



1 Lineare Algebra Tutorium 2

Andrea Colarieti Tosti

1.1 Aufgabe 1

Aufgabe 1

①

i) $B + E$

~~•~~ $D \times F$ $B \times A$ $E \times A$ $C \times E$ $C \times F$

$A^{m \times n} + B^{n \times p}$ ist möglich wenn $m = 0 \wedge n = p$

~~$A^{m \times n} \times B^{n \times p}$ ist möglich wenn $n > 0$~~
Anzahl Spalten A = Anzahl Zeilen B

~~22. kommutativ wenn $n = m = 0 = p$~~

ii)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 4 & 16 & 2 \\ 2 & 14 & 10 \\ 6 & 36 & 13 \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 4 & 30 & 24 \\ 3 & 3 & 12 \\ 16 & 10 & 22 \end{pmatrix}$$

Kein Rechenweg + Fehler = 0 Punkte

Aufgabe 1

(2)

iii)

a) $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Es sind die Einheitsvektoren gesucht

b) $B = (1 \ 1 \ 1)$ $B \cdot A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

Es sind die transponierten Einheitsvektoren gesucht

Kein Beweis + falsches Ergebnis = 0 Punkte

1.2 Aufgabe 3

Aufgabe 3 ①

Sei $A^{n \times m} \in K$ eine Matrix und $b \in K$ ein Vektor,

$$(A|b) := \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \quad n, m \in \mathbb{N}$$

Seien $k, l \in \mathbb{N}$ sodass $1 \leq k < l \leq n$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{k1} & \dots & a_{ln} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{kl} & \dots & a_{lm} & b_m \end{array} \right)$$

Die Spalten von $(A|b)$ können mit einer Multiplikation $\cdot C$ ~~so~~ ~~so~~ sodass $(A|b) \cdot C = (A|b)_{\text{vert.}}$

Die Matrix C muss die Dimension ~~$n+1$~~ ~~haben~~ und ~~$n+1 \times n+1$~~ haben, und die Einheitsmatrix mit Vertauschung k nach l sein.

Du hast die Idee dieser Aufgabe nicht verstanden! Diese Matrixmultiplikation gibt es zwar, funktioniert auch so ähnlich, ist hier aber nicht gefragt! Aufgabe war es A und M so zu verknüpfen dass V entsteht!!!

Sei E die Einheitsmatrix

$$E = \begin{pmatrix} & k & l \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots \\ \vdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow

$$(A|b) \times C = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{km} & a_{1m} & b_m \end{array} \right)$$

1.3 Aufgabe 4

Aufgabe 4

①

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \text{Sei } B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad B \in \mathbb{R}^3 \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow B^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix} \quad n \in \mathbb{N}$$

Wir beweisen die Vermutung per Induktion.

i) Induktionsanfang $n=0$

Induktion sollte bei 1 beginnen, da 0 nicht in den natürlichen Zahlen enthalten ist. Du hast Glück, dass der IA auch für 0 klappt und du so eine allgemeinere Aussage beweisen kannst.

$$B^0 = \begin{pmatrix} a^0 & 0 & 0 \\ 0 & b^0 & 0 \\ 0 & 0 & c^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

ii) Induktionsschritt $n \mapsto n+1$

• Annahme:

$$B^{n+1} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & b^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{n+1} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

(2)

$$B^{n+1} = B^n + \tilde{B} = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a^n \cdot a & 0 & 0 \\ 0 & b^n \cdot b & 0 \\ 0 & 0 & c^n \cdot c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & b^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{n+1} \end{pmatrix}$$