RANG

Bei Matrizen:

= Anzahl linear unabhängiger Zeilen Vektoren
= Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren } egal

Bei Vektor Mengen

= Anzahl linear unabhängiger Vektoren in der Vektormenge

Vektormenge: $V = \{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots\}$

Rang(V) = Anzahl linear unabhängiger Vektoren $\in V$

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \xrightarrow{\text{als Matrix}} M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 8 & 3 & 1 \\ 15 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Umformungen, die den Rang nicht ändern

1) Zeilen (oder Spalten) mit Zahl multiplizieren / dividieren
2) Zeilen (oder Spalten) addieren / subtrahieren
3) Zeilen (oder Spalten) vertauschen

MÖGLICHKEIT: Diagonale versuchen mit einser zu füllen

Anzahl der Zeilen ungleich 0 = Rang der Matrix

Schritt 1: $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 8 \\ 2 & 3 & 15 \end{pmatrix}$

Schritt 2: $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \\ 2 & -3 & 15 \end{pmatrix}$

Schritt 3: $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 15 \end{pmatrix}$

Schritt 4 $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 0 \\ 2 & 15 & 1 \end{pmatrix}$

~~Schritt 4 M = (1 0 0 / 1 8 0 / 2 15 1)~~

Schritt 5 $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 15/8 & 1 \end{pmatrix}$

↓

Keine Nullzeile

Alle 3 Vektoren linear unabhän[gig]

Rang(V) = 3

Basis: Menge an Basisvektoren

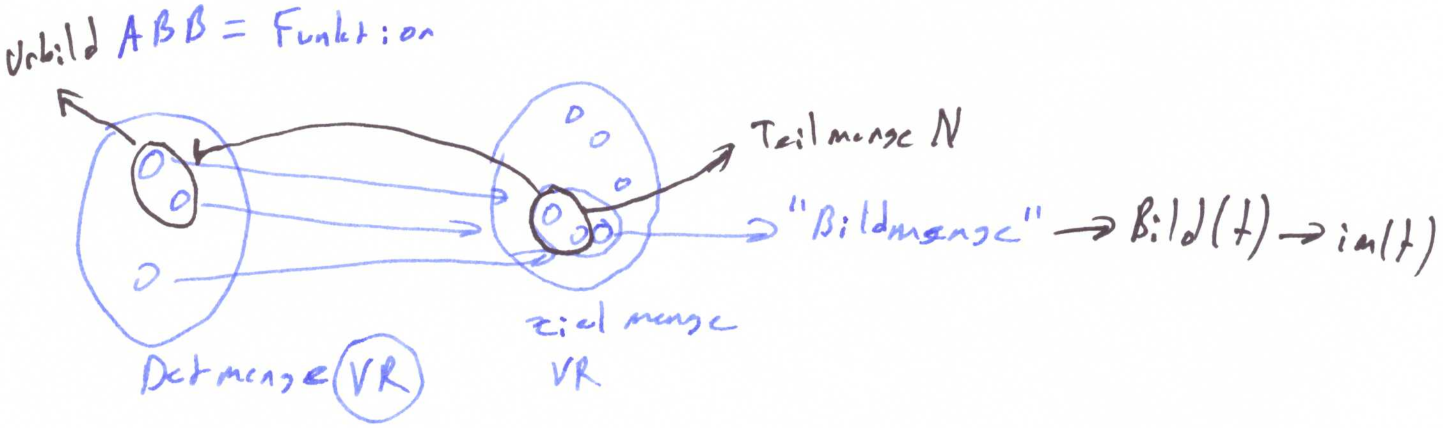
Rang der Basis = Anzahl Basisvektoren

dim(VR) = Rang(Basis) (*)

= Rang(Erzeugendensystem

LINEARE ABB.

ABB = Funktion



Homogenität

für alle $a \in K$ und $\vec{v} \in V$ muss gelten:

$f(a * \vec{v}) = a * f(\vec{v})$

$f(2x) = 2f(x)$

Additivität

für alle $\vec{v}, \vec{w} \in V$ muss gelten:

$f(\vec{v} + \vec{w}) = f(\vec{w}) + f(\vec{v})$

$f(3) = f(2) + f(1)$

z.B.

$f(x) = m * x + c$ → ist f linear?

