Aufgabe 2

a) $\sum_{k=0}^{n} 2^{n^2} = 2^{n+1} - 1$

INDUKTION ANF $n=0$

$$\sum_{k=0}^{n} 2^n \overset{!}{=} 2^{n+1} - 1$$

$$2^0 = 2^{0+1} - 1$$

$$1 \overset{!}{=} 2 - 1 = 1$$

$n = 1$

$$\sum_{k=0}^{n} 2^n = 2^{1+1} - 1$$

$$1 + 2^1 = 2^2 - 1$$

$$3 = 3$$

IND ANNAHME : $n+1$

$$\sum_{k_0}^{n+1} 2^{n+1}$$

IND SCHRITT : $n \to n+1$

$$\sum_{k=0}^{n} 2^n + 2^1 - 1 = \sum_{k=0}^{n+1} 2^{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} 2^n = 2^{n+1} - 1$$

Ind Anf: $n = 1$

$$\sum_{k=0}^{n} 2^n = 2^{n+1} - 1$$

$$\cancel{1} + 2^1 = 2^{1+1} - 1$$

$$3 = 3$$

Ind Annahme: $n+1$

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^{n+1}$$

Ind Schritt: $n \to n+1$

$$\sum_{k=0}^{n} 2^n + \left(2^{n+1} - 1\right) = \sum_{k=0}^{n} 2^n + \left(2^{(n+1)+1} - 1\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} 2^{n+1} \checkmark$$

Analysis 1 Blatt 3

Aufgabe 3 i)

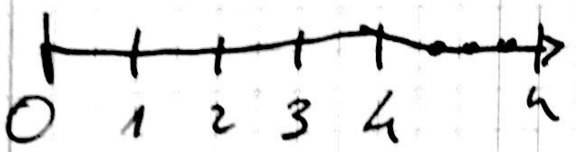
$n = (n_1 + n_2 + \dots + n_k)$

$(1 \square 1 \square 1 \square 1 \square 1 \square \dots 1)$

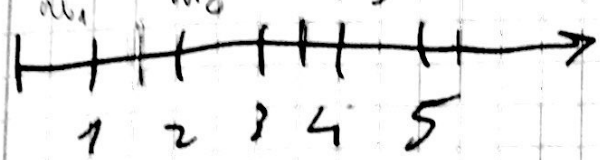
$\binom{n-1}{k-1}$ $n-1$ plätze
$k-1$ sonst ne zahl aufe

~~ii)~~ i) $n, k \in \mathbb{N}$ $k \leq n$

zz: n kann auf $\binom{n-1}{k-1}$ Weisen als Summe $n = n_1 + \dots + n_k$ schreiben mit $m \in \mathbb{N}$



Ein Tupel $(m_1, m_2, \dots, m_k)$ können wir einheitlich dadurch darstellen dass wir $k-1$ „Trennungen" auf d. Zahlenstrahl 0 bis n einführen



Das problem ist dann Analog zu der Verteilung von $k-1$ identischer Elemente auf $n-1$ Stellen.
Daher gibt es $\binom{n-1}{k-1}$ Möglichkeiten.

Analysis 1 Blatt 3

Aufgabe 2

ii)

$$(a+b+c)^n = (a+(b+c))^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} (b+c)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} b^{k-j} c^j$$

$$= \sum_{k=0} \sum_{j=0} \underbrace{\binom{n}{k}\binom{k}{j}} a^{n-k} b^{k-j} c^j =$$

$$\frac{n!\,\cancel{k!}}{\cancel{k!}\,(n-k)!\,j!\,(k-j)!}$$

$$= \sum_{i+j+k}^{n} \frac{n!}{i!\,j!\,k!} a^i b^j c^k$$

Scanned with CamScanner

Aufgabe 1

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Binomiale Symmetrie

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$$

Vgl. k aus n wählen

Vgl. n-k aus n wählen

$=$

Insgesamt wählen wir immer n aus 2n und wir addieren über alle Möglichkeiten wie viele Elemente der 2 Sorten wir wählen

Aufgabe 2

i)

Ind Anf. $n=0$

$$(a+b)^0 = 1 = a^{0-0} b^0 = 1$$

Ind Annahme $n \to n+1$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n (a+b)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \cdot (a+b) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^{k'}$$

$k = k'-1$

$k' = k+1$

$$\binom{n+1}{0} = 1 \qquad \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

$$= \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n-k+1} b^k + \binom{n}{n} b^{n+1}$$

$$\binom{n+1}{n+1} = 1$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n-k+1} b^{k}$$