HÀM SỐ ĐỒNG BIẾN, HÀM SỐ NGHỊCH BIẾN

Câu 1. Cho hàm số $f(x)=\left|x^4-4x^2+4\right|$. Hỏi hàm số $f'(x)$ đổi dấu tại bao nhiêu điểm

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 2.

Giải

TXĐ $D=\mathbb{R}$

Ta có $f'(x)=\dfrac{\left(4x^3-8x\right)\left(x^4-4x^2+4\right)}{\left|x^4-2x^2-3\right|}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x^3-8x=0\\ x^4-4x^2+4=0\end{array}\right.$

Biểu diễn dấu $f'(x)$ trên trục số

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Vậy $f'(x)$ đổi dấu tại 3 điểm

Câu 2. Cho hàm số $f(x)=\left|x^4-2x^2-3\right|$. Hỏi hàm số $f'(x)$ đổi dấu tại bao nhiêu điểm

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 2.

Giải

TXĐ $D=\mathbb{R}$

Ta có $f'(x)=\dfrac{\left(4x^3-4x\right)\left(x^4-2x^2-3\right)}{\left|x^4-2x^2-3\right|}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x^3-4x=0\\ x^4-2x^2-3=0\end{array}\right.$

Biểu diễn dấu $f'(x)$ trên trục số

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$-\sqrt{3}$		$+\infty$
$f(x)$		-	$\Vert$	$+$	0	-	0	$+$	0	-	$\Vert$	$+$	

Vậy $f'(x)$ đổi dấu tại 5 điểm

Câu 3. Cho hàm số $f(x)=\left|x^3-5x^2+7x-3\right|$. Hỏi hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(-\infty;1)$. **B.** $\left(1;\dfrac{7}{3}\right)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $\left(\dfrac{7}{3};3\right)$.

Giải

TXĐ $D=\mathbb{R}$

Ta có $f'(x)=\dfrac{\left(3x^2-10x+7\right)\left(x^3-5x^2+7x-3\right)}{\left|x^3-5x^2+7x-3\right|}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x^2-10x+7=0\\ x^3-5x^2+7x-3=0\end{array}\right.$

Câu 4. Cho hàm số $f(x)=x^4+x^3-5\left|x^2-1\right|$. Hỏi hàm số $f'(x)$ đổi dấu tại bao nhiêu điểm

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 2.

Giải

TXĐ $D=\mathbb{R}$

Ta có $f(x)=x^4+x^3-5\left|x^2-1\right|=\begin{cases}x^4+x^3-5x^2+5\ khi\ x^2-1\ge 0\\ x^4+x^3+5x^2-5\ khi\ x^2-1<0\end{cases}$

Khi đó $f'(x)=\begin{cases}4x^3+3x^2-10x\ khi\ x^2-1\ge 0\\ 4x^3+3x^2+10x\ khi\ x^2-1\le 0\end{cases}$

Phương trình $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}4x^3+3x^2-10x=0\\x^2-1\ge 0\end{cases}\\\begin{cases}4x^3+3x^2+10x=0\\x^2-1<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=\dfrac{5}{4}\\x=-2\end{array}\right.$

Biểu diễn dấu $f'(x)$ trên trục số

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
$f(x)$		-	0	+	||	-	0	+	||	-	0	+	

Vậy $f'(x)$ đổi dấu tại 5 điểm

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2-2x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=-2f(x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-2;0)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=-2f'(x)=-2(x^2-2x)$.

$g'(x)>0 \Leftrightarrow x^2-2x<0 \Leftrightarrow 0<x<2$. Suy ra, hàm số đồng biến trên $(0;2)$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x-3)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(2x+3)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(-3;-1)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

Xét hàm số $g(x)=f(2x+3) \Rightarrow g'(x)=2f'(2x+3)=2.(2x+4)(2x)$

Lập bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$	$g(-1)$	$\searrow$	$g(0)$	$\nearrow$	

Từ bảng xét dấu ta có khoản nghịch biến của hàm số $g(x)=f(2x+3)$ là $(-2;0)$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-1)(x-4)g(x)$, trong đó $g(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(x^2)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=2xf'(x^2)=2x(x^2)^2(x^2-1)(x^2-4)g(x^2)=2x^5(x+1)(x+2)(x-1)(x-2)g(x^2)$.

