Probabilités et Variables aléatoires.

Question de cours.

Donner la définition de la variance, ainsi que les propriétés principales.

Exercice - Loi de poisson.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+$ convergeant vers λ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{\lambda_n}{n}$.
Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Question de cours.

Définir la loi de probabilité de géométrique, calculer son espérance ainsi que sa variance.

Exercice - Rupture de stock.

Un commerçant estime que la demande d'un certain produit est modélisable par une variable aléatoire X à valeurs entières dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(X = k) = \frac{p^k}{(1+p)^{k+1}}$$

où $p > 0$ est le prix de la dernière campagne publicitaire.

1. Vérifier que l'on définit bien une loi de probabilité pour X.
2. Calculer espérance et variance de X.
3. Connaissant son stock s, déterminer la probabilité de rupture de stock.

Question de cours.

Définition de la notion d'indépendance mutuelle d'une famille finie d'évenements.

Exercice - Une histoire de boule verte. *X PC 2016.*

Une urne contient 3 boules vertes et 3 boules rouges. Une boule est enlevée de l'urne au hasard. Alice tire 6 fois une boule avec remise et obtient 6 fois une boule rouge. Bob tire 600 fois une boule avec remise et obtient 303 fois une rouge et 297 fois une verte. Lequel des deux peut « s'attendre le plus » à ce qu'une boule verte ait été enlevée ?

Exercices complémentaires.

0.1 Tribu. ($\star$)

Soit Ω un ensemble fini et $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω. On dit qu'un élément non vide $A \in \mathcal{T}$ est un *atome* lorsque, pour tout $B \in \mathcal{T}$:

$$B \subset A \quad \text{et} \quad B \neq \emptyset \implies B = A.$$

1. Dans cette question, $\Omega = \{a, b, c\}$. Déterminer toutes les tribus sur Ω et en préciser leurs atomes respectifs.
2. On revient au cas général. Montrer que le cardinal de toute tribu sur Ω est une puissance de 2.
3. On note B_n le nombre de tribus de $\Omega = [\![1, n]\!]$. Établir une relation de récurrence permettant de construire les termes de la suite $(B_n)_{n>1}$.

0.2 Réussir à deux épreuves. ($\star$)

Une population de n élèves passe un examen constitué de deux épreuves indépendantes. La probabilité de réussite à la première (resp. deuxième) est p_1 (resp. p_2). Les deux épreuves donnent des résultats indépendants. Quelle est la loi de la variable aléatoire X donnant le nombre de candidats ayant réussi les deux épreuves ?

0.3 Obtenir la boule blanche. ($\star\star$) *X PC 2017*

Une urne contient une boule blanche et une deuxième boule aléatoire, blanche ou noire, chaque couleur ayant une probabilité $\frac{1}{2}$ · Après le choix aléatoire de la boule, on effectue deux tirages successifs sans remise. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième tirage sachant que le premier tirage a donné une boule blanche.

0.4 Jeu à trois joueurs. ($\star\star$)

Soit un jeu à trois joueurs : A, B et C. Chaque partie se joue à deux. La probabilité de gagner la partie est de $\frac{1}{2}$ pour chacun des joueurs. Le vainquuer d'une partie affronte celui qui n'a pas joué, et ainsi de suite. Le jeu s'arrête quand un joueur gagne deux parties d'affilée. On suppose que A et B commencent.

1. Quelle est la probabilité que A gagner la 3^e partie ? la 4^e ?
2. Généraliser.
3. Quelle est la probabilité que A gagne le jeu ?

0.5 Calcul d'espérance. ($\star\star\star$) *oral de l'X*

Soient X, Y deux variables aléatoires strictement positives, indépendantes et de même loi. Montrer :

$$\mathbb{E}(\frac{X}{Y}) \geq 1$$

0.6 Durée de vie d'une ampoule. ($\star\star\star$) *oral de l'X*

On suppose que l'on peut modéliser la durée de vie (en jours) d'une ampoule par la variable aléatoire X qui suit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{2^n}$$

Si l'ampoule est toujours allumée le jour n, combien de jours , *en moyenne*, restera-t-elle encore allumée ?

