

Lineare Algebra – Übungen mit Lösungen

Vorkurs Mathematik 2017, RWTH Aachen

— Aufgaben zum 1. Kapitel (Vektorrechnung) —

1. Vorlesung

Aufgabe 1

Im \mathbb{R}^3 sind die Punkte $P = (1; 2; 1)$, $Q = (0; 2; \frac{1}{2})$, $R = (-2; 0; -1)$ gegeben.

- Bestimmen Sie die Ortsvektoren \vec{p} , \vec{q} und \vec{r} der drei Punkte, sowie sämtliche Verbindungsvektoren \vec{PQ} , \vec{QP} , \vec{PR} etc.
- Welche dieser neun Vektoren sind Vielfache voneinander?
- Rechnen Sie nach, dass für diese Vektoren die Gleichung $\vec{q} + 3\vec{QP} = \vec{RP}$ gilt.

Lösung:

- $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, sowie

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \vec{QP} = -\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \vec{RP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -\vec{PR}, \vec{RQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = -\vec{QR}.$$

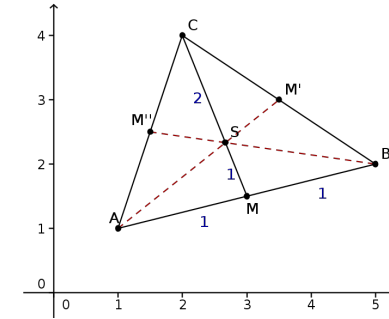
- Außer den generellen Vielfachen $\vec{PQ} = -\vec{QP}$ etc. gilt in diesem Fall noch $\vec{r} = 2 \cdot \vec{PQ}$.
- $\vec{q} + 3 \cdot \vec{QP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{RP}$.

Aufgabe 2

Im \mathbb{R}^2 sind die Punkte $A = (1; 1)$, $B = (5; 2)$ und $C = (2; 4)$ gegeben (vgl. Abbildung).

- Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M der Strecke AB .
- Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes S auf der Strecke MC , der von C doppelt so weit entfernt ist wie von M .
- Zeigen Sie, dass S auch auf der Strecke zwischen A und dem Mittelpunkt M' der Strecke BC liegt, und zwar doppelt so weit von A entfernt wie von M' .
- Zeigen Sie, dass S auch auf der Strecke zwischen B und dem Mittelpunkt M'' der Strecke AC liegt, und zwar doppelt so weit von B entfernt wie von M'' .

- e*) Sind c) und d) spezielle Eigenschaften der drei gewählten Punkte, oder gelten Sie für beliebige Punkte A , B und C ?



Lösung:

- $\vec{m} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$,
- $\vec{s} = \vec{m} + \frac{1}{3}\vec{MC} = \begin{pmatrix} 8/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}$.
- $\vec{m}' = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{BC} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{m}' + \frac{1}{3}\vec{M'A} = \begin{pmatrix} 8/3 \\ 7/3 \end{pmatrix} = \vec{s}$.
- $\vec{m}'' = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{AC} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$ und $\vec{m}'' + \frac{1}{3}\vec{M''B} = \begin{pmatrix} 8/3 \\ 7/3 \end{pmatrix} = \vec{s}$.

- e*) Diese Aussage gilt allgemein, denn

$$\vec{m} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}).$$

Und daher

$$\vec{s} = \vec{m} + \frac{1}{3}(\vec{c} - \vec{m}) = \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{2}{3}\vec{m} = \frac{1}{3}(\vec{c} + \vec{a} + \vec{b}).$$

Letzter Ausdruck bleibt derselbe, wenn man \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} vertauscht, weshalb die Aussagen c) und d) in jedem Dreieck gelten.

Bemerkung: S ist der sogenannte Schwerpunkt des Dreiecks ABC .

Aufgabe 3

Im \mathbb{R}^3 sind die Punkte $P = (1; 2; 1)$, $Q = (0; 2; \frac{1}{2})$, $R = (-2; 0; -1)$ gegeben.

- Bestimmen Sie den Punkt Q' , den man erhält, wenn man Q an P spiegelt.
- Bestimmen Sie den Punkt R' , den man erhält, wenn man R an P spiegelt.

c) Rechnen Sie nach, dass $\overrightarrow{Q'R'} = -\overrightarrow{QR}$ gilt.

d*) Zeigen Sie, dass c) für beliebige Punkte P, Q und R gilt.

Lösung:

a) $\overrightarrow{PQ'} = -\overrightarrow{PQ}$, also

$$\vec{q}' = \vec{p} + \overrightarrow{PQ'} = \vec{p} - \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0-1 \\ 2-2 \\ \frac{1}{2}-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) $\vec{r}' = \vec{p} - \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2-1 \\ 0-2 \\ -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$

c) $\overrightarrow{Q'R'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$

d*) Nach Rechnung gilt allgemein:

$$\overrightarrow{Q'R'} = \vec{r}' - \vec{q}' = (\vec{p} - (\vec{r} - \vec{p})) - (\vec{p} - (\vec{q} - \vec{p})) = -\vec{r} + \vec{q} = -\overrightarrow{QR}.$$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie jeweils eine Parameterform der Geraden durch die gegebenen Punkte.

a) $(2; 2; -3)$ und $(4; 0; 1)$, b) $(7; 8; 3)$ und $(5; 5; 2)$, c) $(2; 1)$ und $(2; 4)$.

Lösung:

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}$ oder auch $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\},$

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}$ oder auch $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}.$

c) z.B. $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}.$

Aufgabe 5

Untersuchen Sie jeweils, ob die drei Punkte auf einer Geraden liegen.

a) $(3; 2; -4)$ und $(1; 1; 0)$ sowie $(7; 4; 8)$,

b) $(1; 1; 0)$ und $(3; -3; 2)$ sowie $(4; -5; 3)$,

c) $(2; -5; 2)$ und $(1; -2; 4)$ sowie $(3; -7; 6)$.

Lösung:

a) nein, b) ja, c) nein.

Aufgabe 6

Bestimmen Sie eine Parameterform der Ebene, welche die angegebenen Punkte bzw. Geraden enthält.

a) $(1; 0; 1)$ und $(5; 2; -1)$ sowie $(1; -3; 0)$,

b) $(3; 2; 2)$ und $(4; 3; 3)$ sowie $(4; 3; 4)$,

c) $(0; 1; 0)$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\},$

Lösung:

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R} \right\}$ oder auch $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R} \right\},$

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R} \right\}$ oder auch $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R} \right\},$

c) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R} \right\},$

Aufgabe 7

Untersuchen Sie jeweils, ob die gegebenen Vektoren Vielfache voneinander sind.

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix},$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$ c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix},$ d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Lösung:

a) keine Vielfachen, b) zweiter ist das 0-fache des ersten, c) zweiter ist das $-\frac{3}{2}$ -fache des ersten, d) keine Vielfachen.

— Aufgaben zum 2. Kapitel (Matrizen, Grundlagen der Matrixrechnung) —

Aufgabe 8

Geben Sie die folgenden Matrizen A explizit an.

a) $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit $a_{ij} = i \cdot j$ für alle $i, j \in \{1, 2, 3\}.$

b) $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit $a_{ij} = i^j$ (die j -te Potenz von i) für alle $i, j \in \{1, 2, 3\}.$

c) $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ mit $a_{ij} = i - j$ für alle $i \in \{1, 2\}$ und $j \in \{1, 2, 3\}.$

d) $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ mit $a_{ij} = (i + 1) \cdot (j - 2)$ für alle $i \in \{1, 2, 3\}$ und $j \in \{1, 2, 3, 4\}.$

Lösung:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix},$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{pmatrix},$ c) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & 3 & 6 \\ -4 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$

Aufgabe 9

Wie lauten die Einträge $(2,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$, $(1,1)$ beziehungsweise $(3,1)$ (falls sie existieren) der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 18 & 6 \\ \frac{1}{2} & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 & 9 \\ 8 & 1 & \frac{1}{4} & 13 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}?$$

Lösung:

Es gilt

1. $a_{21} = 7$, $a_{12} = 3$, $a_{23} = 6$, $a_{11} = 1$, $a_{31} = \frac{1}{2}$
2. $b_{21} = 8$, $b_{12} = 0$, $b_{23} = \frac{1}{4}$, $b_{11} = 7$. Der Eintrag b_{31} existiert nicht.
3. $c_{21} = 1$, $c_{12} = 0$, $c_{11} = 12$. Die Einträge c_{23} und c_{31} existieren nicht.

Aufgabe 10

Welche der folgenden Matrizen sind gleich?

- $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit $a_{ij} = i \cdot j$
- $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit $b_{ij} = i + j$
- $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit $c_{ij} = \max\{i, j\}$
- $D = (d_{ij}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit $d_{ij} = \frac{i+j}{2} + \frac{|j-i|}{2}$
- $E = (e_{ij}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit $e_{ij} = i \cdot \left(\frac{i-1}{j+1} + 1\right)$
- $F = (f_{ij}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit $f_{ij} = (i+1) + (j-1)$

Argumentieren Sie geschickt.

Lösung:

Zur Gleichheit: Es gilt $A = E$, $B = F$ und $C = D$. Es genügt, die Definitionen der Matrizen zu vergleichen. Die Gleichheit der Matrizen A und E sieht man ein, wenn man die dritte binomische Formel bei e_{ij} verwendet. Bei der Gleichheit der Matrizen B und F muss lediglich in den f_{ij} zusammengerechnet werden. Für die letzte Gleichheit muss man die Fälle unterscheiden, dass $j \geq i$ ist bzw. dass $j < i$ ist. Im ersten Fall ist nämlich $|j-i| = j-i$ und der Term bei d_{ij} vereinfacht sich zu j , und auch $\max\{i, j\}$ ist gleich j . Im zweiten Fall ist $|j-i| = i-j$ und der Term bei d_{ij} vereinfacht sich zu i , was wiederum gleich dem Maximum $\max\{i, j\}$ ist.

