Name: ____________________

Aufgabe 1. [4 Punkte]

Sei $G := \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

a) Beweisen Sie, dass $a * b := a + b + ab$ eine Verknüpfung auf G definiert.

b) Beweisen Sie, dass $(G, *)$ eine abelsche Gruppe ist.

c) Bestimmen Sie alle $x \in G$, für die $3 * x = -5$ gilt.

a) Sei $a, b \in G$, also $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Wir müssen beweisen, dass dann auch $a * b \in G = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
Tatsächlich gilt: $a * b = a + b + ab = \underbrace{(a+1)}_{\neq 0} \underbrace{(b+1)}_{\neq 0} - 1 \neq -1$

optional

b) [Wir müssen beweisen, dass Assoziativgesetz und Kommutativgesetz gelten, dass es ein neutrales Element gibt und dass jedes Element in G ein Inverses hat. Wir verwenden die Rechenregeln in $\mathbb{R}$.]

Assoziativgesetz: Für alle $a, b, c \in G$ gilt
$(a*b)*c = (a*b) + c + (a*b) \cdot c = (a \cancel{*} b \cancel{+} ab) + c + (a + b + ab) \cdot c$
$= a + b + c + ab + ac + bc + abc = a + (b + c + bc) + a(b + c + bc)$
$= a + (b*c) + a(b*c) = a*(b*c)$.

Kommutativgesetz: Für alle $a, b \in G$ gilt
$a*b = a + b + ab = b + a + ba = b*a$.

Neutrales Element: [Nebenrechnung: $a*e = a + e(1+a) = a$ für alle $a \in G$ genau dann, wenn $e = 0$]
Neutrales Element ist $e = 0 \in G$, denn für alle $a \in G$ gilt
$a * 0 = a + 0 + a \cdot 0 = a$.

Inverses Element: [Nebenrechnung: $a * \bar{a} = 0 \Leftrightarrow a + \bar{a}(1+a) = 0$
$\Leftrightarrow \bar{a} = -\frac{a}{1+a}$]
Sei $a \in G$ beliebig. Inverses von a ist $\bar{a} = -\frac{a}{1+a}$, denn das liegt in G (weil $a \neq -1$ gilt $\bar{a} \in \mathbb{R}$, und weil $a \neq 1 + a$ gilt $\bar{a} \neq -1$), und es gilt $a * \bar{a} = a - \frac{a}{1+a} + a\left(-\frac{a}{1+a}\right) = \frac{a + a^2 - a - a^2}{1+a} = 0$.

c) Durch Multiplikation beider Seiten mit $\bar{3} = -\frac{3}{4}$ stellt man fest, dass $3 * x = -5$ genau dann gilt, wenn
$x = \left(-\frac{3}{4}\right) * (-5) = -\frac{3}{4} - 5 + \frac{15}{4} = -2$.

Name: ____________________

Aufgabe 2. [4 Punkte]

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K, mit Untervektorräumen U_1, U_2. Beweisen Sie, dass $U_1 + U_2$ ein Untervektorraum von V ist.

optional

Nach dem Untervektorraumkriterium ist zu zeigen, dass $U_1+U_2 = \{x_1+x_2 \mid x_1 \in U_1, x_2 \in U_2\}$ nicht leer ist und abgeschlossen bzgl. Addition und Skalarmultiplikation ist.
Nach demselben Kriterium wissen wir, dass U_1 und U_2 dieselben Eigenschaften haben.

- U_1+U_2 nicht leer: Weil U_1, U_2 nicht leer sind, gibt es $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$. Also ist x_1+x_2 Element von U_1+U_2.

- Abg. bzgl. Add: Seien $x, x' \in U_1+U_2$. Per Def. gibt es $x_1, x_1' \in U_1$ und $x_2, x_2' \in U_2$ mit $x = x_1+x_2$, $x' = x_1'+x_2'$.
Also gilt $x+x' = (x_1+x_2)+(x_1'+x_2') = \underbrace{(x_1+x_1')}_{\in U_1 \text{, weil } U_1 \text{ abg. bzgl. Add.}} + \underbrace{(x_2+x_2')}_{\in U_2 \text{, weil } U_2 \text{ abg. bzgl. Add.}} \in U_1+U_2$