0.7 Suite de variables aléatoires. ($\star\star\star\star$) *oral de l'ENS*

Soit f une fonction continue de [0,1] dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2 \qquad |f(x) - f(y)| \leq \epsilon + C(x - y)^2$$

2. Soit $x \in [0, 1]$. Soit $X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées et suivant une loi de Bernoulli de paramètre x. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$S_n = X_1 + ... + X_n$$

Montrer que :

$$\left| f(x) - \mathbb{E}(f(\frac{S_n}{n})) \right| \leq \epsilon + \frac{C}{n}$$

$\star\star\star$

Corrections.

Élève 1.

Question de cours - Définition de la variance et propriétes.

La variance est le moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire. Sa définition est :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$$

Comme propriétés, on attendait :

1. $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$
2. $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

Exercice - Loi de poisson.

Par hypothèse, on a :

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k}\frac{\lambda_n^k}{n^k}\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}.$$

Observons que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\binom{n}{k}}{n^k} = \frac{1}{k!}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \lambda_n^k = \lambda^k.$$

Remarquons que :

$$\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} = \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k}\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n},$$

et que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{k} = 1.$$

Pour conclure, il reste alors à montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n} = e^{-\lambda},$$

On a bien :

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = \lim_{n\to+\infty} \binom{n}{k}\frac{\lambda_n^k}{n^k}\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},$$

Élève 2.

Question de cours - Loi géométrique.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique. La loi géométrique de paramètre p est la loi suivante :

1. $\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{N}^\star$
2. $\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(X = k) = p \times (1 - p)^{k-1}$
3. $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$
4. $\mathbb{V} = \frac{1-p}{p^2}$

Exercice - Rupture de stock.

1. On vérifie :

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(X = k) \geq 0$$

Montrons à présent que la série $\sum \mathbb{P}(X=k)$ converge vers 1.

$$\sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{N} \frac{p^k}{(1+p^{k+1})} = \frac{1}{1+p} \sum_{k=0}^{N} (\frac{p}{1+p})^k \longrightarrow \frac{1}{1+p} \times \frac{1}{1-\frac{p}{1+p}} = 1$$

On reconnait une série géométrique, convergente donc vers 1. *(Remarque : on peut remarquer que X suit une loi géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre $\frac{1}{1+p}$)*

2. Les calculs d'espérance et de variance sont ceux d'une loi géométrique. On trouve :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1-\frac{1}{1+p}}{\frac{1}{1+p}} = p \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{1-\frac{1}{1+p}}{\left(\frac{1}{1+p}\right)^2} = p(p+1)$$

3. La probabilité de rupture est la probabilité $\mathbb{P}(X > s)$. Calculons la probabilité de l'évenement complémentaire :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\overline{X > s}) &= \mathbb{P}(X \leq s) \\
&= \sum_{k=0}^{s} \mathbb{P}(X=k) \\
&= \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{s} \left(\frac{p}{p+1}\right)^k \\
&= 1 - \left(\frac{p}{1+p}\right)^{s+1}
\end{aligned}$$

Alors, par complémentarité, on trouve la probabilité de rupture de stock :

$$\mathbb{P}(\overline{X > s}) = \left(\frac{p}{1+p}\right)^{s+1}$$

Élève 3.

Question de cours - Indépendance mutuelle d'une famille finie.

SUP Définition de la notion d'indépendance mutuelle d'une famille finie d'événements	**Chapter ALEA.12 Si $(A_1, \dots, A_n)$ est une famille de n évènements, l'indépendance mutuelle signifie que toute sous-famille $A_{i_1}, \dots, A_{i_p}$ on a $\mathbf{P}\left(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_p}\right) = \mathbf{P}\left(A_{i_1}\right) \times \dots \times \mathbf{P}\left(A_{i_p}\right)$**	**Attention ce n'est pas uniquement $\mathbf{P}\left(A_1 \cap \dots \cap A_p\right) = \mathbf{P}(A_1) \times \dots \times \mathbf{P}\left(A_p\right)$**

Exercice - Une histoire de boule verte.