2. Vorlesung

Aufgabe 11

Berechnen Sie jeweils (sofern möglich) $A + B$ und $A - B$.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 9 \\ 5 & 8 & -6 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 3 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 7 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -5 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) nicht definiert,} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 9 & 2 & 9 \\ 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 \\ -5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12

Führen Sie jeweils die Skalarmultiplikation durch.

$$\text{a) } 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } (-3) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 8 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} -15 & 0 & 6 \\ -24 & 3 & -9 \\ 6 & -9 & 21 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 13

Bilden Sie – jeweils sofern möglich – alle Produkte von je zwei der folgenden Matrizen, also A^2 , AB , BA , B^2 , AC , CA , BC , CB , C^2 , ...

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

Es sind genau die folgenden Produkte definiert:

$$\begin{aligned}
 A^2 &= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, & AB &= \begin{pmatrix} 8 & 4 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, & AH &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & BD &= \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \\
 BE &= \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}, & BF &= \begin{pmatrix} 10 & 5 & -2 \\ -6 & 1 & 4 \end{pmatrix}, & CD &= \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}, & CE &= \begin{pmatrix} 9 & 0 \end{pmatrix}, \\
 CF &= \begin{pmatrix} 15 & 7 & -2 \end{pmatrix}, & DC &= \begin{pmatrix} 12 & 9 & -6 \\ -4 & -3 & 2 \\ 8 & 6 & -4 \end{pmatrix}, & DG &= \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ -4 & -1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}, \\
 EA &= \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & EB &= \begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & EH &= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & FD &= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}, \\
 FE &= \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & -2 \\ -7 & -6 \end{pmatrix}, & F^2 &= \begin{pmatrix} 8 & -2 & -4 \\ 1 & 11 & 4 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}, & GA &= \begin{pmatrix} 9 & -4 \end{pmatrix}, & GB &= \begin{pmatrix} 10 & 8 & -3 \end{pmatrix}, \\
 GH &= \begin{pmatrix} 1 & -4 \end{pmatrix}, & HA &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, & HB &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, & H^2 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Aufgabe 14

- a) Bestimmen Sie für welche Matrizen A und B sowohl das Produkt $A \cdot B$ als auch das Produkt $B \cdot A$ definiert ist.
- b) Geben Sie Beispiele von Matrizen A und B wie in a) an, für die $A \cdot B$ und $B \cdot A$ von verschiedenem Format sind (verschiedene Anzahlen Spalten bzw. Zeilen).
- c) Geben Sie Beispiele von Matrizen A und B wie in a) an, für die $A \cdot B$ und $B \cdot A$ zwar vom gleichen Format, aber nicht gleich sind.

Lösung:

- a) Genau dann sind beide Produkte definiert, wenn die Anzahl der Spalten von A gleich der Anzahl der Zeilen von B und die Anzahl der Spalten von B gleich der Anzahl der Zeilen von A ist.
- b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A \cdot B = (1)$, $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- c) $A = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$, $B \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 15

Beweisen Sie das Assoziativgesetz für die Matrixmultiplikation von reellen (2×2) -Matrizen.

Lösung:

Für Matrizen $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ und $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ gilt einerseits

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})c_{11} + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})c_{21} & (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})c_{12} + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})c_{22} \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})c_{11} + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})c_{21} & (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})c_{12} + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})c_{22} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \right) \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21} & b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} \\ b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} & b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11}(b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21}) + a_{12}(b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21}) & a_{11}(b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22}) + a_{12}(b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22}) \\ a_{21}(b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21}) + a_{22}(b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21}) & a_{21}(b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22}) + a_{22}(b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22}) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Ausmultiplizieren der Einträge zeigt, dass diese Matrizen gleich sind.

Aufgabe 16

Bildet die Menge der reellen $(n \times n)$ -Matrizen einen Körper? Geben Sie gegebenenfalls an, welche Regel(n) verletzt ist (sind).

Lösung:

Für $n = 1$ stimmt die Menge der (1×1) -Matrizen mit \mathbb{R} überein und \mathbb{R} ist nach der Grundlagen Vorlesung ein Körper. Gilt aber $n \geq 2$, so ist zum einen die Matrixmultiplikation nicht kommutativ, wie man zum Beispiel an folgenden Matrizen sieht (die sich beliebig auf $(n \times n)$ -Matrizen erweitern lassen):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zum anderen ist die Existenz eines inversen Elements nicht gesichert, wie das folgende Beispiel zeigt (welches sich ebenfalls beliebig auf $(n \times n)$ -Matrizen erweitern lässt):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Angenommen diese Matrix besäße ein inverses Element $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, so müsste gelten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

was offensichtlich einen Widerspruch darstellt.

Aufgabe 17

Beweisen Sie, dass $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{4n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Lösung:

Man rechnet nach

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^4 = \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus schließt man (aufgrund der Assoziativität der Matrixmultiplikation):

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{4n} = \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^4 \right)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alternativ kann die Aufgabe auch mit vollständiger Induktion gelöst werden.

Aufgabe 18

Beweisen Sie die folgenden Aussagen mit Hilfe vollständiger Induktion:

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a_{11}^n & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^n & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^n \end{pmatrix}$, dabei seien a_{11} , a_{22} und a_{33} reelle Zahlen.

c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+(-1)^n}{2} & \frac{1-(-1)^n}{2} \\ 0 & \frac{1-(-1)^n}{2} & \frac{1+(-1)^n}{2} \end{pmatrix}$.

e) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^n = 3^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Lösung:

1. Induktionsanfang $n = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also ist der Induktionsanfang gezeigt.

Induktionsvoraussetzung:

Es gelte die Behauptung für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt $n \mapsto n + 1$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{IV}{=} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + n \cdot 0 & 1 \cdot 1 + n \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dies ist die Behauptung für $n + 1$, also folgt mittels Induktionsprinzip die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. Induktionsanfang $n = 1$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix},$$

also ist der Induktionsanfang gezeigt.

Induktionsvoraussetzung:

Es gelte die Behauptung für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt $n \mapsto n + 1$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}^{n+1} &= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \\ &\stackrel{IV}{=} \begin{pmatrix} a_{11}^n & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^n & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}^n \cdot a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^n \cdot a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^n \cdot a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dies ist die Behauptung für $n + 1$, also folgt mittels Induktionsprinzip die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$.

3. Induktionsanfang $n = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1 \cdot (1-1)}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also ist der Induktionsanfang gezeigt.

Induktionsvoraussetzung:

Es gelte die Behauptung für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt $n \mapsto n+1$:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\stackrel{IV}{=} \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & n+1 & n + \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \frac{2n}{2} + \frac{n^2-n}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \frac{n^2+n}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Dies ist die Behauptung für $n+1$, also folgt mittels Induktionsprinzip die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$.

4. Induktionsanfang $n = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+(-1)^1}{2} & \frac{1-(-1)^1}{2} \\ 0 & \frac{1-(-1)^1}{2} & \frac{1+(-1)^1}{2} \end{pmatrix},$$

also ist der Induktionsanfang gezeigt.

Induktionsvoraussetzung:

Es gelte die Behauptung für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt $n \mapsto n+1$:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\stackrel{IV}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+(-1)^n}{2} & \frac{1-(-1)^n}{2} \\ 0 & \frac{1-(-1)^n}{2} & \frac{1+(-1)^n}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+(-1)^n}{2} & \frac{1+(-1)^n}{2} \\ 0 & \frac{1+(-1)^n}{2} & \frac{1-(-1)^n}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+(-1)^{n+1}}{2} & \frac{1-(-1)^{n+1}}{2} \\ 0 & \frac{1-(-1)^{n+1}}{2} & \frac{1+(-1)^{n+1}}{2} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Dies ist die Behauptung für $n+1$, also folgt mittels Induktionsprinzip die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$.

5. Induktionsanfang $n = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^1 = 3^{1-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

also ist der Induktionsanfang gezeigt.

Induktionsvoraussetzung:

Es gelte die Behauptung für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt $n \mapsto n+1$:

$$\begin{aligned}
 &\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\stackrel{IV}{=} 3^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= 3^{n-1} \begin{pmatrix} 1+(-1)(-1)+1 & -1-1-1 & 1+(-1)(-1)+1 \\ -1-1-1 & (-1)(-1)+1+(-1)(-1) & -1-1-1 \\ 1+(-1)(-1)+1 & -1-1-1 & 1+(-1)(-1)+1 \end{pmatrix} \\
 &= 3^{n-1} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} = 3^{n-1} \cdot 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3^{(n+1)-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Dies ist die Behauptung für $n+1$, also folgt mittels Induktionsprinzip die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$.

*Aufgabe 19

Sei V eine Menge. V heißt reeller Vektorraum oder auch \mathbb{R} -Vektorraum, falls auf V eine Addition $+$ und eine skalare Multiplikation \cdot definiert ist, sodass $v_1 + v_2 \in V$ und $r \cdot v_1 \in V$ für alle $v_1, v_2 \in V$ und $r \in \mathbb{R}$ erfüllt ist und weiterhin

(V1) $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$,

(V2) es existiert ein $0_V \in V$ mit $0_V + v_1 = v_1 + 0_V = v_1$,

(V3) es existiert ein $-v_1$ mit $v_1 + (-v_1) = (-v_1) + v_1 = 0_V$,

(V4) $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$,

(S1) $r_1 \cdot (v_1 + v_2) = r_1 \cdot v_1 + r_1 \cdot v_2$,

(S2) $(r_1 + r_2)v_1 = r_1 \cdot v_1 + r_2 \cdot v_1$,

(S3) $(r_1 r_2) \cdot v_1 = r_1 \cdot (r_2 \cdot v_1)$,

(S4) $1 \cdot v_1 = v_1$

für alle $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ und $v_1, v_2, v_3 \in V$ gilt.

Bildet die Menge der reellen $(n \times m)$ -Matrizen mit den aus der Vorlesung eingeführten Verknüpfungen $'+'$ und $'\cdot'$ (skalare Multiplikation) einen \mathbb{R} -Vektorraum?

Lösung:

Die Menge bildet mit den aus der Vorlesung bekannten Verknüpfungen \mathbb{R} -Vektorräume. Rechenregeln siehe Vorlesung. Nullelement ist die Nullmatrix und das additive Inverse einer Matrix A ist $-A$.

