Teoria tratta dagli appunti del corso 2016/2017 possono contenere errori o pezzi mancanti rispetto al corso attuale, da usare come base per ripassare o altro, consigliato studiare sul libro

Sistemi Lineari

Un sistema lineare di **m** equazioni ed **n** incognite è:

$$\sum : \begin{cases} a_{11}\, x_1 + \cdots + a_{1n}\, x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}\, x_1 + \cdots + a_{mn}\, x_m = b_m \end{cases}$$

In un sistema lineare si considerano contemporaneamente m equazioni lineari (polinomi di grado 1) in n incognite.

DEF.

Sia **sigma** un sistema lineare di m equazioni ed n incognite. Una soluzione di sigma è una n-pla ordinata di numeri s_1,-,s_2 tali che se sostituiti ordinatamente alle incognite x_1,-,x_2 si ottengono tutte uguaglianze vere.

Sia S l'insieme delle soluzioni di sigma allora sigma è compatibile se $S \neq \emptyset$; è incompatibile o impossibile se $S = \emptyset$.
Ogni sistema omogeneo ammette almeno la soluzione (0,…,0) che viene detta soluzione banale.
Se due sistemi Σ_1 e Σ_1 hanno lo stesso insieme delle soluzioni, allora sono detti **equivalenti**.

DEF.

Sigma sistema lineare con m equazioni, n incognite, se $b_1 \ldots = b_m = 0 \rightarrow \Sigma$ è omogeneo
Se Σ non è omogeneo allora Σ_0 ottenuto a partire da Σ ponendo uguali a 0 i termini noti, è detto **sistema lineare omogeneo** associato a sigma.

Se Σ è omogeneo allora $S = \emptyset$ perché la soluzione banale $\begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} \in S$

DEF.

Σ sistema lineare, la "tabella" $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$ è detta **matrice dei coefficienti del sistema Σ o matrice incompleta**

$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ è la **matrice colonna dei termini noti** (a destra dell'uguale).

$A/b = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} & b_m \end{array}\right)$ è detta la **matrice completa** o **orlata**.

Matrici

Una matrice è un insieme i cui elementi hanno un duplice ordinamento.
Una matrice di m righe ed n colonne è:

$$A_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$ con **m riga** ed **n colonna**

($a_{\mathbf{ij}}$) **i** indice di riga e **j** indice di colonna $i = 1, \dots, m \mid j = 1, \dots, m$

L'insieme delle matrici reali m x n è $M_{m,n}(\mathbb{R})$
Le matrici m x 1 sono dette **matrici colonna**
Le matrici 1 x n sono dette **matrici riga**
Se m = n la matrice A è detta **matrice quadrata di ordine n**
L'insieme delle matrici quadrate di ordine n è $M_n(\mathbb{R})$

SOLO PER MATRICI QUADRATE

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mm} \end{pmatrix}$$ diagonale **principale** $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mm} \end{pmatrix}$$ diagonale **secondaria**

Dato $A_{m,n} = a(i;y)$:
se $a_{iy} = 0 \ \forall\, i > y \rightarrow$ A è **triangolare superiore**
Le matrici triangolari superiori sono matrici quadrate che hanno nulli tutti gli elementi al di sotto della diagonale principale
se $a_{iy} = 0 \ \forall\, i \geq y \rightarrow$ A è **strettamente triangolare superiore**
se $a_{iy} = 0 \ \forall\, i < y \rightarrow$ A è **triangolare inferiore**
Le matrici triangolari inferiori sono matrici quadrate che hanno nulli tutti gli elementi al di sopra della diagonale principale
se $a_{iy} = 0 \ \forall\, i \leq y \rightarrow$ A è **strettamente triangolare inferiore**
se $a_{iy} = 0 \ \forall\, i \neq y \rightarrow$ A è **diagonale**
Una matrice diagonale è una matrice quadrata in cui solamente i valori della diagonale principale possono essere diversi da 0.

$$I_{m,n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ corrisponde alla **matrice identità** $$a(i;y) = \begin{cases} 0\ se\ i \neq y \\ 1\ se\ i = y \end{cases}$$

Eliminazione di Gauss-Jordan

Operazioni ammissibili (per riga):

1) Scambiare due righe tra loro.
2) Moltiplicare una riga per un numero α reale non nullo $\alpha \in \mathbb{R} \neq 0$
3) Sommare ad una riga un'altra riga.
4) Sommare ad una riga un multiplo reale di un'altra riga

Se ottengo una matrice M' da M usando operazioni ammissibili, diremo che $M \sim M'$.
Se B e B' sono matrici complete di due sistemi lineari Σ e Σ' e se $B \sim B'$ → Σ e Σ' sono equivalenti.

DEF.
Una riga è detta nulla se ogni elemento è uguale a 0
Il primo elemento (da sinistra) non nullo di una riga non nulla è detta **PIVOT**.
Una matrice è in **forma a scalini** (o **gradini**) per righe se soddisfa le seguenti due condizioni:
1) Tutte le righe nulle sono sotto quelle non nulle.
2) Il PIVOT di una riga non nulla si trova in una colonna a destra di tutte le colonne contenenti i PIVOT delle righe sovrastanti.

Una matrice è in **forma a scalini ridotta** se:
1) È in forma a scalini.
2) Ogni PIVOT è uguale a 1 ed è l'unico elemento non nullo della sua colonna.

Data una matrice M ∃! matrice M' equivalente ad M (secondo Gauss) tale che M' è in forma a scalini ridotta.

1) Quando si ha un PIVOT su ogni colonna delle incognite e non si hanno PIVOT nella colonna dei termini noti allora il **sistema lineare ha un'unica soluzione.**
2) Se si ha un PIVOT nella colonna dei termini noti allora il **sistema lineare non ha soluzioni**.
3) Se non si ha un PIVOT nella colonna dei termini noti e se almeno una colonna delle incognite non ha PIVOT allora il sistema lineare ha **infinite soluzioni**, che non vuol dire che tutte le n-ple sono soluzioni.

DEF.
Se un sistema lineare Σ ha **un'unica soluzione** si dice **determinata**, se ne ha **infinite** si dice **indeterminata**.
Posso togliere o aggiungere identità (0 = 0) a un sistema ottenendone uno equivalente.

Operazioni Tra Matrici

Somma di matrici:
A, B ∈ $M_{m,n}(\mathbb{R})$ A = a_{ij} , B = b_{ij} A+B = $(a_{ij} + b_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

Proprietà:
1) A + (B+C) = (A+B) + C; ∀ A,B,C ∈ $M_{m,n}(\mathbb{R})$ ASSOCIATIVA
2) ∃ O ∈ $M_{m,n}(\mathbb{R})$ | A + O = O +A = A; ∀ A ∈ $M_{m,n}(\mathbb{R})$ (∃ elemento neutro)
Con O = matrice di tutti zeri
3) ∀ A ∈ $M_{m,n}(\mathbb{R})$ ∃ A ∈ $M_n(\mathbb{R})$; A + (-A) = (-A) + A = 0 (∃ elemento opposto)
Se A = (a_{ij}) → -A = $(-a_{ij})$
4) A + B = B + A; ∀ A,B ∈ $M_{m,n}(\mathbb{R})$ Proprietà Commutativa

Prodotto di una matrice per uno scalare:
A ∈ $M_{m,n}(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ A = a_{ij} $\alpha \cdot A = (\alpha \cdot a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

Proprietà:
5) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$; ∀ $\alpha \in \mathbb{R}$ **;** ∀ A,B ∈ $M_{m,n}(\mathbb{R})$ Somma di Matrici
6) $(\alpha + B) A = \alpha A + \alpha B$; ∀ $\alpha \in \mathbb{R}$ **;** ∀ A,B ∈ $M_{m,n}(\mathbb{R})$ Somma di Scalari
7) $(\alpha B) A = \alpha(BA)$; ∀ $\alpha, B \in \mathbb{R}$ **;** ∀ A ∈ $M_{m,n}(\mathbb{R})$

8) $1A = A$; $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$
9) $OA = O_{m,n} = \alpha\, O_{m,n}$; $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ **;** $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$
10) $(-1)A = -A$; $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

Le proprietà da 1 a 8 implicano che l'insieme delle matrici $M_{m,n}(\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale reale.
Le proprietà 9,10 seguono le altre.

Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \rightarrow$ la **trasposta** di A è A^t (si invertono righe – colonne)

Proprietà:
1) $(A + B)^t = A^t + B^t$; $\forall A,B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$
2) $(\alpha A)^t = \alpha(A)^t$; $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ **;** $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$
3) $(A^t)^t = A$; $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

DEF.
A è **simmetrica** se $A^t = A$
A è **antisimmetrica** se $A^t = - A$
Si noti che ogni matrice antisimmetrica ha necessariamente nulli gli elementi della diagonale principale

Prodotto di matrici:
$A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ $\exists\, AB \Leftrightarrow n = p$ $A = a_{ij}$, $B = b_{jk}$
$C = AB \in M_{m,q}(\mathbb{R})$
$C = c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} aij\ bjk = a_{i1}b_{1k} + \dots + a_{in}b_{nk}$

In generale $AB \neq BA$ **non** è commutativo

$A_{m,n}\,O_{n,k} = O_{m,k}$; $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$
$O_{m,n}\,A_{n,k} = O_{m,k}$; $\forall A \in M_{n,k}(\mathbb{R})$

In generale:
$A_{m,n}\,B_{n,k} = O_{m,k} \rightarrow A_{m,n} = O_{m,n} \quad V \quad B_{m,k} = O_{n,k}$

Proprietà:
1) $A(BC) = (AB)C$; $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$; $\forall B \in M_{m,p}(\mathbb{R})$; $\forall C \in M_{m,p}(\mathbb{R})$
2) $A(B+C) = AB + AC$ $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$; $\forall B,C \in M_{n,p}(\mathbb{R})$
3) $(A+B)C = AC + BC$ $\forall A,B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$; $\forall B,C \in M_{n,p}(\mathbb{R})$
4) $(\alpha A)\, B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$; $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ **;** $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$; $\forall B \in M_{m,p}(\mathbb{R})$
5) $(AB)^t = B^t A^t$; $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$; $\forall B \in M_{m,p}(\mathbb{R})$
6) $AIn = InA = A$ $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

DEF.
Una matrice del tipo αIn è detta matrice scalare.

$$\alpha In = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Le matrici scalari commutando con ogni matrice: $\alpha InA = A(\alpha In)$

Potenze di matrici:

$A \in M_n(\mathbb{R})$; $A^0 = In$; $A^k = A \; x \; A \; x \; A \ldots\ldots$; k volte con $k \in \mathbf{Z} \geq \mathbf{0}$

DEF.

Data una matrice, prendono il nome di ***sottomatrici*** quelle matrici ottenute eliminando alcune righe e/o colonne della matrice in esame, mentre si dicono ***minori associati*** a una matrice i determinanti delle sottomatrici quadrate da essa estratte.

La **sottomatrice complementare** A_{ij} di a_{ij} è la sottomatrice complementare ottenuta eliminando la riga i e la colonna j.

Sia A una matrice quadrata di ordine $n \geq 2$, si dice ***minore complementare*** il determinante di una sottomatrice estratta da A eliminando una sola riga e una sola colonna

DEF.

Un **minore** di **ordine** k è il determinante di una sottomatrice quadrata ottenuta intersecando k righe e k colonne della matrice A.

Se $A \in M_n(\mathbb{R})$:

Il **cofattore** (o complemento algebrico) di a_{ij} è $\mathbf{(-1)^{i+j} \det(A_{ij})}$**;** i segni dei cofattori hanno struttura:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix} \text{ e cosi via}$$

Ovvero segno + se i + j è **pari**, segno – se i + j è **dispari**

Proposizione

Se esiste la **matrice inversa** di $A \in M_n(\mathbb{R})$ allora è unica.

Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile indico l'inversa con A^{-1}. Quindi se $\exists\, A^{-1}$ è tale che $A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = In$

Si ricordi che una matrice quadrata è invertibile ⇔ $\det(A) \neq 0$

Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, l'inversa $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Osservazione:

Una matrice quadrata di ordine n è invertibile ⇔ ha rango n

Teorema

Se $A \in GLn(\mathbb{R}) \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (cof(A))^t$ matrice dei cofattori

Proprietà:

L'insieme delle matrici invertibili di ordine n è indicato con $GLn(\mathbb{R})$ **(gruppo lineare generico**)

Proposizione:

1) Se $A \in GLn(\mathbb{R}) \rightarrow A^{-1} \in GLn(\mathbb{R})$ e $(A^{-1})^{-1} = A$
2) Se $A \in GLn(\mathbb{R}) \rightarrow A^t \in GLn(\mathbb{R})$ e $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
3) Se $A, B \in GLn(\mathbb{R}) \rightarrow AB \in GLn(\mathbb{R})$ e $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

Dimostrazione

1) $A^{-1} \in GLn(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists\, B \mid A^{-1} B = B\,A^{-1} = I$ se $B = A \rightarrow A^{-1} A = A\,A^{-1}$
2) $A^t \in GLn(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists\, B \mid A^t B = B\,A^t = I$
   Poiché A è invertibile allora traspongo ambo i membri →

$\begin{cases}(A\,A^{-1})^t = I^t \\ (A^{-1}A)^t = I^t\end{cases} = \begin{cases}(A^{-1})^t A^t = I & \textit{perchè tutte le matrici sono diagonali} \\ A^t (A^{-1})^t = I & \textit{sono simmetriche}\end{cases}$

3) AB ∈ GLn(ℝ) ⇔ ∃ C | (AB)C = C(AB) = I
   Se C = $A^{-1}\, B^{-1}$ → (AB) $(B^{-1}A^{-1})$ = AB$B^{-1}A^{-1}$ = AIA^{-1} = I
   Se $(B^{-1}A^{-1})$AB = $B^{-1}A^{-1}$AB = $B^{-1}IB = B^{-1}B = I$ c.v.d

Quindi:

$$A^k = \begin{cases} I & se\ k = 0 \\ A\,A = A & se\ k = \ Z\ \geq 0 \\ A^{-1}\,A^{-1} \ldots A^{-1} & se\ k = \ Z\ \leq 0 \end{cases}$$

DEF.
A ∈ GLn(ℝ); A è detta **ortogonale** se $A^t = A^{-1}$ cioè se A A^t = A^tA = I
L'insieme delle matrici ortogonali nxn si indica con **O(n)** ⊂ GLn(ℝ)

Traccia
A ∈ M_n(ℝ)
Si definisce **traccia** tr(A) di una matrice A la somma di tutti gli elementi sulla sua diagonale principale.
tr(A) = $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + \cdots + a_{mn}$

Proprietà:
1) tr(αA) = α tr(A) ∀ α ∈ ℝ **;** ∀ A ∈ M_n(ℝ)
2) tr(A+B) = tr(A) + tr(B) ∀ A,B ∈ M_n(ℝ)
3) tr(A^t) = tr(A) ∀ A ∈ M_n(ℝ)
4) tr(ABC) = tr(BCA) = tr(CAB) ∀ A,B,C ∈ M_n(ℝ)
   tr(ABC) ≠ tr(BAC)
   tr(AB) = tr(BA)

Determinante
A ∈ M_n(ℝ)
Il **determinante** di A è:
Se n = 1 → det(a_{11}) = a_{11}
Se n > 1 → [se fisso la colonna j (sviluppo di Laplace)]
det(A) = $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j} a_{ij}\ d(A_{ij})$ (sviluppo lungo la colonna j)

Data una matrice 2x2: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, il determinante è uguale a: **(a · d) – (b · c)**

Regola di Sarrus (3x3)

$A_{3x3} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ → det(A) = (aei) + (bfg) + (cdh) - (ceg) - (afh) – (bdi)

+	= a b c a b	-	= a b c a b
	d e f d e		d e f d e
	g h i g h		g h i g h

Proprietà:
1) det (A^t) = det(A); ∀ A ∈ M_n(ℝ)
2) se A è una triangolare superiore o inferiore o diagonale → det(A) = $\prod_{i=1}^{n} a_{ij} = a_{11}\, a_{22} \ldots\, a_{mn}$
   (prodotto degli elementi sulla diagonale principale)

3) Se ottengo B a partire da A scambiando due righe (o colonne) tra loro → det(B) = - det(A)
4) Se ottengo B a partire da A moltiplicando per uno scalare $\alpha \in \mathbb{R}$ una colonna (o riga) allora det(B) = α det(A)
   det(α A) = α^n det(A); ∀ A ∈ M_n ($\mathbb{R}$)
5) Se A ha una riga (o una colonna) con tutti gli elementi uguali a zero oppure ha due righe (o colonne) uguali o proporzionali → det(A) = 0
6) Se ottengo B a partire da A sommando a una riga (o colonna) un multiplo reale di un'altra riga (o colonna) → det(B) = det(A)
7) det(AB) = det(A) det(B); ∀ A,B ∈ M_n ($\mathbb{R}$) **teorema di BINET**
8) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$; A ∈ GLn($\mathbb{R}$)

DEF.
A ∈ M_n ($\mathbb{R}$)
I = {1,2,3,…,m}
J = {1,2,3,…,n}
Una sottomatrice di A è A_{hk} = (a_{ij}) con $i \in k \wedge j \in k \wedge H\ c\ I \wedge K\ c\ J$

RANGO
A ∈ M_n ($\mathbb{R}$)
Il **rango** di A, indicato con rg(A) o rk(A) è l'ordine del minore non nullo con ordine più grande.
$0 \le rg(A) \le \min(m,n)$; ∀ A ∈ M_n ($\mathbb{R}$)
rg(A) = 0 ⇔ A = $O_{m,n}$

DEF.
Se il rg(A) = min(m,n) si dice che A ha rango massimo (o pieno)
rg(A^t) = rg(A); ∀ A ∈ $M_{m,n}$ ($\mathbb{R}$)
1) Se tutti i minori di ordine K sono uguali a 0 allora sono uguali a 0 anche tutti i minori di ordine q > k
2) Se b ≠ 0 è un minore di ordine k corrispondente alla sottomatrice quadrata B di A e se sono uguali a zero tutti i minori di ordine k+1 corrispondenti a sottomatrici di A aventi B come sottomatrice allora sono uguali a zero tutti i minori di ordine k+1 di A (anche quelli non aventi B come sottomatrice della loro sottomatrice corrispondente e rg(A) = K **teorema di KRONECKER o degli orlati**

Teorema
A ∈ M_n ($\mathbb{R}$), B matrice a scalini
Tale che B ~ A allora rg(A) = rg(B) = numero di PIVOT (cioè uguale al numero di righe non nulle)

Teorema di ROUCHE-CAPELLI

Dato un sistema di m equazioni e n incognite $\sum : \begin{cases} a_{11}\, x_1 + \cdots + a_{1n}\, x_m = b_1 \\ \quad\quad\quad\quad \ldots \\ a_{n1}\, x_1 + \cdots + a_{nn}\, x_n = b_n \end{cases}$

Con $A_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ → $A/B_{m,n+1} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$

Σ ha soluzione $\Leftrightarrow$ rg(A) = rg(A/B) = r; In tal caso $\sum$ ha ∞^{n-r} soluzioni.