Pour la première expérience, on note V_1 et O_1 les événements : « la boule verte a été retirée » et « on obtient 6 fois une boule rouge lors d'un tirage de 6 boules avec remise ». On note de même, pour la seconde expérience, V_2 et O_2 les événements : « la boule verte a été retirée » et « on obtient 303 fois une rouge et 297 fois une verte lors d'un tirage de 600 boules avec remise ».
Pour tout $i \in \{1,2\}$,

$$P(V_i \mid O_i) = \frac{P(O_i \mid V_i)P(V_i)}{P(O_i \mid V_i)P(V_i) + P(O_i \mid \overline{V_i})P(\overline{V_i})} = \varphi(\rho_i)$$

où

$$\rho_i := \frac{P(O_i \mid \overline{V_i})}{P(O_i \mid V_i)} \quad \text{et} \quad \varphi : x \longmapsto \frac{1}{1+x},$$

car les événements V_i et leurs contraires sont de même probabilité $\frac{1}{2}$.
Première expérience. Le nombre de boules rouges tiré suit la loi $\mathcal{B}\big(6, \frac{3}{5}\big)$ sachant V_1 et $\mathcal{B}\big(6, \frac{2}{5}\big)$ sachant $\overline{V_1}$. Ainsi

$$\rho_1 = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^6}{\left(\frac{3}{5}\right)^6} = \left(\frac{2}{3}\right)^6.$$

Seconde expérience. Le nombre de boules rouges tiré suit la loi $\mathcal{B}\big(600, \frac{3}{5}\big)$ sachant V_2 et $\mathcal{B}\big(600, \frac{2}{5}\big)$ sachant $\overline{V_2}$. Ainsi

$$\rho_2 = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^{303}\left(\frac{3}{5}\right)^{297}}{\left(\frac{3}{5}\right)^{303}\left(\frac{2}{5}\right)^{297}} = \left(\frac{2}{3}\right)^6.$$

Conclusion. On a donc $\rho_1 = \rho_2$, et par conséquent

$$P(V_1 \mid O_1) = P(V_2 \mid O_2).$$

Les deux compères peuvent donc s'attendre chacun autant à ce qu'une boule verte ait été enlevée.

Corrections complémentaires.

0.8 Tribu.

1. Il existe 5 tribus sur $\Omega = \{a, b, c\}$:

$$\begin{cases} \mathcal{T}_0 = \{\emptyset, \Omega\} & \text{d'atome : } \Omega \\ \mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b,c\}, \Omega\} & \text{d'atomes : } \{a\} \text{ et } \{b,c\} \\ \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{b\}, \{a,c\}, \Omega\} & \text{d'atomes : } \{b\} \text{ et } \{a,c\} \\ \mathcal{T}_3 = \{\emptyset, \{c\}, \{a,b\}, \Omega\} & \text{d'atomes : } \{c\} \text{ et } \{a,b\} \\ \mathcal{T}_4 = \mathcal{P}(\Omega) & \text{d'atomes : } \{a\}, \{b\} \text{ et } \{c\} \end{cases}$$

2. Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω et X l'ensemble de ses atomes (fini car Ω est fini). X constitue une partition de Ω et $\mathcal{T}$ est en bijection avec $\mathcal{P}(X)$, donc $card(\mathcal{T}) = card(\mathcal{P}(X)) = 2^{card(X)}$, et est donc une puissance de 2.
3. D'après ce qui précède, il y a autant de tribus que de partitions de Ω (puisque les atomes d'une tribu en constituent une partition). B_{n+1} est donc égal au nombre de partitions de $\Omega = [\![1, n+1]\!]$. Une telle partition est entièrement déterminée par la partition qu'elle induit sur le complémentaire de la partie contenant l'entier 1. En triant ces partitions selon le nombre k d'éléments de la partie ne contenant pas 1, il en résulte que :

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$

0.9 Réussir à deux éprueves.

Chaque réussite aux deux épreuves **indépendantes** constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre p_1p_2. Alors, X qui représente la somme de ces variables aléatoires suivant des lois de Bernoulli suit une loi binomiale de paramètres (n, p_1p_2).

