Dozent: Dr. Peter Philip Wintersemester 2018/19
Assistenten: Markus Nöth, Kilian Rückschloss, Pascal Stucky

Lineare Algebra 1
Lösungsvorschlag zu Hausaufgabenblatt 1

Aufgabe 1 (10 Punkte) Beweisen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln folgende Regeln der Aussagenlogik:

a) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$.

Beweis (4 Punkte):

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	T	T

(1)

Die Aussage ist wahr, da die letzten beiden Spalten übereinstimmen. □

b) $(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$.

Beweis (6 Punkte):

A	B	C	$A \Leftrightarrow B$	$B \Rightarrow C$	$(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$	$A \Rightarrow C$	$(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	F	T	T
F	T	F	F	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

(2)

Somit ist die Aussage allgemeingültig, unabhängig von der Wahl von A, B und C. □

Aufgabe 2 (10 Punkte) In jeder der folgenden Situationen a) – e) beantworten Sie bitte die Frage und beweisen die Richtigkeit Ihrer Antwort durch ein logisch einwandfreies Argument.

Zwiddeldum und Zwiddeldei

(aus R. Smullyan: *Wie heißt dieses Buch?*, Vieweg Verlag, 1981)

Der Löwe und das Einhorn blieben dem Wald des Vergessens einen Monat lang fern. Sie waren irgendwo und kämpften eifrig für die Krone.
Jedoch waren Zwiddeldum und Zwiddeldei häufige Besucher des Waldes. Nun ist einer der beiden wie der Löwe; er lügt am Montag, Dienstag und Mittwoch und sagt an den anderen Wochentagen die Wahrheit. Der andere ist wie das Einhorn; er lügt donnerstags, freitags und samstags, aber sagt an den anderen Tagen der Woche die Wahrheit. Alice wußte nicht, welcher der beiden wie der Löwe und welcher wie das Einhorn war. Um die Sache noch schlimmer zu machen, sahen die Brüder einander so ähnlich, dass Alice sie nicht einmal voneinander unterscheiden konnte (es sei denn, sie trugen ihre bestickten Kragen, was sie selten taten). So fand die arme Alice die Situation in der Tat höchst verwirrend! Hier sind einige von Alices Erlebnissen mit Zwiddeldum und Zwiddeldei.

a) Eines Tages traf Alice die beiden Brüder, und sie stellten folgendes fest:
Erster: Ich bin Zwiddeldum.

Zweiter: Ich bin Zwiddeldei.
Wer war wirklich Zwiddeldum, und wer war Zwiddeldei?

Antwort: *Der erste ist Zwiddeldum, der zweite Zwiddeldei.*

Beweis (2 Punkte): *Zunächst überlegt man sich, dass Sonntag ist: Wäre nicht Sonntag, so würde genau einer von beiden lügen, das heißt, beide wären die selbe Person. Da also Sonntag ist, sagen beide die Wahrheit und der Erste ist Zwiddeldum und der Zweite Zwiddeldei.* ☐

b) An einem anderen Tag der gleichen Woche machten die beiden Brüder die folgenden Aussagen:
Erster: Ich bin Zwiddeldum.
Zweiter: Wenn das wirklich wahr ist, dann bin ich Zwiddeldei!
Wer war wer?

Antwort: *Der Erste ist Zwiddeldei, und der Zweite ist Zwiddeldum.*

Beweis (2 Punkte): *Da nicht Sonntag ist, lügt genau einer von beiden. Würde der Erste die Wahrheit sagen, so wäre er Zwiddeldum, und der Zweite würde lügen und wäre somit ebenfalls Zwiddeldum. Da nicht beide die selbe Person sind, muss der Erste lügen. Also ist der Erste Zwiddeldei und der Zweite Zwiddeldum.* ☐

c) Bei einer anderen Gelegenheit machten die Brüder folgende Aussagen:
Erster: Ich lüge samstags (1). Ich lüge sonntags (2).
Zweiter: Ich werde morgen lügen.
An welchem Wochentag geschah das?

Antwort: *Es geschah am Mittwoch.*

Beweis (2 Punkte): *Wegen (2) ist klar, dass der Erste lügt. Aus (1) folgt dann, dass der Erste samstags nicht lügt. Da nicht beide gleichzeitig lügen, folgt, dass der Zweite die Wahrheit sagt und außerdem am Samstag lügt. Somit lügt der Zweite am Donnerstag, Freitag und Samstag. Da er heute die Wahrheit sagt und morgen lügt, muss es Mittwoch sein.* ☐

d) Eines Tages traf Alice zufällig nur einen der Brüder. Er stellte folgendes fest: „Ich lüge heute, und ich bin Zwiddeldei."
Wer hat das gesagt?

Antwort: *Zwiddeldum hat das gesagt.*

Beweis (2 Punkte): *Wäre die Aussage wahr, so müsste er lügen, dass heißt, die Aussage müsste falsch sein, was einen Widerspruch darstellt. Also ist die Aussage falsch, was bedeutet, er lügt. Daraus folgt, dass der zweite Teil der Aussage falsch sein muss, und er ist Zwiddeldum.* ☐

e) Nehmen wir an, er hätte in d) stattdessen gesagt: „Ich lüge heute oder ich bin Zwiddeldei."
Läßt sich feststellen, wer er war?