Osservazione:
In generale $rg(A) \leq rg(A/B)$ poiché A sottomatrice di A/B
Se il $(rg(A) \neq rg(A/B)) \Leftrightarrow$ rg(A) < rg(A/B) $\rightarrow \sum$ non ha soluzioni
Se si pone $\infty^0 = 1$, quindi se n = r $\rightarrow \sum$ ha un'unica soluzione
Se n > r e k = n – r > 0 $\rightarrow \infty^k$ significa che $\sum$ ha infinite soluzioni che dipendono da k parametri

Osservazione:
Il teorema di Rouche-Capelli serve solo per contare le soluzioni di un sistema lineare, non serve per trovarle.

Teorema di CRAMER

Dato un sistema lineare di n equazioni e min c.

$$\sum : \begin{cases} a_{11}\, x_1 + \cdots + a_{1n}\, x_m = b_1 \\ \quad\quad\quad\quad \ldots \\ a_{n1}\, x_1 + \cdots + a_{nn}\, x_n = b_n \end{cases}$$

$A_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$; $B_{n,1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$; $X_{n,1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\rightarrow \sum$: AX = B

$\sum$ ha un'unica soluzione $\Leftrightarrow$ det(A) $\neq$ 0; In tal caso X = A^{-1} B oppure $X_i \frac{\det(C_i)}{\det(A)}$; i = i,…,n

Dove $C_i = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & b_n & a_{mm} \end{pmatrix} \\ \quad\quad\quad\quad \wedge \\ \quad\quad\quad\quad \text{colonna i} \end{array}$

C_i è ottenuta a partire da A sostituendo la colonna i con la colonna dei termini noti

Osservazione:
Se il sistema lineare Σ non è quadrato, posso ricondurmi a un sistema lineare quadrato Σ' nel seguente modo:
Se rg(A) = rg(A/B) = r e sia M sottomatrice di A di ordine r tale che det(M) $\neq$ 0 $\rightarrow$ posso eliminare le equazioni corrispondenti alle righe di A che non sono presenti in M (**equazioni ridondanti**) ottenendo un sistema lineare equivalente.
Inoltre, posso considerare parametri le incognite corrispondenti alle colonne di A non presenti in M e queste possono essere considerate "termini noti".

Osservazione:
Esistono più scelte corrette per i parametri, ma non sempre sono tutte corrette.

Teorema di struttura delle soluzioni di un sistema lineare
Sia $\sum$: AX = B un Sistema lineare e sia **S** l'insieme delle soluzioni di $\sum$
S = Sol ($\sum$)

Con $A_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$; $B_{n,1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$; $X_{n,1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Il sistema lineare omogeneo associato a $\sum$ è $S_0 = Sol(\sum_0)$

Sia inoltre $X_{n,1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in S$, quindi supponiamo $S \neq 0 \rightarrow$ l'insieme $S = S_0 + X'$

S_0 = soluzione generale del sistema omogeneo associato

X' = soluzione particolare del sistema non omogeneo

Con $S_0 + X' = \{ X_0 + X' ; \forall x_0 \in S_0 \}$

INSIEMI

Un **insieme** è una "**collezione** o **famiglia**" di "**oggetti**" detti elementi dell'insieme.

P = {insieme dei numeri pari (proprietà che descrive gli elementi dell'insieme}

DEF.

Data una relazione binaria R in un insieme X, essa si dice di **equivalenza** se è riflessiva, simmetrica e transitiva.

Riflessiva se $\forall a \in X, aRa$

Simmetrica se $\forall a, b \in X \; aRb \Rightarrow bRa$

Transitiva $\forall a, b, c \in X$ se a è in relazione con b e b è in relazione con c, allora a è in relazione con c

$\forall a, b, c \in X : aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$

DEF.

L'insieme vuoto è l'insieme senza elementi $\emptyset = \{\}$ $\emptyset \neq \{0\}$

DEF.

Il numero di elementi di un insieme X è detto **cardinalità** dell'insieme e si indica con #X = |X|

DEF.

Se un insieme ha un numero finito di elementi si dice insieme finito altrimenti si dice insieme infinito.

DEF.

A, B insieme

A è **sottoinsieme** di B (o contenuto in B) se $\forall x \in A \rightarrow x \in B$ e si indica con $A \subset B$

A è strettamente contenuto in B se:

1) $A \subset B$
2) $\exists x \in B \mid x \notin A$ e si indica con $A \subseteq B$

Osservazione:

$\emptyset \subset A$; $\forall A$ insieme

$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$

DEF.

A,B insiemi

Intersezione = $A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$
Unione = $A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$
Differenza = $A \setminus B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$

DEF.
A,B insiemi; $A \subset B$
Il **complementare** di A rispetto a B è l'insieme: $A_B^c = \overline{A_B} = B \setminus A$

DEF.
A, B insiemi
Il **prodotto cartesiano** di A $\in$ B è l'insieme: $AxB = \{ (x;y) \mid x \in A; y \in B \}$ (x;y) coppie ordinate
In altri termini, il prodotto cartesiano di due insiemi è l'insieme di tutte le possibili coppie ordinate di elementi dei due insiemi.

Funzioni

DEF.
x,y insiemi
Una **funzione** f da x a y è una relazione (x,y,$\lceil f$) tale che ogni elemento di x è in relazione esattamente con un elemento di y.
La funzione f si indica con f: $\begin{cases} x \to y \\ x \to f(x) \end{cases}$
x è detto **dominio** di f $\to$ dom(f)
y è detto **codominio** di f $\to$ codom(f)
$\lceil f \subset X,Y$ è il grafico di f (prodotto cartesiano)
Se $x \in X \to f(x)$ indica l'unico elemento di y tale che $x \sim f(x)$ cioè:
$\binom{x}{f(x)} \subset \lceil f$ e $\binom{x}{y} \notin \lceil f$; $\forall\, y \neq f(x)$

DEF.
Una **funzione lineare**, o più precisamente funzione lineare affine, è una funzione definita mediante un polinomio di grado 1 e il cui grafico coincide con una retta.
f è **lineare** se:
1) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$
2) $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ $\forall\, \lambda \in K$

DEF.
Ker(f):
Il **ker** viene anche detto **nucleo** di un'applicazione lineare ed è un particolare sottoinsieme del dominio dell'applicazione, formato da tutti e solo i vettori del dominio che hanno come immagine lo zero del codominio.

Ker(f) $= f^{-1}(O_{v2}) = \{ v \in V \mid f(v) = (O_{v2})\}$ $f: V_1 \to V_2$
f(v) = 0
$v_1, \dots, v_n$ che risolvono l'equazione sono il Ker(f)
Im(f) è il codominio
dim Ker(f) + dim Im(f) = dim V

DEF.

f: $\begin{cases} x \rightarrow y \\ x \rightarrow f(x) \end{cases}$

f(x) è **immagine** di x ; Im(f) = $\cup$ {f(x)} (x $\in$ X)

L'immagine di f è Im(f) = { y $\in$ Y | $\exists$ x $\in$ X | f(x) = y } $\subset$ Y al variare di x $\in$ dom(f)

L'immagine di una funzione è l'insieme dei valori assunti da una funzione sul proprio dominio, ed è quindi contenuta nell'insieme di arrivo della funzione (il codominio), con il quale può al più coincidere.

DEF.

f: $\begin{cases} x \rightarrow y \\ x \rightarrow f(x) \end{cases}$

La **controimmagine** di y $\in$ Y è: $f^{-1}(y)$ = { x $\in$ X | f(x) = y } $\subset$ X

Se B $\subset$ Y $\rightarrow$ $f^{-1}(B) = \cup_{y \in B} f^{-1}(y)$ = { x $\in$ X | f(x) $\in$ B }

Se A $\subset$ X $\rightarrow$ f(A) = $\cup_{x \in A}$ {f(x)} = { y $\in$ Y | $\exists$ x $\in$ A | f(x) = y }

La **controimmagine** di un insieme del codominio, mediante una funzione, è l'insieme degli elementi del dominio che vengono mandati nel codominio dalla funzione.

DEF.

f: $\begin{cases} x \rightarrow y \\ x \rightarrow f(x) \end{cases}$ $\wedge$ g: $\begin{cases} y \rightarrow z \\ y \rightarrow g(y) \end{cases}$

La **funzione composta** è:

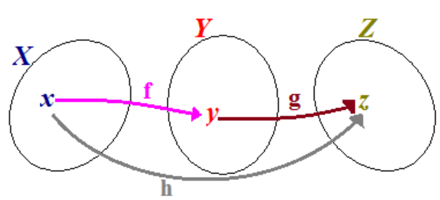
h = g o f : $\begin{cases} x \rightarrow z \\ x \rightarrow (g\ o\ f)(x) = g(f(x)) \end{cases}$

La **funzione composta** è una funzione che si ottiene mediante l'operazione di composizione di due funzioni. In sintesi, si definisce applicando la seconda funzione alle immagini della prima.

Osservazione:

$\exists$ g o f (g composto f, o g dopo f) $\Leftrightarrow$ codom(f) = dom(g), in tal caso:

$$\begin{cases} dom(g\ o\ f) = dom(f) \\ codom(g\ o\ f) = codom(g) \end{cases}$$



Osservazione:

In generale g o f $\neq$ f o g

Proprietà:

h o (g o f) = (h o g) o f; f: X $\rightarrow$ Y; $\forall$ g: Y $\rightarrow$ Z; $\forall$ h: Z $\rightarrow$ V;

Cioè la composizione è associativa e posso scrivere h o g o f

DEF.

Sia f: X → X:

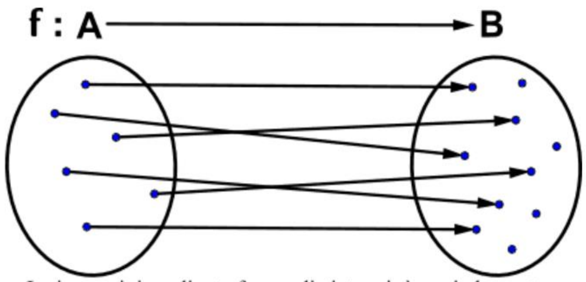
$$f^n = \begin{cases} id_x & se\ n = 0 \\ f\ o\ f\ o \ldots o\ f & se\ n\ \in Z > 0 \end{cases} \qquad \text{Dove idx} : \begin{cases} X \ \to \ X \\ id_x(x) = x \end{cases}$$

DEF.

f: $\begin{cases} x \ \to y \\ x \to f(x) \end{cases}$

f è **iniettiva** se $f(x_1) \neq f(x_2)$ $\forall\, x_1, x_2 \in X$; con $x_1 \neq x_2$ ⇔ $f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2$ $\forall\, x_1, x_2 \in X$;

F è iniettiva se a distinti elementi di A corrispondono distinti elementi di B

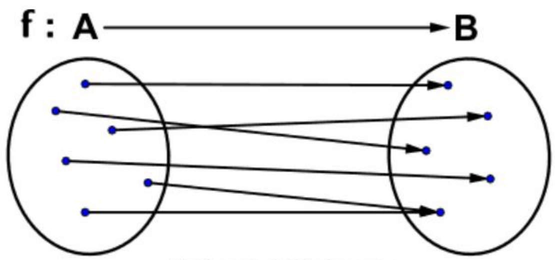


Le immagini mediante f sono distinte, cioè ogni elemento di A punta ad un unico elemento di B.
Però è possibile che non tutti gli elementi di B vengano raggiunti.

DEF.

f è **suriettiva** se Im(f) = codom(f) ⇔ $\forall\, y \in Y\ \exists\, x \in X \mid f(x) = y$ ⇔ $\#f^{-1}(y) \geq 1;\ \forall\, y \in Y$

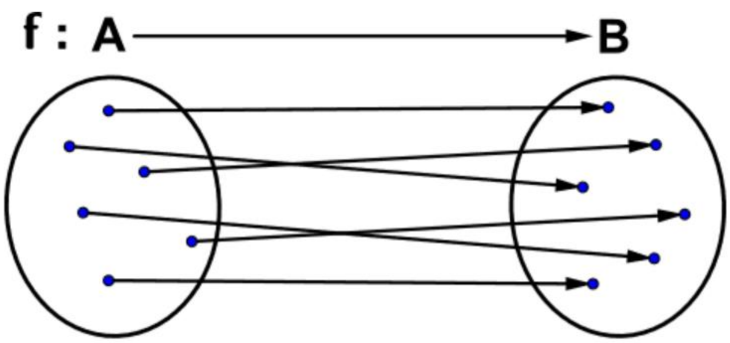
Una funzione è suriettiva se ogni elemento del seondo insieme è raggiunto da **almeno** una freccia che parte dal primo insieme



Ogni punto dell'insieme B è raggiunto da almeno una freccia.
Però è possibile che più di due elementi di A puntino verso lo stesso elemento di B.

DEF.

f è **biettiva** se è sia iniettiva che suriettiva ⇔ $\#f^{-1}(y) = 1;\ \forall\, y \in Y$



f è sia iniettiva (ad elementi distinti di A corrispondono elementi distinti di B) che suriettiva (ogni elemento di B è raggiunto da una freccia)

DEF.

f è **invertibile** se $\exists\, g \in Y \to X \mid g\ o\, f = id_x;\ f\ o\, g = id_y$ e g è detta **inversa** di f

Una funzione invertibile f è una funzione per la quale è possibile definire una nuova funzione che percorre al contrario la legge di f.

Osservazione:
Se $\exists$ g inversa di f $\rightarrow$ è unica e si indica con $g = f^{-1} : y \rightarrow x \;\wedge\; f^{-1} \circ f = id_x \;\wedge\; f \circ f^{-1} = id_y$
$dom(f^{-1}) = codom(f)$
$codom(f^{-1}) = dom(f)$

Teorema
$f : x \rightarrow y$; f **biettiva** $\Leftrightarrow$ f **invertibile**

Gruppi

DEF.
Dato X insieme;
Un'operazione binaria intera su X è una funzione:

$$f: \begin{cases} X \, x \, X & \rightarrow X \\ (x, y) & \rightarrow f(x; y) \end{cases}$$

Se su X è definita un'operazione binaria interna f diciamo che X è chiuso rispetto a f.

DEF.
Dato X insieme con un'operazione binaria interna:

$$\cdot : \begin{cases} X \, x \, X & \rightarrow X \\ (x, y) & \rightarrow \; x \cdot y \end{cases}$$

X è un **Gruppo** se l'operazione · verifica:

1) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$; $\quad \forall \, x, y, z \in X$ **associativa**
2) $\exists \, 1 \in X \mid x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$; $\quad \forall \, x \in X$ **$\exists$ elemento neutro**
3) $\forall \, x \in X \; \exists \, x^{-1} \in X \mid x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$ **$\exists$ elemento inverso**
4) $x \cdot y = y \cdot x$; $\quad \forall \, x, y \in X$ **commutativa**
   x è detto gruppo commutativo o abeliano

Osservazione:
Per indicare che X è un gruppo con l'operazione · si scrive che (x,·) è un gruppo

Osservazione:
La precedente notazione è detta moltiplicativa; Si può riformulare tutto usando la notazione additiva e in tal caso le precedenti proprietà diventano:

$$+ : \begin{cases} X \, x \, X & \rightarrow X \\ (x, y) & \rightarrow \; x + y \end{cases}$$

1) $x + (y + z) = (x + y) + z$; $\quad \forall \, x, y, z \in X$ associativa
2) $\exists \, 0 \in X \mid x + 0 = 0 + x = x$; $\quad \forall \, x \in X$ $\exists$ elemento neutro
3) $\forall \, x \in X \; \exists - x \in X \mid x + (-x) = (-x) + x = 0$ $\exists$ elemento inverso
4) $x + y = y + x$; $\quad \forall \, x, y \in X$ commutativa

Osservazione:
Spesso si usa la notazione additiva per i gruppi commutativi.

Teorema
Dato (X, $\cdot$) gruppo
1) L'elemento neutro è unico
2) Dato $x \in X$ è unico x^{-1}

DIMOSTRAZIONE:
1) Siano $1, e \in X$ elementi neutri di X allora:
   $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$; $\qquad \forall\, x \in X$
   $e \cdot x = x \cdot e = x$; $\qquad \forall\, x \in X$

   Allora $e = e \cdot 1 = 1 \rightarrow e = 1$

2) Siano $x^{-1}, y \in X$ elementi inversi di x allora:
   $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$;
   $x \cdot y = y \cdot x = 1$;
   $y \cdot x = x^{-1} \cdot x$;
   $y \cdot x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x \cdot x^{-1}$;
   $y = x^{-1}$ c.v.d

Osservazione:
Poiché in un gruppo $\exists$ elemento neutro $\rightarrow \emptyset$ non è mai un gruppo.
Il gruppo più piccolo è $\{1\}$ oppure $\{0\}$; esso è detto gruppo banale.

