Université Grenoble Alpes - (UJF)
L2 Licence Sciences et Technologies - STA401 **Mars 2020**

STA401 : CC2-Partiel-correction

Exercice cours :

1. $Z = 3X - 2Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(0; 136)$ car indépendantes.
   $P(3X - 2Y > 0) = P(\frac{Z-0}{\sqrt{136}} > \frac{0}{\sqrt{136}}) = P(\frac{Z}{\sqrt{136}} > 0) = 0,5$
2. $\widehat{\sigma}^2 = S'^2 = 2,66667$
   var(c(1,2,3,2,3,4,6))
3. $1 - \alpha = P(\overline{X} \in I)$ avec $I = \left[\mu \pm u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$. Le quantile pour un niveau de 0,98 est 2,3263, donc $I = [2,7674; 3,2362]$
4. $P(\mu \in [34,2 \pm h]) = 0,9$ donc I est l'intervalle de confiance de μ au niveau de confiance 0,9 avec σ^2 connue. De plus, $I = \left[\overline{x} \pm u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ avec $h = u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,6449 * 10/\sqrt{20} = 3,678$.

Exercice 1 :

Partie A :

1. a) Probabilités totales et évènements disjoints : $P(E_2) = 0,24p_1 + 0,04(1 - p_1) = 0,04$. Par un même raisonnement, $P(E_3) = 0,048$
   b) Prob conditionnelle : $P_{E_3}(E_2) = \frac{P(E_2 \bigcap E_3)}{P(E_3)} = 0,04 * 0,24/0,048 = 0,2$
2. A mettre sur les branches : $p_n$et $1 - p_n$; puis 0,24 ; 0,76 ; 0,04 ; 0,96
3. Proba totales : $p_{n+1} = P(E_{n+1}) = P[(E_{n+1} \bigcap E_n) \bigcup (E_{n+1} \bigcap \overline{E_n})] = P(E_{n+1} \bigcap E_n) + P(E_{n+1} \bigcap \overline{E_n})$, car évènements disjoints
   $p_{n+1} = 0,24p_n + 0,04(1 - p_n) = 0,2p_n + 0,04$
4. **(Filières MIN/MAT)** Suite géométrique car :$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{0,2p_n + 0,04 - 0,05}{p_n - 0,05} = 0,2 = q$ la raison. Le premier terme est $u_0 = -0,05$.
   Donc $u_n = -0,05 * 0,2^n$et $p_n = 0,05 - 0,05 * 0,2^n$

Partie B :

1. Inégalité de Bienaymé Tchebychev (X variable réelle positive et a>0) :
   $P(\mid X - E(X) \mid \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2} \quad \Leftrightarrow \quad P(\mid X - 11 \mid \geq a) \leq \frac{10,45}{a^2} \quad \Leftrightarrow \quad P(-a \leq X - 11 \leq a) \geq 1 - \frac{10,45}{a^2} \quad \Leftrightarrow \quad P(11 - a \leq X \leq 11 + a) \geq 1 - \frac{10,45}{a^2}$. Ici, on veut $11 - a = 7$ et $161 + a = 15$, soit $a = 4$. Donc : $P(7 < X < 15) \geq 1 - 10,45/16 = 0,346875$.
2. X suit une loi Binomiale de paramètres $n = 220$ et $p = 0,05$ car X est la somme de 220 variables de Bernoulli$(0,05)$ indépendantes [ou répétition de 220 expériences avec remise].
   De plus, le théorème Central Limite permet de justifier l'approximation par une loi Normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ [car n=220>30 ; np>5 ; n(1-p)>5] avec μ= $np = 11$ et $\sigma^2 = np(1 - p) = 10,45$].

$P(7 \leq X \leq 15) = 0,8394$ avec la loi $\mathcal{B}(220;\ 0,05)$, et $P(7 \leq X \leq 15) = 0,78405$ avec la loi $\mathcal{N}(11; 10,45)$. Calcul avec calculatrice.