- Abg. bzgl. Skalarmult: Sei $x \in U_1+U_2$, $\lambda \in K$. Per Def gibt es $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ mit $x = x_1+x_2$
Also gilt $\lambda x = \lambda(x_1+x_2) = \underbrace{\lambda x_1}_{\in U_1 \text{, weil } U_1 \text{ abg. bzgl. Skalarmult}} + \underbrace{\lambda x_2}_{\in U_2 \text{, weil } U_2 \text{ abg. bzgl. Skalarmult.}} \in U_1+U_2$

Name: ______________________________

Aufgabe 3. [4 Punkte]

Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung von Vektorräumen über einem Körper K. Der Kern von φ sei n-dimensional mit Basis $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Außerdem seien $x_{n+1}, \ldots, x_m \in V$ (mit $m > n$) so gegeben, dass $\{x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m\}$ eine m-elementige linear unabhängige Menge ist. Beweisen Sie, dass $\{\varphi(x_{n+1}), \ldots, \varphi(x_m)\}$ eine linear unabhängige Menge mit $m - n$ Elementen ist.

optional
[Um zu zeigen, dass $\{\varphi(x_{n+1}), \ldots, \varphi(x_m)\}$ aus $m-n$ verschiedenen lin. unabh. Elementen besteht, müssen wir beweisen, dass mit $\lambda_{n+1}, \ldots, \lambda_m \in K$ die Gleichung $\lambda_{n+1}\varphi(x_{n+1}) + \ldots + \lambda_m \varphi(x_m) = 0$ nur für $\lambda_{n+1} = \ldots = \lambda_m = 0$ gilt.]

Bew.: Sei also $\lambda_{n+1}\varphi(x_{n+1}) + \ldots + \lambda_m \varphi(x_m) = 0$ mit $\lambda_{n+1}, \ldots, \lambda_m \in K$.

Weil φ linear ist, ist das äquivalent zu $\varphi(\lambda_{n+1}x_{n+1} + \ldots + \lambda_m x_m) = 0$.

Also gilt $\lambda_{n+1}x_{n+1} + \ldots + \lambda_m x_m \in \ker(\varphi)$.

Weil $\{x_1, \ldots, x_n\}$ Basis von $\ker(\varphi)$ ist, gibt es $\mu_1, \ldots, \mu_n \in K$ so, dass $\lambda_{n+1}x_{n+1} + \ldots + \lambda_m x_m = \mu_1 x_1 + \ldots + \mu_n x_n$.

Das ist äquivalent zu $(-\mu_1)x_1 + \ldots + (-\mu_n)x_n + \lambda_{n+1}x_{n+1} + \ldots + \lambda_m x_m = 0$.

Weil $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m$ linear unabhängig sind, folgt $-\mu_1 = \ldots = -\mu_n = \lambda_{n+1} = \ldots = \lambda_m = 0$.

Insbesondere gilt wie behauptet $\lambda_{n+1} = \ldots = \lambda_m = 0$.

Name: ____

Aufgabe 4. [4 Punkte]

Sei K ein Körper, n eine positive ganze Zahl. Beweisen Sie:

a) Für jedes $y = (y_1, \ldots, y_n) \in K^n$ ist folgende Abbildung linear:

$$\varphi_y : K^n \to K, \qquad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto y_1 x_1 + \cdots + y_n x_n$$

b) Folgende Abbildung ist linear:

$$\Phi : K^n \to \mathrm{Hom}(K^n, K), \qquad y \mapsto \varphi_y$$

c) Die Abbildung Φ ist ein Isomorphismus.

a) Sei $y=(y_1,\ldots,y_n) \in K^n$ beliebig. Dann ist φ_y linear, denn für alle $\lambda \in K$, $x=(x_1,\ldots,x_n) \in K^n$, $x'=(x_1',\ldots,x_n') \in K^n$ gilt:

$\varphi_y(x+x') = y_1(x_1+x_1') + \ldots + y_n(x_n+x_n') \underset{\text{Rechenregeln in } K}{=} (y_1x_1+\ldots+y_nx_n) + (y_1x_1'+\ldots+y_nx_n')$
$= \varphi_y(x) + \varphi_y(x')$

und $\varphi_y(\lambda x) = y_1(\lambda x_1) + \ldots + y_n(\lambda x_n) = \lambda(y_1x_1+\ldots+y_nx_n) = \lambda\varphi_y(x)$.