Campi

DEF.
Sia X un insieme con due operazioni binarie interne

$$+ : \begin{cases} X\, x\, X \rightarrow X \\ (x, y) \rightarrow x + y \end{cases} \qquad \cdot : \begin{cases} X\, x\, X \rightarrow X \\ (x, y) \rightarrow x \cdot y \end{cases}$$

(X;+; $\cdot$) è un **campo** se:
1) $x + (y + z) = (x + y) + z$; $\qquad \forall\, x, y, z \in X$
2) $\exists\, 0 \in X \mid x + 0 = 0 + x = x$; $\qquad \forall\, x \in X$
3) $\forall\, x \in X\ \exists - x \in X \mid x + (-x) = (-x) + x = 0$
4) $x + y = y + x$; $\qquad \forall\, x, y \in X$
5) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$; $\qquad \forall\, x, y, z \in X$
   $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$;
6) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$; $\qquad \forall\, x, y, z \in X$
7) $\exists\, 1 \in X \mid x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$; $\qquad \forall\, x \in X$
8) $\forall\, x \in X - \{0\}\ \exists\, x^{-1} \in X \mid x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$
9) $x \cdot y = y \cdot x$; $\qquad \forall\, x, y \in X$

Osservazione:
(X;+; $\cdot$) è un campo se:

1) (X;+) gruppo comune
2) (X-{0}; ·) gruppo comune

Ricordiamo che un gruppo G si dice commutativo o **abeliano** se la sua operazione interna gode della proprietà commutativa.

Osservazione:
∅ non è mai un campo.
Il più piccolo campo è {0} dove 0 = 1 campo banale

DEF.
Dato (K;+; ·) campo
Uno **spazio vettoriale** su K campo è un insieme V non vuoto con due operazioni:

$+_v : \begin{cases} V \times V & \rightarrow V \\ (v_1, v_2) & \rightarrow v_1 +_v v_2 \end{cases}$ $\qquad$ $\cdot_v : \begin{cases} K \times V & \rightarrow V \\ (\alpha, v) & \rightarrow \alpha \cdot_v v \end{cases}$

Somma di un vettore $\qquad$ Prodotto di un vettore per uno scalare

Tali che:

1) $v_1 +_v (v_2 +_v v_3) = (v_1 +_v v_2) +_v v_3$ $\qquad \forall\, v_1, v_2, v_3 \in V$
2) $\exists\, 0_v \in V \mid v +_v 0_v = 0_v +_v v = v;$ $\qquad \forall\, v \in V$
3) $\forall\, v \in V\ \exists -v \in V \mid v +_v (-v) = (-v) +_v v = 0_v$
4) $v_1 +_v v_2 = v_2 +_v v_1;$ $\qquad \forall\, v_1, v_2 \in V$
5) $\alpha \cdot_v (v_1 +_v v_2) = \alpha \cdot_v v_1 +_v \alpha \cdot_v v_2;$ $\qquad \forall\, \alpha \in K; \forall\, v_1, v_2 \in V$
6) $(\alpha + \beta) \cdot_v v = \alpha \cdot_v v +_v \beta \cdot_v v;$ $\qquad \forall\, \alpha, \beta \in K; \forall\, v \in V$
7) $(\alpha \cdot \beta) \cdot_v v = \alpha \cdot_v (\beta \cdot_v v);$ $\qquad \forall\, \alpha, \beta \in K; \forall\, v \in V$
8) $1 \cdot_v v = v;$ $\qquad \forall\, v \in V$

Gli elementi di V sono detti **vettori** e formano lo spazio dei vettori e gli elementi di K sono detti **scalari.**
Uno spazio vettoriale V su K campo è indicato con $(V; +_v; \cdot_v; K; +; \cdot)$

Osservazione:
Lo spazio vettoriale più piccolo è $\{0_v\}$ ed è detto spazio banale (su K)

DEF.
Sia V spazio vettoriale su K, allora V è uno spazio vettoriale **reale**, se K = C (complessi) allora V è spazio vettoriale **complesso.**

Osservazione:
Scriviamo: $v_1 +_v v_2 = v_1 + v_2$
$\alpha \cdot_v v = \alpha \cdot v$
$0_v = 0$

Proposizione:
Dato V spazio vettoriale su K

9) $0v = 0_v = \alpha 0_v;$ $\qquad \forall\, \alpha \in K; \forall\, v \in V$
10) $(-1)v = -v;$ $\qquad \forall\, v \in V$

DEF.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \; ; \qquad \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\, x_1 \\ \vdots \\ \alpha\, x_n \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^n$ con le precedenti operazioni è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

Osservazione:

K^n con operazioni analoghe a $\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale su K

Osservazione:

Posso "identificare" $\mathbb{R}^n$ con un opportuno insieme di matrici, cioè $\mathbb{R}^n = M_{1,n}(\mathbb{R})$ oppure $\mathbb{R}^n = M_{n,1}(\mathbb{R})$

DEF.

Sia O un punto del piano per ogni punto P del piano, definisco il **vettore geometrico** $\underset{OP}{\rightarrow}$ applicato in O e che termina in P, come il segmento orientato di estremi O e P percorso da O verso P.

L'insieme dei vettori geometrici applicati in O è indicato con V_o^2.

DEF. (regola del parallelogramma)

$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR}$ con R intersezione della retta parallela a $\overrightarrow{OQ}$ passante per P

Allora definisco R come il simmetrico di O rispetto al punto medio di M di $\overrightarrow{QP}$. Ovvero $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$

L'elemento neutro è $\overrightarrow{OO} \;\rightarrow\; \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OO} = \overrightarrow{OP}$

L'elemento opposto è $-\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ}$ con Q simmetrico di P rispetto a O: $\overrightarrow{OP} + (-\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OO}$

Definisco il prodotto di un vettore per uno scalare:

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$**;**

$\alpha\overrightarrow{OO} = \overrightarrow{OO}$; $\qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ}$;

con Q sulla retta OP tale che $\frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = |\alpha|$ e Q dalla stessa parte di P rispetto a O se $\alpha > 0$.

Q dalla parte opposta di P rispetto a O se $\alpha < 0$; Q = 0 se $\alpha = 0$.

V_o^2 con le precedenti operazioni è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$**;** il discorso analogo vale per lo spazio (tridimensionale).

V_o^3 è l'insieme dei vettori geometrici dello spazio (tridimensionale in O ed è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con le precedenti operazioni)

DEF.

$\deg(a_0) = -1$

Consideriamo la classica somma di polinomio, è il prodotto di uno scalare per un polinomio

DEF. La somma

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ $\qquad$ Somme delle immagini di x

DEF. Prodotto di una funzione per un numero reale

$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$; $\qquad \forall\, x \in \mathbb{R}; \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$

$\mathbf{C}^0(\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

DEF.
A insieme, I insieme di indici
Una **partizione** di A è un insieme di sottoinsiemi non vuoti di A.
$A_i \neq 0 \subset A$; $i \in I$, tali che:

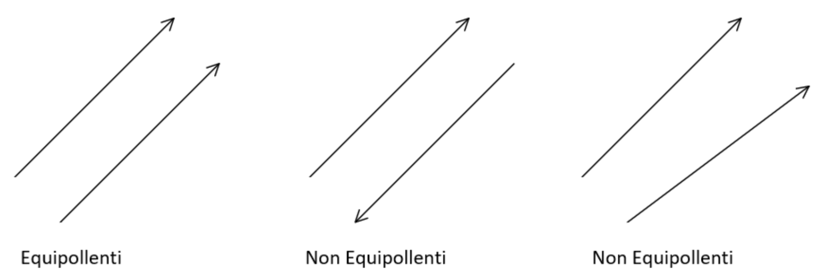
1) $U_{i\in I}\, A_i = A$
2) $A_i \cap A_j = \emptyset$; $\quad\quad \forall\, i, y \in I \quad$ con $i \neq y$

Esempio:
R = "Sono in relazione numeri che hanno lo stesso resto rispetto alla divisione per 2"
Quindi tutti i numeri reali sono in relazione tra loro. Nessun pari è in relazione con un dispari ne viceversa.
R è una **relazione di equivalenza** (è riflessiva, simmetrica, transitiva)
Quindi $A_0 = \{ n = 2k;\ k \in Z \}$ contiene tutti elementi in relazione tra loro e nessun elemento di A_0 è in relazione con qualche elemento di A_1 né viceversa.
A_0, A_1 è una partizione di Z

Osservazione:
A insieme, R relazione di equivalenza su A → i sottoinsiemi di A di tutti gli elementi in relazione tra loro e non in relazione con gli elementi degli altri sottoinsiemi formano una partizione di A e questa partizione è unica.

DEF.
A insieme, R relazione di equivalenza su A.
L'insieme quoziente A/~ è l'insieme i cui elementi sono i sottoinsiemi di A individuati da R che formano una partizione di A, tali sottoinsiemi sono detti classi di equivalenza di R.

Due vettori si dicono **equipollenti** se hanno la stessa **direzione**, la stessa **lunghezza** e lo stesso **verso,** cioè se giacciono su rette parallele (eventualmente coincidenti) e se muovendo una delle due rette parallelamente a sé stessa, è possibile portare i due segmenti a sovrapporsi in modo che i loro punti iniziali e i loro punti finali coincidano.



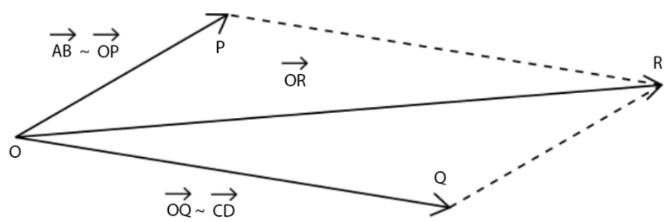
Un vettore geometrico è per definizione una classe di equipollenza di vettori applicati.
Il vettore nullo ha lunghezza nulla, direzione e verso indeterminati e si denota con 0.

DEF. Una relazione d'equivalenza su V_a^2
$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$
∧
Equipollente

1) $\overline{AB} = \overline{CD}$
2) $\overline{AB} // \overline{CD}$
3) Hanno orientazione concorde

L'insieme quoziente: $V^2 = V_a^2/\sim$ è l'insieme dei **vettori geometrici liberi del** piano, cioè un vettore geometrico libero è la classe di equivalenza di un vettore applicato $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AB}$ è un rappresentante della classe d'equivalenza [$\overrightarrow{AB}$].
Posso sempre scegliere un rappresentante applicato in O.
[$\overrightarrow{AB}$] = [$\overrightarrow{OP}$] == $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{OP}$

DEF. La somma
L'operazione di somma di due vettori è associativa $[a + (b + c) = (a + b) + c]$
[$\overrightarrow{AB}$] + [$\overrightarrow{CD}$] = [$\overrightarrow{OP}$ + $\overrightarrow{OQ}$] = [$\overrightarrow{OR}$]



DEF. Il prodotto di un vettore per uno scalare
α [$\overrightarrow{AB}$] = [$\alpha \overrightarrow{OP}$]; $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
Il risultato è un vettore che ha la stessa direzione, lunghezza uguale moltiplicata per α e verso discorde o concorde a seconda se α sia positivo o negativo, del vettore precedente.
Le operazioni date sono ben definite, cioè non dipendono dal rappresentante scelto.
Quindi V^2 è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con le precedenti operazioni.

Osservazione:
Vale il discorso analogo per V_a^2 e $V^3 = V_a^3/\sim$

DEF.
A, B $\in M_n(\mathbb{R})$
$A \sim B \Leftrightarrow \exists\, M \in G_{Ln}(\mathbb{R}) \mid MAM^{-1} = B$
In tal caso A e B sono dette **matrici simili**
Due matrici quadrate A e B sono **simili** se e solo se esiste una matrice invertibile M tale che il prodotto tra l'inversa di M e le matrici B e M coincide con la matrice A.

Osservazione:
La similitudine di matrici è una relazione l'equivalenza, infatti:
1) $I\,A\,I^{-1} = A \rightarrow A \sim A$
2) $A \sim B \Leftrightarrow MAM^{-1} = B \mid M^{-1} B(M^{-1})^{-1} = M(MAM^{-1})M = (M^{-1}M)A(M^{-1}M) = I\,A\,I = A \rightarrow B \sim A$
3) $A \sim B \Leftrightarrow MAM^{-1} = B \wedge B \sim C \Leftrightarrow NBN^{-1} = C \mid (NM)A(NM)^{-1} = NMAM^{-1} N^{-1} = NBN^{-1} = C \rightarrow A \sim C$

Proprietà:

$A,B \in M_n(\mathbb{R})$
Se $A \sim B \rightarrow \det(A) = \det(B) \vee \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$
Determinante e traccia sono invarianti per similitudine.

DIMOSTRAZIONE determinante:

$\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(MAM^{-1}) = \operatorname{tr}(AM^{-1}M) = \det(M)\det(A)\det(M^{-1}) = \det(M)\det(A)\frac{1}{\det(M)} = \det(A)$

DIMOSTRAZIONE traccia:

$\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(MAM^{-1}) = \operatorname{tr}(AM^{-1}M) = \operatorname{tr}(AI) = \operatorname{tr}(A)$ c.v.d.

Osservazione:
$A,B \in M_n(\mathbb{R})$
Se $\det(A) = \det(B)$ e $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$ non è detto che $A \sim B$;
Quindi non posso definire un prodotto tra le classi di equivalenza usando il prodotto di rappresentanti.

Proposizione:
V spazio vettoriale su campo K e $W \subset V$ è **sottospazio** di V se:

1) $w_1 + w_2 \in W$; $\forall\, w_1, w_2 \in W$
2) $\alpha w \in W$; $\forall\, \alpha \in \mathbb{R};\ \forall\, w \in W$

Quindi se W sottospazio di V, allora:

$\begin{cases} 0 \ \in W \\ -w \in W \end{cases}$; $\forall\, w \in W$

DIMOSTRAZIONE:

Le proprietà 1,4,5,6,7,8 valgono in tutto V quindi anche in W
0 = 0 w ∈ W
∧ ∧ ∧ ∧
V K W Per la seconda proprietà

-w = (-1) w ∈ W
∧ ∧ ∧
V K W c.v.d

Osservazione:
Se $0 \in W$ non implica che W sia un sottospazio ma che $W \neq 0$
Se $0 \notin W \rightarrow W$ non è sottospazio

Osservazione:
$\sum : AX = B$ sistema lineare
$0 \in Sol(\sum) \Leftrightarrow A \cdot 0 = B \Leftrightarrow 0 = B \Leftrightarrow \sum$ è omogeneo
Quindi $Sol(\sum)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow \sum$ è omogeneo

DEF.
V spazio vettoriale su K
U,W sottospazio di V
La somma di U e W è l'insieme $U + W = \{u + w,\ u \in U;\ v \in W\} \subset V$

Osservazione:

Più in generale, l'intersezione di una famiglia qualsiasi di sottospazi vettoriali di V è un sottospazio vettoriale di V.
L'unione di due sottospazi non è in generale un sottospazio di V.

Osservazione:
$U \subset U + W$; infatti $u = u + 0 \in U + W$
$W \subset U + W$; infatti $w = 0 + w \in U + W$

Osservazione:
U + W è il più piccolo sottospazio di V che contiene U e W. Cioè $\forall$ sottospazio T di V | $U \subset T$, $W \subset T$ $\rightarrow V + W \subset T$

DEF.
V spazio vettoriale su K;   U,W sottospazio di V
Se $U \cap W = \{0\} \rightarrow U + W$ è detta **somma diretta** e si indica con **$U \oplus W$** e i due sottospazi si dicono **supplementari** di V

DEF.
V spazio vettoriale su K campo; $\forall\, v_1,\dots,v_m \in V$; $\forall\, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$
La combinazione lineare dei vettori $v_1,\dots,v_m$ con coefficienti gli scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ è il vettore :
$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, \dots, \alpha_m v_m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \quad \in V$
Se $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0 \rightarrow$ si ha $v = 0\, v_1 + 0\, v_2 + \dots + 0\, v_m = 0$ e tale combinazione lineare è detta **combinazione lineare banale**
Una **combinazione lineare** dunque altro non è che un'espressione in cui compaiono somme di vettori e moltiplicazioni di vettori per scalari, dove con **vettori** si intendono elementi dello spazio vettoriale V

DEF.
V spazio vettoriale su K campo; $v_1,\dots,v_m \in V$;
L'insieme di tutte le combinazioni lineari di vettori $v_1,\dots,v_m$ è indicato con :
$\text{spam}_k = \{ v_1,\dots,v_m \} = L_k \{ v_1,\dots,v_m \} = \{ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m; \quad \forall\, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in K \} \subset V$

Osservazione:
V spazio vettoriale su K; $v_1,\dots,v_m \in V$;
$L_k \{ v_1,\dots,v_m \}$ è un sottospazio di V ed è il più piccolo sottospazio contente i vettori $v_1,\dots,v_m$

DEF.
V spazio vettoriale su K campo; $v_1,\dots,v_m \in V$;
$v_1,\dots,v_m$ sono **linearmente dipendenti** se esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$ non tutti nulli tali che:
$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0$ (vettore di zeri) altrimenti $v_1,\dots,v_m$ sono **linearmente indipendenti** (cioè se l'unica combinazione lineare che dà il vettore nullo è la combinazione lineare banale.

Proposizione:
1) V spazio vettoriale su K;
2) Un singolo vettore $v \in V$ è linearmente dipendente $\Leftrightarrow v = 0$
3) $v_1,\dots,v_m \in V$ sono **linearmente dipendenti** $\Leftrightarrow$ almeno uno di essi lo posso ottenere da una combinazione lineare degli altri.
4) Due vettori non nulli sono **linearmente dipendenti** $\Leftrightarrow$ uno è multiplo dell'altro.

DIMOSTRAZIONE:

1) v linearmente dipendente ⇔ $\exists\ \alpha \neq 0 \wedge \alpha \in K \mid \alpha v = 0$, ma se $\alpha \neq 0 \rightarrow \alpha v = 0$ ⇔ v = 0
2) $v_1,\ldots,v_m$ linearmente dipendenti → $\exists\ \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K$ non tutti nulli | $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m = 0$.
Supponiamo $\alpha_1 \neq 0$

$$\frac{\alpha_1 v_1}{\alpha_1} = \frac{-\alpha_2 v_2 - \ldots - \alpha_m v_m}{\alpha_1}$$
$$v_1 = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1} v_2 - \cdots - \frac{-\alpha_m}{\alpha_1} v_m \qquad \text{con } \frac{-\alpha_2}{\alpha_1} = \beta_2 \wedge \frac{-\alpha_m}{\alpha_1} = \beta_m$$

$$v_1 = \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_m v_m$$
$$v_1 - \beta_2 v_2 - \cdots - \beta_m v_m = 0$$
Con $\alpha_1 = 1 \wedge \alpha_1 \neq 0 \quad \wedge \quad \alpha_2 = -\beta_2, \ldots, \alpha_m = -\beta_m$

Osservazione:
V spazio vettoriale su K
1) Se $v_1,\ldots,v_m \in V$ sono linearmente **dipendenti** → $v_1,\ldots,v_m,v_{m+1} \in V$ anche sono linearmente dipendenti.
2) Se $v_1,\ldots,v_m \in V$ sono linearmente **indipendenti** → anche $v_1,\ldots,v_m,v_{m-1}$ sono linearmente indipendenti.