0.10 Obtenir la boule blanche.

Notons B, B_1, B_2 les événements suivants : - B : « la boule aléatoire est blanche », - B_1 : « on tire une blanche au premier tirage », - B_2 : « on tire une blanche au second tirage ».
On cherche $P(B_2 \mid B_1)$.

$$P(B_2 \mid B_1) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_1)}.$$

Par la formule des probabilités totales :

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1 \cap B_2 \mid B)P(B) + P(B_1 \cap B_2 \mid \overline{B})P(\overline{B}),$$

$$P(B_1) = P(B_1 \mid B)P(B) + P(B_1 \mid \overline{B})P(\overline{B}).$$

Ainsi,

$$P(B_2 \mid B_1) = \frac{P(B_1 \cap B_2 \mid B)P(B) + P(B_1 \cap B_2 \mid \overline{B})P(\overline{B})}{P(B_1 \mid B)P(B) + P(B_1 \mid \overline{B})P(\overline{B})}.$$

Or,

$$P(B) = P(\overline{B}) = \tfrac{1}{2}, \quad P(B_1 \cap B_2 \mid B) = 1, \quad P(B_1 \cap B_2 \mid \overline{B}) = 0,$$

$$P(B_1 \mid B) = 1, \quad P(B_1 \mid \overline{B}) = \tfrac{1}{2}.$$

On obtient donc :

$$P(B_2 \mid B_1) = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}.$$

0.11 Jeu à trois joueurs.

1. Écrivons les suites possibles de vainqueurs. On peut avoir AA ou BB et alors le jeu s'arrête. Sinon, on peut avoir ACC (fin du jeu) ou ACB si A gagne la 1ère partie et C, qui joue alors la 2^e, la gagne (A ne peut pas jouer la 3^e car il jouait la 2^e et l'a perdue), BCC (fin du jeu) ou BCA si B gagne la 1ère et C la 2^e (B ne peut pas jouer la 3^e car il jouait la 2^e et l'a perdue).
   On a alors
   $$P(\text{"A gagne la 3}^e\text{ partie"}) = P(BCA) = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}.$$
   Si la 4^e partie a lieu, on peut avoir : $ACBB$ (fin du jeu) ou $ACBA$ pour un début ACB (la 3^e partie opposait B et C, donc la 4^e oppose B et A) ; $BCAA$ (fin du jeu) ou $BCAB$ pour un début BCA.
   Finalement,
   $$P(\text{"A gagne la 4}^e\text{ partie"}) = P(ACBA \cup BCAA) = 2 \times \frac{1}{2^4} = \frac{1}{8}.$$
2. On remarque que la partie ne s'arrête pas tant que l'on a des successions de BCA ou de ACB. Après un BCA ou un ACB, ce sont A et B qui jouent car C a joué et perdu la dernière.
   Pour $k \in \mathbb{N}$,
   - A gagne la $(3k+1)$-ième partie si on a BCA répété k fois successivement puis A, ou ACB répété k fois successivement puis A. Donc :
     $$P(\text{"A gagne la }3k\text{+1-ième partie"}) = P(BCA \dots BCAA) + P(ACB \dots ACBA) = 2 \times \frac{1}{2^{3k+1}} = \frac{2}{2^{3k+1}} = \frac{1}{2^{3k}} = \frac{1}{8^k}.$$
   - A gagne la $(3k+2)$-ième partie si on a ACB répété k fois successivement puis AA. En effet, si on a BCA répété k fois, on peut ensuite avoir A (fin à la $(3k+1)$-ième partie) ou B (mais alors A ne jouera pas la $(3k+2)$-ième). Si on a ACB répété k fois, on peut ensuite avoir B (fin à la $(3k+1)$-ième), ou AA (et A gagne la $(3k+2)$-ième), ou AC. Donc :
     $$P(\text{"A gagne la }3k+2\text{-ième partie"}) = P(ACB \dots ACBAA) = \frac{1}{2^{3k+2}}.$$
   - A gagne la $(3k+3)$-ième partie si, d'après les différents cas déjà étudiés, on a BCA répété $k+1$ fois successivement, donc :
     $$P(\text{"A gagne la }3k+3\text{-ième partie"}) = P(BCA \dots BCABCA) = \frac{1}{2^{3k+3}} = \frac{1}{8^{k+1}}.$$

   On retrouve bien les résultats précédents pour $3k+3$ et $k=0$, ou $3k+1$ et $k=1$.