— Aufgaben zum 3. Kapitel (Lineare Gleichungssysteme, Gauß-Verfahren) —

Aufgabe 20

Es seien folgende lineare Gleichungssysteme gegeben. Geben Sie jeweils die zugehörige Koeffizientenmatrix und erweiterte Koeffizientenmatrix an:

a)

$$\begin{aligned} 3x_1 - 7x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 5x_1 + 4x_3 - x_4 &= 0 \\ -3x_2 + 5x_3 + x_4 - 1 &= 1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_3 + x_2 &= 0 \\ x_3 + 4x_1 - 3x_2 &= 0 \\ 6x_2 + x_1 + 3x_3 - 1 &= -1 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 5x_4 - x_1 - x_5 + x_2 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Lösung:

Die Koeffizientenmatrix beziehungsweise erweiterte Koeffizientenmatrix lauten

a)

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ beziehungsweise } \begin{pmatrix} 3 & -7 & 1 & 2 & | & 3 \\ 5 & 0 & 4 & -1 & | & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} \text{ beziehungsweise } \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & | & 0 \\ 4 & -3 & 1 & | & 0 \\ 1 & 6 & 3 & | & 0 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \text{ beziehungsweise } \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & 0 & | & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 5 & -1 & | & 2 \end{pmatrix}$$

3. Vorlesung

Aufgabe 21

Übersetzen Sie jeweils die Textaufgabe in ein lineares Gleichungssystem und lösen Sie es mit dem Additionsverfahren und/oder Einsetzungsverfahren.

- Vor drei Jahren war Monika dreimal so alt wie Peter. In vier Jahren ist Monika nur noch doppelt so alt wie Peter. Wie alt sind Peter und Monika?
- Drei normale Brötchen kosten so viel wie zwei Körnerbrötchen. Fünf normale Brötchen sind um 17 Cent teurer als drei Körnerbrötchen. Wie viel kosten normale Brötchen und Körnerbrötchen?
- Bei Zählungen am Gleisdreieck Mannheim-Friedrichsfeld wird festgestellt, dass in dem beobachteten Zeitraum 38 Züge nach Mannheim fahren oder aus Mannheim kamen, 33 Züge passierten das nördliche Ende Richtung Weinheim bzw. von Weinheim kommend, und 45 Züge fahren nach Heidelberg oder kamen aus Heidelberg. Wie viele Züge fahren auf der Strecke Mannheim–Weinheim, wieviele auf der Strecke Heidelberg–Mannheim und wie viele auf der Strecke Heidelberg–Weinheim?

Lösung:

a) Das Gleichungssystem lautet

$$m - 3 = 3(p - 3)$$

$$m + 4 = 2(p + 4),$$

in Standardform

$$m - 3p = -6$$

$$m - 2p = 4.$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit -1 und addiert dann die Gleichungen, erhält man

$$3p - 2p = 6 + 4 \Rightarrow p = 10.$$

In die erste Gleichung eingesetzt: $m - 3 \cdot 10 = -6$, also $m = 30 - 6 = 24$.

Eine Probe zeigt, dass $\binom{p}{m} = \binom{10}{24}$ auch wirklich beide Gleichungen erfüllt.

b) Das Gleichungssystem lautet

$$3n = 2k$$

$$5n = 3k + 17,$$

in Standardform

$$3n - 2k = 0$$

$$5n - 3k = 17.$$

Löst man die erste Gleichung nach k auf, erhält man $k = \frac{3}{2}n$. Dies in die zweite Gleichung eingesetzt ergibt: $5n = \frac{9}{2}n + 17 \Rightarrow \frac{1}{2}n = 17 \Rightarrow n = 34$. Daraus erhält man: $k = \frac{3}{2} \cdot 34 = 51$.

Eine Probe zeigt, dass $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 51 \end{pmatrix}$ auch wirklich beide Gleichungen erfüllt.

- c) Sind x_1 die Anzahl der Züge auf der Strecke Mannheim–Weinheim, x_2 für die Strecke Heidelberg–Mannheim und x_3 für die Strecke Heidelberg–Weinheim, erhält man

$$x_1 + x_2 = 38 \quad (\text{Züge aus/nach Mannheim})$$

$$x_1 + x_3 = 33 \quad (\text{Züge aus/nach Weinheim})$$

$$x_2 + x_3 = 45 \quad (\text{Züge aus/nach Heidelberg})$$

Zieht man die zweite von der ersten Gleichung ab, erhält man $x_2 - x_3 = 38 - 33 = 5$. Addiert man diese Gleichung zur dritten Gleichung erhält man $2x_2 = 45 + 5 = 50$, also $x_2 = 25$. Dies in die erste bzw. dritte Gleichung eingesetzt ergibt: $x_1 = 38 - 25 = 13$ und $x_3 = 45 - 25 = 20$. Eine Probe zeigt, dass $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 25 \\ 20 \end{pmatrix}$ auch wirklich alle drei Gleichungen erfüllt.

Aufgabe 22

Geben Sie jeweils ein (möglichst einfaches) Beispiel eines linearen Gleichungssystems mit drei Gleichungen und drei Unbekannten an,

- das genau eine Lösung hat,
- das unendliche viele Lösungen hat,
- das keine Lösung hat.

Lösung:

Zum Beispiel

$x_1 = 1$	$x_1 = 1$	$x_1 = 1$
a) $x_2 = 2$	b) $x_1 = 1$	c) $x_1 = 0$
$x_3 = 3$	$x_2 + x_3 = 1$	$x_2 + x_3 = 1$

Aufgabe 23

In Abbildung 1 sind verschiedene (sphärische) Polyeder abgebildet.

Für jeden solchen Polyeder gilt, dass die Anzahl k der Kanten genau um 2 kleiner ist als die Summe der Eckenanzahl e und der Flächenanzahl f . Bestehen alle Flächen aus Dreiecken, so ist das Doppelte der Kantenanzahl gleich dem Dreifachen der Flächenanzahl (zählt man nämlich für jedes Dreieck die Kanten, je 3, so hat man am Ende jede Kante doppelt gezählt, weil jede Kante zu zwei Seitenflächen gehört). Ähnlich erhält man einen Zusammenhang zwischen der Eckenanzahl und der Kantenanzahl, wenn an jeder Ecke gleich viele Kanten enden.

- Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem für k , e und f für den Fall des Oktaeders (lauter Dreiecke und an jeder Ecke enden 4 Kanten) auf, und lösen Sie dieses.
- Stellen Sie entsprechend ein lineares Gleichungssystem auf für ein Polyeder, dessen Seitenflächen lauter Dreiecke sind und bei dem an jeder Ecke fünf Kanten enden. Lösen Sie auch dieses.
- Stellen Sie entsprechend ein lineares Gleichungssystem auf für ein Polyeder, dessen Seitenflächen lauter Fünfecke sind und bei dem an jeder Ecke drei Kanten enden.
- Gibt es ein Polyeder aus lauter Dreiecken, bei dem an jeder Ecke sechs Kanten enden?
- Gibt es ein Polyeder aus lauter Fünfecken, bei dem an jeder Ecke vier Kanten enden?

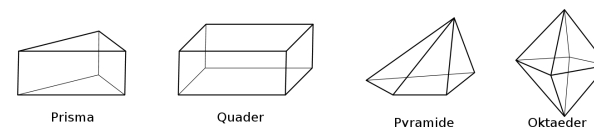


Abbildung 1: Verschiedene Polyeder

Lösung:

- a)

$$\begin{array}{rcl} e & +f & -k = 2 \\ & 3f & -2k = 0 \\ 4e & & -2k = 0 \end{array}$$

Zweite Gleichung nach f auflösen und dritte nach e . Dann beides in erste Gleichung einsetzen liefert $k = 12$. Anschließend rechnet man mit zweiter und dritter Gleichung aus, dass $f = 8$ und $e = 6$ sind.

Probe nicht vergessen!

- b)

$$\begin{array}{rcl} e & +f & -k = 2 \\ & 3f & -2k = 0 \\ 5e & & -2k = 0 \end{array}$$

Ausrechnen wie oben: Lösung ist $e = 12$, $f = 20$ und $k = 30$ (Ikosaeder).

- c)

$$\begin{array}{rcl} e & +f & -k = 2 \\ & 5f & -2k = 0 \\ 3e & & -2k = 0 \end{array}$$

Fast das gleiche LGS. Lediglich die Rollen von e und f sind vertauscht. \Rightarrow (Ohne nochmal etwas zu rechnen) Lösung ist $e = 20$, $f = 12$ und $k = 30$ (Dodekaeder).

d)

$$\begin{array}{rcl} e & +f & -k = 2 \\ & 3f & -2k = 0 \\ 6e & & -2k = 0 \end{array}$$

Löst man hier die zweite und dritte Gleichung nach f bzw. e auf und setzt in die erste ein, erhält man

$$\frac{1}{3}k + \frac{2}{3}k - k = 2,$$

Also $0 \cdot k = 2$, was nicht erfüllbar ist.

Es gibt daher kein solches Polyeder.

e)

$$\begin{array}{rcl} e & +f & -k = 2 \\ & 5f & -2k = 0 \\ 4e & & -2k = 0 \end{array}$$

Hier erhält man nach obigem Schema die Gleichung

$$\frac{1}{2}k + \frac{2}{5}k - k = 2 \Rightarrow -\frac{1}{10}k = 2 \Rightarrow k = -20.$$

Das Gleichungssystem ist lösbar mit Lösung $k = -20$, $e = -10$ und $f = -8$. Da die Anzahlen aber natürliche Zahlen sein müssen, ergibt das keine Lösung für das Problem.

