

# Lineare Algebra I Tutorium 4 Lösung

Andrea Colarieti Tosti

May 7, 2018

-€

	1	2	3	4	Score
%	85	100	86	45	79

# 1 Aufgabe 1

1.1 i

1) | Aufgabe 1 | ①

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 6 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 6 & -4 \end{pmatrix} \quad A \in \mathbb{R}^4$$

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 15 & 15 & -10 & -10 \\ 15 & 15 & -10 & -10 \\ 35 & 10 & -15 & -15 \\ 10 & 35 & -15 & -15 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 100 & -25 & -25 & -25 \\ 100 & -25 & -25 & -25 \\ 100 & -25 & -25 & -25 \\ 200 & -50 & -50 & -50 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

A ist eine Nilpotente Matrix von Rang 4

4/4

1.2 ii

Aufgabe 1

ii) Sei  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  invertierbar und  $b \in \mathbb{R}^4$

Sei  $v \in \mathbb{R}^4$

$$\Rightarrow Av = b \Rightarrow A^{-1}Av = A^{-1}b$$

$$\Rightarrow E_{\mathbb{R}^4} v = A^{-1}v = v = A^{-1}b$$

Das heißt  $Av = b$  hat genau eine Lösung  
nämlich  $v = A^{-1}b$

4/4

### 1.3 iii

Aufgabe 1

iii)

Sei  $Q = E_4 + A$ , da wir im Übungsbogen 3 Aufgabe 2 Teil iv) bewiesen haben, dass sei  $A$  nilpotent, die Matrix  $Q = E_4 + A$  invertierbar ist.

Können wir behaupten dass  $Q$  invertierbar ist.

$\Rightarrow$

$$Qv = \omega \Rightarrow Q^{-1}Qv = Q\omega \Rightarrow v = Q^{-1}\omega$$

$\Rightarrow$  wir prüfen.

$$Q := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -3 \\ 6 & 2 & 1 & -4 \\ 1 & 6 & 2 & -4 \\ 1 & 6 & 6 & -3 \end{pmatrix} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} -86 & 58 & 13 & 18 \\ -91 & 40 & 14 & 18 \\ -66 & 29 & 10 & 14 \\ -191 & 84 & 29 & 40 \end{pmatrix}$$

Wie kommst du auf die Matrix?  
Rechnung fehlt.

$$Q^{-1}\omega = \begin{pmatrix} -167 \\ -177 \\ -128 \\ -371 \end{pmatrix} = v \checkmark$$

2/4

$$Qv = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -3 \\ 6 & 2 & 1 & -4 \\ 1 & 6 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -167 \\ -177 \\ -128 \\ -371 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -501 + (-354) + (-256) + 1113 \\ -1002 + (-354) + (-128) + (+1494) \\ -167 + (-1062) + (-256) + (+1494) \\ -167 + (-177) + (-769) + (+1113) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

## 2 Aufgabe 2

### 2.1 i

Aufgabe 2 | ①

i)  $A := \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}$        $A \in \mathbb{R}^{(m+n) \times (m+n)}$   
                 $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$   
                 $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$       mit  $m, n \in \mathbb{N}$

wir invertieren die Matrix A

$$\left( \begin{array}{cc|cc} B & O & E_m & O \\ O & C & O & E_n \end{array} \right)$$

=> Um die norm. ZSF auf der linken Seite  
brauchen wir eine Matrix D sodass

$$BD = E_m \Rightarrow D = B^{-1}$$

Mit  $B^{-1}$ ,

$$\Rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} BB^{-1} & O & E_m B^{-1} & O \\ O & C & O & E_n \end{array} \right)$$

Das gleiche für die nächsten Zeilen  $m+1 \leq i \leq n$

$$\xrightarrow{M_n, C^{-1}} \left( \begin{array}{cc|cc} E_m & O & B^{-1} & O \\ O & CC^{-1} & O & E_n C^{-1} \end{array} \right) \xrightarrow{O \leftrightarrow E_n} \left( \begin{array}{cc|cc} E_m & O & B^{-1} & O \\ O & E_n & O & C^{-1} \end{array} \right)$$

A ist invertierbar wenn B und C invertierbar sind.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}$$

414

## 2.2 ii

Aufgabe 2

ii)

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -6 & 32 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Wir invertieren die zwei Teilmatrizen

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -12 & -6 & 32 \\ 2 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 18 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 18 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

4/4

### 3 Aufgabe 3

3.1 ii

Aufgabe 3

ii)

$$T \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

↔

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cup = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \cup = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8/8

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

3.2 iii

### Aufgabe 3 |

$$\text{iii) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}-\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}-\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \begin{matrix} \text{III}-\text{II} \\ \rightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I}-2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}-\text{III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

414

## 4 Aufgabe 4

### 4.1 i

Aufgabe 4 (1)

i)

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Ist  $(M, \cdot)$  eine Gruppe?

