Université Grenoble Alpes - DLST
L2 Licence Sciences et Technologies - STA401 **Mars 2020**

STA401 : CC2-Partiel

Durée : 2 heures.
Documents autorisés : Tables statistiques - Calculatrice (lycée) - 1 page A4 recto-verso, manuscrite.

Le barême est approximatif (donné à titre indicatif).

Exercice cours : (≃4 pts):

1. Soient X et Y deux variables de lois Normales indépendantes, X $\rightsquigarrow \mathcal{N}(2;4)$ et Y $\rightsquigarrow \mathcal{N}(3;25)$. Donner la loi de $3X - 2Y$. Calculer $P(3X > 2Y)$.
2. Soit X une variable aléatoire dont on a mesuré les valeurs suivantes : 2 ; 1; 2 ; 3 ; 4 ; 3 ; 6. Calculer la variance estimée sans biais de X. Donner la commande exacte avec le logiciel R qui permet de retrouver cette variance.
3. Soit X une variable aléatoire de loi Normale $\mathcal{N}(3;1)$
   (a) Donner la définition du niveau de confiance $1 - \alpha$ de l'intervalle de fluctuation de la moyenne pour un échantillon de taille n.
   (b) Calculer les bornes de cet intervalle pour un niveau de confiance de 0,98 et un échantillon de taille 100.
4. Soit X une variable de loi Normale de moyenne μ inconnue et d'écart type connu σ= 10. Sur un échantillon de taille 20, on trouve une moyenne estimée de 34,2.
   Calculer la valeur h pour que l'intervalle $[34,2 - h\ ;\ 34,2 + h]$ ait une probabilité de 0,9 de contenir μ ?
   [Indication : vous pourrez d'abord justifier ce que représente cet intervalle, et donc en déduire la valeur de h]

Exercice 1 : (≃11 points) Toutes les questions sont indépendantes

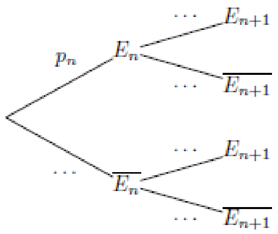
Dans une entreprise travaillant sur ordinateurs, on s'intéresse à la probabilité qu'un ordinateur soit piraté pendant une période "d'attaques".

La première heure considérée, l'ordinateur n'a pas été piraté. Si à une certaine heure n l'ordinateur n'est pas piraté, alors il sera piraté l'heure suivante n+1 avec une probabilité égale à 0,04. En revanche, si l'ordinateur est piraté à l'heure n, alors il reste encore piraté (pas encore réparé) à l'heure n+1 avec une probabilité égale à 0,24.

On désigne, pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'évènement E_n : « l'ordinateur est piraté et hors d'usage la n-ième heure ». On note p_n= $P(E_n)$, donc p_n= 0 et $0 \leq p_n < 1$

PARTIE A

1. a) Calculez la probabilité que l'ordinateur soit piraté la 2ème heure, puis la probabilité qu'il soit piraté la 3ème heure.
   b) Sachant que l'ordinateur a été piraté la troisième heure, déterminer la probabilité qu'il ait été déjà piraté la deuxième heure.
2. Construire l'arbre de probabilité pondéré donné ci-dessous.



3. Montrez que $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$

Question 4 seulement pour les filières MIN-MAT :

4. Montrez que la suite (u_n) définie par $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique, précisez le premier terme et la raison q.
   En déduire l'expression de u_n puis p_n en fonction de n et q. Déduire la limite de p_n et interpréter.

PARTIE B

Dans cette partie, on étudie la variable aléatoire X : " nombre d'ordinateurs piratés par cette attaque dans l'entreprise".

1. On considère que $E(X) = 11$ et $V(X) = 10,45$. Donner une minoration de $P(7 \leq X \leq 15)$.
2. On sait qu'il y a 220 ordinateurs dans l'entreprise, indépendants. On suppose que le nombre d'heures d'attaque est suffisamment grand pour que la probabilité qu'un ordinateur soit piraté est connue : $p = 0,05$.
   Justifier la loi exacte de X, puis la loi approchée de X (justifier tout en détail).
   Calculer la valeur exacte de $P(7 \leq X \leq 15)$ et celle obtenue par l'approximation précédente.

PARTIE C

1. *Dans cette entreprise*, à la fin de cette période d'attaques, on dénombre finalement 18 ordinateurs piratés sur les 220. On rappelle que la probabilité qu'un ordinateur soit piraté est 0,05. Construire un intervalle de probabilité au niveau de confiance 97,5% permettant de vérifier si la "résistance" à ces attaques est dans la norme. Qu'en concluez-vous ?
2. *Une autre entreprise* qui possède 5000 ordinateurs a été attaquée, elle aussi. On dénombre 300 ordinateurs piratés sur les 5000. Cette entreprise prétend que la probabilité qu'un de ses ordinateurs ait été attaqué ne dépasse pas 0,05. Construire un intervalle de proportion au niveau de confiance de 97,5% permettant d'encadrer cette probabilité p. Que concluez-vous sur l'affirmation de cette entreprise ?

Exercice 2 : ($\simeq$5pts)

On étudie le temps de compilation d'un certain logiciel. On suppose que cette variable aléatoire X suit une loi Normale de moyenne μ et de variance σ^2. On mesure cette variable sur un échantillon de taille 10 :

2,4	3,4	3,6	4,1	4,3	4,7	5,4	5,9	6,5	6,9

1. Calculer la moyenne et variance empiriques. Calculer la moyenne et variance estimées sans biais de X.
2. Donner un intervalle de confiance de niveau 0,95 pour μ.
3. Donner un intervalle de confiance de niveau 0,95 pour σ.
4. On suppose maintenant que l'écart type de X est connu et égal à 1,4.
   a) Quelle taille d'échantillon devrait-on observer pour estimer μ au niveau de confiance de 99% avec une précision de plus ou moins 0,5 ?
   b) Avec l'échantillon initial de taille 10, quel niveau de confiance faudrait-il prendre pour avoir une précision de $\pm$ 0,6 pour l'intervalle de confiance de μ ?