DEF.
$A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$
Il rango di $\{ v_1,\ldots,v_m \}$ è il massimo numero di vettori linearmente indipendenti appartenenti ai vettori $\{ v_1,\ldots,v_m \}$.
Il **rango per righe** di A è il massimo numero di righe lineari indipendenti se considerate come vettori di $\mathbb{R}^n$.
Il **rango per colonne** di A è il massimo numero di colonne lineari indipendenti se considerate come vettori di $\mathbb{R}^n$.

Teorema
$A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ → rango per righe di A = rango per colonne di A = rg(A)

Osservazione:
Dato $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$:
Se $B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ è ottenuta da A mediante una successione di operazioni elementari sulle righe, allora rg(A) = rg(B)

Osservazione:
$W = L_k = \{ v_1,\ldots, v_m \}$; $\quad \forall\ v_1,\ldots,v_m \in V$; $\quad$ W è sottospazio di V
$0 = 0\, v_1 + \ldots + 0\, v_m \quad \in W \neq 0$

$$w_1, w_m \in W \rightarrow \begin{cases} w_1 = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m \\ w_2 = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_m v_m \end{cases}$$

$w_1 + w_m = (\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m) + (\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_m v_m) = (\alpha_1 + \beta_1)\, v_1 + (\alpha_m + \beta_m)\, v_m \quad \in W$
$\alpha_1 w_1 = \alpha(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m) = (\alpha\alpha_1)\, v_1 + \ldots + (\alpha\alpha_m)\, v_m \quad \in W$
Quindi W sottospazio di V

DEF.
V spazio vettoriale su K;
$v_1, \ldots, v_m$ generano (o sono **generatori** di) V
se $\forall$ v $\in$ V $\exists$ $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in$ K | $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m$ = v; cioè se $L_k\{ v_1,\ldots,v_m \} = V$
è sempre vero che $L_k\{ v_1,\ldots,v_m \} \subset V$

Ovvero, diciamo che un insieme di vettori $v_1, \ldots, v_m$ è un sistema di generatori di V se ogni elemento di V si può esprimere mediante una combinazione lineare di tali vettori.
Dunque, un sistema di **generatori** di uno spazio (o di un sottospazio vettoriale) è un insieme di vettori che permette di ricostruire, mediante combinazioni lineari, tutti i vettori dello spazio.

Osservazione:
$v_1,\ldots,v_m$ generano sempre $L_k\{ v_1,\ldots,v_m \}$

DEF.
V spazio vettoriale su K; $v_1,\ldots,v_m \in V$
Un sottoinsieme finito $\{ v_1,\ldots,v_m \}$ di V è una **base** di V se:
1) $v_1,\ldots,v_m$ generano V
2) $v_1,\ldots,v_m$ sono linearmente indipendenti

Ovvero, una **base** di uno spazio vettoriale è un sistema di generatori linearmente indipendenti che generano l'intero spazio vettoriale.
I coefficienti $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ della combinazione lineare si dicono le **coordinate di v rispetto alla base**
Quindi, una volta assegnata una base, ad ogni vettore della base viene univocamente associata una n-upla di coordinate.

Osservazione:
Una base è un insieme minimale di generatori.
Se $v_{m+1} \in L_k\{ v_1,\ldots,v_m \} \rightarrow L_k\{ v_1,\ldots,v_m,v_{m+1} \} = L_k\{ v_1,\ldots,v_m \}$
Se $v_{m+1} \notin L_k\{ v_1,\ldots,v_m \} \rightarrow L_k\{ v_1,\ldots,v_m \} \subseteq L_k\{ v_1,\ldots,v_m,v_{m+1} \}$

Osservazione:
Lo spazio banale V = {0} non ha basi poiché non ha vettore linearmente indipendente

Osservazione:
Se K campo con infiniti elementi, allora ogni spazio vettoriale non banale su K ha infinite basi

Teorema
V spazio vettoriale su K; $v_1,\ldots,v_m \in V$ basi di V
$\rightarrow \forall$ v $\in$ V $\exists!$ $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in$ K | $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m$ = v

Teorema Della Dimensione
V spazio vettoriale su K; B base di V; $\#B = n \in Z \geq 0$ (cioè B ha n elementi)
$\rightarrow$ diciamo che V ha **dimensione** n su K e si scrive $\dim_k(V) = n$
Ovvero, la **dimensione** di uno spazio vettoriale è la cardinalità di una sua qualsiasi base

Osservazione:
Lo spazio banale ha dimensione uguale a zero $\dim_k(\{0\}) = 0$ ed è **l'unico spazio vettoriale con dimensione nulla.**

Proposizione:
V spazio vettoriale su K di M_n
1) Ogni insieme di m vettori con $m > n$ è un insieme di vettori linearmente dipendenti
2) Ogni insieme di n vettori lineari indipendenti è una base di V
3) Ogni insieme di n vettori che generano V è una base di V

Proposizione:
V spazio vettoriale su K di dimensione finita; W sottospazio di V
1) $\dim_k(W) \leq \dim_k(V)$ ogni sottospazio vettoriale ha dimensione finita non superiore a n
2) $\dim_k(W) = \dim_k(V) \Leftrightarrow W = V$

DEF.
V spazio vettoriale su K di dimensione finita; W sottospazio di V
La **codimensione** di W è: $\mathrm{codom}_k(W) = \dim_k(V) - \dim_k(W)$
In parole povere, la **codimensione** di un sottospazio non è altro che la differenza tra la dimensione dello spazio vettoriale e la dimensione del sottospazio.

Teorema Formula di Grassmann
V spazio vettoriale di dimensione finita su K; U, W sottospazio di V
$\rightarrow \dim_k(U + W) = \dim_k(U) + \dim_k(W) - \dim_k(U \cap W)$
In particolare, U + W è somma diretta di U e V $\Leftrightarrow$ $dim(U + W) = dim(U) + dim(W)$, quindi se $\dim_k(U \cap W) = 0$

Equazioni Parametriche e Equazioni Cartesiane (VEDERE SUGLI ESERCIZI)
La dimensione è uguale al numero di parametri (quando si parte da una base)

Osservazione:
$\exists$ infinite equazioni cartesiane e infinite equazioni parametriche dello stesso spazio vettoriale
$\exists$ infinite equazioni cartesiane e infinite equazioni parametriche che rappresentano lo stesso sottospazio

Proposizione:
V spazio vettoriale di dimensione finita su K; U, W sottospazio di V; $u_1, \dots, u_m \in U$ base di U
$w_1, \dots, w_m \in W$ base di W;
$\rightarrow U + W = L_k\{ u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_m \}$ (non è necessariamente una base)
Se $U \cap W = \{0\} \rightarrow U \oplus W = L_k\{ u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_m \}$ è una base

DEF.

V spazio vettoriale di dimensione finita su K;
Una funzione f : V → W è detta funzione lineare oppure applicazione lineare oppure trasformazione lineare oppure **omomorfismo** di spazi vettoriali se:

1) f($v_1 +_v v_2$) = $f(v_1) +_w f(v_2)$; (**additività**) $\forall\, v_1, v_2 \in$ V
   Ovvero, presi due qualsiasi elementi di V, l'immagine della somma è uguale alla somma delle immagini

2) f($\alpha \cdot_v v$) = $\alpha \cdot_w$ f(v); (**omogeneità**) $\forall\, \alpha \in$ K; ∀ v ∈ V
   Ovvero l'immagine del prodotto tra un qualsiasi elemento v dello spazio V e un qualsiasi scalare del campo K è uguale al prodotto tra lo scalare e l'immagine di v

Ovvero dati due spazi vettoriali V e W definiti su un campo K e un'applicazione lineare f : V → W, quest'ultima si dice un **omomorfismo** se gode delle proprietà di **additività** e **omogeneità**.

Monomorfismo

F è un **monomorfismo** se è un omomorfismo iniettivo, cioè se elementi distinti di V mediante F hanno immagini distinte: $\forall\, \boldsymbol{v_1, v_2 \in V, v_1 \neq v_2 \to F(v_1) \neq F(v_2)}$

Epimorfismo

F è un **epimorfismo** se è un omomorfismo suriettivo, cioè se ogni elemento del codominio W è l'immagine di un elemento del dominio V**:** $\forall\, \boldsymbol{w \in W}\ \exists\, \boldsymbol{v \in V \mid F(v) = w}$

DEF.

Un omomorfismo biettivo si dice **isomorfismo**, ovvero se per ogni vettore w di W esiste un unico elemento del dominio che ha per immagine w.
$\forall\, \boldsymbol{w \in W}\ \exists!\ \boldsymbol{v \in V \mid F(v) = w}$

Proposizione:

V,W spazio vettoriale su K; f: V → W lineare allora:

1) Im(f) è un sottospazio di W
2) Se L_k { $v_1,\ldots,v_m$ } = V → L_k { f(v_1),…,f(v_m) } = Im(f)
   Cioè se $v_1,\ldots,v_m$ generatori di V → f(v_1),…,f(v_m) generatori di Im(f)
3) f **suriettiva** ⇔ $\dim_k$ (Im(f)) = $\dim_k$ (W)

Osservazione:

Se $v_1,\ldots,v_m$ base di V non è detto che f(v_1),…,f(v_m) sia una base di Im(f), cioè non è detto che f(v_1),…,f(v_m) siano linearmente indipendenti.

DEF. NUCLEO

V,W spazio vettoriale su K; f: V → W lineare allora
Definiamo **nucleo** di f e lo indichiamo con Ker(f), l'insieme degli elementi del dominio V che hanno come immagine mediante f lo zero di W, ovvero il sottoinsieme del dominio formato dai vettori di V che vengono mandati in zero da f, ossia:
$\boldsymbol{Ker(f) = \{v \in V :\ f(v) = 0\}}$

Osservazione:
Una funzione f è **iniettiva** ⇔ ker(f) = {0}, cioè ⇔ f ha nucleo banale

Teorema Nullità + Rango
V,W spazio vettoriale su K; f: V → W lineare allora:
dim $_k$ (ker f) + dim $_k$ (Im(f)) = dim $_k$ (V)
^ ^
nul(f) + rg(f) - dim $_k$ (V)

Corollario:
V,W spazio vettoriale su K; f: V → W lineare allora:
1) Se dim $_k$ (V) > dim $_k$ (W) → f non è **iniettiva**
2) Se dim $_k$ (V) < dim $_k$ (W) → f non è **suriettiva**
3) Se dim $_k$ (V) = dim $_k$ (W) → f è **iniettiva** ⇔ f è **suriettiva**

DEF.
Una **matrice rappresentativa** rappresenta la trasformazione lineare cui è riferita rispetto a due fissate basi degli spazi vettoriali di partenza e di arrivo.
V,W spazio vettoriale su K di dimensione finita n; B base di V
Id $_v$: V → V ha **matrice rappresentativa**
A $_{id}$, B_1, B_2 = In
Se considero B_1, B_2 basi di V → A $_{id}$, B_1, B_2 è la matrice del cambio di base da B_2 a B_1 o matrice del cambio di coordinate da B $_1$ a B $_2$.
A $_{id}$, $B_1, B_2 \cdot e\ B_1(v) = e\ B_2(id_v(v)) = e\ B_2(v)$

Proposizione: Come si ottiene
Consideriamo un'applicazione lineare f: V → W e se due basi B_1, B_2 rispettivamente una dello spazio vettoriale V e una di W:
1) Determiniamo l'immagine rispetto a f di ogni vettore v_i della base B_1:
$$f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$$
2) I vettori così ottenuti sono elementi di W, e possono quindi essere espressi come combinazione lineare dei vettori della base B_2 dello spazio W:
$$\boldsymbol{f(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{n1}w_n}$$
$$\boldsymbol{f(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{n2}w_n}$$
$$\vdots$$
$$\boldsymbol{f(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \dots + a_{nn}w_n}$$
E ne costruisco la matrice risultante.

Osservazione IMPORTANTE:
Ogni matrice associata a un'applicazione lineare ha un numero di righe uguale alla dimensione dello spazio vettoriale d'arrivo e un numero di colonne che uguaglia la dimensione dello spazio vettoriale di partenza.

Osservazione:
Se V = W e B_1 base ho f: $VB_1 \to B_1$, considero una base B_2 di V → $f(VB_2) \to VB_2$

$$\begin{tikzcd}
VB2 \arrow[r, "{Af, B2, B2}"] \arrow[d, "{M B2, B1 = (MB1, B2)}"] & VB2 \\
VB1 \arrow[r, "{Af, B1, B1}"'] & VB1 \arrow[u, "{M B1, B2}"']
\end{tikzcd}$$

$Af, B_2, B_2 = M B_1, B_2$
$Af, B_1, B_1 (M B_1, B_2)^{-1} \to Af, B_2, B_2 \sim Af, B_1, B_1$
$A \sim B \Leftrightarrow \exists$ invertibile $B = CAC^{-1}$
Cioè la matrice rappresentativa di un **endomorfismo** è unica a meno di similitudine.
Quindi: Se A, B ∈ $M_n(\mathbb{R})$ e A ~ B → A e B rappresentano lo stesso **endomorfismo**.

F: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; Inoltre se $A = CBC^{-1}$ → C è la **matrice del cambio di coordinate**.
Un **endomorfismo** è un omomorfismo di uno spazio vettoriale in sé, per il quale cioè dominio e codominio coincidono. Si presenta quindi nella forma f : V → V

DEF.
Sia n $\in Z \geq 0$;
Il **determinante** (di ordine n) è una funzione:
det: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
Tale che:
1) È lineare in ogni variabile, cioè:
   $\det(v_1, \dots, \alpha v_i, \dots, v_n) = \alpha \det(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)$; $\forall \alpha \in \mathbb{R}$; $\forall$ i = 1,…,n
   $\det(v_1, \dots, v_i + w, \dots, v_n) = \det(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + \det(v_1, \dots, w, \dots, v_n)$; $\forall$ i = 1,…,n
2) $\det(v_1, \dots, v_n) = 0$ se $v_i = v_j$ per qualche $i \neq j$
3) $\det(e_1, \dots, e_n) = 1$

Inoltre, se $v_1, \dots, v_n$ sono le coordinate di n punti in $\mathbb{R}^n$ → il volume del parallelepipedo n-dimensionale costruito a partire dai lati che hanno un estremo nell'origine e l'altro estremo in uno dei punti dati è
$\mathrm{Vol}(v_1, \dots, v_n) = |\det(v_1, \dots, v_n)|$
Osservazione:
Se $A = (v_1, \dots, v_n) \to \det(A) = \det(v_1, \dots, v_n)$
$\wedge$
Colonne di A
Lemma:
Il determinante è antisimmetrico, cioè $\det(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -\det(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n)$

DIMOSTRAZIONE:

$\det(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = \det(v_1, \dots, v_i + v_j - v_i\ , \dots, v_j, \dots, v_n) =$

$(1) = \det(v_1, \dots, v_j + v_i\ , \dots, v_j, \dots, v_n) = \det(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) =$

^ ^

Due argomenti uguali → = 0 (2)

$= \det(v_1, \dots, v_i + v_j\ , \dots, v_j + v_i - v_i\ , \dots, v_n) =$

$= \det(v_1, \dots, v_i + v_j\ , \dots, v_j + v_i\ , \dots, v_n) - \det(v_1, \dots, v_i + v_j\ , \dots, v_i\ , \dots, v_n) =$

^ ^

Due argomenti uguali → = 0 (2)

$= -\det(v_1, \dots, v_i\ , \dots, v_i\ , \dots, v_n) - \det(v_1, \dots, v_j\ , \dots, v_i\ , \dots, v_n) = -\det(v_1, \dots, v_j\ , \dots, v_i\ , \dots, v_n)$

^ ^

Due argomenti uguali → = 0 (2) c.v.d.

Proposizione:

1) $\det\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$

2) Sommare a un argomento un multiplo reale di un altro non cambia il determinante.

3) $\det\begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

DIMOSTRAZIONE:

1) $\det\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \det(\lambda_1 l_1, \dots, \lambda_n l_n) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \det(l_1, \dots, l_n) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$

2) $\det(v_1, \dots, v_j\ , \dots, v_i\ , \dots, v_n) \mapsto \det(v_1, \dots, v_j\ , \dots, v_i + \alpha v_j\ , \dots, v_n) = (1)$

$= \det(v_1, \dots, v_j\ , \dots, v_i\ , \dots, v_n) + \alpha \det(v_1, \dots, v_j\ , \dots, v_j\ , \dots, v_n)$

^ = 0

3) Segue da 1 e 2 usando gauss per colonne c.v.d.

Corollario:

$v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ → le seguenti sono equivalenti:

1) $v_1, \dots, v_n$ sono indipendenti
2) $\det(A) = \det(v_1, \dots, v_n) \neq 0$, cioè A non singolare ⇔
3) ⇔ $\exists\, A^{-1}$, cioè A è invertibile

TEOREMA Sviluppo Di Laplace

Sia $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$;

$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$; $\quad \forall\, j = 1,\ldots,n$

Proposizione:

$\det(A^t) = \det(A)$; $\quad \forall\, A \in M_n(\mathbb{R})$;

TEOREMA di BINET

$\det(AB) = \det(A) \det(B)$; $\quad \forall\, A,B \in M_n(\mathbb{R})$;

Corollario:

Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile $\rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

DIMOSTRAZIONE:

$1 = \det(I) = \det(A\, A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$ c.v.d

DEF.

V spazio vettoriale su K; Con $K = \mathbb{R}$, ***C,*** Q;

Una **norma** su V è una funzione $\|\cdot\| : V \rightarrow R$ tale che:

1) $\| v \| \geq 0$; $\quad \forall\, v \in V$;
2) $\| \alpha v \| = | \alpha | \cdot \| v \|$; $\quad \forall\, v \in V; \forall\, \alpha \in K$;
3) $\| v_1 + v_2 \| \leq \| v_1 \| + \| v_2 \|$; $\quad \forall\, v_1, v_2 \in V$;

La **norma** di un vettore è un'applicazione che a un vettore associa un numero reale.