Aufgabe 24

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge der folgenden linearen Gleichungssysteme.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \begin{array}{rcl} 2x_1 & -x_2 & = 4 \\ x_1 & +\frac{1}{2}x_2 & = -2 \end{array} & \text{b)} & \begin{array}{rcl} 3x_1 & +2x_2 & = 1 \\ x_1 & -2x_2 & = 11 \\ -2x_1 & +x_2 & = 5 \end{array} & \text{c)} & \begin{array}{rcl} x & +3y & +z = 1 \\ 3x & +9y & +4z = 0 \\ x & +3y & +2z = 3 \end{array} \end{array}$$

Lösung:

$$\text{a)} \quad \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}, \quad \text{b)} \quad \mathbb{L} = \emptyset, \quad \text{c)} \quad \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -3r-1 \\ r \\ 2 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 25

Geben Sie jeweils an, durch welche elementare Zeilenumformung die Matrix A in die Matrix B transformiert werden kann.

$$\text{a)} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b)} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{c)} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

a) Vertauschen der ersten und dritten Zeile,

b) Multiplikation der zweiten Zeile mit $\frac{1}{2}$,

c) Addition des Dreifachen der dritten Zeile zur ersten.

Aufgabe 26

Geben Sie für jede der folgenden Matrizen an, ob sie in (Zeilen-)Stufenform bzw. sogar reduzierter Stufenform ist.

$$\begin{array}{lll} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, & C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ D = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Lösung:

In Stufenform sind die Matrizen A , C , E und F , aber nicht B und D . Die Matrizen C , E und F sind sogar in reduzierter Stufenform.

Aufgabe 27

Transformieren Sie die nachfolgenden Matrizen jeweils durch elementare Umformungen in eine Matrix in reduzierter Stufenform.

$$\begin{array}{ll} A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}, & B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 6 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 10 \end{pmatrix}, \\ C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -12 & 13 \\ 1 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, & D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 11 \\ 4 & 1 & 12 & -1 & 11 \\ 3 & 0 & 6 & 1 & 15 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Lösung:

Die Matrix A formt man wie folgt um:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ (ZSF)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ (red. ZSF).}$$

Die Matrix B wird wie folgt umgeformt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 6 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 2 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 2 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & -4 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (ZSF)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (red. ZSF).}$$

Die Matrix C wird wie folgt umgeformt:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -12 & 13 \\ 1 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -12 & 13 \\ 1 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & -12 & 13 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (ZSF)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (red. ZSF).}$$

Die Matrix D schließlich wird wie folgt umgeformt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 11 \\ 4 & 1 & 12 & -1 & 11 \\ 3 & 0 & 6 & 1 & 15 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 11 \\ 0 & -7 & -28 & -1 & -41 \\ 0 & -6 & -24 & 1 & -24 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 42 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 42 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ (ZSF)} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ (red. ZSF).}$$

Aufgabe 28

Lösen Sie die in Aufgabe 21 aufgestellten linearen Gleichungssysteme mit dem Gauß-Verfahren.

Lösung:

Alle angegebenen Umformungen sind diejenigen, die man erhält, wenn man dem in der Vorlesung angegebenen Gauß-Verfahren streng folgt.

a) Umformungen:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -6 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 24 \\ 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

Einzigste Lösung $\begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 10 \end{pmatrix}$.

b) Umformungen:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 5 & -3 & 17 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 5 & -3 & 17 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 17 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 51 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 34 \\ 0 & 1 & 51 \end{pmatrix}$$

Einzigste Lösung $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 51 \end{pmatrix}$.

c) Umformungen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 38 \\ 1 & 0 & 1 & 33 \\ 0 & 1 & 1 & 45 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 38 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 45 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 38 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -45 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 38 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -40 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 38 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 38 \\ 0 & 1 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \end{pmatrix}$$

Einzigste Lösung $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 25 \\ 20 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 29

Lösen Sie jeweils das lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren.

a)	$x + 3y + z = 1$	b)	$2x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 = 0$	c)	$x + 2y + z = 1$
	$3x + 9y + 4z = 5$		$-x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 0$		$2y + 2z = 0$
	$x + 3y + 2z = 3$		$3x_1 - 2x_2 + 10x_3 - 2x_4 = 0$		$2x + 5y + 3z = 1$

Lösung:

a) $\left\{ \begin{pmatrix} -3p-1 \\ p \\ 2 \end{pmatrix} \mid p \in \mathbb{R} \right\},$ b) $\left\{ \begin{pmatrix} -2p \\ 2p-q \\ q \end{pmatrix} \mid p, q \in \mathbb{R} \right\},$ c) \emptyset

Aufgabe 30

Lösen Sie jeweils das lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren.

- | | | | |
|----|--------------------------------|----|--------------------------------|
| a) | $x + y - z = 1$ | b) | $2x + 8y = 0$ |
| | $2x + 6y + 3z = 8$ | | $6x + 24y + 3z = 0$ |
| | $x - 7y - 4z = 3$ | | $2x + 8y + z = 0$ |
| c) | $x + 2z = 1$ | d) | $2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 3$ |
| | $x + y + z = 3$ | | $x_1 + x_2 + 3x_3 = 1$ |
| | $3x + y + 5z = 6$ | | $2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 5$ |
| e) | $x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 0$ | f) | $2x_1 + 2x_2 + 8x_4 = 0$ |
| | $2x_1 + x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0$ | | $x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 = 0$ |
| | $-x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$ | | $2x_3 + 4x_4 + x_5 = 0$ |
| | $2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0$ | | $x_1 + x_2 + 2x_3 + 8x_4 = 0$ |

Lösung:

- a) $\{(4 \ -1 \ 2)^T\}$, b) $\{(-4p \ p \ 0)^T \mid p \in \mathbb{R}\}$, c) \emptyset ,
d) $\{(-2p-1 \ -p+2 \ p \ 3)^T \mid p \in \mathbb{R}\}$, e) $\{(0 \ 0 \ 0 \ 0)^T\}$,
f) $\{(-p-4q \ p \ -2q \ q \ 0)^T \mid p, q \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 31

Bestimmen Sie jeweils alle Parameter $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, für die die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ die gewünschten Bedingungen erfüllt.

- a) Es gilt $f(1) = 1$ und $f(2) = 2$ sowie $f(-1) = 5$.
b) Es gilt $f(1) = 1$ und $f'(1) = -1$ sowie $f(-1) = 1$.
c) Die Gerade mit der Gleichung $y = 3x$ ist die Wendepunkt tangente des Graphen von f , und die Wendestelle ist 1.

Lösung:

a) Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 1 \\ 8a + 4b + 2c + d &= 2 \\ -a + b - c + d &= 5 \end{aligned}$$

Lösung: $a = \frac{p}{2} - 1$ und $b = -p + 3$ sowie $c = -\frac{p}{2} - 1$ und $d = p$ für beliebiges $p \in \mathbb{R}$

b) Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 1 \\ 3a + 2b + c &= -1 \\ -a + b - c + d &= 1 \end{aligned}$$

Lösung: $a = p - \frac{3}{2}$ und $b = -p + 1$ sowie $c = -p + \frac{3}{2}$ und $d = p$ für beliebiges $p \in \mathbb{R}$

- c) Dass die Gerade $y = 3x$ eine Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = 1$ ist, ist äquivalent zu $f(1) = 3 \cdot 1 = 3$ und $f'(1) = 3$. Die Bedingung, dass 1 die Wendestelle ist, ist äquivalent zu $f''(1) = 0$ und $f'''(1) = 6a \neq 0$ (d.h. $a \neq 0$). Somit hat man das Gleichungssystem

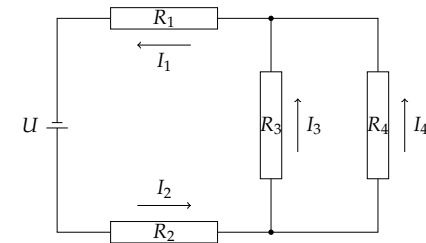
$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 3 \\ 3a + 2b + c &= 3 \\ 6a + 2b &= 0 \end{aligned}$$

sowie die Zusatzbedingung $a \neq 0$.

Lösung: $a = -p$ und $b = 3p$ sowie $c = -3p + 3$ und $d = p$ für beliebiges $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

*Aufgabe 32

Gegeben sei das folgende Gleichstromnetz:



In einem Gleichstromnetz gelten die Kirchhoffschen Regeln. Die *Knotenregel* besagt, dass in jedem Knoten im Netz die Summe der Ströme, deren Pfeil auf den Knoten hinweist, gleich der Summe der Ströme ist, deren Pfeil vom Knoten wegweist. Die *Maschenregel* besagt, dass, wenn man einen geschlossenen Weg durch das Netz läuft und dabei die Produkte $\pm R_k I_k$ an den durchlaufenen Widerständen aufsummiert (mit positivem Vorzeichen, wenn der Weg in Pfeilrichtung verläuft, und mit negativem Vorzeichen, wenn der Weg entgegen der Pfeilrichtung verläuft), man die Summe der Spannungen der Spannungsquellen auf diesem Weg erhält. Berechnen Sie mit diesen Regeln die Stromstärken in obigem Netz, wenn die Spannungsquelle 36 V hat und für die Widerstände $R_1 = 200 \Omega$ sowie $R_2 = 400 \Omega$ und $R_3 = 300 \Omega$ sowie $R_4 = 200 \Omega$ gilt.

