LMU | LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN | MATHEMATISCHES INSTITUT

Florin Belgun
Christoforos Neofytidis

Wintersemester 2013/14
13.03.2014

Lineare Algebra für Informatiker und Statistiker

Nachholklausur

Nachname: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnr.: ______________________ Fachsemester: ______________________

Abschluss: Bachelor, PO ❑ 2007 ❑ 2010 ❑ 2011 Master, PO ❑ 2010 ❑ 2011

Lehramt Gymnasium: ❑ modularisiert ❑ nicht modularisiert

❑ Diplom ❑ Anderes: ______________________

Hauptfach: ❑ Mathematik ❑ Wirtschaftsm. ❑ Inf. ❑ Phys. ❑ Stat. ❑ ____________

Nebenfach: ❑ Mathematik ❑ Wirtschaftsm. ❑ Inf. ❑ Phys. ❑ Stat. ❑ ____________

Anrechnung der Credit Points für das ❑ Hauptfach ❑ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch; legen Sie bitte Ihren Lichtbild- und Studienausweis sichtbar auf den Tisch.
Bitte überprüfen Sie, ob Sie **vier Aufgaben** erhalten haben.
Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**.
Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf den dafür vorgesehenen Blättern (bitte benutzen Sie dabei auch die **Rückseiten**). Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe.

Durch Angabe eines **Pseudonyms** links unten (z.B. die letzten vier Ziffern Ihrer Matrikelnummer) stimmen Sie der Veröffentlichung von Klausurergebnis und Pseudonym im Internet zu.

Sie haben **120 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten.

Bitte lesen Sie alle Aufgaben durch! Die Teilaufgaben können manchmal unabhängig von den vorigen Teilaufgaben bearbeitet werden.

Viel Erfolg!

Pseudonym	1	2	3	4	1 + 2 + 3	1+2+3+4
	/10	/10	/10	/10	/30	/40

Name: ____________________

Aufgabe 1. [10 Punkte]

Sei K ein Körper. Wir bezeichnen durch $K[X]$ der Ring der Polynome mit Koeffizienten in K. Sei $X^2+X+1 \in K[X]$.

(a) *(2 Punkte)* Berechnen Sie der Rest der Polynomdivision in $K[X]$ von X^3, bzw. X^4 durch X^2+X+1.

(b) *(3 Punkte)* Seien $p, q \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, X^p und X^q haben den gleichen Rest modulo X^2+X+1 genau dann, wenn $p \equiv q \pmod 3$.

(c) *(2 Punkte)* Betrachten Sie $V := K[X]/(X^2+X+1)$, der Ring der Restklassen modulo X^2+X+1, als K-Vektorraum. Welche Dimension hat V? Geben Sie eine Basis von V an und begründen Sie Ihre Antwort.

(d) *(3 Punkte)* Sei $F : K[X] \to K[X]$, $F(f) := X \cdot f$, $\forall f \in K[X]$ (F ist also die Multiplikation mit dem Polynom X). Zeigen Sie, es existiert genau eine K-lineare Abbildung $\hat{F} : V \to V$, so dass

$$\hat{F}([f]) = [F(f)], \ \forall f \in K[X].$$

(Für jedes Polynom $g \in K[X]$ bezeichnet $[g]$ die Restklasse von g modulo X^2+X+1.) Berechnen Sie $\hat{F}([1])$ und $\hat{F}([X])$ als lineare Kombination der bei (c) angegebene Basiselemente.

Name: ______________________________

Name: ____

Aufgabe 2. [10 Punkte]

Sei $A_s \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{C})$ die folgende Matrix, die vom Parameter $s \in \mathbb{C}$ abhängt:

$$A_s := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & s & i \\ 1 & -i & s^3 \end{pmatrix}.$$

(a) *(5 Punkte)* Bestimmen Sie den Rang der Matrix A_s in Abhängigkeit von $s \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, A_0 ist invertierbar und berechnen Sie A_0^{-1}.

(b) *(2 Punkte)* Sei $f_s : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $f_s(x) := A_s \cdot x$. Geben Sie eine Basis von $\ker f_\lambda$ an, wobei $\lambda := \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$.

(c) *(3 Punkte)* Geben Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$A_i \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2i \end{pmatrix}$$

an.

Name: ___

Name: ______________________________

Aufgabe 3. [10 Punkte]

(a) *(3 Punkte)* Sei $M \in Mat(3 \times 3, \mathbb{C})$ die folgende Matrix:

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie,

$$M^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}, \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

(b) *(4 Punkte)* Zeigen Sie,

$$R := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \ \middle| \ a, b \in \mathbb{C} \right\}$$

ist ein Ring mit den üblichen Matrixaddition, bzw. -Multiplikation. (Insbesondere ist hier zu zeigen, $A + B, A \cdot B \in R$, $\forall A, B \in R$)

Hat R ein Einselement? Oder Nullteiler? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) *(3 Punkte)* Bestimmen Sie alle Matrizen $A \in R$, so dass $A^3 = -A$.

Name: ________________________________

Name: ____________________

Aufgabe 4. [10 Punkte]

Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$, $s \in \mathbb{R}$.

(a) *(2 Punkte)* Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A und bestimmen Sie seine Nullstellen und ihre entsprechende Vielfachkeiten.

(b) *(2 Punkte)* Bestimmen Sie die algebraische und geometrische Vielfachkeiten der Eigenwerten von A. Ist A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) *(3 Punkte)* Geben Sie je eine Basis für jeden Eigenraum von A an.

(d) *(3 Punkte)* Sei $B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ eine Matrix vom Rang 1, ihre Spur wird mit $\mathrm{tr}B$ notiert. Zeigen Sie, B ist diagonalisierbar genau dann, wenn $\mathrm{tr}B \neq 0$.

Hinweis: Berechnen Sie die geometrische und algebraische Vielfachkeit des Eigenwertes 0; benutzen Sie anschliessend, dass die Summe der Nullstellen des charakterisches Polynoms von B (berechnet mit Vielfachkeiten) gleich $\mathrm{tr}B$ ist.

Name: ______________________________

Name: ____________________