DEF.

La norma $\| v \|$ di un vettore $v \in V$ è anche detto **modulo** o **lunghezza** di V

Osservazione:

La lunghezza di un vettore non è un concetto intrinseco nella definizione di spazio vettoriale.

La **norma euclidea** è $\| v \|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

Ovvero si calcola estraendo la radice quadrata della somma dei quadrati delle componenti del vettore.

DEF.

V spazio vettoriale su K con $\|\cdot\|$;

$v \in V$ è detto **vettore unitario** o **versore** se $\| v \| = 1$

Osservazione:

se $v \neq o_V$ allora **normalizzare** v vuol dire passare dal vettore v al **versore** associato $\hat{v} = \frac{1}{\| v \|}\, v = \frac{v}{\| v \|}$

Si ha che:

$\| \hat{v} \| = \| \frac{1}{\| v \|}\, v \| = \| \frac{1}{\| v \|} \| \cdot \| v \| = \frac{1}{\| v \|}\, v = 1$

Il **versore** è un vettore di lunghezza unitaria (modulo uguale a 1) e che viene usato per caratterizzare altri vettori, il suo scopo è infatti quello di individuare una specifica direzione.

Infatti, il versore associato a un vettore è un vettore avente stessa direzione e stesso verso ma con modulo pari a 1

DEF.

V spazio vettoriale su K;   Con K = ℝ***, C,*** Q;

Un **prodotto scalare** su V è una funzione: < · , · > :

V x V → K

$(v_1,v_2) \rightarrow (v_1,v_2)$

Tale che:

1) $< v , v > \geq 0$; $\forall\ v \in V$;
   $< v , v > = 0 \Leftrightarrow v = o_v$
2) $< v_1 , v_2 > = < v_2 , v_1 >$; $\forall\ v_1 ,v_2 \in V$;
3) È bilineare, cioè è lineare nulle due variabili, ovvero:
   $< v_1 + v_2, v_3 > = < v_1 , v_3 > + < v_2 , v_3 >$; $\forall\ v_1 ,v_2, v_3 \in V$;
   $< v_1 , v_2 + v_3 > = < v_1 , v_2 > + < v_1 , v_3 >$; $\forall\ v_1 ,v_2, v_3 \in V$;
   $< \alpha\ v_1 , v_2 > = < v_1 , \alpha\ v_2 > = \alpha < v_1 , v_2 >$; $\forall\ v_1 ,v_2 \in V; \forall\ \alpha \in K$;

Il **prodotto scalare euclideo** (o **standard**) è :

$< v_1 , v_2 > = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_j = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$; $\forall\ v_1 = (x_1,\ldots,x_n) ,v_2 = (y_1,\ldots,y_n) \in V$;

$< v_1 , v_2 >_* = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_1$;

Per definizione il prodotto scalare associa a una coppia di vettori un numero reale, e in particolare la somma dei prodotti delle componenti dei due vettori.

Proposizione:

V spazio vettoriale su K; con < · , · > se $< v_1 , v_2 > = 0$; $\forall\ v_2 \in V \rightarrow v_1 = o_v$

Cioè il prodotto scalare è **non degenere**.

Un prodotto scalare è **degenere**, se possiamo trovare almeno un vettore non nullo che moltiplicato scalarmente per qualsiasi vettore dello spazio V dà zero.

Osservazione:

V spazio vettoriale su K; con < · , · >; Il prodotto scalare induce una norma su V;

$\| v \| = \sqrt{< v1, v2 >}$; $\forall\ v \in V$;

Il prodotto scalare euclideo su $\mathbb{R}^n$ induce la norma euclidea.

Proposizione Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

V spazio vettoriale su K, con < · , · > e ‖ · ‖ indotta; $| < v_1 , v_2 > | \leq \| v_1 \| \cdot \| v_2 \|$; $\forall\ v_1 ,v_2 \in V$;

$\| v_1 \| \cdot \| v_2 \| \Leftrightarrow v_1 ,v_2$ linearmente dipendente

DEF.

V spazio vettoriale su K, con < · , · > e ‖ · ‖ indotta;

$v_1 ,v_2 \in V$ sono detti **ortogonali** e si indica con $v_1 \perp v_2$, se $< v_1 , v_2 > = 0$

Sia $\widehat{v_1, v_2}$ l'angolo formato da v_1 e v_2 →

$$\cos(\widehat{v_1, v_2}) = \begin{cases} \dfrac{< v_1,v_2 >}{\| v_1 \| \cdot \| v_2 \|} & se\ v_1 \neq 0 \wedge v_2 \neq 0 \\ 0 & \text{se } v_1 = 0 \vee v_2 = 0 \end{cases}$$

Osservazione:

Se $< v_1 , v_2 > > 0 \rightarrow \widehat{v_1, v_2}$ è **acuto** cioè $0 < \widehat{v_1, v_2} < \frac{\pi}{2}$

Se $< v_1 , v_2 > < 0 \rightarrow \widehat{v_1, v_2}$ è **ottuso** cioè $\frac{\pi}{2} < \widehat{v_1, v_2} < \pi$

Osservazione:
Se $v_1 \neq 0$ e $v_2 \neq 0$ e $v_1 \perp v_2 \rightarrow v_1 , v_2$ sono **indipendenti** , non è vero il viceversa.

Osservazione:
$v = o_V$ è l'unico vettore ortogonale a ogni vettore di V (poiché il prodotto scalare è non degenere)

Proposizione Teorema Di PITAGORA

V spazio vettoriale su K, con $< \cdot , \cdot >$ e $|| \cdot ||$ indotta;
$< v_1 , v_2 > = 0 \Leftrightarrow || v_1 + v_2 ||^2 = || v_1 ||^2 \cdot || v_2 ||^2$

Osservazione:
Se $V = \mathbb{R}^2$; $K = \mathbb{R}$; $< \cdot , \cdot >$ è il prodotto scalare euclideo.
Il precedente teorema è il teorema di Pitagora classico.

DEF.

V spazio vettoriale su K, con $< \cdot , \cdot >$ e $|| \cdot ||$ indotta; B una base di V

1) B è una base **ortogonale** se $< v , w > = 0$; $\forall$ v,w $\in$ B; con $v \neq w$
2) B è una base **ortonormale** se $< v , w > = \begin{cases} 0 & se\ v \neq w \\ 1 & se\ v = w \end{cases}$

Cioè B è ortonormale se B è ortogonale e se $|| v || = 1$; $\forall$ v $\in$ B;
Una base **ortonormale** è una base **ortogonale** in cui tutti i vettori hanno norma unitaria rispetto a un fissato prodotto scalare

Osservazione:
Data una base **ortogonale** ne posso sempre ottenere una **ortonormale** sostituendo ogni vettore v $\in$ B con il versore associato $\hat{v} = \frac{v}{|| v ||}$

DEF. PROIEZIONE ORTOGONALE

V spazio vettoriale su K, con $< \cdot , \cdot >$ e $|| \cdot ||$ indotta; $\forall$ v,u $\in$ V;
Cerco la **proiezione ortogonale** di v su u ($u \neq 0$)
$Pr_u(v) = \alpha\ u$

Devo avere:
$0 = < v - Pr_u(v), Pr_u(v) > = < v - \alpha\ u , \alpha\ u > = < v , \alpha\ u > - < \alpha\ u , \alpha\ u > = \alpha < v , u > - \alpha^2 < u , u >$
$\rightarrow \alpha = \frac{< v ,u >}{< u ,u >}$ ← **coefficiente di fourier** di v rispetto a u

Definisco:
$Pr_u(v) = \frac{< v ,u >}{< u ,u >}\ u = \frac{< v ,u >}{||u||^2}\ u$

Teorema Di Ortogonolizzazione di Gram-Schmidt

Il metodo permette di costruire una famiglia di vettori ortogonali partendo da una famiglia di vettori linearmente indipendenti.
V spazio vettoriale su K, con $< \cdot , \cdot >$ e $|| \cdot ||$ indotta;

Siano $v_1, \ldots, v_m \in V \rightarrow \exists\, w_1, \ldots, w_m \in V$ tali che:

1) $L_k\{ w_1, \ldots, w_m \} = L_k\{ v_1, \ldots, v_m \}$
2) $< w_i , w_j > = 0;$ $\quad\forall\, i,j = 1,\ldots,m;$ con $i \neq j;$

$w_i = v_i - \sum_{j=1}^{i-1} Pr_{wj}(v_i);$ $\quad\forall\, i = 2,\ldots,m$

Inoltre, se $v_1, \ldots, v_m$ linearmente indipendenti $\rightarrow w_1, \ldots, w_m$ linearmente indipendenti.
Quindi se $\{ v_1, \ldots, v_m \}$è una base di V $\rightarrow \{ w_1, \ldots, w_m \}$ è una base ortogonale di V.
Il teorema dunque ci assicura **l'esistenza** di una famiglia di vettori $w_1, \ldots, w_m \in V$ linearmente indipendenti, ortogonali tra loro e tali da generare lo stesso spazio generato da $v_1, \ldots, v_m$

DEF.

V spazio vettoriale su K di dimensione finita, con $< \cdot , \cdot >$ e $\| \cdot \|$ indotta; W sottospazio di V;
$B = \{ w_1, \ldots, w_m \}$ base ortogonale di $v \in W$ su W è:

$$Pr_w(v) = Pr_{w1}(v) + Pr_{w2}(v) + \ldots + Pr_{wm}(v) = \frac{< v, w_1 >}{< v_1, w_1 >} w_1 + \ldots + \frac{< v, v_m >}{< v_m, v_m >} v_m$$

Osservazione:

La precedente definizione non vale se B non è ortogonale.

DEF.

V spazio vettoriale su K di dimensione finita, con $< \cdot , \cdot >$ e $\| \cdot \|$ indotta; W sottospazio di V;
Il **completamento ortogonale** di W è l'insieme:
$W^{\perp} = \{ v \in V \mid < v , w > = 0; \forall\, w \in W \}$ cioè $w^{\perp}$ è l'insieme di tutti i vettori di V ortogonali a ogni vettore di W

Osservazione:

$W^{\perp}$ è sottospazio vettoriale, infatti $< o , w > = 0; \forall\, w \in W \rightarrow o \in W^{\perp} \neq \emptyset$

$v_1, v_2 \in W^{\perp} \rightarrow \begin{cases} < v_1 , w > \\ < v_2 , w > \end{cases}$ $\quad\forall\, w \in W$

$< v_1 + v_2 , w > = \underbrace{< v_1 , w >}_{= 0} + \underbrace{< v_2 , w >}_{= 0} = 0;$ $\quad\forall\, w \in W$

Quindi $v_1 + v_2 \in W^{\perp}$

$< \alpha v_1 , w > = \alpha \underbrace{< v_1 , w >}_{= 0} = \alpha \cdot 0 = 0;$ $\quad\forall\, \alpha \in K; \forall\, w \in W$

Quindi $\alpha v_1 \in W^{\perp} \rightarrow W^{\perp}$ è sottospazio

Proposizione:

V spazio vettoriale su K di dimensione finita, con $< \cdot , \cdot >$ e $\| \cdot \|$ indotta; W sottospazio di V;
$B = \{ w_1, \ldots, w_m \}$ base di W $\rightarrow v \in W^{\perp} \Leftrightarrow < v , w_i > = 0;$ $\quad\forall\, w_i \in B$

DIMOSTRAZIONE:

$\rightarrow$ Ovvio
$w \in W \rightarrow w = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_m w_m$
$< v , w > = < v , \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_m w_m > = \alpha_1 < v , w_1 > + \ldots + \alpha_m < v , w_m > = 0$ c.v.d.

Osservazione:

Se v ha dimensione finita $\rightarrow W \oplus W^{\perp} = V \rightarrow$
$\rightarrow \dim_k(W^{\perp}) = \text{codim}_k(W)$

$\rightarrow \text{codim}_k (W^\perp) = \dim_k (W)$

$(W^\perp)^\perp = W$

Osservazione:

Cerco una base di $W_1^\perp \neq$ cerco una base ortogonale di W_1

Proposizione:

$A \in M_n(\mathbb{R})$;

A ortogonale $\Leftrightarrow$ Le colonne (o righe) di A formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ ($A^{-1} = A^t$)

Osservazione:

Se si hanno due basi ortonormali di uno spazio vettoriale $\rightarrow$ la matrice del cambio di coordinate è una matrice ortogonale.

DEF.

V spazio vettoriale su K; f: V $\rightarrow$ V lineare (endom)   endom = endomorfismo

$v \neq 0 \wedge v \in V$ è detto **autovettore** di f se $\exists\, \lambda \in K \mid f(v) = \lambda v$

Il tal caso λ è detto **autovalore** di f.

L'insieme degli autovalori di f è detto **spettro** di f e si indica con **σ(f)** che equivale anche al **nucleo**.

DEF.

$A \in M_n(\mathbf{K})$; $v \in K^n$ è un **autovettore** di A

Se v è un autovettore di A $\rightarrow$ è autovettore dell'endomorfismo associato ad A rispetto a una qualche base di K^n

Analogamente $\lambda \in K$ è autovalore dell'endomorfismo associato.

DEF.

$A \in M_n(\mathbf{K})$

Si dice che lo scalare λ_0 è un **autovalore** della matrice quadrata A se esiste un vettore colonna non nullo $v \in K^n$ tale che $Av = \lambda_0$

Il vettore v è detto **autovettore** relativo all'autovalore λ_0

Osservazione:

V spazio vettoriale su K di dimensione finita n; Sia B base di V

$f: V \rightarrow V$ endomorfismo; $A = A_{\mathbf{f, B, B}} \in M_n(\mathbf{K})$;

$f(v) = \lambda v$

$A \cdot \zeta_B(v) = \lambda\, P_B(v)$ per semplicità $Av = \lambda v$

$Av - Av = Ov$

$(A - \lambda Im)\, v = Ov$

Quindi se v è autovettore di f $\rightarrow v \in Ker(f_\lambda)$ dove f_λ è l'endomorfismo con matrice rappresentativa.

$A = A - \lambda Im$ e se $v \neq 0 \wedge v \in Ker(f_\lambda) \rightarrow$ v è autovettore di f.

DEF.

$E(\lambda) = Ker(f_\lambda)$ è detto **autospazio di** f relativo all'autovalore $\lambda \in f$

Osservazione:

L'**autospazio** di f relativo a $\lambda \in \sigma(f)$ è l'insieme di tutti gli autovalori di f relativi a λ a cui aggiungo il vettore nullo. (corrisponde alle soluzioni del sistema, gli elementi del sistema sono gli autovettori relativi ai vari autovalori)

RIEPILOGANDO (dal libro)
Sia V uno spazio vettoriale sul campo K e sia f: V → V un'applicazione lineare da V in V. Un vettore v ∈ V, diverso dal vettore nullo, è detto **autovettore** di f se esiste uno scalare $\lambda \in K$ tale che $f(v) = \lambda v$.
In tal caso, lo scalare λ è detto **autovalore di f.** L'insieme degli autovalori è detto **spettro** di f ed è indicato con $\sigma(f)$
Supponiamo che V abbia dimensione finita n. Sia B una base di V e sia A = $A_{f,B,B}$ la **matrice rappresentativa** di f rispetto alla base B. Poiché f è un operatore lineare, allora A è quadrata e ha ordine uguale alla dimensione n di V.
Quando si scrive che λ è un autovalore, o che v è un autovettore, di una matrice quadrata A, si intende che λ è un autovalore, o che v è un autovettore, dell'operatore lineare associato ad A, di cui A è matrice rappresentativa rispetto a una base fissata su V.
La condizione che deve soddisfare un vettore non nullo v per essere un autovettore di f, si scrive $(A - \lambda In)v = 0$
Si deduce che v è un autovettore di f ⇔ è nel nucleo dell'operatore lineare $f_\lambda = f - \lambda id_v$.
Il **nucleo** Ker(f_λ) di f_λ è un **sottospazio vettoriale di V** composto dal vettore nullo e da tutti e soli gli autovalori di f rispetto a un fissato valore di λ.
Quindi, i valori di λ per cui Ker(f_λ) è non banale, cioè non è formato solo dal vettore nullo, sono detti autovalori di f e Ker(f_λ) è detto **autospazio** di f rispetto all'autovalore λ.
Dunque, λ è un autovalore per f ⇔ Ker(f_λ) è non banale

Osservazione:
Poiché E(λ) è il nucleo di una funzione lineare → E(λ) è un sottospazio vettoriale di V.

Osservazione:
$\lambda \in \sigma(f)$ ⇔ Ker(f_λ) è non banale ⇔ f_λ è non iniettiva quindi: $\lambda \in \sigma(f)$ ⇔ $\det(A - \lambda I) = 0$
Poiché se $\det(A - \lambda I) \neq 0 \rightarrow rg(A - \lambda I) = \underset{\underset{\dim_k(Im(f_\lambda))}{\wedge}}{n} = \dim_k(V) \rightarrow \dim_k(Ker(f_\lambda)) = n - n = 0$

DEF.
$p(\lambda) = \det(A - \lambda In)$ è detto **polinomio caratteristico** di A e $p(\lambda) \in k[\lambda]$ e $\deg(p(\lambda)) = n$.
$p(\lambda) = 0$ è detta **equazione caratteristica** di A.
Per calcolare gli autovalori di una matrice è sufficiente calcolare gli zeri del suo polinomio caratteristico.

Osservazione:
Se K = C → $p(\lambda) = 0$ ha esattamente n soluzioni (contate con molteplicità)
Se K = $\mathbb{R}$ (o Q) → $p(\lambda) = 0$ ha al massimo n soluzioni (contato con molteplicità)

Proposizione:
V spazio vettoriale su K;   f:V → V endomorfismo;
Se $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma(f)$; $\lambda_1 \neq \lambda_2 \rightarrow E(\lambda_1) \cap E(\lambda_2) = \{o_v\}$

Quindi se $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \sigma(f)$ tutti distinti e se $v_1 \in E(\lambda_1)$, $v_m \in E(\lambda_m) \rightarrow v_1,\dots,v_m$ sono linearmente indipendenti.