Vì $g(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ nên $y'>0 . \Leftrightarrow 2x^5(x+1)(x+2)(x-1)(x-2)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>2\\-2<x<-1\\0<x<1\end{array}\right.$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $g(x)=4-5f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(0;+\infty)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Lời giải

Chọn C

$g'(x)=-5f'(x)<0 \Leftrightarrow f'(x)>0$

Từ bảng biến thiên, suy ra trên khoảng $(-2;0)$ hàm số nghịch biến.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(x-2)(x+4)^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(x+1)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-5;1)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x+4)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ x=-4 \end{array}\right.$

$y'=f'(x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=1 \\ x+1=2 \\ x+1=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-5 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-5		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	0	$-$	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$			20	$\searrow$	13	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=1-6f^5(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;+\infty)$ **B.** $(-\infty;-2)$ **C.** $(0;2)$ **D.** $(-2;0)$

Lời giải

Chọn D

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(5-2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(3;4)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(-\infty;-3)$. **D.** $(4;5)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=f'(5-2x)=-2f'(5-2x)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow -2f'(5-2x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5-2x=-3 \\ 5-2x=-1 \\ 5-2x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=3 \\ x=2 \end{array}\right..$$

$$f'(5-2x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5-2x<-3 \\ -1<5-2x<1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>4 \\ 2<x<3 \end{array}\right.;\ f'(5-2x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5-2x>1 \\ -3<5-2x<-1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<2 \\ 3<x<4 \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên hàm số $y = f(5-2x)$ đồng biến trên khoảng $(4;5)$.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $g(x) = f(x^2-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(2;+\infty)$. **<u>B</u>.** $(1;2)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Lời giải

<u>Chọn B</u>

$g(x) = f(x^2-2x)$

$g'(x) = (2x-2)f'(x^2-2x)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (2x-2)f'(x^2-2x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-2=0 \\ f'(x^2-2x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x=-1 \\ x^2-2x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗	

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;0)$, $(1;2)$.

Câu 13. Cho hàm số $f'(x)$ có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y = f(x^2+2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;1)$. **B.** $(-4;-3)$. **C.** $(0;1)$. **<u>D</u>.** $(-2;-1)$.

Lời giải

Ta có: Đặt: $y = g(x) = f(x^2+2x)$; $g'(x) = \left[f(x^2+2x)\right]' = (2x+2).f'(x^2+2x)$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left(2x+2\right).f'(x^2+2x)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x+2=0\\ f'(x^2+2x)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x^2+2x=-2(VN)\\ x^2+2x=1\\ x^2+2x=3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=-1-\sqrt{2}\\ x=-1+\sqrt{2}\\ x=1\\ x=-3\end{array}\right.$$

(Trong đó: $x=-1-\sqrt{2}; x=-1+\sqrt{2}$ là các nghiệm bội chẵn của PT: $x^2+2x=1$)

+ Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		$-1-\sqrt{2}$		-1		$-1+\sqrt{2}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$			$\searrow$				$\nearrow$			$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra hàm số $y=f\left(x^2+2x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-2;-1\right)$.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Hỏi hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-3}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(-3;-2)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(-1;2)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Chọn A

Ta luôn có: $f(x)\le 2<3 \to$ phương trình mẫu số $f(x)-3=0$ vô nghiệm.

Suy ra hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-3}$ có tập xác đinh là $\mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y'=-\dfrac{f'(x)}{[f(x)-3]^2}$

Hàm số nghịch biến thì: $y'=-\dfrac{f'(x)}{[f(x)-3]^2}<0 \Leftrightarrow f'(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\in(-\infty;-2)\\ x\in(1;3)\end{array}\right.$

Câu 14. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm $f'\left(x\right)$ như hình vẽ bên dưới.

x	$-\infty$		-3		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $g\left(x\right)=f\left(4-\sqrt{4-x^2}\right)$ đồng biến trên:

A. $\left(0;1\right)$. **B.** $\left(1;2\right)$. **C.** $\left(-1;0\right)$. **D.** $\left(-3;-1\right)$.

Chọn C

Cách 1: Tập xác định của hàm số $f\left(4-\sqrt{4-x^2}\right)$ là $\left[-2;2\right]$

Đạo hàm: $g'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}f'\left(4-\sqrt{4-x^2}\right)$

