Prof. Dr. K. Doerk
Christian Sevenheck
Thorsten Warmt

15.2.2002

Lineare Algebra I
Lösungen der zweiten Klausur

1. (a) Es handelt sich um den Kern der (bezüglich der Standardbasen) durch die Matrix $(5\ \ 3\ \ -1)$ gegebenen Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}$. Deshalb ist es ein Untervektorraum.

   (b) Es handelt sich um einen Untervektorraum, die Begründung ist dieselbe wie im letzten Beispiel, die darstellende Matrix liegt hier in $\mathbb{C}_{1,3}$.

   (c) Betrachtet man $\mathbb{R}[x]$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum, dann ist die Teilmenge $\mathbb{Q}[x]$ kein Untervektorraum, denn Multiplikation eines Polynoms aus $\mathbb{Q}[x]$ mit einer reellen Zahl ergibt im allgemeinen kein Polynom aus $\mathbb{Q}[x]$, d.h., $\mathbb{Q}[x]$ ist nicht abgeschlossen unter Skalarmultiplikation.

   (d) Die angegebene Menge ist die Menge der sogenannten oberen Dreiecksmatrizen, d.h., der Matrizen, bei denen die Einträge unterhalb der Diagonale alle gleich Null sind. Addiert man zwei solcher Matrizen, oder multipliziert man eine obere Dreiecksmatrix mit einem Skalar, dann erhält man wieder eine obere Dreiecksmatrix. Also liegt ein Untervektorraum vor.

   (e) Die gegebene Teilmenge ist das Urbild von $1 \in \mathbb{C}$ unter der durch die Matrix $(2\ \ i)$ gegebenen linearen Abbildung von $\mathbb{C}^2$ nach $\mathbb{C}$. Solche sogenannten affinen Unterräume sind nie Untervektorräume, denn sie enthalten nicht die Null, was man auch durch Einsetzen feststellen kann: $2 \cdot 0 + i \cdot 0 = 0 \neq 1$.

   (f) Diese Teilmenge ist auch kein Untervektorraum, denn die Punkte $(1,1) \in \mathbb{R}^2$ und $(1,-1) \in \mathbb{R}^2$ gehören zu ihr, die Summe $(1,1) + (1,-1) = (2,0) \in \mathbb{R}^2$ aber nicht.

   (g) Die Lösungsmenge der Gleichung $a^2 + b^2 = 0$ besteht über $\mathbb{R}$ nur aus dem einen Punkt $(0,0) \in \mathbb{R}^2$. Dies ist der triviale (null-dimensionale) Vektorraum, also ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

2. (a) Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q}^2 \arrow[r, "\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}"] & \mathbb{Q} \\
\mathbb{Q}^2 \arrow[u, "\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}"] \arrow[r, "{}_{\mathcal{B}_1}\mathrm{ADD}_{\mathcal{B}_2}"'] & \mathbb{Q} \arrow[u, "(2)"']
\end{tikzcd}$$

   gibt die entsprechenden Basiswechsel, damit gilt

$${}_{\mathcal{B}_1}\mathrm{ADD}_{\mathcal{B}_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Dieses Ergebnis ist natürlich auch sofort abzulesen, in den Spalten der darstellende Matrix stehen die halbierten Summen der Einträge der entsprechenden Basisvektoren.

   (b) Der Kern ist daraus sofort abzulesen, er ist $\mathbb{Q}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Schon aus Dimensionsgründen ist das Bild also ganz $\mathbb{Q}$.

3. (a) Die Identität und das Transponieren von Matrizen sind nach Vorlesung lineare Abbildungen. Entsprechendes gilt für Summen und skalare Vielfache linearer Abbildungen. Transponieren einer 2×2-Matrix ergibt wieder eine solche.

(b) SYM angewandt auf symmetrische Matrizen lässt diese unverändert. Weiterhin gilt

$$\mathrm{SYM}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{SYM}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Damit gilt für die darstellende Matrix

$$_{\mathcal{E}}\mathrm{SYM}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Der Rang ist obiger darstellender Matrix sofort als $r = 3$ zu entnehmen.