Teorema

$a(x), b(x) \in \mathbb{R}[x]$; $\deg[a(x)] > \deg[b(x)]$

Allora $\exists!\ q(x), r(x) \in \mathbb{R}[x] \mid a(x) = q(x)\, b(x) + r(x)$; con $\deg[r(x)] < \deg[b(x)]$

Osservazione:

$\frac{a(x)}{b(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{b(x)}$

DEF.

$a(x), b(x) \in \mathbb{R}[x]$; $\deg[a(x)] \geq \deg[b(x)]$

$b(x) / a(x) \Leftrightarrow r(x) = 0$; cioè se $\frac{a(x)}{b(x)} = q(x) \in \mathbb{R}[x]$; cioè se b(x) è un divisore di a(x)

Altrimenti se $r(x) \neq 0 \rightarrow$ b(x) non divide a(x)

Teorema

$p(x) \in \mathbb{R}[x]$;

$x_0 \in \mathbb{R}$ **radice** di $p(x) \Leftrightarrow (x - x_0) / p(x)$ cioè $p(x_0) = 0$

Osservazione:

I precedenti teoremi tranne l'ultimo valgono in $C(x)$

DEF.

$p(x) \in \mathbf{C}[x]$; $x_0 \in \mathbf{C}$; $p(x_0) = 0$

x_0 ha **molteplicità algebrica** $m \in Z > 0$ se $p(x) = (x - x_0)^m q(x)$ con $q(x_0) \neq 0$; cioè se $(x - x_0)^m / p(x)$ e $(x - x_0)^{m+1} / p(x)$

Se $m = 1 \rightarrow x_0$ è detto **radice** (o **zero**) **semplice** di p(x)

DEF.

$A \in M_n(K)$;

A è detta **diagonalizzabile** se è simile a una matrice diagonale

$D \in D_n(K)$ se $\exists\ M \in GL_n(K) \mid M^{-1}AM = D$

Osservazione:

Non tutte le matrici sono diagonalizzabili

DEF.

V spazio vettoriale di dimensione finita su K; $f: V \rightarrow V$ endomorfismo;

f è diagonalizzabile se è diagonalizzabile la matrice rappresentativa di X rispetto a qualche base fissata di V.

Osservazione:

Sia A rappresentativa di un endomorfismo f rispetto a una base B di V $\rightarrow$ la matrice rappresentativa di f rispetto a un'altra base B' di V è simile ad A.

Quindi diagonalizzare f vuol dire trovare una base di V tale che la matrice rappresentativa di f sia diagonale

DAGLI ESERCIZI

L'endomorfismo f è diagonalizzabile ⇔ la somma delle molteplicità algebriche è uguale al numero di colonne della matrice A e per ogni autovalore la molteplicità algebrica è uguale alla molteplicità geometrica.

Se la matrice iniziale A è simmetrica rispetto a una base ortonormale (ad esempio la base canonica), allora è possibile ottenere una base ortonormale di autovettori, cioè è possibile trovare la matrice M ortogonale

Proposizione:

Il polinomio caratteristico di matrici simili è uguale.

DEF.

V spazio vettoriale di dimensione finita su K; f:V → V endomorfismo;

Il polinomio caratteristico di f è :

$pf(\lambda) = \det(A - \lambda Im)$ con $A = A_f$, B , B per qualche base B di V e l'equazione caratteristica è $pf(\lambda) = 0$

DEF.

Sia $\lambda \in \sigma(f)$;

La **molteplicità algebrica** di λ indicato con $m_a(\lambda)$ è la molteplicità algebrica di λ come radice di $pf(\lambda)$

La **molteplicità algebrica** di un autovalore è il numero che esprime quante volte l'autovalore annulla il polinomio caratteristico

La **molteplicità geometrica** di λ indicato con $m_g(\lambda)$ è la dimensione dell'autospazio relativo, cioè:

$m_g(\lambda) = \dim_k(E(\lambda))$

posso anche usare $\mathbf{m_g(\lambda) = dim(\mathit{V}) - rg(A - \lambda I)}$

dove $\dim(V) = n$ è la dimensione della matrice quadrata A

Proposizione:

V spazio vettoriale su K; f:V → V endomorfismo;

$1 \le m_g(\lambda) \le m_a(\lambda)$; $\forall \lambda \in \sigma(f)$;

Proposizione:

V spazio vettoriale di dimensione finita su K; f:V → V endomorfismo;

Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1) f è diagonalizzabile ⇔
2) ∃ una base di V formata da autovettori di f ⇔
3) $\begin{cases} \sum_{\lambda \in \sigma(f)} m_a(\lambda) = n \\ m_g(\lambda) = m_a(\lambda) \end{cases}$ $\forall \lambda \in \sigma(f)$ ⇔
4) $\sum_{n \in \sigma(f)} m_g(\lambda) = n$

Corollario:

V spazio vettoriale su K; f:V → V endomorfismo;

Se f ha n autovalori distinti (cioè $\#\sigma(f) = n$) → $m_a(\lambda) = 1$ e $m_g(\lambda) = 1$; $\forall \lambda \in \sigma(f)$
E f è diagonalizzabile.

Osservazione:
V spazio vettoriale su K; f:V → V endomorfismo; B base di V; $A = A_{f, B, B}$
Se f diagonalizzabile $\exists D_n(k)$; $M \in GL_n(k) \mid D = M^{-1}AM$

Dove $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_m \end{pmatrix}$ con $\sigma(f) = \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \}$

Sia B' una base di autovettori di f allora $M = M'_{B1B}$, se $B = \zeta_n$ → le colonne di M formano la base di B'

Osservazione:
D ed M non sono uniche, ma se una colonna i di D contiene un autovalore in $E(\lambda)$

DEF.
V spazio vettoriale di dimensione finita su K; f:V → V endomorfismo; W sottospazio di V;
W è invariante per f se $f(w) \in W$; $\forall w \in W$;

Osservazione:
Ogni autospazio di f è un sottospazio invariante per f.

DEF.
V spazio vettoriale su K con $< \cdot , \cdot >$ e $\| \cdot \|$ indotta; f:V → V endomorfismo; B base ortonormale di V;
$A_{f, B, B}$ → f è detto simmetrico se A è una matrice simmetrica

TEOREMA SPETTRALE
V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione finita con prodotto scalare e $< \cdot , \cdot >$ e $\| \cdot \|$ indotta;
f:V → V endomorfismo;
∃ una base ortonormale di autovettori di f ⇔ f è simmetrico
Il teorema spettrale reale stabilisce che ogni matrice simmetrica a coefficienti reali è diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale

DEF.
Si dice che $f: V \to V$ è un **endomorfismo simmetrico** ⇔ $\forall v_1, v_2 \in V$ il prodotto scalare tra l'immagine v_1 mediante f e il vettore v_2 uguaglia il prodotto scalare tra v_1 e l'immagine di v_2 mediante f, in simboli:

$$< f(v_1), v_2 > = < v_1, f(v_2) > \quad \forall v_1, v_2 \in V$$

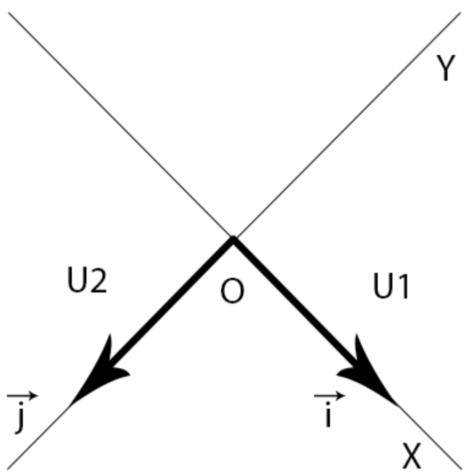
Osservazione:
Se f endomorfismo simmetrico di uno spazio vettoriale V e $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma(f)$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2 \wedge v_1 \in E(\lambda_1) \wedge v_2 \in E(\lambda_2) \to v_1 \perp v_2$, ma non è detto che se $v_1, v_2 \in E(\lambda_1) \to v_1 \perp v_3$

DEF.
Sia π un piano.

Un **riferimento affine** sul piano è una terna **R**$_a$ **(o, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$)** con o punto del piano e $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ vettori geometrici linearmente indipendenti. Il punto o è detto **origine**.
Fissiamo ora un riferimento affine sul piano.
A ogni punto del piano posso associare delle coordinate nel seguente modo:
Al punto P associo il vettore $\overrightarrow{OP}$, ma poiché { $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ } è una base di vettori geometrici si ha che:
$\overrightarrow{OP} = x \cdot \vec{\imath} + y \cdot \vec{\jmath}$, con x,y ∈ ℝ e x,y sono le coordinate di $\overrightarrow{OP}$ rispetto alla base { $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ }.
Quindi associo a P le coordinate $\binom{x}{y}$ del vettore $\overrightarrow{OP}$ e questo si indica con p$\binom{x}{y}$
Viceversa, a ogni vettore geometrico $\overrightarrow{AB}$ posso associare un punto P del piano, infatti considero il rappresentante $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB} \rightarrow$ associo il secondo estremo di $\overrightarrow{OP}$ al vettore $\overrightarrow{AB}$.

Osservazione
Un **vettore applicato** è associato ad un determinato punto di origine (O)
Un **vettore libero** non è vincolato a un determinato punto di origine, l'insieme di tutti i vettori liberi del piano è detto insieme quoziente

DEF.
Sia p$\binom{x}{y}$ allora x,y sono dette coordinate di P rispetto a R$_a$ (o, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$), x è detta **ascissa** di P, y è detta **ordinata** di P.
La retta generata da $\vec{\imath}$ passante per O è detta asse delle ascisse o asse X.
La retta generata da $\vec{\jmath}$ passante per O è detta asse delle ordinate o asse Y.
Le due rette sono dette assi coordinanti.
Se $\vec{\imath} = \overrightarrow{OU_1} \rightarrow U_1$ è detto **punto unità** dell'asse x e ha coordinate $\binom{1}{0}$.
Se $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OU_2} \rightarrow U_2$ è detto **punto unità** dell'asse y e ha coordinate $\binom{0}{1}$.
L'origine O ha coordinate $\binom{0}{0}$.



Osservazione:
Si ha che $\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2}$
$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = (x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath}\ ) - (x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath}\ ) = (x_2 - x_1)\ \vec{\imath} + (y_2 - y_1)\ \vec{\jmath} \rightarrow \overrightarrow{P_1P_2} = \binom{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$
con P$_1\binom{x_1}{y_1}$ e P$_2\binom{x_2}{y_2}$;

DEF.
Siano $\overrightarrow{OP_1} = \binom{x_1}{y_1}$; $\overrightarrow{OP_2} = \binom{x_2}{y_2}$;

$< \overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2} > = < \binom{x_1}{y_1}, \binom{x_2}{y_2} >$

DEF.
Un **riferimento cartesiano Rc (o, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$)** sul piano è un riferimento affine R_a (o, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$) tale che la base { $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ } è una base ortonormale rispetto a < · , · >
DEF.
Siano $v_1, v_2 \in V_o^2 \rightarrow v_1$ è **parallelo** a v_2 e si indica con $v_1 // v_2$ se v_1, v_2 sono vettori linearmente **dipendenti**.

Proposizione:
$v_1 = \binom{x_1}{y_1}$, $v_2 = \binom{x_2}{y_2}$ sono linearmente dipendenti ⇔ $\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = 0$

Proposizione:

1) Il **punto medio del segmento** P_1P_2, con $P_1\binom{x_1}{y_1}$ e $P_2\binom{x_2}{y_2}$ ha coordinate $M\begin{pmatrix} \frac{x_1+x_2}{2} \\ \frac{y_1+y_2}{2} \end{pmatrix}$
2) Il **punto simmetrico** di $P_0\binom{x_0}{y_0}$ rispetto al punto $P_c\binom{x_c}{y_c}$ ha coordinate $P_0'\begin{pmatrix} 2x_c - x_0 \\ 2y_c - y_0 \end{pmatrix}$

DEF.
3 punti del piano si dicono allineati se esiste una retta che li contiene tutti.

Osservazione:
$\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}$ sono linearmente dipendenti (cioè sono paralleli)

Proposizione:
$P_0\binom{x_0}{y_0}$, $P_1\binom{x_1}{y_1}$, $P_2\binom{x_2}{y_2}$ sono allineati.

DEF. RETTE
Siano $P_1\binom{x_1}{y_1}$, $P_2\binom{x_2}{y_2}$ punti distinti e sia r la retta passante per P_1P_2.
Si ha che $P\binom{x}{y} \in$ r ⇔ P_1, P_2,P sono allineati ⇔ $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_1P}$ sono linearmente dipendenti (cioè proporzionali) ⇔ $\overrightarrow{P_1P} = t\,\overrightarrow{P_1P_2}$ ⇔ $\binom{x - x_1}{y - y_1} = t\binom{x_2-x_1}{y_2-y_1}$ ⇔ $\binom{x}{y} = \binom{x_1}{y_1} + t\binom{x_2-x_1}{y_2-y_1}$ ⇔
⇔ $\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases}$; $\forall\, t \in \mathbb{R}$**;**

Quindi:
$\binom{x}{y} = \binom{x_0}{y_0} + t\binom{l}{m}$; è un'equazione parametrica di una retta r o analogamente $\begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \end{cases}$; $\forall\, t \in \mathbb{R}$**;**
$v = \binom{l}{m}$ è detto **vettore direttore** della retta r e ne indica la sua direzione; l,m sono detti **parametri direttori** della retta r; $P\binom{x_0}{y_0} \in$r

Osservazione:
Una retta ha infinite equazioni parametriche infatti posso sostituire P_0 con un qualunque altro punto della retta.
Posso anche sostituire il vettore direttore v di r con un qualunque altro suo multiplo non nullo.

DEF.
Sia v un vettore direttore di una retta r → un vettore w è parallelo alla retta r se w // v

Osservazione:
Una retta è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ ⇔ r passa per l'origine O.
Osservazione:
P_1, P_2 punti distinti del piano
P$\binom{x}{y}$ appartiene alla retta passate per P_1, P_2 ⇔ $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_1P}$ sono linearmente dipendenti ⇔
det$\begin{pmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 \end{pmatrix}$=0
Con $\overrightarrow{P_1P_2} = \binom{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$ ∧ $\overrightarrow{P_1P} = \binom{x - x_1}{y - y_1}$

$(x - x_1)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0$

$\underbrace{(y_2 - y_1)x}_{a} - \underbrace{(x_2 - x_1)y}_{b} - \underbrace{x_1(y_2 - y_1) + y_1(x_2 - x_1)}_{c} = 0$

Si ha ax + by + c = 0 che è un'equazione cartesiana della retta e $\binom{a}{b} = \binom{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$
a, b sono detti **parametri di giacitura** della retta.

Proposizione:
Se $\binom{a}{b} \neq \binom{0}{0}$ → ax + by + c = 0 è un'equazione cartesiana di una retta e, viceversa, ogni retta del piano ha un'equazione cartesiana del tipo precedente.

Osservazione:
∃ infinite equazioni cartesiane per una data retta.
Infatti, se ax + by + c = 0 è un'equazione cartesiana della retta r → αax + $\alpha$by + αc = 0 è un'equazione cartesiana della stessa retta r; $\forall \alpha \in \mathbb{R}$**;**

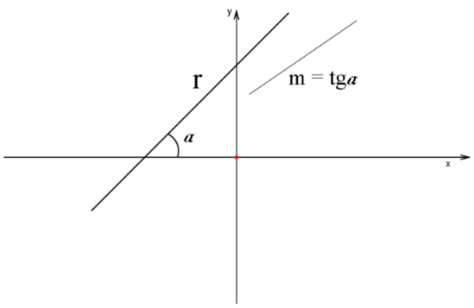
Osservazione:
Posso verificare se P_0,P_1, P_2 sono allineati considerando la retta r passante per P_0 e P_1 e verificando se $P_2 \in$ r**;**

Osservazione:
Se cerco la retta r ortogonale A n = $\binom{a}{b}$ passante per $P_0\binom{x_0}{y_0}$ → P$\binom{x}{y}$ ∈ r ⇔$\binom{x - x_0}{y - y_0}$, $\binom{a}{b}$ > 0 ⇔ $\overrightarrow{P_0P} \perp$ n
$(x - x_0)$ a + $(y - y_0)$ b = 0
ax + by - ax_0 - by_0 = 0
Quindi se r ha equazione cartesiana ax + by + c = 0 con n = $\binom{a}{b} \neq \binom{0}{0}$ e ha equazione parametrica
r: $\binom{x_0}{y_0}$ + t $\binom{l}{m}$; $\forall$ t ∈ $\mathbb{R}$**;** con v = $\binom{l}{m} \neq \binom{0}{0}$ → n ⊥ v
Quindi dato v = $\binom{l}{m}$ si ha che n = v = $\binom{-m}{l}$ oppure $\binom{m}{-l}$ dato n = $\binom{a}{b}$ → v = $\binom{-b}{a}$ oppure $\binom{b}{-a}$

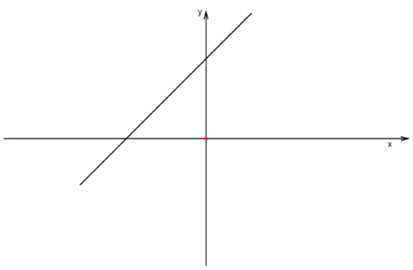
DEF.
r: ax + by + c = 0
L'equazione cartesiana della retta è anche detta **equazione in forma implicita** se b ≠ 0 →

$\rightarrow$ y = $-\frac{a}{b}\,x - \frac{c}{b}$

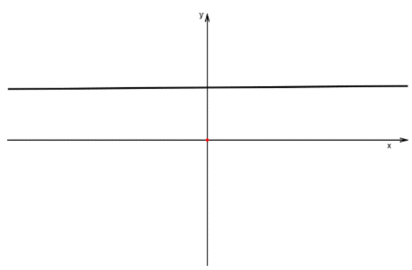
Cioè y = mx + q, detta **equazione in forma esplicita** con m = $-\frac{a}{b}$ **coefficiente angolare** e q = $-\frac{c}{b}$ **intercetta**



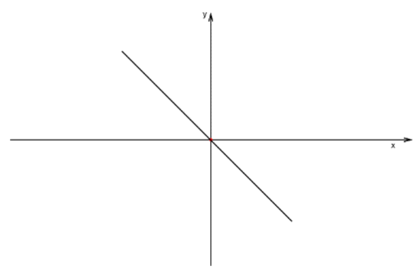
m > 0



m = 0



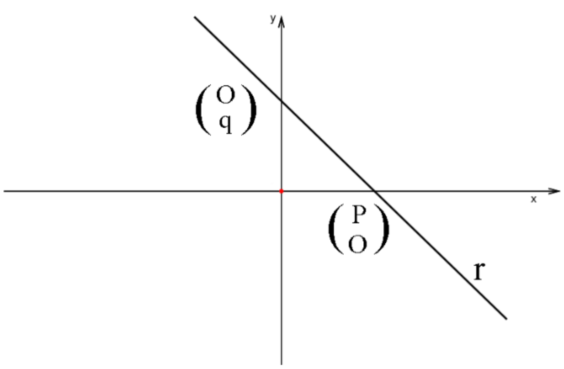
m < 0



Se b = 0 $\rightarrow$ $\nexists$ m

Se a $\neq$ 0 $\wedge$ b $\neq$ 0 $\wedge$ c $\neq$ 0 $\rightarrow$ $-\frac{a}{c}\,x - \frac{b}{c}$ y = 1 cioè: $\frac{x}{p} + \frac{y}{q}$ = 1 **equazione segmentaria** della retta.