Lösung:

Die Knotenregel liefert die Bedingungen $I_3 + I_4 = I_1$ (oberer Knoten) und $I_2 = I_3 + I_4$ (unterer Knoten), und aus der Maschenregel erhält man $R_2 I_2 + R_3 I_3 + R_1 I_1 = U$ (linke Masche gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen) sowie $R_4 I_4 - R_3 I_3 = 0$ (rechte Masche gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen). Man hat also in Standardform (und ohne Einheiten)

das Gleichungssystem

$$I_1 - I_3 - I_4 = 0$$

$$I_2 - I_3 - I_4 = 0$$

$$200I_1 + 400I_2 + 300I_3 = 36$$

$$-300I_3 + 200I_4 = 0$$

Lösung: $I_1 = 0,05$ und $I_2 = 0,05$ sowie $I_3 = 0,02$ und $I_4 = 0,03$ (jeweils in Ampere)

4. Vorlesung

Aufgabe 33

Untersuchen Sie jeweils, ob das gegebene lineare Gleichungssystem keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen hat.

a)	$2x + y - 5z = 10$	b)	$x + 3y + 5z = 0$	c)	$2x - 3y + z = 5$
	$2x + 4y + z = 1$		$x + y + z = 0$		$4x - 5y + 4z = 14$
	$2y + 4z = -6$		$x + 5y + 15z = 0$		$2x - 2y + 3z = 14$

Lösung:

- a) Zeilenstufenform hat (bei drei Variablen) zwei Treppenstufen und eine $(0 = 0)$ -Zeile \Rightarrow unendlich viele Lösungen
- b) Zeilenstufenform hat (bei drei Variablen) drei Treppenstufen \Rightarrow genau eine Lösung
- c) Zeilenstufenform hat zwei Treppenstufen und eine $(0 = 5)$ -Zeile \Rightarrow keine Lösung

Aufgabe 34

Untersuchen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ auf Lösbarkeit.

a)	$x + ay + 3z = a$	b)	$x + z = 0$
	$y - az = 1$		$x + y + (a + 1)z = 2$
	$x + (a - 2)y + (2a + 3)z = -a^2$		$3x + y + (a + 3)z = a + 2$
c)	$2x + 4y = -2a$	d)	$x + a^2y = 1$
	$x + (a + 2)y = 1 - a$		$a^2x + y = a$

Lösung:

- a) lösbar genau für $a = 1$ oder $a = -2$, b) lösbar genau für $a = 0$,
c) lösbar genau für $a \neq 0$, d) lösbar genau für $a \neq -1$

Aufgabe 35

Untersuchen Sie jeweils in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$, ob das gegebene lineare Gleichungssystem keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen hat.

a)	$2x + 4y + az = 5$	b)	$ax + y + z = a$
	$3x + (a + 5)y + z = 7$		$ax + (a + 2)y + (2a + 1)z = a - 2$
	$x + 2y + az = 3$		$(a^2 + a)y + (3a^2 - 1)z = -2$

Lösung:

- a) für $a = 0$ unlösbar, für $a = 1$ unendlich viele Lösungen, sonst genau eine Lösung
- b) für $a = -1$ unlösbar, für $a \in \{0, 1\}$ unendlich viele Lösungen, sonst genau eine Lösung

Aufgabe 36

Bestimmen Sie aus dem Ergebnis von Aufgabe 29 a) die Lösungsmenge von

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 0 \\ 3x + 9y + 4z &= 0 \\ x + 3y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

(ohne erneutes Lösen eines Gleichungssystems).

Lösung:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3p \\ p \\ 0 \end{pmatrix} \mid p \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 37

Untersuchen Sie jeweils für die gegebene Matrix A , ob das Gleichungssystem $A \cdot x = b$ für alle $b \in \mathbb{R}^3$ lösbar ist.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & 6 & 7 \\ -4 & 4 & -6 & -12 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

- a) Zeilenstufenmatrix zu A hat genau 2 Treppenstufen \Rightarrow das Gleichungssystem ist nicht für alle $b \in \mathbb{R}^3$ lösbar
- b) Zeilenstufenmatrix zu A hat genau 3 Treppenstufen \Rightarrow das Gleichungssystem ist für alle $b \in \mathbb{R}^3$ lösbar
- c) Matrix A hat nur zwei Spalten \Rightarrow Zeilenstufenmatrix zu A hat höchstens 2 Treppenstufen \Rightarrow Gleichungssystem nicht für alle $b \in \mathbb{R}^3$ lösbar

Aufgabe 38

Untersuchen Sie jeweils, ob der Punkt $(1; -1; 2)$ auf der Geraden bzw. Ebene liegt.

- a) $\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\},$
 b) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\},$
 c) $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\},$
 d) $\left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R} \right\}.$

Lösung:

a) ja (für $p = -2$), b) nein, c) nein, d) ja (für $p = -2$ und $q = -3$).

Aufgabe 39

Untersuchen Sie jeweils, ob der Punkt P auf der Geraden QR liegt.

- a) $P = (3; 2; -4)$, $Q = (1; 1; 0)$ und $R = (7; 4; 8)$,
 b) $P = (1; 1; 0)$, $Q = (3; -3; 2)$ und $R = (4; -5; 3)$,
 c) $P = (2; -5; 2)$, $Q = (1; -2; 4)$ und $R = (3; -7; 6)$.

Lösung:

Genau die gleiche Rechnung wie in Aufgabe 5. Lösungen sind also:

a) nein, b) ja, c) nein.

Aufgabe 40

Untersuchen Sie jeweils, ob die vier Punkte in einer Ebene liegen.

- a) $(0; 0; 1)$ und $(1; -1; -3)$ sowie $(4; 2; 0)$ und $(-3; 1; 8)$,
 b) $(1; 3; -2)$ und $(3; 1; -1)$ sowie $(4; 5; 2)$ und $(2; -2; -2)$,
 c) $(2; 1; 3)$ und $(1; -1; 0)$ sowie $(3; -5; 2)$ und $(-1; 9; 1)$.

Lösung:

a) ja, b) nein, c) ja.

Aufgabe 41

Untersuchen Sie jeweils durch Lösen eines linearen Gleichungssystems, ob die gegebenen Vektoren linear abhängig oder linear unabhängig sind.

- a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix},$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 43 \end{pmatrix},$ c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}.$

Lösung:

a) linear unabhängig, b) linear abhängig, c) linear abhängig.

Aufgabe 42

Untersuchen Sie jeweils durch Lösen eines linearen Gleichungssystems, ob der dritte Vektor linear abhängig von den ersten beiden Vektoren ist.

- a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix},$ b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix},$ c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 9 \end{pmatrix}.$

Lösung:

a) nicht linear abhängig, b) nicht linear abhängig, c) linear abhängig.

Aufgabe 43

Argumentieren Sie möglichst geschickt, ob die gegebenen Vektoren linear abhängig oder linear unabhängig sind.

- a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$ b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix},$ c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

Lösung:

- a) dritter Vektor ist das Negative des ersten Vektors \Rightarrow linear abhängig
 b) Das homogene lineare Gleichungssystem, dessen Lösungen die Koeffiziententupel sind, mit denen sich die drei gegebenen Vektoren zum Nullvektor linearkombinieren, hat zwei Gleichungen und drei Unbekannte. Da es sich um ein homogenes lineares Gleichungssystem handelt, ist es lösbar. Eine Zeilenstufenform der (erweiterten) Koeffizientenmatrix hat höchstens zwei Treppenstufen, so dass mindestens ein Parameter zur Beschreibung der Lösungsmenge notwendig ist. Also gibt es unendlich viele Lösungen dieses Gleichungssystems, und darunter ist sicherlich ein Koeffiziententupel, welches von Null verschiedene Einträge hat. Also sind die gegebenen Vektoren linear abhängig.
 c) Wir nehmen an, dass die Linearkombination der gegebenen Vektoren mit Koeffizienten r, s, t der Nullvektor ist. Aufgrund der ersten Einträge der Vektoren ist dann $s = 0$. Es spielen also nur der erste und der dritte Vektor eine Rolle. Ihre dritten Einträge implizieren $t = 0$. Aus dem zweiten Eintrag des ersten Vektors folgt dann auch $r = 0$. Also sind die gegebenen Vektoren linear unabhängig.

Aufgabe 44

Untersuchen Sie jeweils die gegenseitige Lage der gegebenen Geraden (sind gleich; sind nicht gleich, aber parallel; haben genau einen Schnittpunkt; sind windschief) und bestimmen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt.

- a) $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid p \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -9 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \mid q \in \mathbb{R} \right\}$,
b) $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \mid p \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \mid q \in \mathbb{R} \right\}$,
c) $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$,
d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$,
e) $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \mid u \in \mathbb{R} \right\}$,
f) $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \mid u \in \mathbb{R} \right\}$.

Lösung:

- a) schneiden sich in genau einem Punkt, nämlich in $(1; -1; 0)$
b) parallel, aber nicht gleich
c) schneiden sich in genau einem Punkt, nämlich in $(1; 0; -2)$
d) gleich
e) windschief
f) schneiden sich in genau einem Punkt, nämlich in $(1; 2; -4)$

5. Vorlesung

Aufgabe 45

Untersuchen Sie jeweils die gegenseitige Lage von Gerade und Ebene (Gerade liegt in der Ebene; Gerade liegt nicht in der Ebene, ist aber parallel zu ihr; Gerade und Ebene haben genau einen Schnittpunkt) und bestimmen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt.

- a) $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \mid q, r \in \mathbb{R} \right\}$,
b) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 16 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$,
c) $\left\{ \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} \mid p \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R} \right\}$.

Lösung:

- a) schneiden sich in genau einem Punkt, nämlich in $(2; -1; -3)$,
b) schneiden sich in genau einem Punkt, nämlich in $(2; 2; 12)$,

- c) die Gerade liegt in der Ebene.

Aufgabe 46

Untersuchen Sie jeweils die gegenseitige Lage der gegebenen Ebenen (sind gleich; sind nicht gleich, aber parallel; haben eine Gerade als Schnittmenge) und bestimmen Sie gegebenenfalls die Schnittgerade.

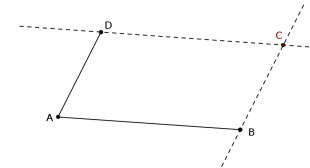
- a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \mid p, q \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R} \right\}$,
b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid t, u \in \mathbb{R} \right\}$,
c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \mid q, r \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$,
d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \mid t, u \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R} \right\}$.

Lösung:

- a) haben eine Gerade als Schnittmenge: $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$,
b) haben eine Gerade als Schnittmenge: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$,
c) sind gleich, d) sind nicht gleich, aber parallel.

Aufgabe 47

Ein *Parallelogramm* ist ein Viereck, dessen gegenüberliegende Seiten jeweils parallel sind. Bestimmen Sie zu den Punkten $A = (1; 2; 0)$, $B = (-1; 3; 1)$ und $D = (2; 1; 1)$ einen vierten Punkt C so, dass die vier Punkte ein Parallelogramm $ABCD$ bilden, indem Sie die Gerade durch B , welche parallel zu AD ist, mit der Geraden durch D , welche parallel zu AB ist, schneiden.



