Prof. Dr. K. Doerk
Christian Sevenheck
Thorsten Warmt

15.2.2002

2. Klausur zur Linearen Algebra I

Bitte tragt Euren Vor- und Nachnamen sowie die Matrikelnummer **gut leserlich** in Druckschrift in die nachfolgende Tabelle ein. Die Bearbeitungszeit für die Klausur beträgt 3 Stunden. Eigene Aufzeichnungen und Bücher dürfen verwendet werden, aber keine Taschenrechner. Insgesamt sind 50 Punkte zu erreichen. Bitte bearbeitet alle Aufgaben auf gesonderten Blättern und schreibt auf jedes Blatt Euren Namen und Eure Matrikelnummer.

Vorname	Name	Matrikelnummer

In die nächste Tabelle bitte **nichts** eintragen !!!

	Punkte
1. Aufgabe	
2. Aufgabe	
3. Aufgabe	
4. Aufgabe	
5. Aufgabe	
Summe	

1. *(1+1+2+2+1+1+2 Punkte)* Entscheide, welche der folgenden Untermengen der jeweiligen Vektorräume Untervektorräume sind und gib eine kurze Begründung an.

   (a) $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid 5a + 3b - c = 0\} \subset \mathbb{R}^3$
   (b) $\{(a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \mid 5a + 3b - c = 0\} \subset \mathbb{C}^3$
   (c) $\mathbb{Q}[x] \subset \mathbb{R}[x]$, hierbei wird $\mathbb{R}[x]$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum betrachtet.
   (d) $\{(a_{ij}) \in (k)_n \mid a_{ij} = 0 \;\forall i > j\} \subset (k)_n$ (k ist hier ein beliebiger Körper)
   (e) $\{(a,b) \in \mathbb{C}^2 \mid 2a + ib = 1\} \subset \mathbb{C}^2$
   (f) $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 - b^2 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$
   (g) $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + b^2 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$

2. *(10 Punkte)* Es sei $\mathrm{ADD} : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}$ die lineare Abbildung von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen, für deren darstellende Matrix bezüglich der kanonischen Basen

$$\mathcal{E}_1 = ((1)) \text{ von } \mathbb{Q} \text{ und } \mathcal{E}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ von } \mathbb{Q}^2$$

   die Gleichung ${}_{\mathcal{E}_1}\mathrm{ADD}_{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ gilt.

   (a) Finde die darstellende Matrix ${}_{\mathcal{B}_1}\mathrm{ADD}_{\mathcal{B}_2}$ von ADD bezüglich der Basen

$$\mathcal{B}_1 = ((2)) \text{ von } \mathbb{Q} \text{ und } \mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \text{ von } \mathbb{Q}^2.$$

   (b) Bestimme Kern und Bild der Abbildung ADD.

3. *(10 Punkte)* Betrachte den $\mathbb{R}$-Vektrorraum $(\mathbb{R})_2$. Für $M \in (\mathbb{R})_2$ bezeichne M^t die transponierte Matrix.

   (a) Zeige, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{SYM} : (\mathbb{R})_2 & \longrightarrow & (\mathbb{R})_2 \\ M & \longmapsto & \frac{1}{2}(M + M^t) \end{array}$$

   ein Endomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen ist.

   (b) Finde die darstellende Matrix ${}_{\mathcal{E}}\mathrm{SYM}_{\mathcal{E}}$ bezüglich der kanonischen Basis

$$\mathcal{E} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

   von $(\mathbb{R})_2$

   (c) Bestimme den Rang r der Abbildung SYM.

   (d) Finde eine Basis $\mathcal{B}$ von $(\mathbb{R})_2$, so dass für die darstellende Matrix von SYM bezüglich $\mathcal{B}$ gilt

$${}_{\mathcal{B}}\mathrm{SYM}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} E_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

   wobei E_r die $r \times r$ Einheitsmatrix bezeichnet.

4. *(10 Punkte)* Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper k und $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V. Seien $a, b \in k$ zwei fest gewählte Skalare. Dann definieren wir die lineare Abbildung $\Phi \in \mathrm{Hom}_k(V,V)$

$$\begin{array}{rcl} \Phi : V & \longrightarrow & V \\ v_i & \longmapsto & av_i + b \sum_{j=1}^{n} v_j \end{array}$$

   Zeige, dass die Homomorphismen id, Φ und Φ^2 (betrachtet als Elemente des Vektorraums $\mathrm{Hom}_k(V,V)$) linear abhängig sind.

Bitte wenden !!!

5. *(2+3+2+3 Punkte)*
Sei k ein endlicher Körper. Betrachte den Polynomring $k[t]$ in einer Variablen. Definiere die folgende Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : k[t] &\longrightarrow \mathrm{Abb}(k,k) \\ P(t) &\longmapsto (a \mapsto P(a)) \end{aligned}$$

(a) Zeige, dass Φ ein Homomorphismus von k-Vektorräumen ist.

(b) Zeige, dass Φ nicht injektiv ist.

(c) Sei $y \in k$, dann definieren wir das folgende Polynom $P_y(t) \in k[t]$

$$P_y(t) = \prod_{x \in k \setminus \{y\}} \frac{t-x}{y-x}$$

Bestimme die Werte $P_y(a)$ für $a \in k$.

(d) Zeige, dass Φ surjektiv ist.

Viel Erfolg !!!