Wir müssen untersuchen auf

- Assoziativitat
- Abgeschlossenheit
- Neutrales Element
- Inverses Element

—————

- Abgeschlossenheit:

Seien  $a, b \in M$

$a \cdot b \in M$  Das muss fur beliebige  $a, b \in M$  gezeigt werden.

$$\stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} \cos(\pi) & -\sin(\pi) \\ \sin(\pi) & \cos(\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(0) & -\sin(0) \\ \sin(0) & \cos(0) \end{pmatrix} \stackrel{b-a=?}{=} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

- Assoziativitat:

Seien  $a, b, c \in M$  Das müssen allgemeine Winkel sein.

$$a := \begin{pmatrix} \cos(\pi) & -\sin(\pi) \\ \sin(\pi) & \cos(\pi) \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} \cos(0) & -\sin(0) \\ \sin(0) & \cos(0) \end{pmatrix}$$

$$c := \begin{pmatrix} \cos(1) & -\sin(1) \\ \sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix}$$

Durchrechnung 1 (2)

wir wollen zeigen dass

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

linke Seite

$$\begin{pmatrix} \cos(\pi) & -\sin(\pi) \\ \sin(\pi) & \cos(\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(0) & -\sin(0) \\ \sin(0) & \cos(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(1) & -\sin(1) \\ \sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(1) & -\sin(1) \\ \sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix}$$

Beispiel nicht  
richtig. Es muss  
für allgemeine  
Werte bewiesen  
werden.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(1) & -\sin(1) \\ \sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -\cos(1) & \sin(1) \\ -\sin(1) & -\cos(1) \end{pmatrix}$$

rechte Seite

$$\begin{pmatrix} \cos(\pi) & -\sin(\pi) \\ \sin(\pi) & \cos(\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(0) & -\sin(0) \\ \sin(0) & \cos(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(1) & -\sin(1) \\ \sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(1) & -\sin(1) \\ \sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(1) & -\sin(1) \\ \sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(1) & \sin(1) \\ -\sin(1) & -\cos(1) \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

### Aufgabe 2.1 (3)

- neutrales Element

Das neutrale Element dieser Gruppe  
ist die Matrix  $a \in M$

$$a : \{a \in M \mid a = 0\}$$

$$\Rightarrow a = \begin{pmatrix} \cos(0) & -\sin(0) \\ \sin(0) & \cos(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

$\Rightarrow E_2 \in M$  Die Einheitsmatrix ist das neutrale  
Element der Matrixmultiplikation in  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$

Da  $M$  abgeschlossen ist können wir behaupten, daß  
 $M \subseteq \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

Somit ist  $a$  das neutrale Element der Multiplikation in  $M$

- Inverses Element

wir invertieren die Matrix

$$\left( \begin{array}{cc|cc} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\text{M}_2 / \sin(\alpha)} \left( \begin{array}{cc|cc} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 1 & 0 \\ 1 & \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} & 0 & \frac{1}{\sin(\alpha)} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\text{M}_2, \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}} \left( \begin{array}{cc|cc} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 1 & 0 \\ \cos(\alpha) & \frac{\cos^2(\alpha)}{\sin(\alpha)} & 0 & \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \end{array} \right)$$

?!