Lösung:

Erste Parallele (d.h. Gerade BC) ist $\{\vec{b} + r(\vec{d} - \vec{a}) \mid r \in \mathbb{R}\}$ und zweite Parallele (d.h. Gerade DC) ist $\{\vec{d} + s(\vec{b} - \vec{a}) \mid s \in \mathbb{R}\}$. Durch Berechnung des Schnittpunktes, oder genau hinschauen, erhält man, dass man den Schnittpunkt für $r = s = 1$ bekommt (im Allgemeinen, sowie im Zahlenbeispiel), also

$$\vec{c} = \vec{d} + \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

*Aufgabe 48

Seien A, B, C und D im \mathbb{R}^3 vier Punkte, die in einer gemeinsamen Ebene liegen. Definitionsgemäß ist das Viereck $ABCD$ ein *Parallelogramm*, wenn gegenüberliegende Seiten zueinander parallel sind, wenn also AB parallel zu CD und AD parallel zu BC ist.

- a) Zeigen Sie, dass für ein Parallelogramm $ABCD$ sogar $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ gelten (vgl. Aufg. 47).
- b) Zeigen Sie, dass genau dann $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ist, wenn $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ erfüllt ist.
- c) Zeigen Sie, dass in einem Parallelogramm der Schnittpunkt der Diagonalen genau der Mittelpunkt beider Diagonalen ist.
- d) Zeigen Sie, dass jedes Viereck dessen Diagonalen sich in ihren Mittelpunkten schneiden, ein Parallelogramm ist.

Lösung:

- a) Im Parallelogramm gilt $\vec{c} = \vec{b} + \vec{d} - \vec{a}$ (vgl. Lösung zu Aufg. 47).

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \vec{c} - \vec{d} = \overrightarrow{DC}$$
$$\text{und} \quad \overrightarrow{AD} = \vec{d} - \vec{a} = \vec{c} - \vec{b} = \overrightarrow{BC}.$$

- b) Beide Gleichungen sind äquivalent zu $\vec{c} = \vec{b} + \vec{d} - \vec{a}$.
- c) Mittelpunkt M von AC hat Ortsvektor $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c})$ (vgl. Aufg. 2 bzw. Vorlesung) und Mittelpunkt M' von BD hat $\vec{m}' = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{d})$. Nach Gleichung in a) ist damit $M = M'$.
- d) Wenn die Mittelpunkte gleich sind, gilt also $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{d})$.

$$\Rightarrow \vec{c} = \vec{b} + \vec{d} - \vec{a} \stackrel{a)}{\Rightarrow} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \text{ und } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.$$

Also AB parallel zu CD und AD parallel zu BC .

— Aufgaben zum 5. Kapitel (Skalarprodukt, Längen und Winkel) —

Aufgabe 49

Berechnen Sie jeweils das Skalarprodukt der beiden Vektoren.

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Lösung:

- a) 5, b) 0, c) 0, d) 25.

Aufgabe 50

Berechnen Sie jeweils das Skalarprodukt der beiden Vektoren.

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Lösung:

- a) 1, b) 0, c) 14.

Aufgabe 51

Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^m$ mit $\vec{a} \bullet \vec{a} = 5$, $\vec{a} \bullet \vec{b} = 10$ und $\vec{b} \bullet \vec{b} = 21$. Berechnen Sie

a) $\vec{a} \bullet (\vec{a} + 3 \cdot \vec{b})$, b) $3 \cdot (\vec{a} + \vec{b}) \bullet (\vec{a} - \vec{b})$, c) $(5 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b}) \bullet (3 \cdot \vec{a} - 4 \cdot \vec{b})$.

Lösung:

Aufgrund des Kommutativ- und Distributivgesetzes für das Skalarprodukt gilt

- a) $\vec{a} \bullet (\vec{a} + 3 \cdot \vec{b}) = \vec{a} \bullet \vec{a} + 3 \cdot \vec{a} \bullet \vec{b} = 5 + 3 \cdot 10 = 35$,
b) $3 \cdot (\vec{a} + \vec{b}) \bullet (\vec{a} - \vec{b}) = 3 \cdot (\vec{a} \bullet \vec{a} - \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{b} \bullet \vec{a} - \vec{b} \bullet \vec{b}) = 3 \cdot (\vec{a} \bullet \vec{a} - \vec{b} \bullet \vec{b}) = 3 \cdot (5 - 21) = -48$,
c) $(5 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b}) \bullet (3 \cdot \vec{a} - 4 \cdot \vec{b}) = 15 \cdot \vec{a} \bullet \vec{a} - 20 \cdot \vec{a} \bullet \vec{b} + 6 \cdot \vec{b} \bullet \vec{a} - 8 \cdot \vec{b} \bullet \vec{b} = 15 \cdot \vec{a} \bullet \vec{a} - 14 \cdot \vec{a} \bullet \vec{b} - 8 \cdot \vec{b} \bullet \vec{b} = 15 \cdot 5 - 14 \cdot 10 - 8 \cdot 21 = 75 - 140 - 168 = -233$.

Aufgabe 52

Berechnen Sie jeweils die Länge des Vektors.

a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ -16 \end{pmatrix}$.

Lösung:

- a) 2, b) 13, c) 3, d) 3, e) $\sqrt{3}$, f) 21.

Aufgabe 53

Die drei Punkte $A = (1; 0; 3)$, $B = (2; 1; 5)$ und $C = (-1; 1; 5)$ bilden ein Dreieck. Untersuchen Sie, ob das Dreieck ABC gleichschenkelig ist (d.h. zwei Seiten gleich lang sind) oder sogar gleichseitig ist (d.h. alle drei Seiten gleich lang sind).

Lösung:

Die Seitenlängen sind

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(2-1)^2 + (1-0)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6},$$
$$d(A, C) = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-1-1)^2 + (1-0)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3,$$
$$d(B, C) = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(-1-2)^2 + (1-1)^2 + (5-5)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Das Dreieck ist also gleichschenkelig mit Schenkeln AC und BC , aber nicht gleichseitig.

Aufgabe 54

Die drei Punkte $A = (2; -1; 3)$, $B = (-1; 3; 2)$ und $C = (3; 2; -1)$ bilden ein Dreieck. Untersuchen Sie, ob das Dreieck ABC gleichschenkelig ist (d.h. zwei Seiten gleich lang sind) oder sogar gleichseitig ist (d.h. alle drei Seiten gleich lang sind).

Lösung:

Die Seitenlängen sind

$$d(A, B) = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(-1-2)^2 + (3+1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{9+16+1} = \sqrt{26},$$

$$d(B, C) = \|\vec{BC}\| = \sqrt{(3+1)^2 + (2-3)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{16+1+9} = \sqrt{26},$$

$$d(C, A) = \|\vec{CA}\| = \sqrt{(2-3)^2 + (-1-2)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{1+9+16} = \sqrt{26},$$

Das Dreieck ist also gleichseitig.

Aufgabe 55

Welche der folgenden Vektoren sind zueinander senkrecht?

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 23 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

\vec{u} ist zu allen drei anderen senkrecht. Außerdem sind \vec{w} und \vec{z} zueinander senkrecht.

Aufgabe 56

Bestimmen Sie jeweils alle $s \in \mathbb{R}$, für die v und w senkrecht aufeinander stehen.

$$\text{a) } v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ s \end{pmatrix}, \quad \text{b) } v = \begin{pmatrix} -1 \\ s+1 \\ s \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 2 \\ s-1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } v = \begin{pmatrix} s \\ s+1 \\ -1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} -2 \\ s-1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$$\text{a) } s = 2, \quad \text{b) } s = -1, \quad \text{c) } s \in \{3, -1\}.$$

Aufgabe 57

Bestimmen Sie jeweils alle $s \in \mathbb{R}$, für die u senkrecht auf v und w steht.

$$\text{a) } u = \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ -1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ s \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} s \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} s \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } u = \begin{pmatrix} -1 \\ s \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 2s-1 \\ s \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \text{d) } u = \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ s^2 \\ 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$$\text{a) } u \bullet v = 0, u \bullet w = -2 + 2s, \text{ also } s = 1,$$

$$\text{b) } u \bullet v = 1 + 2s, u \bullet w = 0, \text{ also } s = \frac{-1}{2},$$

$$\text{c) } u \bullet v = -1 + s^2 = (s-1)(s+1), u \bullet w = 1 - 2s + s^2 = (s-1)^2, \text{ also } s = 1,$$

$$\text{d) } u \bullet v = 1 + s^3 = (s+1)((s-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}), u \bullet w = s^2, \text{ also erfüllt kein } s \in \mathbb{R} \text{ gleichzeitig } u \bullet v = 0 \text{ und } u \bullet w = 0.$$

Aufgabe 58

Gegeben seien die drei Punkte $A = (1; 6; 1)$, $B = (-1; 3; 2)$ und $C = (4; -1; 0)$.

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig mit rechtem Winkel bei B ist.

b) Bestimmen Sie den Punkt D so, dass das Viereck $ABCD$ ein Rechteck ist.