Hàm số đồng biến thì $g'(x)\ge 0$. Từ tập xác định ta có:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(0;2)\\ f'\left(4-\sqrt{4-x^2}\right)\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-2;0)\\ f'\left(4-\sqrt{4-x^2}\right)\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(0;2)\\ \left[\begin{array}{l}-3\le 4-\sqrt{4-x^2}\le 1\\ 4-\sqrt{4-x^2}\ge 4\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-2;0)\\ \left[\begin{array}{l}1\le 4-\sqrt{4-x^2}\le 4\\ 4-\sqrt{4-x^2}\le -3\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(0;2)\\ \left[\begin{array}{l}4-\sqrt{4-x^2}\le 1\\ VN\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-2;0)\\ \left[\begin{array}{l}1\le 4-\sqrt{4-x^2}\\ VN\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(0;2)\\ \sqrt{4-x^2}\ge 3\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-2;0)\\ \sqrt{4-x^2}\le 3\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(0;2)\\ VN\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-2;0)\\ \forall x\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in(-2;0).$$

Cách 2: Ghép trục để tối ưu. $g(x)=f\left(4-\sqrt{4-x^2}\right)=f(u), u=4-\sqrt{4-x^2}$, với $x\in[-2;2]$

Bảng biến thiên kép

x	-2		0		2
u	4	$\leftarrow$	2	$\rightarrow$	4
$f(u)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $g(x)=f\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(5;6)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;5)$.

Chọn D

Cách 1:

Tập xác định của hàm số $g(x)=f\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)$ là $D=[-1;7]$

Đạo hàm: $g'(x)=\dfrac{3-x}{\sqrt{7+6x-x^2}}f'\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)$

Hàm số nghịch biến: $g'(x)\le 0$

Từ tập xác định, ta có các trường hợp sau:

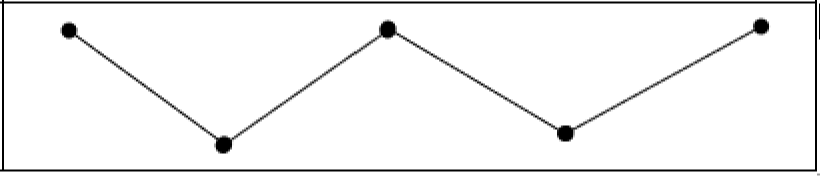
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-1;3)\\ f'\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(3;7)\\ f'\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)\ge 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-1;3)\\ -1\le -1+\sqrt{7+6x-x^2}\le 2\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(3;7)\\ \left[\begin{array}{l}-1+\sqrt{7+6x-x^2}\le -1\\ -1+\sqrt{7+6x-x^2}\ge 2\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-1;3)\\ \sqrt{7+6x-x^2}\le 3\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(3;7)\\ \sqrt{7+6x-x^2}\ge 3\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-1;3)\\ \left[\begin{array}{l}x\le 3-\sqrt{7}\\ x\ge 3+\sqrt{7}\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(3;7)\\ 3-\sqrt{7}\le x\le 3+\sqrt{7}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x\le 3-\sqrt{7}\\ 3<x\le 3+\sqrt{7}\end{array}\right..$$

Cách 2: Sử dụng phương pháp ghép trục

$g(x)=f\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)=f(u)$ với $u=-1+\sqrt{7+6x-x^2}$ và $x\in[-2;2]$

Bảng biến thiên kép

x	-1	$3-\sqrt{7}$	3	$3+\sqrt{7}$	7
u	-1	2	3	2	4
$f(u)$					

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-1;3-\sqrt{7}\right)$ và $\left(3;3+\sqrt{7}\right)$

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ không âm với mọi giá trị x và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, bảng xét dấu của biểu thức $f'(x)$ như bảng dưới đây.

x	$-\infty$		-2		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=g(x)=\dfrac{f\left(x^2-2x\right)}{f\left(x^2-2x\right)+1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $\left(-2;\dfrac{5}{2}\right)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Chọn C

$$g'(x)=\frac{\left(x^2-2x\right)'.f'\left(x^2-2x\right)}{\left(f\left(x^2-2x\right)+1\right)^2}=\frac{(2x-2).f'\left(x^2-2x\right)}{\left(f\left(x^2-2x\right)+1\right)^2}.$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-2=0\\ f'\left(x^2-2x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2-2x=-2\\ x^2-2x=-1\\ x^2-2x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1\\ x=3\end{array}\right.$$

Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu ta có hàm số $y=g\left(x\right)$ nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;-1\right)$ và $\left(1;3\right)$.