b) optional [Die Abb. Φ ist linear genau dann, wenn $\Phi(y+y') = \Phi(y) + \Phi(y')$ und $\Phi(\lambda y) = \lambda\Phi(y)$ für alle $\underset{(y_1,\ldots,y_n)}{y}, \underset{=(y_1',\ldots,y_n')}{y'} \in K^n$ und $\lambda \in K$ gilt.
Dass diese Gleichungen von Abb. tatsächlich gelten, beweisen wir, indem wir beide Seiten für beliebige $\underset{(x_1,\ldots,x_n)}{\overset{\shortparallel}{x}} \in K^n$ auswerten:]

Es gilt $(\Phi(y+y'))(x) = \varphi_{y+y'}(x) = (y_1+y_1')x_1 + \ldots + (y_n+y_n')x_n = (y_1x_1+\ldots+y_nx_n)$
$+ (y_1'x_1+\ldots+y_n'x_n') = \varphi_y(x) + \varphi_{y'}(x) = (\Phi(y))(x) + (\Phi(y'))(x)$
$= (\Phi(y)+\Phi(y'))(x)$ für alle $x \in K^n$, also $\Phi(y+y') = \Phi(y)+\Phi(y')$ für $y,y' \in K^n$

und $(\Phi(\lambda y))(x) = \varphi_{\lambda y}(x) = (\lambda y_1)x_1 + \ldots + (\lambda y_n)x_n = \lambda(y_1x_1+\ldots+y_nx_n)$
$= \lambda \cdot \varphi_y(x) = (\lambda \cdot \Phi(y))(x)$ für alle $x \in K^n$, also $\Phi(\lambda y) = \lambda\Phi(y)$ für $\lambda \in K, y \in K^n$.

c) Φ ist <u>injektiv</u>, denn falls $\Phi(y)$ für ein $y=(y_1,\ldots,y_n) \in K^n$ die Nullabb. ist, gilt für alle $\underset{(x_1,\ldots,x_n)}{\overset{\shortparallel}{x}} \in K^n$, dass $0 = (\Phi(y))(x) = \varphi_y(x) = y_1x_1 + \ldots + y_nx_n$.

Insbesondere gilt das für $x=(1,0,\ldots,0)$, $x=(0,1,0,\ldots,0)$, ~~x=(0,0,...~~ $\ldots$, $x=(0,\ldots,0,1)$, also $y_1=0$, $y_2=0$, $\ldots$, $y_n=0$. Es folgt $y=(0,\ldots,0) \in K^n$, also Φ injektiv.

Für die <u>Surjektivität</u> vergleichen wir Dimensionen: $\mathrm{Hom}(K^n,K)$ hat Dimension $n \cdot 1 = n$, genauso wie K^n. Nach Dimensionsformel gilt: $n = \dim K^n = \dim \ker(\Phi) + \dim \operatorname{im}(\Phi)$. Wegen $\ker(\Phi) = \{0\}$ ist Φ surjektiv.

Name: ______________________________

Aufgabe 5. [4 Punkte]

Seien V_3 bzw. V_2 die Vektorräume der reellen Polynomfunktionen von Grad ≤ 3 bzw. ≤ 2, mit geordneten Basen $\mathcal{E} = (1, x, x^2, x^3)$ bzw. $\mathcal{F} = (1, x, x^2)$.

a) Bestimmen Sie die Matrix ${}_{\mathcal{F}}[\varphi]_{\mathcal{E}}$ der linearen Abbildung

$$\varphi : V_3 \to V_2, \qquad ax^3 + bx^2 + cx + d \mapsto (2b - c + d)x^2 + (a + b + c - d)x + (2a + 4b + c - d).$$

b) Bestimmen Sie den Rang von φ sowie Basen von Kern und Bild von φ.

a) An Stelle (i,j) der Matrix ~~$\mathcal{E}$~~ ${}_{\mathcal{F}}[\varphi]_{\mathcal{E}}$ steht der Koeffizient des i-ten Basisvektors aus $\mathcal{F}$ in der Linearkombination in $\mathcal{F}$ des Bildes des j-ten Basisvektors aus $\mathcal{E}$.

