MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2018
04.06.2018

Tutoriumsblatt 9
für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK-ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens Montag, den 11.06.2018, um 12 Uhr entweder über den Rückgabekasten oder über UniWorx ab. Spätere Abgaben können nicht berücksichtigt werden. Gerne können Sie in Gruppen abgeben (max. 3 Studierende).

Aufgabe 1 (Gewichtung 30%)

Seien K ein Körper, V, W zwei K-Vektorräume und $\phi : V \to W$ eine lineare Abbildung.

(i) Zeigen Sie: Ist ϕ bijektiv und B eine Basis von V, dann ist $\phi(B)$ eine Basis von W.

(ii) Weisen Sie anhand konkreter Gegenbeispiele nach, dass die Aussage (i) im Allgemeinen falsch ist, wenn man das Wort "bijektiv" durch "injektiv" oder "surjektiv" ersetzt.

(iii) Zeigen Sie ebenso anhand eines konkreten Gegenbeispiels, dass (i) falsch wird, wenn man die Voraussetzung fallen lässt, dass ϕ eine lineare Abbildung ist.

Aufgabe 2 (Gewichtung 35%)

Überprüfen Sie, ob die Teilmengen S der folgenden K-Vektorräume V linear unabhängig sind. Falls nicht, bestimmen Sie eine Familie $(\lambda_v)_{v\in S}$ von Koeffizienten $\lambda_v \in K$ mit $\sum_{v\in S} \lambda_v v = 0_V$, wobei $\lambda_v \neq 0$ für mindestens ein $v \in S$ gilt.

(i) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{C}^2$, $S = \{(1, 1), (2i, 2i)\}$

(ii) $K = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}^3$, $S = \{(2 + i, 3 - i, 4 - 2i)\}$

(iii) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(1, 2, 5), (1, 3, 7), (4, 4, 4)\}$

(iv) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(5, 7, 3), (1, -1, 5), (11, 19, 0)\}$

Aufgabe 3 (Gewichtung 35%)

Gegeben seien die folgenden K-Vektorräume V_k mit jeweils einer Teilmengen $S_k,\ k \in \{1, 2, 3\}$.

(I) $K = \mathbb{R}$, $V_1 = \mathbb{R}^3$, $S_1 = \{(1, 2, 5), (1, 3, 3), (1, 0, 0), (1, -4, -1)\}$

(II) $K = \mathbb{C}$, $V_2 = \mathbb{C}^3$, $S_2 = \{(i, -i, 0), (1, 1, 0)\}$

(III) $K = \mathbb{R}$, $V_3 = \mathbb{R}^3$, $S_3 = \{(1, 0, 1), (1, 1, 1), (0, 1, 1)\}$

Bearbeiten Sie dazu die folgenden Aufgaben:

(i) Begründen Sie ohne Rechnung, dass S_1 linear abhängig ist und bestätigen Sie ihre Vermutung, indem Sie einen Vektor $v_1 \in S_1$ durch eine Linearkombination aus $S_1 \setminus \{v_1\}$ darstellen.

(ii) Begründen Sie ohne Rechnung, dass S_2 keine Basis von V_2 darstellt, aber durch Hinzunahme geeigneter Vektoren aus V_2 zu einer Basis wird. Finden Sie anschließend explizit eine Menge von Vektoren $S \subseteq V_2$, so dass $S_2 \cup S$ eine Basis von V_2 bildet.

(iii) Zeigen Sie, dass S_3 eine Basis von $V_3 = \mathbb{R}^3$ darstellt. Weisen Sie anschließend nach, dass ein geeigneter Vektor aus S_3 durch $\hat{e}_1 = (1, 0, 0)$ ersetzt werden kann und die neu erhaltene Menge wieder eine Basis von $\mathbb{R}^3$ darstellt.