Câu 17. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng xét của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f\left(x^2-2\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-2\ ;\ -1\right)$. **B.** $\left(2\ ;+\infty\right)$. **C.** $\left(0\ ;2\right)$. **D.** $\left(-1\ ;0\right)$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $y=g\left(x\right)=f\left(x^2-2\right)$

Ta có: $g'\left(x\right)=2xf'\left(x^2-2\right)$, hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(x^2-2\right)$ nghịch biến khi và chỉ khi

$$g'\left(x\right)\le 0\Leftrightarrow xf'\left(x^2-2\right)\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\ f'\left(x^2-2\right)\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 0\\ f'\left(x^2-2\right)\ge 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\ x^2-2\le 2\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 0\\ x^2-2\ge 2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0\le x\le 2\\ x\le -2\end{array}\right.$$

Vậy hàm số $y=f\left(x^2-2\right)$ nghịch biến trên $\left(0\ ;2\right)$

Câu 18. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng xét dấu đạo hàm như ở bảng sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hỏi hàm số $f\left(x+\frac{1}{x}\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\frac{1}{2};0\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{2};2\right)$. **C.** $\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Từ gt ta có BBT của $g(x)=f\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$g'(x)=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)f'\left(x+\frac{1}{x}\right)$. $g'(x)=0\Leftrightarrow\left(1-\frac{1}{x^2}\right)f'\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-\frac{1}{x^2}=0\\ f'\left(x+\frac{1}{x}\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1\end{array}\right.$$

BXD của $g'(x)$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

Hàm số nghịch biến trên $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$. Chọn **A.**

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$, biết rằng $f'(-x)=x^2+2x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=-2f(x)$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-2;0)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $-x=t\Rightarrow f(t)=(-t)^2+2(-t)=t^2-2t$

Ta có: $y'=-2f'(x)=-2x^2+4x>0\Leftrightarrow x\in(0;2)$.

Suy ra: Hàm số $y=-2f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f'(1-2x)=(2x+1)(2x-6)(1-x)$. Hàm số $y=f\left(x^2\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

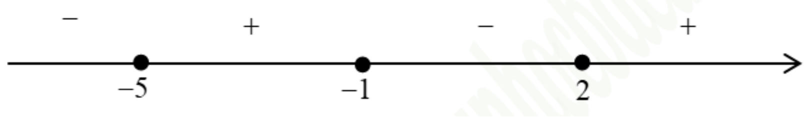
A. $(0;1)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(-2;0)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $1-2x=t\Rightarrow 2x=1-t\Rightarrow f'(t)=\dfrac{1}{2}(t-2)(t+5)(t+1)$

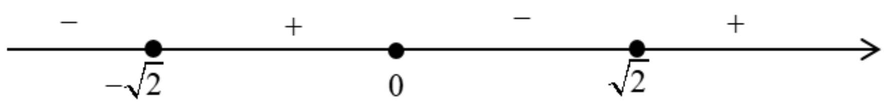
Xét dấu $f'(x)$:



Ta có: $y'=\left(f(x^2)\right)'=2x.f'\left(x^2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f'\left(x^2\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2=2\\ x^2=-5\\ x^2=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\sqrt{2}\\ x=-\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Chọn $x=1\in\left(0;\sqrt{2}\right)$ ta có $y'(1)=2.1.f'\left(1^2\right)=2.f'(1)<0.$ Do đó, cả khoảng $\left(0;\sqrt{2}\right)$ âm.

Từ đó ta có trục xét dấu của $y'=\left(f\left(x^2\right)\right)'$ như sau:



Từ trục xét dấu trên ta thấy: Hàm số $y=f\left(x^2\right)$ đồng biến trên $(-1;0)$.