$f(a * v + w) = a * f(v) + f(w)$

$m * (a * v + w) + c = a * (m * v + c) + (m * w + c)$

$\underline{m * a * v} + \underline{m * w + c} \neq a * m * v + a * c + \underline{(m * w + c)}$

* nicht linear!

affine Abbildung

KERN

$\{x \in V \mid f(x) = 0 \in W\} = Ker(f)$

f (trält) = 0

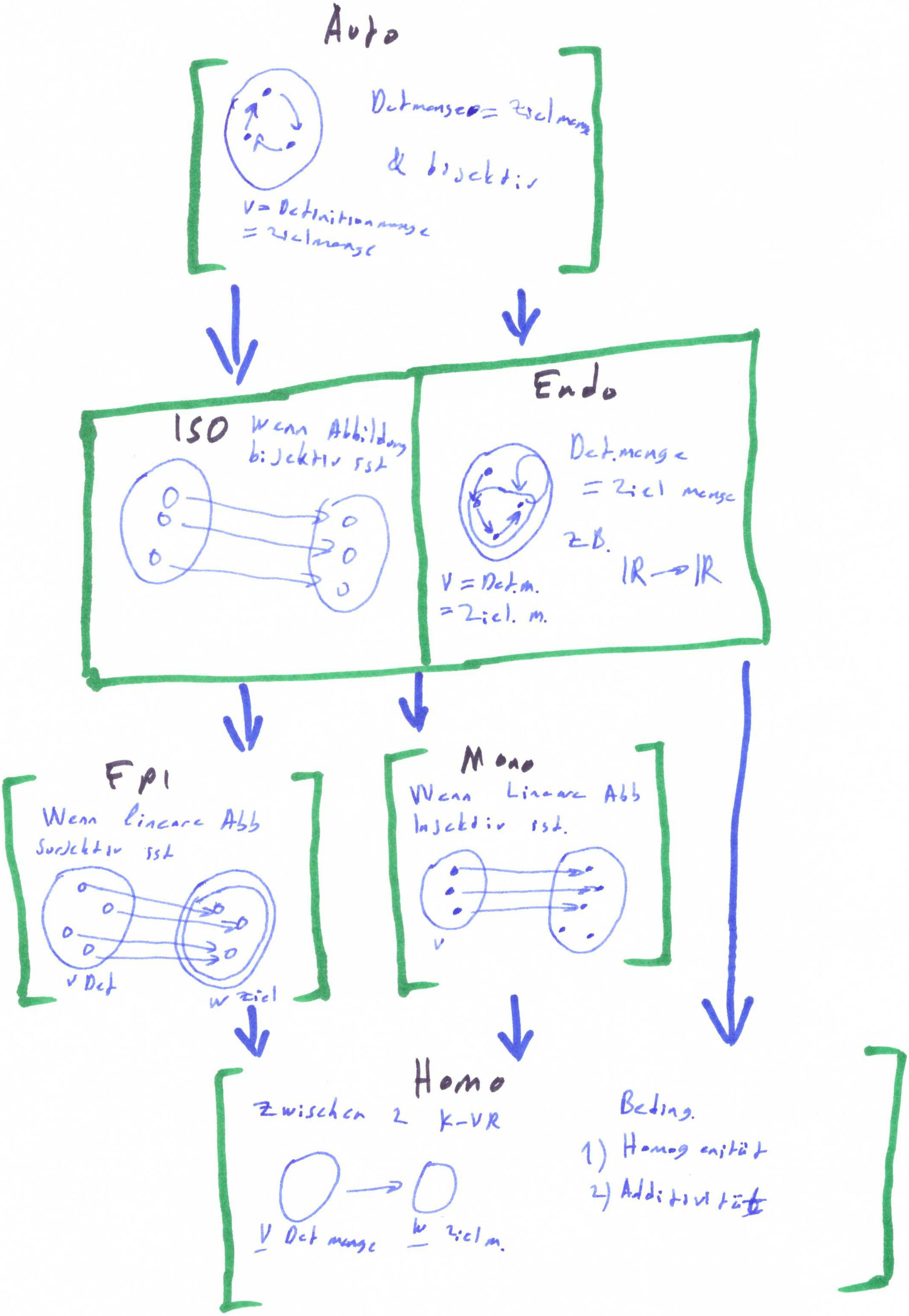
$f(0) = 0$ → null vektor aus W

Nullvektor aus D

$f: V \to W$

Ker(f) := Alle Elemente aus der Def.menge V, für die der Funktionswert der Nullvektor ist.

K-VR ABB.



