1 Tutorium 3

1.1 Aufgabe 1

i) A , E , F , G , C

ii)

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D := \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \xRightarrow{\mathrm{I} - \mathrm{II}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{II} - \mathrm{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

iii)

a) $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow[\mathrm{III} + \mathrm{II}]{2 + \frac{\mathrm{I}}{4}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cancel{1} & \frac{9}{} & \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-12}{-3} & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ ↯

b) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ ✓

d) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

c) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ ↯

d) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow{\mathrm{I} - 2\mathrm{II}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

e) $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 5 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xRightarrow{\mathrm{II} - \frac{\mathrm{I}}{5}} \cancel{\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 \\ \frac{1}{5} & 1 & 0 & \frac{12}{5} \end{pmatrix}}$ ↯

f) $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ ↯

Beobachtung: Es scheint eine Abhängigkeit da zu sein zwischen Rang der Matrix und Anzahl der Variablen
$\Rightarrow$ Wenn Rang < 4 sind M. nicht Invertierbar.

1.2 Aufgabe 2

Name / Matrikelnr. / Tutorium

$\boxed{\text{Aufgabe 2}}$ $A \in \mathbb{R}^{3\times3}, \ a \in \mathbb{R}$

$$\bar{A} := \left(\begin{array}{ccc|c} a-1 & 0 & a+1 & 5a-8 \\ 2(a-1) & 1 & 2(a+1) & 10a-9 \\ (a-1) & -2 & 0 & 2a-16 \end{array}\right) \underset{\Rightarrow}{\overset{\mathrm{I}-\mathrm{III}}{\mathrm{II}-2\mathrm{I}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & a+1 & 3a+8 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ a-1 & -2 & 0 & 2a-16 \end{array}\right)$$

Zeilen ⇒ umsortiert

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a-1 & -2 & 0 & 2a-16 \\ 0 & 2 & a+1 & 3a+8 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \end{array}\right) \underset{\Rightarrow}{\overset{\mathrm{I}/(a-1)}{\mathrm{II}-2\mathrm{III}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{a-1} & 0 & \frac{2(a-8)}{a-1} \\ 0 & 0 & a+1 & 3a-10 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \end{array}\right)$$

⇒ Zeilen umsortiert

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{a-1} & 0 & \frac{2(a-8)}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & a+1 & 3a-10 \end{array}\right) \underset{\Rightarrow \ \frac{\mathrm{III}}{a+1}}{\mathrm{I}+\frac{2}{a-1}\mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2(a-8)}{a-1} + \frac{18}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3a-10}{a+1} \end{array}\right)$$

$= \frac{2a+34}{a+1}$

$2a+16+18$

$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\bar{A}) = n$ $\boxed{n_A = 3}$

⇒ Also hat $\bar{A}$ nur eine eindeutige Lösung:

$L := \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid Av = b \}$

⇒

$$L = \left\{ \left(\frac{2(a+17)}{a+1}, 9, \frac{3a-10}{a+1} \right) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a \neq -1 \right\}$$

1.3 Aufgabe 4

Sei $A \in \mathbb{K}^{3\times 3}$, $A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow AA = \begin{pmatrix} \cancel{a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2} \; a_{11}^2 + a_{21}a_{12} + a_{13}a_{31} & a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} + a_{32}a_{13} & a_{13}a_{11} + a_{23}a_{32} + a_{33}a_{13} \\ a_{11}a_{21} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{23} & a_{21}a_{12} + a_{22}^2 + a_{32}a_{23} & a_{21}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{23}a_{33} \\ a_{11}a_{31} + a_{21}a_{32} + a_{31}a_{33} & a_{31}a_{12} + a_{32}a_{22} + a_{32}a_{33} & a_{31}a_{13} + a_{23}a_{32} + a_{33}^2 \end{pmatrix}$$

Da $A = A^t \Rightarrow a_{12} = a_{21} \wedge a_{23} = a_{32} \wedge a_{13} = a_{31}$

$$\Rightarrow A^tA = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 & a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} + a_{23}a_{13} & a_{13}a_{11} + a_{23}a_{12} + a_{33}a_{13} \\ a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} & a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 & a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{23}a_{33} \\ a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23} + a_{13}a_{33} & a_{13}a_{12} + a_{23}a_{22} + a_{23}a_{33} & a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 \end{pmatrix}$$

$$A^tA = \begin{pmatrix} a_1 \cdot (a_{11} + a_{12} + a_{33}) & a_2 \cdot (a_{11} + a_{12} + a_{13}) & a_3 \cdot (a_{13} + a_{12} + a_{13}) \\ a_1 \cdot (a_{12} + a_{22} + a_{23}) & a_2 \cdot (a_{12} + a_{22} + a_{23}) & a_3 \cdot (a_{12} + a_{22} + a_{23}) \\ a_1 \cdot (a_{13} + a_{23} + a_{33}) & a_2 \cdot (a_{13} + a_{23} + a_{33}) & a_3 \cdot (a_{13} + a_{23} + a_{33}) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \cdot (a_{\cdot 1}) & a_2 \cdot (a_{\cdot 1}) & a_3 \cdot (a_{\cdot 1}) \\ a_1 \cdot (a_{\cdot 2}) & a_2 \cdot (a_{\cdot 2}) & a_3 \cdot (a_{\cdot 2}) \\ a_1 \cdot (a_{\cdot 3}) & a_2 \cdot (a_{\cdot 3}) & a_3 \cdot (a_{\cdot 3}) \end{pmatrix} \checkmark$$

Also können wir verallgemeinern.

$\Rightarrow$ Sei $A \in \mathbb{K}^n$ definiert durch a_{ij} und A^t seine transponierte Form mit $a_{ij} = a_{ji}$

$$\begin{pmatrix} a_{1\cdot}(a_{\cdot 1}) & a_{2\cdot}(a_{\cdot 1}) & \cdots & \boxed{a_{(i-1)\cdot}(a_{\cdot 1})} & \boxed{a_{j\cdot}(a_{\cdot 1})} \\ a_{1\cdot}(a_{\cdot 2}) & & & & a_{i\cdot}(a_{\cdot 2}) \\ \vdots & & & & \vdots \\ \boxed{a_{1\cdot}(a_{\cdot j-1})} & & & & a_{i\cdot}(a_{\cdot j-1}) \\ \boxed{a_{1\cdot}(a_{\cdot j})} & a_{2\cdot}(a_{\cdot j}) & \cdots & a_{(i-1)\cdot}(a_{\cdot j}) & a_{i\cdot}(a_{\cdot j}) \end{pmatrix}$$

✓

Symmetrie ist ~~dank~~ dank der Multiplikation immer gegeben. ∎