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đặt $g(x)=f(1-x)$, biết dấu của $g'(x)$ như hình vẽ

x	$-\infty$		-3		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(|3-x|)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(4;7)$ **B.** $(-\infty;-1)$ **C.** $(2;3)$ **D.** $(-1;2)$

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x) = -f'(1-x)$

Từ dấu ta có thể xây dựng $g'(x)$ như sau $g'(x) = (x-2)(x)(x+3)h(x)$ với $h(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra $-f'(1-x) = (x-2)(x)(x+3)h(x)$

Đặt $1-x = t \Rightarrow f'(t) = (t+1)(t-1)(t-4)h(1-t)$

Đạo hàm $y = f(|3-x|) \Rightarrow y' = \dfrac{x-3}{|3-x|}.f'(|3-x|) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ f'(|3-x|)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ |3-x|=-1 \\ |3-x|=1 \\ |3-x|=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=2 \\ x=4 \\ x=7 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Lập trục số và xét dấu ta có kết quả hàm số đã cho đồng biến trên $(-1;2)$.

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$. Dấu của $f'(1-x)$ được cho như hình bên.

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
$f'(1-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2-3)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-2;1)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = 1-x \Rightarrow f(t) = f(1-x) \Rightarrow f'(t) = -f'(1-x)$

Ta có $f'(t) = 0 \Rightarrow f'(1-x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-1 \\ t=-2 \end{array}\right.$

$f'(t) > 0 \Leftrightarrow f'(1-x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ 2<x<3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t>1 \\ -2<t<-1 \end{array}\right.$

Dấu của $f'(t)$

t	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Mặt khác $g'(x) = 2x.f'(x^2-3)$

Nên $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x.f'(x^2-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(x^2-3)=0 \end{array}\right.$

Ta có $f'(x^2-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3=1 \\ x^2-3=-1 \\ x^2-3=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 2 \\ x=\pm\sqrt{2} \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu của $g'(x)$

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x^2-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $g'(x)$ suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0;1)$ suy ra đáp là **D.**

Câu 23. Cho hàm đa thức $y=f(x)$. Nghiệm của bất phương trình $f'(3-2x)\geq 0$ là tập $(-\infty;-1]\cup[0;2]$. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(1;5)$. **D.** $(5;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

◆ Xét $y'=f'(x)\leq 0$.

Đặt $x=3-2t$, ta có

$$f'(3-2t)\leq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1\leq t\leq 0\\ 2\leq t\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1\leq\dfrac{3-x}{2}\leq 0\\ 2\leq\dfrac{3-x}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2\leq 3-x\leq 0\\ 4\leq 3-x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3\leq x\leq 5\\ x\leq -1\end{array}\right.$$

Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(3;5)$

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f'(x-1)=(x-1)^2(x-10)(x-5)^2$. Hàm số $g(x)=f(x^2)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

A. $(-2;2)$. **B.** $(-\infty;-3)$. **C.** $(-\infty;-3)\cup(0;3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải.

Đặt $x-1=t\Rightarrow x=t+1$ suy ra $f'(t)=t^2(t-9)(t-4)^2$

Ta có $g'(x)=2xf(x^2)=2x^5(x^2-9)(x^2-4)^2$;

$$g'(x)=0\Leftrightarrow 2x^5(x^2-9)(x^2-4)^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm 3.\\ x=\pm 2\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		-2		0		2		3		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta **chọn D.**

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đặt $h(x)=f(2-x)$, biết $h'(x)=(x-1)^2(2x-x^2)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hỏi số thực nào dưới đây thuộc khoảng đồng biến của hàm số $g(x)=f(x^2-2x+2)$?

A. -2. **B.** -1. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có $h'(x)=-f'(2-x)=(x-1)^2(2x-x^2)\Rightarrow f'(2-x)=(x-1)^2(x^2-2x)$

Đặt $2-x=t\Rightarrow x=2-t$ suy ra $f'(t)=(2-t-1)^2\left((2-t)^2-2(2-t)\right)=(t-1)^2(t^2-2t)$

Ta có $g'(x)=2(x-1)f'(x^2-2x+2)$

$$=2(x-1)\left[(x^2-2x+2-1)^2\left((x^2-2x+2)^2-2(x^2-2x+2)\right)\right]$$

$$=2(x-1)^5\left[(x-1)^4-1\right].$$

Xét $2(x-1)^5\left[(x-1)^4-1\right]>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x<1\\ x>2\end{array}\right.$.

Suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(0;1)$, $(2;+\infty)$.

