Applications linéaires.

Sujet 1.

Question de cours.

Énoncer le théorème du rang pour une application linéaire $f : E \to F$.

Exercice - Endomorphismes en dimension finie. ($\star$)

Pour chacune des applications suivantes, montrert qu'elle est linéaire et en déterminer noyau et image.

1. $\phi_1 : (x, y, z, t) \mapsto (x - y + t, 2x + y - z, y + z)$
2. $\phi_2 : (x, y, z) \mapsto (x + z, y + z, 0)$
3. $\phi_3 : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto P - (X - 1)P'$

Exercices complémentaires.

N° 1 - Endormorphismes nilpotents d'ordre 2. ($\star\star$) *Agro-Véto*

Considérons $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ tel que $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)}$ et $f \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)}$.

1. Montrer que $rg(f) \in \{1, 2\}$.
2. Si $rg(f) = 1$, montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ telle que :
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
3. Si $rg(f) = 2$, montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ telle que :
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

N° 2 - Endomorphisme de polynômes. ($\star\star\star$) *Agro-Véto*

Considérons l'application Φ définie par :
$$\begin{aligned} \Phi : &\mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ &P \mapsto (X^2 - 1)P'' + XP' - 4P \end{aligned}$$

1. Montrer que Φ est un endormorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non-nul. Déterminer $\deg(\Phi(P))$.
3. Déterminer le noyau de Φ.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note Φ_n la restriction de Φ à l'espace $\mathbb{R}_n[X]$.
   (a) Montrer que Φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Déterminer sa matrice dans la base canonique. Que remarque-t-on ?

$\star\star\star$

Applications linéaires.

Sujet 2.

Question de cours.

Définir l'injectivité pour une application linéaire $f : E \to F$.

Exercice - Une propriété des polynomes de degré inférieur à 3. ($\star\star$) *(Agro-Véto)*

Considérons l'application f définie par :

$$\begin{aligned} f :\quad & \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^4 \\ & P \mapsto (P(0), P'(1), P''(2), P^{(3)}3) \end{aligned}$$

1. Montrer que f est linéaire et en donner la matrice M dans les bases canoniques.
2. M est-elle inversible ? Si oui, déterminer M^{-1}.
3. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Exprimer $P'(0)$ et $P''(0)$ en fonction de $P'(1), P''(2), P^{(3)}3$.

Exercices complémentaires.

N° 2 - Endormorphismes nilpotents d'ordre 2. ($\star\star$) *Agro-Véto*

Considérons $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ tel que $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)}$ et $f \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)}$.

1. Montrer que $rg(f) \in \{1, 2\}$.
2. Si $rg(f) = 1$, montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Si $rg(f) = 2$, montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

N° 3 - Endomorphisme de polynômes. ($\star\star\star$) *Agro-Véto*

Considérons l'application Φ définie par :

$$\begin{aligned} \Phi :& \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ & P \mapsto (X^2 - 1)P'' + XP' - 4P \end{aligned}$$

1. Montrer que Φ est un endormorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non-nul. Déterminer $\deg(\Phi(P))$.
3. Déterminer le noyau de Φ.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note Φ_n la restriction de Φ à l'espace $\mathbb{R}_n[X]$.
   (a) Montrer que Φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Déterminer sa matrice dans la base canonique. Que remarque-t-on ?

$\star\star\star$

Applications linéaires.

Sujet 3.

Question de cours.

Définir la surjectivité pour une application linéaire $f : E \to F$.

Exercice - Relations de noyau et image. ($\star$)

Considérons un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer :

1. $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \iff \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$
2. $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \iff \forall z \in E, \exists (x, y) \in \mathrm{Ker}(f) \times \mathrm{Im}(f) \quad z = x + y$

Exercices complémentaires.

N° 2 - Endormorphismes nilpotents d'ordre 2. ($\star\star$) *Agro-Véto*

Considérons $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ tel que $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)}$ et $f \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)}$.

1. Montrer que $rg(f) \in \{1, 2\}$.
2. Si $rg(f) = 1$, montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Si $rg(f) = 2$, montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

N° 3 - Endomorphisme de polynômes. ($\star\star\star$) *Agro-Véto*

Considérons l'application Φ définie par :

$$\begin{aligned} \Phi : & \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ & P \mapsto (X^2 - 1)P'' + XP' - 4P \end{aligned}$$

1. Montrer que Φ est un endormorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non-nul. Déterminer $\deg(\Phi(P))$.
3. Déterminer le noyau de Φ.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note Φ_n la restriction de Φ à l'espace $\mathbb{R}_n[X]$.
   (a) Montrer que Φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Déterminer sa matrice dans la base canonique. Que remarque-t-on ?

$\star\star\star$