihrem Namen* ein.
2. Als *einziges* Hilfsmittel ist ein mit Ihrem Namen versehenes und ansonsten beliebig beschriebenes DIN-$A4$-Blatt erlaubt.
3. Eine saubere Darstellung Ihrer Antworten ist Teil der Aufgabe.
4. Bitte legen Sie vor Beginn Ihren Lichtbildausweis zusammen mit Ihrem Studierendenausweis auf das Pult.

Bewertung

1. Die Klausur besteht aus **5 Aufgaben**, die mit maximal **10-15** Punkten bewertet werden.
2. Sie haben die Klausur mit **25** von **60** Punkten bestanden. **60** Punkte gelten als 100%.

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punkte						

Viel Erfolg!

Name		
Mat.Nr.		**10P**

Aufgabe 1:

Seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume sowie $f : V \to W$ und $g : W \to V$ linear. Seien $v_1, \ldots, v_r \in V$ und $w_i := f(v_i) \in W$ für $i = 1, \ldots, r$.

(a) Beweisen oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel: Sind $w_1, \ldots, w_r \in W$ linear abhängig, so sind $v_1, \ldots, v_r \in V$ linear abhängig.

(b) Zeigen Sie: Gilt $\dim W < \dim V$, so ist $\det(g \circ f) = 0$.

Name		
Mat.Nr.		**10P**

Aufgabe 2:

Entscheiden Sie über den Wahrheitsgehalt der nachstehenden Aussagen (a)-(e), d.h. notieren Sie als Lösung „**wahr**“, falls die Aussage wahr ist, und „**falsch**“, falls die Aussage falsch ist. *Eine Begründung ist nicht erforderlich!*

Bitte beachten Sie, dass Sie pro Teilaufgabe **2** Punkte auf eine korrekte Antwort erhalten, Ihnen jedoch für eine *nicht* korrekte Antwort **1** Punkt abgezogen wird. Keine Antwort in einer Teilaufgabe bringt Ihnen keinen Punkt auf diese Teilaufgabe.

Die Mindestpunktzahl in dieser Aufgabe beträgt 0 Punkte.

(a) Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U_1, U_2, W \subset V$ Untervektorräume. Ist $(U_1 + U_2) \cap W \neq \{0\}$, dann ist $U_1 \cap W \neq \{0\}$ oder $U_2 \cap W \neq \{0\}$.

(b) Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$. Gilt $(A + E_n)^2 = 0$, dann ist A invertierbar.

(c) Sei $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$. Gilt $\det A = 3$, dann ist $(3, 3, 3)$ im Bild von A^3.

(d) Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$. Gilt $A^2 = 0$, so ist 0 der einzige Eigenwert von A.

(e) Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$. Zerfällt das charakteristische Polynom von A in Linearfaktoren, so ist A diagonalisierbar.

3

Name		
Mat.Nr.		**15P**

Aufgabe 3:

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$$

und prüfen Sie, ob sie diagonalisierbar ist.

(b) Prüfen Sie, ob die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar ist. Bestimmen Sie gegebenenfalls eine Basis aus Eigenvektoren.

Name		
Mat.Nr.		**15P**

Aufgabe 4:

(a) Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$$

sowie den Kern der linearen Abbildung $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Geben Sie Basen für Bild A und Kern A an. Verifizieren Sie die Dimensionsformel für lineare Abbildungen in diesem Beispiel!

(b) Untersuchen Sie die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit der Matrix $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ aus Aufgabenteil (a) und

$$b = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

indem Sie $\mathrm{Rang}(A \,|\, b)$ mit $\mathrm{Rang}(A)$ vergleichen. Ist es eindeutig lösbar? Bestimmen Sie die Lösungsmenge!

Name		
Mat.Nr.		**10P**

Aufgabe 5:

Sei $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Eine Abbildung $f : V \to V$ heißt *Isometrie*, falls gilt $\|f(v) - f(w)\| = \|v - w\|$ für alle $v, w \in V$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\langle v, w\rangle = \frac{1}{2}(\|v\|^2 + \|w\|^2 - \|v - w\|^2)$ für alle $v, w \in V$.

(b) Für eine Isometrie $f : V \to V$ mit $f(0) = 0$ gilt $\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle$ für alle $v, w \in V$.

(c) Eine Isometrie $f : V \to V$ mit $f(0) = 0$ ist bereits linear.
Hinweis: Berechnen Sie $\|f(v + w) - f(v) - f(w)\|^2$ bzw. $\|f(\lambda v) - \lambda f(v)\|^2$ für $\lambda \in \mathbb{R}$.

X

Name	
Mat.Nr.	