Con p = $-\frac{c}{a}$ e q = $-\frac{c}{b}$



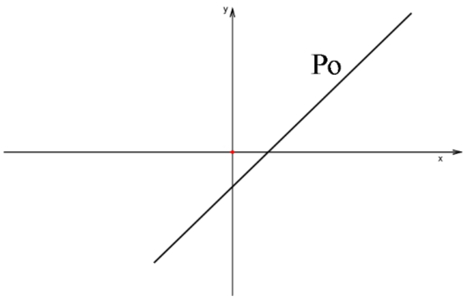
Osservazione:

Se $\exists$ le equazioni in forma esplicita e segmentaria sono uniche.

Osservazione:

Le equazioni parametriche di una retta sono lineari nel parametro $\begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \end{cases}$; $\forall$ t $\in \mathbb{R}$**;**

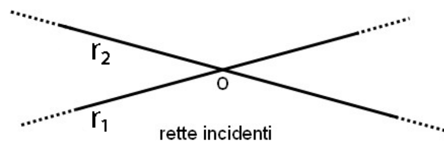
Se t ∈ [0;1] → le precedenti equazioni descrivono il segmento di estremi $P_0\binom{x_0}{y_0}$; $P_1\binom{x_0+l}{y_0+m}$



Se t ∈ [0;∞) → le precedenti equazioni descrivono una semiretta.
Se t ∈ (-∞;0] → le precedenti equazioni descrivono la semiretta opposta.

Osservazione:

r_1, r_2 rette nel piano



O r_1, r_2 rette incidenti → $r_1 \cap r_2$ è un punto

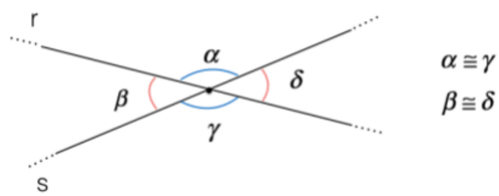
O r_1 // r_2 → $\begin{cases} r_1 = r_2 \\ r_1 \cap r_2 \neq 0 \end{cases}$

Osservazione:

Se r_1 = y = m_1x + q_1 ; r_2 = y = m_2x + q_2 → r_1 // r_2 ⇔ $m_1 = m_2$

DEF.

Date due rette nel piano r_1, r_2 esse formano 4 angoli a due a due congruenti e a due a due supplementari



(immagine presa da internet con alfa e beta invertiti)

Se v_1 vettore direttore di r_1 e v_2 vettore direttore di r_2 → i due angoli si ottengono da:

$\alpha = \widehat{v_1 v_2}$; $\beta = \pi - \alpha$;

Se le due rette sono parallele → $\alpha = 0; \beta = \pi$

DEF.

$P_1\binom{x_1}{y_1}$, $P_2\binom{x_2}{y_2}$ punti del piano;

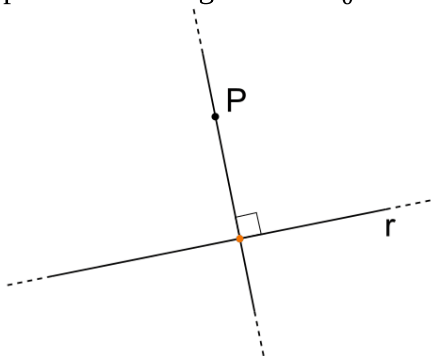
d(P_1, P_2) = ‖ $\overrightarrow{P_1P_2}$ ‖ = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

DEF.

$P_0\binom{x_0}{y_0}$ punto del piano; r = ax + by + c = 0;

d(P_0,r) = inf d(P_0, $\mathbb{R}$)

Osservazione:
Se H punto | d(P_0,h) = inf d(P_0, $\mathbb{R}$) → la retta n passante per P_0 e per h è ortogonale a r, cioè h è la proiezione ortogonale di P_0 su r.



Proposizione:
$P_0 \binom{x_0}{y_0}$ punto del piano; r = ax + by + c = 0;
d(P_0,r) = $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Osservazione:
d(P_0,r) = 0 ⇔ $P_0 \in$ r

DEF.
r_1, r_2 rette nel piano;
d(r_1, r_2) = inf d(R_1, R_2) $\forall\ R_1 \in r_1,\ R_2 \in r_2$;

Osservazione:
d(r_1, r_2) = 0 se $r_1 \cap r_2 \neq 0$ cioè se $r_1 = r_2$ oppure r_1, r_2 incidenti.
d(r_1, r_2) = d(P_1, r_2) = d(r_1, P_2) con $P_1 \in r_1$, $P_2 \in r_2$;

Proposizione:
Sia ABCD parallelogramma
1) Area (ABCD) = |det($\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$|
2) Area ($\widehat{ABD}$) = $\frac{1}{2}$|det($\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$|

SPAZIO TRIDIMENSIONALE

DEF.
Un **riferimento affine nello spazio** è una terna R_a(o,$\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$) con o **punto dello spazio** e $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ **vettori geometrici** linearmente indipendenti (cioè formano una base per V^3)
O è detto origine del sistema di riferimento.

Osservazione:
Fissiamo un riferimento affine nello spazio, a ogni punto P dello spazio posso associare delle coordinate nel seguente modo:
A P associo il vettore $\overrightarrow{OP} \in V^3$

$\overrightarrow{OP} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$; $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$

Allora scriviamo P$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ viceversa a ogni vettore $\overrightarrow{AB} \in V^3$ posso associare un punto:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$;

Associo ad $\overrightarrow{AB}$ il punto P$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e scriviamo $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Cioè se B = $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$

$\zeta_B : \begin{cases} V^3 \to \mathbb{R}^3 \\ \overrightarrow{OP} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{cases}$ con $\overrightarrow{OP} = x\vec{\imath} + \overline{y\vec{\jmath}} + z\vec{k}$, cioè x,y,z sono le coordinate di $\overrightarrow{OP}$ rispetto a B.

$\zeta_B(\overrightarrow{OP}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ P$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

DEF.

Sia P$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, allora x,y,z sono dette coordinate di P rispetto a $R_a(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

X è detta **ascissa** di P, y è detta **ordinata** di P, z è detta **quota** di P.

La retta generata da $\vec{\imath}$ passante per O è detta asse delle ascisse o asse x.

La retta generata da $\vec{\jmath}$ passante per O è detta asse delle ordinate o asse y.

La retta generata da $\vec{k}$ passante per O è detta asse delle quote o asse z.

Il piano generato da $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ passante per O è detto piano coordinate xy.

Il piano generato da $\vec{\imath}, \vec{k}$ passante per O è detto piano coordinate xz.

Il piano generato da $\vec{\jmath}, \vec{k}$ passante per O è detto piano coordinate yz.

Se $\vec{\imath} = \overrightarrow{OU_1} \to U_1$ è detto punto unità dell'asse X e ha coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Se $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OU_2} \to U_2$ è detto punto unità dell'asse X e ha coordinate $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Se $\vec{k} = \overrightarrow{OU_3} \to U_3$ è detto punto unità dell'asse X e ha coordinate $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Osservazione:

Se $P_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, P_2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \to \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$

DEF.

Siano $\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \to$ definisco un prodotto scalare su V^3 nel seguente modo:

$< \overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2} > = < \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} >$ dove il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ è quello euclideo.

DEF.

Un **riferimento cartesiano** $R_c(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ dello spazio è un **riferimento affine** $R_a(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ tale che $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ è una base ortonormale di V^3 rispetto al prodotto scalare $< \cdot , \cdot >$

DEF.

Siano $v_1, v_2, v_3 \in V^3$

1) $v_1 \,//\, v_2$ se v_1, v_2 sono linearmente dipendenti

2) v_1, v_2, v_3 sono **complanari** se v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti
3) quattro punti P_1, P_2, P_3, P_4 dello spazio sono detti **complanari** se ∃ un piano che li contiene.
4) tre punti P_1, P_2, P_3 dello spazio sono detti **allineati** se ∃ una retta che li contiene.
5) due **rette** sono **complanari** se ∃ un piano che le contiene altrimenti sono dette **sghembe**.

Proposizione:

1) $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$; $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ sono linearmente **dipendenti** ⇔ rg $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} = 1$
2) $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$; $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$; $v_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ sono linearmente **dipendenti** ⇔ det $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = 0$

Proposizione:

1) $P_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$; $P_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$; $P_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ sono allineati ⇔ $\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}$ sono linearmente **dipendenti** ⇔
2)

⇔ rg $\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{pmatrix} = 1$

3) $P_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$; $P_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$; $P_3 \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$; $P_4 \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{pmatrix}$ sono **complanari** ⇔ $\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}$ sono linearmente dipendenti

Proposizione:

1) Il **punto medio** M del segmento di estremi P_1P_2 con $P_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ ha coordinate :

$$M\begin{pmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \frac{y_1 + y_2}{2} \\ \frac{z_1 + z_2}{2} \end{pmatrix}$$

2) Il simmetrico di $P_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ rispetto al punto C $\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{pmatrix}$ ha coordinate:

$$P_0' \begin{pmatrix} 2x_C - x_0 \\ 2y_C - y_0 \\ 2z_C - z_0 \end{pmatrix}$$

Proposizione:

Dati tre punti P_1, P_2, P_3 dello spazio **non allineati** → ∃! Piano che li contiene

DEF.

Siano $P_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$; $P_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$; $P_3 \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ punti dello spazio non allineati → $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \end{pmatrix}$ sono linearmente **indipendenti** ed ∃! piano π che contiene P_1, P_2, P_3 → P$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ∈ π ⇔ $\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P}$ sono linearmente **dipendenti** (poiché $\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}$ sono linearmente indipendenti)
Quindi se $\overrightarrow{P_1P} = t_1\overrightarrow{P_1P_2} + t_2\overrightarrow{P_1P_3}$ per qualche $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

Quindi:

$$\begin{pmatrix} x-x_1 \\ y-y_1 \\ z-z_1 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} x_2-x_1 \\ y_2-y_1 \\ z_2-z_1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} x_3-x_1 \\ y_3-y_1 \\ z_3-z_1 \end{pmatrix}$$

Quindi nelle equazioni parametriche di un piano π sono:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix}; \qquad \forall\, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\pi : \begin{cases} x = x_0 + t_1 l_1 + t_2 l_2 \\ y = y_0 + t_1 m_1 + t_2 m_2; \\ z = z_0 + t_1 n_1 + t_2 n_2 \end{cases} \qquad \forall\, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

Con $P_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in \pi$; $v_1 = \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix}$; $v_2 = \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix}$ linearmente **indipendenti** v_1, v_2 sono detti vettori direttori del piano π.

Osservazione:
$\exists$ infinite equazioni parametriche di un piano.
Posso sostituire P_0 con un qualunque altro punto del piano. Posso sostituire i vettori direttori con altri due vettori linearmente indipendenti come combinazione lineare dei vettori direttori dati, cioè se v_1, v_2 sono vettori direttori di un piano $\pi \rightarrow$ qualunque altra base del sottospazio vettoriale $L_{\mathbb{R}}\{v_1, v_2\}$ è una coppia di vettori direttori dello stesso piano.

Osservazione:
Analogamente al caso della retta nel piano se $P_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $P_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ sono punti distinti $\rightarrow \exists!$ retta r che li contiene.
P$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in$ r $\Leftrightarrow \overrightarrow{P_1P} = t\, \overrightarrow{P_1P_2}$
Quindi:

$$r: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}; \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}; \text{ con } \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2-x_1 \\ y_2-y_1 \\ z_2-z_1 \end{pmatrix}$$

La precedente è detta equazione parametrica di r e v = $\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è detto vettore direttore di r e l,m,n sono detti parametri direttori di r.

Osservazione:
$\exists$ infinite equazioni parametriche di una retta.
Posso sempre sostituire P_1 con un qualunque altro punto della retta e posso sostituire il vettore direttore v con un qualunque suo multiplo reale non nullo.

Osservazione:
Data una retta r e un punto P $\notin$ r $\rightarrow \exists!$ piano π che contiene r e passa per P $\rightarrow \exists!$ piano π

Osservazione:
Siano $P_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$; $P_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$; $P_3 \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ punti non allineati $\rightarrow \exists!$ piano π che li contiene.

P$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ ∈ π ⇔$\overrightarrow{P_1P}$, $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_1P_3}$ sono linearmente dipendenti ⇔ det $\begin{pmatrix}x - x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1\\ y - y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1\\ z - z_1 & z_2 - z_1 & z_3 - z_1\end{pmatrix}$ = 0

Sviluppo il determinante lungo la colonna 1

$$(x - x_1)\underbrace{\begin{vmatrix}y_2 - y_1 & y_3 - y_1\\ z_2 - z_1 & z_3 - z\end{vmatrix}}_{a} - (y - y_1)\underbrace{\begin{vmatrix}x_2 - x_1 & x_3 - x_1\\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1\end{vmatrix}}_{-b} + (z - z_1)\underbrace{\begin{vmatrix}x_2 - x_1 & x_3 - x_1\\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1\end{vmatrix}}_{c} = 0$$

Da cui:
r: ax + by + cz + d = 0 è un'equazione cartesiana di π con:

a = $\begin{vmatrix}m_1 & m_2\\ n_1 & n_2\end{vmatrix}$; b = - $\begin{vmatrix}l_1 & l_2\\ n_1 & n_2\end{vmatrix}$; c = $\begin{vmatrix}l_1 & l_2\\ m_1 & m_2\end{vmatrix}$; s = $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$;
a,b,c sono detti **parametri di giacitura** del piano.

Inoltre $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix}l_1\\m_1\\n_1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}l_2\\m_2\\n_2\end{pmatrix}$ infatti:
< $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}l_1\\m_1\\n_1\end{pmatrix}$ > = al_1 +bm_1 +cn_1 = $(m_1n_2 - m_2n_1)$l – $(l_1n_2 - n_1l_2)\, m_1$ + $(l_1n_2 - l_2m_1)$ =
$l_1m_1n_2$ - $l_1m_2n_1$ - $l_1m_1n_2$ + $l_2m_1n_1$ + $l_1m_2n_1$ - $l_2m_1n_1$ = 0 → 0 = 0

Osservazione:
∃ infinite equazioni cartesiane di un piano π; infatti se ax + by + cz +d = 0 è un'equazione cartesiana di π, allora anche αax + $\alpha$by + αcz + αd = 0 è un'equazione cartesiana di π; $\forall\ \alpha \in \mathbb{R} \neq 0$

Osservazione:
Il piano yz ha equazione cartesiana x = 0.
Il piano xz ha equazione cartesiana y = 0.
Il piano xy ha equazione cartesiana z = 0.

Osservazione:
Se a,b,c,d sono tutti diversi da zero → $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$ è detta **equazione segmentaria** del piano con
p = - $\frac{d}{a}$; q = - $\frac{b}{d}$; r = - $\frac{d}{c}$.

I piani paralleli a yz hanno equazioni cartesiane x = k.
I piani paralleli a xz hanno equazioni cartesiane y = k.
I piani paralleli a xy hanno equazioni cartesiane z = k.

$\begin{pmatrix}p\\0\\0\end{pmatrix}$ è l'intersezione del piano con l'asse x;
$\begin{pmatrix}0\\q\\0\end{pmatrix}$ è l'intersezione del piano con l'asse y;
$\begin{pmatrix}0\\0\\r\end{pmatrix}$ è l'intersezione del piano con l'asse z;

Osservazione:

Un piano π parallelo al piano di equazioni cartesiana ax + by + cz +d = 0 e passante per $P_0\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ ha equazione cartesiana π = a(x - x_0) +b(y - y_0) + c(z - z_0) + = 0

Osservazione:

L'equazione ax + by + cz +d = 0 rappresenta un piano nello spazio se $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Osservazione:

Due piani π_1, π_2 nello spazio o sono **incidenti** e $\pi_1 \cap \pi_2$ è una retta, oppure sono paralleli →

$$\rightarrow \begin{cases} \text{o sono coincidenti cioè } \pi_1 = \pi_2 \\ \text{o sono distinti e } \pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing \end{cases}$$

Osservazione:

Siano π_1: $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, π_2: $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ piani incidenti, allora:

r: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$ è una retta e le precedenti equazioni sono dette equazioni cartesiane di r

Osservazione:

∃ infinite equazioni cartesiane di una retta data poiché esistono infiniti piani che passano per una retta data.