Lösung:

$$\text{a) } \vec{BA} \bullet \vec{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = 0, \text{ also sind die Seiten } AB \text{ und } BC \text{ zueinander senkrecht.}$$

b) Mit Skizze sieht man, dass

$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{AD} = \vec{a} + \vec{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Also } D = (6; 2; -1).$$

6. Vorlesung

Aufgabe 59

Bestimmen Sie jeweils eine Koordinatenform der Geraden $g = \{\vec{u} + r\vec{v} \mid r \in \mathbb{R}\}$ im \mathbb{R}^2 , wobei

$$\text{a) } \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } \vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$$\text{a) } \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 3\},$$

$$\text{b) } \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 3\},$$

$$\text{c) } \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 - x_2 = 3\}.$$

Aufgabe 60

Berechnen Sie jeweils eine Parameterform der in Koordinatenform gegebenen Geraden.

$$\text{a) } \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y = 3 \right\}, \quad \text{b) } \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 3 \right\}.$$

Lösung:

Mögliche Lösungen:

$$\text{a) } \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{b) } \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 61Berechnen Sie das Kreuzprodukt der Vektoren v und w

$$\text{a) } v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } v = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 15 \\ 45 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \text{d) } v = \begin{pmatrix} s-1 \\ s \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} s \\ s+1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$$\text{a) } v \times w = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \text{ b) } v \times w = \begin{pmatrix} -13 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix}, \text{ c) } v \times w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ d) } v \times w = \begin{pmatrix} s-1 \\ 2-s \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 62Berechnen Sie jeweils das Kreuzprodukt $v \times w$ und geben Sie eine Normalenform und Koordinatenform der Ebene $E = \{u + p \cdot v + q \cdot w \mid p, q \in \mathbb{R}\}$ an.

$$\text{a) } u = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$$\text{a) } v \times w = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ und } E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid -x + 4y - 5z = -1 \right\}$$

$$\text{b) } v \times w = \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \\ -11 \end{pmatrix} \text{ und } E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 8x - 10y - 11z = 7 \right\}$$

$$\text{c) } v \times w = \begin{pmatrix} -28 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ und } E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid -28x + 9y + 7z = 2 \right\}$$

Aufgabe 63

Berechnen Sie jeweils eine Normalenform und Koordinatenform der in Parameterform gegebenen Ebene.

$$\text{a) } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \mid p, q \in \mathbb{R} \right\}, \quad \text{b) } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \mid p, q \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lösung:

a) Eine Normalenform und Koordinatenform ist gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y = 2 \right\}.$$

b) Eine Normalenform und Koordinatenform ist gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \bullet \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 6z = 5 \right\}.$$

Aufgabe 64

Berechnen Sie jeweils eine Parameterform der in Koordinatenform gegebenen Ebene.

$$\text{a) } \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 1 \right\}, \quad \text{b) } \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y - z = 4 \right\}.$$

Lösung:

$$\text{a) } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mid p, q \in \mathbb{R} \right\}, \quad \text{b) } \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \mid p, q \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 65

Berechnen Sie jeweils eine Parameterform der gesuchten Geraden.

$$\text{a) Gerade senkrecht zu } \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mid p, q \in \mathbb{R} \right\} \text{ durch } (1; 0; 3),$$

$$\text{b) Gerade senkrecht zu } \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid p \in \mathbb{R} \right\} \text{ und } \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \mid q \in \mathbb{R} \right\} \text{ durch } (2; 8; 5),$$

c)* Gerade, die senkrecht auf g steht und in E enthalten ist, wobei

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid p \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad E = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \mid q, r \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lösung:

$$\text{a) } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}, \quad \text{b) } \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}, \quad \text{c) } \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 66

Berechnen Sie jeweils eine Normalenform und Koordinatenform der gesuchten Ebene.

$$\text{a) Ebene senkrecht zu } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \mid p \in \mathbb{R} \right\} \text{ durch } (2; 2; -1),$$

b) Ebene, die den Punkt $(1; 2; -1)$ enthält und senkrecht auf E_1 und E_2 steht, wobei

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \mid p, q \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad E_2 = \left\{ r \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R} \right\},$$

c) Ebene, die die Gerade g enthält und senkrecht auf die Ebene E steht, wobei

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \mid p \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad E = \left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid q, r \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lösung:

a) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 2z = -4 \right\},$ b) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid -13x + 5y + 4z = -7 \right\},$

c) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 8x - 2y + 3z = 3 \right\}$

Aufgabe 67

Untersuchen Sie jeweils, ob der Punkt $(3; -2)$ auf der gegebenen Geraden liegt.

a) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1 + 2x_2 = 5 \right\}$ b) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - 2x_2 = -1 \right\}$

Lösung:

a) ja, b) nein.

Aufgabe 68

Untersuchen Sie jeweils die gegenseitige Lage der Geraden und bestimmen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt.

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid r \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1 + 2x_2 = 5 \right\},$

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid r \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 4x_1 - 2x_2 = 5 \right\}.$

Lösung:

a) Schnittpunkt bei $(\frac{13}{5}; -\frac{7}{5})$.

b) kein Schnittpunkt; echt parallel.

Aufgabe 69

Untersuchen Sie jeweils, ob der Punkt $(1; -1; 2)$ auf der gegebenen Ebene liegt.

a) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 2y - z = 2 \right\},$ b) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 4x + 2y - z = 0 \right\}.$

Lösung:

a) nein, b) ja.

Aufgabe 70

Untersuchen Sie jeweils die gegenseitige Lage von Gerade und Ebene (Gerade liegt in der Ebene; Gerade liegt nicht in der Ebene, ist aber parallel zu ihr; Gerade und Ebene haben genau einen Schnittpunkt) und bestimmen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt.

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid p \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 2 \right\},$

b) $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid p \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 4y - z = -1 \right\},$

c) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \mid p \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + z = 5 \right\}.$

Lösung:

a) schneiden sich in genau einem Punkt, nämlich in $(9; 5; 1)$

b) die Gerade liegt nicht in der Ebene, ist aber parallel zu ihr

c) schneiden sich in genau einem Punkt, nämlich in $(1; -1; 0)$

Aufgabe 71

Untersuchen Sie jeweils die gegenseitige Lage der Ebenen (sind gleich; sind nicht gleich, aber parallel; haben eine Gerade als Schnittmenge) und bestimmen Sie ggf. die Schnittgerade.

a) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 2 \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mid p, q \in \mathbb{R} \right\},$

b) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 2 \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} \mid p, q \in \mathbb{R} \right\},$

c) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 5y + z = 3 \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \mid p, q \in \mathbb{R} \right\},$

d) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 8z = 1 \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 5z = 1 \right\},$

e) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 7y + 3z = 2 \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 9y + z = -1 \right\},$

f) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + 8z = 3 \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 6z = 2 \right\},$

g) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 8z = 1 \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid -x - 2y - 8z = 1 \right\},$

h) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y + z = 2 \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - 5y + 3z = -2 \right\}.$

Lösung:

a) haben eine Gerade als Schnittmenge: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\},$

b) haben eine Gerade als Schnittmenge: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\},$

c) sind nicht gleich, aber parallel,

d) haben eine Gerade als Schnittmenge: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\},$

e) haben eine Gerade als Schnittmenge: $\left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\},$

f) haben eine Gerade als Schnittmenge: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}$,

g) sind nicht gleich, aber parallel,

h) haben eine Gerade als Schnittmenge: $\left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}$.

Aufgabe 72

Berechnen Sie jeweils den Winkel zwischen den beiden Vektoren.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Lösung:

a) 30° , b) 90° , c) 60° .

Aufgabe 73

Berechnen Sie jeweils den Schnittwinkel der geometrischen Objekte in \mathbb{R}^3 .

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \mid p \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \mid q \in \mathbb{R} \right\}$,
b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \mid p, q \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}$,
c) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid p, q \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R} \right\}$.

Lösung:

a) 90° , b) 60° , c) 60° .

Aufgabe 74

Bestimmen Sie jeweils die Projektion des Vektors v in Richtung w .

a) $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, b) $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, c) $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Lösung:

Wir normieren zuerst den Richtungsvektor w um die Länge der Projektion als Skalarprodukt auszurechnen.

a) Länge der Projektion: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \bullet \left(\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 1$, Projektion: $1 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,
b) Länge: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{20}} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \frac{10}{\sqrt{20}}$, Projektion: $\frac{10}{\sqrt{20}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{20}} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,
c) v und w stehen senkrecht aufeinander, Projektion: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

7. Vorlesung

— Aufgaben zum 6. Kapitel (Abstände) —

Aufgabe 75

Bestimmen Sie jeweils den Lotfußpunkt L von P auf der Geraden g bzw. der Ebene E .

a) $P = (0; 0; 2)$ und $g = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}$,
b) $P = (9; 3; -1)$ und $g = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}$,
c) $P = (7; 4; -7)$ und $E = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R} \right\}$,
d) $P = (5; 1; 2)$ und $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R} \right\}$.

Lösung:

a) $L = (-3; 5; 1)$, b) $L = (0; 2; -3)$, c) $L = (1; 2; -3)$, d) $L = (1; 3; 4)$.

Aufgabe 76

Bestimmen Sie zu den Daten aus Aufgabe 75 jeweils den Abstand von P und g bzw. E .

Lösung:

a) $\sqrt{35}$, b) $\sqrt{86}$, c) $2\sqrt{14}$, d) $2\sqrt{6}$

Aufgabe 77

Bestimmen Sie jeweils den Abstand des Punktes P von der Geraden g bzw. der Ebene E .

a) $P = (-3; 3; 1)$ und $g = \left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}$,
b) $P = (1; 8; 4)$ und $g = \left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}$,
c) $P = (1; -4; 7)$ und $E = \left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R} \right\}$,
d) $P = (-3; -8; 4)$ und $E = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R} \right\}$.

Lösung:

a) $2\sqrt{6}$, b) 7, c) $2\sqrt{6}$, d) $\sqrt{2}$.

Aufgabe 78

Bestimmen Sie jeweils den Abstand des Punktes P von der Ebene E .

- a) $P = (-2; 9; 3)$ und $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 4z = 13 \right\}$,
b) $P = (2; 1; -1)$ und $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 6x + 2y + 3z = -17 \right\}$.

Lösung:

- a) $3\sqrt{2}$, b) 4.

Aufgabe 79

Berechnen Sie jeweils eine Normalenform oder Koordinatenform von E und bestimmen Sie dann den Abstand von P zu E .

- a) $E = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \mid p, q \in \mathbb{R} \right\}$ und $P = (3; 1; 2)$,
b) $E = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid p, q \in \mathbb{R} \right\}$ und $P = (5; 3; 1)$,
c) $E = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \mid p, q \in \mathbb{R} \right\}$ und $P = (-1; 4; -9)$.