Auto
Det.menge = Zielmenge
& bijektiv
V = Definitionsmenge
= Zielmenge
ISO
Wenn Abbildung
bijektiv ist
Endo
Det.menge
= Ziel menge
z.B.
ℝ → ℝ
V = Det.m.
= Ziel. m.
Epi
Wenn lineare Abb
surjektiv ist
V Def
W Ziel
Mono
Wenn Lineare Abb
Injektiv ist.
V
Homo
zwischen 2 K-VR
V Def menge
W Ziel m.
Beding.
1) Homogenität
2) Additivität

UNTERVEKTORRAUM

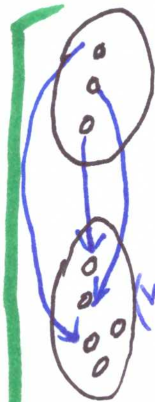
Untervektor-raummenge U

$U \subseteq V$ → Vektorraummenge

1) U nicht Leer!

2) VR Abgeschlossen
$\forall \vec{x}, \vec{y} \in U : \vec{x} + \vec{y} \in U$

3) Skalare Mult. Abgeschlossen
$\forall a \in K, \vec{x} \in U : a *' \vec{x} \in U$



$(V, +, *')$

$(W, +', *')$

1. Homogenität
für alle $a \in K$
$\vec{v} \in V$ muss gelten:
$f(a *' \vec{v})$
$= a *' f(\vec{v})$

2) additivität
$f(\vec{v} +' \vec{w})$
$= f(\vec{v}) +' f(\vec{w})$

Beweiss  mit Homomorphismus

Ist das Bild ein UnterVR der Zielmenge?

Bed. 1)

- U nicht Leer
$U \neq \emptyset \leftrightarrow \vec{0} \in U$

$f(\text{Nulvektor aus } V) = \vec{0}$
$\downarrow$ $\vec{0}$; $\downarrow$ Nullvektor aus W

$\vec{0} \in Bild(f)$ ✓

Bed 2)

- Vektorsume Abgeschlos.
$\forall \vec{x}, \vec{y} \in U : \vec{x} +' \vec{y} \in U$

$W_1 +' W_2 = f(V_1) +' f(V_2)$
$= f(V_1 +' V_2)$

V ist ein VR → $V_1 +' V_2 \in V$
→ $f(\vec{V_1} +' \vec{V_2}) \in Bild(f)$
→ $W_1 +' W_2 \in Bild(f)$

✓

Bed 3)

-

$\star$ Lineare Abb. = Homomorphismus

Lin. Abb. = Homomorphismus

$f: V \to W$

$V \to W$

1) $f(0) = 0$

$\downarrow$ Nullvektor aus V

Beweis:

$f(0) = f(0 +' 0) \underset{\text{(da f linear)}}{=} f(0) +' f(0)$

$f(0) \in W \to \exists f(0)^{-1} \in W$ mit:

$f(0) +' f(0)^{-1} = 0$

$\underbrace{f(0) +' f(0)^{-1}}_{0} = f(0) +' \underbrace{f(0) +' f(0)^{-1}}_{0} = 0$

$0 = f(0)$

2) $\underbrace{f(x^{-1})}_{\text{Inverses aus V}} = \underbrace{f(x)^{-1}}_{\text{Inverse aus W}}$

$0 = f(0) = f(x +' x^{-1}) \underset{\text{(da f linear)}}{=} f(x) +' f(x^{-1})$

$\to 0 = f(x) +' f(x^{-1})$

$\updownarrow$ Inverses eindeutig $\to f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$

$0 = f(x) +' f(x)^{-1}$

3)

$f: V \to W$ ist linear

$g: W \to Z$ ist linear

$\to (g \circ f)$ ist linear

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$$f: \vec{x} = \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longrightarrow f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 4 * x_2 - 4 * x_3 \\ x1 + x_2 \\ 5 * x_1 + 7 * x_2 - 2 * x_3 \end{pmatrix}$$

Lineare Abb. = Matrix mal Vektor

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & -2 \end{pmatrix}}_{M(f)} * \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 * x2 - 4 * x3 \\ x1 + x2 \\ 5 * x1 + 7 * x2 - 2 * x3 \end{pmatrix}$$

$M(f)$ = Abbildungsmatrix

$f: K^2 \to K^4$

Basis $= \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$

$M(f) = \begin{pmatrix} f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$ $\xrightarrow{}$ 2 Spalten, $\downarrow$ 4 Zeilen

$\to f(\vec{x}) = M(f) * (\vec{x})$

Basis $= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\left(f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$