(A)

$$\Delta_{2,2,1} \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|cc} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)}{\sin(\alpha)} & 0 & \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \end{array} \right)$$

$$M_1, \frac{1}{\cos(\alpha)} \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} & \frac{1}{\cos(\alpha)} & 0 \\ 0 & \frac{\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)}{\sin(\alpha)} & 0 & \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \end{array} \right)$$

$$M_2, \frac{\sin(\alpha)}{-\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)} \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} & \frac{1}{\cos(\alpha)} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} - \frac{\sin(\alpha)}{-\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)} \end{array} \right)$$

$$M_1, -\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -\sin^{-1}(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\cos(\alpha) - \sin^2(\alpha)} \end{array} \right)$$

$$A_{1,2,1} \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{\sin(\alpha)} & -\frac{1}{\cos(\alpha) - \sin^2(\alpha)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\cos(\alpha) - \sin^2(\alpha)} \end{array} \right)$$

Das inverse Element für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist

$$\left( \begin{array}{cc} -\sin^{-1}(\alpha) & -\frac{1}{\cos(\alpha) - \sin^2(\alpha)} \\ 0 & \frac{1}{\cos(\alpha) - \sin^2(\alpha)} \end{array} \right) \quad \checkmark$$

Ist diese Matrix  $\in M^2$ ?

Somit ist  $(M, \circ)$  eine Gruppe  $\square$

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix}$$

(5)

Ist diese Gruppe Abelsch?

Wir wollen zeigen ob, für  $a, b \in H$

$a \cdot b = b \cdot a$  gilt.

Serien  $A, B \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow a := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

linke Seite

$$a \cdot b = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (\cancel{\cos(\alpha)\cos(\beta)} + \cancel{\sin(\alpha)\sin(\beta)}) \cancel{-\cos(\alpha)\sin(\beta) - \sin(\alpha)\cos(\beta)} \\ &\quad \cancel{+ \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) & \cancel{-\cos(\alpha)\sin(\beta) - \sin(\alpha)\cos(\beta)} \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) & \cancel{-\sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)} \end{pmatrix}$$

rechte Seite

$$b \cdot a = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\beta)\cos(\alpha) - \sin(\beta)\sin(\alpha) & \cancel{-\cos(\beta)\sin(\alpha) + \sin(\beta)\cos(\alpha)} \\ \sin(\beta)\cos(\alpha) + \cos(\beta)\sin(\alpha) & \cancel{-\sin(\beta)\sin(\alpha) + \cos(\beta)\cos(\alpha)} \end{pmatrix} \checkmark$$

Die Gruppe  $(H, \cdot)$  ist Abelsch.  $\square$

2/4

## 4.2 ii

### 4.2.1 a

#### Aufgabe 4

ii)

a)

$$X = \mathbb{R}^{3 \times 3}, V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \alpha, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

• ist die Multiplikation von Matrizen.

Seien  $a, b \in V$  mit  $\alpha, \beta, \mu, \nu \in \mathbb{R}$

$$a := \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 1 & \mu & 0 \\ 0 & 1 & \nu \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a \cdot b = \begin{pmatrix} 1 & \mu + \alpha & \alpha \nu \\ 0 & 1 & \beta + \nu \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a \cdot b$  ist ~~immer~~ element von  $V$  nur im Fall, dass

~~$\alpha = 0$  oder  $\beta = 0$  oder  $\mu = 0$  oder  $\nu = 0$~~ , also ist die

Gruppe  $(V, \cdot)$  nicht abgeschlossen.

Ist keine Gruppe, da nicht abgeschlossen.

3/4

4.2.2 b

Aufgabe 4

②

ii)

b)  $X = \mathbb{R}$ ,  $U = \{r+s\sqrt{2} \mid r, s \in \mathbb{Q}, (r,s) \neq 0,0\}$

• ist die Multiplikation auf  $\mathbb{R}$

Wählen wir zwei Elemente aus  $U$ .

~~a + b $\sqrt{2}$~~ :

$$a(a,b) = a + b\sqrt{2} \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}$$

$$b(c,d) = c + d\sqrt{2} \quad \text{mit } c, d \in \mathbb{R}$$

$$a \cdot b = (a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2})$$

$$\begin{aligned} &= ac + ad\sqrt{2} + cb\sqrt{2} + bd\sqrt{2}\sqrt{2} \\ &= ac + ad\sqrt{2} + cb\sqrt{2} + 2bd \end{aligned}$$

$$= ac + \sqrt{2}(ad + cb) + 2bd$$

$$= (ac + 2bd) + (\sqrt{2}(ad + cb))\sqrt{2}$$

Das Produkt  $a \cdot b \in U$ , also ist die Gruppe zeige, dass es eine Gruppe ist.

$(U, \cdot)$  abgeschlossen

1/4