(d) Der Kern wird von den schiefsymmetrischen Matrizen gebildet, eine Basis des Kerns ist

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Ergänzt werden kann die Basis nun mit symmetrischen Matrizen, es ist einfach

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

4. Wir bestimmen zunächst die darstellende Matrix $_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}}$ von Φ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$: Die Spalten der Matrix sind die Koeffizienten der Bilder der v_i in der Basis $\mathcal{B}$, also

$$_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a+b & b & b & \dots & b \\ b & a+b & b & \dots & b \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ b & \dots & b & a+b & b \\ b & b & \dots & b & a+b \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$(_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}})^2 = \begin{pmatrix} A & B & B & \dots & B \\ B & A & B & \dots & B \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ B & \dots & B & A & B \\ B & B & \dots & B & A \end{pmatrix}$$

mit $A := (a+b)^2 + (n-1)b^2$ und $B := 2ab + nb^2$. Wir definieren nun die folgende Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \Lambda : k^2 & \longrightarrow & (k)_n \\ (x,y) & \longmapsto & M_{x,y} \end{array}$$

mit

$$M_{x,y} := \begin{pmatrix} x & y & y & \dots & y \\ y & x & y & \dots & y \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ y & \dots & y & x & y \\ y & y & \dots & y & x \end{pmatrix}$$

Man rechnet nach, dass Λ ein Homomorphismus von k-Vektorräumen ist. Außerdem ist Λ injektiv: Falls $\Lambda(x,y) = 0 \in (k)_n$ ist, also einen Vektor (x,y) auf die Nullmatrix abgebildet wird, dann war natürlich schon $x = y = 0$. Offensichtlich sind $_{\mathcal{B}}Id_{\mathcal{B}}$, $_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}}$ und $_{\mathcal{B}}\Phi^2_{\mathcal{B}}$ Elemente im Bild von Λ. Nach der Dimensionsformel ist $\dim(Im(\Lambda)) = \dim(k^2) - \dim(Ker(\Lambda)) = 2$, also liegen die drei Vektoren Id, Φ und Φ^2 in einem zweidimensionalen Unterraum von $End_k(V)$ und sind deshalb linear abhängig.

5. (a) Wir rechnen die Axiome für lineare Abbildungen von Vektorräumen nach. Seien $P, Q \in k[t]$ Polynome, dann ist die Abbildung $\Phi(P+Q)$ gegeben durch: $a \mapsto (P+Q)(a) = P(a)+Q(a) = \Phi(P)(a) + \Phi(Q)(a) = (\Phi(P) + \Phi(Q))(a)$. Ist andererseits $P \in k[t]$ und $c \in k$, dann haben wir $\Phi(cP)(a) = c \cdot P(a) = (c \cdot \Phi(P))(a)$. Also ist Φ ein Vektorraumhomomorphismus.

(b) Ein einfaches Argument wäre, dass die Dimension von $\mathrm{Abb}(k,k)$ endlich, die von $k[t]$ aber unendlich ist. Man kann aber auch explizit ein von Null verschiedenes Element des Kerns angeben: Betrachte das folgende Polynom $P \in k[t]$:

$$P(t) = \prod_{x\in k}(t-x)$$

Offensichtlich ist $P(x) = 0$ für alle $x \in k$, d.h., die durch P beschriebene Abbildung $\Phi(P) \in \mathrm{Abb}(k,k)$ ist die Nullabbildung, also $P \in Ker(\Phi)$. Andererseits ist der Grad von P gleich der Ordnung von k (die Anzahl der Elemente von k), diese ist ungleich Null, also ist P nicht das Nullpolynom. Übrigens sieht man auch, dass jedes Vielfache von P, also jedes Polynom der Form $P \cdot Q$ mit $Q \in k[t]$ beliebig, ein Element des Kerns von Φ ist.

(c) Man berechnet $P_y(a)$ für $a \in k$ einfach durch Einsetzen: Falls $a = y$, dann ist

$$P_y(y) = \prod_{x\in k\setminus\{y\}} \frac{y-x}{y-x} = 1$$

Ist andererseits a aus k beliebig aber ungleich y, dann existiert im Zähler von $\prod_{x\in k\setminus\{y\}} \frac{t-x}{y-x}$ ein Faktor der Form $t-a$, denn das Produkt wird über alle Elemente des Körpers *ungleich* y genommen. Beim Einsetzen von a in $P_y(t)$ wird dieser Faktor zu $a-a$, also zu Null, deshalb wird das gesamte Polynom an dieser Stelle Null. Also $P_y(a) = 0$ für $a \neq y$.

(d) Sei eine Abbildung $f \in \mathrm{Abb}(k,k)$ gegeben. Dann setzen wir

$$P_f(t) := \sum_{y\in k} f(y) \cdot P_y(t)$$

Nach der letzten Aufgabe ist $P_y(x) = 0$ falls $x \neq y$ und $P_y(y) = 1$. Dann folgt: $f(y) \cdot P_y(x) = 0$ für $x \neq y$ und $f(y) \cdot P_y(y) = f(y)$. Somit gilt $P_f(y) = f(y)$ für alle $y \in k$. Das aber bedeutet, dass $\Phi(P_f)$ genau die gegebene Abbildung $f \in \mathrm{Abb}(k,k)$ ist, d.h., P_f ist das Urbild von f unter Φ. Insbesondere ist Φ surjektiv.