Osservazione:

Se $P_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $P_2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ punti distinti;

∃! retta passante per P_1 e P_2 e P$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ∈ r ⇔ $\overrightarrow{P_1P}$ = t $\overrightarrow{P_1P_2}$; ∀ t ∈ ℝ

Quindi una retta nello spazio ha equazioni parametriche:

r : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$; con $\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e l,m,n parametri direttori di r. ∀ t ∈ ℝ

Osservazione:

Siano r_1, r_2 due rette nello spazio → o sono **complanari** o:

$$\begin{cases} \text{sono incideti e } r_1 \cap r_2 \text{ è un punto} \\ \text{sono parallele} = \begin{cases} \text{o sono coincidenti } r_1 = r_2 \\ \text{o sono distinte } r_1 \cap r_2 \neq \varnothing \end{cases} \end{cases}$$

O sono sghembe → $r_1 \cap r_2 = \varnothing$ (sono privi di punti in comune)

Osservazione:

Siano π piano e r retta nello spazio → o r,π sono incidenti e r ∩ π è un punto o r // π →

$$\rightarrow \begin{cases} \text{o } r \subset \pi \ (r \cap \pi = r) \\ \text{o } r \cap \pi \neq \varnothing \end{cases}$$

Proposizione:

$r_1 : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$

$r_2 : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix}$

Rette nello spazio → r_1, r_2 sono sghembe

DEF.

Gli angoli formati da due rette r_1, r_2 nello spazio con vettori direttori v_1, v_2 rispettivamente definiti da:

$cos\alpha = \frac{<v_1,v_2>}{||v_1|| \cdot ||v_2||}$; $cos\beta = -cos\alpha = -\frac{<v_1,v_2>}{||v_1|| \cdot ||v_2||}$; $\beta = \pi - \alpha;$

Osservazione:

$r_1 \perp r_2 \Leftrightarrow v_1 \perp v_2 \Leftrightarrow < v_1, v_2 > = 0$

Osservazione:

Due rette formano quattro angoli (e possono essere ortogonali) anche se non sono incidenti ne complanari.

DEF.

Siano $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ piani con $n_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$, $n_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

Gli angoli formati da π_1 e π_2 sono definiti da:

$cos\alpha = \frac{<n_1,n_2>}{||n_1|| \cdot ||n_2||}$; $cos\beta = -cos\alpha = -\frac{<n_1,n_2>}{||n_1|| \cdot ||n_2||}$; $\beta = \pi - \alpha;$

Osservazione:

$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow n_1 \perp n_2 \Leftrightarrow < n_1, n_2 > = 0$

DEF.

r : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$; $\forall\, t \in \mathbb{R}$; $v_2 = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$; π: ax + by + cz + d = 0; $n_\pi = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$;

L'angolo $\widehat{r\pi}$ è definito come il numero α tale che: $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

$sin\alpha = \frac{<v_2,n_\pi>}{||v_2|| \cdot ||n_\pi||} = cos\beta$

DEF.

Siano $P_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $P_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ punti dello spazio → $\overrightarrow{P_1P_2} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$; la distanza tra P_1 e P_2 è:

$d(P_1P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

DEF.

Sia $P_0\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$ punto dello spazio e sia r retta d(P_0, r) = inf d(P_0, ℝ)

Osservazione:
Sia π piano passante per P_0 e π ⊥ r e sia {h} = π ∩ r → d(P_0, r) = d(P_0, h)

Osservazione:
d(P_0, r) = 0 ⇔ P ∈ r

DEF.
Sia P_0 punto dello spazio e π piano → d(P_0, π) = d(P_0, P)

Osservazione:
Se r retta passante per P_0 e r ⊥ π e sia {h} = r ∩ π → d(P_0, π) = d(P_0, h)

Proposizione:
$P_0\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$ punto dello spazio; π: ax + by + cz + d = 0 piano → d(P_0, π) = $\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d=0|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

DEF.
Siano π_1,π_2 piani dello spazio → d(π_1,π_2) = inf d(P_1, P_2) $\forall P_1 \in \pi_1$; $P_2 \in \pi_2$;

Osservazione:
d(π_1,π_2) = 0 se $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \emptyset$ se $\pi_1 = \pi_2$ oppure se π_1,π_2 incidenti.
Se $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$ → π_1,π_2 sono distinti → d(P_1,π_2) = d(π_1,P_2) $\forall P_1 \in \pi_1$; $P_2 \in \pi_2$;

DEF.
Siano r retta e π piano nello spazio → d(r, π) = inf d(R,P) $\forall R \in$ r ; P ∈ π;

Osservazione:
d(r, π) = 0 se $r \cap \pi \neq \emptyset$,cioè se π, r incidenti oppure r ⊂ π
Se $r \cap \pi = \emptyset$ → π // r e r ∉π → d(r, π) = d(R,π); $\forall R \in$ r;

DEF.
Siano r_1,r_2 rette nello spazio → d(r_1,r_2) = inf d(R_1,R_2) $\forall R_1 \in r_1$; $R_2 \in r_2$;

Osservazione:
d(r_1,r_2) = 0 se $r_1 \cap r_2 \neq \emptyset$,cioè se $r_1 = r_2$ oppure incidenti;
Se r_1 // r_2 e $r_1 \cap r_2 = \emptyset$,→ d(r_1,r_2) = d(R_1,r_2) = d(r_1,R_2) $\forall R_1 \in r_1$; $R_2 \in r_2$;
Se r_1,r_2 sghembe → $r_1 \cap r_2 = \emptyset$,→ d(r_1,r_2) = d(π_1,r_2) = d(π_1,r_2) = d(h_1,h_2) con π_1 piano | r_1 // r_2, $r_1 \subset \pi_1$ e π_2 piano | r_2 // r_1, $r_2 \subset \pi_2$ e con $\{h_1\} = r_1 \cap n \wedge \{h_2\} = r_2 \cap n$ con n retta | $n \perp r_1$, $n \perp r_2$; n,r_1 incidenti e n,r_2 incidenti. (n ∃!)

Osservazione:
Se si ha un parallelepipedo π definito con v_1, v_2, v_3 ∈ $\mathbb{R}^3$;
V(π) = | det(v_1, v_2, v_3) | e il volume del tetraedro T definito da v_1, v_2, v_3 è Vol(T) = $\frac{1}{6}$| det(v_1, v_2, v_3) |

DEF.
Il **prodotto vettoriale** è la funzione:

$$\wedge: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \; x \; \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2) \to \mathrm{v}_1 \wedge \mathrm{v}_2 \end{cases}$$

Definita nel seguente modo:

Se $v_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $v_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \to \mathrm{v}_1 \wedge \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ x_2 z_1 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$

Osservazione:
A volte si indica con $\mathrm{v}_1 \times \mathrm{v}_2$

Proposizione:
1) $\mathrm{v}_1 \wedge \mathrm{v}_2 = -\mathrm{v}_2 \wedge \mathrm{v}_1$; $\quad \forall\, \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \in \mathbb{R}^3$;
2) $\mathrm{v}_1 \wedge (\mathrm{v}_2 + \mathrm{v}_3) = (\mathrm{v}_1 \wedge \mathrm{v}_2) + (\mathrm{v}_1 \wedge \mathrm{v}_3)$; $\quad \forall\, \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3 \in \mathbb{R}^3$;
3) $(\alpha \mathrm{v}_1) \wedge \mathrm{v}_2 = \mathrm{v}_1 \wedge (\alpha \mathrm{v}_2) = \alpha(\mathrm{v}_1 \wedge \mathrm{v}_2)$; $\quad \forall\, \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \in \mathbb{R}^3$; $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$;
4) $< \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_1 \wedge \mathrm{v}_2 > = 0$; $\quad \forall\, \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \in \mathbb{R}^3$;
   $< \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_1 \wedge \mathrm{v}_2 > = 0$;
5) $||\, \mathrm{v}_1 \wedge \mathrm{v}_2 \,||^2 = ||\, \mathrm{v}_1 ||^2 \cdot ||\, \mathrm{v}_2 ||^2 - < \mathrm{v}_1 \wedge \mathrm{v}_2 >^2$; $\quad \forall\, \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \in \mathbb{R}^3$;
6) $\mathrm{v}_1 \wedge \mathrm{v}_2 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{v}_1 \,//\, \mathrm{v}_2$, cioè $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2$ lineramente dipendenti

Osservazione:
Il prodotto vettoriale di $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2$ è ortogonale a v_1 e v_2 ed è orientato seguendo la "regola della mano destra".

Osservazione:
Si può scrivere

$\mathrm{v}_1 \wedge \mathrm{v}_2 = \det\begin{pmatrix} \vec{\imath} & x_1 & x_2 \\ \vec{\jmath} & y_1 & y_2 \\ \vec{k} & z_1 & z_2 \end{pmatrix}$ sviluppando lungo la prima colonna =

$= \vec{\imath} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{\jmath} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$

Osservazione:

Sia r: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$ retta con $n_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, n_2 \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ → un vettore direttore di r è $v_2 = n_1 \wedge n_2$

DEF.

Siano $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$; il prodotto misto di v_1, v_2, v_3 è $| < v_1, v_2 \wedge v_3 > |$

DEF.

Sia V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione finita e siano B_1, B_2 basi di V; Sia M = M_{B_1,B_2} la matrice del cambiamento di base:

Se det(M) > 0 → B_1, B_2 sono dette **equiverse**.

Se det(M) < 0 → B_1, B_2 sono dette **controverse**.

Osservazione:

$\det(M) > 0 \Leftrightarrow \det(M^{-1}) > 0$

CAMPO DI RIFERIMENTO CARTESIANO

Proposizione:

Siano ζ = Rc (o, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$) e $\zeta' =$ Rc (o$'$, $\vec{\imath}\,', \vec{\jmath}\,'$) due riferimenti cartesiani con B = { $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ }, B' = { $\vec{\imath}\,', \vec{\jmath}\,'$ } basi ortonormali di V^2 e sia P un punto del piano con coordinate $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ rispetto a ζ e $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ rispetto a ζ'.

Cioè $\zeta(P) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $\zeta'(P) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ e sia M = M_{B_1,B_2} → $\zeta(P) = M\,\zeta'(P) + \zeta(O') \ \wedge\ \zeta'(P) = M^{-1}\,\zeta(P) + \zeta'(O)$

Cioè $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \zeta(O') \ \wedge\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \zeta'(O)$

Poiché $M \in O_2(\mathbb{R})$ e $\zeta'(O) = -M^{-1}\,\zeta(O')$ si ha: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - M^t\,\zeta(O')$

Proposizione:

Siano ζ = Rc (o, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$) e $\zeta' =$ Rc (o$'$, $\vec{\imath}\,', \vec{\jmath}\,'$) due riferimenti cartesiani con B = { $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ }, basi ortonormali di V^3, sia P un punto del piano con coordinate $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ rispetto a ζ e $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ rispetto a ζ'.

Cioè $\zeta(P) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $\zeta'(P) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ e sia M = M_{B_1,B_2} → $\zeta(P) = M\,\zeta'(P) + \zeta(O') \ \wedge\ \zeta'(P) = M^t\,\zeta(P) + \zeta'(O) =$

$= -M^t\,\zeta(O')$

ROTAZIONI

Sia ζ = Rc (o, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$) una rotazione del piano con centro in O di angolo $\theta \in [0;2\pi]$ in senso antiorario è definita dalla matrice $R(\theta) = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$ cioè se $P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ → l'immagine $P'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ di P rispetto a tale rotazione ha coordinate $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x' = x\,cos\theta - y\,sin\theta \\ y' = x\,sin\theta + y\,cos\theta \end{cases}$$

Osservazione:

Posso considerare $\theta \in \mathbb{R}$ se $\theta < 0$ → la rotazione gira in senso orario di $|\theta|$

Osservazione:
R(θ) $\in O_2(\mathbb{R})$; $\forall\ \theta \in \mathbb{R}$;
infatti:

< $\binom{cos\theta}{sin\theta}$, $\binom{-sin\theta}{cos\theta}$ > = - $cos\theta\ sin\theta$ + $sin\theta cos\theta$ = 0

$\left\|\binom{cos\theta}{sin\theta}\right\|$ = $\sqrt{cos^2\theta + sin^2\theta}$ = 1; $\left\|\binom{-sin\theta}{cos\theta}\right\|$ = $\sqrt{cos^2\theta + sin^2\theta}$ = 1

Inoltre:
det(R(θ)) = $cos^2\theta + sin^2\theta$ = 1 quindi R(θ) $\in SO_2(\mathbb{R})$ (gruppo speciale ortogonale)
Matrici ortogonali ; | det(M) = 1

Osservazione:
Le rotazioni del piano corrispondono agli elementi di $SO_2(\mathbb{R})$

Osservazione:
Nello spazio le rotazioni del piano corrispondono agli elementi di $SO_3(\mathbb{R})$

Teorema Di Eulero
M $\in O_3(\mathbb{R})$ → M ha almeno un autovalore reale λ = 1

Osservazione:
Quindi se M $\in O_3(\mathbb{R})$ → ha autospazio E(1) di dimensione ≥ 1 ed è un sottospazio invariante e poiché λ = 1 → se v $\in$ E(1) → Mv = λv = v

Osservazione:
Quindi una rotazione nello spazio ha sempre un asse di rotazione. Supponiamo che tale asse passi per l'origine.
Se v = $\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$ è un vettore direttore dell'asse di rotazione di angolo θ, in senso antiorario "guardando l'asse dall'alto" → la rotazione è descritta dalla matrice:

$$R(\theta, a)\ ) = \begin{pmatrix} l^2 + (1 - l^2)cos\theta & lm\,(1 - \ cos\theta\ ) - nsin\theta & lm\,(1 - \ cos\theta\ ) + nsin\theta \\ lm\,(1 - \ cos\theta\ ) + nsin\theta & m^2 + (1 - \ m^2)cos\theta & mn(1 - \ cos\theta) - lsin\theta \\ ln\,(1 - \ cos\theta\ ) + msin\theta & mn(1 - cos\theta) + lsin\theta & n^2 + (1 - \ n^2)cos\theta \end{pmatrix}$$

ROTAZIONI CON I NUMERI COMPLESSI

z = x + iy; con x,y $\in \mathbb{R}$; i^2 = -1

Teorema Di Eulero
$e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$; $\forall\ \theta \in \mathbb{R}$;
$|e^{i\theta}|$ = $\sqrt{cos^2\theta + sin^2\theta}$ = 1

Osservazione:
z ⇔ $\binom{x}{y}$ ⇔ $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$

Osservazione:
z' = $e^{i\theta}z$ → z' è l'immagine di z rispetto alla rotazione di angolo θ in modo antiorario.
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Osservazione:
Quindi la rotazione di un punto del piano equivale alla moltiplicazione di 2 numeri complessi.

QUATERNIONI DI HAMILTON

DEF.
L'insieme dei quaternioni è l'insieme degli elementi q = a + bi + cj +dk con a,b,c,d ∈ ℝ;
Con $i^2 = -1 \wedge j^2 = -1 \wedge k^2 = -1$ e i · j · k = -1

Osservazione:
H è un campo non commutativo (cioè il prodotto non è commutativo). Un campo non commutativo è detto **corpo**.

DEF.
L'insieme dei quaternioni è indicato con *H*, se a = 0 → q è detto quaternione immaginario puro.
La somma è definita come:

$$\begin{cases} q_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k \\ q_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k \end{cases}$$

$q_1 * q_2$ = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i + (a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)j +
+ (a_1d_2 + b_1c_2 + c_1b_2 - d_1a_2)k

Osservazione:
$q_1q_2 \neq q_2q_1$
$ijk = -1$; $ijk^2 = -k$; $-ij = -k$; $ij = k$; $ji = -k$; $jk = i$; $kj = -i$; $ki = j$; $ik = -j$;

DEF.
Il **modulo** di q ∈ *H* è $|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$;
Il **coniugato** di q è $\bar{q} = q^* = a - bi - cj - dk$

Osservazione:
$q^* = -\frac{1}{2}(q + iqi + jqj + kqk)$
$|q|^2 = qq^* = q^*q$
Osservazione:
$\frac{1}{q} = q^{-1} = \frac{1}{q} \cdot \frac{q^*}{q^*} = \frac{q^*}{|q|^2}$

Osservazione:
q = a + bi + cj +dk ∈ *H*; posso scrivere q come:
q = $(r, \vec{v})$; con r = a ∈ ℝ; (parte scalare) e $\vec{v} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ ∈ $\mathbb{R}^3$; (parte vettoriale)
In tal caso:
$q_1 = (r_1, \vec{v}_1)$; $q_2 = (r_2, \vec{v}_2)$;

$q_1 + q_2 = (r_1 + r_2, \vec{v}_1 + \vec{v}_2)$
$q_1 q_2 = (r_1 r_2 - < \vec{v}_1 \vec{v}_2 > ; r_1 \vec{v}_2 + r_2 \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2)$

DEF.
Siano $q_1, q_2 \in H$ immaginari cioè:
$q_1 = (0, \vec{v}_1) \rightarrow \vec{v}_1;\ q_2 = (0, \vec{v}_2) \rightarrow \vec{v}_2;$
Quindi posso definire $< q_1, q_2 > = < \vec{v}_1, \vec{v}_2 >;$ $\quad q_1 \wedge q_2 = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2;$

Osservazione:
Siano $q_1, q_2 \in H$ immaginari $\rightarrow < q_1, q_2 > = \frac{1}{2}(q_1{}^* q_2 + q_2{}^* q_1) = \frac{1}{2}(q_1 q_2{}^* + q_2 q_1{}^*)$
$q_1 \wedge q_2 = \frac{1}{2}(q_1 q_2 - q_2{}^* q_1{}^*)$

Proposizione:
q = $(0, \vec{v}) \in H$ immaginaro;
$e^{\vec{v}\theta} = e^{q\theta} = cos\theta + qsin\theta = cos\theta + (li + mj + nk)sin\theta;$ $\quad \forall\ \theta \in \mathbb{R}$;se $\vec{v} = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$;

Proposizione:
Sia P$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow$ p = xi + yj + zk $\in H$;
L'immagine $P' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ di P rispetto alla rotazione di angolo θ rispetto all'asse con vettore direttore
$v_r = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$ con $\|v_r\| = 1$
Si ottiene da $p' = qpq^{-1}$ con $p' = x'i + y'j + z'k$
q = cos$\left(\frac{\theta}{2}\right) + li + mj + nk + sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$;

Osservazione:
Se l = 1 e m = n = 0 $\rightarrow v_r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
q = cos$\left(\frac{\theta}{2}\right) + isen\left(\frac{\theta}{2}\right) = e^{i\theta}$
$z' = e^{i\frac{\theta}{2}} z e^{i\frac{\theta}{2}} = e^{i\theta} z$