3. On constate que A peut gagner le jeu à la $3k+1$-ième partie ($k \in \mathbb{N}^*$) avec BCA...BCAA (probabilité $\frac{1}{2^{3k+1}}$) ou à la $3k+2$-ième avec ACB...ACBAA (probabilité $\frac{1}{2^{3k+2}}$), ($k \in \mathbb{N}$), d'où

$$P(\text{"A gagne le jeu"}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{3k+1}} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{3k+2}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{8^k} + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{8^k} = (\frac{1}{16} + \frac{1}{4}) \frac{1}{1-\frac{1}{8}}$$

donc $P(\text{"A gagne le jeu"}) = \frac{5}{14}$.

0.12 Calcul d'espérance.

Remarque.

Il faut ici remarquer que, comme X et Y sont de même loi, alors $\frac{X}{Y}$ et $\frac{Y}{X}$ aussi. Dès lors $\mathbb{E}\left(\frac{X}{Y}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{Y}{X}\right)$.

Remarquons ensuite que, comme X et Y sont à valeurs strictement positives, on peut définir les variables aléatoires $\sqrt{\frac{X}{Y}}$ et son inverse. Alors, comme $(\sqrt{\frac{X}{Y}} + \sqrt{\frac{Y}{X}})^2 \geq 0$, alors par croisssance de l'espérance et en développant, on a :

$$\mathbb{E}\left(\frac{X}{Y}\right) + \mathbb{E}\left(\frac{Y}{X}\right) \geq \mathbb{E}\left(2\sqrt{\frac{X}{Y}\frac{X}{Y}}\right)$$

Alors, on a $\mathbb{E}\left(\frac{X}{Y}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{Y}{X}\right)$ et en utilisant l'inégalité précedemment démontrée on donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\frac{X}{Y}\right) + \mathbb{E}\left(\frac{Y}{X}\right) &= \mathbb{E}\left(\frac{X}{Y} + \frac{Y}{X}\right) \\ &\geq \mathbb{E}\left(2\sqrt{\frac{X}{Y}\frac{Y}{X}}\right) \\ &\geq \mathbb{E}(2) = 2 \end{aligned}$$

On divise par deux et on obtient l'inégalité demandée :

$$\boxed{\mathbb{E}(\tfrac{X}{Y}) \geq 1}$$

0.13 Durée de vie d'une ampoule.

Remarque.

On suppose que l'ampoule est allumée le jour n, alors $X > n$ et donc la *moyenne* que l'on cherche à calculée est, implicitement, la moyenne **pondérée par les probabilités**, ce qui correspond à $\mathbb{E}(X|X \geq n)$.

Déterminons déjà la probabilitée associée :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}(X = n+k \mid X > n) &= \frac{\mathbb{P}(X = n+k \cap X > n)}{\mathbb{P}(X > n)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X = n+k)}{\mathbb{P}(X > n)} \\ &= \frac{2^{-(n+k)}}{\sum_{i=n+1}^{+\infty} 2^{-i}} \\ &= \frac{2^{-(n+k)}}{2^{-(n+1)} \sum_{i=0}^{+\infty} 2^{-i}} \end{aligned}$$

$$= \frac{2^{-(n+k)}}{2^{-(n+1)} \times 2}$$
$$= 2^{-k}$$

Calculons à présent l'espérance recherchée :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X|X \geq n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} (n-1+k) \times \mathbb{P}(X = n-1+k | X > n-1) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} (n-1+k) 2^{-k} \\
&= (n-1) \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} + \sum_{k=1}^{+\infty} k 2^{-k}
\end{aligned}$$

Pour la somme de gauche, on reconnait, au terme pour $k = 0$ près, une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et, pour le terme de droite, on reconnait une série géométrique dérivée de même raison. La première vaut $\frac{1}{2} \times 2 = 1$ et la seocnde vaut $\frac{1/2}{(1-1/2)^2} = 2$. D'où :

$$\boxed{\mathbb{E}(X|X \geq n) = n+1}$$

⋆⋆⋆