Es gilt
$$\varphi(1) = -1 - 1 \cdot x + x^2$$
$$\varphi(x) = 1 + x - x^2$$
$$\varphi(x^2) = 4 + x + 2x^2$$
$$\varphi(x^3) = 2 + x$$

Wir erhalten
$${}_{\mathcal{F}}[\varphi]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Wir verwenden das aus der Vorlesung bekannte Verfahren zur Bestimmung der Smith-Normalform von ${}_{\mathcal{F}}[\varphi]_{\mathcal{E}}$:

1. Zeilenstufenform:
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mid \cdot(-1) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mid + \text{Zeile } 1 \\ \mid - \text{Zeile } 1 \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mid \cdot(-\frac{1}{3}) \\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mid + 4 \cdot \text{Zeile } 2 \\ \\ \mid - 6 \cdot \text{Zeile } 2 \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hier sehen wir, dass wir eine Basis von $\operatorname{im}(\varphi)$ in Spalten 1 und 3 von ${}_{\mathcal{F}}[\varphi]_{\mathcal{E}}$ ablesen können:
$\operatorname{im}(\varphi)$ hat Basis $\{-1 - x + x^2, 4 + x + 2x^2\}$

2. Spaltenumf.:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tausche 2 und 3 $\rightsquigarrow$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Add. von Spalte 1 zu Spalte 3, Add. von 2/3-fachem von Spalte 1 und (−1/3)-fachem von Spalte 2 zu Spalte 4 $\rightsquigarrow$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ Wir wissen, dass wir eine Basis von $\ker(\varphi)$ in Spalten 3 und 4 dieser Matrix ablesen können:
$\ker(\varphi)$ hat Basis $\{1 + x, \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x^2 + x^3\}$

Name: ______________________________

Aufgabe 6. [4 Punkte]

Welche der folgenden Aussagen sind **im Allgemeinen** wahr oder falsch?
(Schreiben Sie einfach deutlich erkennbar **wahr** oder **falsch** hinter jede Aussage. Begründungen sind nicht gefragt und werden nicht korrigiert. Eine richtige Antwort gibt 0,5 Punkte, eine falsche −0,5 Punkte; unbeantwortete Fragen ergeben 0 Punkte. Sollte sich daraus eine negative Punktzahl ergeben, werden Ihnen trotzdem 0 Punkte angerechnet.)

a) Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Sei $\varphi : V \to V$ eine injektive lineare Abbildung. Dann ist φ surjektiv.

b) Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto (x+y)^2 - x^2 - y^2$ ist linear.

c) Sei V endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K und W ein Untervektorraum von V. Dann gibt es eine lineare Abbildung $f : V \to V$ so, dass $V/\ker(f)$ isomorph zu W ist.

d) Die Menge $\{(1,0,2),(0,1,1),(2,3,7)\} \subset \mathbb{R}^3$ ist linear unabhängig.

e) $(\mathbb{R},\cdot)$ ist eine Gruppe.

f) Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung von Vektorräumen über einem Körper K. Der Vektorraum V sei n-dimensional mit Basis $\{e_1,\dots,e_n\}$. Dann ist $\{f(e_1),\dots,f(e_n)\}$ linear unabhängig.

g) $\{0\}$ ist eine Basis des Nullvektorraums.

h) Sei $V = (\mathbb{F}_2)^3$ und $U = \langle(1,1,1)\rangle$ Untervektorraum von V. Im Quotientenraum V/U gilt $(1,0,0)+U = (0,1,1)+U$.

a) falsch [Gegenbeispiel: im Vektorraum der reellen Polynomfunktionen ist „Multiplikation mit x" linear und injektiv, aber nicht surjektiv.]

b) falsch [$f((x,y)) = 2xy$ ist nicht linear, weil $f((1,1)) = 2 \neq 0 = f((1,0)) + f((0,1))$]

c) wahr [Wir wissen $V/\ker(f) \cong \mathrm{im}(f)$, und $f : V \to V$ mit $\mathrm{im}(f) = W$ finden wir so: Wähle ein Komplement U von W, also $V = W \oplus U$, und wähle $f : W\oplus U \to W \oplus U$, $(w,u) \mapsto (w,0)$ also Projektion auf 1. Komponente.]

d) falsch [denn $2\cdot(1,0,2) + 3\cdot(0,1,1) - (2,3,7) = 0$]

e) falsch [denn 1 ist neutral bzgl. $\cdot$, aber $0\cdot x = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also hat 0 kein Inverses]

f) falsch [Gegenbeispiel: $n \geq 1$, f die Nullabbildung: $\{f(e_1),\dots,f(e_n)\} = \{0\}$ ist nicht linear unabhängig.]

g) falsch ($\{0\}$ ist nicht linear unabhängig, denn $\overset{\in K}{1}\cdot\overset{\in V}{0} = \overset{\in V}{0}$]

h) wahr [denn $(1,0,0)-(0,1,1) \underset{\uparrow\ -1=1 \text{ in } \mathbb{F}_2}{=} (1,1,1) \in U$]