Antwort: *Ja, und zwar war er Zwiddeldei.*

Beweis (2 Punkte): *Wäre die Aussage falsch, so müssten beide Teile falsch sein, und er würde heute nicht lügen, im Widerspruch zur Falschheit der Aussage. Also ist die Aussage wahr. Also lügt er nicht, und der erste Teil der Aussage ist falsch. Also muss der zweite Teil wahr sein, und er ist Zwiddeldei.* ☐

Aufgabe 3 (10 Punkte) (geht zurück auf den Text von R. Smullyan *Dame oder Tiger?*, S. Fischer Verlags GmbH, 1983)

Ein Gefangener hat unter neun Räumen zu wählen. Ein Raum enthält ein Pferd (zum Ritt in die Freiheit), die andern sind entweder leer, oder ein Tiger befindet sich darin. Jeder Raum ist mit einer Inschrift versehen; diejenige am Raum mit dem Pferd ist wahr, diejenigen an den Tigerräumen sind falsch, die anderen können wahr oder auch falsch sein.

Inschrift Raum I: Das Pferd ist in einem Raum mit ungerader Nummer.

Inschrift Raum II: Dieser Raum ist leer.

Inschrift Raum III: Inschrift V ist richtig oder Inschrift VII ist falsch.

Inschrift Raum IV: Inschrift I ist falsch.

Inschrift Raum V: Inschrift II ist richtig oder Inschrift IV ist richtig.

Inschrift Raum VI: Inschrift III ist falsch.

Inschrift Raum VII: Das Pferd ist nicht in Raum I.

Inschrift Raum VIII: In diesem Raum ist ein Tiger und Raum IX ist leer.

Inschrift Raum IX: In diesem Raum ist ein Tiger und Inschrift VI ist falsch.

Der Gefangene studiert das Problem und sagt ärgerlich: „Unfair, unlösbar!“„Ja, ja“, amüsiert sich der König. „Sehr lustig“, erwidert der Gefangene. „Könnten Sie, Herr König, mir nicht einen Tip geben. Ist Raum VIII leer oder nicht?“ Der König entsprach der Bitte, und der Gefangene fand die Freiheit.

Beweisen Sie, dass aus der Information, dass Raum VIII nicht leer ist folgt, dass sich das Pferd in Raum VII befindet.

Beweis (10 Punkte): *Da Raum VIII nicht leer ist, muss darin ein Pferd oder ein Tiger sein. Ein Pferd kann es nicht sein, da dann die Inschrift wahr sein, und der Raum einen Tiger enthalten müsste. Also enthält Raum VIII einen Tiger und die Inschrift muss falsch sein, das heißt, der zweite Teil der Aussage muss falsch sein. Also ist Raum IX nicht leer. Wie bei Raum VIII folgt dann auch bei Raum IX, dass der Raum einen Tiger enthalten muss. Damit ist die Inschrift von Raum IX falsch, also der zweite Teil der Aussage falsch, also die Inschrift von Raum VI richtig. Somit ist die Inschrift von Raum III falsch. Dies bedeutet, dass beide Teile der Aussage falsch sein müssen; die Inschrift von Raum V ist falsch, und die Inschrift von Raum VII ist richtig. Da die Inschrift von Raum V falsch ist, müssen beide Teile der Aussage falsch sein, dass heißt, Inschrift II muss falsch sein, und Inschrift IV muss auch falsch sein. Da Inschrift IV falsch ist, muss Inschrift I richtig sein, und das Pferd ist in einem Raum mit ungerader Nummer.*

Das Pferd ist also nicht in II, IV, VI, VIII. Das Pferd ist auch nicht in I (da Inschrift VII richtig ist) und auch nicht in III, V, IX (die Inschriften dieser drei Räume haben wir bereits als falsch entlarvt). Somit bleibt für das Pferd nur noch Raum VII übrig. □

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Zwei Kinder, Ina und Erwin, essen griechische Buchstabensuppe. Bei Ina befinden sich nur noch ein α und ein β in der Suppe. Erwins Suppe besteht noch aus jeweils einem β, γ und δ. Dies motiviert die nachfolgenden Mengen $I := \{\alpha, \beta\}$ und $E := \{\beta, \gamma, \delta\}$.

a) (7 Punkte) Bestimmen Sie, ob es sich um wahre Aussagen handelt:
   (aa) $I \subseteq E$,
   (ab) $I = E$,
   (ac) $I \neq E$,
   (ad) $\{\beta, \delta\} \subseteq E$,
   (ae) $\beta \in I$,
   (af) $\gamma \subseteq E$,
   (ag) $\{\beta, \{\gamma, \delta\}\} \subseteq E$.

b) (3 Punkte) Betimmen Sie die Mengen
   (ba) $I \cap E$,
   (bb) $I \cup E$,
   (bc) $\mathcal{P}(E)$.

Lösung:

(aa) Falsche Aussage, da $\alpha \in I$, aber $\alpha \notin E$.
(ab) Falsche Aussage, da $\alpha \in I$, aber $\alpha \notin E$.
(ac) Wahre Aussage, da $\alpha \in I$, aber $\alpha \notin E$.
(ad) Wahre Aussage, da $\beta \in E$ und $\delta \in E$.
(ae) Wahre Aussage, da $\beta \in I$ nach Definition von I.
(af) Keine Aussage, da der Ausdruck nicht sinnvoll ist ($\subseteq$ ist nur für Mengen definiert, aber γ ist keine Menge).
(ag) Falsche Aussage, da $\{\gamma, \delta\} \notin E$.

(ba) $I \cap E = \{\beta\}$.
(bb) $I \cup E = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$.
(bc) $\mathcal{P}(E) = \Big\{\emptyset, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\delta\}, \{\beta, \gamma\}, \{\gamma, \delta\}, \{\beta, \delta\}, E\Big\}$.