Partie C :

1. Il faut construire un intervalle de fluctuation puisque la loi est connue, et que l'on recherche si un échantillon est dans la "norme".

   On construit l'intervalle de fluctuation de p au niveau de 97,5% : $\left[p \pm u_{1-\alpha/2}\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right]$.

   Sur la table de la loi $\mathcal{N}(0;1)$, on lit la valeur $u_{(0,9875)} \simeq$ 2,18. On trouve : $[0,05 \pm 0,03203] = [0,017967; 0,08203]$

   Puisque $f = 18/220 \simeq 0,0818 \in I$, on conclut que cet échantillon est dans la norme (mais limite) avec 97,5% de confiance.

2. Il faut un intervalle de confiance pour encadrer (estimer) la probabilié p : $\left[F - u\ \dfrac{\sqrt{F(1-F)}}{\sqrt{n}}\ ;\ F + u\ \dfrac{\sqrt{F(1-F)}}{\sqrt{n}}\right]$

   Sur la table de la loi $\mathcal{N}(0;1)$, on lit la valeur $u_{(0,9875)} \simeq$ 2,18. De plus, $f = 300/5000 = 0,06$.

   $u_{(0,995)} = \dfrac{F-a}{\sqrt{\dfrac{F(1-F)}{n}}}$, on déduit l'intervalle de confiance de p : $\left[F - 2,5758\ \dfrac{\sqrt{F(1-F)}}{\sqrt{n}}\ ;\ F + 2,5758\ \dfrac{\sqrt{F(1-F)}}{\sqrt{n}}\right]$.

   L'intervalle est donc : [0,052678 ; 0,06732].

   L'affirmation de l'entreprise n'est pas cohérente puisque p serait compris entre 0,057 et 0,067 avec une probabilmité de 97,5%.

Exercice 2 :

1. Moyenne et variance empirique : $\overline{x} = 4,72$, $s^2 = 1,8716$.

   Moyenne et variance estimée sans biais : $\widehat{\mu} = \overline{x} = 4,72$, $\widehat{\sigma^2} = s'^2 = 2,0795555$.
2. Les paramètres μ et σ^2 du modèle sont inconnues, donc l'intervalle de confiance de μ au niveau de 95% est : $[\overline{x} \pm t_{1-\alpha/2}^{n-1}\dfrac{s'}{\sqrt{n}}]$. On trouve : $[4,72 \pm 2,2622 * \sqrt{2,079555/10}] \simeq [3,6884; 5,7516]$
3. Intervalle de confiance de la variance, $\alpha = 0,05$: $\left[\dfrac{ns^2}{z_{1-\alpha/2}^{(n-1)}}; \dfrac{ns^2}{z_{\alpha/2}^{(n-1)}}\right] \approx \left[\dfrac{18,716}{19,02}; \dfrac{18,716}{2,7}\right]$. Donc l'intervalle de l'écart type est : [0,991976 ; 2,63284]
4. Dans la suite $\sigma = 1,4$ donc il est connu ! L'intervalle est maintenant : $[\overline{x} \pm u_{1-\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}]$.

   (a) Pour avoir une précision de l'intervalle de $\pm 0,5$, il faut : $u_{1-\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,5 \ \Rightarrow$

   $\sqrt{n} = 2,5758 * 1,4/0,5 = 7,21224 \ \Rightarrow\ n = 52,016$. Il faut donc un échantillon de taille 53 individus.

   (b) Pour avoir une précision de l'intervalle de $\pm 0,6$, il faut : $u_{1-\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,6 \ \Rightarrow$

   $u_{1-\alpha/2} = 0,6 * \sqrt{10}/1,4 = 1,355$. Lecture de table : $p = 1 - \alpha/2 \simeq 0,912$, donc $\alpha \simeq 0,176$. Il faut donc un niveau de confiance de 0,824.