Vậy số 3 thuộc khoảng đồng biến của hàm số $g(x)$. **Chọn B.**

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, biết rằng $f'(x+2)=x^2-3x+2$. Hàm số $y=f(x^2+4x+7)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(-3;-1)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-2;0)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x+2)=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)\Rightarrow f'(x)=(x-2-1)(x-2-2)=(x-3)(x-4)$.

Khi đó: $f'(x)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=4\end{array}\right.$. Đặt $y=g(x)=f(x^2+4x+7)$.

Ta có: $g'(x)=(2x+4).f'(x^2+4x+7)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+4=0\\f'(x^2+4x+7)=0\end{array}\right.$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x^2+4x+7=3\\x^2+4x+7=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\(x+2)^2=0\\x=-1\\x=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=-1\\x=-3\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: hàm số $y=g(x)=f(x^2+4x+7)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

Câu 27. Cho hàm đa thức $y=f(x)$. Đặt $g(x)=f(x^2)$, biết rằng $g'(x)=2x^3(x^2-1)$, $\forall x\to\mathbb{R}$. Hàm số $h(x)=-2f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x)=2xf'(x^2)=2x^3(x^2-1)\Rightarrow f'(x^2)=x^2(x^2-1)\Rightarrow f'(x)=x(x-1)$

Ta có $h(x)=-2f(x)\Rightarrow h'(x)=-2f'(x)\Rightarrow h'(x)=-2(x^2-x)$.

Do đó $g'(x)<0\Leftrightarrow -2(x^2-x)<0\Leftrightarrow x^2-x>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>1\\x<0\end{array}\right.$.

Vậy hàm số $g(x)=-2f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(1-x^2)=x^4+x^2$. Hàm số $g(x)=f\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)$ nghịch biến trên:

A. $(5;6)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;5)$.

Chọn D

$f'(1-x^2)=x^4+x^2$

$f'(x)=x^2-3x+2$ Tập xác định của hàm số $g(x)$ là $D=[-1;7]$

Đạo hàm: $g'(x)=\dfrac{3-x}{\sqrt{7+6x-x^2}}f'\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)$

Hàm số nghịch biến: $g'(x)\le 0$

Từ tập xác định, ta có các trường hợp sau:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-1;3)\\ f'\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(3;7)\\ f'\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)\ge 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-1;3)\\ -1\le -1+\sqrt{7+6x-x^2}\le 2\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(3;7)\\ \left[\begin{array}{l}-1+\sqrt{7+6x-x^2}\le -1\\ -1+\sqrt{7+6x-x^2}\ge 2\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-1;3)\\ \sqrt{7+6x-x^2}\le 3\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(3;7)\\ \sqrt{7+6x-x^2}\ge 3\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-1;3)\\ \left[\begin{array}{l}x\le 3-\sqrt{7}\\ x\ge 3+\sqrt{7}\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(3;7)\\ 3-\sqrt{7}\le x\le 3+\sqrt{7}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x\le 3-\sqrt{7}\\ 3<x\le 3+\sqrt{7}\end{array}\right..$$

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-1;3-\sqrt{7}\right)$ và $\left(3;3+\sqrt{7}\right)$

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, biết rằng $f'(x+2)=x^2-3x+2$. Hàm số $y=f\left(x^2+4x+7\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(-3;-1)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-2;0)$.

Câu 1: Chọn C

Ta có: $f'(x+2)=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)\Rightarrow f'(x)=(x-2-1)(x-2-2)=(x-3)(x-4)$.

Khi đó: $f'(x)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=4\end{array}\right.$. Đặt $y=g(x)=f\left(x^2+4x+7\right)$.

Ta có: $g'(x)=(2x+4).f'\left(x^2+4x+7\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+4=0\\ f'\left(x^2+4x+7\right)=0\end{array}\right.$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\ x^2+4x+7=3\\ x^2+4x+7=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\ (x+2)^2=0\\ x=-1\\ x=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=-1\\ x=-3\end{array}\right..$$

Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: hàm số $y=g(x)=f\left(x^2+4x+7\right)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm $f'(x)$như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x)=f\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)$ nghịch biến trên:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

A. $(5;6)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;5)$.

Chọn D

Cách 1:

Tập xác định của hàm số $g(x)=f\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)$ là $D=[-1;7]$

Đạo hàm: $g'(x)=\dfrac{3-x}{\sqrt{7+6x-x^2}}f'\left(-1+\sqrt{7+6x-x^2}\right)$

Hàm số nghịch biến: