

Lineare Algebra Tutorium 7 Lösung

Andrea Colarieti Tosti

May 27, 2018

1 Aufgabe 1

1.1 i

Da $\text{lin}(T) = \text{lin}(S) = \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k$, ist es leicht daraus zu erkennen dass die zwei Untervektorräume die gleiche Basis $B_S = B_T = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Da der Austauschsatz sagt: Sei $U \subseteq V$ und V ein K -Vektorraum, gibt es eine mengen linear unabhängige vektoren $v_1, \dots, v_n, n \in \mathbb{N}$, die die Basis von V $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ bilden.

Und es gibt eine menge $B_U := \{u_1, \dots, u_m\}$ mit $1 \leq m < n, m \in \mathbb{N}$ basis von U , sodass $B_V = \{u_1, \dots, u_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$.

Merken wir dass die Vektoren aus den Basen von S und T genau die selben sind und daher die Untervektorräume gleich sind.

1.2 ii

Da $S \subseteq T \subseteq V$ können wir den obergenannten Austauschsatz anwenden und die folgenden Aussage treffen:

2 Aufgabe 2

2.1 i

zz: $\phi(V) = \{v \in V | \phi(v) = v\}$

3 Aufgabe 3

3.1 i

zz. $(D \circ \phi_n) \mathbb{R}$ linear ist. Wobei

$$D := P_n \rightarrow P_n, f \mapsto (f' : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{df(x)}{dx})$$

$$\phi_n : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow C^0(I, \mathbb{R})$$

$$\phi_n(v) = p \in C^0(I, \mathbb{R}) \Leftrightarrow$$

$$(v = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1} e_k \wedge (\forall x \in I : p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k), a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R})$$

Beweis:

Seien $n \in \mathbb{N}$, $\lambda, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}, x \in I, v, w \in \mathbb{R}^n$ mit $v := (a_1, \dots, a_n), w := (b_1, \dots, b_n)$

$$\bullet (D \circ \phi_n(v))(x) + (D \circ \phi_n(w))(x) = (D \circ \phi_n(v+w))(x)$$

$$(D \circ \phi_n(v))(x) + (D \circ \phi_n(w))(x) = D(\sum_{k=0}^n a_k x^k) + D(\sum_{k=0}^n b_k x^k) =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} k a_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{n-1} k b_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} k a_k x^{k-1} + k b_k x^{k-1}$$

$$(D \circ \phi_n(v+w))(x) = D(\sum_{k=0}^n (a_k + b_k) x^k) = \sum_{k=0}^{n-1} k (a_k + b_k) x^{k-1} =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} k a_k x^{k-1} + k b_k x^{k-1}$$

✓

$$\bullet \lambda(D \circ \phi_n(v))(x) = (D \circ \phi_n(\lambda v))(x)$$

$$\lambda(D \circ \phi_n(v))(x) = \lambda D(\sum_{k=0}^n a_k x^k) = \lambda \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k a_k x^{k-1} =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda k a_k x^{k-1}$$

$$(D \circ \phi_n(\lambda v))(x) = D(\sum_{k=0}^n \lambda a_k x^k) = \sum_{k=0}^{n-1} k \lambda a_k x^{k-1}$$

Da die multiplikation in \mathbb{R} kommutativ ist, sind die 2 aussagen gleich.

✓

Also ist $(D \circ \phi_n)$ \mathbb{R} -Linear .

$$\ker(D \circ \phi_n) := \{x \in I : (\phi_n(v))(x) = 0 \in C^0(I, \mathbb{R}), v \in \mathbb{R}^n\}$$

$$\operatorname{Im}(D \circ \phi_n) := \{(\phi_n(v)) \in C^0(I, \mathbb{R}), v \in \mathbb{R}^n\}$$

3.2 ii

4 Aufgabe 4

4.1 i V^+

Sei $v \in V^+ \subseteq V$ und $V^+ := \{v \in V \mid \phi(v) = v\}$.

Gibt es $v \in V^+ \subseteq V$ sodass $\phi(v) = v$, also ist $V^+ \neq \emptyset$.

Seien $v, w \in V^+ \subseteq V$ gilt $\phi(v) + \phi(w) = v + w = \phi(v + w) \Rightarrow v + w \in V^+$

Sei $v \in V^+ \subseteq V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\lambda\phi(v) = \lambda v = \phi(\lambda v) \Rightarrow \lambda v \in V^+$

4.2 i V^-

Sei $v \in V^- \subseteq V$ und $V^- := \{v \in V \mid \phi(v) = -v\}$.

Gibt es $v \in V^- \subseteq V$ sodass $\phi(v) = -v$, also ist $V^- \neq \emptyset$.

Seien $v, w \in V^- \subseteq V$ gilt $\phi(v) + \phi(w) = (-v) + (-w) = -(v + w) = \phi(v + w) \Rightarrow v + w \in V^-$

Sei $v \in V^- \subseteq V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\lambda\phi(v) = \lambda(-v) = -(\lambda v) = \phi(\lambda v) \Rightarrow \lambda v \in V^-$

4.3 ii

Wir starten mit der Gleichheit $V = V^+V^-$ und schließen ab mit $V^+ \cap V^- = \{0_v\}$.

\supseteq : Aus der Vorlesung wissen wir, dass $V^+V^- \supseteq V$ ist.

\subseteq : Aus der definition von K aus der Übung wissen wir dass $1_k \neq -1_k$, also folgern wir dass ein Vektor v element des K -Vektorraums V zwei möglichen Darstellungen hat: $v_1 = 1_kv$ oder $v_2 = -1_kv = -v$.

Also gilt es $\phi(v_1) = \phi(1_kv_1) = 1_kv_1 \in V^+$ und $\phi(v_2) = \phi(-1_kv_2) = 1_kv_2 \in V^- \Rightarrow v$ ist zwingend teil von V^+ oder V^- und daraus lässt sich folgern, dass $V = V^+ + V^-$

Es bleibt zu zeigen, dass $V^+ \cap V^- = \{0_v\}$. Wir wissen schon aus der Vorlesung, dass $0_v \in V^+$ sowie $0_v \in V^-$.

Sei $\phi \in V^+ \cap V^-$ müssen wir ein $v \in V$ finden können, sodaß $\phi(v) = \phi(-v) \Rightarrow v = -v$ da $1_k \neq -1_k$ folgt widerspruch. Also ist 0_v das einzige element in $V^+ \cap V^-$.