Lösung:

- a) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y + 6z = 7 \right\}$ und $d(P, E) = 2$
b) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 4y - 8z = -18 \right\}$ und $d(P, E) = 3$
c) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 2y - z = 15 \right\}$ und $d(P, E) = 0$ (der Punkt P liegt auf E)

Aufgabe 80

Untersuchen Sie jeweils, ob die Gerade g zur Ebene E parallel ist und bestimmen Sie gegebenenfalls den Abstand.

- a) $g = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$ und $E = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$
b) $g = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$ und $E = \left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$

Lösung:

- a) Gerade und Ebene schneiden sich,
b) Abstand $\frac{15}{7}$.

Aufgabe 81

Untersuchen Sie jeweils, ob die Ebenen E_1 und E_2 parallel sind und berechnen Sie gegebenenfalls den Abstand von E_1 und E_2 .

- a) $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid p, q \in \mathbb{R} \right\}$ und $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y - 2z = 5 \right\}$,
b) $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \mid p, q \in \mathbb{R} \right\}$ und $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + y + 2z = 23 \right\}$,
c) $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid -x + 2y + 2z = 9 \right\}$ und $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y - 2z = -3 \right\}$.

Lösung:

- a) Ebenen schneiden sich, b) $\sqrt{14}$, c) 2.

Aufgabe 82

Bestimmen Sie jeweils den Abstand der Gerade g von der Geraden h .

- a) $g = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$ und $h = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$
b) $g = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$ und $h = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$

Lösung:

- a) 2,
b) 4,

Aufgabe 83

Bestimmen Sie jeweils den Abstand der Geraden g von der Geraden h bzw. der Ebene E , sofern sie sich nicht schneiden.

- a) $g = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid p \in \mathbb{R} \right\}$ und $h = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \mid q \in \mathbb{R} \right\}$,
b) $g = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid p \in \mathbb{R} \right\}$ und $h = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \mid q \in \mathbb{R} \right\}$,
c) $g = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \mid p \in \mathbb{R} \right\}$ und $E = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid q, r \in \mathbb{R} \right\}$,
d) $g = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \mid p \in \mathbb{R} \right\}$ und $E = \left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} \mid q, r \in \mathbb{R} \right\}$,
e) $g = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \mid p \in \mathbb{R} \right\}$ und $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + y + 2z = 23 \right\}$.

Lösung:

- a) 2, b) 4, c) Gerade und Ebene schneiden sich, d) $\frac{15}{7}$, e) $\sqrt{14}$.

8. Vorlesung

— Aufgaben zum 7. Kapitel (Kreise und Kugeln) —

Aufgabe 84

Welche geometrischen Figuren beschreiben die folgenden Mengen?

- a) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1^2 - 1) + (x_2 + 1)^2 = 8 \right\}$
- b) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - 1)^2 - 5 \leq -(x_2 + 2)^2 \right\}$
- c) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1^2 + 12x_1 + 3x_2^2 + 6x_2 = 0 \right\}$
- d) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 + x_2)^2 - x_1(x_2 + 3) + x_2(4 - x_1) = 10 \right\}$
- e) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + 2x_2(-1 + x_1 + x_3) \leq 7 + x_2^2 \right\}$
- f) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 8(x_1 + 2x_2)^2 + 12x_3 = 71 \right\}$

Lösung:

- a) Kreis(rand) mit Radius 3 um $M = (0; -1) \in \mathbb{R}^2$:
 $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + (x_2 + 1)^2 = 9 \right\}.$
- b) Kreis(fläche) mit Radius $\sqrt{5}$ um $M = (1; -2) \in \mathbb{R}^2$:
 $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 2)^2 \leq 5 \right\}.$
- c) Kreis(rand) mit Radius $\sqrt{5}$ um $M = (-2; -1) \in \mathbb{R}^2$:
 $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 + 2)^2 + (x_2 + 1)^2 = 5 \right\}.$
- d) Kreis(rand) mit Radius 2 um $M = (\frac{3}{2}; -2) \in \mathbb{R}^2$:
 $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - \frac{3}{2})^2 + (x_2 + 2)^2 = 4 \right\}.$
- e) Vollkugel mit Radius $\sqrt{8}$ um $M = (0; 1; 0) \in \mathbb{R}^3$:
 $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + (x_2 - 1)^2 + x_3^2 \leq 8 \right\}.$
- f) Kugelfläche mit Radius 5 um $M = (1; 2; -\frac{3}{2}) \in \mathbb{R}^3$:
 $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 + \frac{3}{2})^2 = 25 \right\}$

Aufgabe 85

Berechnen Sie zu denen in Aufgabe 84 angegebenen geometrischen Objekten den Umfang, den Flächeninhalt oder das Volumen.

Lösung:

- a) Der Umfang beträgt $2\pi r = 2\pi \cdot 3 = 6\pi$.
- b) Der Flächeninhalt beträgt $\pi r^2 = \pi \cdot \sqrt{5}^2 = 5\pi$.
- c) Der Umfang beträgt $2\pi r = 2\pi \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \pi$.
- d) Der Umfang beträgt $2\pi r = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$.
- e) Das Volumen beträgt $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \sqrt{8}^3 = \frac{32 \cdot \sqrt{8}}{3}\pi$.
- f) Der Flächeninhalt beträgt $4\pi r^2 = 4\pi \cdot 5^2 = 100\pi$.

Aufgabe 86

Gegeben sei eine Kugelfläche durch den Mittelpunkt P und einen Punkt Q auf der Kugelfläche. Geben Sie jeweils eine explizite Darstellung der Kugelfläche an.

- a) $P = (3; -4; 1), \quad Q = (-4; 0; 5), \quad$ b) $P = (2; -2; 3), \quad Q = (0; 0; 4).$

Lösung:

Indem man den Abstand von P zu Q berechnet, erhält man den Radius der Kugelfläche. Entsprechend erhält man

- a) $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\| = 9\},$
- b) $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\| = 3\}.$

Aufgabe 87

Überprüfen Sie, ob die Gerade g Sekante, Tangente oder Passante des Kreises K ist und bestimmen Sie gegebenenfalls gemeinsame Punkte:

- a) $g = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}$ und $K = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - 3)^2 + (x_2 + 2)^2 = 13 \right\}$
- b) $g = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\},$ und $K = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 + 8x_2 + 9 = 0 \right\},$
- c) $g = \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}$ und $K = K((2; 1); 5),$
- d) $g = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}$ und $K = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 = 1 \right\}.$

Lösung:

- a) Setzen wir $x_1 = 1 + r$ und $x_2 = 1 - r$ in die Kreisgleichung ein, so folgt $r(2r - 10) = 0$, d.h. $r = 0$ oder $r = 5$. Die Gerade und der Kreis haben also zwei Schnittpunkte (die Gerade ist eine Sekante), deren Ortsvektoren gegeben sind durch

$$\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

- b) Die Kreisgleichung formen wir um zu

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 4)^2 = 8 \right\}.$$

Einsetzen von $x_1 = 1 + r$ und $x_2 = -r$ liefert $(r - 2)^2 = 0$. Die Gerade und der Kreis haben also genau einen Schnittpunkt (die Gerade ist eine Tangente). Dessen Ortsvektor ist

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- c) Der Kreis ist gegeben durch

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 = 8 \right\}.$$

Einsetzen von $x_1 = -4 + 2r$ und $x_2 = -2r$ liefert $r = 1$ oder $r = \frac{3}{2}$. Die Gerade und der Kreis haben also zwei Schnittpunkte (die Gerade ist eine Sekante) und deren Ortsvektoren sind

$$\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

- d) Setzen wir $x_1 = -2 + r$ und $x_2 = -1 - 2r$ in die Kreisgleichung ein, so berechnet man $(r + \frac{2}{10})^2 = -\frac{59}{25}$. Diese Gleichung ist für kein $r \in \mathbb{R}$ erfüllt, somit haben die Gerade und der Kreis keinen Schnittpunkt (die Gerade ist eine Passante).

Aufgabe 88

Gegeben sei der folgende Kreisrand

$$K((2;1); 2) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 = 4 \right\},$$

sowie die Punkte

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad U = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Welche Punkte liegen innerhalb des Kreises, welche liegen genau auf dem Kreisrand und welche liegen außerhalb des Kreises.

Lösung:

Wir müssen lediglich den Abstand der Punkte zum Mittelpunkt $M = (2 \ 1)^T \in \mathbb{R}^2$ bestimmen. Ist dieser kleiner als 2, so liegt der Punkt im Innern des Kreises, ist er gleich 2 liegt der Punkt genau auf dem Kreisrand. Ist der Abstand hingegen größer als 2, so liegt der Punkt außerhalb des Kreises. Man berechnet

$$\bullet \quad \|M - P\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{1}{4} + 4} = \frac{\sqrt{17}}{2} > 2$$

Der Punkt P liegt also außerhalb des Kreises.

$$\bullet \quad \|M - Q\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{9 + 0} = 3 > 2$$

Der Punkt Q liegt also außerhalb des Kreises.

$$\bullet \quad \|M - R\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{4 + 0} = 2$$

Der Punkt R liegt also auf dem Kreisrand.

$$\bullet \quad \|M - S\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{0 + 1} = 1 < 2$$

Der Punkt S liegt also innerhalb des Kreises.

$$\bullet \quad \|M - T\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \sqrt{3} \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$

Der Punkt T liegt also auf dem Kreisrand.

$$\bullet \quad \|M - U\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{1}{4} + 0} = \frac{1}{2} < 2$$

Der Punkt U liegt also innerhalb des Kreises.

Aufgabe 89

Bestimmen Sie jeweils die Schnittmenge der Kugelfläche K mit der Geraden g .

$$\text{a) } g = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \mid p \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad K = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\| = 6 \right\},$$

$$\text{b) } g = \left\{ \begin{pmatrix} 17 \\ -8 \\ 13 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix} \mid p \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad K = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\| = 7 \right\},$$

$$\text{c) } g = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid p \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad K = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\| = 3 \right\}.$$

Lösung:

$$\text{a) } \{(5; 1; 4), (3; 7; -4)\}, \quad \text{b) } \{(8; -4; 4), (-1; 0; -5)\}, \quad \text{c) } \emptyset$$