

24 MARZO 2022 – GEOMETRIA – 6 CREDITI
INGEGNERIA INFORMATICA E AUTOMATICA – A.A. 2021/2022

COGNOME NOME N. MATRICOLA

ISTRUZIONI

- La prova dura 2 ore e mezza.
 - L'esame consiste di 2 pagine contenenti 5 domande in totale. Ad ognuna domanda é assegnato un numero massimo di punti, come indicato a fianco di ciascuno di esse, per un totale di 33 per l'intero esame.
 - Le risposte vanno **motivare** brevemente, ma in maniera adeguata e comprensibile.
 - Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritranscrivi tutte le risposte che hai dato.
 - **Durante l'esame non é ammesso l'uso di appunti, libri di testo o calcolatrici scientifiche. I fogli per lo svolgimento del compito sono forniti dal docente.**
 - Al termine della prova vanno riconsegnati **tutti** i fogli che ti sono stati dati.
-

1. (7 points) Considera il seguente sistema lineare dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 3kx + (3k - 2)y + 3kz = 2 \\ 3x + ky + 3z = k + 1 \end{cases}$$

- (a) (3 points) Determina per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il sistema lineare ha soluzione e se questa è unica.
- (b) (3 points) Calcola la soluzione per tutti i $k \in \mathbb{R}$ per i quali una soluzione esiste.
- (c) (1 point) Aggiungi una equazione al sistema, tale che il nuovo sistema ottenuto abbia un'unica soluzione per $k = -1$.

2. (7 points)

- (a) (1 point) Dai la definizione di *sottospazio vettoriale*.
- (b) (6 points) Considera i seguenti due sottospazi di \mathbb{R}^4 :

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$
$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

Calcolare le dimensioni di $U + W$ e $U \cap W$ e calcolare una base di $U + W$ e $U \cap W$.

3. (7 points) Considera la funzione lineare $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tale che

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_1 - x_3 \\ 2x_2 + 3x_3 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

- (a) (4 points) Determina una base e la dimensione del nucleo e dell'immagine di f .
- (b) (1 point) Determina la controimmagine del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- (c) (1 point) Dai un esempio di una funzione lineare $g: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ che non sia iniettiva. Giustifica la tua risposta.
- (d) (1 point) È possibile scrivere una funzione lineare $g: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ che sia suriettiva? Giustifica la tua risposta.
4. (7 points) Considera l'endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con matrice rappresentativa, rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 1)\}$$

sia nel dominio che nel codominio, data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) (2 points) Determina lo spettro dell'endomorfismo f .
- (b) (5 points) Determinare se l'endomorfismo è simmetrico e se è diagonalizzabile. Nel caso l'endomorfismo sia diagonalizzabile determina una base di autovettori, e nel caso sia simmetrico determina una base ortonormale di autovettori.
5. (5 points) Considera il punto $P \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e la retta r di equazione $2x - y = 2$
- (a) (3 points) Trova equazioni parametriche e equazione cartesiana della retta s passante per P e perpendicolare a r .
- (b) (2 points) Individua il punto di intersezione della retta s del punto precedente con la retta r .

Valutazione finale (ad uso esclusivo del docente)

Question	Points	Score
1	7	
2	7	
3	7	
4	7	
5	5	
Total:	33	